



**NORMALİZE EDİLMİŞ BESSEL,
STRUVE VE LOMMEL FONKSİYONLARININ
GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

İbrahim AKTAŞ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Prof. Dr. Halit ORHAN

Prof. Dr. Árpád BARICZ

2017

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**NORMALİZE EDİLMİŞ BESSEL, STRUVE VE LOMMEL
FONKSİYONLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

İbrahim AKTAŞ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı**

**ERZURUM
2017**

Her hakkı saklıdır



**T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



TEZ ONAY FORMU

**NORMALİZE EDİLMİŞ BESSEL, STRUVE VE LOMMEL
FONKSİYONLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

Prof. Dr. Halit ORHAN danışmanlığında, Prof. Dr. Árpád BARICZ ortak danışmanlığında, İbrahim AKTAŞ tarafından hazırlanan bu çalışma 24/11/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak **oy birliği / ~~oy çokluğu~~ (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

İmza :

Üye : Prof. Dr. Halit ORHAN

İmza :

Üye : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

İmza :

Üye : Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

İmza :

Üye : Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

İmza :

Üye : Prof. Dr. Muhammet YILDIRIM

İmza :

Üye : Doç. Dr. İsa YILDIRIM

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun 30 / 11 / 2017 tarih ve 47 / 14
nolu kararı ile onaylanmıştır.

**Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

NORMALİZE EDİLMİŞ BESSEL, STRUVE VE LOMMEL FONKSİYONLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

İbrahim AKTAŞ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halit ORHAN
Ortak Danışman: Prof. Dr. Árpád BARICZ

Bu tezde, Euler-Rayleigh eşitsizlikleri ve reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfının bazı özellikleri kullanılarak normalize edilmiş birinci tür bazı Bessel, Struve ve Lommel fonksiyonlarının ünivalentlik, yıldızlılık ve konvekslik yarıçapları için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Ek olarak, bu yarıçapların bazı transandantal fonksiyonel denklemlerin en küçük pozitif kökü olduğu ve normalize edilmiş bazı Bessel, Struve ve Lommel fonksiyonlarının ünivalentlik yarıçaplarının aynı fonksiyonların yıldızlılık yarıçaplarına eşit olduğu da gösterilmiştir. Diğer taraftan, Struve fonksiyonlarının ünivalentlik yarıçapının Bessel fonksiyonlarının ünivalentlik yarıçapından büyük olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, Struve ve Lommel fonksiyonlarının türevlerinin sıfırları için bazı yeni alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Özel fonksiyonların sıfırları ile ilgili konudan bağımsız olan bu sonuçlar karşılaşıldığı matematiksel fizik problemlerinde faydalı olabilir.

2017, 132 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bessel, Struve ve Lommel fonksiyonları, Laguerre-Pólya sınıfı, Mittag-Leffler açılımı, Ünivalent, yıldızlı ve konveks fonksiyonlar, Ünivalentlik, yıldızlılık ve konvekslik yarıçapları

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

GEOMETRIC PROPERTIES OF NORMALIZED BESSEL, STRUVE AND LOMMEL FUNCTIONS

İbrahim AKTAŞ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Analysis and Functions Theory

Supervisor: Prof. Dr. Halit ORHAN
Co-supervisor: Prof. Dr. Árpád BARICZ

In this thesis, lower and upper bounds for the radii of univalence, starlikeness and convexity of the some normalized Bessel, Struve and Lommel functions of the first kind are obtained by using the Euler-Rayleigh inequalities and some properties of the Laguerre-Pólya class of real entire functions. In addition, it is also shown that these radii are the smallest positive roots of some transcendental functional equations, and the radii of univalence of the some normalized Bessel, Struve and Lommel functions are exactly the radii of starlikeness of the same functions. On the other hand, the radius of univalence of the Struve functions is greater than the corresponding radius of univalence of Bessel functions. Moreover, some new lower and upper bounds for the zeros of the derivatives of Struve and Lommel functions are obtained. The results on zeros of special functions may be of independent interest and can be useful in problems of mathematical physics where these zeros appear.

2017, 132 pages

Keywords: Bessel, Struve and Lommel functions, Laguerre-Pólya class, Mittag-Leffler expansions, Univalent, starlike and convex functions, Radii of univalence, starlikeness and convexity.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarım boyunca desteğini esirgemeyen saygıdeğer danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Halit ORHAN'a ve Sayın Prof. Dr. Árpád BARICZ'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca bana gösterdikleri destekten dolayı eşime ve aileme teşekkür ederim.

İbrahim AKTAŞ

Kasım, 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	9
2.1. Genel Kavramlar	9
2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar	11
2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar	16
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	25
3.1. Gama Fonksiyonu ve Özellikleri.....	25
3.2. Hipergeometrik Fonksiyonlar ve Özellikleri.....	26
3.3. Bessel Fonksiyonları	28
3.4. Struve Fonksiyonları	32
3.5. Lommel Fonksiyonları	34
3.6. Tam Fonksiyonlar ve Bazı Özellikleri	35
3.7. Bazı Özel Fonksiyonların Sıfırları İle İlgili Temel Teoremler.....	51
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	55
4.1. Bessel Fonksiyonlarının Ünivalentlik Yarıçapları	55
4.2. Struve Fonksiyonlarının Ünivalentlik Yarıçapları	66
4.3. Lommel Fonksiyonlarının Ünivalentlik Yarıçapları	81
4.4. Struve Fonksiyonu ve Türevinin Lineer Kombinasyonlarının Sıfırları İçin Sınırlar	93
4.5. Lommel Fonksiyonunun Türevinin Sıfırları İçin Sınırlar	97
4.6. Bessel Fonksiyonunun Konvekslik Yarıçapları	101
4.7. Struve Fonksiyonunun Konvekslik Yarıçapları	107
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	114
KAYNAKLAR	130
ÖZGEÇMİŞ	133

SİMGELER DİZİNİ

$(a)_n$	: Pochhammer sembolü
$\arg z$	: z kompleks sayısının argümanı
$F(a, b; c; z)$	: Gauss hipergeometrik fonksiyonu
${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$	: Genelleştirilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$\Gamma(z)$	: Gama fonksiyonu
$J_\nu(z)$	: Bessel fonksiyonu
$I_\nu(z)$	: Modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu
$j_\nu(z)$	: Küresel Bessel fonksiyonu
$i_\nu(z)$	: Modifiye edilmiş Küresel Bessel fonksiyonu
$\mathbf{H}_\nu(z)$	: Struve fonksiyonu
$s_{\mu, \nu}(z)$	: Lommel fonksiyonu
$\emptyset$	: Boş küme
$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\mathbb{N}$	: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
Ω	: Schwarz fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{LP}$	: Laguerre Pólya sınıfı
$\mathbb{U}$	: $\{z \in \mathbb{C}: z < 1\}$ açık birim disk
$\mathcal{A}$	: $\mathbb{U}$ birim diskinde $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ biçimindeki analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	: $\mathcal{A}$ kümesine ait ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	: $\mathcal{S}$ kümesine ait yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{K}$	: $\mathcal{S}$ kümesine ait konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	: Caratheodory fonksiyonların sınıfı
$Re(z)$	: z kompleks sayısının reel kısmı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Birim diskin Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü.....	18
---	----



1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi, ilk olarak 19. yüzyılın ortalarında G. Bernard Riemann tarafından ileri sürülen ve literatürde “Riemann Dönüşüm Teoremi” olarak bilinen teoremle ortaya çıkmıştır. Bu teorem kompleks düzlemin bir $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ($\mathcal{D} \neq \mathbb{C}$) alt bölgesini $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden bir f analitik fonksiyonun varlığını ifade etmektedir. Söz konusu teoremin öneminin 20. yüzyılın ilk yarısına kadar fazla anlaşılabilmesi teoride hak ettiği ilgiyi görememesine neden olmuştur. 20. yüzyılın başlarında meşhur matematikçi Koebe söz konusu teoremi analitik ve ünivalent fonksiyonlar için aşağıdaki biçimde vermiştir:

“Kompleks düzlemin basit bağlantılı $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ alt bölgesini $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ birim diski üzerine resmeden bir f analitik ve ünivalent fonksiyonu vardır. Ayrıca $\forall z_0 \in \mathcal{D}$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan bir tek f analitik fonksiyon vardır.”

Böylece geometrik fonksiyonlar teorisi hak ettiği ilgiyi görmeye başlamıştır. Söz konusu teoremden f analitik ve ünivalent fonksiyonunun tanım kümesi olan $\mathcal{D}$ yerine $\mathbb{U}$ birim diski ve $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşulları yerine ise $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normalleştirme aksiyomları alınırsa, $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ biçiminde normalize edilmiş fonksiyonu elde edilir. Bu çalışmada $\mathcal{A}$ ile normalize edilmiş analitik fonksiyonların kümesi, $\mathcal{S}$ ile de $\mathcal{A}$ kümesinde tanımlı ünivalent fonksiyonların kümesi gösterilecektir.

1916 yılında dönemin meşhur matematikçilerinden Bieberbach’ın ileri sürdüğü $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $n = 2, 3, \dots$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ biçimindeki katsayı tahmini ve onun sonuçları, geometrik fonksiyonlar teorisine olan ilgiyi artırmıştır. Söz konusu problem, dönemin matematikçilerini uzun yıllar meşgul etmiştir. 1916 yılında Bieberbach’ın alan teoreminin bir sonucu olarak $|a_2| \leq 2$ olduğunu ispatlaması ile problemin çözümüne dair ilk adımlar atılmaya başlanmıştır. 1923 yılında Loewner tarafından parametrik metod ismini verdiği yöntemiyle $|a_3| \leq 3$ eşitsizliği, 1955 yılında Grunsky eşitsizlikleri yardımıyla Garabedian ve Schiffer tarafından $|a_4| \leq 4$ eşitsizliği, 1968 yılında Pederson

(1969 yılında Ozawa) tarafından $|a_6| \leq 6$ eşitsizliği, 1972 de ise $|a_5| \leq 5$ eşitsizliği Pederson ve Schiffer tarafından ispatlanmıştır. Son olarak 1985 yılında L. De Branges söz konusu teoremi tüm $n = 2, 3, \dots$ halleri için Loewner teorisini ve genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonları kullanarak ispatlamıştır. Problemin çözümü bu alandaki problemlerin varlığını sonlandırmanın aksine geometrik fonksiyonlar teorisinin daha da zenginleşmesine sebep olmuştur.

$a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, a \neq 0, (a)_0 = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1)$$

olarak tanımlanan ifadeye Pochhammer (ya da Appell) sembolü denmektedir.

$a, b, c \in \mathbb{C}$ ve $c \neq 0, -1, -2, \dots, z \in \mathbb{C}$ ve $|z| < 1$ olmak üzere,

$$F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon Gauss hipergeometrik fonksiyonu olarak bilinir. Tanımın sağ tarafındaki seri $|z| < 1$ için yakınsak olup hipergeometrik seri olarak bilinir. Gauss hipergeometrik fonksiyonu,

$$z(1-z)w''(z) + (c - (a+b+1)z)w'(z) - abw(z) = 0$$

ikinci mertebeden hipergeometrik diferensiyel denkleminin bir özel çözümüdür. İlk olarak Euler'in yaklaşık iki asır önceki çalışmasında karşımıza çıkan bu fonksiyon daha sonraları Gauss tarafından yapılan sistematik çalışmaların sonucunda kendine literatürde geniş yer bulmuştur. Bu fonksiyon ile ilgili birçok araştırma yapılmıştır. İlk araştırmalar Fuchs, Kummer, Riemann, Schwarz ve Klein tarafından yapılmasına karşın 1961 yılında bu fonksiyonun ünivalentlik ve yıldızlılığı gibi önemli geometrik özellikleri

üzerine ilk çalışmalar Merkes ve Scott tarafından yapılmıştır. Daha sonraki yıllarda birçok matematikçi tarafından hipergeometrik fonksiyonların çeşitli alt sınıfları tanımlanarak onların çeşitli geometrik özellikleri incelenmiştir.

p ve q negatif olmayan tamsayılar, her k, n için $(b_k)_n \neq 0$ olmak üzere

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\prod_{k=1}^p (a_k)_n}{\prod_{k=1}^q (b_k)_n} \frac{z^n}{n!}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu olarak bilinir. ${}_pF_q$ serisi, eğer $p \leq q + 1$ ise $|z| < 1$ için yakınsaktır.

Meşhur Bieberbach tahmininin çözümünde genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların kullanımı özel fonksiyonların geometrik özellikleri üzerine ilgiyi yoğunlaştırmıştır. Son yıllarda Gauss hipergeometrik ve genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonları üzerine birçok inceleme yapılmıştır. Bunlardan bazıları şu şekilde verilebilir: Ruscheweyh ve Singh 1986 yılında yaptığı çalışmalarında $a > 0, c = a + 1, -1 \leq \rho b \leq 1 + \rho a$ koşulları altında $z \rightarrow zF(a, b; c; \rho z)$ fonksiyonunun yıldızlılık mertebesini elde etmişlerdir. Owa ve Srivastava, 1987 yılında genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların geometrik özelliklerini incelemişlerdir. Miller ve Mocanu, 1990 yılında belirli hipergeometrik fonksiyonların yerel ünivalentliğini, yıldızlılığını ve konveksliğini diferensiyel subordinasyon yöntemi yardımı ile incelemişlerdir. Silverman 1993 yılında, Gauss hipergeometrik fonksiyonlarının yıldızlılığını ve konveksliğini; Ponussamy ve Vuorinen 1998 yılında, Miller ve Mocanu'nun sonuçlarının bazı genelleştirmeleri ile Gauss ve Kummer hipergeometrik fonksiyonlarının konvekse yakınlık şartlarını elde etmişlerdir. Küstner 2002 ve 2007 yıllarında $z \rightarrow F(a, b; c; z)$ fonksiyonlarının konveksliği ile $z \rightarrow zF(a, b; c; z)$ (shifted hipergeometrik) fonksiyonlarının yıldızlılığını a, b, c reel parametrelerine göre incelemiştir.

Bessel fonksiyonları ilk olarak 1732 yılında Bernoulli (1700-1782) tarafından keşfedilmiştir. Bernoulli belli bir ağırlıktaki asılı zincirin salınım değişimlerini gösteren Bessel fonksiyonları için bir seri çözümü vermiştir. Buna rağmen, söz konusu fonksiyon ismini Alman astronom Bessel (1784-1846)'den almıştır. Bessel kendi adıyla anılan diferensiyel denklemin çözümünden Bessel fonksiyonunu elde etmiş ve onun çözümleri ile ilgili ilk sistematik çalışmaları yürütmüştür. Ayrıca Fourier gibi diğer ünlü matematikçiler de bazı çalışmalarında Bessel fonksiyonunu kullanmıştır. Bessel fonksiyonları dairesel ya da silindirik simetriye sahip problemlerle yakın ilişkilidir. Bundan dolayı, Bessel denkleminin çözümleri silindir fonksiyonlar olarak da bilinir. Birinci ve ikinci tür modifiye edilmiş Bessel fonksiyonları, Hankel fonksiyonları, küresel Bessel fonksiyonları, Kelvin fonksiyonları ve Struve fonksiyonlarında olduğu gibi birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonları da silindir fonksiyonların özel durumlarıdır.

$v \in \mathbb{R}$ ya da $v \in \mathbb{C}$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - v^2)w(z) = 0$$

ikinci mertebeden Bessel diferensiyel denkleminin bir özel çözümü olan ve

$$J_v(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(v + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v}$$

biçiminde seri gösterimine sahip olan fonksiyon v mertebeden Bessel fonksiyonu olarak bilinir. Bessel fonksiyonlarının modifiye edilmiş Bessel, küresel Bessel, q -Bessel ve modifiye edilmiş küresel Bessel fonksiyonları gibi çeşitleri vardır. v mertebeden Bessel fonksiyonunu hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$J_v(z) = \frac{1}{\Gamma(v + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^v {}_0F_1\left(v + 1; \frac{-z^2}{4}\right)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Bessel fonksiyonlarının geometrik özellikleri üzerine ilk çalışmalar Brown tarafından 1960 yılında yapılmış ve bu çalışmada söz konusu fonksiyonların ünivalentliği incelenmiştir. Yine bu yıl içinde Bessel fonksiyonlarının ünivalentlik yarıçapı Kreyszig ve Todd tarafından hesaplanmıştır. 1961 yılında Wilf belirli tam fonksiyonların ünivalentlik yarıçapları üzerine daha genel sonuçlar vermiştir. 1963 yılında Hayden ve Merkes sürekli kesirler yardımıyla tanımlanmış bir fonksiyon sınıfı için ünivalentlik ve yıldızlılık yarıçaplarını incelemiştir. 20. yüzyılın ortalarından sonra Bessel fonksiyonlarının geometrik özellikleri ile ilgili çalışmalar çok az sayıda olmasına rağmen son yirmi yılda konu tekrar dikkate alınmış ve Bessel, Struve ve Lommel fonksiyonları ile ilgili önemli birçok sonuç elde edilmiştir. Bessel, Struve ve Lommel fonksiyonlarının konvekslik ve yıldızlılık yarıçaplarının belirlenmesi üzerine yoğun çalışmalar yapılmış ve aslında bu yarıçapların bazı transandantal denklemlerin çözümü oldukları gösterilmiştir. 1995 yılında İsmail ve Muldoon, Bessel ve bazı ilgili fonksiyonların en küçük reel ya da pür imajiner sıfırları için sınırlar vermişlerdir. Aynı yıl içinde Selinger, Mocanu ve Miller'in admissible fonksiyon metodunu kullanarak normalize edilmiş Bessel fonksiyonlarının geometrik özelliklerini belirlemiştir. 2008 yılında Baricz, Bessel fonksiyonlarını genelleştirerek bu fonksiyonların geometrik özelliklerini incelemiştir. 2014 yılında Baricz, Kupan ve Szasz, birinci tür normalize edilmiş Bessel fonksiyonlarının yıldızlılık yarıçapları üzerine çalışmıştır. Aynı yıl Baricz ve Szasz, aynı fonksiyonların konvekslik yarıçaplarını incelemiştir. 2016 yılında, Baricz, Orhan ve Szasz birinci tür normalize edilmiş Bessel fonksiyonlarının α –Konvekslik yarıçapları üzerine önemli sonuçlar elde etmiştir.

Struve fonksiyonu, Rus matematikçi ve gökbilimci K. H. Struve tarafından 1882 yılında tanımlanmıştır. Bu fonksiyon,

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - v^2)w(z) = \frac{4 \left(\frac{z}{2}\right)^{v+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)}$$

homojen olmayan Bessel diferensiyel denkleminin bir özel çözümü olup

$$\mathbf{H}_v(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(v + n + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v+1}$$

şeklinde seri gösterimine sahiptir. Aynı zamanda hipergeometrik fonksiyonlar kullanılarak,

$$\mathbf{H}_v(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+1} {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}, v + \frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right)$$

eşitliğini yazmak da mümkündür. Söz konusu fonksiyon uygulamalı matematik ve fizikte, özellikle, optik, akışkanlar dinamiği ve akustikte belirgin biçimde karşımıza çıkmaktadır. Bu fonksiyon son yıllarda Orhan ve Yağmur tarafından geliştirilmiştir. 2013 yılında Yağmur ve Orhan geliştirilmiş Struve fonksiyonunun Hardy uzayına ait olma koşullarını vermişlerdir. Aynı yıl söz konusu fonksiyonların normalize edilmiş halinin açık birim diskte yıldızlılık ve konveksliği için yeter koşullar vermişlerdir. 2014 yılında Orhan ve Yağmur geliştirilmiş Struve fonksiyonunun ünivalentlik, yıldızlılık, konvekslik ve konvekse yakınlığı gibi bazı geometrik özellikleri üzerine çalışmışlardır.

Lommel fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar türünden $\frac{1}{2}(-\mu \pm v - 3) \notin \mathbb{N}$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$s_{\mu,v}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu - v + 1)(\mu + v + 1)} {}_1F_2\left(1; \frac{\mu - v + 3}{2}, \frac{\mu + v + 3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyon aynı zamanda

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + (z^2 - v^2) w(z) = z^{\mu+1}$$

biçimindeki homojen olmayan Bessel diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. 1972 yılında Steinig, μ, v reel sayılar ve z pozitif bir reel sayı olmak üzere $s_{\mu, v}(z)$ fonksiyonunun işaretini incelemiştir. 2012 yılında Koumandos ve Lamprecht, $\mu \in (0, 1)$ olmak üzere $s_{\mu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının yerleri için kesin tahminler vermişlerdir. 2015 yılında Baricz ve Yağmur, bazı Lommel ve Struve fonksiyonlarının geometrik özelliklerini incelemiştir. Aynı yıl Yağmur, Lommel fonksiyonunun Hardy uzayına ait olma koşullarını vermiştir.

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm tezin giriş kısmı olup, bu bölümde çalışma konusu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölüm ise çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremlerin oluşturduğu kuramsal temellerden oluşmaktadır.

Materyal ve yöntem olarak adlandırılan üçüncü bölümde, Gama fonksiyonu, Hipergeometrik fonksiyonlar, Bessel, Struve ve Lommel fonksiyonlarından söz edilmiştir. Ayrıca bu bölümde analitik fonksiyonların geometrik özellikleri ile ilgili bazı tanım ve teoremlerden de bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm araştırma bulgularına ayrılmıştır. Bu bölümde, Bessel, Struve ve Lommel fonksiyonlarının ilk pozitif sıfırları için Euler-Rayleigh eşitsizlikleri kullanılarak, aynı fonksiyonların normalize edilmiş bazı formlarının ünivalentlik yarıçapları için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca Struve fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapının Bessel fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapından daha büyük olduğu da gösterilmiştir. Ek olarak, normalize edilmiş bazı Struve ve Lommel fonksiyonlarının yıldızlılık yarıçapının aynı fonksiyonların ünivalentlik yarıçapına eşit olduğu gösterilmiştir. Çalışmanın devamında Struve fonksiyonu ve türevinin lineer kombinasyonunun sıfırları ile Lommel fonksiyonunun türevinin sıfırları için yeni alt ve

üst sınırlar elde edilmiştir. Bunlara ilave olarak yıldızlı ve konveks fonksiyonlar için Alexander Dual teoreminden faydalanarak normalize edilmiş bazı Bessel ve Struve fonksiyonlarının konvekslik yarıçapları için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

Beşinci ve son bölüm çalışmanın sonuçlarına ayrılmıştır.



2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölüm, çalışma boyunca ihtiyaç duyacağımız temel kavramlara ayrılmıştır.

Tanım 2.1.1 (Komşuluk) $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının ε -komşuluğu adı verilir. Ayrıca, $\overline{D(z_0, \varepsilon)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı disk, $\partial D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$ kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı çember ve $\tilde{D}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = D(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$ kümesine de $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının delinmiş komşuluğu adı verilir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta) $B \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olmak üzere $z_0 \in B$ için z_0 noktasının uygun bir ε komşuluğu tamamen B kümesine ait ise ya da bir başka ifadeyle $D(z_0, \varepsilon) \subset B$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına B kümesinin bir iç noktası adı verilir.

Tanım 2.1.3 (Açık ve Kapalı Küme) Her noktası bir iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme adı verilir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $D(z_0, \varepsilon)$ ve $\overline{D(z_0, \varepsilon)}$ kümeleri sırasıyla birer açık ve kapalı kümedir.

Tanım 2.1.4 (Bağlantılılık) $B \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer B kümesi boştan farklı, ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, bu durumda B kümesi bağlantılıdır denir. Başka bir ifadeyle, $B \subseteq U \cup V, B \cap V \neq \emptyset, B \cap U \neq \emptyset$ ve $B \cap U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde boştan farklı U ve V açık kümeleri bulunamıyorsa, B kümesi bağlantılıdır denir. Bağlantılı olmayan kümelere bağlantısızdır denir. Örnek olarak, $\mathbb{R}$ reel sayılar ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümeleri bağlantılı, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise bağlantısız kümelerdir.

Tanım 2.1.5 (Basit Bağlantılı Küme) $B, \mathbb{C}$ de bir bölge olsun. Eğer B bölgesindeki her basit kapalı eğrinin içi tamamen B bölgesinde kalıyorsa B bölgesine basit bağlantılı bölge adı verilir. Diğer bir ifadeyle tümleyeni bağlantılı olan bölge basit bağlantılıdır. Basit bağlantılı olmayan bölgeler çok bağlantılıdır.

Tanım 2.1.6 (Süreklilik) $B \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu ve $z_0 \in B$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $|z - z_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her $z \in B$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu $z_0 \in B$ noktasında sürekli değilse f fonksiyonu z_0 noktasında süreksizdir denir. Verilen bir $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun $z_0 \in B$ noktasında süreksiz olması için gerek ve yeter şart $\forall \delta > 0$ için $\exists \varepsilon > 0$ sayısı vardır öyleki $|z - z_0| < \delta$ iken $|f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\exists z \in B$ olmasıdır.

Tanım 2.1.7 (Eğri) $[a, b] \subset \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ biçiminde tanımlanan sürekli fonksiyona $\mathbb{C}$ de bir eğri adı verilir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Bir γ eğrisi verildiğinde, $\gamma(a) = \gamma(b)$ oluyorsa γ eğrisine kapalı eğri adı verilir. Uç noktaları dışında kendi kendini kesmeyen eğrilere basit eğri denir. Ayrıca, hem basit hem de kapalı eğriler basit kapalı eğri ya da Jordan eğrisi olarak adlandırılır. Bu tür eğriler düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir.

γ eğrisi, kapalı bir $[a, b]$ aralığında türevlenebilir olsun. γ' türevi, $[a, b]$ aralığında sürekli ve sıfırdan farklı ise bu taktirde γ eğrisine düzgün eğri adı verilir. t , a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralaması γ eğrisinin yönünü tayin eder. Kapalı eğrilerin yönü pozitif veya negatif olabilir. Kapalı olmayan eğrilerin yönü başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama alınarak belirlenir.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde analitik ve ünivalent fonksiyonlarla ilgili temel kavramlar açıklanmıştır.

Tanım 2.2.1 (Diferensiyellenebilme) $B \subset \mathbb{C}$, $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0 , B nin bir iç noktası olsun. Bu durumda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa f fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir denir. Bu limit kısaca $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ ile gösterilir ve buna f nin z_0 daki türevi denir.

Tanım 2.2.2 (Analitik Fonksiyon) $B \subset \mathbb{C}$, $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0 , B nin bir iç noktası olsun. f fonksiyonu, z_0 noktası ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse f fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir denir. $f(z)$ fonksiyonu B kümesinde, yani tanım kümesinde, analitik ise $f(z)$ fonksiyonuna analitik fonksiyon denir.

Tanım 2.2.3 (Tam Fonksiyon) Tüm $\mathbb{C}$ düzleminde analitik olan fonksiyona tam fonksiyon adı verilir.

$z = x + iy$ ve $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olmak üzere $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ise bu taktirde

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \text{ ve } u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

biçiminde ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Teorem 2.2.4 (Cauchy-Türev Formülü) $f(z)$, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta olsun. Bu durumda, $n = 0, 1, 2 \dots$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Cauchy-Türev formülünün önemli bir sonucu şudur: f , bir bölgede analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de aynı bölgede analiktir. Ayrıca f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir.

