

**NORMALİZE EDİLMİŞ HİPER-BESSEL
FONKSİYONLARININ
BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

Osman KARA

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı**

Doç. Dr. Evrim TOKLU

AĞRI-2022

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Osman KARA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
NORMALİZE EDİLMİŞ HİPER-BESSEL FONKSİYONLARININ
BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Evrim TOKLU

AĞRI-2022

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmenliğine göre hazırlamış olduğum “**NORMALİZE EDİLMİŞ HİPER-BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**” adlı tezin tamamen kendi çalışmam olduğu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kağıt ve elektronik kopyalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

- ☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.
- ☐ Tezim sadece Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.
- ☐ Tezimin yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

/ /2022

Osman KARA

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NORMALİZE EDİLMİŞ HİPER-BESSEL FONKSİYONLARININ

BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Osman KARA

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Evrim TOKLU

Bu tez çalışmasının giriş bölümünde Geometrik fonksiyonlar teorisinin tarihsel gelişiminden ve Bieberbach tahmininden bahsedilmiştir. Kuramsal temeller başlığı altında tezde kullanılan temel tanım, kavram ve teoremlere yer verilmiştir. Materyal ve Yöntem adlı kısımda subordinasyon, Lemniskat yıldızlılık, Lemniskat konvekslik, Janowski yıldızlılık, Janowski konvekslik ve Hiper-Bessel fonksiyonlarına yer verilmiştir. Son bölüm olan Bulgular kısmında normalize edilmiş Hiper-Bessel fonksiyonunun Lemniskat yıldızlılık, Lemniskat konvekslik, Janowski yıldızlılık ve Janowski konvekslik yarıçapları için eşitsizlikler elde edilmiştir.

2022, 53 sayfa

Anahtar sözcükler: Hiper-Bessel fonksiyonu, Bernoulli Lemniskat yıldızlılık ve Bernoulli Lemniskat konvekslik yarıçapları, Janowski yıldızlılık ve Janowski konvekslik yarıçapları.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

SOME GEOMETRIC PROPERTIES OF NORMALIZED HYPER-BESSEL FUNCTIONS

Osman KARA

Ağrı İbrahim Çeçen University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Evrim TOKLU

In the introduction of this thesis, the historical development of the theory of geometric functions and Bieberbach's estimation are mentioned. Under the title of theoretical foundations, the basic definitions, concepts and theorems used in the thesis are included. In the section named Materials and Methods, subordination, Lemniskat starlikeness, Lemniskat convexity, Janowski starlikeness, Janowski convexity and Hyper-Bessel functions are included. In the last section Findings, inequalities are obtained for the radii of Lemniscate starlikes, Lemniscate convexity, Janowski starlikeness and Janowski convexity of the normalized Hyper-Bessel function.

2022, 53 pages

Keywords: Hyper-Bessel function, radii of Bernoulli Lemniscate starlikeness and convexity, radii of Janowski starlikeness and convexity.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca, insani ve ahlaki değerleri ile örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum, benden bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, kıymetli bilgileriyle çalışmamda etkin katkısı bulunan, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için bana her türlü desteği sunan çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Evrim TOKLU 'ya teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Eğitim hayatımın tüm süreçlerinde her türlü destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme özellikle anneme ve tezimi bitirmem için beni sürekli teşvik eden eşime ve yardımcı olan arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

/ /2022

Osman KARA

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
ŞEKİL DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Temel Kavramlar.....	5
2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar	7
2.3 Ünivalent Fonksiyonların Bazı Altsınıfları	12
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	27
3.1. Subordinasyon	27
3.2. Lemniskat Yıldızıl ve Lemniskat Konveks Fonksiyonlar	30
3.3 Janowski Yıldızıl ve Janowski Konveks Fonksiyonlar	34
3.4 Hiper-Bessel Fonksiyonu	36
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	39
4.1. Normalize Edilmiş Hiper-Bessel Fonksiyonunun Lemniskat Yıldızılık ve Lemniskat Konvekslik Yarıçapları	39
4.2. Normalize Edilmiş Hiper-Bessel Fonksiyonunun Janowski Yıldızılık ve Janowski Konvekslik Yarıçapları	42
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	47
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{D}(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$\mathbb{D}$	$\{z: z < 1, z \in \mathbb{C}\}$ birim disk
$\mathcal{A}$	Normalize edilmiş analitik fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}$	$\{f \in \mathcal{A}: \forall z \in \mathbb{D} \text{ için } f \text{ ünivalent}\}$ kümesi
$\mathcal{S}^*$	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	α –Mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$f < g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$\mathcal{C}$	Konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	α –Mertebeden Konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{K}$	Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı (close-to-convex)
$\mathcal{P}$	Caratheodory sınıfı
$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^*$	Lemniskat yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$	Lemniskat konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}[A, B]$	Janowski konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*[A, B]$	Janowski yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$r_{\mathcal{L}}^*(f_{\alpha_d})$	Lemniskat yıldızılılık yarıçapı
$r_{\mathcal{L}}^c(f_{\alpha_d})$	Lemniskat konvekslik yarıçapı
$r_{A,B}^*(f_{\alpha_d})$	Janowski yıldızılılık yarıçapı
$r_{A,B}^c(f_{\alpha_d})$	Janowski konvekslik yarıçapı
$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu
$\text{Ref}(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2. 1 Koebe fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ birim diskinin görüntüsü	11
Şekil 2. 2 Konveks olmayan küme ve Konveks küme	12
Şekil 2. 3 Yıldızıl küme	13
Şekil 2. 4 Yıldızıl Fonksiyon	14
Şekil 2. 5 0 dan $f(re^{i\theta})$ ya uzanan yarıçap vektörü	15
Şekil 2. 6 $\mathbb{D}_r$ diskinin görüntüsünün konveksliği	17
Şekil 2. 7 $f(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ birim diskinin resmi	23
Şekil 2. 8 Konvekse yakın olmayan bölge	23
Şekil 2. 9 $\mathbb{D}$ birim diskinin $H(z) = \frac{1+z}{1-z}$ dönüşümü altındaki resmi	25
Şekil 3. 1 $1 + z < \frac{1+z}{1-z}$	29
Şekil 3. 2 Bernoulli Lemniskat	31
Şekil 3. 3 $\mathbb{D}$ birim diskinin $\Phi = \sqrt{1+z}$ dönüşümü altındaki resmi	34

1. GİRİŞ

Analitik fonksiyonların geometrik özelliklerinin ele alındığı geometrik fonksiyonlar teorisi kompleks analizin en önemli inceleme alanlarından birisidir. Geometrik fonksiyonlar teorisi 1851 yılında Riemann'ın doktora tezinde ifade ettiği ve literatürde “ Riemann Dönüşüm Teoremi ” olarak bilinen teoremi ile ortaya çıkmıştır. Ancak Riemann'ın verdiği ispatta bazı boşlukların bulunması bu teoremin öneminin anlaşılmasındaki en büyük engel olmuştur. Bu teoremin tam ispatı 1912 yılında ünlü matematikçiler Keobe ve Caratheodory tarafından birbirlerinden bağımsız olarak verilmiştir. Riemann Dönüşüm Teoremi “ $D \neq \mathbb{C}$ olmak üzere, $z_0 \in D, f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olmak üzere, D bölgesini $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde resmeden D de analitik ve ünivalent bir tek f fonksiyonu vardır” şeklinde ifade edilebilir. Riemann Dönüşüm Teoremi keyfi basit bağlantılı bir D bölgesinin $\mathbb{D}$ birim diski ile yer değiştirebilmesine olanak sağlamakta olup bu durum birçok problemin çözümünü oldukça kolaylaştırmıştır. Ayrıca 1914 yılında Gronwall tarafından alan teoreminin ifade ve ispat edilmesi, 1916 yılında Bieberbach tarafından $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ koşulları ile normalize edilmiş ve $\mathbb{D}$ birim diskinde ünivalent fonksiyonlar için verdiği katsayı tahmini ile geometrik fonksiyonlar teorisi matematiğin bir çok alanında kendisine uygulama alanı bulmuş ve ünivalent fonksiyonlar teorisinin ortaya çıkmasına vesile olmuştur. Tamda bu noktada, bu çalışmamızda oldukça önemli bir yere sahip olan ünivalent fonksiyonlar teorisinin tarihsel gelişimi hakkında bazı hatırlatmalar yapmak oldukça faydalı olacaktır. Bilindiği üzere; $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ olması $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa bu f fonksiyonunun D bölgesinde ünivalent (veya yalınkat) olduğu söylenir. Daha önce ifade ettiğimiz Riemann dönüşüm teoreminden istifade ederek tanımdaki D bölgesi yerine $\mathbb{D}$ birim diskini almamızda herhangi bir sakınca olmayacağı gibi birçok kolaylıklar sağlayacağı iyi bilinen bir gerçektir. Bu durumda, bir ünivalent fonksiyonu geometrik olarak şu şekilde yorumlamak mümkündür: Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskini $f(\mathbb{D})$ görüntü bölgesi üzerine birebir resmediyorsa bu $f(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{D}$ birim diskinde

ünivalent olduğu söylenir. Esasen biz $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik (regular ya da holomorf) olan fonksiyonlarla ilgileneceğiz. Yani bir $f(z)$ fonksiyonunun ünivalent olması bu fonksiyonun analitik olmasını beraberinde getirecektir. Bu çalışmamız boyunca $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulları ile normalize edilmiş ve $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz. Kolaylıkla görülebileceği üzere $\mathcal{A}$ sınıfındaki bir $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n \quad (1.1)$$

şeklinde bir seri açılımına sahiptir. Ayrıca $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfını $\mathcal{S}$ ile göstereceğiz. Tüm bu açıklamalar ışığında $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ olduğu aşikârdır. (1.1) deki seri açılımına sahip normalize edilmiş ünivalent fonksiyonların $\mathcal{S}$ sınıfındaki her bir $f(z)$ fonksiyonu için $|a_n| \leq A_n$, ($n \geq 2$) olacak biçimde bir A_n sınırının varlığının 1909 yılında Keobe tarafından gösterilmesi ile ünivalent fonksiyonlar teorisi yirminci yüzyılın başlarında şekillenmeye başlamıştır. Ardından Alman matematikçi Ludwig Bieberbach tarafından 1916 yılında (1.1) deki gibi $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için,

$$|a_n| \leq n, \quad (n \geq 2) \quad (1.2)$$

olarak verilen, literatürde “Bieberbach Tahmini” olarak bilinen, bu katsayı problemi üzerinde birçok matematikçi kafa yormuştur. Bu katsayı probleminin $n = 2$ için (yani $|a_2| \leq 2$) doğruluğu yine Bieberbach tarafından 1916 yılında ispatlanmıştır. Ayrıca 1917 yılında Loewner konveks fonksiyonlar için $|a_n| \leq 1$ olduğunu, 1920 yılında Nevanlinna yıldızl fonksiyonlar için $|a_n| \leq n$ olduğunu, 1923 yılında Loewner $\mathcal{S}$ sınıfındaki fonksiyonlar için $|a_3| \leq 3$ olduğunu, 1925 yılında Littelwood $|a_n| \leq e \cdot n$

olduğunu, 1955 yılında Reade konvekse yakın (close-to-convex) fonksiyonlar için $|a_n| \leq n$ olduğunu, 1955 yılında Garabedian ve Schiffer $|a_4| \leq 4$ olduğunu, 1968 yılında Pederson ve Ozawa Grunsky eşitsizliklerini kullanarak birbirlerinden bağımsız olarak $|a_6| \leq 6$ olduğunu ve 1972 yılında Pederson ve Schiffer $|a_5| \leq 5$ olduğunu göstermişlerdir. Birçok matematikçiye yaklaşık yetmiş yıl meşgul eden bu problem nihayet 1985-1986 yıllarına doğru Louis de Branges tarafından hiper geometrik fonksiyonlar ve Loewner teorisi kullanılarak ispatlanmıştır. Bu problemin çözümünde kullanılan yöntem farklı problemlerin ortaya çıkmasına vesile olmuş ve ünivalent fonksiyonlar teorisi bu problemlerle daha da zenginlik kazanmıştır.

Branges'in Bieberbach tahmininin ispatında hiper geometrik fonksiyonları kullanması ve hiper geometrik fonksiyonların başka bazı problemlerin çözümünde kullanılmaya başlanması birçok matematikçinin hiper geometrik fonksiyonların geometrik özellikleri üzerinde çalışmalar yapmasına vesile olmuştur.

Bilindiği üzere, $a, b, c \in \mathbb{C}$ ve $c \neq 0, -1, -2 \dots$ olmak üzere

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n \geq 2} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1 \quad (1.3)$$

fonksiyonu $z(1-z)w''(z) + (c - (a+b+1)z)w'(z) - abw(z) = 0$ ikinci mertebeden hipergeometrik diferansiyel denklemin özel bir çözümü olması sebebiyle bu fonksiyon Gauss hipergeometrik fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu fonksiyonun özelliklerini ilk defa B. Riemann, E.E. Kummer, L. Fuchs, H.A. Schwarz ve F. Klein ele alıp incelemişlerdir. Ayrıca, 1961 yılında W.T. Scott ve E.P. Merkes tarafından bu fonksiyonun ünivalentliği ve yıldızlılığı sürekli kesirler kullanılarak incelenmiştir. 1984 yılında D.B. Shaffer ve B.C. Carlson hipergeometrik fonksiyonlar sınıfının α mertebeden yıldızlılık ve α mertebeden konveks sınıflarını tanıtmıştır. 1986 yılında V. Singh ve S. Ruscheweyh $\alpha > 0$, $c = a + 1$ ve $-1 \leq \rho b \leq 1 + \rho a$ koşulları altında

$z \rightarrow {}_2F(a, b; c; \rho z)$ fonksiyonunun yıldızlılık mertebesini bulmuştur. 1993 yılında H. Silverman Gauss hipergeometrik fonksiyonunun yıldızlılığını ve konveksliğini incelemiştir.

