

85846

**NON-İZOTROPİK UZAKLIĞA BAĞLI
RIESZ POTANSİYELİNİN TOTAL DİFERENSİYELLENEBİLİRLİĞİ**

Derya KÖKER (ÇAVUŞ)

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

85846

Ağustos, 1999

ANKARA

Derya KÖKER (ÇAVUŞ) tarafından hazırlanan NON-İZOTROPİK UZAKLIĞA
BAĞLI RİESZ POTANSİYELİNİN TOTAL DİFERENSİYELLENEBİLİRLİĞİ adlı
bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Yrd.Doç.Dr. Esin İnan ÇINAR
Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak
kabul edilmiştir.

Başkan : ..Doç.Dr.....Tünay.....BİLGİN.....

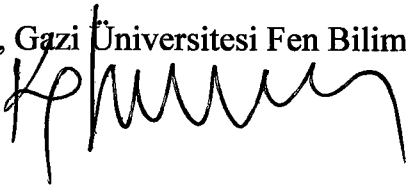
Üye : ..Yrd.Doç.Dr.....Esin.....İnan.....ÇINAR.....

Üye : ..Yrd.Doç.Dr.....Hakkı.....DURLU.....

Üye : ..

Üye : ..

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. RİESZ POTANSİYELİNİN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ	10
3. RİESZ POTANSİYELİNİN DİFERENSİYELLENEBİLİRLİĞİ	24
4. NON-İZOTROPİK ÇEKİRDEĞE BAĞLI RİESZ POTANSİYELİ	42
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	54

**NON-İZOTROPİK UZAKLIĞA BAĞLI
RIESZ POTANSİYELİNİN TOTAL DİFERENSİYELLENEBİLİRLİĞİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Derya KÖKER (ÇAVUŞ)

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ağustos 1999

ÖZET

Bu çalışmada, Riesz potansiyelinin tanımı yapılmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş bölümü olup, bu bölümde Riesz potansiyelinin tarihi gelişimi ve çeşitli özellikleri verilmiştir. Daha sonra Riesz potansiyelinin bir genelleştirilmiş hali olan non-izotropik çekirdeğe bağlı Riesz potansiyelinin tanımı verilmiştir.

İkinci bölümde diferensiyellenebilme için gerekli özellikler açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde Riesz potansiyelinin diferensiyellenebilirliği gösterilmiştir.

Dördüncü bölüm orijinal olup, non-izotropik çekirdeğe bağlı, yani λ - Riesz potansiyelinin bazı özellikleri incelenmiştir.

Bilim Kodu :

Anahtar Kelimeler : Potansiyel, Riesz potansiyeli, Tamamen diferensiyellenebilirlik,
Zayıf tekillik, İntegral operatörünün çekirdeği

Sayfa Adedi : 52

Tez Yöneticisi : Yrd.Doç.Dr. Esin İnan ÇINAR

IN NON-ISOTROPIC RIESZ POTENTIALS DIFFERENTIABILITY**(M.Sc. Thesis)****Derya KÖKER (ÇAVUŞ)****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****August 1999****ABSTRACT**

In this study, the definition of Riesz potentials is given and after that some main especialities are given.

This thesis is consist of four parts. In the first part which is the introduction part, it was given the historical developments of Riesz potential and different properties of it. After that it was given that the definition of Riesz potential according to the non-isotropic kernel.

In the second part, it was given some necessary properties to be differentiated.

In the third part, Riesz potentials' differentiability were shown..

The fourth part is original. In this part it was given some necessary properties of λ - Riesz potentials according to the non-isotropic kernel.

Science Code :

Key words : Potential, Riesz potential, Totally differentiability, Weak singularity, Kernel of an integral operator.

Page Number : 52

Adviser : Assoc.Prof.Dr. Esin İnan ÇINAR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her safhasında bana yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Esin İnan ÇINAR'a, tezin yazılmasındaki yardımlarından dolayı eşim Hayati ÇAVUŞ'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen çok sevdiğim aileme de sonsuz teşekkür ederim.



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil		Sayfa
Şekil 1.1.	$B(x_0, 1)$ yuvarı	20



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

$$L_p(R^n) : \left\{ f : \left(\int_{R^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda f(x) = \frac{\partial^\lambda}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \dots \partial x_n^{\lambda_n}} f(x) : f \text{ fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi.}$$

$\llbracket a \rrbracket$	: a 'nın tam değeri
$V(B(x,1))$	: x merkezli birim yarıçaplı yuvarın hacmi
$o(1)$	: Limit durumunda sıfıra yaklaşan terim
$ x ^{\alpha-n}$	: Riesz çekirdeği
S^{n-1}	: Birim küre
$d\Gamma$	: Kürenin hacim elemanı

I. GİRİŞ

Bu çalışma Riesz potansiyelinin bir genelleştirilmesi olan non-izotropik çekirdekli potansiyellerinin araştırılmasından meydana gelmiştir. Amaç, tanımladığımız potansiyelin özelliklerini incelemektir.

Bir değişkenli halde bu tür potansiyeller ilk defa Weyl, H. (Weyl 1917) tarafından 1917 yılında araştırılmıştır. Weyl'in araştırdığı integral,

$$0 < \alpha < 1, \quad t \geq 0 \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\tau + t) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}$$

şeklinde dir. Weyl bu integrale Riemann-Liouville anlamında türev adını vermiştir. Bu integralin fonksiyonlar teorisi ve matematik analizin birçok dallarında geniş uygulamaları vardır.

Riesz potansiyeli adı altında tanımlanmış olan

$$(I_\alpha f)(x) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \quad 0 < \alpha < n \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

integrali ilk defa 1949 yılında Riesz (Riesz 1949) tarafından incelenmiştir.

(1.1) integralinin,

$$(I_\alpha f)(x) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \quad 0 < \alpha < n \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

şeklinde de yazılabileceği açıkça görülüyor. Potansiyelin bu yazılışından (1.2) integralinin f fonksiyonu ve $|x|^{\alpha-n}$ çekirdeğinin konvolüsyonu olduğu görülmektedir. f fonksiyonunun bir K çekirdeği ile konvolüsyonu $f * K$ şeklinde gösterilir ve konvolüsyon tanımına göre ,

$$(f * K)(x) = \int_{R^n} f(y)K(x-y)dy \dots\dots\dots(1.3)$$

dir (Stein 1970). Yani Riesz potansiyeli (1.3)'de gösterilen operatörler sınıfının bir özel halidir. Bu operatörler sınıfına singüler integraller de dahildir. Görüldüğü gibi Riesz potansiyelinin çekirdeği olan $K(x) = |x|^{\alpha-n}$ fonksiyonunun koordinat başlangıcında zayıf tekilliği mevcuttur.

$K(x) = |x|^{\alpha-n}$ çekirdekli konvolüsyonlara singüler integraller denir. Yani potansiyellerden farklı olarak singüler integrallerinin çekirdeklerinin integrallenemeyen tekillikleri vardır.

Tüm bunlar (1.3) konvolüsyon operatörünün çekirdeğinin integrallenemeyen tekilliği olunca buna singüler integral, zayıf (integrallenebilen) tekilliği olunca da potansiyel denilebileceğini gösteriyor (Landkoff 1972, Stein 1970).

Bu tanımdan çekirdeği $\log|x|$ olan konvolüsyonların da potansiyeller sınıfına dahil olacağı açıkça görülmektedir (Mizuta 1987). Bu tür çekirdeğin tekilliği zayıftır. Çekirdeği $\log|x|$ olan konvolüsyon operatörüne logaritmik potansiyel denir (Landkoff 1972, Mizuta 1987).

Singüler integraller ve potansiyeller teorisinde en çok kullanılan işlemlerden biri Fourier dönüşümüdür. $L_1(R^n)$ uzayından bir f fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\tilde{f}$ veya Ff şeklinde gösterilir ve

$$Ff(x) = \int_{R^n} e^{-2\pi i(x,y)} f(y)dy$$

şeklinde tanımlanır (Stein 1970). Burada (x,y) n-boyutlu $x = (x_1, \dots, x_n)$ $y = (y_1, \dots, y_n)$ vektörlerinin iç çarpımıdır, $dy = dy_1 \dots dy_n$ R^n de Lebesgue ölçümüdür. $\tilde{f}(-x)$ ' e ters fourier dönüşümü denir. Bu dönüşüm $F^{-1}f$ şeklinde de gösterilir.

Genelleşmiş fonksiyonlar (Distribution = Dağılım) teorisi yardımıyla Fourier dönüşümü ve onun tersi geniş fonksiyon sınıfları için de kullanılabilir. (1.3) biçimindeki konvolüsyon operatörüne Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$F(f * K)(x) = Ff.FK$$

eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan Fourier dönüşümünün özelliğine göre (Stein 1971) keyfi bir P polinomu için,

$$P(D)(Ff)(x) = (FP(-2\pi i y)f(y))(x) \dots\dots\dots (1.4)$$

Burada $P(x_1, \dots, x_n)$ değişkenlerine bağlı polinom

$$P(x) = \sum_{\alpha} C_{\alpha} x^{\alpha}, \quad \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \text{ katlı indis, yani } \alpha_k \text{ lar negatif olmayan}$$

tam sayılar, $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ve D diferansiyel operatörün gösterimidir.

$$P(D) \text{ ifadesi, P polinomunda } x^{\alpha} \text{ 'nın yerine } D^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

yazılacağını gösteriyor. Bu durumda P(D) operatörüne, P(x) polinomu ile doğrulmuş diferansiyel polinom denir.

Özel halde P(D) Laplace operatörü, yani

$$P(D)(f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

ise (1.4) formülünden,

$$F\Delta f(x) = -4\pi^2 |x|^2 Ff(x)$$

olduğu görülür. Buradan

$$F(-\Delta)f(x) = 4\pi^2 |x|^2 Ff(x)$$

dir.

Stein 1971'de Laplace operatörü için yazılan formülün aslında bu operatörün keyfi kuvvetleri için de var olduğu gösterilmiştir. Yani

$$F(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} f(x) = 2\pi |x|^{\beta} Ff(x)$$

dir. Aynı çalışmada $-n < \beta < 0$ durumunda Laplace operatörünün kesirli kuvvetleri (1.2) formülü ile tanımlanmış Riesz çekirdeğinin kuvvetleri ile aynı olduğu görülüyor ((1.2) formülünün $\alpha = -\beta$ için yazıldığını belirtelim).

Riesz potansiyellerinin Fourier dönüşümü ve Laplace operatörü arasındaki ilişkileri bu potansiyellerin matematiğin birçok dalında kullanılan çok önemli bir operatör olduğunu gösteriyor. Bu operatörün L_p uzayındaki davranışına ait önemli bir teoremi vermek için operatörlerin tiplerinin tanımını hatırlatalım (Stein 1970).

Eğer T lineer operatör olmak üzere herhangi bir $q > 1$ için

$$\|T(f)\|_q \geq C_{p,q} \|f\|_p$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T operatörüne kuvvetli (p, q) – tipli operatör denir.

Herhangi bir $\lambda > 0$ için

$$m\{x : |T(f)| > \lambda\} \leq \left(C_{p,q} \frac{\|f\|_p}{\lambda} \right)^q$$

ise T operatörüne zayıf (p, q) -tipli operatör denir.

Hardy-Littlewood-Sobolev teoremine göre $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{n}$

iken Riesz potansiyelleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p$$

Burada $A_{p,q}$ yalnız p ve q ' ya bağlı olan bir sabittir. $p=1$ durumunda ise Riesz potansiyeli aynı teoreme göre zayıf $(1, q)$ tipli operatördür. Bu halde

$\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}$ olur) yani $\alpha > 0$ için

$$m\{x : |I_\alpha| > \lambda\} \leq \left(\frac{A \|f\|_1}{\lambda} \right)^q$$

dir (Stein 1970).

Non-izotropik çekirdekli Riesz potansiyelleri için bu teorem (Çınar,1997) yılında verilmiştir.

Bu teoremden Riesz potansiyellerinin L_p den L_p ye dönüşüm yapamadığı görülüyor.

Yukarıdaki açıklamalardan konvolüsyon operatörleri sınıfında Riesz potansiyelinin iyi incelenmiş operatörler olduğu görülmektedir. Bu operatörler yardımıyla fonksiyonlar teorisinde potansiyel uzayları tanımlanmıştır (Gadjiev 1988, Stein 1970).

Örneğin Riesz potansiyeli uzayının elemanları $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f \in L_p(R^n)$ şeklindeki f fonksiyonlarından oluşur. Bu uzaylarda norm aşağıdaki gibi tanımlanır (Stein 1970).