Tanım 2.2.5 (Singüler Nokta) f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse, bu durumda z_0 noktasına f nin bir singüler (tekil) noktası adı verilir.

z_0 , f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f , z_0 ın delinmiş bir $\tilde{D}(z_0, \varepsilon)$ komşuluğunda analitik oluyorsa z_0 noktasına f nin bir ayrık singüler noktası denir. Diğer taraftan, eğer f , z_0 ın her $\tilde{D}(z_0, \varepsilon)$ delinmiş komşuluğunda en az bir singüler noktaya sahipse bu durumda z_0 noktasına f fonksiyonunun bir ayrık olmayan singüler noktası denir.

Eğer z_0 noktası f fonksiyonunun bir singüler noktası ise bu taktirde f , z_0 merkezli bir kuvvet serisine açılmaz. Böyle bir durumda, f fonksiyonu $z = z_0$ çıkarılmış singüler

nokta civarında $(z - z_0)$ ın pozitif ve negatif tamsayı kuvvetlerinden oluşan ve Laurent serisi olarak adlandırılan bir seri ile temsil edilebilir.

Tanım 2.2.6 (Laurent Serisi) f fonksiyonu $B(R_1, R_2) = \{z: R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ halka bölgesinde analitik ise, bu durumda

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

serisine, f nin z_0 noktası civarındaki Laurent serisi adı verilir. Bu seri açılımındaki $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ serisine Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ serisine de Laurent serisinin analitik kısmı denir.

Tanım 2.2.7 (Analitik Devam) B ve D , kompleks düzlemde $B \subset D$ şartını sağlayan iki bölge olsun. Ayrıca, f ve F fonksiyonları sırasıyla B ve D bölgelerinde analitik fonksiyonlar ve her $z \in B$ için $f(z) = F(z)$ olsun. Bu taktirde, F fonksiyonu f fonksiyonunun D bölgesine analitik devamıdır denir. Eğer bir fonksiyonun analitik devamı varsa tektir.

Örnek 2.2.8 $\mathbb{U}$ açık birim diskinde,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$$

biçiminde tanımlanan seri $F(z) = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca $F(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ kümesinde analitik olup $|z| < 1$ için $f(z) = F(z)$ dir. Bu durumda, $F(z)$ fonksiyonu $f(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ bölgesine analitik devamıdır.

Teorem 2.2.9 (Maksimum Prensibi) f fonksiyonu $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ancak sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $|f(z)|$, B bölgesinde maksimum değeri alamaz (Ponnusamy and Silverman 2006).

Sonuç 2.2.10: Sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonu sınırlı bir B bölgesinin sınırında sürekli, içinde ise analitik olsun. Bu takdirde $|f(z)|$ maksimum değerini B bölgesinin sınırında alır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Teorem 2.2.11 (Minimum Prensibi) B bir bölge, $f(z)$ fonksiyonu bu B bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu takdirde $|f(z)|$, B bölgesinde minimum değeri alamaz (Ponnusamy and Silverman 2006).

Sonuç 2.2.12: Sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonu sınırlı bir B bölgesinin sınırında sürekli, içinde ise analitik olsun. Ayrıca her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu takdirde $|f(z)|$, minimum değerini B bölgesinin sınırında alır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Lemma 2.2.13 (Schwarz Lemması) Kabul edelim ki $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik olsun. Ayrıca bu diskte $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ koşulları sağlansın. Bu durumda $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ dir. Eşitlik hali sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta}z$ fonksiyonu için doğrudur (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 2.2.14 (Ünivalent Fonksiyon): f , $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in B$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olması durumunda sağlanıyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyorsa) f fonksiyonuna B bölgesinde ünivalent (yalıncat veya schlicht) fonksiyon adı verilir (Duren 1983).

Eğer f fonksiyonu, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye lokal (yerel) ünivalent fonksiyon adı verilir.

$f(z)$ fonksiyonu ünivalent olacak şekildeki orijin merkezli en geniş açık diskin yarıçapına f fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı denir (Goodman 1983).

Teorem 2.2.15 f bir analitik fonksiyon olsun. f nin bir z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

$f'(z_0) \neq 0$ şartı bir $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerekli fakat yeterli değildir. Yani, f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ dır. Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan fonksiyonların aynı kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.16 $f(z) = z^2$ fonksiyonu $H = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 2\pi\}$ bölgesinde yerel ünivalenttir. Çünkü $f(z) = z^2$ fonksiyonu H bölgesinde analitik ve her $z_0 \in H$ için $f'(z_0) \neq 0$ dır. Ancak bu fonksiyon H bölgesinde ünivalent değildir. Çünkü

$$f(1+i) = f(-1-i) = 2i$$

olmasına rağmen

$$1+i \neq -1-i$$

dir.

Eğer f analitik fonksiyonu $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in B$ için $f'(z)$, f nin yerel geometrik davranışı hakkında bilgi verir. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme ve yerel dönme değerleridir. Ek olarak, Cauchy-Riemann denklemleri yardımıyla $f: B \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonunun Jakobian determinantının $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak, Teorem 2.2.15 dikkate alındığında analitik fonksiyonların Jakobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.17 (Konform Dönüşüm) Belli bir z_0 noktasından geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyan dönüşümlere z_0 noktasında konformdur denir. Bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin her noktasında konform olan fonksiyona B bölgesinde konformdur denir.

Teorem 2.2.18 f , z_0 noktasını içeren bir B bölgesinde analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise $f(z)$, z_0 da konformdur (Zill and Shanahan 2003).

Bu teoremin bir sonucu olarak, bir bölgede analitik ve ünivalent olan fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden birisi, a, b, c, d birer kompleks sabit olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0$$

biçiminde tanımlanan Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm genişletilmiş kompleks düzlemi ($\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) kendi üzerine konform olarak resmeder.

Örnek 2.2.19 $f(z) = e^z$ tam fonksiyonu her $z \in \mathbb{C}$ için $f'(z) = e^z \neq 0$ olduğundan tüm $\mathbb{C}$ de konformdur.

Tanım 2.2.20 (Riemann Dönüşüm Teoremi) Kabul edelim ki $B \subset \mathbb{C}$ ($B \neq \mathbb{C}$) bir basit bağlantılı bölge ve $z_0 \in B$ olsun. Bu durumda $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olacak şekilde B yi $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek analitik ve ünivalent fonksiyonu vardır (Ponnusamy and Silverman 2006).

2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bir ünivalent fonksiyon analitik olarak düşünüldüğünde sıfırdan farklı türe ve sahip iken; geometrik olarak düşünüldüğünde basit eğrileri basit eğrilere dönüştürmektedir. Analitik ve ünivalent fonksiyonlar ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere

dönüştürürler. Riemann dönüşüm teoremine göre $\mathbb{C}$ den farklı herhangi iki basit bağlantılı bölge konform olarak birbirine denktir. Bu nedenle keyfi bölgelerde tanımlı analitik fonksiyonlar yerine $\mathbb{U}$ açık birim diskinde tanımlı analitik fonksiyonlar ile işlem yapılabilir.

$$f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n, (z \in \mathbb{U})$$

biçiminde seri gösterimine sahip olan ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartlarını sağlayan fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon adı verilir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilir. $\mathcal{A}$ sınıfı,

$$\mathcal{A} = \left\{ f: f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n, f(0) = f'(0) - 1 = 0 \text{ ve } \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } f - \text{analitik} \right\}$$

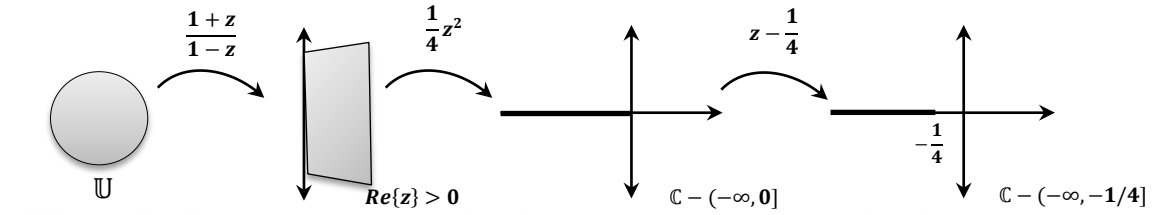
biçiminde karakterize edilir. Hem ünivalent olup hem de $\mathcal{A}$ sınıfına ait olan fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilir. $\mathcal{S}$ sınıfı,

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{A}: \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } f - \text{ünivalent}\}$$

biçiminde karakterize edilir. $\mathcal{S}$ sınıfındaki bazı fonksiyon örnekleri şunlardır:

- (i) $w = f(z) = z(1 - z)^{-1} = z + z^2 + z^3 + \dots$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\left\{w = u + iv: \operatorname{Re}(w) > -\frac{1}{2}\right\}$ kümesine resmeder.
- (ii) $w = f(z) = z(1 - z^2)^{-1} = z + z^3 + z^5 + \dots$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \left\{\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right]\right\}$ bölgesine resmeder.
- (iii) $w = f(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\left\{-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{4}\right\}$ sonsuz şeridi üzerine resmeder.

(iv) $w = f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$ fonksiyonu Koebe fonksiyonu olarak bilinir ve $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$ bölgesine resmeder. Koebe fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.1 Birim diskin Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü

$\mathcal{S}$ sınıfındaki iki fonksiyonun toplamı yine $\mathcal{S}$ sınıfında olmak zorunda değildir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.3.1

$$f(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } g(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfının birer üyesi olmasına rağmen bu fonksiyonların toplamı olan

$f + g \notin \mathcal{S}$ dir. Çünkü,

$$[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1+iz)^2} = \frac{2iz}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

olup, $z = \frac{1+i}{2} \in \mathbb{U}$ için $[f(z) + g(z)]' = 0$ dır.

Buna ek olarak, $\mathcal{S}$ sınıfının birçok özelliği bazı dönüşümler altında korunur. Aşağıdaki teorem korunan özelliklerle ilgilidir.

Teorem 2.3.2 $f \in \mathcal{S}$ olmak üzere aşağıdakiler doğrudur (Duren 1983).

- (i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \dots \in \mathcal{S}$ dir.
(ii) Döndürme: $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z \in \mathbb{U}$ için

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n \in \mathcal{S}$$

dir.

- (iii) Genişleme: $r \in (0,1)$ ve $z \in \mathbb{U}$ için

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n \geq 2} a_n r^{n-1} z^n \in \mathcal{S}$$

dir.

- (iv) Disk otomorfizmi: $z_0 \in \mathbb{U}$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}, (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfının bir üyesidir.

- (v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(\mathbb{U})$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ şartları sağlansın. Bu durumda $\psi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

- (vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(\mathbb{U})$ olmak üzere, $z \in \mathbb{U}$ için

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{w}} \in \mathcal{S}$$

dir.

(vii) n . kök dönüşümü: $n \in \{2, 3, \dots\}$ ve $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere,

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2} (2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + \dots \in \mathcal{S}$$

dir.

Kendisi $\mathcal{S}$ sınıfından olmadığı halde ünivalent fonksiyonlar teorisindeki birçok problemlerin çözümünde önemli bir yere sahip olan bazı fonksiyonların tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.3 (Caratheodory Sınıfı) $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $p(0) = 1$, $Re[p(z)] > 0$ şartlarını sağlayan ve

$$p(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} c_n z^n$$

biçiminde seri temsiline sahip olan fonksiyonlardan oluşan sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir (Duren 1983).

Örneğin, $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $p(z) = (1+z)/(1-z)$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfının bir üyesi olup, $\mathbb{U}$ birim diskini sağ yarı düzleme konform olarak resmeder. Ek olarak, $\mathcal{P}$ sınıfındaki bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Çünkü, $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen, bu fonksiyon $n \geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.4 (Schwarz Fonksiyonları Sınıfı) $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonlardan oluşan sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir. Bu sınıf Ω ile gösterilir (Graham and Kohr 2003).

Caratheodory ve Schwarz fonksiyonları sınıfları arasında

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1 + \phi(z)}{1 - \phi(z)}, \phi(z) \in \Omega$$

önemli ilişkisi vardır.

Tanım 2.3.5 (Yıldızıl Fonksiyon) $B \subset \mathbb{C}$ olmak üzere B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl (veya kısaca yıldızıl) küme adı verilir. Eğer bir $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu, $\mathbb{U}$ birim diskini $f(z_0) = w_0$ noktasına göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon adı verilir. $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini orijine göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f ye kısaca yıldızıl fonksiyon adı verilir. Yıldızıl fonksiyonların kümesi $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{S} : \operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0, z \in \mathbb{U} \right\}$$

biçiminde karakterize edilir. Ayrıca $\mathbb{U}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ olmak üzere

$$r^*(f) = \sup \left\{ r > 0 : \operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0, z \in \mathbb{U}(0, r) \right\}$$

reel sayısına f fonksiyonun yıldızılılık yarıçapı adı verilir (Graham and Kohr 2003).

$\mathcal{S}^*$ sınıfına ait fonksiyonların analitik karakterizasyonu üzerine iyi bilinen bir sonuç aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.6 $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ bir analitik fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda f nin yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve $\forall z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0$$

olmasıdır (Graham and Kohr 2003).

Tanım 2.3.7 (Konveks Fonksiyon) Bir f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent ve $f(\mathbb{U}), \mathbb{C}$ kompleks düzleminde konveks bir bölge ise bu durumda f fonksiyonuna $\mathbb{U}$ birim diskinde konvekstir denir. Konveks fonksiyonların sınıfı,

$$\mathcal{K} = \left\{ f \in \mathcal{S} : \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0, z \in \mathbb{U} \right\}$$

biçiminde karakterize edilir. Ayrıca

$$r^c(f) = \sup \left\{ r > 0 : \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0, z \in \mathbb{U}(0, r) \right\}$$

reel sayısına f fonksiyonunun konvekslik yarıçapı denir (Baricz and Szász 2014).

Yukarıda tanımları verilen $\mathcal{S}^*, \mathcal{K}$ ve $\mathcal{S}$ sınıfları arasında

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$$

biçiminde bir kapsam bağıntısı vardır. Buna ek olarak meşhur Koebe fonksiyonu yıldızlı olmasına rağmen konveks değildir (Duren 1983).

$\mathcal{K}$ sınıfına ait fonksiyonların analitik karakterizasyonu ile ilgili iyi bilinen sonuç aşağıdaki verilmiştir.

Teorem 2.3.8 $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ bir analitik fonksiyon olsun. Bu durumda f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve $\forall z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0$$

olmasıdır (Graham and Kohr 2003).

Yukarıdaki önemli teoreme ilave olarak $\mathcal{K}$ sınıfı ile ilgili birçok sonuç vardır. Bunlardan bazıları aşağıda sunulmuştur.

Teorem 2.3.9 $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ bir normalize edilmiş analitik fonksiyon olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{K}$ olması için gerek ve yeter şart $\forall z, \zeta \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re} \left[\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z + \zeta}{z - \zeta} \right] \geq 0$$

olmasıdır (Graham and Kohr 2003).

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak $\mathbb{U}$ birim diskinde normalize edilmiş analitik fonksiyonlar için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.3.10 $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ bir normalize edilmiş analitik fonksiyon olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{K}$ olması için gerek ve yeter şart $|\zeta| < |z| < 1$ için

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} \right] > 0$$

olmasıdır (Graham and Kohr 2003).

Yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıfları arasında Alexander (1915) tarafından verilen aşağıdaki önemli bağıntı vardır.

Teorem 2.3.11 (Alexander Dual Teoremi) $f, \mathbb{U}$ birim diskinde bir normalize edilmiş analitik fonksiyon ve $\forall z \in \mathbb{U}$ için $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{K}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır (Graham and Kohr 2003).

Teorem 2.3.12 Eğer $f \in \mathcal{K}$ ise bu durumda $f(\mathbb{U})$ kümesi $\mathbb{U}(0, \frac{1}{2})$ diskini içerir ve sonuç kesindir (Graham and Kohr 2003).

Yukarıda bahsedilen sonuçlara ek olarak normalize edilmiş yıldızlı fonksiyonlar ve konveks fonksiyonlar için matematik dünyasını uzun yıllar meşgul eden aşağıdaki meşhur katsayı tahminleri vardır.

Teorem 2.3.13 (Bieberbach Tahmini) $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_nz^n + \dots$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde yıldızlı olsun. Bu durumda $n \in \{2, 3, \dots\}$ için $|a_n| \leq n$ dir. Ayrıca $|a_n| = n$ eşitlik halini verilen bir $n \geq 2$ için Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu sağlar (Graham and Kohr 2003).

Teorem 2.3.14 $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_nz^n + \dots$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde konveks olsun. Bu durumda $n \in \{2, 3, \dots\}$ için $|a_n| \leq 1$ dir. Ayrıca $|a_n| = 1$ eşitlik halini, verilen bir $n \geq 2$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $|\lambda| = 1$ olmak üzere, $f(z) = \frac{z}{1-\lambda z}$ fonksiyonu sağlar (Graham and Kohr 2003).

Teorem 2.3.15 $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots \in \mathcal{K}$ olsun. Bu durumda

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1 - |a_2|^2}{3}$$

eşitsizliği vardır (Graham and Kohr 2003).

3. MATERİYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, çalışma boyunca ihtiyaç duyacağımız temel kavramlardan kısaca bahsedilmiştir.

3.1. Gama Fonksiyonu ve Özellikleri

Gama fonksiyonu ilk kez faktöriyeler için interpolasyon problemi ile bağlantılı olarak ortaya çıkmıştır. Sürekli bir x değişkenin bir fonksiyonunu bulma problemi olarak tanımlanan interpolasyon problemi Goldbach, Bernoulli ve Stirling tarafından ortaya çıkarılmış ve 1720'lerde Euler tarafından incelenmiştir. Bu problemin çözümü olan Gama fonksiyonu Euler tarafından 13 Ekim 1729 tarihinde Goldbach'a yazılan mektupta bulunmaktadır. 19. yüzyılda Gama fonksiyonunun tanımı kompleks sayılara genişletilmiştir. Matematik, fizik ve mühendislikte çok önemli bir yere sahip olan Gama fonksiyonu aşağıda tanımlanmıştır (Qiu and Vuorinen 2005).

Tanım 3.1.1 (Gama Fonksiyonu) $Re\ z > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona gama fonksiyonu adı verilir. Tanımda geçen integral ikinci tür Euler integrali olarak bilinir. Tanım 3.1.1, analitik devam vasıtasıyla $Re\ z < 0$ için aşağıdaki biçimde genişletilebilir.

(3.1) ile verilen fonksiyon

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (3.2)$$

biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılabilir. Gama fonksiyonunun tüm kompleks düzlem için tanımı

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, z \neq 0, -1, -2, \dots$$

şeklinde verilebilir.

Gama fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki verilmiştir.

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$
- $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$
- $\Gamma(n+1) = n!, n = 0, 1, 2, \dots,$
- $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}, n = 1, 2, 3, \dots$

3.2. Hipergeometrik Fonksiyonlar ve Özellikleri

Hipergeometrik fonksiyonlar, gerek seriler ve integraller türünden ifade edilmesi ve gerek de diğer özel fonksiyonlarla birçok bağlantısından dolayı en önemli özel fonksiyonlardan birisidir. Aşağıda hipergeometrik fonksiyonlar ve ilgili kavramların tanımı verilmiştir.

Tanım 3.2.1 (Pochhammer Sembolü): $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, a \in \mathbb{C}$ ve $a \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a(a+1) \dots (a+n-1), & n \neq 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer a ve $a+n$ negatif tamsayı ise

$$(a)_n = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma(a + n + t)}{\Gamma(a + t)}$$

eşitliği geçerlidir.

Pochhammer sembolü için $(a)_{n+1} = (a + n)(a)_n$ eşitliği her zaman sağlanır.

Tanım 3.2.2 (Hipergeometrik Fonksiyon) $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ve $(a)_n$ Pochhammer sembolü olmak üzere,

$$F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, |z| < 1 \quad (3.3)$$

fonksiyonu

$$z(1 - z)w''(z) + (c - (a + b + 1)z)w'(z) - abw(z) = 0 \quad (3.4)$$

ikinci mertebeden hipergeometrik diferensiyel denkleminin bir özel çözümü olup bu fonksiyona Gauss hipergeometrik fonksiyonu adı verilir.

Gauss hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0, \operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re}(c - a) > 0$ ve $\operatorname{Re}(c - b) > 0$ olması durumunda

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}$$

dir.

- $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b > 0, \operatorname{Re}(a + b) > 0$ ve $\operatorname{Re}(c - a - b) = 0$ ise

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{F(a, b; a + b; z)}{\operatorname{Log}(1 - z)} = -\frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

dir.

- $\operatorname{Re}(c - a - b) < 0, \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b > 0$ ve $\operatorname{Re} c > 0$ için

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z)^{a+b-c} F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

dir.

Tanım 3.2.3 (Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyon): p ve q negatif olmayan tamsayılar, her k, n için $(b_k)_n \neq 0$ olmak üzere

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^p (a_k)_n}{\prod_{k=1}^q (b_k)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (3.5)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon adı verilir.

${}_pF_q$ serisi, eğer $p \leq q + 1$ ise $|z| < 1$ için yakınsaktır (Qiu and Vuorinen 2005).

3.3. Bessel Fonksiyonları

Bessel fonksiyonları ilk olarak 1732 yılında D. Bernoulli tarafından tanımlanmasına rağmen ismini Alman gökbilimci ve matematikçi olan Bessel (1784-1846) den almaktadır. Sıfır mertebeden Bessel fonksiyonu, Bernoulli tarafından bir asılı zincirin salınım probleminin çözümünde kullanılmıştır. 1764 yılında L. Euler gerilmiş bir zarın titreşim analizinde mertebesi tamsayı olan Bessel fonksiyonlarını kullanmıştır. 1878 yılında L. Rayleigh tarafından yapılan bir incelemede, Bessel fonksiyonlarının Laplace fonksiyonlarının özel durumları olduğu gösterilmiştir. Nihayet 1817 yılında, Kepler'in gezegensel hareket denklemlerinden birinin çözümünde, Bessel tarafından kendi adıyla anılan bu fonksiyon elde edilmiştir. Bessel, 1824 yılında benzer bir problemin çözümünde yine aynı fonksiyonu kullanmıştır. Bessel fonksiyonları yukarıdaki kullanımlarının yayınlanmasından sonra birçok bilim adamı tarafından, bir katı

silindirde elektrik ya da ısıнын iletilmesi, ışığın kırınımı, suyun titreşimi gibi farklı fiziksel kavramların matematiksel olarak açıklanmasında kullanılmıştır.

Tanım 3.3.1 (Bessel Fonksiyonu) $v \in \mathbb{R}$ ya da $v \in \mathbb{C}$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - v^2)w(z) = 0 \quad (3.6)$$

ikinci mertebeden homojen diferensiyel denklemi Bessel diferensiyel denklemi olarak bilinir. (3.6) denkleminin bir özel çözümü olan ve

$$J_v(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(v + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (3.7)$$

biçiminde seri gösterimine sahip olan fonksiyona v mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu adı verilir (Baricz 2010).

Bessel fonksiyonlarının bir çok çeşidi vardır.

$$z^2 w''(z) + zw'(z) - (z^2 + v^2)w(z) = 0 \quad (3.8)$$

diferensiyel denklemi modifiye edilmiş Bessel diferensiyel denklemi olarak bilinir. (3.8) diferensiyel denkleminin bir özel çözümü, her $z \in \mathbb{C}$ için

$$I_v(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! \Gamma(v + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (3.9)$$

olup buna modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu adı verilir.

Diğer taraftan,

$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) + [z^2 - v(v+1)]w(z) = 0 \quad (3.10)$$

diferensiyel denklemi küresel Bessel diferensiyel denklemi,

$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) - [z^2 + v(v+1)]w(z) = 0 \quad (3.11)$$

diferensiyel denklemi ise modifiye edilmiş küresel Bessel diferensiyel denklemi olarak bilinir. (3.10) denkleminin bir özel çözümü, her $z \in \mathbb{C}$ için

$$j_v(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{v+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(v+n+\frac{3}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (3.12)$$

olup buna küresel Bessel fonksiyonu, (3.11) diferensiyel denkleminin bir özel çözümü, her $z \in \mathbb{C}$ için

$$i_v(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{v+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! \Gamma(v+n+\frac{3}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (3.13)$$

olup buna da modifiye edilmiş küresel Bessel fonksiyonu denir.

Yukarıda tanımlanan Bessel fonksiyonları, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekillerde ifade edilebilmektedir.

- $J_v(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^v}{\Gamma(v+1)} {}_0F_1\left(v+1; -\frac{z^2}{4}\right),$
- $I_v(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^v}{\Gamma(v+1)} {}_0F_1\left(v+1; \frac{z^2}{4}\right),$
- $j_v(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{v+\frac{1}{2}}}{\Gamma(v+\frac{3}{2})} {}_0F_1\left(v+\frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right),$

- $i_v(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{v+\frac{1}{2}}}{\Gamma(v+\frac{3}{2})} {}_0F_1\left(v+\frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right).$

Yukarıda bahsedilen dört çeşit Bessel fonksiyonu Baricz (2008) tarafından aşağıdaki biçimde genelleştirilmiştir.

Tanım 3.3.2 (Genelleştirilmiş Bessel Fonksiyonu): b, c, v ve z birer kompleks sayı olmak üzere,

$$z^2 w''(z) + b z w'(z) + [c z^2 - v^2 + (1-b)v] w(z) = 0 \quad (3.14)$$

diferensiyel denklemi genelleştirilmiş Bessel diferensiyel denklemi olarak bilinir. Her $z \in \mathbb{C}$ için (3.14) denkleminin bir özel çözümü

$$w_v(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n}{n! \Gamma\left(v+n+\frac{b+1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (3.15)$$

biçiminde olup buna genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu adı verilir (Baricz 2008).

(3.14) ve (3.15) ifadelerinde b ve c ye aşağıdaki özel değerler verilerek yukarıda bahsedilen diferensiyel denklemler ve onların çözümleri olan Bessel fonksiyonları elde edilir. Gerçekten,

- $b = c = 1$ için (3.6) denklemi ve (3.7) fonksiyonu,
- $b = 1, c = -1$ için (3.8) denklemi ve (3.9) fonksiyonu,
- $b = 2, c = 1$ için (3.10) denklemi ve (3.12) fonksiyonu,
- $b = 2, c = -1$ için (3.11) denklemi ve (3.13) fonksiyonu

bulunur.

Yukarıda verilenlere ilave olarak ν ye verilecek bazı özel değerler için Bessel fonksiyonları ile trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar arasında aşağıda verilen

- $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z,$
- $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z,$
- $J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right),$
- $I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z,$
- $I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z$

ve

- $I_{3/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sinh z}{z} - \cosh z \right)$

eşitlikleri elde edilir.

3.4. Struve Fonksiyonları

Struve fonksiyonu ilk olarak, Rus gökbilimci K. H. Struve (1854-1920) tarafından 1882 yılında yazılan bir makalede tanımlanmış ve daha sonra bu ismi almıştır. Modifiye edilmiş Struve fonksiyonu ise J. W. Nicholson tarafından 1911 yılında tanımlanmıştır. Söz konusu fonksiyonların aynı Bessel fonksiyonları gibi fizik ve mühendislikte birçok uygulaması vardır. Ayrıca, söz konusu fonksiyonların elektrodinamik, optik ve potansiyel teoride birçok uygulamalarının olduğu da bilinmektedir. Öte yandan, Bessel ve Struve fonksiyonları arasında yakın ilişki vardır.