Bilindiği üzere, çoğu özel fonksiyon hipergeometrik fonksiyonların özel halleridir. İlk defa 1732 yılında D. Bernoulli tarafından ele alınan ancak adını F.W. Bessel (1734-1846) den alan Bessel fonksiyonu da hipergeometrik fonksiyonların özel bir halidir. Bessel fonksiyonlarının geometrik özellikleri birçok matematikçi tarafından irdelemiştir. İlk kez 1960 tarihlerde R.K. Brown tarafından Bessel fonksiyonlarının ünivalentliği araştırılmıştır. Aynı tarihlerde E. Kreyszig ve J. Todd tarafından Bessel fonksiyonlarının ünivalentlik yarıçapı elde edilmiştir. V. Selinger, 1995 yılında normalize edilmiş Bessel fonksiyonlarının geometrik özelliklerini incelemiştir.

Son zamanlarda ilgileri üzerine çekmiş olan özel fonksiyonların geometrik özellikleri üzerine yazılan bazı çalışmalar şu şekilde listelenebilir: (Baricz *et al.* 2014; Baricz and Szász 2014; Baricz and Szász 2015; Baricz *et al.* 2016; Baricz *et al.* 2017; Baricz *et al.* 2018; Aktaş *et al.* 2017a, 2017b; Baricz and Nemes 2021; Toklu *et al.* 2018; Toklu and Karagöz 2020; Toklu 2019).

Bu çalışmada, yukarıda listelenen özel fonksiyonların geometrik özellikleri üzerine yapılan çalışmalardan motive olarak, normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonlarının Lemniskat yıldızlılık ve konvekslik yarıçapları ile Janowski yıldızlılık ve konvekslik yarıçapları incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde tezin sonuçlarını oluştururken sıklıkla kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1: (ε -Komşuluğu) $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi olsun. $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $0 < \varepsilon$ olmak üzere $D(z_0; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine z_0 noktasının ε - komşuluğu denir. $D(z_0; \varepsilon)$ kümesi z_0 merkezli ve ε yarıçaplı çemberin içidir. Bu aynı zamanda $\mathbb{C}$ de bir disk anlamına da gelir. $\bar{D}(z_0; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ kümesine z_0 merkezli ve ε yarıçaplı kapalı disk, $D(z_0; \varepsilon) - \{z_0\}$ kümesine ise z_0 noktasının delinmiş ε - komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2: (İç Nokta) $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in A$ olsun. z_0 noktasının bir ε komşuluğu tamamen A kümesinde kalıyorsa, başka bir deyişle, $D(z_0; \varepsilon) \subset A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. A kümesinin bütün iç noktalarının kümesi A kümesinin içi olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3: (Açık ve Kapalı küme) Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyenini açık olan kümeye ise kapalı küme denir.

Tanım 2.1.4: (Yığılma Noktası) $A \subset \mathbb{C}$ olsun. A boş kümeden farklı verilsin. z_0 noktasının her $D(z_0, \varepsilon)$ komşuluğunda, A kümesinin z_0 dan farklı bir z noktası varsa z_0 noktasına A kümesinin yığılma noktası denir.

Tanım 2.1.5: (Bağılantılı Küme) $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. A kümesi boştan farklı, ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, bu kümeye bağılantılıdır denir. Yani, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \subset U \cup V$, $A \cap U \cap V = \emptyset$ olacak

şekilde U ve V açık kümeleri bulunamıyorsa, A kümesi bağlantılıdır. Bağlantılı olmayan kümeye bağlantısızdır denir (Başkan 2000).

Tanım 2.1.6: (Karmaşık Fonksiyon) $A, \mathbb{C}$ nin herhangi bir alt kümesi olsun. Her $z \in A$ elemanına belli bir $f(z) \in \mathbb{C}$ elemanını karşılık getiren kurala karmaşık fonksiyon denir. $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.7: (Fonksiyon Limiti) $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. $z_0 \in \mathbb{C}$, A kümesinin bir yığılma noktası ve bir w_0 sayısı verilsin. Her $\varepsilon > 0$ ve $0 < |z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f nin z_0 deki limiti w_0 dır denir ve $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8: (Süreklilik) $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $f(A \cap D(z_0, \delta)) \subset D(f(z_0, \varepsilon))$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir (Başkan 2000).

Tanım 2.1.9: (Ara Değer Teoremi) f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve $f(a) \neq f(b)$ olsun. $f(a)$ ve $f(b)$ arasındaki her k değeri için $f(c) = k$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ vardır (Kadıoğlu ve Kamali 2013).

Tanım 2.1.10: (Yakınsaklık) karmaşık sayıların bir (z_n) dizisi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa, bu dizi z_0 karmaşık sayısına yakınsıyor denir ve $\lim z_n = z_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.11: (Kompleks fonksiyonların Türevi) $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilir (veya türevlenebilir) denir. Bu limitin değeri $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z)$ ile gösterilir ve buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi adı verilir (Başkan, 2000).

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda çalışmamızın temelini oluşturan analitik fonksiyonlar ve bazı özellikleri ile ünivalent fonksiyonlar kavramlarına yer verilmiş ve ayrıca ünivalent fonksiyonların $\mathcal{S}$ sınıfı ile bu sınıfa ait bazı önemli fonksiyon örnekleri sunulmuştur.

Tanım 2.2.1: (Analitik Fonksiyon) $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir (veya holomorftir) denir.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir B bölgesindeki tüm noktalarda analitik ise $f(z)$ fonksiyonu B de analitiktir denir. Ayrıca, bu çalışmamız boyunca, (1.2) deki gibi normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz. O halde, $\mathcal{A}$ sınıfının küme gösterimi

$$\mathcal{A} = \{f: f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n \text{ ve } f(z), \mathbb{D} \text{ de analitik}\}$$

olarak verilir.

Tanım 2.2.2: (Tam Fonksiyon) Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

Tanım 2.2.3: (Taylor Serisi) $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik olsun. O halde,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

serisine $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının bir komşuluğundaki Taylor serisi denir.

Tanım 2.2.4: (Laurent Serisi) z_0 kompleks sayısı verilsin. a_n, b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

fonksiyon serisine, z_0 merkezli, Laurent serisi denir.

Tanım 2.2.5: (Eğri) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de bir eğri denir.

Tanım 2.2.6: (Düzgün Eğri) Diferansiyellenebilir bir φ eğrisi için $\forall t \in [a, b]$ iken φ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise φ eğrisine düzgün eğri denir.

Tanım 2.2.7: (Bölge) Kompleks düzlemde boştan farklı açık ve bağlantılı bir küme bölge olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.8: (Basit Bağlantılı Bölge) $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. Eğer hem D hem de $\mathbb{C} - D$ bağlantılı bir küme ise D bölgesine basit bağlantılı bölge denir.

Tanım 2.2.9: (Singüler Nokta) f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına singüler nokta denir.

Tanım 2.2.10: (Kutup Noktası) z_0 , $f(z)$ fonksiyonunun ayırık tekil noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğunda, $f(z)$ fonksiyonunun Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası (veya kutbu) denir.

Teorem 2.2.1: (Maksimum Modül teoremi) f fonksiyonu D bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon bu bölgede sabit olmadıkça, $|f(z)|$ modülü maksimum değeri bu bölgenin sınırında alır (Duren 1983)

Teorem 2.2.2: (Schwarz Yardımcı Teoremi) $f, \mathbb{D}$ birim diskinde $f(0) = 0$ ve $|f(z)| \leq 1$ şartlarını sağlayan analitik bir fonksiyon ise $|f'(0)| \leq 1$ sağlanır. Burada, eşitlik hali yalnızca $|f(z)| = e^{i\theta} z$ ($\theta \in \mathbb{R}$) fonksiyonu için sağlanır (Ponnusamy ve Silverman 2006).

Tanım 2.2.11: (Konform Dönüşüm) $f: B \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı olan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ görüntü eğrileri de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından aynı α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşümdür denir.

Teorem 2.2.3: Kompleks düzlemin her basit bağlantılı bir $D \subsetneq \mathbb{C}$ bölgesi, $\mathbb{D}$ birim diski üzerine konform olarak resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in D$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartını sağlayan ve D bölgesini $\mathbb{D}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren 1983).

Tanım 2.2.12: (Ünivalent Fonksiyon) $f, B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her bir $z_1, z_2 \in B$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olması $f(z_1) \neq f(z_2)$ olmasını gerektiriyorsa) f fonksiyonuna B bölgesinde ünivalent (yalnıkat veya schlict) fonksiyon adı verilir (Duren 1983).

Bu çalışmamız boyunca (1.2) deki gibi normalize edilmiş, $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilecektir. Yani,

$$\mathcal{S} = \{f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} : f(z), \mathbb{D} \text{ de analitik, ünivalent, } f(0) = 0 \text{ ve } f'(0) = 1\}$$

dır.

Geometrik olarak, bir ünivalent fonksiyon basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Analitik ve ünivalent fonksiyonlar ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere resmeder.

Aşağıda $\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri verilmiştir:

(i) $f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskini $\left\{-\frac{\pi}{2} < \text{Im}z < \frac{\pi}{2}\right\}$ sonsuz şeridi üzerine resmeder.

(ii) $f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$ fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ birim diskinin görüntüsü $\{w = u + iv : \text{Re}w > -1/2\}$ kümesidir.

(iii) $f(z) = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \dots$ fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ birim diskinin görüntüsü $\mathbb{C} - \left\{\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)\right\}$ bölgesidir.

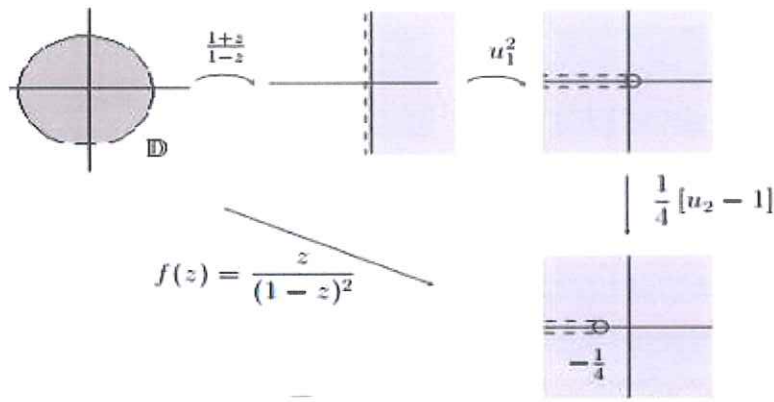
(iv) $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$ fonksiyonu Koebe fonksiyonu olup bu fonksiyon ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Bu fonksiyon altında $\mathbb{D}$ birim diskinin görüntüsünü bulmak için, Koebe fonksiyonunu

$$k(z) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$$

şeklinde düzenleyelim ve

$$u_1(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad u_2(z) = u_1^2(z) \text{ ve } u_3(z) = \frac{1}{4}[u_2(z) - 1]$$

diyelim. Bu halde, $k(z) = (u_3 \circ u_2 \circ u_1)(z)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. u_1 Möbius dönüşümü olup $\mathbb{D}$ birim diskini, sınırı imajiner eksen olan sağ yarı düzleme resmeder. u_2, u_1 in karesi dönüşümü olup sağ yarı düzlemi negatif reel eksen boyunca uzanan yarık hariç tüm kompleks düzleme resmeder. u_3 ise, bu son bölgeyi bir birim sola öteler ve $\frac{1}{4}$ ile çarpar.



Şekil 2. 1 Koebe fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ birim diskinin görüntüsü

Teorem 2.2.4: f analitik fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde ünivalent ise her $z_0 \in B$ için $f'(z_0) \neq 0$ dır.

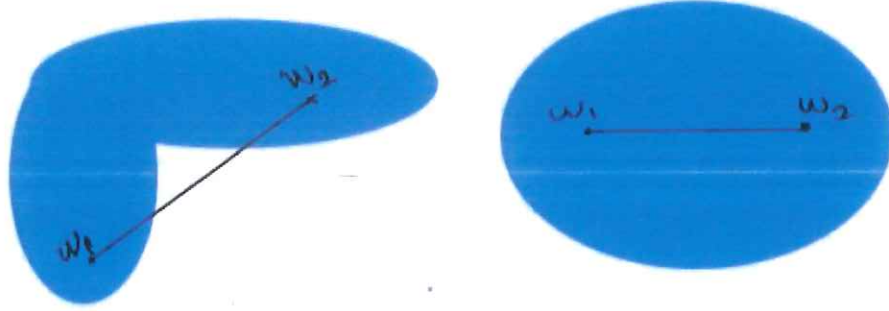
İspat: $z_0 \in B$ ve $f(z_0) = w_0$ verilsin. O halde z_0 noktasının $f - w_0$ in bir kökü olduğu açıkça görülür. Bununla birlikte f ünivalent olduğundan $f - w_0 \neq 0$ dır. Ayrıca f analitik olduğundan z_0 noktasının $f - w_0$ in izole olan köküdür. Bundan dolayı $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere bazı $\mathbb{D}(z_0)$ diskinde analitik ve sıfırdan farklı bir H fonksiyonu için $f - w_0 = (z - z_0)^n H(z)$ biçiminde ifade edilir. Riemann Dönüşüm Teoreminden $h^n = H$ ve $h(z_0) \neq 0$ olacak şekilde bir h analitik fonksiyonu vardır. Dolayısıyla $f - w_0 = [(z - z_0)h(z)]^n$ dir. $g(z) = (z - z_0)h(z)$ alalım, $f - w_0 = g^n$ olur. Ters Fonksiyon Teoremi kullanarak $g'(z_0) = h(z_0) \neq 0$ olduğu için g

ünivalenttir bundan dolayı f de ünivalent olur. Fakat f ünivalent olduğu için $f'(z_0) = g'(z_0) \neq 0$ ifadesi bulunur.