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left\| (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f \right\|_{L_p(R^n)}$$

Bu tür uzaylar düzgün manifoldlar üzerinde de tanımlanabilir. Örneğin eğer R^n de küresel koordinatlara geçerse, o zaman Laplace operatörü iki kısımdan oluşur. Birincisi Radyal (yani yarıçapa bağlı) kısım ikincisi küresel kısım (yani yalnızca açılara bağlı kısım).

Laplace operatörünün bu ikinci küresel kısmına küre üzerinde tanımlanmış Laplace – Beltrami operatörü denir (Miklin 1962). Bu operatör δ ile gösterilir.

Yukarıdaki gösterimle Riesz potansiyeli uzayı δ operatörü yardımıyla küre üzerinde de tanımlanabilir (Gadjiev 1982). Küre üzerinde tanımlanmış bu uzay singüler integral teorisinde çok önemli bir yer tutar. Singüler integrali bir operatör gibi karakterize eden sembolün (yani singüler integralin çekirdeğinin genelleştirilmiş fonksiyon anlamında Fourier dönüşümü) özellikleri genellikle bu uzayda incelenir. Bundan dolayı sembolün küre üzerinde tanımlanmış bu uzaydaki özellikleri çok boyutlu singüler integral denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği teoremlerinde kullanılır (Gadjiev 1982, Miklin 1962).

Singüler integralin sembolü aslında küre üzerinde tanımlanmış logaritmik çekirdekli potansiyeldir (Gadjiev 1982, Miklin 1962). Sembolün türevlerini araştırmak için bu logaritmik çekirdeğin türevlerini araştırmak zorundayız.

Yani singüler integral teorisi ve singüler integral denklemler teorisinin problemleri bizi zayıf tekillikleri olan integrallerin türevlerinin araştırılmasına götürür (Miklin 1962).

Bu tür integrallerin türevlerinin alınması, problemdeki zorluklar zayıf tekillikli çekirdeğin türevini aldıkça onun tekillik mertebesinin artmasından ibarettir. Bu nedenle zayıf tekilliği olan çekirdekli integral, türevlerini aldıktan sonra singüler integral haline dönüşebilir. Bu konuda yine zayıf tekillikli çekirdeklerin diferensiyellenmesi konusunda bazı sonuçlar vardır. Bunlardan birini hatırlatalım (Miklin, 1962).

$$r = |x - y|, \quad x, y \in R^n \quad \text{ve}$$

$$L(x) = \int_{R^n} f(y) \frac{\varphi(x, \theta)}{r^{n-1}} dy \quad \theta = \frac{x - y}{r}$$

olsun. Burada $\varphi(x, \theta)$ fonksiyonu ve onun x ve θ noktalarının kartezyen bileşenlerine göre türevleri, sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. $f(y)$ fonksiyonu Lipschitz sınıfından ve sonsuzda $f(y) = O(|x|^{-l})$, $l > 1$ şartını gerçekleyen bir fonksiyon olsun. Bu şartlar altında $L(x)$ integralinin x 'e göre birinci türevleri mevcuttur ve bu türevler $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_{R^n} f(y) \frac{\varphi(x, \theta)}{r^{n-1}} dy = \int_{R^n} f(y) \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{n-1}} \right] dy - f(x) \int_{S^{n-1}} \varphi(x, \theta) \cos(r, x_k) ds$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir. Burada S^{n-1} , R^n uzayında başlangıcı orijin olan birim küre, ds düzey alan elemanı $\cos(r, x_k)$ ise r vektörünün x_k eksenine ile yaptığı açının kosinüsüdür.

Riesz potansiyellerinin araştırılması da aynı konunun bir dalıdır. Bu potansiyeller 1949 yılında tanımlanmış olmasına rağmen bunların diferensiyellenebilme özellikleri 1983 yılında Mizuta, Y. tarafından başlanmış ve bu araştırmalar halen devam etmektedir (Mizuta 1987, 1993, Çınar 1997).

Yukarıda yazılan $L(x)$ integral operatörünün çekirdeğinin tekilliği $n-1$ inci mertebededir. Bundan farklı olarak Riesz potansiyelinin çekirdeğinin tekilliği $n-\alpha$ inci mertebededir ve burada α , n 'den küçük olmak üzere keyfi pozitif bir sayıdır. $\alpha = 1$ ve seçersek, Riesz potansiyeli $L(x)$ potansiyelinden bulunur. Yani bu özel halde söylediğimiz sonuç Riesz potansiyelinin diferensiyellenebilmesi hakkında bir önermedir. Doğal olarak $\alpha \neq 1$ olursa bu yukarıdaki sonuçtan Riesz potansiyelinin diferensiyellenebilmesi hakkında hiç bir bilgi elde edilemez.

Riesz potansiyelinin tanımından α 'nın kesir ve tamsayı olabileceği görülmektedir. $L(x)$ operatöründe $\alpha = 1$ olduğundan bu operatörün çekirdeğinin birinci türevi tekilliği singülerliğe getirir (yani tekilliğin derecesi n olur ve türevi alınmış çekirdek şeklinde olur. Bu ise $n -$ boyutlu uzayda singüler çekirdektir).

Riesz potansiyelinde ise tekilliğin mertebesi $n - \alpha$ olduğundan bu tekilliği türevleme yöntemi ile singülerliğe getirmek için bir çok adım gerekir. Örneğin; α tam ise α tane adım gerekir. Bundan dolayı Riesz potansiyelinin ardışık türevlerini araştırma imkanı buluruz.

Mizuta, Y. 1987 yılındaki çalışmasında tamamen (total) diferensiyellenebilme tanımını kullanmıştır (Stein 1970).

Tanım 1.1 : (Tamamen diferensiyellenebilirlik)

sağlanacak şekilde en fazla $m -$ inci dereceden olan bir p polinomu varsa bu $U(x)$ fonksiyonuna tamamen m defa diferensiyellenebilir denir.

Yukarıda tanımlandığı gibi Riesz potansiyeli çekirdeği olan bir integral operatördür. Yani bu integral operatörünün çekirdeği Euclid uzaklığına bağlı bir fonksiyondur.

Euclid uzaklığı

$$\rho(x) = |x|$$

birinci mertebeden homojen bir fonksiyondur. Yani keyfi bir pozitif t sayısı için ,

$$\rho(tx) = t\rho(x)$$

dir.

Buna göre Riesz potansiyelinin çekirdeği $\alpha - n$ mertebeden homojen bir fonksiyon olur. Bu çekirdeğin tüm değişkenlere göre homojenlik derecesi aynıdır. Bu tür çekirdeklere izotropik çekirdekler ve aynı şekilde uzaklıklar denir.

Fakat Gömme teorisinde, kısmi türevli denklemler teorisinde ve fonksiyon uzayları teorisinde çeşitli değişkenlere göre farklı homojenliği olan uzaklıklar ve çekirdeklerle karşılaşılabilir. Bu tür çekirdeklere ve uzaklıklara non-izotropik çekirdekler ve uzaklıklar denir.

Örneğin;

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R^+ , \quad |\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\|x\|_\lambda = (|x_1|^{\frac{1}{\lambda_1}} + \dots + |x_n|^{\frac{1}{\lambda_n}})^{\frac{|\lambda|}{n}}$$

şeklinde bir uzaklık tanımlayalım. Bu uzaklık bir non-izotropik uzaklıktır. Biz buna kısaca λ -uzaklık diyelim. Bu uzaklıkta,

$$x_1' \text{ e göre homojenlik derecesi } \frac{1}{\lambda_1}$$

.

.

$$x_n' \text{ e göre homojenlik derecesi } \frac{1}{\lambda_n}$$

dir.

Buna göre bu uzaklıklarda homojenliğe bir başka tanım vermek gerekir.

Eğer $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ multi-indeks $t > 0$ olmak üzere, ρ fonksiyonuna $\rho(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik sağlanıyorsa, a -inci mertebeden λ homojen fonksiyon denir.

$$\rho(t^{\lambda_1} x_1, \dots, t^{\lambda_n} x_n) = t^{\frac{|\lambda|}{a}} \rho(x_1 \dots x_n)$$

Bu tanımdan görülmüştür ki yukarıda tanımladığımız λ -uzaklık birinci mertebeden λ -homojen bir fonksiyondur.

Riesz potansiyelinin Euclid uzaklığı ile ilişkili olmasına benzer şekilde λ uzaklığına bağlı Riesz potansiyelini tanımlamak mümkündür.

$$\int_{R^n} E_\alpha(x-y) f(y) dy = \int_{R^n} \|x-y\|_\lambda^{\alpha-n} f(y) dy$$

İşte bu çalışmada λ -Riesz potansiyeli adını verdiğimiz bu potansiyelin bazı özellikleri incelenecektir.

II. RİESZ POTANSİYELİNİN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Riesz potansiyelinin yakınsaklığı ile ilgili teoremler ve birtakım özellikler verilecektir.

Tanım 2.1 : $\alpha \in N, 0 < \alpha < n$ olmak üzere

$$R_\alpha f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

integralini Riesz potansiyeli olarak adlandırıyoruz. Burada f fonksiyonu $L_p(R^n)$ uzayındandır.

Teorem 2.1: f negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$I_1 = \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy < \infty \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

şartı ile

$$I_2 = \int_{R^n} \frac{f(y)}{(1+|y|)^{n-\alpha}} dy < \infty \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

şartı birbirine denktir (Mizuta, 1993) .

İspat : (2.2) 'nin var olduğunu kabul edip (2.3)'ü gösterelim.

Yani $I_1 < \infty \implies I_2 < \infty$ olduğunu gösterelim.

$$I_2 = \int_{R^n} \frac{f(y)}{(1+|y|)^{n-\alpha}} dy = \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(1+|y|)^{n-\alpha}} dy + \int_{B(x,1)} \frac{f(y)}{(1+|y|)^{n-\alpha}} dy$$

$n > \alpha$ olduğundan ikinci integraldeki payda pozitiftir. Böylece ,

$$I_2 \leq \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(1+|y|)^{n-\alpha}} dy + \int_{B(x,1)} f(y) dy$$

f fonksiyonu $L_p(R^n)$ den olduğu için ikinci integral sonludur.

Bu durumda,

$$I_2 \leq \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(1+|y|)^{n-\alpha}} dy + C$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(|x-y|^{n-\alpha})} \left(\frac{|x-y|}{1+|y|} \right)^{n-\alpha} dy + C \\
&\leq \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(|x-y|^{n-\alpha})} \left(\frac{|x|+|y|}{1+|y|} \right)^{n-\alpha} dy + C \\
&= \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(|x-y|^{n-\alpha})} \left(\frac{|x|}{1+|y|} + \frac{|y|}{1+|y|} \right)^{n-\alpha} dy + C
\end{aligned}$$

Sağ taraftaki parantez içindeki kesrin $|x|$ 'den , ikinci kesrin ise 1'den küçük olduğu açıktır. Böylece ,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(|x-y|^{n-\alpha})} (|x|+1)^{n-\alpha} dy + C \\
&\leq (|x|+1)^{n-\alpha} \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(|x-y|^{n-\alpha})} dy + C \\
&= (|x|+1)^{n-\alpha} I_1 + C
\end{aligned}$$

Hipotez uyarınca $I_1 < \infty$ olduğu için bundan daha küçük kalan I_2 ifadesi de yakınsaktır.

Tersini yani $I_2 < \infty \implies I_1 < \infty$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(|x-y|^{n-\alpha})} dy = \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(1+|y|)^{n-\alpha}} \left(\frac{1+|y|}{|x-y|} \right)^{n-\alpha} dy \\
&= \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(1+|y|)^{n-\alpha}} \left(\frac{1+|y-x+x|}{|x-y|} \right)^{n-\alpha} dy
\end{aligned}$$

Buradan,

$$I_1 \leq \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(1+|y|)^{n-\alpha}} \left(\frac{1}{|x-y|} + \frac{|x-y|}{|x-y|} + \frac{|x|}{|x-y|} \right)^{n-\alpha} dy$$

dir.

$y \in R^n - B(x,1) \Rightarrow |x - y| \geq 1$ olduğundan,

$$I_1 \leq \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(1 + |y|)^{n-\alpha}} (2 + |x|)^{n-\alpha} dy$$

$$I_1 \leq (2 + |x|)^{n-\alpha} \int_{R^n - B(x,1)} \frac{f(y)}{(1 + |y|)^{n-\alpha}} dy$$

bulunur.