Tanım 3.4.1 (Struve Fonksiyonu): v reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - v^2)w(z) = \frac{4 \left(\frac{z}{2}\right)^{v+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(v + \frac{1}{2})} \quad (3.16)$$

şeklindeki ikinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin bir özel çözümü olan

$$\mathbf{H}_v(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n + \frac{3}{2}) \Gamma(v + n + \frac{3}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v+1} \quad (3.17)$$

fonksiyonuna Struve fonksiyonu denir (Watson 1944; Zhang and Jin 1996). (3.16) denkleminin homojen kısmı Bessel diferansiyel denklemdir. Struve fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\mathbf{H}_v(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(v + \frac{3}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+1} {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}, v + \frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right) \quad (3.18)$$

biçiminde ifade edilebilir.

v reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + zw'(z) - (z^2 + v^2)w(z) = \frac{4 \left(\frac{z}{2}\right)^{v+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(v + \frac{1}{2})} \quad (3.19)$$

şeklindeki homojen olmayan diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olan

$$L_v(z) = -ie^{-\frac{ip\pi}{2}} H_v(iz) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\Gamma(n + \frac{3}{2}) \Gamma(v + n + \frac{3}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v+1} \quad (3.20)$$

fonksiyonuna modifiye edilmiş Struve fonksiyonu denir.

Yukarıda verilen fonksiyonlar Yağmur (2013) tarafından aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir.

Tanım 3.4.2 (Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonu): b, c, v ve z birer kompleks sayı olmak üzere

$$z^2 w''(z) + b z w'(z) + [c z^2 - v^2 + (1 - b)v] w(z) = \frac{4 \left(\frac{z}{2}\right)^{v+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(v + \frac{b}{2})} \quad (3.21)$$

diferensiyel denklemin genelleştirilmiş Struve diferensiyel denklemi adı verilir. (3.21) diferensiyel denkleminin bir özel çözümü olan

$$w_{v,b,c}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n + v + \frac{b+2}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v+1} \quad (3.22)$$

fonksiyonuna genelleştirilmiş Struve fonksiyonu adı verilir (Yağmur 2013).

3.5. Lommel Fonksiyonları

Lommel fonksiyonları, ilk olarak 1884 ve 1886 yıllarında Alman fizikçi Lommel (1837-1899) tarafından yapılan iki çalışmada tanımlanmıştır. Lommel fizik ve matematik alanında çalışmalar yapmıştır. Ayrıca Lommel'in önemli bir özelliği de nobel ödülü kazanan Stark'a doktora danışmanlığı yapmış olmasıdır. Lommel fonksiyonları saçılım ve kırınım teorileri başta olmak üzere birçok fiziksel problemin çözümünde önemli rol oynamaktadır.

Tanım 3.5.1 (Lommel Fonksiyonu): $\frac{1}{2}(-\mu \pm \nu - 3) \notin \mathbb{N}$ olmak üzere, hipergeometrik fonksiyonlar türünden

$$s_{\mu,\nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu - \nu + 1)(\mu + \nu + 1)} {}_1F_2\left(1; \frac{\mu - \nu + 3}{2}, \frac{\mu + \nu + 3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right) \quad (3.23)$$

biçiminde yazılabilen fonksiyon birinci tür Lommel fonksiyonu olarak bilinir. (3.23) ile verilen fonksiyon, homojen olmayan

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - \nu^2)w(z) = z^{\mu+1} \quad (3.24)$$

diferensiyel denkleminin bir özel çözümüdür (Baricz *et al.* 2016a).

3.6. Tam Fonksiyonlar ve Bazı Özellikleri

$\mathbb{C}$ kompleks düzleminin tamamında analitik olan fonksiyonlar, tam fonksiyonlar olarak bilinir. Bu fonksiyonların en meşhur örnekleri e^z üstel fonksiyonu, $\sin z$ ve $\cos z$ fonksiyonları ile $\sinh z$ ve $\cosh z$ fonksiyonlarıdır. Tez çalışması boyunca tam fonksiyonlardan önemli derecede faydalanılmıştır. Bu sebeple bu bölümde tam fonksiyonlarla ilgili bazı temel tanım ve özellikler verilmiştir.

Tanım 3.6.1 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bir tam fonksiyon olsun. Eğer $|z| = r$ nin yeterince büyük tüm değerleri için

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = M(r) < e^{r^A}$$

olacak biçimde pozitif bir A sabiti varsa, bu durumda $f(z)$ fonksiyonu sonlu büyüme mertebesine (*growth order*) sahiptir denir. Bir başka ifadeyle, eğer

$$|f(z)| = \mathcal{O}(e^{r^A})$$

olacak biçimde bir $A > 0$ sayısı varsa, bu durumda $f(z)$ fonksiyonu sonlu büyüme mertebesine sahiptir denir (González 1992).

Teorem 3.6.2 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bir tam fonksiyon olsun.

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere, f tam fonksiyonunun büyüme mertebesi

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \quad (3.25)$$

sayısıdır (González 1992).

Örnek 3.6.3

(i) $b \neq 0$ kompleks bir sayı ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $f(z) = e^{bz^n}$ tam fonksiyonunun büyüme mertebesi n dir. Çünkü, $b = |b|e^{i\beta}$ ve $z = re^{i\theta}$ alınırsa, bu durumda

$$\operatorname{Re}(bz^n) = |b|r^n \cos(\beta + n\theta)$$

ve

$$|f(z)| = e^{|b|r^n \cos(\beta + n\theta)} \leq e^{|b|r^n}$$

olur. Burada eşitlik hali $\theta = -\frac{\beta}{n}$ için doğrudur. Sonuç olarak

$$M(r) = e^{|b|r^n}$$

olup buradan

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\log |b|}{\log r} + n \right) = n$$

elde edilir. Özel olarak e^z büyüme mertebesi 1, e^{z^2} ise büyüme mertebesi 2 olan tam fonksiyonlardır.

(ii) $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$ polinomunun büyüme mertebesi 0 dır. Çünkü,

$$|f(z)| = |c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n| \leq |c_0| + |c_1||z| + \cdots + |c_n||z|^n$$

olup $|z| = r > 1$ alınırsa, $A = |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_n|$ olmak üzere

$$|f(z)| \leq \left(\frac{|c_0|}{r^n} + \frac{|c_1|}{r^{n-1}} + \cdots + |c_n| \right) r^n < A r^n$$

elde edilir. Eğer $r > \max(A, 1)$ alınırsa $|f(z)| < r^{n+1}$ ve $M(r) \leq r^{n+1}$ olur. Böylece,

$$\log M(r) \leq \log r^{n+1} = (n+1) \log r$$

olup, buradan

$$\log \log M(r) \leq \log(n+1) + \log \log r$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki yanı $\log r$ ile bölünür ve $r \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(n+1)}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r} \right) = 0$$

bulunur.

Teorem 3.6.4 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

formunda bir tam fonksiyon olmak üzere, f tam fonksiyonunun büyüme mertebesi

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log |c_n|} \quad (3.26)$$

dir (Levin 1996).

Örnek 3.6.5

(i) $k > 0$ olmak üzere,

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^{kn}}$$

tam fonksiyonunun büyüme mertebesi $\rho = \frac{1}{k}$ dır. Çünkü

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log \left| \frac{1}{n^{kn}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{kn \log n} = \frac{1}{k}$$

dır.

(ii) $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^n}{(kn)!}$$

tam fonksiyonunun büyüme mertebesi $\rho = \frac{1}{k}$ dır. Burada Stirling formülü olarak bilinen ve Gonzáles (1991)'e göre

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\mu(n)}, 0 < \mu(n) < \frac{1}{12n}$$

biçiminde de ifade edilebilen asimptotik ilişki dikkate alınır, bu durumda

$$(kn)! = \left(\frac{kn}{e}\right)^{kn} \sqrt{2\pi kn} e^{\mu(kn)}, 0 < \mu(kn) < \frac{1}{12kn}$$

olur. O halde

$$\log(kn)! = \left(kn + \frac{1}{2}\right) \log kn - kn + \log \sqrt{2\pi} + \mu(kn)$$

ve $n \rightarrow \infty$ iken $\mu(kn) \rightarrow 0$ olacağından,

$$\begin{aligned} \rho &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\left(kn + \frac{1}{2}\right) \log kn - kn + \log \sqrt{2\pi} + \mu(kn)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\left(kn + \frac{1}{2}\right) \log kn}{n \log n} - \frac{k}{n \log n} + \frac{\log \sqrt{2\pi}}{n \log n} + \frac{\mu(kn)}{n \log n}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(kn + \frac{1}{2}\right) \log kn}{n \log n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \log kn + \left(kn + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n}}{\log n + 1}} \\ &= \frac{1}{k \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n + 2}\right)} = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak

$$\cos \sqrt{z} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}$$

tam fonksiyonunun büyüme mertebesi $\rho = \frac{1}{2}$ dir.

Teorem 3.6.6 Eğer $f(z)$, büyüme mertebesi ρ olan bir tam fonksiyon ise, bu durumda $f'(z)$ fonksiyonunun da büyüme mertebesi ρ dur. Yani bir tam fonksiyonun büyüme mertebesi türev altında korunur (González 1992).

Teorem 3.6.7 $f_1(z)$ ve $f_2(z)$, sırasıyla büyüme mertebesi ρ_1 ve ρ_2 olan iki tam fonksiyon olsun. Bu durumda $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ tam fonksiyonunun büyüme mertebesi en fazla $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$ dir. Ancak, eğer $\rho_1 \neq \rho_2$ ise bu durumda $f(z)$ nin büyüme mertebesi tam olarak $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$ dir (González 1992).

Örnek 3.6.8

(i) $f_1(z) = e^z$, büyüme mertebesi 1 ve $f_2(z) = z^2 + z - 1$ ise büyüme mertebesi 0 olan tam fonksiyonlardır. Bunların toplamı olan $f(z) = e^z + z^2 + z - 1$ ise büyüme mertebesi 1 olan bir tam fonksiyondur.

(ii) $f_1(z) = e^z$ ve $f_2(z) = -e^z$ büyüme mertebesi 1 olan tam fonksiyonlar olmasına rağmen bunların toplamı olan $f(z) = e^z + (-e^z) = 0$ büyüme mertebesi 0 olan bir tam fonksiyondur.

Teorem 3.6.9 $f_1(z)$ ve $f_2(z)$, sırasıyla büyüme mertebesi ρ_1 ve ρ_2 olan iki tam fonksiyon olsun. Bu durumda onların çarpımı olan $f(z) = f_1(z)f_2(z)$ fonksiyonunun büyüme mertebesi en fazla $\max(\rho_1, \rho_2)$ dir. Eğer $\rho_1 \neq \rho_2$ ise, bu durumda $f(z)$ nin büyüme mertebesi tam olarak $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$ dir (González 1992).

Örnek 3.6.10 $f_1(z) = z^2$ ve $f_2(z) = e^{3z}$ sırasıyla büyüme mertebesi 0 ve 1 olan tam fonksiyonlar olup bu fonksiyonların çarpımı olan $f(z) = z^2 e^{3z}$ büyüme mertebesi 1 olan bir tam fonksiyondur. Çünkü,

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}$$

olduğundan

$$f(z) = z^2 e^{3z} = \sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{n!} z^{n+2}$$

olur. Dolayısıyla

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log \left| \frac{3^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\log n!}{n \log n} + \frac{\log 3}{\log n}}$$

elde edilir. Burada $\Gamma(n+1) = n!$ eşitliği ve c bir pozitif sabit olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \Gamma(n+c)}{n \log n} = 1$$

limit ilişkisi dikkate alınırsa $\rho = 1$ elde edilir.

Tanım 3.6.11 (Weierstrass Kanonik Çarpımı) $\{a_n\}$ sıfırdan farklı kompleks sayıların bir dizisi ve negatif olmayan bazı p sayıları için

$$\sum_{n \geq 1} |a_n|^{-p-1} < \infty$$

olsun.

$$G(u, p) = \begin{cases} 1 - u & , p = 0 \\ (1 - u) \exp \left(u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^p}{p} \right) & , p > 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\pi(z) = \prod_{n \geq 1} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$$

sonsuz çarpımı her $\{z: |z| \leq R < \infty\}$ diskinde mutlak ve düzgün yakınsak olup bu $\pi(z)$ çarpımına p cinsinden Weierstrass kanonik çarpımı adı verilir (Levin 1996).

Teorem 3.6.12 (Hadamard Teoremi) $f(z)$ sonlu büyüme mertebesine sahip bir tam fonksiyon, $a_1, a_2, \dots$ sayıları, $f(z)$ fonksiyonunun sıfırdan farklı tüm kökleri olsun. Ayrıca, $f(z)$ fonksiyonunun büyüme mertebesi ρ , $p \leq \rho$ ve $P_q(z)$ de $q \leq \rho$ olacak şekilde derecesi q olan bir polinom olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonunun orijindeki köklerinin katlılığı m ise, bu durumda $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = z^m e^{P_q(z)} \prod_{n \geq 1} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$$

formunda yazılabilir (Levin 1996).

Bu teoremin önemli bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.6.13 $c \in \mathbb{R}$ bir sabit ve

$$\sum_{n=1}^w \frac{1}{|a_n|} < \infty$$

olmak üzere, büyüme mertebesi $\rho < 1$ olan her $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = cz^m \prod_{n=1}^w \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), w \leq \infty$$

biçiminde bir kanonik çarpıma sahiptir (Levin 1996).

Örnek 3.6.14 $f(z) = \sin \pi z$ tam fonksiyonu için

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

biçiminde bir sonsuz çarpım temsili vardır. Eğer,

$$F(z) = \frac{\sin \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} z^n = 1 - \frac{\pi^2 z}{3!} + \dots$$

biçimindeki seri açılımı dikkate alınırsa, bu tam fonksiyonun büyüme mertebesi

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log \left| \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log(2n+1)! + 2n \log \pi} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \Gamma(2n+2) + 2n \log \pi} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \Gamma(2n+2)}{n \log n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log \pi}{\log n}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olacaktır. Ayrıca $F(z)$ fonksiyonunun sıfırları $z = 1, 4, \dots, n^2, \dots$ olup orijindeki köklerin katlılığı $m = 0$ olduğundan Sonuç 3.6.13'e göre

$$F(z) = \frac{\sin \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}} = C \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$$

olur. Diğer taraftan, $F(0) = 1$ olduğundan $C = 1$ olacaktır. Sonuç olarak

$$F(z) = \frac{\sin \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$$

elde edilir. Bulunan son eşitlikte z yerine z^2 yazılırsa

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

eşitliği elde edilir.

Aşağıda, tez çalışmasında önemli bir rol oynayan ve tam fonksiyonların özel bir alt sınıfı olan Laguerre-Pólya sınıfı ile Euler-Rayleigh metodu tanımlanmıştır. Ek olarak, çalışmada faydalandığımız bazı teoremler ifade edilmiştir.

Tanım 3.6.15 (Laguerre-Pólya Sınıfı) $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, κ negatif olmayan bir tamsayı, $a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, \lambda \in \{0, 1\}$ ve $\sum_{v=1}^{\infty} |t_v|^{\lambda+1} < \infty$ olmak üzere $t_v \in \mathbb{R}$ verilsin. Eğer bir Ψ tam fonksiyonu,

$$\Psi(z) = cz^{\kappa} e^{-az^2+bz} \prod_{v=1}^{\infty} (1 + t_v z) e^{-\lambda t_v z}$$

formunda yazılabiliyorsa, bu durumda Ψ fonksiyonu Laguerre-Pólya sınıfındandır denir. Laguerre-Pólya sınıfında, $\lambda = 0, a = 0, b \geq 0$ ve $v \in \mathbb{N}$ için $t_v \geq 0$ olacak şekildeki fonksiyonlara I. tiptendir denir. Ayrıca Laguerre-Pólya sınıfı reel sıfırlara sahip olan tüm polinomları içine alır (Rahman and Schmeisser 2002).

Tanım 3.6.16 (Hiperbolik Polinom) Bir cebirsel polinomun tüm sıfırları reel ise bu polinoma Hiperboliktir denir. p ve q iki reel polinom olmak üzere bu polinomların reel ve birbirini takip eden sırada sıfırlara sahip olmaları için gerekli ve yeterli şart p ve q polinomlarının lineer kombinasyonunun hiperbolik olmasıdır. Bu teoremin ileride ihtiyaç duyulacak olan özel bir hali aşağıda ifade edilmiştir (Baricz *et al.* 2016a).

Teorem 3.6.17 $p(0) = 1$ olmak üzere,

$$p(x) = 1 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \cdots + (-1)^n a_n x^n = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$$

polinomu

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

olacak şekilde pozitif sıfırlara sahip olan hiperbolik bir polinom olsun. Bu durumda herhangi bir C sabiti için,

$$q(x) = Cp(x) - xp'(x)$$

polinomu hiperboliktir (Baricz *et al.* 2016a).

Tanım 3.6.18 (Euler-Rayleigh Toplamları) $f(z)$ tam fonksiyonu,

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (3.27)$$

biçiminde bir kuvvet seri açılımına sahip olsun. Ayrıca

$$\sum_{n \geq 1} |z_n|^{-1} < \infty$$

olmak üzere bu fonksiyon

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \quad (3.28)$$

biçiminde bir sonsuz çarpım temsiline sahip olsun. Bu durumda,

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{-m}$$

kuvvet toplamaları, a_n katsayıları türünden aşağıdaki biçimde ifade edilebilir. (3.28)
ifadesinin logaritmik türevi alınırsa

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - z_n} \quad (3.29)$$

olup, buradan

$$S_1 = -\frac{f'(0)}{f(0)} = -a_1 \quad (3.30)$$

elde edilir. (3.30) ifadesinin tekrar türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_n)^2} \quad (3.31)$$

olur ve buradan

$$S_2 = -2a_2 - a_1 S_1 = -2a_2 + a_1^2 \quad (3.32)$$

elde edilir. Bu düşünce tarzına devam edilerek

$$S_n = -na_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i S_{n-i} \quad (3.33)$$

genel tekrarlama bağıntısı elde edilir. Aslında, (3.33) bağıntısı köklerin simetrik fonksiyonları cinsinden bir polinomun köklerinin kuvvetlerinin toplamaları için Newton'un formülünün bir genelleştirmesidir. Eğer kökler,

$$0 < |z_1| < |z_2| \leq |z_3| \leq \dots \quad (3.34)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa

$$z_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{S_{k+1}} \quad (3.35)$$

dır. Bu ifade $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{z_1}{z_2} \right|^k + \left| \frac{z_1}{z_3} \right|^k + \dots \right) = 0$ dan elde edilen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^k + \left(\frac{z_1}{z_3} \right)^k + \dots}{1 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{k+1} + \left(\frac{z_1}{z_3} \right)^{k+1} + \dots} = 1 \quad (3.36)$$

ifadesine denktir (Ismail and Muldoon 1995).

Teorem 3.6.19 $1 > y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{n \geq 1} y_n < \infty$$

olsun. Bu durumda

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 1} y_n^r = 0$$

dır (Ismail and Muldoon 1995).

Teorem 3.6.20 Kabul edelim ki

$$0 < x_1 < x_2 < \dots \quad (3.37)$$

olsun. Bu durumda

$$S_m^{\frac{-1}{m}} < x_1 < \frac{S_m}{S_{m+1}}, m = 1, 2, \dots \quad (3.38)$$

dır. Burada $m \rightarrow \infty$ iken alt sınırlar artan, üst sınırlar azalandır (Ismail and Muldoon 1995).

Teorem 3.6.21 Kabul edelim ki

$$x_1 < 0 < x_2 < x_3 < \dots \quad (3.39)$$

ve $S_1 < 0$ olsun. Bu durumda

$$-|S_{2m-1}|^{\frac{-1}{2m-1}} < x_1 < -S_{2m}^{\frac{-1}{2m}}, m = 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

ve

$$\frac{S_{2m}}{S_{2m+1}} < x_1 < \frac{S_{2m-1}}{S_{2m}}, m = 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

dır (Ismail and Muldoon 1995).

Tanım 3.6.22 (Landau Sembolü) f ve g , x_0 noktasının uygun bir komşuluğunda tanımlı iki fonksiyon olsun. Bu durumda, x_0 a yeterince yakın x ler için

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa $x \rightarrow x_0$ iken

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$$

yazılır. Tanımdan anlaşılacağı üzere $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ olması için gerek ve yeter şart

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$$

ifadesinin sınırlı olmasıdır. Benzer şekilde, eğer $x \rightarrow x_0$ iken

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \rightarrow 0$$

oluyorsa, bu durumda $x \rightarrow x_0$ için

$$f(x) = o(g(x))$$

yazılır. Ayrıca, x_0 a yeterince yakın x ler için $g(x) \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda f fonksiyonu g fonksiyonuna asimtotik olarak eşittir denir ve bu durum

$$f(x) \sim g(x)$$

ile gösterilir (Paris and Kaminski 2001).

Yukarıda tanımlanan Landau sembolleri için aşağıdaki özellikler sağlanır (Paris and Kaminski 2001).

- $\mathcal{O}(\mathcal{O}(f)) = \mathcal{O}(f)$
- $\sigma(\sigma(f)) = \sigma(f)$
- $\mathcal{O}(fg) = \mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g)$
- $\mathcal{O}(f)\sigma(g) = \sigma(fg)$
- $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)$

- $\sigma(f) + \sigma(f) = \sigma(f)$
- $\sigma(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)$
- $\mathcal{O}(\sigma(f)) = \sigma(\mathcal{O}(f)) = \sigma(f)$

Örnek 3.6.23 $f(x) = \log x$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda yeterince büyük x ler için

$$\frac{\log x}{x-1}$$

oranı sınırlı olduğundan, $x \rightarrow \infty$ için

$$\log x = \mathcal{O}(x-1)$$

eşitliği vardır. Üstelik, $x \rightarrow \infty$ için

$$\log x = \sigma(x-1)$$

eşitliği de doğrudur. Bunlara ek olarak, $x \rightarrow 1$ için

$$\log x \sim x-1$$

asimtotik ilişkisi vardır.

Örnek 3.6.24 Yeterince büyük n sayıları için iyi bilinen

$$n! \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$$

asimtotik ilişkisi vardır. Bu formül Stirling formülü olarak adlandırılır.

3.7. Bazı Özel Fonksiyonların Sıfırları İle İlgili Temel Teoremler

Bessel fonksiyonları başta olmak üzere özel fonksiyonların sıfırları ile bağlantılı problemler bir çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Bu bölümde Bessel, Struve ve Lommel fonksiyonlarının sıfırları ile ilgili bazı temel özelliklerden bahsedilmiştir.

Teorem 3.7.1 $\nu > -1$ ve $J_\nu(z)$, ν mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu olsun. $J_\nu(z)$ ve $\mathfrak{J}_\nu(z) = z^{1-\nu}J_\nu(z)$ fonksiyonları sonsuz çoklukta sıfıra sahiptir ve bu sıfırların tümü reeldir (Watson 1944; Kreyszig and Todd 1960).

Teorem 3.7.2 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $J_\nu(z)$ Bessel fonksiyonunun sıfırları $j_{\nu,n}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\nu \mapsto j_{\nu,n}$ fonksiyonu artandır (Watson 1944; Kreyszig and Todd 1960).

Teorem 3.7.3 $j_{\nu,n}$, $J_\nu(z)$ Bessel fonksiyonunun n . sıfırını göstermek üzere herhangi $\nu > -1$ için

$$\sum_{n \geq 1} j_{\nu,n}^{-2}$$

serisi yakınsaktır (Watson 1944; Kreyszig and Todd 1960).

Teorem 3.7.4 $j_{\nu,n}$, $J_\nu(z)$ Bessel fonksiyonunun n . sıfırını gösterebilir. Eğer $\nu > -1$ ise, bu durumda

$$0 < j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < j_{\nu,3} < \dots$$

sıralaması vardır (Watson 1944).

Teorem 3.7.5 $J_\nu(z)$ Bessel fonksiyonu ve onun türevi $J'_\nu(z)$ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırları sırasıyla j_ν ve j'_ν ile gösterilsin. Bu durumda

$$j_\nu > \nu \text{ ve } j'_\nu > \nu$$

dür (Watson 1944).

Teorem 3.7.6 $\nu > -1$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $z^{-\nu-\alpha}J_{\nu+\alpha}(z)$ fonksiyonunun tüm sıfırları basit ve reeldir. Ayrıca bu sıfırlar sonsuz çokluktadır ve tek yığılma noktaları sonsuzdadır. Ek olarak, $z^{-\nu-\alpha}J_{\nu+\alpha}(z)$ fonksiyonunun herhangi iki ardışık sıfırı arasında $z^{-\nu-\alpha-1}J_{\nu+\alpha-1}(z)$ fonksiyonunun sadece bir tane sıfırı vardır (Ismail 1982).

Teorem 3.7.7 $\nu \in (-1, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$\nu \mapsto \frac{j_{\nu,1}^2}{\nu + 1}$$

fonksiyonu artandır (Ismail and Muldoon 1988).

Teorem 3.7.8 $|\nu| < \frac{1}{2}$ ve $z > 0$ olsun. Bu durumda, $\mathbf{H}_\nu(z)$ Struve fonksiyonu her $m = 1, 2, \dots$ için $(m\pi, (m+1)\pi)$ aralığında bir kez işaret değiştirir (Steinig 1970).

Teorem 3.7.9 $|\nu| < \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{H}_\nu(z)$ fonksiyonunun tüm pozitif sıfırları basittir (Steinig 1970).

Teorem 3.7.10 $|\nu| < \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $J_\nu(z)$ nin ardışık iki pozitif sıfırı ile sınırlı her $(j_{\nu,r}, j_{\nu,r+1}]$ yarı açık aralığında $\mathbf{H}_\nu(2z)$ nin tam olarak iki tane sıfırı vardır. Ayrıca, $(0, j_{\nu,1}]$ aralığında $\mathbf{H}_\nu(2z)$ nin tam olarak bir tane sıfırı vardır (Steinig 1970).

Teorem 3.7.11 $|\nu| < \frac{1}{2}$ ve $h_{\nu,n}$, $\mathbf{H}_\nu(z)$ nin n . pozitif sıfırı olsun. Bu durumda, $\mathbf{H}_\nu(z)$ nin ardışık iki pozitif sıfırı arasında $J_\nu(z)$ nin tam olarak bir tane sıfırı vardır. Ayrıca bu sıfırlardan bir tanesi tam olarak $(0, h_{\nu,1})$ aralığındadır (Steinig 1970).

Teorem 3.7.12 $|\nu| \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere $\mathbf{H}_\nu(z)$ nin n . pozitif sıfırı $h_{\nu,n}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{H}_\nu: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 1]$

$$\mathcal{H}_\nu(z) = \sqrt{\pi} 2^\nu z^{-\nu-1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_\nu(z)$$

biçiminde tanımlanan reel tam fonksiyonun Hadamard faktörizasyonu

$$\mathcal{H}_\nu(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{h_{\nu,n}^2}\right)$$

dır. Bu sonsuz çarpım $|\nu| \leq \frac{1}{2}$ ve $n \in \{1, 2, \dots\}$ olmak üzere $z \neq h_{\nu,n}$ için mutlak yakınsaktır ve $\mathbf{H}_\nu$ fonksiyonunun Mittag-Leffler açılımı

$$\frac{\mathbf{H}_{\nu-1}(z)}{\mathbf{H}_\nu(z)} = \frac{2\nu + 1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - h_{\nu,n}^2}$$

dir (Baricz *et al.* 2017b).