2.3 Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt sınıfları

Tanım 2.3.1: (Konveks Küme) $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ ve $0 \leq t \leq 1$ için $\{tw_1 + (1-t)w_2\} \subseteq B$ ise B kümesine konveks küme denir.

Bu tanım geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme adı verilir. Konveks olmayan küme ise w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçasının bir kısmı B nin dışına taşıyorsa bu küme konveks değildir.



a) Konveks olmayan küme

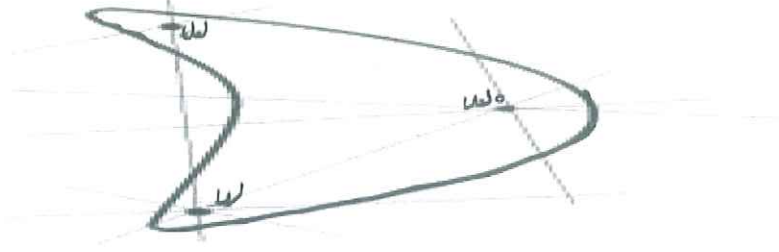
b) Konveks küme

Şekil 2. 2 Konveks olmayan küme ve Konveks küme

Tanım 2.3.2: (Yıldızıl Küme) $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin ve $w_0 \in B$ olsun. Bu durumda, her $w \in B$ için $\{(1-t)w_0 + tw\} \subseteq B$ ise B kümesine w_0 noktasına göre yıldızıl (veya star-shaped) küme denir.

Yani, B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her bir $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. Bir başka ifadeyle, $w_0 \in B$ noktasından çıkan her bir ışın B kümesinin sınırını

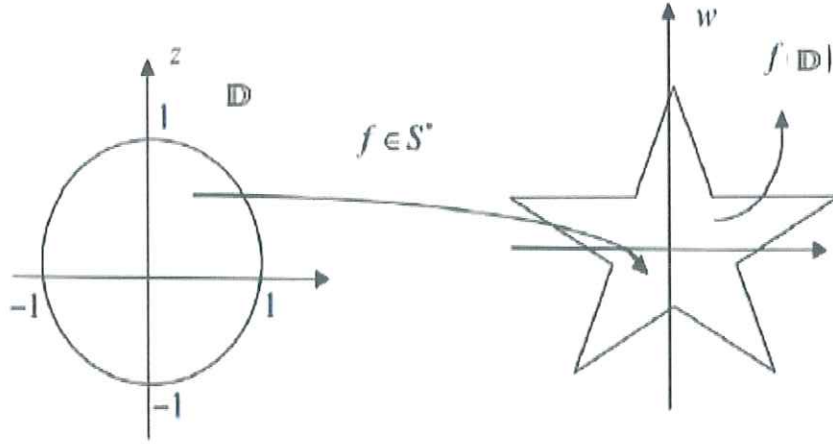
bir tek noktada kesiyorsa B ye yıldızlı küme denir. Eğer w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızlı küme veya kısaca yıldızlı küme adı verilir.



Şekil 2. 3 Yıldızlı küme

Tanım 2.3.3: (Konveks Fonksiyon) Bir $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskini konveks bir kümeye resmediyorsa bu fonksiyona konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.4: (Yıldızlı Fonksiyon) Bir $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskini $f(z_0) = w_0$ noktasına göre yıldızlı bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasına göre yıldızlı fonksiyon denir. Özel olarak, $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskini orijine göre yıldızlı bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna, kısaca, yıldızlı fonksiyon denir ve yıldızlı fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir (Graham and Kohr 2003).



Şekil 2. 4 Yıldızlı Fonksiyon

Teorem 2.3.1: $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda, f nin yıldızlı fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0, \quad (z \in \mathbb{D})$$

olmasıdır.

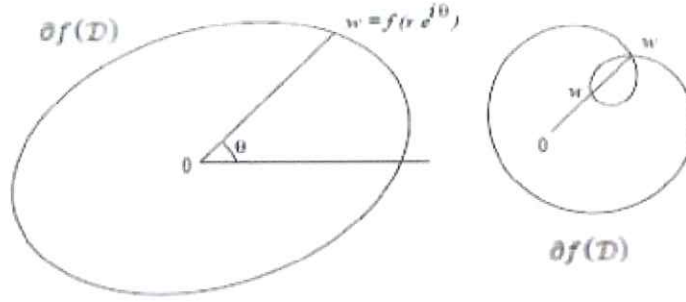
İspat: $f \in \mathcal{S}^*$ olsun. Bu durumda, Tanım 2.3.4 den $f(\mathbb{D})$ orijine göre yıldızlıdır. $z = re^{i\theta}$, $r < 1$ ve $\theta \in [0, 2\pi)$ alalım. Bu halde, $w = 0$ dan $w = f(re^{i\theta})$ yarıçap vektörü bütünüyle $f(\mathbb{D}_r)$ nin içinde yer alır. Dolayısıyla, $\arg\{f(re^{i\theta})\}$ fonksiyonu θ nın kesin artan bir fonksiyonudur. Aksi halde, yarıçap vektörü $\partial f(\mathbb{D}_r)$ eğrisini iki noktada keser ki bu durum $f \in \mathcal{S}$ olması ile çelişir. Yani, $\frac{\partial}{\partial \theta} \arg\{f(re^{i\theta})\} > 0$ ve dolayısıyla $\frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im}\{\log f(re^{i\theta})\} > 0$ dır. Ayrıca,

$$\log f(re^{i\theta}) = \log|f(re^{i\theta})| + i \arg\{f(re^{i\theta})\}, (0 \leq \theta < 2\pi)$$

olduğundan,

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} re^{i\theta} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} re^{i\theta} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

elde edilir.



Şekil 2. 5 0 dan $f(re^{i\theta})$ ya uzanan yarıçap vektörü

Şimdi, $f'(0) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda f fonksiyonu kutup noktası olmayan basit sıfıra sahiptir. Eğer f fonksiyonu orijinde basit sıfıra sahip ve $\mathbb{D}_r$ de kutup noktasına sahip değilse argüman prensibinden dolayı $\Delta_{|z|=r} f(z) = 2\pi$ ve dolayısıyla dönme sayısı 1 dir ki bu halde $\partial\mathbb{D}_r$ eğrisi orijin etrafında sadece bir dolanım gerçekleştirir. Ayrıca, $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$ koşulu, $\arg\{f(z)\}$ nin, $\arg\{z\}$ nin artan bir fonksiyonu olduğu anlamına gelir (bir başka ifade ile $\arg\{z\}$ artıkça $\arg\{f(z)\}$ de artar). Dolayısıyla $\partial\mathbb{D}_r$ basit kapalı bir eğridir. O halde, $\mathbb{D}_r$, orijine göre yıldızlıdır. O halde $f \in \mathcal{S}^*$ dır.

Burada şu hatırlatmaları yapmak oldukça önemlidir: $f(z) = z^2$ konform olmayan (dolayısıyla ünivalent olmayan) fonksiyonunu gözönüne alalım. Açıkça görüleceği üzere, $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} = 2 > 0$ ve $f(0) = 0$ dır. Yani, $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$ şartı $f(\mathbb{D})$ nin yıldızlı olduğunu göstermesine rağmen f nin ünivalentliğini garanti etmez.

Tanım 2.3.5: (α -Mertebeden Yıldızıl Fonksiyon) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha, z \in \mathbb{D}$$

Koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna α mertebeden yıldızıl fonksiyon denir (Robertson 1936).

α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir. Bu durumda $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfının analitik tasviri

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha; z \in \mathbb{D}, 0 \leq \alpha < 1 \right\}$$

biçiminde verilebilir.

Ayrıca $\alpha = 0$ için $\mathcal{S}^*(0) \equiv \mathcal{S}^*$ dır. Bir başka ifade ile, $\mathcal{S}^*(\alpha) \subseteq \mathcal{S}^*(0) \equiv \mathcal{S}^*$ dır.

Teorem 2.3.2: $f \in \mathcal{S}$ olsun. f nin konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

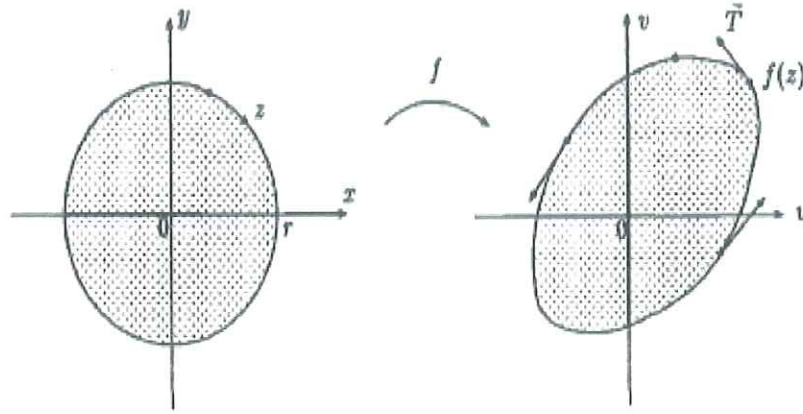
$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0, \quad (z \in \mathbb{D})$$

olmasıdır (Goodman 1983).

İspat: Öncelikle f fonksiyonun konveks olduğunu kabul edelim. Bu durumda f fonksiyonu ünivalentir ve dolayısıyla $f'(0) \neq 0$ dır. Şimdi her $r \in (0,1)$ için $f(\mathbb{D}_r)$ nin konveks bir bölge olduğunu göstereceğiz. Bunun $r \in (0,1)$ aralığında sabit bir sayı olmak üzere, $z_2 \neq 0$ ve $|z_1| \leq |z_2|$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_r$ ve $t \in [0,1]$ olsun. $h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ fonksiyonu

$$h(z) = f^{-1} \left((1-t)f \left(\frac{z_1}{z_2} z \right) + tf(z) \right), z \in \mathbb{D}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda f konveks olduğundan, h fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesi üzerinde iyi tanımlı analitik bir fonksiyondur. Bununla birlikte $h(0) = 0$ ve Schwarz Lemmasından dolayı $z \in \mathbb{D}$ için $|h(z)| \leq |z|$ dir. $z = z_2$ için $|h(z_2)| \leq |z_2| < r$, ve böylece $(1-t)f(z_1) + tf(z_2) \in f(\mathbb{D}_r)$ olur. Dolayısıyla $f(\mathbb{D}_r)$ nin konveks bir bölge olduğu ispatlanmış oldu.



Şekil 2. 6 $\mathbb{D}_r$ diskinin görüntüsünün konveksliği

$|z| = r$ çemberinin görüntüsü Γ_r olsun. Bu durumda Γ_r pozitif yönlü Jordan eğrisidir ve iç bölgesi konveks bir bölgedir. Ayrıca Γ_r eğrisi $w = f(re^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ şeklinde parametrik olarak gösterilebilir. $f(\mathbb{D}_r)$ konveks bir bölge olduğundan, Γ_r eğrisinin teğet vektörünün argümanı, $\theta \in [0, 2\pi]$ nin azalmayan bir fonksiyonudur. O halde

$$\psi(\theta) = \arg \left[\frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right] = \arg [ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})],$$

ve $\theta \in [0, 2\pi]$ için $\psi'(\theta) \geq 0$ veya

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im}[\log(izf'(z))] \geq 0, \quad z = re^{i\theta}$$

olmalıdır. Basit bir hesaplama ile

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im}[\log(izf'(z))] = \operatorname{Im} \left[i \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right]$$

$$= \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right], \quad z = re^{i\theta}$$

ve böylece,

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] \geq 0, \quad |z| = r.$$

Analitik fonksiyonlar için minimum prensibi dikkate alınarak $z = 0$ da kesin eşitsizlik geçerli olduğundan

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0, \quad z \in \mathbb{D}_r$$

olduğu görülür ve r keyfi olduğundan

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

elde edilir. Böylece teoremin ilk kısmı tamamlanmış olur.

Aksine $f'(0) \neq 0$ ve

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

olduğunu kabul edelim. Bu ifadeler $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için $f'(0) \neq 0$ olmasını gerektirir. $r \in (0,1)$ sabit bir sayı olsun. Yukarıda verilen hesaplamalardaki adımlar tersten takip edilerek

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})] \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

elde edilir. Böylece $|z| = r$ çemberinin görüntüsü olan Γ_r eğrisinin teğetinin argümanı θ azalmayan bir fonksiyonudur. Ayrıca $[0, 2\pi]$ aralığında $\psi(\theta)$ nın toplam artışı 2π ye eşit olduğu integral hesabı ile görülebilir. Gerçekten

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \psi'(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \arg[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[1 + \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right] d\theta \\ &= \operatorname{Re} \int_{|z|=r} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] \frac{dz}{iz} = 2\pi \end{aligned}$$

dir. Böylece Γ_r nin bir basit konveks eğri dolayısıyla konveks bir bölge olduğu gösterilmiş oldu. $f(\mathbb{D}) = \bigcup_{0 < r < 1} f(\mathbb{D}_r)$ olduğundan $f(\mathbb{D})$ nin bir konveks bölge olduğu sonucuna varılır. Ayrıca $|z| = r$ çemberi üzerinde f birebir olduğundan sınırda ünivalentlik prensibi, her bir $r \in (0,1)$ için, f fonksiyonun da $\mathbb{D}_r$ de ünivalent olmasını gerektirir. Böylece $f(\mathbb{D})$ ünivalent ve konvektir.