İntegrallenme bölgesini büyütürsek,

$$I_1 \leq (2 + |x|)^{n-\alpha} \int_{R^n} \frac{f(y)}{(1 + |y|)^{n-\alpha}} dy$$

böylece,

$$I_1 \leq (2 + |x|)^{n-\alpha} I_2$$

elde edilir. Hipotez uyarınca bu integral yakınsak olduğu için bundan daha küçük kalan (2.2) integrali de yakınsaktır. Böylece ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 2.2:

$r \in \mathbb{N}$ ve $j=1,2,\dots,n$ için

$$\frac{\partial^r}{\partial x_j^r} |x|^{\alpha-n} = \begin{cases} \sum_{q=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} C_q x_j^{2q} |x|^{\alpha-n-r-2q} & \text{Eğer } r \text{ çift ise } \dots\dots\dots(2.4) \\ \sum_{q=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} C_q x_j^{2q+1} |x|^{\alpha-n-r-(2q+1)} & \text{Eğer } r \text{ tek ise } \dots\dots\dots(2.5) \end{cases}$$

İspat :

$$|x|^{\alpha-n} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}$$

olduğundan $r = 1$ için,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{\alpha-n} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (x_1^2 + \dots + x_j^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\alpha-n}{2}} \\ &= \frac{\alpha-n}{2} 2x_j |x|^{\alpha-n-2} \\ &= (\alpha-n)x_j |x|^{\alpha-n-2} \\ &= C_1 x_j |x|^{\alpha-n-2} \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde $r = 2$ için,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} |x|^{\alpha-n} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (C_1 x_j |x|^{\alpha-n-2}) \\ &= C_1 |x|^{\alpha-n-2} + C_2 x_j^2 |x|^{\alpha-n-4} \end{aligned}$$

elde edilir. Keyfi çift bir doğal sayı için (2.4)'ün doğru olduğunu kabul edelim. Yani ,

$$\frac{\partial^r}{\partial x_j^r} |x|^{\alpha-n} = \sum_{q=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} C_q x_j^{2q} |x|^{\alpha-n-r-2q}$$

sağlansın. Bu formülde çift olan sayıyı $r = 2p$ şeklinde yazılırsa,

$$\frac{\partial^{2p}}{\partial x_j^{2p}} |x|^{\alpha-n} = \sum_{q=0}^p C_q x_j^{2q} |x|^{\alpha-n-2p-2q}$$

dir. Bu durumda $r = 2p + 1$ tek sayısı için (2.5) formülünün doğru olduğunu gösterelim. Yukarıdaki formülden x_j 'ye göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2p+1}}{\partial x_j^{2p+1}} |x|^{\alpha-n} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{q=1}^p C_q x_j^{2q} |x|^{\alpha-n-2p-2q} + |x|^{\alpha-n-2p} \right) \\ &= \sum_{q=1}^p C_q (x_j^{2q-1} |x|^{\alpha-n-2p-2q} + x_j^{2q+1} |x|^{\alpha-n-2p-2q-2} + x_j |x|^{\alpha-n-2p-2}) \\ &= \sum_{q=1}^p C_q x_j^{2q-1} |x|^{\alpha-n-2p-2q} + \sum_{q=1}^p C_q x_j^{2q+1} |x|^{\alpha-n-2p-2q-2} + x_j |x|^{\alpha-n-2p-2} \end{aligned}$$

bulunur.

İlk toplamda q $q+1$ ile değiştirilirse,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2p+1}}{\partial x_j^{2p+1}} |x|^{\alpha-n} &= \sum_{q=0}^{p-1} C_q |x|^{\alpha-n-2p-2(q+1)} x_j^{2(q+1)-1} \\ &\quad + \sum_{q=1}^p C_q (x_j^{2q+1} |x|^{\alpha-n-(2p+1)-(2q+1)} + x_j |x|^{\alpha-n-2p-2}) \\ &= \sum_{q=0}^{p-1} C_q x_j^{2q+1} |x|^{\alpha-n-(2p+1)-(2q+1)} + \sum_{q=0}^p C_q x_j^{2q+1} |x|^{\alpha-n-(2p+1)-(2q+1)} \\ &= C * \sum_{q=0}^p C_q x_j^{2q+1} |x|^{\alpha-n-(2p+1)-(2q+1)} \end{aligned}$$

bulunur. Keyfi doğal p sayısı için $p = \left\lfloor \frac{2p+1}{2} \right\rfloor$ olduğu açıktır. Bu nedenle p

yerine $\left\lfloor \frac{2p+1}{2} \right\rfloor$ yazılabilir. Bu durumda $r = 2p+1$ kabul edildiğinden ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2p+1}}{\partial x_j^{2p+1}} |x|^{\alpha-n} &= C * \sum_{q=0}^{\left\lfloor \frac{2p+1}{2} \right\rfloor} C_q x_j^{2q+1} |x|^{\alpha-n-(2p+1)-(2q+1)} \\ &= C * \sum_{q=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} C_q x_j^{2q+1} |x|^{\alpha-n-r-(2q+1)} \end{aligned}$$

dir. Böylece (2.5) bulunmuş olur.

Sonuç (2.2.1) :

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n), \quad \text{olmak üzere}$$

$$\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x^\lambda} |x|^{\alpha-n} = \sum_{q=0}^{\left\lfloor \frac{\lambda}{2} \right\rfloor} C_q x^{2q} |x|^{\alpha-n-2|q|-|\lambda|} \quad \text{eğer } \lambda_j \text{ 'ler çift ise}$$

$$\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x^\lambda} |x|^{\alpha-n} = \sum_{q=0}^{\left\lfloor \frac{\lambda}{2} \right\rfloor} C'_q x^{2q+1} |x|^{\alpha-n-|2q+1|-|\lambda|} \quad \text{eğer } \lambda_j \text{ 'ler tek ise}$$

dir.

Eğer λ_j 'lerin içinde aynı zamanda tek ve çift sayılar varsa o zaman bu iki formülün her ikisini de kullanmak gerekir. Örneğin kabul edelim ki λ_j 'ler içinde $\lambda_{v_1}, \dots, \lambda_{v_r}$ ler tek diğerleri ise çift sayılar olsun. Bu durumda ,

$$\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x^\lambda} |x|^{\alpha-n} = \sum_{q=0}^{\left\lfloor \frac{\lambda}{2} \right\rfloor} C_q |x|^{\alpha-n-2|q|-|\lambda|-(v_r-v_1+1)} x^{2q} x_{v_1} \dots x_{v_r}$$

dir. Bunu göstermek için bazı gösterimleri kabul edelim.

$$|\lambda|_{v_1 \dots v_r} = |\lambda| - (\lambda_{v_1} + \dots + \lambda_{v_r})$$

$$\left\lfloor \frac{\lambda}{2} \right\rfloor_{v_1 \dots v_r}, \quad \frac{\lambda_{v_1}}{2}, \dots, \frac{\lambda_{v_r}}{2} \text{ lerin dışında terimlerin tam kısmının}$$

toplamı olarak tanımlanmıştır.

$$(x^{2q})_{v_1 \dots v_r} = \frac{x^{2q}}{x_{v_1}^{2qv_1} \dots x_{v_r}^{2qv_r}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{|\lambda|_{v_1 \dots v_r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{|\lambda| - (\lambda_{v_1} + \dots + \lambda_{v_r})}$$

olsun. Bu durumda ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x^\lambda} |x|^{\alpha-n} &= \frac{\partial^{\lambda_{v_1}+\dots+\lambda_{v_r}}}{\partial x_1^{\lambda_{v_1}} \dots \partial x_r^{\lambda_{v_r}}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{|\lambda|_{v_1 \dots v_r}} |x|^{\alpha-n} \right) \\
&= \frac{\partial^{\lambda_{v_1}+\dots+\lambda_{v_r}}}{\partial x_1^{\lambda_{v_1}} \dots \partial x_r^{\lambda_{v_r}}} \left(\sum_{|q|_{v_1 \dots v_r}=0}^{\left\lfloor \frac{\lambda}{2} \right\rfloor_{v_1 \dots v_r}} C_q |x|^{\alpha-n-2|q|_{v_1 \dots v_r}-|\lambda|_{v_1 \dots v_r}} (x^{2q})_{v_1 \dots v_r} \right) \\
&= \sum_{|q|=0}^{\left\lfloor \frac{\lambda}{2} \right\rfloor} C_q |x|^{\alpha-n-2|q|_{v_1 \dots v_r}-|\lambda|_{v_1 \dots v_r}-(2q_{v_1}+1)\dots(2q_{v_r}+1)-(\lambda_{v_1} \dots \lambda_{v_r})} x_{v_1 \dots v_r}^{2q} x_{v_1}^{2q_{v_1}+1} x_{v_2}^{2q_{v_2}} \dots x_{v_r}^{2q_{v_r}+1} \\
&= \sum_{|q|=0}^{\left\lfloor \frac{\lambda}{2} \right\rfloor} C_q |x|^{\alpha-n-2|q|_{v_1 \dots v_r}-|\lambda|_{v_1 \dots v_r}-(v_r-v_1+1)} (x^{2q})_{v_1 \dots v_r}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.2 : r bir doğal sayı olmak üzere,

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r} |x|^{\alpha-n} \leq C |x|^{\alpha-n-r}$$

dir. Burada C sabit bir reel sayıdır.

İspat : (2.4) ve (2.5) formüllerine göre

$$|x_j| \leq |x| \quad \text{olduğundan}$$

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r} |x|^{\alpha-n} \leq \sum_{q=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} C_q |x|^{2q} |x|^{\alpha-n-2q-r} \quad \text{eğer } r \text{ çift ise}$$

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r} |x|^{\alpha-n} \leq \sum_{q=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} C'_q |x|^{2q+1} |x|^{\alpha-n-(2q+1)-r} \quad \text{eğer } r \text{ tek ise}$$

olduğu açıktır. Burada,

$$\sum_{q=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} C_q = C \quad \text{dersek ispat tamamlanır.}$$

Yardımcı Teorem 2.3 : Keyfi λ katlı indisi için,

$$\prod_{j=1}^n (x_j)^{\lambda_j} < |x|^{|\lambda|}$$

dir.

İspat : Tanıma göre,

$$x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_k^{\lambda_k} \dots x_n^{\lambda_n} \quad \text{olduğundan}$$

$$(x_1)^{\lambda_1} = ((x_1)^2)^{\frac{\lambda_1}{2}} < (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\lambda_1}{2}} = |x|^{\lambda_1}$$

$$(x_2)^{\lambda_2} = ((x_2)^2)^{\frac{\lambda_2}{2}} < (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\lambda_2}{2}} = |x|^{\lambda_2}$$

.

$$(x_n)^{\lambda_n} = ((x_n)^2)^{\frac{\lambda_n}{2}} < (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\lambda_n}{2}} = |x|^{\lambda_n}$$

olduğu kolayca görülür. Buradan da

$$\prod_{j=1}^n (x_j)^{\lambda_j} < |x|^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = |x|^{|\lambda|} \quad \text{elde edilir.}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de Riesz Potansiyeli için üç yardımcı teorem ispatlayalım. Bu yardımcı teoremler incelediğimiz potansiyelin önemli özelliklerini elde etmeye imkan verir. Potansiyelin çekirdeğini incelemek için ,

$$R_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n} \quad , \quad 0 < \alpha < n \quad \text{gösterimini kabul edelim.}$$

Yardımcı Teorem 2.4 : m keyfi pozitif bir tamsayı ve $y \in R^n - B(0, 2|x|)$ olmak üzere,

$$K_m(x, y) = R_\alpha(x - y) - \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} x^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right](-y)$$

olsun. Bu durumda,

$$|K_m(x, y)| \leq M|x|^{m+1}|y|^{\alpha-n-(m+1)}$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir M sayısı vardır.

İspat : $K_m(x, y)$ fonksiyonunun tanımından $R_\alpha(x - y)$ için

$$R_\alpha(x - y) = \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right](-y) + K_m(x, y) \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

eşitliğini buluruz. Diğer taraftan $R_\alpha(x - y)$ için McLaurant açılımını yaparsak (Edwards, 1973),

$$R_\alpha(x - y) = \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right](-y) + \sum_{|\lambda| \leq m+1} (\lambda!)^{-1} (x)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right](\zeta - y) \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

elde ederiz. Burada $\zeta = \zeta(1)$, 0 ve x noktalarından geçen doğrunun $(0, x)$ aralığında bulunan bir noktasıdır. Yani $0 < \theta < 1$ olmak üzere

$\zeta = \theta x$ dir. Buradan da $0 < |\zeta| < |x|$ dir.

(2.6) ve (2.7) den,

$$K_m(x, y) = \sum_{|\lambda| \geq m+1} (\lambda!)^{-1} (x)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right](\zeta - y)$$

olduğu görülür. Yani $K_m(x, y)$ aslında McLaurant açılımının kalan terimidir.