Teorem 3.7.13 $|\nu| \leq \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{H}_\nu$ Struve fonksiyonunun iki sıfırı arasında $\mathbf{H}'_\nu$ nün bir sıfırı vardır. Üstelik, $|\nu| \leq \frac{1}{2}$ için $\mathbf{H}'_\nu$ nün tüm sıfırları basit ve reeldir (Baricz and Yağmur 2017).

Teorem 3.7.14 $\mu \in (0, 1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$I_{2n-1}(\mu) = \left(\left(2n - 1 + \frac{\mu}{2} \right) \pi, (2n - 1 + \mu) \pi \right)$$

ve

$$I_{2n}(\mu) = \left(2n\pi, \left(2n + \frac{\mu}{2} \right) \pi \right)$$

olsun. Bu durumda $s_{\mu,\nu}(z)$ Lommel fonksiyonunu göstermek üzere, $z \in \mathbb{R}^+$ için $s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = 0$ olması bir $n \in \mathbb{N}$ için $z \in I_n(\mu)$ olması anlamına gelir. Ayrıca $s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)$ fonksiyonu her $I_n(\mu)$ aralığında tam olarak bir tane sifıra sahiptir (Koumandos and Lamprecht 2012).

Teorem 3.7.15 $s_{\mu,\nu}(z)$ Lommel fonksiyonunu göstermek üzere,

- i. Eğer $\mu > \frac{1}{2}$ ve $|\nu| \leq \mu$ ise, bu durumda tüm $z > 0$ sayıları için $s_{\mu,\nu}(z) > 0$ dır.
- ii. Eğer $\mu = |\nu| = \frac{1}{2}$ ise, bu durumda tüm $z > 0$ sayıları için $s_{\mu,\nu}(z) \geq 0$ dır.
- iii. Eğer $\mu < \frac{1}{2}$ ise, bu durumda $s_{\mu,\nu}(z)$ Lommel fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında sonsuz sayıda işaret değişimine sahiptir (Steinig 1972; Koumandos 2017).

Teorem 3.7.16 $\mu \in (-1, 1)$ ve $\mu \neq 0$ olsun. Bu durumda $s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ Lommel fonksiyonunun iki sıfırı arasında $s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ fonksiyonunun bir sıfırı vardır. Üstelik, $\mu \in (-1, 1)$ ve $\mu \neq 0$ olması durumunda $s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ fonksiyonunun tüm sıfırları basit ve reeldir (Baricz and Yağmur 2017).

Teorem 3.7.17 $\mathfrak{C}$ basit kapalı bir yol ve $\mathfrak{D}$ onun içi olsun. Kabul edelim ki $f(z)$ fonksiyonu $\mathfrak{D}$ de analitik ve $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{C}$ de sürekli olsun. Ayrıca z pozitif yönde $\mathfrak{C}$ yi tanımladıkça, $w = f(z)$ de basit kapalı Γ eğrisini birkez tanımlasın. Bu durumda, Γ pozitif tanımlıdır ve Δ , Γ nın içi olmak üzere $w = f(z)$, Δ üzerinde $\mathfrak{D}$ nin bire-bir ve konformal bir temsilidir (Kreyszig and Todd 1960).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde normalize edilmiş birinci tür bazı Bessel, Struve ve Lommel fonksiyonları dikkate alınarak bu fonksiyonların ünivalentlik, yıldızlılık ve konvekslik yarıçapları gibi geometrik özellikleri üzerine yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca Struve fonksiyonu ve türevinin lineer kombinasyonu ile Struve ve Lommel fonksiyonlarının türevlerinin sıfırları için bazı yeni alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

4.1. Bessel Fonksiyonlarının Ünivalentlik Yarıçapları

Normalize edilmiş birinci tür Bessel fonksiyonlarının ünivalentlik ve yıldızlılık yarıçapları üzerine elde edilen bazı yeni sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

Teorem 4.1.1 Normalize edilmiş birinci tür

$$z \mapsto \varphi_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{1-\nu} J_\nu(z)$$

Bessel fonksiyonunun ünivalentlik (ve yıldızlılık) yarıçapı $r^*(\varphi_\nu)$ olmak üzere her $\nu > -1$ için

$$r^*(\varphi_\nu) < \sqrt{2(\nu + 1)}$$

dir. Üstelik,

$$K(\nu) = \frac{2(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 4)(4\nu^2 + 26\nu + 49)}{16\nu^4 + 208\nu^3 + 1032\nu^2 + 2341\nu + 1987}$$

olmak üzere, ünivalentlik yarıçapı $r^*(\varphi_\nu)$ aşağıdaki

$$2\sqrt{\frac{\nu + 1}{3}} < r^*(\varphi_\nu) < 2\sqrt{\frac{3(\nu + 1)(\nu + 2)}{4\nu + 13}},$$

$$2^4 \sqrt{\frac{(\nu+1)^2(\nu+2)}{4\nu+13}} < r^*(\varphi_\nu) < 2 \sqrt{\frac{(\nu+1)(\nu+3)(4\nu+13)}{2(4\nu^2+26\nu+49)}},$$

ve

$$2^6 \sqrt{\frac{(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu+3)}{2(4\nu^2+26\nu+49)}} < r^*(\varphi_\nu) < 2\sqrt{K(\nu)}$$

eşitsizliklerini sağlar (Aktaş *et al.* 2017b).

Burada $\nu > -1$ olmak üzere ünivalentlik yarıçapı için elde edilen $r^*(\varphi_\nu) < \sqrt{2(\nu+1)}$ eşitsizliği Kreyszig ve Todd (1960) tarafından elde edilen $r^*(\varphi_\nu) < \sqrt{\frac{12(\nu+2)}{5}}$ eşitsizliğini geliştirmektedir. Ayrıca kullanılan yaklaşım daha basit ve Bessel fonksiyonlarının sıfırlarının ilk Rayleigh toplamı temeline dayanmaktadır. Diğer taraftan, yukarıda verilen ilk alt sınır daha önce Kreyszig ve Todd (1960) tarafından tamamen farklı bir yöntem kullanılarak elde edilmiştir. Son olarak, $r^*(\varphi_\nu)$ ünivalentlik yarıçapı için yukarıda verilen üst sınırlardan birincisi ve alt sınırlardan ikincisi dikkate alınırsa

$$4\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \sqrt{\frac{\nu+2}{4\nu+13}} < \frac{(r^*(\varphi_\nu))^2}{\nu} < 2\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da $\nu \rightarrow \infty$ olması durumunda

$$\frac{(r^*(\varphi_\nu))^2}{\nu} \rightarrow 2$$

elde edilir. Bu limit ilişkisi daha önce Hayden ve Merkes (1964) tarafından Bessel fonksiyonları için sürekli kesirler kullanılarak ispatlanmıştır.

İspat: J_ν , ν mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonunu ve $j_{\nu,n}$ ler de Bessel fonksiyonunun sıfırlarını göstermek üzere,

$$\mathfrak{I}_\nu(z) = z^{1-\nu} J_\nu(z) = \frac{z}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{j_{\nu,n}^2}\right) \quad (4.1)$$

kanonik çarpımının var olduğu bilinmektedir (Watson 1944). Buradan

$$\varphi_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) z^{1-\nu} J_\nu(z) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{j_{\nu,n}^2}\right) \quad (4.2)$$

olup, (4.2) eşitliğinin her iki yanının önce logaritması alınır ve taraf tarafa türetilirse,

$$\frac{\varphi'_\nu(z)}{\varphi_\nu(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{j_{\nu,n}^2 - z^2}$$

elde edilir. Şimdi $\nu > -1$ olmak üzere $r^*(\varphi_\nu)$ için Kreyszig ve Todd (1960) tarafından elde edilen bazı kesin ilişkiler ve Bessel fonksiyonlarının ilk Rayleigh toplamları dikkate alınır,

$$\frac{1}{(r^*(\varphi_\nu))^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{j_{\nu,n}^2 - (r^*(\varphi_\nu))^2} > \sum_{n \geq 1} \frac{2}{j_{\nu,n}^2} = \frac{1}{2(\nu+1)} \quad (4.3)$$

elde edilir. Buradan da

$$r^*(\varphi_\nu) < \sqrt{2(\nu+1)}$$

eşitsizliği bulunur. Diğer taraftan, Euler-Rayleigh eşitsizlikleri kullanılarak $r^*(\varphi_\nu)$ ünivalentlik yarıçapı için daha dar aralıklar elde etmek mümkündür. Bunun için

$$\varphi_v(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{4^n n! (v+1)_n} \quad (4.4)$$

fonksiyonunun $v > -1$ olduğunda sıfırlarının tamamen reel olduğunu hatırlamak yeterlidir (Kreyszig and Todd 1960). Sonuç olarak, bu fonksiyon reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ ye ait ve $\mathcal{LP}$ sınıfı türev altında kapalı olduğundan φ'_v fonksiyonu da $\mathcal{LP}$ sınıfına aittir. Yani φ'_v fonksiyonunun sıfırları da tamamen reeldir. Bu yüzden

$$z \mapsto \psi_v(z) = \varphi'_v(2i\sqrt{z}) = \sum_{n > 0} \frac{(2n+1)}{n! (v+1)_n} z^n \quad (4.5)$$

fonksiyonunun sadece negatif reel sıfırları vardır. Ayrıca $\Gamma(n+1) = n!$ ve c bir sabit olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \Gamma(n+c)}{n \log n} = 1$$

olduğu dikkate alınır,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\log \Gamma(n+1)}{n \log n} + \frac{\log \Gamma(n+v+1)}{n \log n} - \frac{\log \Gamma(v+1)}{n \log n} - \frac{\log(2n+1)}{n \log n}} = \frac{1}{2}$$

olacağından ψ_v tam fonksiyonunun büyüme mertebesi $\frac{1}{2}$ olarak bulunur. Böylece ψ_v fonksiyonu, $n \in \mathbb{N}$ için $a_{v,n} > 0$ olmak üzere,

$$\psi_v(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{a_{v,n}}\right) \quad (4.6)$$

çarpım temsiline sahiptir. Burada, J_v Bessel fonksiyonunun sonsuz toplam temsili ve $\sigma_k = \sum_{n \geq 1} a_{v,n}^{-k}$ Euler-Rayleigh toplamları dikkate alınır,

$$\frac{\psi'_v(z)}{\psi_v(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z + a_{v,n}} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{a_{v,n}^{k+1}} z^k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sigma_{k+1} z^k, |z| < a_{v,1} \quad (4.7)$$

ve

$$\frac{\psi'_v(z)}{\psi_v(z)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n+3)z^n}{n!(v+1)_{n+1}} \bigg/ \sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)z^n}{n!(v+1)_n} \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) ifadeleri eşitlenir ve Cauchy çarpımı yapılırsa, aynı dereceli terimlerin katsayılarından,

$$\sigma_1 = \frac{3}{v+1}, \sigma_2 = \frac{4v+13}{(v+1)^2(v+2)}, \sigma_3 = \frac{2(4v^2+26v+49)}{(v+1)^3(v+2)(v+3)}$$

ve

$$\sigma_4 = \frac{16v^4 + 208v^3 + 1032v^2 + 2341v + 1987}{(v+1)^4(v+2)^2(v+3)(v+4)}$$

elde edilir. Son olarak, ψ_v fonksiyonu için $v > -1$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$2\sqrt{\sigma_k^{-\frac{1}{k}}} < r^*(\varphi_v) < 2\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}}}$$

biçimindeki Euler-Rayleigh eşitsizlikleri dikkate alınır, özellikle $k \in \{1,2,3\}$ için teoremden ifade edilen eşitsizlikler elde edilir. Burada k nın daha büyük değerleri dikkate alınır, daha dar aralıklar elde etmek mümkündür. Fakat işlemlerin çok karmaşık olması sebebiyle k nın ilk üç değeri dikkate alınmıştır.

Teorem 4.1.2 $v > -1$ olmak üzere aşağıdaki iddialar doğrudur.

a. Normalize edilmiş birinci tür

$$z \mapsto \phi_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{1-\frac{\nu}{2}} J_\nu(\sqrt{z})$$

Bessel fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(\phi_\nu)$, aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşittir ve bu yarıçap

$$\sqrt{z} J'_\nu(\sqrt{z}) + (2 - \nu) J_\nu(\sqrt{z}) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. Her $\nu > -1$ için $r^*(\phi_\nu)$ ünivalentlik (ve yıldızlılık) yarıçapı için

$$r^*(\phi_\nu) < 4(\nu + 1)$$

dir. Üstelik, bu yarıçap

$$2(\nu + 1) < r^*(\phi_\nu) < \frac{8(\nu + 1)(\nu + 2)}{\nu + 5},$$

$$\frac{4(\nu + 1)\sqrt{\nu + 2}}{\sqrt{\nu + 5}} < r^*(\phi_\nu) < \frac{4(\nu + 1)(\nu + 3)(\nu + 5)}{\nu^2 + 8\nu + 23}$$

ve

$$4(\nu + 1) \sqrt[3]{\frac{(\nu + 2)(\nu + 3)}{\nu^2 + 8\nu + 23}} < r^*(\phi_\nu) < \frac{4(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 4)(\nu^2 + 8\nu + 23)}{\nu^4 + 15\nu^3 + 90\nu^2 + 267\nu + 287}$$

eşitsizliklerini sağlar.

c. $\nu \rightarrow \infty$ iken ünivalentlik (ve yıldızlılık) yarıçapı $r^*(\phi_\nu)$,

$$\frac{r^*(\phi_\nu)}{4(\nu + 1)} \rightarrow 1$$

limit ilişkisini sağlar. Üstelik, $\nu \rightarrow \infty$ iken

$$r^*(\phi_\nu) = 4(\nu + 1) \left(1 - \frac{1}{\nu} + \mathcal{O}(\nu^{-2}) \right)$$

asimtotik ilişkisi vardır.

d. $\nu \mapsto r^*(\phi_\nu)$ fonksiyonu $(-1, \infty)$ aralığı üzerinde artandır (Aktaş *et al.* 2017b).

İspat:

a. $z \mapsto z + \alpha_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu reel katsayılara sahipse, bu durumda onun yıldızlılık yarıçapının ünivalentlik yarıçapından küçük ya da eşit olduğu bilinmektedir (Wilf 1962). Diğer taraftan, ϕ_ν fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapının, ϕ'_ν fonksiyonunun ilk pozitif sıfırından küçük ya da eşit olduğu bilinmektedir (Wilf 1962). Fakat, Baricz *et al.* (2014;2016b)'ye göre, ϕ'_ν fonksiyonunun ilk pozitif sıfırı, yani

$$\sqrt{z}J'_\nu(\sqrt{z}) + (2 - \nu)J_\nu(\sqrt{z}) = 0$$

denkleminin ilk pozitif sıfırı aslında ϕ_ν fonksiyonunun yıldızlılık yarıçapıdır. Bunlar gösteriyor ki, ϕ_ν fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı yıldızlılık yarıçapına eşittir.

b. Bessel fonksiyonu J_ν için iyi bilinen sonsuz çarpım temsili dikkate alınırsa

$$2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{-\nu} J_\nu(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{j_{\nu,n}^2} \right) \quad (4.9)$$

olur ve buradan

$$\frac{\phi'_\nu(z)}{\phi_\nu(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z - j_{\nu,n}^2} \quad (4.10)$$

elde edilir ki bu ifade $r^*(\phi_v)$ de sıfır olur. Böylece birinci tür Bessel fonksiyonlarının sıfırları için ilk Rayleigh toplamları türünden

$$\frac{1}{r^*(\phi_v)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{j_{v,n}^2 - r^*(\phi_v)} > \sum_{n \geq 1} \frac{1}{j_{v,n}^2} = \frac{1}{4(v+1)} \quad (4.11)$$

ifadesi elde edilir. Buradan da

$$r^*(\phi_v) < 4(v+1)$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi ϕ_v fonksiyonunun sonsuz toplam temsili

$$\phi_v(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{4^n n! (v+1)_n} \quad (4.12)$$

ve ϕ'_v türevi dikkate alınırsa, bu durumda

$$\Phi_v(z) = \phi'_v(-4z) = \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n! (v+1)_n} z^n \quad (4.13)$$

olur. $v > -1$ için normalize edilmiş Bessel fonksiyonu ϕ_v sadece reel sıfırlara sahip olduğundan reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ ye aittir (Dimitrov and Cheikh 2009). Böylece ϕ'_v fonksiyonu da $\mathcal{LP}$ ye ait ve sadece reel sıfırlara sahiptir. Sonuç olarak bu Φ_v için de doğrudur. Üstelik, Φ_v fonksiyonunun katsayıları negatif olmadığından ve $\Phi_v \in \mathcal{LP}$ olduğundan bu Φ_v fonksiyonunun sadece negatif sıfırlara sahip olmasını gerektirir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $b_{v,n} > 0$ olmak üzere, Φ_v fonksiyonu

$$\Phi_v(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{b_{v,n}}\right)$$

sonsuz çarpımı olarak yazılabilir. Şimdi J_ν Bessel fonksiyonunun sonsuz toplam temsili ve $\rho_k = \sum_{n \geq 1} b_{\nu,n}^{-k}$ Euler-Rayleigh toplamı kullanılarak

$$\frac{\Phi'_\nu(z)}{\Phi_\nu(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z + b_{\nu,n}} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{b_{\nu,n}^{k+1}} z^k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \rho_{k+1} z^k, |z| < b_{\nu,1} \quad (4.14)$$

ve

$$\frac{\Phi'_\nu(z)}{\Phi_\nu(z)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+2)z^n}{n! (\nu+1)_{n+1}} / \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)z^n}{n! (\nu+1)_n} \quad (4.15)$$

elde edilir. Bu son iki eşitlik yardımıyla Euler-Rayleigh toplamı ν türünden ifade edilebilir. Ayrıca

$$\rho_k^{-\frac{1}{k}} < b_{\nu,1} < \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}} \quad (4.16)$$

biçimindeki Euler-Rayleigh eşitsizlikleri dikkate alınırsa, $\nu > -1$ ve $k \in \mathbb{N}$ iken, $4b_{\nu,1}$ için

$$4\rho_k^{-\frac{1}{k}} < r^*(\phi_\nu) < 4\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}} \quad (4.17)$$

elde edilir. Şimdi (4.14) ve (4.15) ifadelerinde aynı dereceli terimlerin katsayıları karşılaştırılarak

$$\rho_1 = \frac{2}{\nu+1}, \rho_2 = \frac{\nu+5}{(\nu+1)^2(\nu+2)}, \rho_3 = \frac{\nu^2+8\nu+23}{(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu+3)}$$

ve

$$\rho_4 = \frac{v^4 + 15v^3 + 90v^2 + 267v + 287}{(v+1)^4(v+2)^2(v+3)(v+4)}$$

elde edilir. Bunlar (4.17) eşitsizliklerinde dikkate alınarak teoremden ifade edilen eşitsizlikler elde edilir.

c. (4.17) ile verilen Euler-Rayleigh eşitsizlikleri $k = 2$ ve $k = 3$ özel değerleri için dikkate alınır, $r^*(\phi_v)$ ünivalentlik yarıçapı için $v \rightarrow \infty$ olması halinde

$$\frac{r^*(\phi_v)}{4(v+1)} \rightarrow 1$$

elde edilir. Üstelik, eğer (4.17) eşitsizliği $k = 3$ için kullanılırsa $v \rightarrow \infty$ iken

$$4\rho_3^{-\frac{1}{3}} = 4 \left(\frac{v^2 + 8v + 23}{(v+1)^3(v+2)(v+3)} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= 4(v+1) \frac{(v+2)^{\frac{1}{3}}(v+3)^{\frac{1}{3}}}{(v^2 + 8v + 23)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= 4(v+1) \frac{\left(1 + \frac{2}{3v} + \mathcal{O}(v^{-2})\right) \left(1 + \frac{1}{v} + \mathcal{O}(v^{-2})\right)}{\left(1 + \frac{8}{3v} + \mathcal{O}(v^{-2})\right)}$$

$$= 4(v+1) \left(1 + \frac{2}{3v} + \frac{1}{v} + \mathcal{O}(v^{-2})\right) \left(1 - \frac{8}{3v} + \mathcal{O}(v^{-2})\right)$$

$$= 4(v+1) \left(1 + \frac{2}{3v} + \frac{1}{v} - \frac{8}{3v} + \mathcal{O}(v^{-2})\right)$$

$$= 4(v+1) \left(1 - \frac{1}{v} + \mathcal{O}(v^{-2}) \right)$$

ve

$$4 \frac{\rho_3}{\rho_4} = 4(v+1) \frac{(v+2)(v+4)(v^2+8v+23)}{v^4+15v^3+90v^2+267v+287}$$

$$= 4(v+1) \frac{\left(1 + \frac{2}{v}\right) \left(1 + \frac{4}{v}\right) \left(1 + \frac{8}{v} + \mathcal{O}(v^{-2})\right)}{\left(1 + \frac{15}{v} + \mathcal{O}(v^{-2})\right)}$$

$$= 4(v+1) \left(1 + \frac{2}{v} + \frac{4}{v} + \frac{8}{v} + \mathcal{O}(v^{-2}) \right) \left(1 - \frac{15}{v} + \mathcal{O}(v^{-2}) \right)$$

$$= 4(v+1) \left(1 - \frac{1}{v} + \mathcal{O}(v^{-2}) \right)$$

olur ki bunun anlamı

$$r^*(\phi_v) = 4(v+1) \left(1 - \frac{1}{v} + \mathcal{O}(v^{-2}) \right)$$

olmasıdır.

d. ϕ_v fonksiyonunun logaritmik türevi Y_v ile gösterilirse (4.10) ifadesi ve (4.11) ifadesinin sol tarafından $z \in (0, r^*(\phi_v))$ için $Y_v(z) > 0$ ve $Y_v(r^*(\phi_v)) = 0$ elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $v \mapsto j_{v,n}$ fonksiyonu $(-1, \infty)$ üzerinde artan olduğundan bu durum $\mu > v$ ve $z \in (0, r^*(\phi_v))$ için

$$\Upsilon_{\mu}(z) - \Upsilon_{\nu}(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{j_{\mu,n}^2 - j_{\nu,n}^2}{(z - j_{\mu,n}^2)(z - j_{\nu,n}^2)}$$

serisindeki terimlerin pozitif olmasını gerektirir. Böylece $z \in (0, r^*(\phi_{\nu}))$ için $\Upsilon_{\mu}(z) > 0$ olup $r^*(\phi_{\mu}) > r^*(\phi_{\nu})$ elde edilir ki bu istenilendir.

4.2. Struve Fonksiyonlarının Ünivalentlik Yarıçapları

Bu bölümde elde edilen sonuçlar normalize edilmiş birinci tür Struve fonksiyonları üzerine olup Baricz *et al.* (2016a)'nın sonuçlarını tamamlamaktadır.

Teorem 4.2.1 $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ olmak üzere aşağıdaki iddialar doğrudur.

a. Normalize edilmiş

$$z \mapsto v_{\nu}(z) = \sqrt{\pi} 2^{\nu} z^{-\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_{\nu}(z)$$

Struve fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(v_{\nu})$, aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşittir. Ayrıca $r^*(v_{\nu})$ yarıçapı,

$$z \mathbf{H}'_{\nu}(z) - \nu \mathbf{H}_{\nu}(z) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ olmak üzere, $r^*(v_{\nu})$ ünivalentlik yarıçapı için

$$r^*(v_{\nu}) < \sqrt{3 \left(\nu + \frac{3}{2}\right)}$$

üst sınırı vardır. Üstelik,

$$S_1(v) = \frac{63(2v+3)(2v+5)(2v+9)(4v^2+32v+79)}{592v^4+9296v^3+56352v^2+159660v+171315}$$

olmak üzere, $v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ olduğunda $r^*(v_v)$ ünivalentlik yarıçapı aşağıdaki

$$\sqrt{2v+3} < r^*(v_v) < \sqrt{\frac{3(2v+3)(2v+5)}{2v+9}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{3(2v+3)^2(2v+5)}{2v+9}} < r^*(v_v) < \sqrt{\frac{5(2v+3)(2v+7)(2v+9)}{3(4v^2+32v+79)}}$$

ve

$$\sqrt[6]{\frac{5(2v+3)^3(2v+5)(2v+7)}{4v^2+32v+79}} < r^*(v_v) < \sqrt{S_1(v)}$$

eşitsizliklerini sağlar (Aktaş *et al.* 2017b).

Eğer $v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için $r^*(v_v) > \sqrt{2v+3}$ ve $\sqrt{2(v+1)} > r^*(\varphi_v)$ eşitsizlikleri dikkate alınırsa, açık olarak $r^*(v_v) > r^*(\varphi_v)$ elde edilir. Yani, normalize edilmiş birinci tür Struve fonksiyonu v_v nün ünivalentlik yarıçapı, normalize edilmiş birinci tür Bessel fonksiyonu φ_v nün ünivalentlik yarıçapından büyüktür.

İspat:

a. Ünivalentlik yarıçapına ilişkin bu iddianın ispatı için Kreyszig ve Todd (1960) tarafından verilen ispat metodu kullanılmıştır. İlk önce $r < h_{v,1}$ olmak üzere

$$\theta \mapsto h(\theta) = |(re^{i\theta})^{-v} \mathbf{H}_v(re^{i\theta})|$$

fonksiyonunun artan olduğu gösterilmelidir. Baricz *et al.* (2017b)'den biliniyor ki

$$v_v(z) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{h_{v,n}^2}\right) \quad (4.18)$$

sonsuz çarpım temsili vardır. Bu temsili kullanılarak, $r < h_{v,1}$ için $h(\theta)$ fonksiyonunu pozitif ve artan çarpanların bir çarpımı olarak yazmak mümkündür. Yani,

$$\begin{aligned} h^2(\theta) &= (re^{-i\theta})^{-v} \mathbf{H}_v(re^{-i\theta}) (re^{i\theta})^{-v} \mathbf{H}_v(re^{i\theta}) \\ &= \left[\frac{r}{\sqrt{\pi} 2^v \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right)} \right]^2 \prod_{n \geq 1} (1 + r^4 h_{v,n}^{-4} - 2r^2 \cos 2\theta h_{v,n}^{-2}) \end{aligned}$$

olur ki burada θ açısı 0 dan $\frac{\pi}{2}$ ye artarken, $\cos 2\theta$ ifadesi, 1 den -1 e azalacaktır. Böylece son çarpımdaki her çarpan $r < h_{v,1}$ için pozitif ve artan olduğundan bu çarpımın kendisi artandır. Bu ise $\theta \mapsto h(\theta)$ fonksiyonunun $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ üzerinde artan olduğunu gösterir.