Tanım 2.3.6: (α -Mertebeden Konveks Fonksiyon) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha$$

koşulu sağlıyorsa, bu fonksiyona α mertebeden konveks fonksiyon denir (Graham and Kohr 2003).

Bu şekildeki fonksiyonların kümesi $C(\alpha)$ ile gösterilir. Ayrıca $\alpha = 0$ için $C(0) \equiv C$ dir. Bir başka ifade ile, $C(\alpha) \subseteq C(0) \equiv C$ dir.

J. W Alexander tarafından verilen aşağıdaki teorem konveks fonksiyonlar ve yıldızlı fonksiyonlar sınıfı arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 2.3.3: $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyon olmak üzere; f nin konveks olması için gerek ve yeter şart zf' fonksiyonunun yıldızlı olmasıdır.

Yukarıda verilen yıldızlı ve konveks fonksiyonlar arasındaki ilişki α -mertebeden yıldızlı ve α -mertebeden konveks fonksiyonlar arasında da geçerlidir:

Teorem 2.3.4: $f(z) \in C(\alpha)$ olması için gerek yeter şart $zf'(z) \in S^*(\alpha)$ olmasıdır.

Bu teoremden yararlanarak şu sonuca ulaşabiliriz. C , S ve S^* fonksiyon sınıfları arasında $C \subset S^* \subset S$ bağıntısı geçerlidir.

Tanım 2.3.7: (Konvekse Yakın Fonksiyon (close-to-convex))
 $f(z)$ ve $\varphi(z)$ fonksiyonları, $\mathbb{D}$ bölgesinde analitik olsun. Eğer, $\mathbb{D}$ birim diskinde

$$\operatorname{Re} \left[\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} \right] > 0, z \in \mathbb{D}$$

şartını sağlayan bir $\varphi(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$ fonksiyonuna konvekse yakın (close-to-convex) fonksiyon denir. $\mathbb{D}$ birim diskinde normalize edilmiş konvekse yakın fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir.

Böylece $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskinde yıldızlı bir fonksiyon ise $f(z)$ nin aynı zamanda konvekse yakın (close-to-convex) fonksiyon olduğunu görmek kolaydır. Bu ifadenin tersinin doğru olmadığına dikkat çekmek önemlidir.

Gerçekten $f(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ fonksiyonu konvekse yakın olduğu halde yıldızlı değildir (bakınız Şekil 2.6). Bunu göstermek için, ilk olarak f nin konvekse yakın fonksiyon olduğunu göstermeliyiz. O halde bir $g(z) = \log(1 - z)$ fonksiyonunu ele alalım. $g(0) = 0$ ve $zg'(z) = \frac{z}{(1-z)}$ yıldızlı olduğundan Teorem 2.3.3 ten, $g \in C$ olduğu görülür. Ayrıca f, C de ünivalent bir fonksiyondur ve

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \{ (1 + z + z^2)(1 - z) \} = \operatorname{Re} \{ 1 - z^3 \} > 0$$

sağlandığından f nin konvekse yakın bir fonksiyon olduğu görülür. Şimdi $f \notin S^*$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\}$ değerinin işaretini inceleyelim:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + z + z^2}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3}} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{(1 + z + z^2) \left(1 + \frac{\bar{z}}{2} + \frac{\bar{z}^2}{3} \right)}{\left| 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} \right|} \right\},$$

$z = re^{i\theta}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ (1 + z + z^2) \left(1 + \frac{\bar{z}}{2} + \frac{\bar{z}^2}{3} \right) \right\} &= \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left[1 + r(\cos \theta + i \sin \theta) + r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \left[1 + \frac{r}{2}(\cos \theta - i \sin \theta) + \frac{r^2}{3}(\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \right] \right\} \\ &= 1 + \frac{3}{2} \cos \theta r + \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cos 2\theta \right) r^2 + \frac{5}{6} \cos \theta r^3 + \frac{1}{3} r^4 = A(r, \theta) \end{aligned}$$

alınırsa böylece,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} = \frac{A(r, \theta)}{\left| 1 + \frac{\bar{z}}{2} + \frac{\bar{z}^2}{3} \right|}$$

elde edilir. Bu eşitlikte, $\mathbb{D}$ deki bazı noktalar için $A(r, \theta) < 0$ olduğunu gösterilmelidir. $A(r, \theta)$ nın $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ üzerinde sürekli olduğu göz önüne alınırsa, $A(1, \theta_0) < 0$ olacak şekilde bir θ_0 değeri bulmak yeterli olacaktır. Buda daha sonra $1 - \delta < r < 1$ aralığındaki tüm r ler için $A(1, \theta_0) < 0$ anlamına gelir. O halde,

$$A(1, \theta_0) = 1 + \frac{3}{2} \cos \theta + \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cos 2\theta \right) + \frac{5}{6} \cos \theta + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} + \frac{7}{3} \cos \theta + \frac{4}{3} \cos 2\theta$$

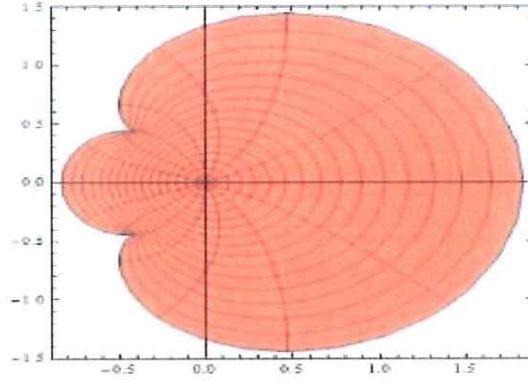
elde edilir. $A(1, \theta_0)$ birinci türevinin kökleri,

$$\frac{d}{d\theta} A(1, \theta_0) = -\frac{7}{3} \sin \theta - \frac{8}{3} \sin 2\theta = 0$$

olmak üzere, $\theta = 0, \pi, \arccos\left(-\frac{7}{16}\right)$ elde edilir. Ayrıca $\sin \theta = -\frac{7}{16}$ değeri için $\frac{d^2}{d\theta^2} A(1, \theta_0) > 0$ olduğu görülür ki bu, $A(1, \theta_0)$ nın $\cos \theta = -\frac{7}{16}$ da bir minimum değere sahip olduğu anlamına gelir. Son olarak, $\cos \theta = -\frac{7}{16}$ değeri $A(1, \theta_0)$ da yerine yazıldığında,

$$A(1, \theta_0) = \frac{11}{6} + \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{16} - \frac{4}{3} \cdot \frac{79}{128} = -\frac{1}{96}$$

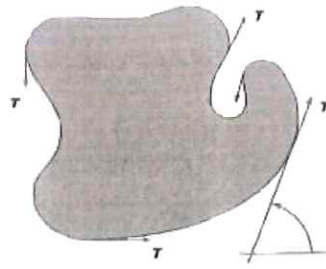
elde edilir. Dolayısıyla, $1 - \delta < r < 1$ ve $\cos \theta = -\frac{7}{16}$ için $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} < 0$ olacak şekilde bir $z = re^{i\theta_0}$ bulunabildiğinden $f \notin \mathcal{S}^*$ sonucuna varılır.



Şekil 2. 7 $f(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ birim diskinin resmi

Geometrik olarak $f(z)$ fonksiyonunun konvekse yakın olması için gerek ve yeter şart $\partial\mathbb{D}_r: |z| = r$ nin $f(z)$ altındaki görüntüsünün tam dönüşlerinin olmamasıdır. Yani $f(\partial\mathbb{D}_r)$ eğrisine herhangi bir noktasına çizilen teğet vektörü geri dönüş açısı π den büyük olmamalıdır (bakınız Şekil 2.8).

Fakat $f(z)$, $\mathbb{D}$ birim diskini Şekil 2.8 ki bölge üzerine resmeden bir fonksiyon ise, T vektörünün teğeti π den fazla saatin tersi yönünde dönen bir yay olduğu için $f(z)$ konvekse yakın değildir.



Şekil 2. 8 Konvekse yakın olmayan bölge

Teorem 2.3.5: (Noshiro-Warschawski Teoremi) $f(z)$ analitik fonksiyonu $\mathbb{D}$ konveks bölgesinde $\operatorname{Re}(f'(z)) > 0$ oluyorsa $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesinde konvekstir (Duren 1983).

Noshiro-Warschawski Teoreminin bir sonucu aşağıdaki teoremdir.

Teorem 2.3.6: Bir fonksiyon konvekse yakın ise bu fonksiyon aynı zamanda ünivalenttir (Duren 1983).

Bu teoremin bir sonucu ünivalent fonksiyonların $\mathcal{S}$ sınıfı ile onun alt sınıfları arasında şu şekilde bir ilişki $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ vardır.

Tanım 2.3.8: (Caratheodory Sınıfı) $\mathbb{D}$ birim diskte analitik, $f(0) = 1$ ve $z \in \mathbb{D}$ için, $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$ eşitsizliğini sağlayan ve

$$f(z) = 1 + \rho_1 z + \rho_2 z^2 + \rho_3 z^3 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n z^n$$

şeklinde bir seri açılımına sahip olan fonksiyonların sınıfı reel kısmı pozitif analitik fonksiyonlar sınıfı veya genellikle Caratheodory sınıfı olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların sınıfı $\wp$ ile gösterilir (Caratheodory 1907).

$\wp$ sınıfındaki herhangi bir fonksiyon, $\mathbb{D}$ bölgesinde pozitif reel kısımlı fonksiyon olarak adlandırılır. Burada $\wp$ sınıfındaki bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmeyeceğini vurgulamak önemlidir. Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ ($n \geq 0, n \in \mathbb{N}$) $\wp$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \geq 2$ için ünivalent değildir.

Ayrıca Caratheodory sınıfı yardımıyla ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarının yeniden düzenlenebileceği iyi bilinmektedir. Aşağıdaki teoremler bununla ilgilidir:

Teorem 2.3.7: $f(z)$ analitik fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskte konveks olması için gerek yeter şart;

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \wp$$

olmasıdır (Pommerenke 1975).

Teorem 2.3.8: $f(z)$ analitik fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskte yıldızlı olması için gerek yeter şart;

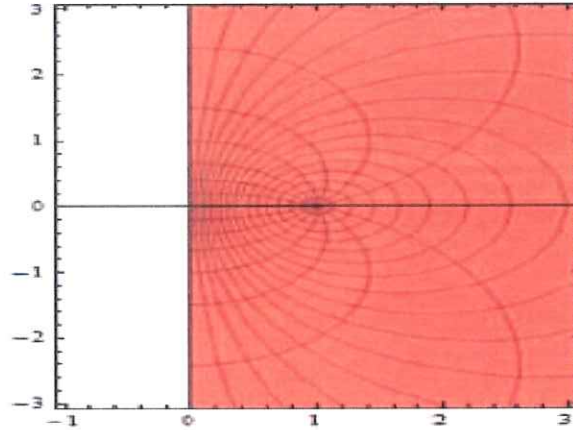
$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in \wp$$

olmasıdır (Pommerenke 1975).

$\mathcal{S}$ sınıfında Koebe fonksiyonuna benzer şekilde; Caratheodory sınıfında da

$$H(z) = \frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{1-z} - 1 = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + \dots$$

fonksiyonu çok önemli bir yere sahiptir. $H(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskini $H^+ = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 0\}$ sağ yarı düzleme resmeden Mobius dönüşümüdür (Bakınız Şekil 2.9).



Şekil 2. 9 $\mathbb{D}$ birim diskinin $H(z) = \frac{1+z}{1-z}$ dönüşümü altındaki resmi

Tanım 2.3.9: (Ünivalentlik Yarıçapı) $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. f fonksiyonu $\mathbb{D}_\rho$ diskinde ünivalent olacak şekilde belirlenen en büyük ρ_0 reel sayısına f fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı denir.

Tanım 2.3.10: (α -Mertebeden Yıldızlılık Yarıçapı) f fonksiyonu (1.1) deki gibi tanımlanmış olsun. O halde, $0 \leq \alpha < 1$ için,

$$r_a^*(f) = \sup \left\{ r > 0 : \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > a, \quad z \in \mathbb{D}_r \right\}$$

reel sayısına f fonksiyonunun a -mertebeden yıldızlılık yarıçapı denir.

Bu tanıma göre, $r_a^*(f)$ biçiminde gösterdiğimiz bu yarıçap $w = f(z) \in \mathcal{S}$ fonksiyonu altında orijine göre yıldızlı bir bölgeye resmeden $\mathbb{D}_r$ çemberinin r yarıçapları için bir üst sınırdır. Ayrıca, $r_0^*(f) = r^*(f)$ reel sayısı, $f(\mathbb{D}_{r^*(f)})$ görüntü bölgesi orijine göre yıldızlı bir bölge olacak şekilde, en büyük yarıçaptır.

Tanım 2.3.11: (a -Mertebeden Konvekslik Yarıçapı) f fonksiyonu (1.1) deki gibi tanımlanmış olsun. O halde, $0 \leq a < 1$ için,

$$r_a^c(f) = \sup \left\{ r > 0 : \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > a, \quad z \in \mathbb{D}_r \right\}$$

reel sayısına f fonksiyonunun a -mertebeden konvekslik yarıçapı denir.