Yardımcı Teorem 2.2 ve 2.3 uyarınca $x^\lambda < |x|^{|\lambda|}$ olduğu için ,

$$\begin{aligned} K_m(x,y) &\leq \sum_{|\lambda|=m+1} (\lambda!)^{-1} |x|^{|\lambda|} \left[\sum_{q=0}^{\left\lfloor \frac{|\lambda|}{2} \right\rfloor} C_q |\zeta - y|^{\alpha-n-|\lambda|-2q} |\zeta - y|^{2q} \right] \\ &\leq M_1 \sum_{|\lambda|=m+1} |x|^{|\lambda|} |\zeta - y|^{\alpha-n-|\lambda|} \\ &= M_1 |x|^{m+1} |\zeta - y|^{\alpha-n-(m+1)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Hipotez uyarınca,

$$y \in R^n - B(0, 2|x|) \Rightarrow |y| > 2|x| \Rightarrow |x| < \frac{|y|}{2} \quad \text{ve} \quad 0 < |\zeta| < |x| \quad \text{bilindiğinden,}$$

$|\zeta| < |y|$ olur. Buradan da

$$|\zeta - y| > ||\zeta| - |y|| = |y| - |\zeta| > |y| - |x| > |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2}$$

olur.

Yani $|\zeta - y| > \frac{|y|}{2}$ elde edilir. Bunu $K_m(x,y)$ için aldığımız eşitsizlikte kullanırsak,

$$|K_m(x,y)| \leq M |x|^{m+1} |y|^{\alpha-n-(m+1)}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 2.5 :

$R_\alpha(x)$, Riesz potansiyelinin çekirdeği olmak üzere,

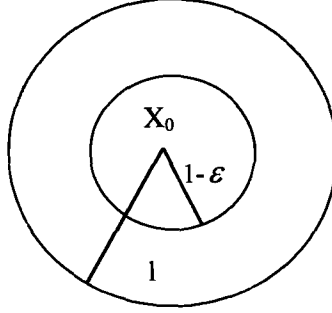
$$\int_{B(x_0,1)} R_\alpha(x-y) dy$$

integrali $B(x_0,1)$ yuvarında sonsuz defa diferensiyellenebilirdir.

İspat : Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\rho(y) = \begin{cases} 1 & B(x_0, 1-\varepsilon) \\ 0 & R^n - B(x_0, 1) \\ \in C^\infty & y \in R^n \end{cases}$$

şeklinde bir ρ fonksiyonu tanımlayalım.



Şekil 2.1 : $B(x_0, 1)$ yuvarı

Bu fonksiyon kullanılırsa,

$$\int_{B(x_0, 1)} R_\alpha(x-y) dy = \int_{B(x_0, 1)} \rho(y) R_\alpha(x-y) dy + \int_{B(x_0, 1)} [1-\rho(y)] R_\alpha(x-y) dy$$

eşitliği yazılabilir.

Bu formülün sağ tarafındaki integralleri göz önüne alalım. ρ fonksiyonunun tanımında $y \in R^n - B(x_0, 1)$ için $\rho(y) = 0$ 'dır. Yani ilk integralin altındaki ifade $R^n - B(x_0, 1)$ 'de sıfırdır. Bu nedenle ilk integrali tüm R^n üzerine genişletebiliriz. İkinci integralin altındaki ifade ise yine ρ fonksiyonunun tanımına göre $y \in B(x_0, 1-\varepsilon)$ için birdir. Böylece bu integrali $B(x_0, 1) - B(x_0, 1-\varepsilon)$ bölgesi üzerinde inceleyebiliriz. Bu nedenle bu formül,

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, 1)} R_\alpha(x-y) dy &= \int_{R^n} \rho(y) R_\alpha(x-y) dy + \int_{B(x_0, 1) - B(x_0, 1-\varepsilon)} [1-\rho(y)] R_\alpha(x-y) dy \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $I_1 + I_2$ ile sırasıyla sağ taraftaki integraller gösterilmiştir.

Önce I_2 integralini göz önüne alalım. $x \in B(x_0, 1-\varepsilon)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Şekil 2.1'den de görüldüğü gibi $y=x$ olamaz . Bu nedenle $x \in B(x_0, 1-\varepsilon)$ lar için integral sonsuz defa diferensiyellenebilir. Burada ε yeterince küçük olduğundan I_2 integrali tüm $B(x_0, 1)$ ' de sonsuz defa diferensiyellenebilir.

Şimdi de I_1 integralini göz önüne alalım. I_1 integralini x 'e göre diferensiyelleyelim. Bu durumda çekirdeğin bileşenleri $x-y$ olduğundan x 'e göre alınan türevler y 'e göre alınan türevlerin -1 katıdır. Buna göre ζ keyfi bir katlı indis olmak üzere ,

$$\begin{aligned} D_x^\zeta I_1 &= D_x^\zeta \int_{R^n} \rho(y) R_\alpha(x-y) dy \\ &= \int_{R^n} \rho(y) D_x^\zeta R_\alpha(x-y) dy \\ &= (-1)^{|\zeta|} \int_{R^n} \rho(y) D_y^\zeta R_\alpha(x-y) dy \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım gereğince $\rho(y)$ fonksiyonu $B(x_0, 1)$ 'in dışında sıfır olduğundan , R_n üzerindeki integraller için kısmi integrasyon metodunu uygularsak,

$$D_x^\zeta I_1 = (-1)^{|\zeta|} \int_{R^n} D_y^\zeta \rho(y) R_\alpha(x-y) dy$$

elde ederiz. Yani I_1 integralini diferensiyelliyerek türev işaretlerini ρ fonksiyonunun üzerine geçirmek yeterlidir. Tanıma göre ρ fonksiyonu sonsuz defa diferensiyellenebilir. olduğundan I_1 integrali de sonsuz defa diferensiyellenebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de Riesz potansiyelinin incelenmesinde yardımcı olan bir Hölder tipi eşitsizlik ispatlayalım. İspata geçmeden önce f fonksiyonunun sağlayacağı şartları verelim.

$P = \frac{n}{\alpha} > 1$, w $(0, \infty)$ aralığında azalmayan pozitif değerli bir fonksiyon

olmak üzere,

$$\int_{R^n} f(y)^p w(f(y)) dy < \infty \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

olsun. Burada w

$$(w_1) \int_1^\infty w(t)^{-\frac{1}{p-1}} t^{-1} dt < \infty$$

(w₂) $r > 0$ ve A pozitif bir sabit olmak üzere,

$$w(2r) < Aw(r)$$

şartlarını sağlasın.

Yardımcı Teorem 2.6 :

f , R^n 'de ölçülebilir bir fonksiyon, a pozitif tamsayı, $\alpha p = n$ ve

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \text{ olmak üzere,}$$

$$\int_{\{y: |f(y)| \geq a\}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \leq M \left(\int_{\{y: |f(y)| \geq a\}} |f(y)|^p w(|f(y)|) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^\infty w(t)^{-\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

sağlanacak şekilde pozitif bir M tamsayısı vardır.

İspat : Pozitif bir j tamsayısı için,

$$G_j = \{y \in R^n, 2^{j-1}a \leq |f(y)| \leq 2^j a\} \quad \text{cümlesini tamamlayalım. Ayrıca}$$

Lebesgue ölçümleri eşit olacak şekilde $r_j > 0$ sayıları için,

$$m\{B(0, r_j)\} = m\{G_j\} \quad \text{yuvarlarını tanımlayalım. Bu durumda,}$$

$$\begin{aligned} \int_{\{y: |f(y)| \geq a\}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{G_j} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^j a \int_{G_j} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} 2^j a \int_{B(x, r_j)} \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}} \leq \frac{C}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} 2^j a (r_j)^\alpha \end{aligned}$$

$m(B(\rho)) = \rho^n$, $\rho^\alpha = m(B(\rho))^{\frac{\alpha}{n}}$ olduğu düşünülürse Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
 \int_{\{y|f(y)|\geq a\}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy &\leq \frac{C}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} 2^j a |G_j|^{\frac{\alpha}{n}} \\
 &= \frac{C}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} 2^j a w^{\frac{1}{p}}(2^j a) |G_j|^{\frac{\alpha}{n}} \frac{1}{w^{\frac{1}{p}}(2^j a)} \\
 &\leq \frac{2C^*}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1} a w^{\frac{1}{p}}(2^{j-1} a) |G_j|^{\frac{\alpha}{n}} \frac{1}{w^{\frac{1}{p}}(2^j a)} \\
 &\leq \frac{2C^*}{\alpha} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (2^{j-1} a)^p |G_j| w(2^{j-1} a) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} w^{-\frac{1}{p-1}}(2^j a) \right)^{\frac{1}{p'}} \\
 &\leq M \left(\int_{R^n} |f(y)|^p w(|f(y)|) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\infty} w(t)^{-\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p'}}
 \end{aligned}$$

bulunur.

III. RIESZ POTANSİYELİNİN DİFERENSİYELLENEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde Riesz potansiyelinin tamamen m -defa diferensiyellenebilirliğini veren temel bir teorem verilecektir (Mizuta, 1993).

Teorem 3.1 :Negatif olmayan f fonksiyonu $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir elemanı

$p = \frac{n}{\alpha} > 1$ olmak üzere ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|)^{\alpha-n} f(y) dy < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p w(f(y)) dy < \infty$$

şartları sağlansın. Burada w Yardımcı Teorem 2.6 'da tanımlanmış fonksiyondur.

$$E_1 = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n - B(x_0, r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y) f(y) dy = \infty \right\}$$

$$E_2 = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \rightarrow 0} r^{\alpha-n-m} \int_{B(x_0, r)} |f(y) - f(x_0)| dy > 0 \right\}$$

$$E_3 = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r \rightarrow 0} r^{-mp} \int_{B(x_0, r)} |f^p(y) w(f(y)) - f^p(x_0) w(f(x_0))| dy > 0 \right\}$$

Bu durumda $m < \alpha$ için Riesz potansiyeli $\mathbb{R}^n$ -E 'de tamamen m defa diferensiyellenebilirdir. Burada $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ dir.

İspat : Yardımcı Teorem 2.4 'de tanımladığımız $K_m(x, y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$K_m(x,y) = R_\alpha(x-y) - \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0-y) \dots\dots\dots(3.1)$$

Buradan,

$$R_\alpha(x-y) = K_m(x,y) + \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0-y) \dots\dots\dots(3.2)$$

olduğunu buluruz.

$R_\alpha(x-y)$ incelediğimiz potansiyelin çekirdeği olduğundan (3.2) formülünü bu potansiyelin ifadesinde yazabiliriz. Böylece,

$$R_\alpha f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

ifadesini oluşturalım. Bu durumda,

$$R_\alpha f(x) = \int_{R^n} K_m(x,y) f(y) dy + \int_{R^n} \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0-y) f(y) dy$$

İkinci terime

$$\sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0,r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0-y) f(y) dy$$

ifadesini ekleyip çıkarırsak,

$$R_\alpha f(x) = \int_{R^n} K_m(x,y) f(y) dy + \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \lim_{r \rightarrow 0} \int_{R^n - B(x_0,r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0-y) f(y) dy$$

$$\sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0,r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0-y) f(y) dy \dots\dots\dots(3.3)$$

sonucunu elde ederiz.