Diğer taraftan $x \geq 0$ için $v_v(x)$ fonksiyonu dikkate alınırsa $v_v(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ olarak yazılabilir ve böylece v_v artarak devam eder. Sonuç olarak, v_v maksimum olacak şekilde bir son $r^*(v_v) < h_{v,1}$ sayısı vardır. Üstelik, $x > r^*(v_v)$ için $v_v(x)$ 'in değerleri tekrarlanacağından ünivalentlik yarıçapı $r^*(v_v)$ sayısını geçemez. Şimdi $v_v(x)$ fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapının $r^*(v_v)$ olduğunu gösterelim. (4.18) ifadesi logaritmik olarak türetilir ve düzenlenirse $r^*(v_v)$ sayısı

$$\frac{v'_v(x)}{v_v(x)} = \frac{1}{x} - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{x}{h_{v,n}^2 - x^2}$$

fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı olarak belirlenebilir. Buradan da

$$\frac{xv'_v(x)}{v_v(x)} = 1 - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{h_{v,n}^2 - x^2}$$

olur ve

$$\frac{1}{(r^*(v_v))^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{h_{v,n}^2 - (r^*(v_v))^2} \quad (4.19)$$

elde edilir. İkinci adım olarak v_v fonksiyonunun Weierstrassian kanonik çarpımı yardımı ile

$$0 \leq \arg(r^*(v_v)e^{i\theta})^{-v} \mathbf{H}_v(r^*(v_v)e^{i\theta}) \leq \theta$$

olduğu gösterilebilir. Burada $r^*(v_v)$, $x \mapsto x^{-v} \mathbf{H}_v(x)$ bir maksimuma sahip olacak şekildeki en küçük pozitif sayıdır. (4.18) eşitliğinden

$$P_v(\theta) = (r^*(v_v))^{-1} e^{-i\theta} (r^*(v_v)e^{i\theta})^{-v} \mathbf{H}_v(r^*(v_v)e^{i\theta})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^v \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right)} \prod_{n \geq 1} (1 - (r^*(v_v))^2 e^{2i\theta} h_{v,n}^{-2})$$

denirse, $v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ve $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ için

$$-\theta \leq \arg P_v < 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\mathcal{S}_{v,n} = (r^*(v_v))^2 h_{v,n}^{-2}$$

ve

$$p_{v,n} = 1 - \mathcal{S}_{v,n} e^{2i\theta} = 1 - \mathcal{S}_{v,n} \cos 2\theta - i \mathcal{S}_{v,n} \sin 2\theta$$

denirse, bu durumda

$$-\arg p_{v,n} = \arctan \frac{\mathcal{S}_{v,n} \sin 2\theta}{1 - \mathcal{S}_{v,n} \cos 2\theta}$$

olur. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ için $0 < \sin 2\theta < 2\theta$ ve $-1 < \cos 2\theta < 1$ oldukları dikkate alınır, $\mathcal{S}_{v,n} = (r^*(v_v))^2 h_{v,n}^{-2} > 0$ olduğundan

$$\frac{\mathcal{S}_{v,n} \sin 2\theta}{1 - \mathcal{S}_{v,n} \cos 2\theta} < \frac{2\theta \mathcal{S}_{v,n}}{1 - \mathcal{S}_{v,n}}$$

elde edilir. $n = 1, 2, \dots$ için $\mathcal{S}_{v,n} < 1$ ve $x > 0$ için $\arctan x < x$ olduğundan

$$0 < -\arg p_{v,n} < \frac{2\theta \mathcal{S}_{v,n}}{1 - \mathcal{S}_{v,n}}$$

bulunur. Şimdi n üzerinde toplam alınır ve (4.19) eşitliği dikkate alınır

$$0 < -\sum_{n \geq 1} \arg p_{v,n} < \sum_{n \geq 1} \frac{2\theta \mathcal{S}_{v,n}}{1 - \mathcal{S}_{v,n}} = \sum_{n \geq 1} \frac{2\theta (r^*(v_v))^2 h_{v,n}^{-2}}{1 - (r^*(v_v))^2 h_{v,n}^{-2}} = \theta$$

$$\Rightarrow 0 < -\sum_{n \geq 1} \arg \left(1 - (r^*(v_v))^2 h_{v,n}^{-2} e^{2i\theta} \right) < \theta$$

$$\Rightarrow 0 < -\arg \prod_{n \geq 1} (1 - (r^*(v_v))^2 h_{v,n}^{-2} e^{2i\theta}) < \theta$$

$$\Rightarrow 0 < -\arg \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} 2^v \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right)} \prod_{n \geq 1} (1 - (r^*(v_v))^2 h_{v,n}^{-2} e^{2i\theta}) \right) < \theta$$

$$\Rightarrow 0 < -\arg P_v < \theta$$

olup, buradan $v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ve $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ için

$$-\theta < \arg P_v < 0$$

elde edilir. Son olarak $v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için $v_v(z)$ fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapının $r^*(v_v)$ olduğu gösterilebilir. $\mathcal{C}$ eğrisi, reel eksenin $c_1: 0 \leq x \leq r^*(v_v)$ parçası; $|z| = r^*(v_v)$ çemberinin $c_2: 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ yayı ve imajiner eksenin $c_3: r^*(v_v) > y > 0$ parçası olmak üzere 3 parçadan oluşan eğri olsun. Yukarıdaki özellikler yardımıyla $\mathcal{C}$ eğrisinin v_v altındaki görüntüsünün çift katlı noktaya sahip olmadığını göstermek yeterlidir. γ_i ler c_i lerin v_v altındaki görüntüleri olmak üzere, γ_1, γ_2 ve γ_3 eğrileri basit eğrilerdir. Çünkü yukarıda izlenen adımlar dikkate alınır, $r^*(v_v)$ noktası $v_v(x)$ in ilk pozitif maksimumu olduğundan $v_v(x)$ fonksiyonu c_1 üzerinde reel ve kesin artan olup, böylece γ_1 basittir. Ayrıca, $|x^{-v} \mathbf{H}_v(x)|$ fonksiyonu θ ya göre c_2 üzerinde kesin artan olduğundan γ_2 basittir. Son olarak, $v_v(z)$ fonksiyonunun seri açılımı dikkate alındığında bu fonksiyon c_3 üzerinde pür imajiner olup, y ye göre azalandır. O halde γ_3 basittir. Üstelik, v_v fonksiyonu c_2 üzerinde gerçekten kompleks olduğundan bu durum γ_1 ve γ_3 ün γ_2 ile ortak noktasının olmamasını gerektirir. Ayrıca v_v fonksiyonu c_1 üzerinde reel, c_3 üzerinde pür imajiner olduğundan γ_1 ve γ_3 eğrileri de ortak noktaya sahip olamazlar. Böylece, v_v altında $\mathcal{C}$ 'nin görüntüsü γ iki katlı noktaya sahip değildir. Dolayısıyla Teorem 3.7.17 den v_v nün ünivalentlik yarıçapının $r^*(v_v)$ olduğu görülür. Şimdi, Wilf (1962)'den biliniyor ki, $u_n > 0$ ve $\sum_{n \geq 1} u_n^{-2} < \infty$ olmak üzere bir tam f fonksiyonu

$$f(z) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{u_n^2}\right)$$

formuna sahipse, bu durumda f nin ünivalentlik ve yıldızlılık yarıçapı çakışmaktadır. Ayrıca bu yarıçap f' nün en küçük pozitif sıfırına eşittir. Böylece, bu sonuç normalize edilmiş Struve fonksiyonu v_ν ye uygulanırsa, $r^*(v_\nu)$ ünivalentlik yarıçapının yıldızlılık yarıçapına eşit olduğu görülür. Ayrıca bu yarıçap Baricz *et al.* (2016a)'ya göre

$$z\mathbf{H}'_\nu(z) - \nu\mathbf{H}_\nu(z) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. Baricz *et al.* (2017b) tarafından verilen ve Struve fonksiyonunun Mittag-Leffler açılımı olan

$$\frac{\mathbf{H}_{\nu-1}(z)}{z\mathbf{H}_\nu(z)} - \frac{2\nu+1}{z^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{z^2 - h_{\nu,n}^2} \quad (4.20)$$

eşitliği dikkate alınır,

$$\frac{v'_\nu(z)}{v_\nu(z)} = -\frac{\nu}{z} + \frac{\mathbf{H}'_\nu(z)}{\mathbf{H}_\nu(z)} = -\frac{2\nu}{z} + \frac{\mathbf{H}_{\nu-1}(z)}{\mathbf{H}_\nu(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - h_{\nu,n}^2}$$

olur ki bu ifade $r^*(v_\nu)$ da sıfır olur. (4.20) ifadesinde Struve fonksiyonunun sıfırları için ilk Rayleigh toplamı dikkate alınır, $r^*(v_\nu)$ ünivalentlik yarıçapı için aşağıdaki üst sınır elde edilir. Yani,

$$\frac{zv'_\nu(z)}{v_\nu(z)} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{z^2 - h_{\nu,n}^2}$$

olup, buradan

$$\frac{1}{(r^*(v_\nu))^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{h_{\nu,n}^2 - (r^*(v_\nu))^2} > \sum_{n \geq 1} \frac{2}{h_{\nu,n}^2} = \frac{2}{3(2\nu + 3)}$$

ve buradan da

$$r^*(v_\nu) < \sqrt{3\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}$$

elde edilir. Şimdi,

$$v_\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{4^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_n}$$

fonksiyonu ve

$$V_\nu(z) = v'_\nu(2i\sqrt{z}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)z^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_n} \quad (4.21)$$

sonsuz toplam temsili dikkate alınırsa, Baricz *et al.* (2017b)'den biliniyor ki v_ν fonksiyonu $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için sadece reel sıfırlara sahiptir ve Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ nin bir üyesidir. Böylece v'_ν fonksiyonu da $\mathcal{LP}$ de olup sadece reel sıfırlara sahip olacağından, V_ν fonksiyonu sadece negatif reel sıfırlara sahiptir. Ayrıca V_ν tam fonksiyonunun büyüme mertebesi $\frac{1}{2}$ olup her $n \in \mathbb{N}$ ve $c_{\nu,n} > 0$ için

$$V_\nu(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{c_{\nu,n}}\right) \quad (4.22)$$

sonsuz çarpımı olarak yazılabilir. Şimdi Euler-Rayleigh toplamı $\tau_k = \sum_{n \geq 1} c_{v,n}^{-k}$ ve $\mathbf{H}_v$ Struve fonksiyonunun sonsuz toplam temsili dikkate alınır,

$$\frac{V'_v(z)}{V_v(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z + c_{v,n}} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^k}{c_{v,n}^{k+1}} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \tau_{k+1} z^k, \quad |z| < c_{v,1}$$

ve

$$\frac{V'_v(z)}{V_v(z)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n+3)(n+1)z^n}{\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(v+\frac{3}{2}\right)_{n+1}} \bigg/ \sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)z^n}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(v+\frac{3}{2}\right)_n}$$

yazılır. Teorem 4.1.1 deki gibi Bessel fonksiyonu için yapılan adımlar takip edilir ve $k \in \mathbb{N}$ ve $v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için $\tau_k^{-\frac{1}{k}} < c_{v,1} < \frac{\tau_k}{\tau_{k+1}}$ Euler-Rayleigh eşitsizlikleri kullanılırsa, bu durumda $2\sqrt{c_{v,1}}$ için

$$2\sqrt{\tau_k^{-\frac{1}{k}}} < r^*(v_v) < 2\sqrt{\frac{\tau_k}{\tau_{k+1}}}$$

elde edilir. Burada

$$\tau_1 = \frac{4}{2v+3}, \tau_2 = \frac{16(2v+9)}{3(2v+3)^2(2v+5)}, \tau_3 = \frac{64(4v^2+32v+79)}{5(2v+3)^3(2v+5)(2v+7)}$$

ve

$$\tau_4 = \frac{256(592v^4 + 9296v^3 + 56352v^2 + 159660v + 171315)}{315(2v+3)^4(2v+5)^2(2v+7)(2v+9)}$$

oldukları dikkate alınır, teoremden verilen eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 4.2.2 $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ olmak üzere aşağıdaki iddialar doğrudur.

a. Normalize edilmiş

$$z \mapsto w_\nu(z) = \sqrt{\pi} 2^\nu z^{\frac{1-\nu}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_\nu(\sqrt{z})$$

Struve fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(w_\nu)$, bu fonksiyonun yıldızlık yarıçapına eşittir ve bu yarıçap

$$\sqrt{z} \mathbf{H}'_\nu(\sqrt{z}) - (\nu - 1) \mathbf{H}_\nu(\sqrt{z}) = 0$$

transandantal denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $r^*(w_\nu)$ ünivalentlik yarıçapı için

$$r^*(w_\nu) < 3(2\nu + 3)$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik,

$$S_2(\nu) = \frac{15(2\nu + 3)(2\nu + 5)(2\nu + 9)(20\nu^2 + 228\nu + 1417)}{272\nu^4 + 5552\nu^3 + 47584\nu^2 + 247828\nu + 416439}$$

olmak üzere, $r^*(w_\nu)$ ünivalentlik yarıçapı aşağıdaki

$$\frac{3(2\nu + 3)}{2} < r^*(w_\nu) < \frac{15(2\nu + 3)(2\nu + 5)}{2\nu + 23},$$

$$\frac{3(2\nu + 3)\sqrt{5(2\nu + 5)}}{\sqrt{2(2\nu + 23)}} < r^*(w_\nu) < \frac{21(2\nu + 3)(2\nu + 7)(2\nu + 23)}{20\nu^2 + 228\nu + 1417},$$

ve

$$3(2\nu + 3) \sqrt[3]{\frac{35(2\nu + 5)(2\nu + 7)}{2(20\nu^2 + 228\nu + 1417)}} < r^*(w_\nu) < S_2(\nu)$$

eşitsizliklerini de sağlar (Aktaş *et al.* 2017b).

Burada birinci tür Bessel ve Struve fonksiyonlarının sıfırlarının ardışık olma özelliği, yani Bessel fonksiyonunun ardışık iki sıfırı arasında Struve fonksiyonunun bir tek sıfırı olması özelliği kullanılarak $z \mapsto w_\nu(z) = \sqrt{z}v_\nu(\sqrt{z})$ fonksiyonunun yıldızlılığı elde edilebilir. Daha açık olarak, eğer $|\nu| \leq \frac{1}{2}$ ve $|z| = r \leq h_{\nu,1}$ ise, bu durumda

$$Re \frac{zw'_\nu(z)}{w_\nu(z)} = 1 - Re \sum_{n \geq 1} \frac{z}{h_{\nu,n}^2 - z} \geq 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{r}{h_{\nu,n}^2 - r} = \frac{rw'_\nu(r)}{w_\nu(r)} > \frac{w'_\nu(1)}{w_\nu(1)}$$

dır (Baricz *et al.* 2016a). Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $r \mapsto r/(h_{\nu,n}^2 - r)$ fonksiyonunun $(0, h_{\nu,1})$ üzerinde kesin artan olduğu ve sonuç olarak $r \mapsto rw'_\nu(r)/w_\nu(r)$ fonksiyonunun aynı aralıkta kesin azalan olduğu kullanılmıştır. Şimdi, J_ν Bessel fonksiyonunun n . pozitif sıfırı $j_{\nu,n}$ ile gösterilir ve Steinig (1970)'ten birinci tür Bessel ve Struve fonksiyonlarının sıfırlarının ardışık olma özelliği kullanılırsa, tüm $|\nu| \leq \frac{1}{2}$ ler için

$$\frac{w'_\nu(1)}{w_\nu(1)} = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{h_{\nu,n}^2 - 1} \geq 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{j_{\nu,n}^2 - 1} > 0$$

elde edilir. Buradaki son eşitsizlik normalize edilmiş birinci tür

$$z \mapsto \phi_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{1-\frac{\nu}{2}} J_\nu(\sqrt{z})$$

Bessel fonksiyonunun yıldızlılığının ispatından elde edilmiştir ve bu eşitsizlik $\phi'_\nu(1) = 0$ denkleminin kökü $\nu_0 \cong -0.5623$ olmak üzere, tüm $\nu \geq \nu_0$ lar için doğrudur (Szász

2010). Böylece, yukarıda verilen iki eşitsizlik zinciri birleştirilerek, $|v| \leq \frac{1}{2}$ olduğunda, w_ν fonksiyonunun açık birim diskte yıldızlılığı elde edilmiş olur.

Son olarak, $r^*(w_\nu) > \frac{3(2\nu+3)}{2}$ ve $4(\nu+1) > r^*(\phi_\nu)$ eşitsizlikleri birlikte dikkate alınırsa, $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için $r^*(w_\nu) > r^*(\phi_\nu)$ olduğu, yani, normalize edilmiş Struve fonksiyonu w_ν nün ünivalentlik yarıçapının, normalize edilmiş Bessel fonksiyonu ϕ_ν nün ünivalentlik yarıçapından büyük olduğu görülür.

İspat:

a. $z \mapsto z + \alpha_2 z^2 + \dots$ fonksiyonunun katsayıları reel ise bu durumda onun yıldızlılık yarıçapının ünivalentlik yarıçapından küçük ya da eşit olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan, Wilf (1962)'den w_ν fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapının w'_ν fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırından küçük ya da eşit olduğu bilinmektedir. Fakat, w'_ν fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı, yani,

$$\sqrt{z} \mathbf{H}'_\nu(\sqrt{z}) - (\nu - 1) \mathbf{H}_\nu(\sqrt{z}) = 0$$

denkleminin ilk pozitif sıfırı, aslında w_ν fonksiyonunun yıldızlılık yarıçapıdır (Baricz *et al.* 2016a). Bunlar gösteriyor ki, w_ν fonksiyonunun ünivalentlik ve yıldızlılık yarıçapları çakışır.

b. Baricz *et al.* (2017b)'den biliniyor ki

$$\sqrt{\pi} 2^\nu z^{-\nu-1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_\nu(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{h_{\nu,n}^2}\right)$$

eşitliği vardır. Bu eşitlik yardımıyla

$$w_v(z) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{h_{v,n}^2}\right)$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{w'_v(z)}{w_v(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z - h_{v,n}^2}$$

olup bu ifade $r^*(w_v)$ 'de sıfırdır. Struve fonksiyonunun ilk Rayleigh toplamı dikkate alınır,

$$\frac{1}{r^*(w_v)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{h_{v,n}^2 - r^*(w_v)} > \sum_{n \geq 1} \frac{1}{h_{v,n}^2} = \frac{1}{3(2v+3)}$$

elde edilir. Böylece

$$r^*(w_v) < 3(2v+3)$$

üst sınırı bulunur.

Şimdi, w_v fonksiyonunun sonsuz toplam temsili ve w'_v türevi dikkate alınır,

$$w_v(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{4^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \left(v + \frac{3}{2}\right)_n}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_v(z) = w'_v(-4z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)z^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \left(v + \frac{3}{2}\right)_n} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)!}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \left(v + \frac{3}{2}\right)_n} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

yazılır. Normalize edilmiş Struve fonksiyonu w_ν , $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için sadece reel sıfırlara sahip ve reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ ye aittir (Baricz *et al.* 2017b). $\mathcal{LP}$ sınıfı türev altında kapalı olduğundan $w'_\nu \in \mathcal{LP}$ olup sadece reel sıfırlara sahiptir. Sonuç olarak bu $\mathcal{W}_\nu$ fonksiyonu için de doğrudur. Üstelik $\mathcal{W}_\nu$ fonksiyonunun katsayıları negatif olmadığından ve $\mathcal{W}_\nu \in \mathcal{LP}$ olduğundan bu durum onun sadece negatif reel sıfırlarının olmasını gerektirir. Sonuç olarak her $n \in \mathbb{N}$ için $d_{\nu,n} > 0$ için

$$\mathcal{W}_\nu(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{d_{\nu,n}}\right)$$

sonsuz çarpım temsili vardır. $\varsigma_k = \sum_{n \geq 1} d_{\nu,n}^{-k}$ Euler-Rayleigh toplamları ve $\mathbf{H}_\nu$ Struve fonksiyonunun sonsuz toplam temsili dikkate alınırsa, bu durumda

$$\frac{\mathcal{W}'_\nu(z)}{\mathcal{W}_\nu(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z + d_{\nu,n}} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^k}{d_{\nu,n}^{k+1}} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \varsigma_{k+1} z^k, |z| < d_{\nu,1}$$

ve

$$\frac{\mathcal{W}'_\nu(z)}{\mathcal{W}_\nu(z)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n+2)z^n}{\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(\nu+\frac{3}{2}\right)_{n+1}} \bigg/ \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)z^n}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(\nu+\frac{3}{2}\right)_n}$$

eşitlikleri yazılır. Burada ilk Rayleigh toplamlarının ν türünden ifadesi mümkün olup, $k \in \mathbb{N}$ ve $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ olduğunda $\varsigma_k^{-\frac{1}{k}} < d_{\nu,1} < \frac{\varsigma_k}{\varsigma_{k+1}}$ biçimindeki Euler-Rayleigh eşitsizlikleri $4d_{\nu,1}$ için

$$4\varsigma_k^{-\frac{1}{k}} < r^*(w_\nu) < 4\frac{\varsigma_k}{\varsigma_{k+1}}$$

şeklinde olacaktır. Son olarak

$$\varsigma_1 = \frac{8}{3(2\nu + 3)}, \varsigma_2 = \frac{32(2\nu + 23)}{45(2\nu + 3)^2(2\nu + 5)},$$

$$\varsigma_3 = \frac{128(20\nu^2 + 228\nu + 1417)}{945(2\nu + 3)^3(2\nu + 5)(2\nu + 7)},$$

ve

$$\varsigma_4 = \frac{512(274\nu^4 + 5552\nu^3 + 47584\nu^2 + 247828\nu + 416439)}{14175(2\nu + 3)^4(2\nu + 5)^2(2\nu + 7)(2\nu + 9)}$$

ifadeleri yukarıdaki Euler-Rayleigh eşitsizliklerinde dikkate alınırsa, teoremden verilen eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 4.2.3 $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto u_\nu(z) = \left(\sqrt{\pi} 2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_\nu(z) \right)^{\frac{1}{\nu+1}}$$

Struve fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(u_\nu)$, aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşittir. Ayrıca bu yarıçap $\mathbf{H}'_\nu$ fonksiyonunun en küçük pozitif kökü olan $h'_{\nu,1}$ dir (Aktaş *et al.* 2017a).

İspat: Eğer $z \mapsto u_\nu(z) = \left(\sqrt{\pi} 2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_\nu(z) \right)^{\frac{1}{\nu+1}}$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı yapılırsa,

$$u_\nu(z) = z - \frac{1}{3(\nu + 1)(2\nu + 3)} z^3 + \frac{1}{90(\nu + 1)^2(2\nu + 3)^2(2\nu + 5)} z^5 - \dots \quad (4.23)$$

elde edilir. Böylece u_ν fonksiyonunun reel katsayılara sahip olduğu görülür. Ayrıca biliniyor ki $z \mapsto z + \alpha_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu reel katsayılara sahipse, bu durumda onun yıldızlılık yarıçapı ünivalentlik yarıçapından küçük ya da eşittir (Wilf 1962). Şimdi ünivalentlik yarıçapının yıldızlılık yarıçapından küçük ya da eşit olduğu gösterilmelidir. $z \mapsto u_\nu(z)$ fonksiyonunun tanımından

$$\frac{zu'_\nu(z)}{u_\nu(z)} = \frac{1}{\nu+1} \frac{z\mathbf{H}'_\nu(z)}{\mathbf{H}_\nu(z)} = 1 - \frac{2}{\nu+1} \sum_{n \geq 1} \frac{z^2}{h_{\nu,n}^2 - z^2} \quad (4.24)$$

yazılabilir. Böylece, $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zu'_\nu(z)}{u_\nu(z)} \right) = 1 - \frac{2}{\nu+1} \sum_{n \geq 1} \operatorname{Re} \left(\frac{z^2}{h_{\nu,n}^2 - z^2} \right) \geq 1 - \frac{2}{\nu+1} \sum_{n \geq 1} \frac{|z|^2}{h_{\nu,n}^2 - |z|^2} = \frac{|z|u'_\nu(|z|)}{u_\nu(|z|)}$$

elde edilir. Yani, $|z| = r$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zu'_\nu(z)}{u_\nu(z)} \right) \geq \frac{ru'_\nu(r)}{u_\nu(r)} \quad (4.25)$$

dır. (4.25) eşitsizliğinin sağ tarafı u'_ν fonksiyonunun ilk pozitif sıfırına kadar pozitif kalır. Bunlar gösteriyor ki, u_ν fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşittir.

4.3. Lommel Fonksiyonlarının Ünivalentlik Yarıçapları

Aşağıdaki sonuçlar birinci tür Bessel ve Struve fonksiyonları için verilen sonuçlara benzer olup birinci tür Lommel fonksiyonları üzerine Baricz *et al.* (2016a) tarafından yapılan çalışmanın ana sonucunu tamamlamaktadır.

Teorem 4.3.1 $\mu \in (-1, 1)$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki iddialar doğrudur.

a. Normalize edilmiş

$$z \mapsto g_\mu(z) = g_{\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z) = \mu(\mu+1)z^{-\mu+\frac{1}{2}}s_{\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z)$$

Lommel fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(g_\mu)$, aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşit olup aynı zamanda bu yarıçap

$$zs'_{\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z) - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)s_{\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z) = 0$$

transandantal denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $r^*(g_\mu)$ ünivalentlik yarıçapı,

$$r^*(g_\mu) < \sqrt{\frac{(\mu+2)(\mu+3)}{2}}$$

eşitsizliğini sağlar. Üstelik,

$$T_1(\mu) = \frac{(\mu+2)(\mu+3)(\mu+6)(\mu+7)(-\mu^2+31\mu+120)}{3(\mu^4-2\mu^3+175\mu^2+1842\mu+4032)},$$

$$T_2(\mu) = 3(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)(\mu+8)(\mu+9),$$

$$T_3(\mu) = (\mu^4-2\mu^3+175\mu^2+1842\mu+4032),$$

$$T_4(\mu) = -\mu^8+128\mu^7+2196\mu^6+24178\mu^5+352645\mu^4$$

ve

$$T_5(\mu) = 3476958\mu^3+17744328\mu^2+44003088\mu+42301440$$

olmak üzere, bu yarıçap aşağıdaki

$$\sqrt{\frac{(\mu+2)(\mu+3)}{3}} < r^*(g_\mu) < \sqrt{\frac{3(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)}{-\mu^2+31\mu+120}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{(\mu+2)^2(\mu+3)^2(\mu+4)(\mu+5)}{-\mu^2+31\mu+120}} < r^*(g_\mu) < \sqrt{T_1(\mu)}$$

ve

$$\sqrt[6]{\frac{(\mu+2)^3(\mu+3)^3(\mu+4)(\mu+5)(\mu+6)(\mu+7)}{3T_3(\mu)}} < r^*(g_\mu) < \sqrt{\frac{T_2(\mu)T_3(\mu)}{T_4(\mu)+T_5(\mu)}}$$

eşitsizliklerini sağlar (Aktaş *et al.* 2017b).