Yukarıdaki açıklamaya benzer olarak: $r_0^c(f) = r^c(f)$ reel sayısı, $f(\mathbb{D}_{r^c(f)})$ görüntü bölgesi konveks bir bölge olacak şekilde en büyük yarıçaptır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tezin sonuçlarını oluştururken sıklıkla kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

3.1. Subordinasyon

Kompleks değerli iki fonksiyon arasındaki subordinasyon kavramı reel değişkenli fonksiyonlar arasındaki eşitsizlik fikrinin doğal bir genellemesidir. Subordinasyon kavramı, son yıllarda karmaşık analiz ile ilgilenen birçok matematikçinin çalışmalarına konu olmuştur. Esas itibarıyla subordinasyon kavramı fikri E.Lindenöf (1909) çalışmasına kadar eskilere dayandırılabilmeyle birlikte, bu teoremi ilk J. E. Littlewood (1925) W. W. Rogosinski (1943) çalışmalarında ortaya konmuştur. Teorik olarak subordinasyonun amacı, özellikleri bilinmeyen bir fonksiyonu özellikleri bilinen bir fonksiyon yardımıyla ele alıp incelemektir.

Tanım 3.1.1: (Subordinasyon) f ve g fonksiyonları $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik olsunlar. $\mathbb{D}$ birim diskinde

$$f(z) = g(\varphi(z))$$

olacak şekilde bir φ Schwarz fonksiyonu varsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir denir ve bu durum $f < g$ şeklinde gösterilir.

Eğer $f < g$ ise $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$ olur. Schwarz Lemmasından tüm $r \in (0,1)$ değerleri için $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ ve $f(\mathbb{D}_r) \subset g(\mathbb{D}_r)$ elde edilir. Ayrıca $f < g$ ise

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)|, \quad r \in (0,1)$$

yazmak mümkündür.

En önemli durum ise subordinate olunan fonksiyonun ünivalent olması durumudur. Aşağıdaki lemma bunula ilgilidir:

Lemma: 3.1.1: Eğer g fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskinde ünivalent ise $f \prec g$ olması için gerek ve yeter şart $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$ koşullarının sağlanmasıdır.

Tüm $r \in (0,1)$ değerleri için $f(\mathbb{D}_r) \subseteq g(\mathbb{D}_r)$ olması durumu, yukarıdaki yardımcı önerme ile birlikte subordinasyon prensibi olarak bilinir.

Teorem 3.1.2: (Subordinasyon Prensibi) Eğer g fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskinde ünivalent ise $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$ olması durumunda $f(\mathbb{D}_r) \subseteq g(\mathbb{D}_r)$, $r \in (0,1)$ kapsamı sağlanır (Pommerenke 1975).

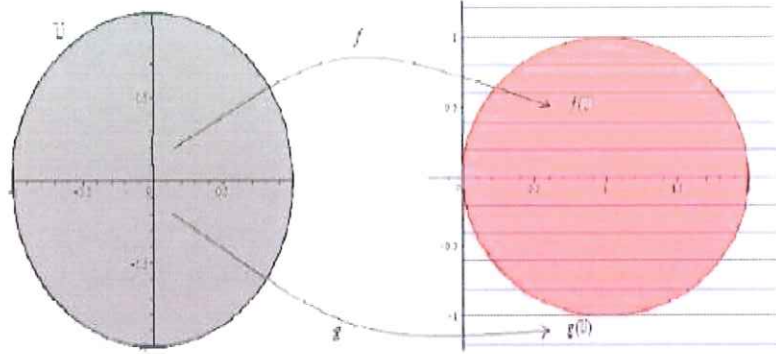
$\mathbb{D}$ birim diskinde $\rho(0) \leq 1$ eşitsizliği sağlayan analitik bir fonksiyonun $\wp$ sınıfında olması için $\mathbb{D}$ üzerinde $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ subordinasyonunu sağlaması gerekli ve yeterlidir.

Örneğin, $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik olan $f(z) = 1 + z$ ve $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonları göz önüne alınırsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir. Bunu görmek için $\forall z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = g(\varphi(z))$ olacak şekilde $|\varphi(z)| < 1$ ve $\varphi(0) = 0$ koşullarını sağlayan bir φ fonksiyonunun varlığını göstermektedir.

$$f(z) = g(\varphi(z)) \Rightarrow 1 + z = \frac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)} \Rightarrow \varphi(z) = \frac{z}{z + 2}$$

bulunur.

Bulunan bu φ fonksiyonu için $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| = \left| \frac{z}{z+2} \right| \leq \frac{1}{|z+2|} \leq 1$ olduğu açıktır. Bu ise $f < g$ demektir. Ayrıca g ünivalent olduğundan $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$ olur. Bu durum aşağıdaki şekilde açık olarak görülebilir.



Şekil 3.1 $1 + z < \frac{1+z}{1-z}$

Geometrik fonksiyon teorisinde bilinen bir çok sınıfın subordinasyon kavramı yardımıyla yeniden ele alınabileceği, ve hatta bu kavram yardımıyla yeni alt sınıfların tanımlanabileceği iyi bilinen bir gerçektir. Aşağıdaki tanım ve tanımdan hemen sonra verilen açıklamalar bunula ilgilidir:

Tanım 3.1.2: (Ma-Minda Yıldızlı ve Ma-Minda Konveks Fonksiyonlar) ϕ pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyon, $\phi(0) = 1$ ve ϕ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskini 1 e göre yıldızlı bir bölgeye resmediyor olsun. Bu durumda Ma-Minda yıldızlı fonksiyonlarının $S^*(\phi)$ sınıfı ve Ma-Minda konveks fonksiyonların $C(\phi)$ sınıfı aşağıdaki gibidir:

$$S^*(\phi) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} < \phi(z) \right\},$$

$$C(\phi) = \left\{ f \in \mathcal{A}: 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} < \phi(z) \right\}.$$

Bu halde, Tanım 3.2.1 yardımıyla yıldızıl ve konveks fonksiyonların bazı önemli alt sınıflarının elde edilebileceği söylenebilir. Gerçekten, eğer $\phi(z) = \frac{1+z}{1-z}$ olarak seçilecek olursa, sırasıyla, yıldızıl ve konveks fonksiyonların $S^*\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = S^*$ ve $C\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = C$ sınıflarının elde edileceği açıktır (Ma-Minda 1994).

Buraya kadar ifade edilen açıklamalar ışığında, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar fikrini genelleştirmenin en kolay yollarından birinin $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ ve $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ fonksiyonları altında birim diskin görüntüsünü sağ yarı düzlemin belirli alt kümeleri ile sınırlamak olduğu sonucuna ulaşmak mümkündür. İşte bu temel çıkarımdan yararlanarak, aşağıda sunulmuş olan iki alt bölümde öncelikle Bernoulli Lemniskat eğrisinin ve Janowski dönüşümünün geometrik özellikleri incelenmiş ve bu geometrik özelliklerden istifade ederek çalışmamızın temelini oluşturacak olan dört alt sınıf ve bu alt sınıflara ait özellikler incelenmiştir.

3.2. Lemniskat Yıldızıl ve Lemniskat Konveks Fonksiyonlar

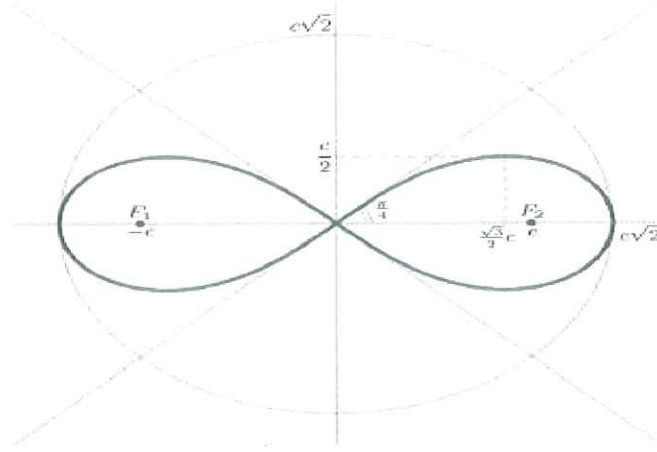
Bu kısımda öncelikle Bernoulli Lemniskat eğrisi tanımlanacak ve ardından Lemniskat yıldızıl ve Lemniskat konveks fonksiyon sınıfları ele alınacaktır.

Tanım 3.2.1: (Bernoulli Lemniskat) Bernoulli Kelebek Eğrisi olarak da isimlendirilen Bernoulli Lemniskat eğrisi (ya da kısaca lemniskat eğrisi), F_1 ve F_2 odak noktaları arasındaki mesafe $2c$ olmak üzere $|PF_1| \cdot |PF_2| = c^2$ denklemi ile verilen P noktalarının geometrik yeri olarak tanımlanan bir düzlem eğrisidir (Bakınız Şekil 3.2).

Basit bir hesaplama ile P noktasının geometrik yerinin

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$$

denklemleri ile verilen dördüncü dereceden bir eğri olduğu görülür.



Şekil 3. 2 Bernoulli Lemniskat

Bu durumda, $\mathcal{L} := \{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(w) > 0, |w^2 - 1| < 1\}$ bölgesinin $\gamma: (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$ denklemi ile verilen Bernoulli Lemniskat eğrisinin sağ yarı düzlemde kalan kısmının içi olacağı açıktır (Dziok *et al.* 2011; Ali *et al.* 2012).

Şimdi, $\mathbb{D}$ birim diskini $\mathcal{L} := \{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(w) > 0, |w^2 - 1| < 1\}$ bölgesine hapseden yıldızıl ve konveks fonksiyonların iki önemli alt sınıfını inceleyeceğiz.

Tanım 3.2.2: (Bernoulli Lemniskat Yıldızıl Fonksiyon) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu olmak üzere

$$\left| \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 - 1 \right| < 1, \quad z \in \mathbb{D}$$

koşulunu sağlıyorsa $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna Lemniskat Yıldızıl fonksiyon denir ve bu koşulu sağlayan fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^*$ ile gösterilir.

Bu tanım geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}^*$ ise $\mathbb{D}$ birim diskinin $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ dönüşümü altındaki resmi $|w^2 - 1| < 1$ dekleminin geometrik olarak Bernoulli Lemniskat eğrisinin sağ yarı bölgesinin içinde kalıyor demektir.

Buna ilaveten, Tanım 3.2.2 de $\phi(z) = \sqrt{1+z}$ olarak seçilecek olursa subordinasyon kavramı yardımıyla bu f onksiyonların sınıfı şu şekilde ifade edilebilir: $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}^*$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} < \phi(z) = \sqrt{1+z}, \quad \phi(0) = 1$$

olmasıdır (Sokól 1996; Sokól *et al.* 1998; Sokól 2009; Dziok *et al.* 2011).

Tanım 3.2.3: (Bernoulli Lemniskat Konveks fonksiyon) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu

$$\left| \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)^2 - 1 \right| < 1 \quad (|z| < r)$$

koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonu lemniskat konveks fonksiyondur denir ve koşulu sağlayan fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanım geometrik olarak şu şekilde ifade edilebilir: $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ise $\mathbb{D}$ birim diskinin $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ dönüşümü altındaki resmi $|w^2 - 1| < 1$ dekleminin geometrik olarak Bernoulli Lemniskat eğrisinin sağ yarı bölgesinin içinde kalıyor demektir.

Buna ilaveten, Tanım 3.2.2 de $\phi(z) = \sqrt{1+z}$ olarak alınırsa şu sonuca varmak kolaydır: $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} < \phi(z) = \sqrt{1+z}, \quad \phi(0) = 1$$

olmasıdır (Sokół 2008; Sokół 2009; Verma and Ravichandran 2017; Madaan *et al.* 2019).

Tanım 3.2.4: (Lemniskat Yıldızılık Yarıçapı) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda

$$r_{\mathcal{L}}^*(f) = \sup \left\{ r > 0 : \left| \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 - 1 \right| < 1, \quad z \in \mathbb{D}_r \right\}$$

reel sayısı f fonksiyonunun lemniskat yıldızılık yarıçapı olarak adlandırılır.

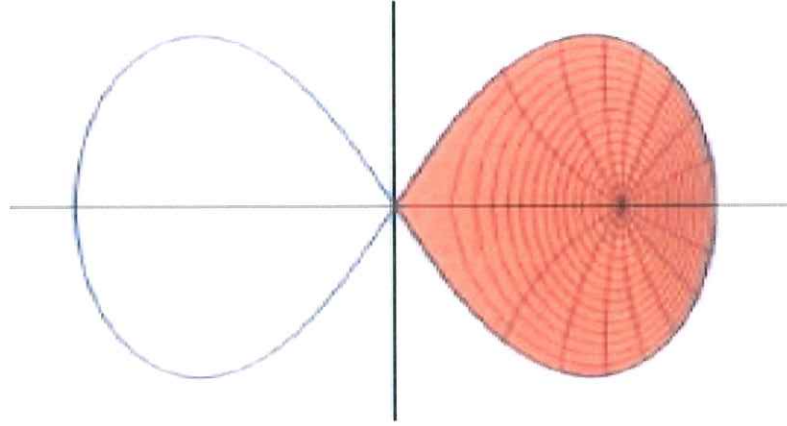
Bu tanım geometrik olarak şu şekilde yorumlanır: $r_{\mathcal{L}}^*(f)$ lemniskat yıldızılık yarıçapı $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonu altında $\mathcal{L} := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 0, |w^2 - 1| < 1\}$ bölgesine resmedilen $\mathbb{D}_r$ diskinin r yarıçapları için bir üst sınırdır.

Tanım 3.2.5: (Lemniskat Konvekslik Yarıçapı) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda

$$r_{\mathcal{L}}^c(f) = \sup \left\{ r > 0 : \left| \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)^2 - 1 \right| < 1, \quad z \in \mathbb{D}_r \right\}$$

reel sayısı f fonksiyonunun lemniskat konvekslik yarıçapı olarak adlandırılır.

Bu tanım geometrik olarak şu şekilde yorumlanır: $r_{\mathcal{L}}^c(f)$ lemniskat konvekslik yarıçapı $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ fonksiyonu altında $\mathcal{L} := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 0, |w^2 - 1| < 1\}$ bölgesine resmedilen $\mathbb{D}_r$ diskinin r yarıçapları için bir üst sınırdır.