İlk terimin integralinin sınırına $B(x_0,1)$ yuvarını ekleyip çıkaralım. Ayrıca $B(x_0,1)$ yuvarı üzerinde alınan integrale $f(x_0)$ fonksiyonunu ekleyip çıkaralım. Bu durumda (3.3) formülünün sağ tarafındaki birinci terimi aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \int_{R^n} K_m(x, y) f(y) dy &= \int_{R^n - B(x_0, 1)} K_m(x, y) f(y) dy + \int_{B(x_0, 1)} K_m(x, y) [f(y) - f(x_0)] dy \\ &+ \int_{B(x_0, 1)} K_m(x, y) f(x_0) dy \end{aligned}$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terimin integrallenme bölgesine $B(x_0, 2|x - x_0|)$ yuvarı eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} \int_{R^n} K_m(x, y) f(y) dy &= \int_{R^n - B(x_0, 1)} K_m(x, y) f(y) dy + \int_{B(x_0, 1) - B(x_0, 2|x - x_0|)} K_m(x, y) [f(y) - f(x_0)] dy \\ &+ \int_{B(x_0, 2|x - x_0|)} K_m(x, y) [f(y) - f(x_0)] dy + \int_{B(x_0, 1)} K_m(x, y) f(x_0) dy \dots\dots\dots (3.4) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.4) ifadesini (3.3) 'de kullanırsak ve (3.3)'ün üçüncü terimine $f(x_0)$ 'i ekleyip çıkarırsak, $R_\alpha f(x)$ potansiyeli için aşağıdaki formülü elde ederiz,

$$\begin{aligned} R_\alpha f(x) &= \int_{R^n - B(x_0, 1)} K_m(x, y) f(y) dy + \int_{B(x_0, 1) - B(x_0, 2|x - x_0|)} K_m(x, y) (f(y) - f(x_0)) dy \\ &+ \int_{B(x_0, 2|x - x_0|)} K_m(x, y) (f(y) - f(x_0)) dy + \int_{B(x_0, 1)} K_m(x, y) f(x_0) dy + \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!) (x - x_0)^\lambda \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{R^n - B(x_0, r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y) f(y) dy &+ \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0, r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y) [f(y) - f(x_0)] dy & \\ + \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0, r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y) f(x_0) dy & \end{aligned}$$

Bu ifadenin sağ tarafındaki beşinci ve yedinci terimlerin toplamına $P(x)$ deyip bunları eşitliğin sol tarafına geçirelim. Bu durumda aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\{ R_\alpha f(x) - P(x) \} = & \int_{R^n - B(x_0, 1)} K_m(x, y) f(y) dy + \int_{B(x_0, 1) - B(x_0, 2|x-x_0|)} K_m(x, y) [f(y) - f(x_0)] dy \\
& + \int_{B(x_0, 1)} K_m(x, y) f(x_0) dy + \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} K_m(x, y) [f(y) - f(x_0)] dy \\
& + \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!) (x - x_0)^\lambda \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0, r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x - y) [f(y) - f(x_0)] dy
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki üçüncü ve dördüncü terimleri göz önüne alalım. $K_m(x, y)$ 'nin (3.1) formülündeki değerini yazalım. Üçüncü terim için ise $K_m(x, y)$ 'nin tanımında gözüken aşağıdaki eşitliği kullanalım.

$$\begin{aligned}
K_m(x, y) = & R_\alpha(x - y) - \sum_{|\lambda| \leq m-1} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y) \\
& - \sum_{|\lambda| = m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y)
\end{aligned}$$

Yani
$$K_m(x, y) = K_{m-1}(x, y) - \sum_{|\lambda| = m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y)$$

Böylece ;

$$\begin{aligned}
\{ R_\alpha f(x) - P(x) \} = & \int_{R^n - B(x_0, 1)} K_m(x, y) f(y) dy + \int_{B(x_0, 1) - B(x_0, 2|x-x_0|)} K_m(x, y) [f(y) - f(x_0)] dy \\
& + f(x_0) \left\{ \int_{B(x_0, 1)} K_{m-1}(x, y) - \sum_{|\lambda| = m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y) dy \right\} \\
& + \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} \left[R_\alpha(x - y) - \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x - y) \right] [f(y) - f(x_0)] dy \\
& + \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!) (x - x_0)^\lambda \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0, r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y) [f(y) - f(x_0)] dy \dots\dots\dots (3.5)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi de dördüncü terimdeki integrali

$$\begin{aligned}
& + \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0, r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x - y) [f(y) - f(x_0)] dy \\
& = \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} R_\alpha (x - y) [f(y) - f(x_0)] dy - \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \\
& \quad \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x - y) [f(y) - f(x_0)] dy
\end{aligned}$$

şeklinde yazalım. Buradaki son ifade ile (3.5) ifadesindeki son terimi aynı integral altında toplarsak,

$$\begin{aligned}
\{R_\alpha f(x) - P(x)\} &= \int_{R^n - B(x_0, 1)} K_m(x, y) f(y) dy + \int_{B(x_0, 1) - B(x_0, 2|x-x_0|)} K_m(x, y) [f(y) - f(x_0)] dy \\
& - \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0, 2|x-x_0|) - B(x_0, r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y) [f(y) - f(x_0)] dy \\
& + f(x_0) \int_{B(x_0, 1)} \left[K_{m-1}(x, y) - \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y) \right] dy \\
& + \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} R_\alpha (x - y) [f(y) - f(x_0)] dy
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeyi kısa olması bakımından

$$\{R_\alpha f(x) - P(x)\} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \dots \dots \dots (3.6)$$

şeklinde gösterelim. Şimdi bu integrallerin $x \rightarrow x_0$ iken sıfır olduklarını gösterirsek tamamen diferensiyellenebilirlik tanımı uyarınca $R_\alpha f(x)$ potansiyelinin tamamen m-defa diferensiyellenebilirliğini elde etmiş oluruz.

I_1 ' i ele alalım;

$$I_1 = \int_{R^n - B(x_0, 1)} K_m(x, y) f(y) dy$$

dir. Yardımcı teorem 2.4 uyarınca ,

$$|I_1| \leq \int_{R^n - B(x_0, 1)} |x - x_0|^{m+1} |x_0 - y|^{\alpha-n-(m+1)} f(y) dy$$

ve integral y üzerinden alındığı için x 'e bağlı terim integral dışına çıkarılırsa,

$$|I_1| \leq |x - x_0|^{m+1} \int_{R^n - B(x_0, 1)} |x_0 - y|^{\alpha-n-(m+1)} f(y) dy$$

bulunur. Burada $y \in R^n - B(x_0, 1)$ olduğundan, $|y - x_0| > 1$ dir. Böylece,

$$|I_1| \leq |x - x_0|^{m+1} \int_{R^n - B(x_0, 1)} |x_0 - y|^{\alpha-n} f(y) dy$$

yazabiliriz. Yardımcı teorem 2.1 ve hipotezimiz uyarınca bu integral yakınsak olup bunu C ile gösterirsek,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{-m} |I_1| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{-m} |x - x_0|^{m+1} C$$

Yani,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{-m} |I_1| \leq C \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0 \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

I_2 'ye bakalım;

$$I_2 = \int_{B(x_0, 1) - B(x_0, 2|x-x_0|)} K_m(x, y) [f(y) - f(x_0)] dy$$

Yardımcı teorem 2.4 uyarınca,

$$|I_2| \leq \int_{B(x_0, 1) - B(x_0, 2|x-x_0|)} |x - x_0|^{m+1} |y - x_0|^{\alpha-n-(m+1)} |f(y) - f(x_0)| dy$$

dir. Buradan,

$$|x - x_0|^{-m} |I_2| \leq |x - x_0|^{-m} |x - x_0|^{m+1} \int_{B(x_0, 1) - B(x_0, 2|x-x_0|)} |y - x_0|^{\alpha-n-(m+1)} |f(y) - f(x_0)| dy$$

$$|x - x_0|^{-m} |I_2| \leq |x - x_0| \int_{B(x_0, 1) - B(x_0, 2|x-x_0|)} |y - x_0|^{\alpha-n-(m+1)} |f(y) - f(x_0)| dy$$

Şimdi bu integrali hesaplayalım.

$$y = x_0 + \rho\theta \quad , \quad \theta \in S^{n-1}$$

$$|x - x_0|^{-m} |I_2| \leq |x - x_0| \int_{2|x-x_0|}^1 \left[\int_{S^{n-1}} |f(x_0 + \rho\theta) - f(x_0)| \rho^{\alpha-m-2} d\rho \right] d\theta \dots\dots\dots (3.8)$$

olur. Burada $d\theta$ $\mathbb{R}^n$ uzayının S^{n-1} birim küresinin yüzey elemanıdır.

(3.8) 'deki integrali hesaplamak için,

$$F(\rho) = \int_0^\rho t^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} |f(x_0 + t\theta) - f(x_0)| d\theta \right) dt \dots\dots\dots (3.9)$$

şeklinde bir $F(\rho)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda,

$$\frac{dF(\rho)}{d\rho} = \rho^{n-1} \int_{S^{n-1}} |f(x_0 + \rho\theta) - f(x_0)| d\theta$$

dir. Buradan da,

$$dF(\rho) = \left(\int_{S^{n-1}} |f(x_0 + \rho\theta) - f(x_0)| d\theta \right) \rho^{n-1} d\rho$$

buluruz. Bu son ifadeyi (3.8)' de kullanırsak,

$$|x - x_0|^{-m} |I_2| \leq |x - x_0| \int_{2|x-x_0|}^1 \rho^{\alpha-m-n-1} dF(\rho)$$

bulunur. Sağ taraftaki integrale kısmi integrasyon metodunu uygulayalım.

$$dF(\rho) = dv \Rightarrow v = F(\rho)$$

$$\rho^{\alpha-n-(m+1)} = u \Rightarrow du = d\rho^{\alpha-n-(m+1)}$$

olup,

$$|x - x_0|^{-m} I_2 \leq |x - x_0| \left[\left(\rho^{\alpha-n-m-1} F(\rho) \right) \Big|_{2^{|x-x_0|}}^1 - \int_{2^{|x-x_0|}}^2 F(\rho) d\rho^{\alpha-n-(m+1)} \right] \dots\dots (3.10)$$

Şimdi köşeli parantez içindeki ilk terimin ne olduğuna bakalım. $B(x_0,1)$ yuvarı üzerinden alınan integralin tanımına göre $d\Gamma$ bu kürenin hacim elemanı olmak üzere,

$$\int_{B(x_0,1)} f d\Gamma = \int_0^1 \int_{S^{n-1}} f d\rho d\theta$$

dir. Bu durumda (3.9) formülünden,

$$F(1) = \int_{B(x_0,1)} |f(y) - f(x_0)| dy$$

bulunur. Hipoteze göre $f \in L_p(R^n)$ olduğundan, bu durumda $F(1)$ sonludur.

Gerçekten de,

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,1)} |f(y) - f(x_0)| dy &\leq \int_{B(x_0,1)} |f(y)| dy + |f(x_0)| \int_{B(x_0,1)} dy \\ &\leq \left(\int_{R^n} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x_0,1)} dy \right)^{\frac{1}{p'}} + (|f(x_0)| V(B(x_0,1))) \\ &\leq \left(\int_{R^n} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} V(B(x_0,1))^{\frac{1}{p'}} + |f(x_0)| V(B(x_0,1)) \\ &\leq C_1 \|f\|_p + C_2 |f(x_0)|_{\infty} \end{aligned}$$

yani;

$$F(1)_{\infty} \dots\dots\dots (3.11)$$

dir.

Burada görüldüğü gibi C_1 ve C_2 yuvarların hacmi olan V 'ye bağlı sabitlerdir.

Şimdi ilk terimin alt sınırında aldığı değerlere bakalım.

$$\begin{aligned} (2|x-x_0|)^{\alpha-n-(m+1)} F(2|x-x_0|) &= (2|x-x_0|)^{\alpha-n-m-1} \int_0^{2|x-x_0|} t^{n-1} \int_{S^{n-1}} |f(x_0 + t\theta) - f(x_0)| d\theta dt \\ &= (2|x-x_0|)^{\alpha-n-m-1} \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} |f(y) - f(x_0)| dy \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} &(2|x-x_0|)^{\alpha-n-(m+1)} F(2|x-x_0|) \\ &\leq (2|x-x_0|)^{-1} (2|x-x_0|)^{\alpha-n-m} \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} |f(y) - f(x_0)| dy \end{aligned}$$

bulunur.

Hipotezde verilen E_2 cümlesinin tanımına göre $x_0 \in E_2$ olduğundan $x \rightarrow x_0$ için sağ taraftaki ifade pozitifdir. Yani $x_0 \in R^n - E_2$ için $2|x-x_0|^{-1}$ dışındaki terim $x \rightarrow x_0$ iken sıfıra yaklaşır ve bu nedenle ;

$$(2|x-x_0|)^{\alpha-n-m} F(2|x-x_0|) = o(1)(2|x-x_0|)^{-1} \dots\dots\dots (3.12)$$

yazabiliriz.

Şimdi de (3.10)'da bulunan sonuncu terimi göz önüne alalım. Bu terime j dersek;

$$\begin{aligned} j &= - \int_{(2|x-x_0|)}^1 F(\rho) d\rho^{\alpha-n-m-1} \\ &= (n-\alpha+m+1) \int_{2|x-x_0|} F(\rho) \rho^{\alpha-n-m-2} d\rho \end{aligned}$$

$F(\rho)$ 'nun (3.9)'daki değerini yerine yazarsak,

$$j = (n-\alpha+m+1) \int_{2|x-x_0|}^1 \rho^{\alpha-n-m-2} \int_0^\rho t^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} |f(x_0 + t\theta) - f(x_0)| d\theta \right) dt d\rho$$

$$= (n - \alpha + m + 1) \int_{2|x-x_0|}^1 \rho^{\alpha-n-m-2} \int_{B(x_0, \rho)} |f(y) - f(x_0)| dy d\rho$$

$$= (n - \alpha + m + 1) \int_{2|x-x_0|}^1 \rho^{\alpha-n-m} \int_{B(x_0, \rho)} |f(y) - f(x_0)| dy \frac{d\rho}{\rho^2}$$

$x_0 \in R^n - E_2$ olursa, E_2 cümlesinin tanımına göre birinci integralin altındaki $\frac{d\rho}{\rho^2}$ 'nin dışındaki tüm ifade $\rho \rightarrow 0$ için sıfıra yaklaşır. Bu ifadeyi A_ρ ile gösterirsek, sonuncu eşitsizlik;

$$j \leq (n - \alpha + m + 1) \int_{2|x-x_0|}^1 A_\rho \frac{d\rho}{\rho^2} \dots\dots\dots (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. E_2 cümlesinin tanımından,

dır.