İspat: Teoremin $\mu \in (0,1)$ için ispatı aşağıdaki gibidir.

a. Hatırlanacağı üzere $z \mapsto z + \alpha_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu reel katsayılara sahip olduğunda, onun yıldızlılık yarıçapı ünivalentlik yarıçapından küçük ya da eşittir. Diğer taraftan, Wilf (1962)'den biliniyor ki g_μ fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı, g'_μ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırından küçük ya da eşittir. Fakat, g'_μ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı, yani,

$$zs'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = 0$$

denkleminin ilk pozitif sıfırı, aslında g_μ fonksiyonunun yıldızlılık yarıçapıdır (Baricz *et al.* 2016a). Bunlar g_μ fonksiyonunun ünivalentlik ve yıldızlılık yarıçapı eşit olduğunu gösterir.

b. $\xi_{\mu,n}, s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ Lommel fonksiyonunun n . pozitif sıfırını göstermek üzere,

$$s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = \frac{z^{\mu+\frac{1}{2}}}{\mu(\mu+1)} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\xi_{\mu,n}^2}\right)$$

biçimindeki sonsuz çarpım temsilinin olduğu bilinmektedir (Baricz and Yağmur 2017; Baricz and Koumandos 2016). Bu temsil kullanılarak

$$\frac{g'_\mu(z)}{g_\mu(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 0} \frac{2z}{z^2 - \xi_{\mu,n}^2}$$

elde edilir ki bu ifade $r^*(g_\mu)$ de sıfırdır. Lommel fonksiyonlarının sıfırları için ilk Rayleigh toplamları dikkate alınırsa,

$$\frac{1}{(r^*(g_\mu))^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{2}{\xi_{\mu,n}^2 - (r^*(g_\mu))^2} > \sum_{n \geq 0} \frac{2}{\xi_{\mu,n}^2} = \frac{2}{(\mu+2)(\mu+3)}$$

elde edilir ki buradan

$$r^*(g_\mu) < \sqrt{\frac{(\mu+2)(\mu+3)}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi g_μ fonksiyonu için

$$g_\mu(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{4^n \left(\frac{\mu+2}{2}\right)_n \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_n},$$

$$G_\mu(z) = g'_\mu(2i\sqrt{z}) = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)z^n}{\left(\frac{\mu+2}{2}\right)_n \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_n}$$

biçimindeki sonsuz seri toplamları dikkate alınır, g_μ fonksiyonu $\mu \in (0,1)$ için sadece reel sıfırlara sahiptir ve reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ 'ye aittir (Baricz and Koumandos 2016). Böylece g'_μ fonksiyonu da $\mathcal{LP}$ sınıfının bir üyesi olur. Bunun bir sonucu olarak $G_\mu \in \mathcal{LP}$ olup G_μ fonksiyonu sadece negatif reel sıfırlara sahiptir. Dolayısıyla $n \in \mathbb{N}$ ve $\kappa_{\mu,n} > 0$ olmak üzere G_μ fonksiyonu

$$G_\mu(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{\kappa_{\mu,n}}\right)$$

biçiminde sonsuz çarpım olarak yazılabilir. $\varrho_k = \sum_{n \geq 1} \kappa_{\mu,n}^{-k}$ Euler-Rayleigh toplamları ve $s_{\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ Lommel fonksiyonunun sonsuz toplam temsili kullanılırsa,

$$\frac{G'_\mu(z)}{G_\mu(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z + \kappa_{\mu,n}} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^k}{\kappa_{\mu,n}^{k+1}} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \varrho_{k+1} z^k, |z| < \kappa_{\mu,1}$$

ve

$$\frac{G'_\mu(z)}{G_\mu(z)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(2n+3)z^n}{\left(\frac{\mu+2}{2}\right)_{n+1} \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_{n+1}} \bigg/ \sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)z^n}{\left(\frac{\mu+2}{2}\right)_n \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_n}$$

elde edilir. Bu son iki eşitlik yardımıyla Euler-Rayleigh toplamlarını μ türünden ifade etmek mümkün olup, burada $\varrho_k^{-\frac{1}{k}} < \kappa_{\mu,1} < \frac{\varrho_k}{\varrho_{k+1}}$ biçimindeki Euler-Rayleigh eşitsizlikleri dikkate alınır, $\mu \in (0,1)$ ve $k \in \mathbb{N}$ iken, $2\sqrt{\kappa_{\mu,1}}$ için

$$2\sqrt{\varrho_k^{-\frac{1}{k}}} < r^*(g_\mu) < 2\sqrt{\frac{\varrho_k}{\varrho_{k+1}}}$$

elde edilir. Burada

$$\varrho_1 = \frac{12}{(\mu+2)(\mu+3)}, \varrho_2 = \frac{16(-\mu^2 + 31\mu + 120)}{(\mu+2)^2(\mu+3)^2(\mu+4)(\mu+5)},$$

$$\varrho_3 = \frac{192(\mu^4 - 2\mu^3 + 175\mu^2 + 1842\mu + 4032)}{(\mu+2)^3(\mu+3)^3(\mu+4)(\mu+5)(\mu+6)(\mu+7)}$$

ve

$$\varrho_4 = \frac{256(T_4(\mu) + T_5(\mu))}{(\mu+2)^4(\mu+3)^4(\mu+4)^2(\mu+5)^2(\mu+6)(\mu+7)(\mu+8)(\mu+9)}$$

oldukları dikkate alınır, özellikle $k \in \{1,2,3\}$ için teoremden verilen eşitsizlikler elde edilir.

$\mu \in (-1,0)$ olmak üzere teoremin **a** ve **b** kısmının ispatı aşağıdaki gibidir. $\mu \in (0,1)$ olsun. Yukarıda verilen ispatta μ yerine $\mu - 1$ ve g_μ yerine $g_{\mu-1}$ yazalım. $g_{\mu-1}$ fonksiyonunun n . sıfırı $\zeta_{\mu,n}$ olmak üzere, $g_{\mu-1} \in \mathcal{LP}$ olup onun tüm sıfırları reeldir (Baricz and Koumandos 2016). Ayrıca $\mu \in (0,1)$ için de

$$\frac{g'_{\mu-1}(z)}{g_{\mu-1}(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 0} \frac{2z}{z^2 - \zeta_{\mu,n}^2}$$

olup, bu durumda

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2}{\zeta_{\mu,n}^2} = \frac{2}{(\mu+1)(\mu+2)}$$

dir. Son olarak μ yerine $\mu + 1$ yazılırsa, $\mu \in (-1,0)$ için **a** ve **b** kısmının ispatı elde edilir.

Teorem 4.3.2 $\mu \in (-1,1)$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki iddialar doğrudur.

a. Normalize edilmiş

$$z \mapsto h_\mu(z) = h_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = \mu(\mu+1)z^{\frac{3-2\mu}{4}}s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sqrt{z})$$

Lommel fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(h_\mu)$, aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşittir ve bu yarıçap

$$2\sqrt{z}s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sqrt{z}) - (2\mu-3)s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sqrt{z}) = 0$$

transandantal denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $r^*(h_\mu)$ ünivalentlik yarıçapı

$$r^*(h_\mu) < (\mu+2)(\mu+3)$$

eşitsizliğini sağlar. Üstelik,

$$T_6(\mu) = \frac{(\mu+2)(\mu+3)(\mu+6)(\mu+7)(-\mu^2+3\mu+22)}{\mu^4-14\mu^3-79\mu^2+320\mu+1308},$$

$$T_7(\mu) = -(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)(\mu+8)(\mu+9),$$

$$T_8(\mu) = \mu^4 - 14\mu^3 - 79\mu^2 + 320\mu + 1308,$$

$$T_9(\mu) = 3\mu^8 + 96\mu^7 + 2180\mu^6 + 27338\mu^5 + 164205\mu^4$$

ve

$$T_{10}(\mu) = 335662\mu^3 - 881588\mu^2 - 5070360\mu - 6293376$$

olmak üzere, bu yarıçap aşağıdaki

$$\frac{(\mu + 2)(\mu + 3)}{2} < r^*(h_\mu) < \frac{(\mu + 2)(\mu + 3)(\mu + 4)(\mu + 5)}{-\mu^2 + 3\mu + 22},$$

$$\frac{(\mu + 2)(\mu + 3)\sqrt{(\mu + 4)(\mu + 5)}}{\sqrt{2(-\mu^2 + 3\mu + 22)}} < r^*(h_\mu) < T_6(\mu)$$

ve

$$\frac{(\mu + 2)(\mu + 3)\sqrt[3]{(\mu + 4)(\mu + 5)(\mu + 6)(\mu + 7)}}{\sqrt[3]{2T_8(\mu)}} < r^*(h_\mu) < \frac{T_7(\mu)T_8(\mu)}{T_9(\mu) + T_{10}(\mu)}$$

eşitsizliklerini de sağlar (Aktaş *et al.* 2017b).

İspat: Teorem 4.3.1'in ispatında olduğu gibi ilk önce $\mu \in (0,1)$ için ispat yapıp $\mu \in (-1,0)$ olması hali için önceki ispatla aynı düşünce tarzı uygulanmıştır. Bu sebeple $\mu \in (-1,0)$ için detaylar verilmemiştir.

a. Reel katsayılı $z \mapsto z + \alpha_2 z^2 + \dots$ fonksiyonunun yıldızlılık yarıçapının ünivalentlik yarıçapından küçük ya da eşit olduğu biliniyor. Diğer taraftan, h_μ fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı, h'_μ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırından küçük ya da eşittir (Wilf 1962). Fakat, h'_μ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı, yani,

$$2\sqrt{z}s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sqrt{z}) - (2\mu-3)s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sqrt{z}) = 0$$

denkleminin ilk pozitif sıfırı, aslında h_μ fonksiyonunun yıldızlılık yarıçapıdır (Baricz *et al.* 2016a). Dolayısıyla h_μ fonksiyonunun ünivalentlik ve yıldızlılık yarıçapı eşittir.

b. Baricz *et al.* (2017b)'den $s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ Lommel fonksiyonunun sonsuz çarpım temsili dikkate alınırsa,

$$\frac{h'_\mu(z)}{h_\mu(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z - \xi_{\mu,n}^2}$$

olur ki bu ifade $r^*(h_\mu)$ de sıfır olur. Ayrıca Lommel fonksiyonlarının sıfırlarının ilk Rayleigh toplamı kullanılırsa,

$$\frac{1}{r^*(h_\mu)} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\xi_{\mu,n}^2 - r^*(h_\mu)} > \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\xi_{\mu,n}^2} = \frac{1}{(\mu+2)(\mu+3)}$$

elde edilir. Buradan da

$$r^*(h_\mu) < (\mu+2)(\mu+3)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, h_μ fonksiyonu için

$$h_\mu(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{4^n \left(\frac{\mu+2}{2}\right)_n \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_n},$$

ve

$$H_\mu(z) = h'_\mu(-4z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)z^n}{\left(\frac{\mu+2}{2}\right)_n \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_n}$$

biçimindeki sonsuz toplam temsillerini dikkate alalım. $\mu \in (0,1)$ olmak üzere, h_μ fonksiyonu sadece reel sıfırlara sahip ve reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ nin bir elemanıdır (Baricz and Koumandos 2016). Böylece h'_μ fonksiyonu da $\mathcal{LP}$ de olup sadece reel sıfırlara sahiptir. H_μ fonksiyonunun katsayıları negatif olmadığından ve ayrıca H_μ fonksiyonu da $\mathcal{LP}$ de olduğundan sadece negatif reel sıfırlara sahiptir. Sonuç olarak, H_μ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_{\mu,n} > 0$ olmak üzere

$$H_\mu(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{\lambda_{\mu,n}}\right)$$

sonsuz çarpımı olarak yazılabilir. Burada $\eta_k = \sum_{n \geq 1} \lambda_{\mu,n}^{-k}$ Euler-Rayleigh toplamı ve $s_{\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ Lommel fonksiyonunun sonsuz toplam temsili kullanılırsa,

$$\frac{H'_\mu(z)}{H_\mu(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z + \lambda_{\mu,n}} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^k}{\lambda_{\mu,n}^{k+1}} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \eta_{k+1} z^k, |z| < \lambda_{\mu,1}$$

ve

$$\frac{H'_\mu(z)}{H_\mu(z)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n+2)z^n}{\left(\frac{\mu+2}{2}\right)_{n+1} \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_{n+1}} \bigg/ \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)z^n}{\left(\frac{\mu+2}{2}\right)_n \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_n}$$

elde edilir. Yukarıdaki ispatlara benzer olarak, Euler-Rayleigh toplamlarını μ türünden ifade etmek mümkün olup, $\eta_k^{-\frac{1}{k}} < \lambda_{\mu,1} < \frac{\eta_k}{\eta_{k+1}}$ biçimindeki Euler-Rayleigh eşitsizlikleri $\mu \in (0,1)$ ve $k \in \mathbb{N}$ iken, $4\lambda_{\mu,1}$ için

$$4\eta_k^{-\frac{1}{k}} < r^*(h_\mu) < 4\frac{\eta_k}{\eta_{k+1}}$$

olur. Burada

$$\eta_1 = \frac{8}{(\mu+2)(\mu+3)}, \eta_2 = \frac{32(-\mu^2 + 3\mu + 22)}{(\mu+2)^2(\mu+3)^2(\mu+4)(\mu+5)},$$

$$\eta_3 = \frac{128T_8(\mu)}{(\mu+2)^3(\mu+3)^3(\mu+4)(\mu+5)(\mu+6)(\mu+7)}$$

ve

$$\eta_4 = \frac{-512(T_9(\mu) + T_{10}(\mu))}{(\mu+2)^4(\mu+3)^4(\mu+4)^2(\mu+5)^2(\mu+6)(\mu+7)(\mu+8)(\mu+9)}$$

oldukları dikkate alınırsa teoremden verilen eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 4.3.3 $\mu \in (-\frac{1}{2}, 1)$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto f_\mu(z) = f_{\mu-\frac{1}{2}}(z) = \left(\mu(\mu+1)s_{\mu-\frac{1}{2}}(z) \right)^{\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}}$$

Lommel fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(f_\mu)$, aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşittir. Ayrıca bu yarıçap $s'_{\mu-\frac{1}{2}}$ fonksiyonunun en küçük pozitif köküdür (Aktaş *et al.* 2017a).

İspat: Eğer $z \mapsto f_\mu(z) = f_{\mu-\frac{1}{2}}(z) = \left(\mu(\mu+1)s_{\mu-\frac{1}{2}}(z) \right)^{\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}}$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı yapılırsa,

$$\begin{aligned}
f_\mu(z) &= z - \frac{2z^3}{(\mu+2)(\mu+3)(2\mu+1)} \\
&+ \frac{(2\mu^3 + 16\mu^2 + 39\mu - 16)z^5}{2(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)(2\mu+1)^2} - \dots
\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. Böylece f_μ fonksiyonunun reel katsayılarla sahip olduğu görülür. Ayrıca biliniyor ki $z \mapsto z + \alpha_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu reel katsayılarla sahipse, bu durumda onun yıldızlılık yarıçapı ünivalentlik yarıçapından küçük ya da eşittir (Wilf 1962). İspatı tamamlamak için ünivalentlik yarıçapının yıldızlılık yarıçapından küçük ya da eşit olduğunu göstermek yeterlidir. $z \mapsto f_\mu(z)$ fonksiyonunun tanımından

$$\frac{zf'_\mu(z)}{f_\mu(z)} = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{2}} \frac{zs'_{\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z)}{s_{\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z)} = 1 - \frac{2}{1 + \frac{\mu}{2}} \sum_{n \geq 1} \frac{z^2}{l_{\mu,n}^2 - z^2} \tag{4.27}$$

yazılabilir. Böylece, $\mu \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $\mu \neq 0$ için

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'_\mu(z)}{f_\mu(z)} \right) = 1 - \frac{2}{1 + \frac{\mu}{2}} \sum_{n \geq 1} \operatorname{Re} \left(\frac{z^2}{l_{\mu,n}^2 - z^2} \right) \geq 1 - \frac{2}{1 + \frac{\mu}{2}} \sum_{n \geq 1} \frac{|z|^2}{l_{\mu,n}^2 - |z|^2} = \frac{|z|f'_\mu(|z|)}{f_\mu(|z|)}$$

elde edilir. Yani, $|z| = r$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'_\mu(z)}{f_\mu(z)} \right) \geq \frac{rf'_\mu(r)}{f_\mu(r)} \tag{4.28}$$

dır. (4.28) eşitsizliğinin sağ tarafı f'_μ fonksiyonunun ilk pozitif sıfırına kadar pozitif kalır. Sonuç olarak, f_μ fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı yıldızlılık yarıçapına eşittir.

4.4. Struve Fonksiyonu ve Türevinin Lineer Kombinasyonlarının Sıfırları İçin Sınırlar

Bu bölümde birinci tür Struve fonksiyonu $\mathbf{H}_\nu$ ve türevi $\mathbf{H}'_\nu$ dikkate alınarak

$$\mathcal{H}_\nu(z) = \alpha \mathbf{H}_\nu(z) + z \mathbf{H}'_\nu(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2n + \nu + \alpha + 1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\nu + n + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu+1}$$

fonksiyonu tanımlanmıştır. Ayrıca $\alpha + \nu \neq -1$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$\begin{aligned} h_\nu(z) &= (\alpha + \nu + 1)^{-1} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) z^{-\frac{\nu+1}{2}} 2^{\nu+1} \mathcal{H}_\nu(\sqrt{z}) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2n + \nu + \alpha + 1)}{2^{2n} (\nu + \alpha + 1) \left(\frac{3}{2}\right)_n \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_n} z^n \end{aligned}$$

fonksiyonu dikkate alınarak $\mathcal{H}_\nu$ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Diğer taraftan, özel olarak $\alpha = 0$ alınarak $\mathbf{H}'_\nu$ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı için alt ve üst sınırlar verilmiştir.

Teorem 4.4.1 $\alpha + \nu > -1, |\nu| < \frac{1}{2}$ ve $\mathcal{H}_\nu$ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı $\zeta_{\nu,1}$ olsun. Ayrıca

$$\kappa_1 = -2\alpha^2\nu + 7\alpha^2 - 4\alpha\nu^2 + 2\alpha\nu + 42\alpha - 2\nu^3 - 5\nu^2 + 72\nu + 135$$

ve

$$\kappa_2 = -4\alpha^3\nu^2 - 96\alpha^3\nu + 145\alpha^3 - 12\alpha^2\nu^3 - 324\alpha^2\nu^2 - 429\alpha^2\nu + 1305\alpha^2$$

$$-12\alpha\nu^4 - 360\alpha\nu^3 - 1689\alpha\nu^2 + 1170\alpha\nu + 6291\alpha - 4\nu^5 - 132\nu^4 + 621\nu^2$$

$$-1115\nu^3 + 12339\nu + 14931$$

olsun. Bu durumda $\zeta_{\nu,1}$ aşağıdaki

$$\zeta_{\nu,1}^2 > \frac{3(2\nu+3)(\alpha+\nu+1)}{\alpha+\nu+3},$$

$$\zeta_{\nu,1}^2 > \frac{3(2\nu+3)(\alpha+\nu+1)\sqrt{5(2\nu+5)}}{\sqrt{\kappa_1}},$$

$$\zeta_{\nu,1}^2 > \frac{3(2\nu+3)(\alpha+\nu+1)^3\sqrt[3]{35(2\nu+5)(2\nu+7)}}{\sqrt[3]{\kappa_2}}$$

alt sınırlarına ve

$$\zeta_{\nu,1}^2 < \frac{15(2\nu+3)(2\nu+5)(\alpha+\nu+1)(\alpha+\nu+3)}{\kappa_1},$$

$$\zeta_{\nu,1}^2 < \frac{21(2\nu+3)(2\nu+7)(\alpha+\nu+1)\kappa_1}{\kappa_2}$$

üst sınırlarına sahiptir (Aktaş *et al.* 2017a).

İspat: $\alpha + \nu > -1$ ve $|\nu| < \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$h_\nu(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2n + \nu + \alpha + 1)}{2^{2n} (\nu + \alpha + 1) \left(\frac{3}{2}\right)_n \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_n} z^n$$

fonksiyonunun tüm sıfırlarının reel olduğu bilinmektedir (Baricz *et al.* 2016a). Bunun bir sonucu olarak h_ν fonksiyonu reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ nin bir üyesidir. Ayrıca $z \mapsto h_\nu(z)$ tam fonksiyonunun büyüme mertebesi

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log \left| \frac{(-1)^n (2n + \nu + \alpha + 1)}{2^{2n} (\nu + \alpha + 1) \left(\frac{3}{2}\right)_n \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_n} \right|} = \frac{1}{2}$$

olup bu fonksiyon $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_{\nu,n} > 0$ olmak üzere,

$$h_\nu(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{\zeta_{\nu,n}^2}\right) \quad (4.29)$$

biçiminde sonsuz çarpım temsiline sahiptir. (4.29) ifadesinin logaritmik türevi alınır, $\delta_k = \sum_{n \geq 1} \zeta_{\nu,n}^{-2k}$ olmak üzere

$$\frac{h'_\nu(z)}{h_\nu(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z - \zeta_{\nu,n}^2} = - \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\zeta_{\nu,n}^2)^{k+1}} z^k = - \sum_{k \geq 0} \delta_{k+1} z^k, |z| < \zeta_{\nu,1}^2 \quad (4.30)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\theta_n = \frac{(-1)^{n+1} (2n + \nu + \alpha + 3)(n + 1)}{2^{2n+2} (\nu + \alpha + 1) \left(\frac{3}{2}\right)_{n+1} \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_{n+1}}$$

ve

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n (2n + \nu + \alpha + 1)}{2^{2n} (\nu + \alpha + 1) \left(\frac{3}{2}\right)_n \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_n}$$

olmak üzere, $\mathbf{H}_\nu$ Struve fonksiyonunun sonsuz toplam temsili dikkate alınarak

$$\frac{h'_\nu(z)}{h_\nu(z)} = \sum_{n \geq 0} \theta_n z^n / \sum_{n \geq 0} \gamma_n z^n \quad (4.31)$$

eşitliği elde edilir. (4.30) ve (4.31) eşitliklerinin katsayıları karşılaştırılırsa, bu durumda aşağıdaki

$$\delta_1 = \frac{(\alpha + \nu + 3)}{3(2\nu + 3)(\alpha + \nu + 1)}, \delta_2 = \frac{\kappa_1}{45(2\nu + 3)^2(2\nu + 5)(\alpha + \nu + 1)^2}$$

ve

$$\delta_3 = \frac{\kappa_2}{945(2\nu + 3)^3(4\nu^2 + 24\nu + 35)(\alpha + \nu + 1)^2}$$

biçiminde Euler–Rayleigh toplamaları elde edilir. $\alpha + \nu > -1, |\nu| < \frac{1}{2}$ ve $k \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere bulunan Euler–Rayleigh toplamaları

$$\delta_k^{-\frac{1}{k}} < \zeta_{\nu,1}^2 < \frac{\delta_k}{\delta_{k+1}}$$

biçimindeki Euler–Rayleigh eşitsizliklerinde yerine yazılırsa, teoremden verilen alt ve üst sınırlar elde edilir.

Teorem 4.4.1’de özel olarak $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.4.2 $|\nu| < \frac{1}{2}$ ve $\mathbf{H}'_\nu$ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı $h'_{\nu,1}$ olsun. Bu durumda $h'_{\nu,1}$, aşağıdaki

$$(h'_{\nu,1})^2 > \frac{3(2\nu + 3)(\nu + 1)}{\nu + 3},$$

$$(h'_{\nu,1})^2 > \frac{3(2\nu + 3)(\nu + 1)\sqrt{5(2\nu + 5)}}{\sqrt{-2\nu^3 - 5\nu^2 + 72\nu + 135}},$$

$$(h'_{v,1})^2 > \frac{3(2v+3)(v+1)^3 \sqrt[3]{35(2v+5)(2v+7)}}{\sqrt[3]{-4v^5 - 132v^4 - 1115v^3 + 621v^2 + 12339v + 14931}}$$

alt sınırlarına ve

$$(h'_{v,1})^2 < \frac{15(2v+3)(2v+5)(v+1)(v+3)}{-2v^3 - 5v^2 + 72v + 135},$$

$$(h'_{v,1})^2 < \frac{21(2v+3)(2v+7)(v+1)(-2v^3 - 5v^2 + 72v + 135)}{-4v^5 - 132v^4 - 1115v^3 + 621v^2 + 12339v + 14931}$$

üst sınırlarına sahiptir (Aktaş *et al.* 2017a).

Teorem 4.4.2 ile verilen sonuçlar Struve fonksiyonunun türevinin ilk pozitif sıfırları ile ilgili Baricz *et al.* (2017a) tarafından daha önce elde edilen bazı sonuçları yeniden elde etmekte ve bazılarını da geliştirmektedir. Ayrıca kullanılan yöntem onların yaklaşımından biraz farklıdır.

4.5. Lommel Fonksiyonunun Türevinin Sıfırları İçin Sınırlar

Bu bölümde $s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)$ fonksiyonu birinci tür Lommel fonksiyonunun türevini göstermek üzere

$$\mathcal{L}_\mu(z) = z s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2n + \mu + \frac{1}{2})}{4^n \mu(\mu+1) \left(\frac{\mu+2}{2}\right)_n \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_n} z^{2n+\mu+\frac{1}{2}}$$

fonksiyonu tanımlanmış ve $\mu \in (-1,1), \mu \neq 0$ ve $\mu \neq -\frac{1}{2}$ için normalize edilmiş Lommel fonksiyonu

$$l_{\mu}(z) = \frac{2\mu(\mu+1)}{(2\mu+1)} z^{-\frac{2\mu+1}{4}} \mathcal{L}_{\mu}(\sqrt{z}) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2n + \mu + \frac{1}{2})}{2^{2n} (\mu + \frac{1}{2}) \left(\frac{\mu+2}{2}\right)_n \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_n} z^n$$

dikkate alınarak $\mathcal{L}_{\mu}$ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

Teorem 4.5.1 $\mu \in (-1,1), \mu \neq 0$ ve $\mu \neq -\frac{1}{2}$ olmak üzere $\mathcal{L}_{\mu}$ Lommel fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı $\tau_{\mu,1}$ olsun. Ayrıca

$$\varpi_1 = \frac{(\mu+4)(\mu+5)(\mu+6)(\mu+7)}{8\mu^7 + 44\mu^6 - 554\mu^5 - 4731\mu^4 - 7672\mu^3 + 23551\mu^2 + 85834\mu + 72384}$$

ve

$$\varpi_2 = \frac{-4\mu^4 - 24\mu^3 + 19\mu^2 + 295\mu + 392}{8\mu^7 + 44\mu^6 - 554\mu^5 - 4731\mu^4 - 7672\mu^3 + 23551\mu^2 + 85834\mu + 72384}$$

olsun. Bu durumda $\tau_{\mu,1}$ için

$$(\tau_{\mu,1})^2 > \frac{(\mu+2)(\mu+3)(2\mu+1)}{2\mu+5},$$

$$(\tau_{\mu,1})^2 > \frac{(\mu+2)(\mu+3)(2\mu+1)\sqrt{(\mu+4)(\mu+5)}}{\sqrt{-4\mu^4 - 24\mu^3 + 19\mu^2 + 295\mu + 392}},$$

$$(\tau_{\mu,1})^2 > (\mu+2)(\mu+3)(2\mu+1)^3 \sqrt{\varpi_1}$$

alt sınırları ve

$$(\tau_{\mu,1})^2 < \frac{(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)(2\mu+1)(2\mu+5)}{-4\mu^4 - 24\mu^3 + 19\mu^2 + 295\mu + 392},$$

$$(\tau_{\mu,1})^2 < (\mu+2)(\mu+3)(\mu+6)(\mu+7)(2\mu+1)\varpi_2$$

üst sınırları vardır (Aktaş *et al.* 2017a).