Şekil 3. 3 $\mathbb{D}$ birim diskinin $\phi = \sqrt{1+z}$ dönüşümü altındaki resmi

3.3 Janowski Yıldızıl ve Janowski Konveks Fonksiyonlar

Bilindiği üzere; $-1 \leq A < B \leq 1$ için $\frac{1+Az}{1+Bz}$ dönüşümü birim diski sağ yarı düzlemde reel eksene göre simetrik ve çap uç noktaları $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ olan konveks bir bölgeye ünivalent olarak resmeder ve bu dönüşüm Janowski fonksiyonu olarak bilinmektedir. Bu bölümde, Janowski fonksiyonunun bu geometrik özelliğini kullanarak yıldızıl ve konveks fonksiyonların iki önemli alt sınıfını vereceğiz.

Tanım 3.3.1: (Janowski Yıldızıl Fonksiyon) $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda, $-1 \leq A < B \leq 1$ olmak üzere

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$$

şeklinde yazılan $f(z)$ fonksiyonuna Janowski yıldızıl fonksiyonu denir. Bu fonksiyon sınıfı $\mathcal{S}^*[A, B]$ ile gösterilir (Janowski 1970; Janowski 1973).

Bu tanım geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: $f \in \mathcal{S}^*[A, B]$ olmak üzere $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ fonksiyonunun görüntüsü $-1 \leq A < B \leq 1$ için çap uç noktaları $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ olan bir diskte bulunuyor demektir.

Tanım 3.3.2: (Janowski Konveks Fonksiyon) $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda, $-1 \leq A < B \leq 1$ olmak üzere

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} < \frac{1 + Az}{1 + Bz}$$

şeklinde yazılan $f(z)$ fonksiyonuna Janowski konveks fonksiyonu denir ve bu fonksiyon sınıfı $\mathcal{C}[A, B]$ ile gösterilir (Janowski 1970; Janowski 1973).

Bu tanımı geometrik olarak şu şekilde yorumlamak mümkündür: $f \in \mathcal{C}[A, B]$ olmak üzere $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ nin görüntüsü $-1 \leq A < B \leq 1$ için çap uçları $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ olan bir diskte bulunuyor demektir.

Şimdi bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için Janowski yıldızlılık ve Janowski konvekslik yarıçapları kavramlarını tanımlayalım:

Tanım 3.3.3: (Janowski Yıldızlılık Yarıçapı) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. O halde $-1 \leq A < B \leq 1$ olmak üzere,

$$r_{A,B}^*(f) = \sup \left\{ r > 0 : \left| \frac{\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1}{A - B \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)} \right| < 1, \quad z \in \mathbb{D}_r \right\}$$

reel sayısına f fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapı denir.

Dolayısıyla $r_{A,B}^*(f)$ Janowski yıldızılık yarıçapı $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonu altında reel eksene göre simetrik, sağ yarı düzlemde $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ çap uç noktalarına sahip bir diskin içine resmeden $\mathbb{D}_r$ disklerinin r yarıçapları için bir üst sınırdır.

Tanım 3.3.4: (Janowski Konvekslik Yarıçapı) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu halde $-1 \leq A < B \leq 1$ olmak üzere

$$r_{A,B}^c(f) = \sup \left\{ r > 0 : \left| \frac{\frac{zf''(z)}{f'(z)}}{A - B \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)} \right| < 1, z \in \mathbb{D}_r \right\}$$

reel sayısı f fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı denir.

Dolayısıyla $r_{A,B}^c(f)$ Janowski konvekslik yarıçapı $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ fonksiyonu altında reel eksene göre simetrik, sağ yarı düzlemde $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ çap uç noktalarına sahip diskin içine resmeden $\mathbb{D}_r$ disklerinin r yarıçapları için bir üst sınırdır.

3.4 Hiper-Bessel Fonksiyonu

Bu kısımda çalışmamızda oldukça önemli bir konuma sahip olan hiper-Bessel ve normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların sıfırları vasıtasıyla elde edilmiş olan sonsuz çarpım temsillerini vereceğiz.

Tanım 3.4.1: (Pochhammer Sembolü) α reel ya da kompleks bir sayı ve $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere

$$(a)_n = \begin{cases} a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1) & n \in \mathbb{N} \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye Pochhammer (ya da Apell) sembolü denir.

$(a)_n$ Pochhammer sembolünün yukarıda verilen tanımından, Γ Euler gamma fonksiyonu olmak üzere,

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

ve

$$(a)_{n+1} = a(a+1)_n$$

eşitliklerinin sağlandığını görmek kolaydır.

Tanım 3.4.2: (Hiper-Bessel Fonksiyonu)

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} (\beta_p) \\ (\gamma_q) \end{matrix} ; x \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\beta_1)_n (\beta_2)_n \dots (\beta_p)_n x^n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \dots (\gamma_q)_n n!} \quad (3.1)$$

fonksiyonu genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu göstermek üzere hiper-Bessel fonksiyonu

$$J_{\alpha_d}(z) = \frac{\left(\frac{z}{d+1}\right)^{a_1+a_2+\dots+a_d}}{\Gamma(\alpha_1+1) \dots \Gamma(\alpha_d+1)} {}_0F_d \left(\begin{matrix} - \\ \alpha_d+1 \end{matrix} ; -\left(\frac{z}{d+1}\right)^{d+1} \right) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Denklem (3.1) ve Denklem (3.2) kullanarak $z \rightarrow J_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonu

$$J_{\alpha_d}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\alpha_1+1+n) \dots \Gamma(\alpha_d+1+n)} \left(\frac{z}{d+1}\right)^{n(d+1)+a_1+a_2+\dots+a_d} \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (3.3) de $d=1$ ve $\alpha_1 = \nu$ alınırsa klasik Bessel fonksiyonunun elde edilebileceği kolaylıkla görülür.

Normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonu $\mathcal{J}_{\alpha_d}(z)$

$$\mathcal{J}_{\alpha_d}(z) = \frac{\left(\frac{z}{d+1}\right)^{a_1+a_2+\dots+a_d}}{\Gamma(\alpha_1+1) \dots \Gamma(\alpha_d+1)} J_{\alpha_d}(z) \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (3.3) ve Denklem (3.4) yardımıyla

$$J_{\alpha_d}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_d + 1)_n} \left(\frac{z}{d+1} \right)^{n(d+1)} \quad (3.5)$$

sonsuz toplam gösterimi elde edilir. Açıkça görülebileceği üzere J_{α_d} fonksiyonu $\mathcal{A}$ sınıfına ait değildir. Ancak, bu fonksiyon

$$f_{\alpha_d}(z) = zJ_{\alpha_d}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! (d+1)^{n(d+1)} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_d + 1)_n} (z)^{n(d+1)+1} \quad (3.6)$$

şeklinde yazılırsa $f_{\alpha_d} \in \mathcal{A}$ normalize edilmiş fonksiyonu elde edilmiş olur.

J_{α_d} fonksiyonunun Weierstrassian kanonik çarpımı, $j_{\alpha_d, n}$, J_{α_d} fonksiyonunun n ninci pozitif kökünü göstermek üzere,

$$J_{\alpha_d}(z) = \frac{\left(\frac{z}{d+1} \right)^{a_1 + a_2 + \dots + a_d}}{\Gamma(\alpha_1 + 1) \dots \Gamma(\alpha_d + 1)} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^{d+1}}{j_{\alpha_d, n}^{d+1}} \right) \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilir (Baricz 2017). Denklem (3.4) ve Denklem (3.7) kullanılarak

$$J_{\alpha_d}(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^{d+1}}{j_{\alpha_d, n}^{d+1}} \right) \quad (3.8)$$

sonsuz çarpım temsili elde edilir. Denklem (3.6) yarımıyla da

$$f_{\alpha_d}(z) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^{d+1}}{j_{\alpha_d, n}^{d+1}} \right) \quad (3.9)$$

eşitliği elde edilmiş olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin bulgular kısmını oluşturan bu bölüm, iki alt kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonun Lemniskat yıldızlılık, Lemniskat konvekslik yarıçapları elde edilmiştir. İkinci kısımda ise, normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonun Janowski yıldızlılık ve Janowski konvekslik yarıçapları ile ilgili teoremlere yer verilmiştir.

4.1. Normalize Edilmiş Hiper-Bessel Fonksiyonunun Lemniskat Yıldızlılık ve Lemniskat Konvekslik Yarıçapları

Bu bölüm, normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonunun Lemniskat yıldızlılık ve Lemniskat konvekslik yarıçaplarını belirlemeye ayrılmıştır.

Teorem 4.1.1: $i = \{1, 2, \dots, d\}$ olmak üzere $\alpha_i > -1$ olsun. Bu durumda $z \mapsto f_{\alpha_d}(z) = zJ_{\alpha_d}(z)$ normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonunun Lemniskat yıldızlılık yarıçapı $r_L^*(f_{\alpha_d})$,

$$\left(rJ'_{\alpha_d}(r)\right)^2 - 2rJ'_{\alpha_d}(r)J_{\alpha_d}(r) + 3\left(J_{\alpha_d}(r)\right)^2 = 0$$

denklemin en küçük pozitif köküdür (Toklu and Kara 2020).

İspat: Denklem (3.8) in her iki yanının logaritmik türevini almak suretiyle

$$\frac{zJ'_{\alpha_d}(z)}{J_{\alpha_d}(z)} = -(d+1) \sum_{n \geq 1} \frac{z^{d+1}}{j_{\alpha_d, n}^{d+1} - z^{d+1}} \quad (4.1)$$

elde edilir. Ayrıca, $f_{\alpha_d}(z) = zJ_{\alpha_d}(z)$ ifadesinin her iki yanının logaritmik türevi alınır ve elde edilen ifadede Denklem (4.1) deki eşitlik kullanılacak olursa

$$\frac{zf'_{\alpha_d}(z)}{f_{\alpha_d}(z)} = 1 + \frac{zJ'_{\alpha_d}(z)}{J_{\alpha_d}(z)} = 1 - (d+1) \sum_{n \geq 1} \frac{z^{d+1}}{j_{\alpha_d, n}^{d+1} - z^{d+1}} \quad (4.2)$$

elde edilir. Denklem (4.2) ışığında ve üçgen eşitsizliği kullanılarak, aşağıdaki eşitsizliği elde etmek kolaydır:

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{zf'_{\alpha_d}(z)}{f_{\alpha_d}(z)} \right)^2 - 1 \right| \\
& \leq \left((d+1) \sum_{n \geq 1} \frac{|z|^{d+1}}{j_{\alpha_d,n}^{d+1} - |z|^{d+1}} \right) \left(2 + (d+1) \sum_{n \geq 1} \frac{|z|^{d+1}}{j_{\alpha_d,n}^{d+1} - |z|^{d+1}} \right) \quad (4.3) \\
& = \left(\frac{|z|f'_{\alpha_d}(|z|)}{f_{\alpha_d}(|z|)} \right)^2 - 4 \left(\frac{|z|f'_{\alpha_d}(|z|)}{f_{\alpha_d}(|z|)} \right) + 3
\end{aligned}$$

Şimdi,

$$\left(\frac{rf'_{\alpha_d}(r)}{f_{\alpha_d}(r)} \right)^2 - 4 \left(\frac{rf'_{\alpha_d}(r)}{f_{\alpha_d}(r)} \right) + 2 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif kökünün r^* olduğu varsayılırsa, bu

$$\left| \left(\frac{rf'_{\alpha_d}(r)}{f_{\alpha_d}(r)} \right)^2 - 1 \right| < 1$$

eşitsizliğinin $|z| < r^*$ için geçerli olmasını gerektirir. O halde, Denklem (4.2) den yararlanılarak, Denklem (4.3) ün sıfırlarının

$$r^2 \left(J'_{\alpha_d}(r) \right)^2 - 2r J'_{\alpha_d}(r) J_{\alpha_d}(r) + 3 \left(J_{\alpha_d}(r) \right)^2 = 0 \quad (4.4)$$

denkleminin sıfırları ile çakıştığı sonucuna ulaşılır.

İspatı tamalamak için, Denklem (4.4) ün $(0, j_{\alpha_d,1})$ aralığında sadece bir köke sahip olduğunu göstermek gerekir. Bunun için, $u_{\alpha_d}(z): (0, j_{\alpha_d,1}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_{\alpha_d}(z) = \left(\frac{rf'_{\alpha_d}(r)}{f_{\alpha_d}(r)} \right)^2 - 4 \left(\frac{rf'_{\alpha_d}(r)}{f_{\alpha_d}(r)} \right) + 2$$

foksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon sürekli ve

$$u'_{\alpha_d}(z) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(d+1)^2 r^d j_{\alpha_d,n}^{d+1}}{(j_{\alpha_d,n}^{d+1} - r^{d+1})^2} \left(1 + (d+1) \sum_{n \geq 1} \frac{r^{d+1}}{j_{\alpha_d,n}^{d+1} - r^{d+1}} \right) > 0$$

olduğundan $(0, j_{\alpha_d,1})$ aralığında kesin artandır. Ayrıca

$$\lim_{r \searrow 0} u_{\alpha_d}(z) = -1 < 0 \text{ ve } \lim_{r \nearrow j_{\alpha_d,1}} u_{\alpha_d}(z) = \infty$$

dır. Bu halde, Ara Değer Teoremi yardımıyla, $u_{\alpha_d}(z) = 0$ denkleminin $(0, j_{\alpha_d,1})$ aralığında tek bir köke sahip olduğu sonucuna ulaşılır. Bu ise, $f_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonunun Lemniskat yıldızlılık yarıçapının $u_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonunun $(0, j_{\alpha_d,1})$ aralığındaki yegane kökü olduğu anlamına gelir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2: $i = \{1, 2, \dots, d\}$ olmak üzere $\alpha_i > -1$ olsun. O halde $z \mapsto f_{\alpha_d}(z) = zJ_{\alpha_d}(z)$ normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonunun Lemniskat konvekslik yarıçapı $r_L^c(f_{\alpha_d})$,

$$\left(\frac{r^2 J''_{\alpha_d}(r) + 2r J'_{\alpha_d}(r)}{J_{\alpha_d}(r) + r J'_{\alpha_d}(r)} \right)^2 - 2 \left(\frac{r^2 J''_{\alpha_d}(r) + 2r J'_{\alpha_d}(r)}{J_{\alpha_d}(r) + r J'_{\alpha_d}(r)} \right) - 1 = 0$$

denklemin en küçük pozitif köküdür (Toklu and Kara 2020).