Burada keyfi $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ olduğunu gösteriyor ki, $\rho < \delta$ için $A_\rho < \varepsilon$ dir. Şimdi de $\rho > \delta$ için A_ρ 'yu değerlendirelim.

$$\begin{aligned} A_\rho &= \frac{1}{\rho^{n-\alpha+m}} \int_{B(x_0, \rho)} |f(y) - f(x_0)| dy \\ &< \frac{1}{\delta^{n-\alpha+m}} \int_{B(x_0, \rho)} |f(y) - f(x_0)| dy \\ &\leq \frac{1}{\delta^{n-\alpha+m}} \left\{ \int_{B(x_0, \rho)} |f(y)| dy + |f(x_0)| \int_{B(x_0, \rho)} dy \right\} \end{aligned}$$

Parantez içindeki ilk ifadeye Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$A_\rho \left\langle \frac{1}{\delta^{n-\alpha+m}} \left\{ \int_{B(x_0, \rho)} (|f(y)|^p dy)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x_0, \rho)} dy \right)^{\frac{1}{p'}} + |f(x_0) \rho^n| \right\} \right. \\ \left. \leq \frac{1}{\delta^{n-\alpha+m}} \left\{ \|f\|_{L^p} \rho^{\frac{n}{p'}} + |f(x_0)| \rho^n \right\} \right.$$

$P \langle 1$ olduğundan $\rho^n \langle \rho^{\frac{n}{p'}}$ olduğu açıktır. Bu nedenle sonuncu eşitsizliği

$$A_\rho \langle C \rho^{\frac{n}{p'}} \dots\dots\dots (3.14)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu formülü (3.13)'te kullanırsak,

$$j \langle C_* \int_{2|x-x_0|}^1 \rho^{\frac{n}{p'}-2} d\rho = C_{**} \rho^{\frac{n}{p'}-1} \Big|_{2|x-x_0|}^1 \\ = C_{**} (1-2|x-x_0|)^{\frac{n}{p'}-1} \\ \leq C_{**} (1-2|x-x_0|)^{\frac{n}{p'}-1} \dots\dots\dots (3.15)$$

elde ederiz. (3.11), (3.12) ve (3.15)'i (3.10)'da kullanırsak,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x-x_0|^{-m} I_2 \leq M \lim_{x \rightarrow x_0} |x-x_0| \left[F(1) + o(1)(2|x-x_0|)^{-1} \right. \\ \left. + C_{**} (1-2|x-x_0|)^{\frac{n}{p'}-1} \right] = 0 \dots\dots\dots (3.16)$$

dır.

I_3 'e bakalım .

$$I_3 = \sum_{|\lambda| \leq m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0, 2|x-x_0|) - B(x_0, r)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y) |f(y) - f(x_0)| dy$$

R_α çekirdeğinin tanımına göre yardımcı teorem 2.2 'nin (2.2.2) sonucundan,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\lambda R_\alpha(x_0 - y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\lambda |x_0 - y|^{\alpha-n} \leq C|x_0 - y|^{\alpha-n-|\lambda|}$$

bulunur.

$$|x - x_0| \langle |y - x_0|$$

olduğundan,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\lambda R_\alpha(x_0 - y) \leq |x - x_0|^{\alpha-n-|\lambda|}$$

ve diğer taraftan yardımcı teorem 2.3 uyarınca,

$$(x - x_0)^\lambda \langle |x - x_0|^{|\lambda|}$$

dir. Bunları I_3 'te kullanırsak,

$$\begin{aligned} |x - x_0|^{-m} |I_3| &\leq |x - x_0|^{-m} \sum_{|\lambda| \leq m} |x - x_0|^{|\lambda|} |x - x_0|^{\alpha-n-|\lambda|} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0, 2|x-x_0|) \setminus B(x_0, r)} |f(y) - f(x_0)| dy \\ &= |x - x_0|^{\alpha-n-m} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} |f(y) - f(x_0)| dy \end{aligned}$$

Burada teoremden verilen E_2 cümlesinin tanımına göre $x_0 \in R^n - E_2$ için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{-m} |I_3| \rightarrow 0 \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

olur. Şimdi de,

$$I_4 = f(x_0) \left[\int_{B(x_0, 1)} \left(K_{m-1}(x, y) - \sum_{|\lambda|=m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0 - y) \right) dy \right]$$

ifadesini göz önüne alalım.

$K_m(x, y)$ 'nin tanımından $K_{m-1}(x, y)$ 'nin ifadesini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
I_4 &= f(x_0) \left[\int_{B(x_0,1)} R_\alpha(x-y) - \sum_{|\lambda| \leq m-1} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0-y) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{|\lambda|=m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda R_\alpha \right] (x_0-y) dy \right] \\
&= f(x_0) \left[\int_{B(x_0,1)} R_\alpha(x-y) dy - \sum_{|\lambda| \leq m-1} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda \int_{B(x_0,1)} R_\alpha(x_0-y) dy \right. \\
&\quad \left. - \sum_{|\lambda|=m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda \int_{B(x_0,1)} R_\alpha(x_0-y) dy \right] \dots\dots\dots (3.18)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Ayrıca parantez içindeki ilk iki integrale bakalım.

Taylor formülünden, (Edwards, 1973) bu iki integral farkı,

$$\sum_{|\lambda|=m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda \int_{B(x_0,1)} R_\alpha(\zeta-y) dy$$

şeklindedir. Burada $\zeta = \zeta(1)$, x_0 ve x noktalarından geçen doğrunun (x_0, x) aralığında bulunan bir noktadır. Yani $0 < \theta < 1$ olmak üzere,

$$\zeta = x\theta + (1-\theta)x_0$$

dir. Böylece,

$$|\zeta - x_0| < |x - x_0|$$

dir. Bu durumda bu ifadeyi (3.18) formülünde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
I_4 &= f(x_0) \left[\sum_{|\lambda|=m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda \int_{B(x_0,1)} R_\alpha(\zeta-y) - \sum_{|\lambda|=m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda \int_{B(x_0,1)} R_\alpha(x_0-y) dy \right] \\
&= f(x_0) \sum_{|\lambda|=m} (\lambda!)^{-1} (x-x_0)^\lambda \int_{B(x_0,1)} (D^{|\lambda|} R_\alpha(\zeta-y) - D^{|\lambda|} R_\alpha(x_0-y)) dy
\end{aligned}$$

elde edilir.

İntegralin altındaki farka ortalama değer teoremini uygularsak,

$$I_4 = f(x_0) \sum_{|\lambda|=m} (\lambda!)^{-1} (x - x_0)^\lambda \int_{B(x_0,1)} D^{m+1} R_\alpha(s-y)(\zeta - x_0) dy$$

elde edilir. Burada s , (x_0, ζ) aralığında bulunan bir noktadır.

Yardımcı teorem (2.3) ve ζ 'nin tanımına göre ,

$$(x - x_0)^\lambda \langle |x - x_0|^{\lambda} \rangle, \quad |\zeta - x_0| \langle |x - x_0| \rangle$$

dir. Bu nedenle,

$$|I_4| \langle f(x_0) \sum_{|\lambda|=m} (\lambda!)^{-1} |x - x_0|^{\lambda} \rangle |x - x_0| \int_{B(x_0,1)} D^{m+1} R_\alpha(s-y) dy$$

dir.

Her iki tarafı $|x - x_0|^{-m}$ ile çarpıp $x \rightarrow x_0$ için limit araştırabiliriz. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{-m} |I_4| &\leq \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{-m} |x - x_0|^{m+1} \int_{B(x_0,1)} D^{m+1} R_\alpha(s-y) dy \\ &= f(x_0) |x - x_0| \int_{B(x_0,1)} D^{m+1} R_\alpha(s-y) dy \end{aligned}$$

elde edilir.

Yardımcı teorem (2.5) 'e göre $\int_{B(x_0,1)} R_\alpha(x-y) dy$ ifadesi, x değişkenine göre

sonsuz defa diferensiyellenebilir olduğundan sağ taraftaki integral sonludur.

Bu nedenle;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{-m} |I_4| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} C_* |x - x_0|$$

dir. Burada,

$$C_* = C f(x_0) \int_{B(x_0,1)} D^{m+1} R_\alpha(s-y) dy$$

dir. Böylece,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{-m} |I_4| = 0 \dots\dots\dots (3.19)$$

I_5 'e bakalım.

$$I_5 = \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} R_\alpha(x-y)[f(y)-f(x_0)]dy \quad \text{şeklindeydi.}$$

$y \in B(x_0, 2|x-x_0|)$ olduğundan, $|y-x_0| < 2|x-x_0|$ dir. Buna göre ,

$$|y-x| = |y-x_0 + x_0-x| \leq |y-x_0| + |x-x_0| < 3|x-x_0| \quad \text{eşitsizliği geçerlidir.}$$

$x \rightarrow x_0$ için $3|x-x_0| < 1$ bundan dolayı $|y-x| < 1$ dir. Bu durumda,

$$|x-x_0|^{-m} I_5 \leq |x-x_0|^{-m} \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} \frac{1}{|y-x|^{n-\alpha}} |f(y)-f(x_0)| dy \quad \dots\dots\dots(3.20)$$

Kısa olması bakımından,

$$|f(y)-f(x_0)| = g(y) \quad \dots\dots\dots(3.21)$$

olsun. Bu durumda,

$$|x-x_0|^{-m} |I_5| \leq |x-x_0|^{-m} \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} \frac{1}{|y-x|^{n-\alpha}} g(y) dy$$

olur. Bu ifadenin sağ tarafına yardımcı teorem (2.6)'yı uygulayalım.

Bunun için sağ taraftaki integrali a , keyfi pozitif bir sayı olmak üzere $g(y) > a$ ve $g(y) \leq a$ eşitsizliğini gerçekleyen y 'ler üzerinden iki parçaya bölelim. Bu durumda $g(y) \leq a$ kümesi üzerinden alınan integral kolayca hesaplanabilir. $g(y) > a$ kümesi üzerindeki integral ise yardımcı teorem (2.6) yardımıyla hesaplanacaktır.

Böylece ,

$$|I_s| \leq a|x-x_0|^{a-m} + |x-x_0|^{-m} \left(\int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} g(y)^p w^p(g(y)) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^\infty w(t)^{\frac{1}{p-1}} t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

(3.22)'nin sağ tarafında iki integral çarpımı vardır. Bu çarpanların ikincisi yardımcı teorem 2.6 'daki şarta göre sonlu bir sayıdır. Birinci integrali göz önüne alalım.

$$\int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} g(y)^p w^p(g(y)) dy \dots\dots\dots (3.23)$$

Bu integralin altındaki ifadeyi değerlendirelim. Önce $s, t > 0$ olmak üzere,

$$(t+s)^p w(s+t) - t^p w(t) \geq s^p w(s) \quad \text{eşitsizliğini gösterelim.}$$

$w, (0, \infty)$ aralığında azalmayan bir fonksiyon olduğundan,

$$s^p w(s) + t^p w(t) \leq s^p w(s+t) + t^p w(s+t) = (s^p + t^p) w(s+t)$$

dir. Yani,

$$s^p w(s) \leq (s+t)^p w(s+t) - t^p w(t) \dots\dots\dots (3.24)$$

dir. (3.24) formülünü (3.23) 'deki integral altındaki ifade için kullanalım. Bu integral altındaki $g(y)$ fonksiyonunun (3.21) formülü ile tanımlanmış olduğunu hatırlatalım. Yani ,

$$\begin{aligned} g(y)^p w(g(y)) &= |f(y) - f(x_0)|^p w(|f(y) - f(x_0)|) \\ &\leq |f(y)^p w(f(x_0)) - f(x_0)^p w(f(x_0))| \end{aligned}$$

olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $f(y) > f(x_0)$ eşitsizliği doğru olsun. Bu durumda,

$$g(y)^p w(g(y)) = (f(y) - f(x_0))^p w(f(y) - f(x_0))$$

(3.24) formülünde,

$$s = (f(y) - f(x_0))$$

$$t = f(x_0)$$

kabul edersek,

$$g^p(y)w(g(y)) \leq f(y)^p w(f(y)) - f(x_0)^p w(f(x_0)) \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

olur.