İspat: $\mu \in (-1,1), \mu \neq 0$ ve $\mu \neq -\frac{1}{2}$ olmak üzere, normalize edilmiş Lommel fonksiyonu

$$l_{\mu}(z) = \frac{2\mu(\mu+1)}{(2\mu+1)} z^{-\frac{2\mu+1}{4}} \mathcal{L}_{\mu}(\sqrt{z})$$

nin sadece reel sıfırlara sahip olduğu bilinmektedir (Baricz and Yağmur 2017). Sonuç olarak l_{μ} fonksiyonu reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ nin bir üyesidir. Ayrıca $z \mapsto l_{\mu}(z)$ tam fonksiyonunun büyüme mertebesi

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log \left| \frac{(-1)^n (2n + \mu + \frac{1}{2})}{2^{2n} (\mu + \frac{1}{2}) \left(\frac{\mu+2}{2}\right)_n \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_n} \right|} = \frac{1}{2}$$

olup, bu fonksiyon $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\tau_{\mu,n} > 0$ olmak üzere

$$l_{\mu}(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{\tau_{\mu,n}^2}\right) \quad (4.32)$$

biçiminde sonsuz çarpım temsiline sahiptir. (4.32) ifadesinin logaritmik türevi alınırsa, $\eta_k = \sum_{n \geq 1} \tau_{\mu,n}^{-2k}$ olmak üzere

$$\frac{l'_\mu(z)}{l_\mu(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z - \tau_{\mu,n}^2} = - \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(\tau_{\mu,n}^2)^{k+1}} z^k = - \sum_{k \geq 0} \eta_{k+1} z^k, |z| < \tau_{\mu,1}^2 \quad (4.33)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\rho_n = \frac{(-1)^{n+1} (2n + \mu + \frac{5}{2})(n+1)}{2^{2n+2} \left(\mu + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\mu+2}{2}\right)_{n+1} \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_{n+1}}$$

ve

$$\sigma_n = \frac{(-1)^n (2n + \mu + \frac{1}{2})}{2^{2n} \left(\mu + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\mu+2}{2}\right)_n \left(\frac{\mu+3}{2}\right)_n}$$

olmak üzere, $s_{\mu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ fonksiyonunun sonsuz toplam temsili dikkate alınır,

$$\frac{l'_\mu(z)}{l_\mu(z)} = \sum_{n \geq 0} \rho_n z^n / \sum_{n \geq 0} \sigma_n z^n \quad (4.34)$$

eşitliği elde edilir. (4.33) ve (4.34) eşitliklerinin katsayıları karşılaştırılırsa, bu durumda aşağıdaki

$$\eta_1 = \frac{2\mu + 5}{2\mu^3 + 11\mu^2 + 17\mu + 6}, \eta_2 = \frac{-4\mu^4 - 24\mu^3 + 19\mu^2 + 295\mu + 392}{(\mu + 2)^2(\mu + 3)^2(\mu + 4)(\mu + 5)(2\mu + 1)^2}$$

ve

$$\eta_3 = \frac{8\mu^7 + 44\mu^6 - 554\mu^5 - 4731\mu^4 - 7672\mu^3 + 23551\mu^2 + 85834\mu + 72384}{(\mu + 2)^3(\mu + 3)^3(\mu + 4)(\mu + 5)(\mu + 6)(\mu + 7)(2\mu + 1)^3}$$

biçimindeki Euler–Rayleigh toplamları elde edilir. $\mu \in (-1,1), \mu \neq 0, \mu \neq -\frac{1}{2}$ ve $k \in \{1,2,3\}$ olmak üzere, bulunan Euler–Rayleigh toplamları

$$\eta_k^{-\frac{1}{k}} < \tau_{\mu,1}^2 < \frac{\eta_k}{\eta_{k+1}}$$

biçimindeki Euler–Rayleigh eşitsizliklerinde dikkate alınırsa istenen alt ve üst sınırlar elde edilir.

4.6. Bessel Fonksiyonunun Konvekslik Yarıçapları

Bu bölümde birinci tür Bessel fonksiyonlarının iki farklı normalizasyonu dikkate alınarak bu fonksiyonların konvekslik yarıçaplarının bazı transandantal denklemlerin en küçük pozitif kökü olduğu gösterilmiştir. Ayrıca aynı fonksiyonların konvekslik yarıçapları için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

Teorem 4.6.1 $\nu > -1$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto \varphi_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{1-\nu} J_\nu(z)$$

Bessel fonksiyonunun konvekslik yarıçapı $r^c(\varphi_\nu)$,

$$(z\varphi'_\nu(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. Ayrıca bu yarıçap,

$$P_1(\nu) = \frac{2(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 4)(208\nu^2 + 1172\nu + 1693)}{3104\nu^4 + 36768\nu^3 + 161424\nu^2 + 312197\nu + 223803}$$

olmak üzere, aşağıdaki

$$\frac{2\sqrt{\nu+1}}{3} < r^c(\varphi_\nu) < 6\sqrt{\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{56\nu+137}},$$

$$2\sqrt[4]{\frac{(\nu+1)^2(\nu+2)}{56\nu+137}} < r^c(\varphi_\nu) < \sqrt{\frac{2(56\nu+137)(\nu+1)(\nu+3)}{208\nu^2+1172\nu+1693}}$$

ve

$$6\sqrt{\frac{32(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu+3)}{208\nu^2+1172\nu+1693}} < r^c(\varphi_\nu) < 2\sqrt{P_1(\nu)}$$

eşitsizliklerini sağlar (Aktaş *et al.* 2017a).

İspat: Alexander Dual teoreminden biliniyor ki, φ_ν fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $z\varphi'_\nu$ fonksiyonunun yıldızıl olmasıdır (Alexander 1915). Fakat, $z \mapsto (z\varphi'_\nu(z))'$ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı aslında $z \mapsto z\varphi'_\nu(z)$ fonksiyonunun yıldızılık yarıçapıdır (Baricz *et al.* 2014, 2016b). Böylece φ_ν fonksiyonunun konvekslik yarıçapı olan $r^c(\varphi_\nu)$,

$$(z\varphi'_\nu(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. Şimdi, Bessel diferensiyel denklemi

$$z^2 J''_\nu(z) + z J'_\nu(z) + (z^2 - \nu^2) J_\nu(z) = 0 \quad (4.35)$$

ile Bessel fonksiyonu ve türevinin sonsuz seri temsilleri olan

$$J_\nu(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n + \nu + 1)} z^{2n+\nu} \quad (4.36)$$

ve

$$J'_v(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2n + v)}{2^{2n+v} n! \Gamma(n + v + 1)} z^{2n+v-1} \quad (4.37)$$

ifadeleri birlikte dikkate alınır,

$$\Delta_v(z) = (z\varphi'_v(z))' = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2n + 1)^2}{2^{2n} n! (v + 1)_n} z^{2n} \quad (4.38)$$

elde edilir. φ_v fonksiyonu reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ sınıfının bir üyesi olup bu sınıf türev altında kapalı olduğundan Δ_v fonksiyonun da $\mathcal{LP}$ sınıfının bir üyesi olduğu söylenebilir. Böylece Δ_v fonksiyonunun tüm sıfırları reeldir. $\beta_{v,n}$ ler Δ_v fonksiyonunun sıfırlarını göstermek üzere, Δ_v fonksiyonu

$$\Delta_v(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\beta_{v,n}^2} \right) \quad (4.39)$$

biçiminde sonsuz çarpım temsiline sahiptir. (4.39) eşitliğinin logaritmik türevi alınır,

$$\rho_k = \sum_{n \geq 1} \beta_{v,n}^{-2k} \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{\Delta'_v(z)}{\Delta_v(z)} = -2 \sum_{k \geq 0} \rho_{k+1} z^{2k+1}, |z| < \beta_{v,1}^2 \quad (4.40)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\xi_n = \frac{(-1)^{n+1} 2(2n + 3)^2}{2^{2n+2} n! (v + 1)_{n+1}}$$

ve

$$\kappa_n = \frac{(-1)^n (2n+1)^2}{2^{2n} n! (\nu+1)_n}$$

olmak üzere, (4.38) ifadesi kullanılarak

$$\frac{\Delta'_\nu(z)}{\Delta_\nu(z)} = \sum_{n \geq 0} \xi_n z^{2n+1} / \sum_{n \geq 0} \kappa_n z^{2n} \quad (4.41)$$

eşitliği elde edilir. (4.40) ve (4.41) eşitliklerinde aynı kuvvete sahip terimlerin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$\rho_1 = \frac{9}{4(\nu+1)}, \rho_2 = \frac{56\nu+137}{16(\nu+1)^2(\nu+2)}, \rho_3 = \frac{208\nu^2+1172\nu+1693}{32(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu+3)}$$

ve

$$\rho_4 = \frac{3104\nu^4 + 36768\nu^3 + 161424\nu^2 + 312197\nu + 223803}{216(\nu+1)^4(\nu+2)^2(\nu+3)(\nu+4)}$$

biçiminde Euler-Rayleigh toplamları elde edilir. Bulunan bu Euler-Rayleigh toplamları $\nu > -1$ olmak üzere $k \in \{1,2,3\}$ için aşağıdaki

$$\rho_k^{-\frac{1}{k}} < \beta_{\nu,1}^2 < \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}$$

Euler-Rayleigh eşitsiliklerinde dikkate alınırsa istenen eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 4.6.2 $\nu > -1$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto \phi_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) z^{1-\frac{\nu}{2}} J_\nu(\sqrt{z})$$

Bessel fonksiyonunun konvekslik yarıçapı $r^c(\phi_\nu)$,

$$(z\phi'_\nu(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür ve bu yarıçap aşağıdaki

$$\nu + 1 < r^c(\phi_\nu) < \frac{16(\nu + 1)(\nu + 2)}{7\nu + 23},$$

$$\sqrt{\frac{16(\nu + 1)^2(\nu + 2)}{7\nu + 23}} < r^c(\phi_\nu) < \frac{2(\nu + 1)(\nu + 3)(7\nu + 23)}{9\nu^2 + 60\nu + 115}$$

ve

$$\sqrt[3]{\frac{32(\nu + 1)^3(\nu + 2)(\nu + 3)}{9\nu^2 + 60\nu + 115}} < r^c(\phi_\nu) < \frac{8(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 4)(9\nu^2 + 60\nu + 115)}{47\nu^4 + 621\nu^3 + 3136\nu^2 + 7221\nu + 6195}$$

eşitsizliklerini sağlar (Aktaş *et al.* 2017a).

İspat: Önceki teoremin ispatında olduğu gibi Alexander Dual teoreminden biliniyor ki, ϕ_ν fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $z\phi'_\nu$ fonksiyonunun yıldızlı olmasıdır (Alexander 1915). Fakat, $z \mapsto (z\phi'_\nu(z))'$ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı aslında $z \mapsto z\phi'_\nu(z)$ fonksiyonunun yıldızlılık yarıçapıdır (Baricz *et al.* 2014, 2016b). Sonuç olarak ϕ_ν fonksiyonunun konvekslik yarıçapı olan $r^c(\phi_\nu)$,

$$(z\phi'_\nu(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. Şimdi (4.35), (4.36) ve (4.37) ifadelerinde sırasıyla z yerine $\sqrt{z}$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\theta_\nu(z) = (z\phi'_\nu(z))' = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (n+1)^2}{2^{2n} n! (\nu+1)_n} z^n \quad (4.42)$$

elde edilir. Ek olarak, ϕ_v fonksiyonunun reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ ye ait olduğu bilinmektedir. Laguerre-Pólya sınıfı türev altında kapalı olduğundan θ_v fonksiyonu da Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ ye aittir. Yani, θ_v fonksiyonunun tüm sıfırları reeldir. $\gamma_{v,n}$ ler θ_v fonksiyonunun sıfırlarını göstermek üzere Hadamard teoremine göre, θ_v fonksiyonu

$$\theta_v(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{\gamma_{v,n}}\right) \quad (4.43)$$

biçiminde sonsuz çarpım temsiline sahiptir. (4.43) ifadesinin logaritmik türevi alınır, $q_k = \sum_{n \geq 1} \gamma_{v,n}^{-k}$ olmak üzere,

$$\frac{\theta'_v(z)}{\theta_v(z)} = - \sum_{k \geq 0} q_{k+1} z^k, |z| < \gamma_{v,1} \quad (4.44)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$m_n = \frac{(-1)^{n+1}(n+2)^2}{2^{2n+2}n!(v+1)_{n+1}}$$

ve

$$s_n = \frac{(-1)^n(n+1)^2}{2^{2n}n!(v+1)_n}$$

olmak üzere, θ_v fonksiyonunun (4.42) ile verilen sonsuz seri temsilinden

$$\frac{\theta'_v(z)}{\theta_v(z)} = \sum_{n \geq 0} m_n z^n / \sum_{n \geq 0} s_n z^n \quad (4.45)$$

eşitliği elde edilir. (4.44) ve (4.45) ifadelerinde aynı kuvvete sahip terimlerin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki

$$q_1 = \frac{1}{v+1}, q_2 = \frac{7v+23}{16(v+1)^2(v+2)}, q_3 = \frac{9v^2+60v+115}{32(v+1)^3(v+2)(v+3)}$$

ve

$$q_4 = \frac{47v^4 + 621v^3 + 3136v^2 + 7221v + 6195}{256(v+1)^4(v+2)^2(v+3)(v+4)}$$

Euler-Rayleigh toplamları elde edilir. Bulunan bu toplamlar $v > -1$ ve $k \in \{1,2,3\}$ için aşağıdaki

$$q_k^{-\frac{1}{k}} < \gamma_{v,1} < \frac{q_k}{q_{k+1}}$$

Euler-Rayleigh eşitsizliklerinde dikkate alınırsa istenen eşitsizlikler elde edilir.

4.7. Struve Fonksiyonun Konvekslik Yarıçapları

Bu bölümde birinci tür Struve fonksiyonlarının iki farklı normalizasyonu dikkate alınarak önceki bölümde birinci tür Bessel fonksiyonları için elde edilen sonuçlara benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.7.1 $|v| \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto v_v(z) = \sqrt{\pi} 2^\nu z^{-\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_\nu(z)$$

Struve fonksiyonunun konvekslik yarıçapı $r^c(v_v)$,

$$(zv'_v(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. Ayrıca

$$P_2(v) = \frac{7(2v+3)(2v+5)(2v+9)(268v^2+1824v+3213)}{160336v^4+2256464v^3+11855904v^2+27626796v+24017715}$$

olmak üzere, bu yarıçap aşağıdaki

$$\sqrt{\frac{2v+3}{3}} < r^c(v_v) < \sqrt{\frac{36v^2+144v+135}{34v+105}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{3(2v+3)^2(2v+5)}{34v+105}} < r^c(v_v) < \sqrt{\frac{5(2v+3)(2v+7)(34v+105)}{3(268v^2+1824v+3213)}}$$

ve

$$\sqrt[6]{\frac{5(2v+3)^3(2v+5)(2v+7)}{268v^2+1824v+3213}} < r^c(v_v) < 3\sqrt{P_2(v)}$$

eşitsizliklerini sağlar (Aktaş *et al.* 2017a).

İspat: Teorem 4.6.1 in ispatına benzer olarak v_v fonksiyonunun konvekslik yarıçapı $r^c(v_v)$ nin,

$$(zv'_v(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif kökü olduğu kolayca görülebilir. Şimdi,

$$z^2 \mathbf{H}_v''(z) + z \mathbf{H}_v'(z) + (z^2 - v^2) \mathbf{H}_v(z) = \frac{4 \left(\frac{z}{2}\right)^{v+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(v + \frac{1}{2})} \quad (4.46)$$

biçimindeki Struve diferensiyel denklemi ile

$$\mathbf{H}_v(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n + \frac{3}{2})\Gamma(v + n + \frac{3}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v+1} \quad (4.47)$$

ve

$$\mathbf{H}'_v(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n(2n + v + 1)}{2\Gamma(n + \frac{3}{2})\Gamma(v + n + \frac{3}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (4.48)$$

biçimindeki Struve fonksiyonu ve türevinin seri temsilleri birlikte dikkate alınır,

$$\Omega_v(z) = (zv'_v(z))' = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n(2n + 1)}{2^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(v + \frac{3}{2}\right)_n} z^{2n} \quad (4.49)$$

elde edilir. v_v fonksiyonu reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ sınıfının bir üyesi olup bu sınıf türev altında kapalı olduğundan Ω_v fonksiyonunun da $\mathcal{LP}$ sınıfının bir üyesi olduğu söylenebilir. Böylece Ω_v fonksiyonunun tüm sıfırları reeldir. $\vartheta_{v,n}$ ler Ω_v fonksiyonunun sıfırlarını göstermek üzere, Ω_v fonksiyonu

$$\Omega_v(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\vartheta_{v,n}^2}\right) \quad (4.50)$$

biçiminde sonsuz çarpım temsiline sahiptir. (4.50) eşitliğinin logaritmik türevi alınır, $\chi_k = \sum_{n \geq 1} \vartheta_{v,n}^{-2k}$ olmak üzere,

$$\frac{\Omega'_v(z)}{\Omega_v(z)} = -2 \sum_{k \geq 0} \chi_{k+1} z^{2k+1}, |z| < \vartheta_{v,1}^2 \quad (4.51)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\omega_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)(n+1)}{2^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)_{n+1} \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_{n+1}}$$

ve

$$\zeta_n = \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_n}$$

olmak üzere, (4.49) ifadesi kullanılarak

$$\frac{\Omega'_\nu(z)}{\Omega_\nu(z)} = \sum_{n \geq 0} \omega_n z^{2n+1} / \sum_{n \geq 0} \zeta_n z^{2n} \quad (4.52)$$

elde edilir. (4.51) ve (4.52) eşitliklerinde aynı kuvvete sahip terimlerin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$\chi_1 = \frac{3}{2\nu+3}, \chi_2 = \frac{34\nu+105}{3(2\nu+3)^2(2\nu+5)}, \chi_3 = \frac{268\nu^2+1824\nu+3213}{5(2\nu+3)^3(2\nu+5)(2\nu+7)}$$

ve

$$\chi_4 = \frac{160336\nu^4 + 2256464\nu^3 + 11855904\nu^2 + 27626796\nu + 24017715}{315(2\nu+3)^4(2\nu+5)^2(2\nu+7)(2\nu+9)}$$

biçiminde Euler-Rayleigh toplamları elde edilir. Bulunan bu Euler-Rayleigh toplamları $|\nu| \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere $k \in \{1,2,3\}$ için

$$\chi_k^{-\frac{1}{k}} < \vartheta_{\nu,1}^2 < \frac{\chi_k}{\chi_{k+1}}$$

Euler-Rayleigh eşitsiliklerinde dikkate alınırca istenen eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 4.7.2 $|\nu| \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto w_\nu(z) = \sqrt{\pi} 2^\nu z^{\frac{1-\nu}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_\nu(\sqrt{z})$$

Struve fonksiyonunun konvekslik yarıçapı $r^c(w_\nu)$,

$$(zw'_\nu(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. Üstelik,

$$P_3(\nu) = \frac{30(2\nu + 3)(2\nu + 5)(2\nu + 9)(404\nu^2 + 3396\nu + 8665)}{36368\nu^4 + 588848\nu^3 + 3695776\nu^2 + 10793332\nu + 11828151}$$

olmak üzere, bu yarıçap aşağıdaki

$$\frac{3(2\nu + 3)}{4} < r^c(w_\nu) < \frac{30(2\nu + 3)(2\nu + 5)}{26\nu + 119},$$

$$\sqrt{\frac{45(2\nu + 3)^2(2\nu + 5)}{2(26\nu + 119)}} < r^c(w_\nu) < \frac{21(2\nu + 3)(2\nu + 7)(26\nu + 119)}{2(404\nu^2 + 3396\nu + 8665)}$$

ve

$$\sqrt[3]{\frac{945(2\nu + 3)^3(2\nu + 5)(2\nu + 7)}{4(404\nu^2 + 3396\nu + 8665)}} < r^c(w_\nu) < P_3(\nu)$$

eşitsizliklerini sağlar (Aktaş *et al.* 2017a).

İspat: Alexander Dual teoremi ve Baricz *et al.* (2014)'deki düşünce tarzı ile, w_ν fonksiyonunun konvekslik yarıçapı olan $r^c(w_\nu)$ nün,

$$(zw'_v(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif kökü olduğu kolayca elde edilir. Şimdi (4.46), (4.47) ve (4.48) ifadelerinde z yerine $\sqrt{z}$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\psi_v(z) = (zw'_v(z))' = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (n+1)^2}{2^{2n} (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(v + \frac{3}{2}\right)_n} z^n \quad (4.53)$$

elde edilir. w_v fonksiyonu reel tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ ye ait olduğundan ve Laguerre-Pólya sınıfı türev altında kapalı olduğundan ψ_v fonksiyonu da Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ ye aittir. Yani, ψ_v fonksiyonunun tüm sıfırları reeldir. $\epsilon_{v,n}$ ler ψ_v fonksiyonunun sıfırlarını göstermek üzere Hadamard teoremine göre ψ_v fonksiyonu

$$\psi_v(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{\epsilon_{v,n}}\right) \quad (4.54)$$

biçiminde çarpım temsiline sahiptir. (4.54) ifadesinin logaritmik türevi alınır, $\varphi_k = \sum_{n \geq 1} \epsilon_{v,n}^{-k}$ olmak üzere,

$$\frac{\psi'_v(z)}{\psi_v(z)} = - \sum_{k \geq 0} \varphi_{k+1} z^k, \quad |z| < \epsilon_{v,1} \quad (4.55)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$t_n = \frac{(-1)^{n+1} (n+2)^2 (n+1)}{2^{2n+2} (2n+3) \left(\frac{1}{2}\right)_{n+1} \left(v + \frac{3}{2}\right)_{n+1}}$$

ve

$$r_n = \frac{(-1)^n(n+1)^2}{2^{2n}(2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(v + \frac{3}{2}\right)_n}$$

olmak üzere, ψ_v fonksiyonunun (4.53) ile verilen seri temsilinden

$$\frac{\psi'_v(z)}{\psi_v(z)} = \sum_{n \geq 0} t_n z^n / \sum_{n \geq 0} r_n z^n \quad (4.56)$$

elde edilir. (4.55) ve (4.56) ifadelerinde aynı kuvvete sahip terimlerin katsayıları karşılaştırılırsa aşağıdaki

$$\varphi_1 = \frac{4}{3(2v+3)}, \varphi_2 = \frac{2(26v+119)}{45(2v+3)^2(2v+5)}, \varphi_3 = \frac{4(404v^2+3396v+8665)}{945(2v+3)^3(2v+5)(2v+7)}$$

ve

$$\varphi_4 = \frac{2(36368v^4 + 588848v^3 + 3695776v^2 + 10793332v + 11828151)}{14175(2v+3)^4(2v+5)^2(2v+7)(2v+9)}$$

Euler-Rayleigh toplamları elde edilir. Bulunan bu toplamalar, $|v| \leq \frac{1}{2}$ ve $k \in \{1,2,3\}$ olmak üzere

$$\varphi_k^{-\frac{1}{k}} < \epsilon_{v,1} < \frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}$$

biçimindeki Euler-Rayleigh eşitsizliklerinde dikkate alınırsa istenen eşitsizlikler elde edilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında farklı şekillerde normalize edilmiş birinci tür Bessel, Struve ve Lommel fonksiyonları ele alınarak bu fonksiyonların ünivalentlik, yıldızlılık ve konvekslik yarıçapları ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca Struve fonksiyonu ve türevinin lineer kombinasyonunun sıfırları ile Lommel fonksiyonunun türevinin sıfırları için yeni alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Bulunan sonuçların karşılaştırılması ile normalize edilmiş bazı Struve fonksiyonlarının ünivalentlik yarıçapının normalize edilmiş bazı Bessel fonksiyonlarının ünivalentlik yarıçapından büyük olduğu da gösterilmiştir. Elde edilen sonuçların birçoğu yenidir ancak bazı sonuçlar kimi matematikçiler tarafından farklı yöntemlerle daha önceden elde edilmiştir. Özellikle Bessel fonksiyonun ünivalentlik yarıçapı ile ilgili daha önceden Kreyszig ve Todd (1960) tarafından elde edilen üst sınır geliştirilmiştir. Ayrıca daha önce Kreyszig ve Todd (1960) tarafından elde edilen bir alt sınır ile Hayden ve Merkes (1964) tarafından elde edilen bir limit ilişkisi tamamen farklı bir yöntemle yeniden elde edilmiştir. Diğer taraftan, Struve fonksiyonunun türevinin ilk pozitif sıfırı için verilen sonuçlar, daha önce Baricz *et al.* (2017a) tarafından biraz farklı bir yaklaşım kullanılarak elde edilen bazı sonuçları yeniden elde etmekte bazılarını da geliştirmektedir.

Sonuç 5.1 Normalize edilmiş birinci tür

$$z \mapsto \varphi_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{1-\nu} J_\nu(z)$$

Bessel fonksiyonunun ünivalentlik (ve yıldızlılık) yarıçapı $r^*(\varphi_\nu)$ olmak üzere her $\nu > -1$ için

$$r^*(\varphi_\nu) < \sqrt{2(\nu + 1)}$$

dir. Üstelik,

$$K(v) = \frac{2(v+1)(v+2)(v+4)(4v^2+26v+49)}{16v^4+208v^3+1032v^2+2341v+1987}$$

olmak üzere, ünivalentlik yarıçapı $r^*(\varphi_v)$ aşağıdaki

$$2\sqrt{\frac{v+1}{3}} < r^*(\varphi_v) < 2\sqrt{\frac{3(v+1)(v+2)}{4v+13}},$$

$$2\sqrt[4]{\frac{(v+1)^2(v+2)}{4v+13}} < r^*(\varphi_v) < 2\sqrt{\frac{(v+1)(v+3)(4v+13)}{2(4v^2+26v+49)}},$$

ve

$$2\sqrt[6]{\frac{(v+1)^3(v+2)(v+3)}{2(4v^2+26v+49)}} < r^*(\varphi_v) < 2\sqrt{K(v)}$$

eşitsizliklerini sağlar.

Sonuç 5.2 $v > -1$ olmak üzere aşağıdaki iddialar doğrudur.

a. Normalize edilmiş birinci tür

$$z \mapsto \phi_v(z) = 2^v \Gamma(v+1) z^{1-\frac{v}{2}} J_v(\sqrt{z})$$

Bessel fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(\phi_v)$, aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşittir ve bu yarıçap

$$\sqrt{z} J'_v(\sqrt{z}) + (2-v) J_v(\sqrt{z}) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. Her $\nu > -1$ için $r^*(\phi_\nu)$ ünivalentlik (ve yıldızlılık) yarıçapı için

$$r^*(\phi_\nu) < 4(\nu + 1)$$

dir. Üstelik, bu yarıçap

$$2(\nu + 1) < r^*(\phi_\nu) < \frac{8(\nu + 1)(\nu + 2)}{\nu + 5},$$

$$\frac{4(\nu + 1)\sqrt{\nu + 2}}{\sqrt{\nu + 5}} < r^*(\phi_\nu) < \frac{4(\nu + 1)(\nu + 3)(\nu + 5)}{\nu^2 + 8\nu + 23}$$

ve

$$4(\nu + 1) \sqrt[3]{\frac{(\nu + 2)(\nu + 3)}{\nu^2 + 8\nu + 23}} < r^*(\phi_\nu) < \frac{4(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 4)(\nu^2 + 8\nu + 23)}{\nu^4 + 15\nu^3 + 90\nu^2 + 267\nu + 287}$$

eşitsizliklerini sağlar.

c. $\nu \rightarrow \infty$ iken ünivalentlik (ve yıldızlılık) yarıçapı $r^*(\phi_\nu)$,

$$\frac{r^*(\phi_\nu)}{4(\nu + 1)} \rightarrow 1$$

limit ilişkisini sağlar. Üstelik, $\nu \rightarrow \infty$ iken

$$r^*(\phi_\nu) = 4(\nu + 1) \left(1 - \frac{1}{\nu} + \mathcal{O}(\nu^{-2}) \right)$$

asimtotik ilişkisi vardır.

d. $\nu \mapsto r^*(\phi_\nu)$ fonksiyonu $(-1, \infty)$ aralığı üzerinde artandır.