İspat: Aktaş *et al* (2019) da verilen Teorem 4.1.1 den, $\gamma_{\alpha_d,n}$, $f'_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonunun n 'inci pozitif reel sıfırını göstermek üzere

$$f'_{\alpha_d}(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^{d+1}}{\gamma_{\alpha_d,n}^{d+1}} \right) \quad (4.5)$$

olduğunu biliyoruz. Denklem (4.5) kullanarak

$$1 + \frac{zf''_{\alpha_d}(z)}{f'_{\alpha_d}(z)} = 1 - (d+1) \sum_{n \geq 1} \frac{z^{d+1}}{\gamma_{\alpha_d,n}^{d+1} - z^{d+1}} \quad (4.6)$$

elde edilir. Denklem (4.6) ve üçgen eşitsizliğini kullanarak, $|z| < \gamma_{\alpha_d,n}$ için,

$$\left| \left(1 + \frac{zf''_{\alpha_d}(z)}{f'_{\alpha_d}(z)} \right)^2 - 1 \right| \leq \left(1 + \frac{|z|f''_{\alpha_d}(|z|)}{f'_{\alpha_d}(|z|)} \right)^2 - 2 \left(\frac{|z|f''_{\alpha_d}(|z|)}{f'_{\alpha_d}(|z|)} \right)$$

elde edilir. Bu halde, $f_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonunun $r_L^c(f_{\alpha_d})$ Lemniskat konvekslik yarıçapının

$$\left(\frac{rf''_{\alpha_d}(r)}{f'_{\alpha_d}(r)}\right)^2 - 2\left(\frac{rf''_{\alpha_d}(r)}{f'_{\alpha_d}(r)}\right) - 1 = 0 \quad (4.7)$$

denkleminin ve dolayısıyla

$$\left(\frac{r^2 J''_{\alpha_d}(r) + 2r J'_{\alpha_d}(r)}{J_{\alpha_d}(r) + r J'_{\alpha_d}(r)}\right)^2 - 2\left(\frac{r^2 J''_{\alpha_d}(r) + 2r J'_{\alpha_d}(r)}{J_{\alpha_d}(r) + r J'_{\alpha_d}(r)}\right) - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif kökü olduğu anlamına gelir.

İspatı tamamlamak için yukarıdaki denklemin $(0, \gamma_{\alpha_d,1})$ aralığında sadece bir tek köke sahip olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için, $v_{\alpha_d}: (0, \gamma_{\alpha_d,1}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$v_{\alpha_d}(r) = \left(\frac{rf''_{\alpha_d}(r)}{f'_{\alpha_d}(r)}\right)^2 - 2\left(\frac{rf''_{\alpha_d}(r)}{f'_{\alpha_d}(r)}\right) - 1$$

fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyon sürekli bir fonksiyon olup

$$v'_{\alpha_d}(r) > (d+1)^3 \sum_{n \geq 1} \frac{r^d \gamma_{\alpha_d,n}^{d+1}}{(\gamma_{\alpha_d,n}^{d+1} - r^{d+1})^2} \sum_{n \geq 1} \frac{r^{d+1}}{\gamma_{\alpha_d,n}^{d+1} - r^{d+1}} > 0$$

olduğundan $(0, \gamma_{\alpha_d,1})$ aralığında kesin artandır. Ayrıca

$$\lim_{r \searrow 0} v_{\alpha_d}(z) = -1 < 0 \text{ ve } \lim_{r \nearrow \gamma_{\alpha_d,1}} v_{\alpha_d}(z) = \infty$$

dır. Böylece, $f_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonunun Lemniskat konvekslik yarıçapının, Denklem (4.7) nin $(0, \gamma_{\alpha_d,1})$ aralığındaki yagane kökü olduğunu sonucuna ulaşılır. Bu ise istenilen sonuçtur.

4.2. Normalize Edilmiş Hiper-Bessel Fonksiyonunun Janowski Yıldızılık ve Janowski Konvekslik Yarıçapları

Bu bölümde, $f_{\alpha_d}(z)$ normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonunun Janowski yıldızılık ve Janowski konvekslik yarıçapları elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1: $i = \{1, 2, \dots, d\}$ olmak üzere $\alpha_i > -1$ olsun. O halde $z \mapsto f_{\alpha_d}(z) = zJ_{\alpha_d}(z)$ normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapı $r_{A,B}^*(f_{\alpha_d})$,

$$\frac{rJ'_{\alpha_d}(r)}{J_{\alpha_d}(r)} + \frac{A-B}{1+|B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür (Toklu and Kara 2020).

İspat: Tanım 3.3.3 dikkate alındığında, Denklem (3.6) daki gibi tanımlanmış normalize edilmiş $f_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapını belirlemek için

$$\left| \frac{\frac{zf'_{\alpha_d}(z)}{f_{\alpha_d}(z)} - 1}{A - B \frac{zf'_{\alpha_d}(z)}{f_{\alpha_d}(z)}} \right| < 1 \quad (|z| < r^*)$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir r^* gerçel sayısı bulmak gerekir. Denklem (4.2) ve üçgen eşitsizliği kullanılarak, $\alpha_i > -1$ ($i = \{1, 2, \dots, d\}$) için

$$\left| \frac{\frac{zf'_{\alpha_d}(z)}{f_{\alpha_d}(z)} - 1}{A - B \frac{zf'_{\alpha_d}(z)}{f_{\alpha_d}(z)}} \right| \leq \frac{(d+1) \sum_{n \geq 1} \frac{|z|^{d+1}}{j_{\alpha_d,n}^{d+1} - |z|^{d+1}}}{A - B - |B|(d+1) \sum_{n \geq 1} \frac{|z|^{d+1}}{j_{\alpha_d,n}^{d+1} - |z|^{d+1}}} \quad (|z| < j_{\alpha_d,1})$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu eşitsizlikte $z = |z| = r$ için eşitlik hali geçerlidir. Denklem (4.2) ve yukarıda elde edilen son eşitsizlik kullanarak

$$\left| \frac{\frac{zf'_{\alpha_d}(z)}{f_{\alpha_d}(z)} - 1}{A - B \frac{zf'_{\alpha_d}(z)}{f_{\alpha_d}(z)}} \right| \leq \frac{1 - \frac{|z|f'_{\alpha_d}(|z|)}{f_{\alpha_d}(|z|)}}{A - B + |B| \left(\frac{|z|f'_{\alpha_d}(|z|)}{f_{\alpha_d}(|z|)} - 1 \right)} \quad (4.8)$$

elde edilir. Bu halde, $|z| < r^*$ için, $f_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapının

$$\frac{1 - \frac{rf'_{\alpha_d}(r)}{f_{\alpha_d}(r)}}{A - B + |B| \left(\frac{rf'_{\alpha_d}(r)}{f_{\alpha_d}(r)} - 1 \right)} - 1 = 0$$

ve dolayısıyla

$$\frac{rf'_{\alpha_d}(r)}{f_{\alpha_d}(r)} = -1 + \frac{A - B}{1 + |B|}. \quad (4.9)$$

denkleminin pozitif kökü olduğu sonucuna ulaşılır.

İspatı tamamlamak için, yukarıda elde edilen Denklem (4.9) un $(0, j_{\alpha_d,1})$ aralığında sadece bir köke sahip olduğunu göstermeliyiz. Bunun için, $u_{\alpha_d}: (0, j_{\alpha_d,1}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_{\alpha_d}(r) = \frac{rf'_{\alpha_d}(r)}{f_{\alpha_d}(r)} + 1 - \frac{A - B}{1 + |B|}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $(0, j_{\alpha_d,1})$ aralığında sürekli ve

$$u'_{\alpha_d}(r) = -(d+1)^2 \sum_{n \geq 1} \frac{r^d j_{\alpha_d,n}^{d+1}}{(j_{\alpha_d,n}^{d+1} - r^{d+1})^2} < 0$$

olduğundan kesin azalandır. Ayrıca

$$\lim_{r \searrow 0} u_{\alpha_d}(r) = \frac{A - B}{1 + |B|} > 0 \text{ ve } \lim_{r \nearrow j_{\alpha_d,1}} u_{\alpha_d}(r) = -\infty$$

dır. Bu halde, Ara Değer Teoreminden, $u_{\alpha_d}(z) = 0$ denkleminin $(0, j_{\alpha_d,1})$ aralığında tek bir köke sahip olduğu sonucuna ulaşılır. Yani, $f_{\alpha_d}(z)$ normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonunun, $r_{A,B}^*(f_{\alpha_d})$ ile gösterilen, Janowski yıldızlılık yarıçapı $u_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonun ve dolayısıyla Denklem (4.9) un $(0, j_{\alpha_d,1})$ aralığındaki yegane köküdür. Bu ise istenilen sonuçtur.

Teorem 4.2.2: $i = \{1, 2, \dots, d\}$ olmak üzere $\alpha_i > -1$ olsun. O halde O halde $z \mapsto f_{\alpha_d}(z) = zJ_{\alpha_d}(z)$ normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı $r_{A,B}^c(f_{\alpha_d})$,

$$\frac{r^2 J''_{\alpha_d}(r) + 2r J'_{\alpha_d}(r)}{J_{\alpha_d}(r) + r J'_{\alpha_d}(r)} + 1 - \frac{A - B}{1 + |B|} = 0$$

denklemin en küçük pozitif köküdür (Toklu and Kara 2020).

İspat: Tanım 3.3.4 den, $f_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonunun $\{z: |z| < r\}$ diskinde Janowski konveks olması için; $|z| < r$ olmak üzere

$$\left| \frac{\frac{zf''_{\alpha_d}(z)}{f'_{\alpha_d}(z)}}{A - B \left(1 + \frac{zf''_{\alpha_d}(z)}{f'_{\alpha_d}(z)}\right)} \right| < 1$$

eşitsizliğin sağlanması gerektiğini biliyoruz. $f_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonunun, $|z| < \gamma_{\alpha_d,1}$ için,

$$\left| \frac{\frac{zf''_{\alpha_d}(z)}{f'_{\alpha_d}(z)}}{A - B \left(1 + \frac{zf''_{\alpha_d}(z)}{f'_{\alpha_d}(z)}\right)} \right| \leq \frac{(d+1) \sum_{n \geq 1} \frac{z^{d+1}}{\gamma_{\alpha_d,n}^{d+1} - z^{d+1}}}{A - B - |B| \left((d+1) \sum_{n \geq 1} \frac{z^{d+1}}{\gamma_{\alpha_d,n}^{d+1} - z^{d+1}} \right)}$$

eşitsizliği sağladığı kolayca görülebilir. Bu eşitsizlikte $z = |z| = r$ için eşitlik hali geçerlidir. Yukarıda verilen eşitsizlikten

$$\left| \frac{\frac{zf''_{\alpha_d}(z)}{f'_{\alpha_d}(z)}}{A - B \left(1 + \frac{zf''_{\alpha_d}(z)}{f'_{\alpha_d}(z)}\right)} \right| \leq \frac{-\frac{|z|f''_{\alpha_d}(|z|)}{f'_{\alpha_d}(|z|)}}{A - B + |B| \frac{|z|f''_{\alpha_d}(|z|)}{f'_{\alpha_d}(|z|)}} \quad (4.10)$$

elde edilir. Bu durumda, Janowski konvekslik yarıçapı $r_{A,B}^c(f_{\alpha_d})$,

$$\frac{rf''_{\alpha_d}(r)}{f'_{\alpha_d}(r)} + \frac{A - B}{1 + |B|} = 0 \quad (4.11)$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. İspatı tamamlamak için, Denklem (4.11) in $(0, \gamma_{\alpha_d,1})$ aralığında tek bir köke sahip olduğunu göstermek gerekir. Bunun için, $v_{\alpha_d}: (0, j_{\alpha_d,1}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$v_{\alpha_d}(r) = \frac{rf''_{\alpha_d}(r)}{f'_{\alpha_d}(r)} + \frac{A-B}{1+|B|}$$

fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyon sürekli olup

$$v'_{\alpha_d}(r) = -(d+1)^2 \sum_{n \geq 1} \frac{r^d \gamma_{\alpha_d,n}^{d+1}}{(\gamma_{\alpha_d,n}^{d+1} - r^{d+1})^2} < 0.$$

olduğundan $(0, j_{\alpha_d,1})$ aralığında kesin azalandır. Ayrıca,

$$\lim_{r \searrow 0} v_{\alpha_d}(r) = \frac{A-B}{1+|B|} > 0 \text{ ve } \lim_{r \nearrow \gamma_{\alpha_d,1}} v_{\alpha_d}(r) = -\infty.$$

dır. Bu durumda, r_1 , $(0, \gamma_{\alpha_d,1})$ aralığında Denklem (4.11) in yegane pozitif kökü olmak üzere, $f_{\alpha_d}(z)$ fonksiyonu $|z| < r_1$ için Janowski konvektir. Bu ise istenilen sonuçtur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölümde, normalize edilmiş $f_{\alpha_d}(z)$ hiper-Bessel fonksiyonunun Lemniskat yıldızlılık, Lemniskat konvekslik, Janowski yıldızlılık ve Janowski konvekslik yarıçapları ile ilgili elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Teorem 5.1: $i = \{1, 2, \dots, d\}$ olmak üzere $\alpha_i > -1$ olsun. Bu durumda $z \mapsto f_{\alpha_d}(z) = zJ_{\alpha_d}(z)$ normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonunun Lemniskat yıldızlılık yarıçapı $r_L^*(f_{\alpha_d})$,

$$\left(rJ'_{\alpha_d}(r)\right)^2 - 2rJ'_{\alpha_d}(r)J_{\alpha_d}(r) + 3\left(J_{\alpha_d}(r)\right)^2 = 0$$

denklemin en küçük pozitif köküdür (Toklu and Kara 2020).