Eğer $f(y) < f(x_0)$ ise bu durumda,

$$g^p(y)w(g(y)) = (f(x_0) - (f(y))^p w(f(x_0) - f(y))) \quad \text{ve (3.24) formülünden,}$$

$$s = (f(x_0) - f(y))$$

$$t = f(y)$$

kabul edersek,

$$g^p(y)w(g(y)) \leq f(x_0)^p w(f(x_0)) - f(y)^p w(f(y)) \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

(3.25) ve (3.26) formüllerinden,

$$g^p(y)w(g(y)) \leq f(y)^p w(f(y)) - f(x_0)^p w(f(x_0)) \quad \dots\dots\dots (3.27)$$

elde edilir. (3.27)'yi (3.22)'de kullanırsak,

$$M = \left(\int_a^\infty w(t)^{\frac{1}{p-1}} + t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

olmak üzere,

$$|I_5| \leq C_1 a |x - x_0|^{\alpha-m} + |x - x_0|^{-m} \left(\int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} g(y)^p w^p(g(y)) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^\infty w(t)^{\frac{1}{p-1}} t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

buluruz.

$m < \alpha$ olduğundan ilk terimin limiti sıfırdır. Ayrıca $x_0 \in R^n - E_3$ için ,

$$I_5 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{-mp} \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} |f(y)^p w(f(y)) - f(x_0)^p w(f(x_0))| dy = 0$$

olur. Bu durumda,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{-m} |I_5| = 0 \quad \dots\dots\dots (3.28)$$

dir.

Böylece (3.7), (3.16), (3.17), (3.19) ve (3.28) 'i (3.6)'da kullanırsak ,
 $x \rightarrow x_0$ için,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{-m} \{R_a f(x) - P(x)\} = 0$$

olduğunu görürüz.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.



IV. NON-İZOTROPİK ÇEKİRDEĞE BAĞLI RIESZ POTANSİYELİ

Bu bölümde, non-izotropik çekirdeğe bağlı olarak tanımlanan Riesz potansiyelinin yakınsaklığı ile ilgili önemli bir teorem verilmiştir. Bu teorem tamamen orjinaldir.

Teorem 4.1 :

$$E_{\alpha} f(x) \not\equiv \infty \Leftrightarrow \int_{R^n - B_{\lambda}(x,1)} \|x - y\|_{\lambda}^{\alpha-n} f(y) dy < \infty$$

dir. Burada $B_{\lambda}(x,1)$ λ -uzaklığa göre x merkezli 1 yarıçaplı yuvarı göstermektedir.

İspata geçmeden önce ispat için gerekli olan bir yardımcı teorem verelim.

Yardımcı Teorem 4.2 :

$r \in R^+$, $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ açılar

$U_1(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}), U_2(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}), \dots, U_n(\rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ her bir değişkene göre sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda;

$$I_{\lambda}(r, U_1, \dots, U_n) = r^{2|\lambda|-n} 2^n \lambda_1 \dots \lambda_n U_1^{2\lambda_1-1} U_2^{2\lambda_2-1} \dots U_n^{2\lambda_n-1} I(r, U_1, U_2, \dots, U_n)$$

Burada I ve I_{λ} jakobyenleri şu şekilde tanımlanmaktadır .

n boyutlu Euclid uzayında aşağıdaki formüle göre kutupsal koordinatları tanımlayalım.

$$x_1 = rU_1$$

$$x_2 = rU_2$$

$$\cdot \dots \dots \dots (4.1)$$

.

$$x_n = rU_n$$

ve bu dönüşümün jakobyeni $I(r, U_1, \dots, U_n)$ şeklinde tanımlanmaktadır.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R^+$ için kutupsal koordinatlara yeni bir geçiş tanımlayalım.

$$x_1 = (rU_1)^{2\lambda_1}$$

$$x_2 = (rU_2)^{2\lambda_2}$$

$$\cdot \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

.

$$x_n = (rU_n)^{2\lambda_n} \quad .$$

Bu dönüşümün jakobyenini $I_\lambda(r, U_1, \dots, U_n)$ şeklinde gösteriyoruz.

İspat : Öncelikle $I(r, U_1, \dots, U_n)$ jakobyenini hesaplayalım

(4.1) formülünden.

$k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere,

$$\frac{\partial x_k}{\partial r} = U_k$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \rho_k} = r \frac{\partial U_1}{\partial \rho_k}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \rho_k} = r \frac{\partial U_2}{\partial \rho_k}$$

.

.

$$\frac{\partial x_n}{\partial \rho_k} = r \frac{\partial U_n}{\partial \rho_k}$$

Buradan,

$$I = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \\ r \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} & r \frac{\partial U_2}{\partial \rho_1} & \dots & r \frac{\partial U_n}{\partial \rho_1} \\ r \frac{\partial U_1}{\partial \rho_2} & r \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} & \dots & r \frac{\partial U_n}{\partial \rho_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r \frac{\partial U_1}{\partial \rho_n} & r \frac{\partial U_2}{\partial \rho_n} & \dots & r \frac{\partial U_n}{\partial \rho_n} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (4.3)$$

dir. Şimdi de I_λ jakobyenini hesaplayalım.

$$\frac{\partial x_k}{\partial r} = 2\lambda_k r^{2\lambda_k-1} U_k^{2\lambda_k}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \rho_k} = 2\lambda_k r^{2\lambda_k} U_1^{2\lambda_k-1} \frac{\partial U_1}{\partial \rho_k}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \rho_k} = 2\lambda_k r^{2\lambda_k} U_2^{2\lambda_k-1} \frac{\partial U_2}{\partial \rho_k}$$

.

$$\frac{\partial x_n}{\partial \rho_k} = 2\lambda_k r^{2\lambda_k} U_n^{2\lambda_k-1} \frac{\partial U_n}{\partial \rho_k}$$

I_λ jakobyenin ilk satırında $\frac{\partial x_k}{\partial r}$ fonksiyonları vardır. Bu fonksiyonlarda

r -nin kuvvetleri $2\lambda_k - 1$, determinantın diğer satırlarında ise $2\lambda_k$ 'dır.

Öte yandan determinantın k -inci sütununun tüm elemanlarının $2\lambda_k$ katsayıları vardır. Yani ,

$$1.\text{sütundan} \quad 2\lambda_1 r^{2\lambda_1-1}$$

$$2. \quad " \quad 2\lambda_2 r^{2\lambda_2-1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$n\text{-inci} \quad " \quad 2\lambda_n r^{2\lambda_n-1}$$

sayılarını determinantın dışına çıkarırsak,

$$2^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n r^{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) - n} = 2^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n r^{2|\lambda| - n}$$

şeklinde bir çarpan vardır.

Diğer taraftan determinantın 1-sütununun tüm elemanlarında $U_1^{2\lambda_1-1}$ çarpanı

vardır. 2-sütunun elemanlarının $U_2^{2\lambda_2-1}$ çarpanı vardır. Aynı şekilde

n -inci sütunun tüm elemanlarında $U_n^{2\lambda_n-1}$ çarpanı vardır. Bu çarpanlar da

determinantın dışına çıkarılırsa ,

$$I_\lambda = r^{2|\lambda| - n} 2^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n U_1^{2\lambda_1-1} U_2^{2\lambda_2-1} \dots U_n^{2\lambda_n-1}$$

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \\ r \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} & r \frac{\partial U_2}{\partial \rho_1} & \dots & r \frac{\partial U_n}{\partial \rho_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r \frac{\partial U_1}{\partial \rho_n} & r \frac{\partial U_2}{\partial \rho_n} & \dots & r \frac{\partial U_n}{\partial \rho_n} \end{vmatrix}$$

Bu ifadeyi (4.3) ile karşılaştırsak,

$$I_\lambda = r^{2|\lambda|-n} 2^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n U_1^{2\lambda_1-1} U_2^{2\lambda_2-1} \dots U_n^{2\lambda_n-1} I(r, U_1, \dots, U_n)$$

olduğunu görürüz. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1 :

n-boyutlu Euclid uzayında ,

$$x_1 = r \cos \rho_1$$

$$x_2 = r \sin \rho_1 \cos \rho_2$$

$$0 \leq \rho_1, \dots, \rho_{n-2} \leq \pi$$

.

.

$$x_n = r \sin \rho_1 \dots \sin \rho_{n-1}$$

$$0 \leq \rho_{n-1} \leq 2\pi \dots \dots \dots (4.4)$$

dönüşümünün jakobyenini $I(r, \rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ şeklinde göstereli ve $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$

olmak üzere,

$$x_1 = (r \cos \rho_1)^{2\lambda_1}$$

$$x_2 = (r \sin \rho_1 \cos \rho_2)^{2\lambda_2}$$

.

.

$$\dots \dots \dots (4.5)$$

$$x_n = (r \sin \rho_1 \dots \sin \rho_{n-1})^{2\lambda_n}$$

$$0 \leq \rho_1, \dots, \rho_{n-2} \leq \pi, \quad 0 \leq \rho_{n-1} \leq 2\pi$$

dönüşümünün jakobyenini $I_\lambda(r, \rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ şeklinde gösterelim.

Bu durumda,

$$I_{\lambda} = 2^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n r^{2|\lambda|-1} (\cos \rho_1)^{2\lambda_1-1} \dots (\cos \rho_{n-1})^{2\lambda_{n-1}-1} (\sin \rho_1)^{2(\lambda_2+\dots+\lambda_n)-1} (\sin \rho_2)^{2(\lambda_3+\dots+\lambda_n)-1} \dots (\sin \rho_{n-1})^{2\lambda_{n-1}-1} \dots \dots \dots (4.6)$$

şeklindedir.

İspat :

Bu sonucu ispatlamak için yukarıda verilen yardımcı teoremden $U_1, U_2, \dots, U_n$ fonksiyonlarını (4.4) formülünün sağ tarafındaki açılara bağlı fonksiyonlara eşit almak gerekir. Yani ,

$$\begin{aligned} U_1 &= \cos \rho_1 \\ U_2 &= \sin \rho_1 \cos \rho_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \dots \dots \dots (4.7) \\ U_{n-1} &= \sin \rho_1 \dots \sin \rho_{n-2} \cos \rho_{n-1} \\ U_n &= \sin \rho_1 \dots \sin \rho_{n-1} \end{aligned}$$

(4.7) dönüşümünün jakobyeni,

$$I = r^{n-1} (\sin \rho_1)^{n-2} (\sin \rho_2)^{n-3} \dots (\sin \rho_{n-2}) \dots \dots \dots (4.8)$$

şeklinde hesaplanmıştır.

(4.7) ve (4.8) ifadelerini (4.6) 'da kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} I_{\lambda} &= r^{2|\lambda|-1} 2^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n (\cos \rho_1)^{2\lambda_1-1} (\sin \rho_1 \cos \rho_2)^{2\lambda_2-1} \dots (\sin \rho_1 \dots \sin \rho_{n-1})^{2\lambda_n-1} r^{n-1} \\ &\quad (\sin \rho_1)^{n-2} (\sin \rho_2)^{n-3} \dots (\sin \rho_{n-2}) \\ &= r^{2|\lambda|-1} 2^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n (\cos \rho_1)^{2\lambda_1-1} (\cos \rho_2)^{2\lambda_2-1} \dots (\cos \rho_{n-1})^{2\lambda_{n-1}-1} (\sin \rho_1)^{2(\lambda_2+\lambda_3+\dots+\lambda_n)-1} \\ &\quad (\sin \rho_2)^{2(\lambda_3+\dots+\lambda_n)-1} \dots (\sin \rho_{n-2})^{2(\lambda_{n-1}+\lambda_n)-1} \end{aligned}$$

Teorem 4.1 ‘in ispatı :

İspatın öncelikle Gereklilik kısmını yapalım. Yani,

$$\int_{\|x_0 - y\|_\lambda > 1} \frac{f(y)}{\|x - y\|_\lambda^{n-\alpha}} dy < \infty \Leftarrow E_\alpha f(x) \neq \infty$$

olduğunu görelim. Kabul edelim ki,

$$\int_{\|x_0 - y\|_\lambda > 1} \frac{f(y)}{\|x - y\|_\lambda^{n-\alpha}} dy = \infty$$

olsun. Bu durumda,

$$E_\alpha f(x) \equiv \infty$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} E_\alpha f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y) dy}{\|x - y\|_\lambda^{n-\alpha}} \geq \int_{\{y: \|y - x_0\|_\lambda \geq 1 + \|x - x_0\|_\lambda\}} \frac{f(y) dy}{(\|x - x_0\|_\lambda + \|y - x_0\|_\lambda)^{n-\alpha}} \\ &= \int_{\{y: \|y - x_0\|_\lambda \geq 1 + \|x - x_0\|_\lambda\}} \frac{f(y) dy}{(\|x_0 - y\|_\lambda)^{n-\alpha}} \left(\frac{\|x_0 - y\|_\lambda}{\|x - x_0\|_\lambda + \|y - x_0\|_\lambda} \right)^{n-\alpha} dy \\ &\geq \int_{\{y: \|y - x_0\|_\lambda \geq 1 + \|x - x_0\|_\lambda\}} \frac{f(y)}{(\|x_0 - y\|_\lambda)^{n-\alpha}} dy \left(\frac{1 + \|x - x_0\|_\lambda}{1 + 2\|x - x_0\|_\lambda} \right)^{n-\alpha} \end{aligned}$$

$$\{\|y - x_0\|_\lambda > 1 + \|x - x_0\|_\lambda\} = (\|y - x_0\|_\lambda > 1) - (k\|y - x_0\|_\lambda < \|x - x_0\|_\lambda + 1)$$

bölgesini göz önüne alalım.

$$E_\alpha f(x) \geq \int_{\|x_0 - y\|_\lambda \geq 1} \frac{f(y) dy}{\|x_0 - y\|_\lambda^{n-\alpha}} - \int_{1 \leq \|x_0 - y\|_\lambda \leq \|x_0 - x\|_\lambda + 1} \frac{f(y) dy}{\|x_0 - y\|_\lambda^{n-\alpha}}$$

İlk integral kabulümüz uyarınca sonsuzdur. İkinci integralin sonlu olduğunu görürsek ispatın ilk kısmı tamamlanır.

$$\frac{1}{1 + \|x - x_0\|_\lambda} \int_{1 \leq \|x_0 - y\|_\lambda \leq \|x_0 - x\|_\lambda + 1} f(y) dy < \int_{1 \leq \|x_0 - y\|_\lambda \leq \|x_0 - x\|_\lambda + 1} \frac{f(y)}{\|x_0 - y\|_\lambda^{n-\alpha}} < \int_{x \leq \|x_0 - y\|_\lambda \leq \|x_0 - x\|_\lambda + 1} f(y) dy$$

integralin sınırlarını integrand 'da koyarsak ve $f \in L_p(R^n)$ olduğundan bu integral sonlu, dolayısı ile birinci kısım ispatlanmış olur.