Sonuç 5.3 $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ olmak üzere aşağıdaki iddialar doğrudur.

a. Normalize edilmiş

$$z \mapsto v_\nu(z) = \sqrt{\pi} 2^\nu z^{-\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_\nu(z)$$

Struve fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(v_\nu)$, aynı fonksiyonun yıldızlık yarıçapına eşittir. Ayrıca $r^*(v_\nu)$ yarıçapı,

$$z \mathbf{H}'_\nu(z) - \nu \mathbf{H}_\nu(z) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ olmak üzere, $r^*(v_\nu)$ ünivalentlik yarıçapı için

$$r^*(v_\nu) < \sqrt{3\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}$$

üst sınırı vardır. Üstelik,

$$S_1(\nu) = \frac{63(2\nu + 3)(2\nu + 5)(2\nu + 9)(4\nu^2 + 32\nu + 79)}{592\nu^4 + 9296\nu^3 + 56352\nu^2 + 159660\nu + 171315}$$

olmak üzere, $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ olduğunda $r^*(v_\nu)$ ünivalentlik yarıçapı aşağıdaki

$$\sqrt{2\nu + 3} < r^*(v_\nu) < \sqrt{\frac{3(2\nu + 3)(2\nu + 5)}{2\nu + 9}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{3(2\nu+3)^2(2\nu+5)}{2\nu+9}} < r^*(\nu_\nu) < \sqrt{\frac{5(2\nu+3)(2\nu+7)(2\nu+9)}{3(4\nu^2+32\nu+79)}},$$

ve

$$\sqrt[6]{\frac{5(2\nu+3)^3(2\nu+5)(2\nu+7)}{4\nu^2+32\nu+79}} < r^*(\nu_\nu) < \sqrt{S_1(\nu)}$$

eşitsizliklerini sağlar.

Sonuç 5.4 $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ olmak üzere aşağıdaki iddialar doğrudur.

a. Normalize edilmiş

$$z \mapsto w_\nu(z) = \sqrt{\pi} 2^\nu z^{\frac{1-\nu}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_\nu(\sqrt{z})$$

Struve fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(w_\nu)$, bu fonksiyonun yıldızlık yarıçapına eşittir ve bu yarıçap

$$\sqrt{z} \mathbf{H}'_\nu(\sqrt{z}) - (\nu - 1) \mathbf{H}_\nu(\sqrt{z}) = 0$$

transandantal denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $r^*(w_\nu)$ ünivalentlik yarıçapı için

$$r^*(w_\nu) < 3(2\nu + 3)$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik,

$$S_2(\nu) = \frac{15(2\nu+3)(2\nu+5)(2\nu+9)(20\nu^2+228\nu+1417)}{272\nu^4+5552\nu^3+47584\nu^2+247828\nu+416439}$$

olmak üzere, $r^*(w_\nu)$ ünivalentlik yarıçapı aşağıdaki

$$\frac{3(2\nu+3)}{2} < r^*(w_\nu) < \frac{15(2\nu+3)(2\nu+5)}{2\nu+23},$$

$$\frac{3(2\nu+3)\sqrt{5(2\nu+5)}}{\sqrt{2(2\nu+23)}} < r^*(w_\nu) < \frac{21(2\nu+3)(2\nu+7)(2\nu+23)}{20\nu^2+228\nu+1417},$$

ve

$$3(2\nu+3)^3 \sqrt{\frac{35(2\nu+5)(2\nu+7)}{2(20\nu^2+228\nu+1417)}} < r^*(w_\nu) < S_2(\nu)$$

eşitsizliklerini de sağlar.

Sonuç 5.5 $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto u_\nu(z) = \left(\sqrt{\pi} 2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_\nu(z) \right)^{\frac{1}{\nu+1}}$$

Struve fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(u_\nu)$, aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşittir. Ayrıca bu yarıçap $\mathbf{H}'_\nu$ fonksiyonunun en küçük pozitif kökü olan $h'_{\nu,1}$ dir.

Sonuç 5.6 $\mu \in (-1,1)$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki iddialar doğrudur.

a. Normalize edilmiş

$$z \mapsto g_\mu(z) = g_{\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z) = \mu(\mu+1)z^{-\mu+\frac{1}{2}} s_{\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z)$$

Lommel fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(g_\mu)$, aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşit olup aynı zamanda bu yarıçap

$$zs'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = 0$$

transandantal denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $r^*(g_\mu)$ ünivalentlik yarıçapı,

$$r^*(g_\mu) < \sqrt{\frac{(\mu+2)(\mu+3)}{2}}$$

eşitsizliğini sağlar. Üstelik,

$$T_1(\mu) = \frac{(\mu+2)(\mu+3)(\mu+6)(\mu+7)(-\mu^2+31\mu+120)}{3(\mu^4-2\mu^3+175\mu^2+1842\mu+4032)},$$

$$T_2(\mu) = 3(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)(\mu+8)(\mu+9),$$

$$T_3(\mu) = (\mu^4 - 2\mu^3 + 175\mu^2 + 1842\mu + 4032),$$

$$T_4(\mu) = -\mu^8 + 128\mu^7 + 2196\mu^6 + 24178\mu^5 + 352645\mu^4$$

ve

$$T_5(\mu) = 3476958\mu^3 + 17744328\mu^2 + 44003088\mu + 42301440$$

olmak üzere, bu yarıçap aşağıdaki

$$\sqrt{\frac{(\mu+2)(\mu+3)}{3}} < r^*(g_\mu) < \sqrt{\frac{3(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)}{-\mu^2+31\mu+120}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{(\mu+2)^2(\mu+3)^2(\mu+4)(\mu+5)}{-\mu^2+31\mu+120}} < r^*(g_\mu) < \sqrt{T_1(\mu)}$$

ve

$$\sqrt[6]{\frac{(\mu+2)^3(\mu+3)^3(\mu+4)(\mu+5)(\mu+6)(\mu+7)}{3T_3(\mu)}} < r^*(g_\mu) < \sqrt{\frac{T_2(\mu)T_3(\mu)}{T_4(\mu)+T_5(\mu)}}$$

eşitsizliklerini sağlar.

Sonuç 5.7 $\mu \in (-1,1)$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki iddialar doğrudur.

a. Normalize edilmiş

$$z \mapsto h_\mu(z) = h_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = \mu(\mu+1)z^{\frac{3-2\mu}{4}} s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sqrt{z})$$

Lommel fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(h_\mu)$, aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşittir ve bu yarıçap

$$2\sqrt{z}s'_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sqrt{z}) - (2\mu-3)s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sqrt{z}) = 0$$

transandantal denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $r^*(h_\mu)$ ünivalentlik yarıçapı

$$r^*(h_\mu) < (\mu + 2)(\mu + 3)$$

eşitsizliğini sağlar. Üstelik,

$$T_6(\mu) = \frac{(\mu + 2)(\mu + 3)(\mu + 6)(\mu + 7)(-\mu^2 + 3\mu + 22)}{\mu^4 - 14\mu^3 - 79\mu^2 + 320\mu + 1308},$$

$$T_7(\mu) = -(\mu + 2)(\mu + 3)(\mu + 4)(\mu + 5)(\mu + 8)(\mu + 9),$$

$$T_8(\mu) = \mu^4 - 14\mu^3 - 79\mu^2 + 320\mu + 1308,$$

$$T_9(\mu) = 3\mu^8 + 96\mu^7 + 2180\mu^6 + 27338\mu^5 + 164205\mu^4$$

ve

$$T_{10}(\mu) = 335662\mu^3 - 881588\mu^2 - 5070360\mu - 6293376$$

olmak üzere, bu yarıçap aşağıdaki

$$\frac{(\mu + 2)(\mu + 3)}{2} < r^*(h_\mu) < \frac{(\mu + 2)(\mu + 3)(\mu + 4)(\mu + 5)}{-\mu^2 + 3\mu + 22},$$

$$\frac{(\mu + 2)(\mu + 3)\sqrt{(\mu + 4)(\mu + 5)}}{\sqrt{2(-\mu^2 + 3\mu + 22)}} < r^*(h_\mu) < T_6(\mu)$$

ve

$$\frac{(\mu + 2)(\mu + 3)\sqrt[3]{(\mu + 4)(\mu + 5)(\mu + 6)(\mu + 7)}}{\sqrt[3]{2T_8(\mu)}} < r^*(h_\mu) < \frac{T_7(\mu)T_8(\mu)}{T_9(\mu) + T_{10}(\mu)}$$

eşitsizliklerini de sağlar.

Sonuç 5.8 $\mu \in (-\frac{1}{2}, 1)$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto f_\mu(z) = f_{\mu-\frac{1}{2}}(z) = \left(\mu(\mu+1) s_{\mu-\frac{1}{2}}(z) \right)^{\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}}$$

Lommel fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı $r^*(f_\mu)$, aynı fonksiyonun yıldızlılık yarıçapına eşittir. Ayrıca bu yarıçap $s'_{\mu-\frac{1}{2}}$ fonksiyonunun en küçük pozitif köküdür.

Sonuç 5.9 $\alpha + \nu > -1, |\nu| < \frac{1}{2}$ ve $\mathcal{H}_\nu$ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı $\zeta_{\nu,1}$ olsun.

Ayrıca

$$\kappa_1 = -2\alpha^2\nu + 7\alpha^2 - 4\alpha\nu^2 + 2\alpha\nu + 42\alpha - 2\nu^3 - 5\nu^2 + 72\nu + 135$$

ve

$$\kappa_2 = -4\alpha^3\nu^2 - 96\alpha^3\nu + 145\alpha^3 - 12\alpha^2\nu^3 - 324\alpha^2\nu^2 - 429\alpha^2\nu + 1305\alpha^2$$

$$-12\alpha\nu^4 - 360\alpha\nu^3 - 1689\alpha\nu^2 + 1170\alpha\nu + 6291\alpha - 4\nu^5 - 132\nu^4 + 621\nu^2$$

$$-1115\nu^3 + 12339\nu + 14931$$

olsun. Bu durumda $\zeta_{\nu,1}$ aşağıdaki

$$\zeta_{\nu,1}^2 > \frac{3(2\nu+3)(\alpha+\nu+1)}{\alpha+\nu+3},$$

$$\zeta_{\nu,1}^2 > \frac{3(2\nu+3)(\alpha+\nu+1)\sqrt{5(2\nu+5)}}{\sqrt{\kappa_1}},$$

$$\zeta_{v,1}^2 > \frac{3(2v+3)(\alpha+v+1)^3 \sqrt{35(2v+5)(2v+7)}}{\sqrt[3]{\kappa_2}}$$

alt sınırlarına ve

$$\zeta_{v,1}^2 < \frac{15(2v+3)(2v+5)(\alpha+v+1)(\alpha+v+3)}{\kappa_1},$$

$$\zeta_{v,1}^2 < \frac{21(2v+3)(2v+7)(\alpha+v+1)\kappa_1}{\kappa_2}$$

üst sınırlarına sahiptir.

Sonuç 5.10 $|v| < \frac{1}{2}$ ve $\mathbf{H}_v'$ fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı $h'_{v,1}$ olsun. Bu durumda $h'_{v,1}$, aşağıdaki

$$(h'_{v,1})^2 > \frac{3(2v+3)(v+1)}{v+3},$$

$$(h'_{v,1})^2 > \frac{3(2v+3)(v+1)\sqrt{5(2v+5)}}{\sqrt{-2v^3-5v^2+72v+135}},$$

$$(h'_{v,1})^2 > \frac{3(2v+3)(v+1)^3 \sqrt{35(2v+5)(2v+7)}}{\sqrt[3]{-4v^5-132v^4-1115v^3+621v^2+12339v+14931}}$$

alt sınırlarına ve

$$(h'_{v,1})^2 < \frac{15(2v+3)(2v+5)(v+1)(v+3)}{-2v^3-5v^2+72v+135},$$

$$(h'_{v,1})^2 < \frac{21(2v+3)(2v+7)(v+1)(-2v^3-5v^2+72v+135)}{-4v^5-132v^4-1115v^3+621v^2+12339v+14931}$$

üst sınırlarına sahiptir.

Sonuç 5.11 $\mu \in (-1,1), \mu \neq 0$ ve $\mu \neq -\frac{1}{2}$ olmak üzere $\mathcal{L}_\mu$ Lommel fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı $\tau_{\mu,1}$ olsun. Ayrıca

$$\varpi_1 = \frac{(\mu+4)(\mu+5)(\mu+6)(\mu+7)}{8\mu^7 + 44\mu^6 - 554\mu^5 - 4731\mu^4 - 7672\mu^3 + 23551\mu^2 + 85834\mu + 72384}$$

ve

$$\varpi_2 = \frac{-4\mu^4 - 24\mu^3 + 19\mu^2 + 295\mu + 392}{8\mu^7 + 44\mu^6 - 554\mu^5 - 4731\mu^4 - 7672\mu^3 + 23551\mu^2 + 85834\mu + 72384}$$

olsun. Bu durumda $\tau_{\mu,1}$ için

$$(\tau_{\mu,1})^2 > \frac{(\mu+2)(\mu+3)(2\mu+1)}{2\mu+5},$$

$$(\tau_{\mu,1})^2 > \frac{(\mu+2)(\mu+3)(2\mu+1)\sqrt{(\mu+4)(\mu+5)}}{\sqrt{-4\mu^4 - 24\mu^3 + 19\mu^2 + 295\mu + 392}},$$

$$(\tau_{\mu,1})^2 > (\mu+2)(\mu+3)(2\mu+1)^3\sqrt[3]{\varpi_1}$$

alt sınırları ve

$$(\tau_{\mu,1})^2 < \frac{(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)(2\mu+1)(2\mu+5)}{-4\mu^4 - 24\mu^3 + 19\mu^2 + 295\mu + 392},$$

$$(\tau_{\mu,1})^2 < (\mu+2)(\mu+3)(\mu+6)(\mu+7)(2\mu+1)\varpi_2$$

üst sınırları vardır.

Sonuç 5.12 $\nu > -1$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto \varphi_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{1-\nu} J_\nu(z)$$

Bessel fonksiyonunun konvekslik yarıçapı $r^c(\varphi_\nu)$,

$$(z\varphi'_\nu(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. Ayrıca bu yarıçap,

$$P_1(\nu) = \frac{2(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 4)(208\nu^2 + 1172\nu + 1693)}{3104\nu^4 + 36768\nu^3 + 161424\nu^2 + 312197\nu + 223803}$$

olmak üzere, aşağıdaki

$$\frac{2\sqrt{\nu + 1}}{3} < r^c(\varphi_\nu) < 6 \sqrt{\frac{(\nu + 1)(\nu + 2)}{56\nu + 137}},$$

$$2^4 \sqrt{\frac{(\nu + 1)^2(\nu + 2)}{56\nu + 137}} < r^c(\varphi_\nu) < \sqrt{\frac{2(56\nu + 137)(\nu + 1)(\nu + 3)}{208\nu^2 + 1172\nu + 1693}}$$

ve

$$6 \sqrt{\frac{32(\nu + 1)^3(\nu + 2)(\nu + 3)}{208\nu^2 + 1172\nu + 1693}} < r^c(\varphi_\nu) < 2\sqrt{P_1(\nu)}$$

eşitsizliklerini sağlar.

Sonuç 5.13 $\nu > -1$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto \phi_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{1-\frac{\nu}{2}} J_\nu(\sqrt{z})$$

Bessel fonksiyonunun konvekslik yarıçapı $r^c(\phi_\nu)$,

$$(z\phi'_\nu(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür ve bu yarıçap aşağıdaki

$$\nu + 1 < r^c(\phi_\nu) < \frac{16(\nu + 1)(\nu + 2)}{7\nu + 23},$$

$$\sqrt{\frac{16(\nu + 1)^2(\nu + 2)}{7\nu + 23}} < r^c(\phi_\nu) < \frac{2(\nu + 1)(\nu + 3)(7\nu + 23)}{9\nu^2 + 60\nu + 115}$$

ve

$$\sqrt[3]{\frac{32(\nu + 1)^3(\nu + 2)(\nu + 3)}{9\nu^2 + 60\nu + 115}} < r^c(\phi_\nu) < \frac{8(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 4)(9\nu^2 + 60\nu + 115)}{47\nu^4 + 621\nu^3 + 3136\nu^2 + 7221\nu + 6195}$$

eşitsizliklerini sağlar.

Sonuç 5.14 $|\nu| \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto v_\nu(z) = \sqrt{\pi} 2^\nu z^{-\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_\nu(z)$$

Struve fonksiyonunun konvekslik yarıçapı $r^c(v_\nu)$,

$$(zv'_\nu(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. Ayrıca

$$P_2(v) = \frac{7(2v+3)(2v+5)(2v+9)(268v^2 + 1824v + 3213)}{160336v^4 + 2256464v^3 + 11855904v^2 + 27626796v + 24017715}$$

olmak üzere, bu yarıçap aşağıdaki

$$\sqrt{\frac{2v+3}{3}} < r^c(v_v) < \sqrt{\frac{36v^2 + 144v + 135}{34v + 105}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{3(2v+3)^2(2v+5)}{34v+105}} < r^c(v_v) < \sqrt{\frac{5(2v+3)(2v+7)(34v+105)}{3(268v^2 + 1824v + 3213)}}$$

ve

$$\sqrt[6]{\frac{5(2v+3)^3(2v+5)(2v+7)}{268v^2 + 1824v + 3213}} < r^c(v_v) < 3\sqrt{P_2(v)}$$

eşitsizliklerini sağlar.

Sonuç 5.15 $|v| \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere, normalize edilmiş

$$z \mapsto w_v(z) = \sqrt{\pi} 2^v z^{\frac{1-v}{2}} \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right) \mathbf{H}_v(\sqrt{z})$$

Struve fonksiyonunun konvekslik yarıçapı $r^c(w_v)$,

$$(zw'_v(z))' = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. Üstelik,

$$P_3(v) = \frac{30(2v+3)(2v+5)(2v+9)(404v^2 + 3396v + 8665)}{36368v^4 + 588848v^3 + 3695776v^2 + 10793332v + 11828151}$$

olmak üzere, bu yarıçap aşağıdaki

$$\frac{3(2v+3)}{4} < r^c(w_v) < \frac{30(2v+3)(2v+5)}{26v+119},$$

$$\sqrt{\frac{45(2v+3)^2(2v+5)}{2(26v+119)}} < r^c(w_v) < \frac{21(2v+3)(2v+7)(26v+119)}{2(404v^2+3396v+8665)}$$

ve

$$\sqrt[3]{\frac{945(2v+3)^3(2v+5)(2v+7)}{4(404v^2+3396v+8665)}} < r^c(w_v) < P_3(v)$$

eşitsizliklerini sağlar.

KAYNAKLAR

- Aktaş, İ., Baricz Á. and Orhan, H., 2017a. Bounds for radii of starlikeness and convexity of some special functions. *Turk. J. Math.*, (accepted).
- Aktaş, İ., Baricz, Á. and Yağmur N., 2017b. Bounds for the radii of univalence of some special functions. *Math. Inequal. & Appl.*, 20(3), 825-843.
- Alexander, J. W., 1915. Functions which Map the Interior of the Unit Circle Upon Simple Regions. *Annals of Mathematics*, 17(1), 12-22.
- Baricz, Á. and Ponnusamy, S., 2010. Starlikeness and convexity of generalized Bessel functions. *Integr. Transforms Spec. Funct.*, 21(9), 641–653.
- Baricz, Á. and Százs, R., 2014. The Radius of convexity of normalized Bessel functions of the first kind. *Anal. Appl.*, 12(5), 485-509.
- Baricz, Á., 2006. Geometric properties of generalized Bessel functions of complex order. *Mathematica*, 48(71), 13–18.
- Baricz, Á., 2008. Geometric properties of generalized Bessel functions. *Publ. Math. Debrecen*, 73, 155-178.
- Baricz, Á., 2010. Generalized Bessel functions of the first kind. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1994, Springer-Verlag, Berlin.
- Baricz, Á., and Koumandos, S., 2016. Turán type inequalities for some Lommel functions of the first kind. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 59, 569-579.
- Baricz, Á., and Százs, R., 2016. Close-to-convexity of some special functions. *Bull. Malay. Math. Sci. Soc.*, 39(1), 427-437.
- Baricz, Á., and Yağmur, N. 2017. Geometric properties of some Lommel and Struve functions, *Ramanujan J.*, 42(2), 325-346.
- Baricz, Á., Dimitrov, D. K., Orhan, H. and Yağmur, N., 2016a. Radii of starlikeness of some special functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(8), 3355-3367.
- Baricz, Á., Kokologiannaki, C.G. and Pogány, T.K., 2017a. Zeros of Bessel function derivatives. *Proc. Amer. Math. Soc.*, DOI: <https://doi.org/10.1090/proc/13725>.
- Baricz, Á., Kupán, P. A. and Százs, R., 2014. The radius of starlikeness of normalized Bessel functions of the first kind. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142(6), 2019-2025.
- Baricz, Á., Orhan, H. and Százs, R., 2016b. The radius of α –convexity of normalized Bessel functions of the first kind. *Comput. Methods Funct. Theory*, 16(1), 93-103.
- Baricz, Á., Ponnusamy, S. and Singh, S., 2017b. Turán type inequalities for Struve functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 445(1), 971-984.
- Brown, R. K., 1960. Univalence of Bessel functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11(2), 278-283.
- Brown, R. K., 1982. Univalence of normalized solutions of $W''(z) + p(z)W'(z) = 0$. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 5(3), 459-483.
- Brown, R. K., 1982. Univalent solutions of $W'' + pW' = 0$. *Canad. J. Math.*, 14, 69-78.
- Dimitrov, D. K. and Cheikh, Y. B., 2009. Laguerre polynomials as Jensen polynomials of Laguerre-Pólya entire functions. *J. Comput. Appl. Math.*, 233, 703-707.
- Dimitrov, D. K. and Rusev P. K., 2011. Zeros of entire Fourier transforms. *East J. Approx.*, 17(1), 1-108.

- Duren, P. L., 1983. Univalent Functions. Grundlehren Math. Wiss., Vol. 259, Springer-Verlag, New York.
- González, M. O., 1991. Classical Complex Analysis. Marcel Dekker, Inc., New York, USA.
- González, M. O., 1992. Complex Analysis: Selected Topics. Marcel Dekker, Inc., New York, USA.
- Goodman, A. W., 1983. Univalent Functions. Mariner Publishing Company, Tampa Florida.
- Graham, I. and Kohr, G., 2003. Geometric function theory in one and higher dimensions. Marcel Dekker, Inc., New York.
- Hayden, T. L. and Merkes, E. P., 1964. Chain sequences and univalence. Illinois J. Math., 8(3), 523-528.
- Ismail, M. E. H. and Muldoon, M. E., 1988. On the variation with respect to a parameter of zeros of Bessel and q-Bessel functions. J. Math. Anal. Appl., 135(1), 187-207.
- Ismail, M. E. H. and Muldoon, M. E., 1995. Bounds for the small real and purely imaginary zeros of Bessel and related functions. Methods Appl. Anal., 2(1), 1-21.
- Ismail, M. E. H., 1982. The zeros of Basic Bessel functions, the functions $J_{\nu+ax}(x)$ and associated Orthogonal polynomials. J. Math. Anal. Appl., 86, 1-19.
- Koumandos, S and Lamprecht, M., 2012. The zeros of certain Lommel functions. Proc. Amer. Math. Soc., 140(9), 3091-3100.
- Koumandos, S., 2017. Positive trigonometric integrals associated with some Lommel functions of the first kind. Mediterr. J. Math., 14(15), doi:10.1007/s00009-016-0821-6.
- Kreyszig, E. and Todd, J., 1960. The radius of univalence of Bessel functions. Illinois J. Math., 4(1), 143-149.
- Levin, B. Ya., 1996. Lectures on Entire Functions. American Mathematical Soc., USA.
- Littlewood, J. E., 1944. Lectures on the theory of functions. Oxford University Press.
- Merkes, E. P. and Scott, W. T., 1961. Starlike hypergeometric functions. Proc. Amer. Math. Soc., 12, 885-888.
- Olver, F. W. J., Lozier, D. W., Boistvert, R. F. and Clark, C. W., 2010. NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Owa, S. and Srivastava, H. M., 1987. Univalent and starlike generalized hypergeometric functions. Canad. J. Math., 39(5), 1057-1077.
- Paris, R. B. and Kaminski, D., 2001. Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals. Cambridge Univ. Press, New York.
- Ponnusamy, P. and Silverman, H., 2006. Complex Variables with Applications. Birkhäuser, Boston.
- Ponnusamy, S. and Vuorinen, M., 1998. Univalence and convexity properties for confluent hypergeometric functions. Complex Variables Theory Appl., 36, 73-97.
- Qiu, S. L. and Vuorinen, M., 2005. Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, Special Functions in Geometric Function Theory.
- Rahman, Q. L. and Schmeisser, G., 2002. Analytic Theory of Polynomials. Clarendon Press, Oxford.
- Selinger, V., 1995. Geometric properties of normalized Bessel functions. PU.M.A., 6(2), 273-277.

- Steinig, J., 1970. The real zeros of Struve's function. *SIAM J. Math. Anal.*, 1(3), 365-375.
- Steinig, J., 1972. The sign of Lommel's function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 163, 123-129.
- Százs, R. and Kupán P. A., 2009. About the univalence of the Bessel functions. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 54(1), 127-132.
- Százs, R., 2010. On starlikeness of Bessel functions of the first kind. *Proceeding of the 8th joint conference on mathematics and computer science*, Komárno, Slovakia.
- Watson, G.N., 1944. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Macmillan, New York.
- Wilf, H. S., 1962. The Radius of univalence of certain entire functions. *Illions J. Math.*, 6(2), 242-244.
- Yağmur, N., 2013. Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonlarının Geometrik Özellikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Zhang, S. and Jin, J., 1996. *Computation of Special Functions*. Wiley Interscience Publication, New York.
- Zill, D. G. and Shanahan, P. D., 2003. *A first Course in Complex Analysis with Applications*. Jones and Bartlett Publishers, Inc.

ÖZGEÇMİŞ

15.05.1982 tarihinde Develi’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Develi’de tamamladı. 2000 yılında başladığı lisans eğitimini 2004 yılında Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümünde tamamladı. 2004-2005 yıllarında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde tezsiz yüksek lisans yaparak pedagojik formasyon eğitimi aldı. 2004-2011 yılları arasında çeşitli özel öğretim kurumlarında matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2011 yılında Gümüşhane Üniversitesi’ne Öğretim Görevlisi olarak atandı. 2011-2013 yılları arasında Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda tezli yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2014 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı’nda doktora eğitimine başladı. Halen Gümüşhane Üniversitesinde görev yapmakta olup, evlidir.