Teorem 5.2 $i = \{1, 2, \dots, d\}$ olmak üzere $\alpha_i > -1$ olsun. O halde, $z \mapsto f_{\alpha_d}(z) = zJ_{\alpha_d}(z)$ normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonunun Lemniskat konvekslik yarıçapı $r_L^c(f_{\alpha_d})$,

$$\left(\frac{r^2J''_{\alpha_d}(r) + 2rJ'_{\alpha_d}(r)}{J_{\alpha_d}(r) + rJ'_{\alpha_d}(r)}\right)^2 - 2\left(\frac{r^2J''_{\alpha_d}(r) + 2rJ'_{\alpha_d}(r)}{J_{\alpha_d}(r) + rJ'_{\alpha_d}(r)}\right) - 1 = 0$$

denklemin en küçük pozitif köküdür (Toklu and Kara 2020).

Teorem 5.3: $i = \{1, 2, \dots, d\}$ olmak üzere $\alpha_i > -1$ olsun. O halde, $z \mapsto f_{\alpha_d}(z) = zJ_{\alpha_d}(z)$ normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapı $r_{A,B}^*(f_{\alpha_d})$,

$$\frac{rJ'_{\alpha_d}(r)}{J_{\alpha_d}(r)} + \frac{A - B}{1 + |B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür (Toklu and Kara 2020).

Teorem 5.4 $i = \{1, 2, \dots, d\}$ olmak üzere $\alpha_i > -1$ olsun. O halde O halde $z \mapsto f_{\alpha_d}(z) = zJ_{\alpha_d}(z)$ normalize edilmiş hiper-Bessel fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı $r_{A,B}^c(f_{\alpha_d})$,

$$\frac{r^2 J''_{\alpha_d}(r) + 2r J'_{\alpha_d}(r)}{J_{\alpha_d}(r) + r J'_{\alpha_d}(r)} + 1 - \frac{A - B}{1 + |B|} = 0$$

denklemin en küçük pozitif köküdür (Toklu and Kara 2020).

KAYNAKLAR

- Aktaş, İ. 2019. On some properties of hyper-Bessel and related functions, TWMS J. App. And Egn. Math. 9(1):30-37.
- Aktaş, İ. 2019. On starlikeness, convexity, and close-to-convexity of hyper-Bessel function, Khyayyam J. Math. 5(2):124-131.
- Aktaş, İ. 2020. Partial sums of hyper-Bessel function with applications, Hacet. J. Math. Stat. 49(1): 380-388.
- Aktaş, İ., Baricz, Á., Bounds for the radii of starlikeness of some q-Bessel functions. Results Math 2017;72(71):947-963.
- Aktaş, İ., Toklu, E., and Orhan, H. 2018. Radii of uniform convexity of some special functions. Turk J Math, 42(6), 3010-3024. doi:10.3906/mat-1806-43.
- Aktaş, İ., Baricz, Á., and Orhan, H. 2018. Bounds for radii of starlikeness and convexity of some special functions. Turk J Math, 42, 211-226. doi:10.3906/mat-1610-41.
- Aktaş, İ., Baricz, Á., And Singh, S., Geometric and monotonic properties of hyper-Bessel functions, Ramanujan J. (2020), 51(2): 275–295, doi: 10.1007/s11139-018-0105-9.
- Aktaş, İ., Baricz, Á., and Yağmur, N. 2017. Bounds for the radii of univalence of some special functions. Math. Inequal. Appl., (3), 825-843. doi:10.7153/mia-20-52.
- Ali, Rosihan M., Jain, Naveen K., Ravichandran, V. 2012. “Radii of Starlikeness Associated with the Lemniscate of Bernoulli and the Left-Half Plane.” Applied Mathematics and Computation, vol. 218, no. 11, pp. 6557–6565., doi:10.1016/j.amc.2011.12.033.
- Baricz, Á., and Nemes, G. 2021. Asymptotic expansions for the radii of starlikeness of normalised Bessel functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 494(2), 124624. doi:10.1016/j.jmaa.2020.124624
- Baricz, Á., Szakál, A., Szász, R., and Yağmur, N. 2018. Radii of Starlikeness and Convexity of a Product and Cross-Product of Bessel Functions. Results in Mathematics, 73(2). doi:10.1007/s00025-018-0823-8
- Baricz, Á., Szász, R. 2016. Close-to-Convexity of Some Special Functions and Their Derivatives. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 39, 427–437. <https://doi.org/10.1007/s40840-015-0180-7>
- Baricz, Á., and Yağmur, N. 2017. Radii of starlikeness and convexity of a cross-product of Bessel functions. The Ramanujan Journal, 44(3), 493-519. doi:10.1007/s11139-017-9943-0
- Baricz, Á., Dimitrov, D. K., Orhan, H., and Yağmur, N. 2016. Radii of starlikeness of some special functions. AMS, 144(8), 3355-3367. doi:10.1090/proc/13120
- Baricz, Á., Orhan, H., and Szász, R. 2015. The Radius of α -Convexity of Normalized Bessel Functions of the First Kind. Computational Methods and Function Theory, 16(1), 93-103. doi:10.1007/s40315-015-0123-1.
- Baricz, Á., and Parajapati, A. 2020. Radii of starlikeness and convexity of the generalized Mittag-Leffler Functions. Math. Commun., 25(2020), 117–135.

- Baricz, Á., Toklu, E., and Kadioğlu, E. 2018. Radii of starlikeness and convexity of Wright functions. *Math. Commun.*, 23: 97-117.
- Başkan, T. 2000. Kompleks fonksiyonlar teorisi. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı.
- Bieberbach, L. 1916. Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln. *Sitzungsberichte Preussische Preuss. Akad. Wiss.*, 38:940–955.
- Bohra, N., and Ravichandran, V. 2017. Radii Problems for Normalized Bessel Functions of First Kind. *Computational Methods and Function Theory*, 18(1), 99-123. doi:10.1007/s40315-017-0216-0.
- Branges, L. D. 1986. The story of the verification of the Bieberbach conjecture. *The Bieberbach Conjecture: Proceedings of the Symposium on the Occasion of the Proof Mathematical Surveys and Monographs*, 199-203. doi:10.1090/surv/021/16.
- Branges, L. D. 1985. A proof of the bieberbach conjecture. *Acta Math.*, 154:137–152,
- Chaggara, H., Romdhane, N. B., 2015. On the zeros of the hyper-Bessel function, *Integr. Transf. Spec. Funct.*, 26(2): 96–101.
- Charzynski, Z., and Schiffer, M. 1960. A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 5(1), 187-193. doi:10.1007/bf00252902.
- Çağlar, M., Deniz, E., Szasz, R., 2017. Radii of Convexity of Some Normalized Bessel Functions of the First Kind, *Results Math.* (2)017,72: 2023–2035.
- Duren, P. 2013. [72] (with Z. Charzyński) A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. *Menahem Max Schiffer: Selected Papers Volume 2*, 175-184. doi:10.1007/978-1-4614-7949-9_7
- Duren, P. 2001 *Univalent functions*, volume 259. Springer Science & Business Media.
- Duren, P., 1983. *Univalent Functions*. New York: Springer- verlag.
- Dziok, J., and H.m. Srivastava. "Classes of Analytic Functions Associated with the Generalized Hypergeometric Function." *Applied Mathematics and Computation*, vol. 103, no. 1, 1999, pp. 1–13., doi:10.1016/s0096-3003(98)10042-5.
- Dziok, J., Aouf, M. K., and Sokół, J. 2011. On a subclass of strongly starlike functions. *Appl. Math. Lett.*, 24(1):27–32,
- Garabedian, P. 1986. Problems in mathematical physics connected with the Bieberbach conjecture. *The Bieberbach Conjecture: Proceedings of the Symposium on the Occasion of the Proof Mathematical Surveys and Monographs*, 79-83. doi:10.1090/surv/021/06
- Garbedian, P. R., and Schiffer, M. 1954. A Proof Of The Bieberbach Conjecture For The Fourth Coefficient. doi:10.21236/ad0047020
- Goodman, A. W., *Univalent functions*. Vol.I, II, Mariner Publishing Co., Inc., Tampa, FL, 1983.
- Graham, Ian, and Gabriela Kohr. 2003. *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions by Ian Graham and Gabriela Kohr*. Marcel Dekker, Inc.
- Gronwall, T. H. 1914-1915. *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 16, No. 1/4, pp. 72-76, Published by: Mathematics Department, Princeton University

- Janowski, W. 1970. "Extremal Problems for a Family of Functions with Positive Real Part and for Some Related Families." *Annales Polonici Mathematici*, vol. 23, no. 2, pp. 159–177., doi:10.4064/ap-23-2-159-177.
- Janowski, W. 1973. "Some Extremal Problems for Certain Families of Analytic Functions I." *Annales Polonici Mathematici*, vol. 28, no. 3, pp. 297–326., doi:10.4064/ap-28-3-297-326.
- Kadioğlu, E. ve Kamali, M. (2013) *Genel Matematik*. Erzurum:Kültür Eğitim Vakfı Yayinevi.
- Koebe, P. 1907. Ueber die Uniformisierung reeler algebraischer Kurven. Verlag nicht ermittelbar.
- Littlewood, J. E. 1925. On inequalities in the theory of functions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2(1):481–519.
- Madaan, V., Kumar, A. and Ravichandran V. 2019. Lemniscate Convexity and Other Properties of generalized bessel functions. *Stud. Sci. Math. Hungar.*, 56(4), 404–419.
- Madaan V., Kumar A., and Ravichandran V. 2020. Radii of starlikeness and convexity of some entire functions. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*
- Ma, W. and Minda, D. 1994. A unified treatment of some special classes of univalent functions. In *Proceeding of the Conference on Complex Analysis*, Z. Li, F. Ren, L. Yang and S. Zhang (Eds), Int. Press, pages 157–169.
- Orhan, H., Deniz, E., and Raducanu, D. 2010. Department of Mathematics Faculty of Mathematic and Computer Science, Transilvania University of Brasov, 50091, Iuliu Maniu, 50, Brasov, Romania doi.org/10.1016/j.camwa.2009.07.049.
- Ozawa, M. 1972. A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 24(4), 506–512. doi:10.2996/kmj/1138846641.
- Pederson, R. N. 1968. A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 31(5), 331–351. doi:10.1007/bf00251415.
- Pederson, R., and Schiffer, M. 1972. A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 45(3), 161–193. doi:10.1007/bf00281531.
- Ponnusamy, S., Sabapathy, S. 1997. Geometric Properties of Generalized Hypergeometric Functions. *The Ramanujan Journal* 1, 187–210. doi.org/10.1023/A:1009720202474.
- Pommerenke, C., 1975. *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Rubrecht, Göttingen.
- Szász, R., and Kupán, A, P. About the univalence of the Bessel functions, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 54 (2009), no. 1, 127–132. MR 2486953, doi.org/10.3938/jkps.54.127.
- Sokół, J. 1998. "On Some Subclass Of Strongly Starlike Functions." *Demonstratio Mathematica*, vol. 31, no. 1. doi:10.1515/dema-1998-0111.
- Sokół, J., and Stankiewicz, J., 1996. Radius of convexity of some subclasses of strongly starlike functions, *Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat.*, No. 19, 101–105.

- Sokól, J. 2009. Radius problems in the class S_L^* . *Applied Mathematics and Computation*, 214(2):569–573.
- Singh, V., and Goel, R. M. 1971. On radii of convexity and starlikeness of some classes of functions. *JMSJ*, 23(2), 323–339. doi:10.2969/jmsj/02320323.
- Szász, Róbert. 2014. “About the Radius of Starlikeness of Bessel Functions of the First Kind.” *Monatshefte Für Mathematik*, vol. 176, no. 2, pp. 323–330., doi:10.1007/s00605-014-0708-1.
- Toklu, E. 2019. Radii of starlikeness and convexity of q -Mittag-Leffler functions. *Turk J Math*, 43(5), 2610–2630. doi:10.3906/mat-1907-54.
- Toklu, E. 2020. Radii of starlikeness and convexity of generalized struve functions. *Hacet. J.Math. Stat.*, 49:1216–1233.
- Toklu, E., Aktaş, İ., and Orhan, H. (2019). Radii problems for normalized q -Bessel and Wright functions. *Acta Univ Sapientiae Mathematica*, 11(1): 203–223.
- Toklu, E., and Kara, O. 2020. Radii problems for normalized hyper-Bessel function. *Turkish Journal of Science*, 5:16–22.
- Toklu, E., and N. Karagöz. 2020. On some geometric properties of normalized Wright functions. *Cumhuriyet Sci. J.*, 41(3):625–634.
- Verma, Shelly, and V. Ravichandran. 2017 “Radius Problems for Ratios of Janowski Starlike Functions with Their Derivatives.” *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 40(2):819–840, doi:10.1007/s40840-016-0363-x.