Şimdi de yeterlilik şartını ispatlayalım. Yani,

$$\int_{\|x_0 - y\|_\lambda > 1} \frac{f(y)}{\|x_0 - y\|_\lambda^{n-\alpha}} dy < \infty \Rightarrow E_\alpha f(x) \neq \infty$$

olduğunu görelim.

$$\text{Keyfi } r > 0 \text{ için, } \int_{\|x - x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}}} E_\alpha f(x) dx$$

integralini göz önüne alalım. Eğer bu integral sonlu ise $E_\alpha f(x)$ hemen hemen her yerde sonlu, yani, $E_\alpha f(x) \neq \infty$ 'dir.

$$\int_{\|x - x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}}} E_\alpha f(x) dx = \int_{\|x - x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}}} \left(\int_{R^n} \frac{f(y)}{\|x - y\|_\lambda^{n-\alpha}} dy \right) dx$$

Fubini teoreminden,

$$\begin{aligned}
&= \int_{\|x-x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}}} dx \left(\int_{\|y-x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1}} \frac{f(y)dy}{\|x-y\|_\lambda^{n-\alpha}} + \int_{\|y-x_0\|_\lambda \geq r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1}} \frac{f(y)dy}{\|x-y\|_\lambda^{n-\alpha}} \right) \\
&= i_1 + i_2 \\
i_1 &= \int_{\|x-x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}}} dx \int_{\|y-x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1}} \frac{f(y)}{\|x-y\|_\lambda^{n-\alpha}} dy \\
&= \int_{\|y-x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1}} f(y)dy \int_{\left\{x: \|x-x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1}\right\}} \frac{dx}{\|x-y\|_\lambda^{n-\alpha}} \\
i_1 &\leq \int_{\|y\| \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1} + \|x_0\|_\lambda} f(y)dy \int_{\left\{x: \|y-x\|_\lambda \leq 2r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1}\right\}} \frac{dx}{\|x-y\|_\lambda^{n-\alpha}} \\
&= C \int_{\|y\| \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1} + \|x_0\|_\lambda} f(y)dy \int_0^{2r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1}} \rho^{\frac{2|\lambda|}{n}(\alpha-n)+2|\lambda|-1} d\rho \\
&= C \int_{\|y\| \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1} + \|x\|_\lambda} f(y)dy \left(2r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1} \right)^{\frac{2|\lambda|}{n}(\alpha-n)+2|\lambda|-1} \\
&= C \left(2r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1} \right)^{\frac{2|\lambda|\alpha}{n}}
\end{aligned}$$

$f \in L_p(R^n)$ olduğundan $i_1 \in L^\infty$ 'dir.

$$\begin{aligned}
i_2 &= \int_{\|x-x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}}} dx \int_{\|y-x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1}} \frac{f(y)}{\|x-y\|_\lambda^{n-\alpha}} dy \\
&< \int_{\|x-x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}}} dx \int_{\|y-x_0\|_\lambda > r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1}} \frac{f(y)}{(\|y-x_0\|_\lambda - \|x-x_0\|_\lambda)^{n-\alpha}} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\|x-x_0\|_\lambda \leq r^{\frac{2|\lambda|}{n}}} \int_{\|y-x_0\|_\lambda > r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1}} \frac{f(y)}{\left(\|y-x_0\|_\lambda - r^{\frac{2|\lambda|}{n}}\right)^{n-\alpha}} dy \\
&= CC_1 \int_{\|y-x_0\|_\lambda \geq r^{\frac{2|\lambda|}{n}+1}} \frac{f(y)}{\|y-x_0\|_\lambda^{n-\alpha}} dy \\
&< CC_1 \int_{\|y-x_0\|_\lambda > 1} \frac{f(y)}{\|x_0-y\|_\lambda^{n-\alpha}} dy < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır. Burada,

$$\frac{1}{\|y-x_0\|_\lambda - r^{\frac{2|\lambda|}{n}}} = \frac{1}{\|y-x_0\|_\lambda} \frac{1}{1 - \frac{r^{\frac{2|\lambda|}{n}}}{\|y-x_0\|_\lambda}} < \frac{1}{\|y-x_0\|_\lambda} \left(\frac{1}{1 - \frac{r^{\frac{2|\lambda|}{n}}}{r^{\frac{2|\lambda|}{n+1}}}} \right)$$

olup parantez içindeki ifade r 'ye bağlı sabittir.

Teorem 4.3 :

$$I_1 = \int_{R^n - B_\lambda(x,1)} \|x-y\|_\lambda^{(\alpha-n)} f(y) dy < \infty$$

şartı ile ,

$$I_2 = \int_{R^n} (1 + \|y\|_\lambda)^{\alpha-n} f(y) dy < \infty$$

şartı birbirine denktir.

İspat :

$I_2 < I_1$ olduğunu gösterelim.

$I_1 < \infty$ olduğundan I_2 'de yakınsak olacaktır.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{R^n} \frac{f(y)}{(1 + \|y\|_\lambda)^{n-\alpha}} dy = \int_{R^n - B_\lambda(x,1)} \frac{f(y)}{(1 + \|y\|_\lambda)^{n-\alpha}} dy + \int_{B_\lambda(x,1)} \frac{f(y)}{(1 + \|y\|_\lambda)^{n-\alpha}} dy \\ &< \int_{R^n - B_\lambda(x,1)} \frac{f(y)}{(1 + \|y\|_\lambda)^{n-\alpha}} dy + \int_{B_\lambda(x,1)} f(y) dy \end{aligned}$$

$f \in L_p(R^n)$ olduğundan 2.integral sonludur. Bu durumda ,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{R^n - B_\lambda(x,1)} \frac{f(y)}{\|x - y\|_\lambda^{n-\alpha}} \left(\frac{\|x - y\|_\lambda}{1 + \|y\|_\lambda} \right)^{n-\alpha} dy + C \\ &= \int_{R^n - B_\lambda(x,1)} \frac{f(y)}{\|x - y\|_\lambda^{n-\alpha}} \left(\frac{\|x\|_\lambda}{1 + \|y\|_\lambda} + \frac{\|y\|_\lambda}{1 + \|y\|_\lambda} \right)^{n-\alpha} dy + C \\ &\leq (\|x\|_\lambda + 1)^{n-\alpha} \int_{R^n - B_\lambda(x,1)} \frac{f(y)}{\|x - y\|_\lambda^{n-\alpha}} dy + C \\ &= (\|x\|_\lambda + 1)^{n-\alpha} I_1 + C \end{aligned}$$

$$I_1 < \infty , \quad I_2 < \infty$$

olur. Tersini gösterelim,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{R^n - B_\lambda(x,1)} \frac{f(y)}{\|x - y\|_\lambda^{n-\alpha}} dy = \int_{R^n - B_\lambda(x,1)} \frac{f(y)}{(1 + \|y\|_\lambda)^{n-\alpha}} \left(\frac{1 + \|y\|_\lambda}{\|x - y\|_\lambda} \right)^{n-\alpha} dy \\ &\leq \int_{R^n - B_\lambda(x,1)} \frac{f(y)}{(1 + \|y\|_\lambda)^{n-\alpha}} \left(\frac{1 + \|y - x\|_\lambda + \|x\|_\lambda}{\|x - y\|_\lambda} \right)^{n-\alpha} dy \\ &= \int_{R^n - B_\lambda(x,1)} \frac{f(y)}{(1 + \|y\|_\lambda)^{n-\alpha}} \left(\frac{1}{\|x - y\|_\lambda} + 1 + \frac{\|x\|_\lambda}{\|x - y\|_\lambda} \right)^{n-\alpha} dy \end{aligned}$$

integral bölgesi uyarınca $\|y - x\| \geq 1$ olduğundan,

$$i_1 \leq (2 + \|x\|_\lambda)^{n-\alpha} \int_{R^n - B_\lambda(x,1)} \frac{f(y)}{(1 + \|y\|_\lambda)^{n-\alpha}} dy$$

$$\begin{aligned} i_1 &\leq (2 + \|x\|_\lambda)^{n-\alpha} \int_{R^n} \frac{f(y)}{(1 + \|y\|_\lambda)^{n-\alpha}} dy \\ &= (2 + \|x\|_\lambda)^{n-\alpha} I_2 \end{aligned}$$

$I_2 < \infty$ olduğundan $I_1 < \infty$ olacaktır. Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

- Çınar, İ., 1997, On Non-Isotropic Riesz potentials, **Indian J. Pure appl. Math.**,28(9) :1197-1205, Eylül 1997
- Çınar, İ., 1997, The Hardy-Littlewood-Sobolev inequality for non-isotropic Riesz potentials, **Turkish Journal of Math.**,21 (1997), 153-157
- Gadjiev, A.D., Aliyev, I.A.1988, On classes of operators of potential types generated by a generalized shift. Reports of enlarged. **Session of the seminars of I.N. Vekua Inst. of Applied Mathematics.**, 3 (N 2), Tbilis
- Gadjiev, A.D., 1982, On differentiability properties of the symbol of Multidimensional singular integral operator. **English Trans. Math. USSR, Sbornik**, 42 (4): 427 –450
- Landkoff, N., 1972, Foundations of modern potential theory, **Springer – Verlag**,Berlin.
- Miklin, S.G.,1962, Multidimensional singular integrals and integral equations. **Fizmathgiz**, Moskow, 1962, English trans. Pergamon Press ,1965.
- Mizuta, Y., 1993, Contiunity properties of Riesz potentials and Beppo-Levi-Deny functions. **Hiroshima Math.**, 23: 79-153.
- Mizuta, Y., 1987, On the differentiability of Riesz potentials of functions. **Hiroshima Math. J.**, 17 : 355-359.
- Stein, E.M., Weiss, G., 1971. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. **Princeton University Press**, Princeton, New Jersey.
- Stein, E.M., 1970, Singular integrals and differentiability properties of Functions. **Princeton University Press**, Princeton, New Jersey.
- Weyl, H., 1987, Bernerkungen zum. Begriff der diferentialquotienten Gebrochener ardnung, **Vier Natur. Gesselschaft**, Zurich, 62: 296-302.

ÖZGEÇMİŞ

1974 Yılında Kahramanmaraş ilinin Elbistan ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Aydın' da, orta öğrenimini Hakkari ilinde, lise öğrenimi Ankara'da tamamladı. 1990 yılında Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 1994 yılında pekiyi derece ile mezun oldu. Aynı yıl Van Merkez Teknik Lise ve Endüstri Meslek Lisesinde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 1995-1996 öğretim yılının II. Döneminden itibaren Yüksek lisans çalışmaları dolayısı ile Ankara Kayaş Ortaokulunda görevine devam etti. 1997-1998 öğretim yılından itibaren eş durumundan tekrar Van'a döndü ve halen görev yapmakta olduğu Atatürk Lisesinde öğretmen olarak göreve başladı.

Evli ve bir çocuk annesidir.