

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Neslihan KARAGÖZ

**NORMALİZE EDİLMİŞ WRIGHT FONKSİYONLARININ BAZI
GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Evrim TOKLU

AĞRI – 2021

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
NORMALİZE EDİLMİŞ WRIGHT FONKSİYONLARININ BAZI GEOMETRİK
ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

Jüri: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. İbrahim AKTAŞ

Doç. Dr. Evrim TOKLU

Bu tezin esas amacı normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının lemniskat yıldızılık, lemniskat konvekslik, Janowski yıldızılık ve Janowski konvekslik yarıçaplarının belirlenmesidir. Ana sonuçlarımızın ispatında kullandığımız temel araçlar Wright fonksiyonunun sonsuz çarpım temsili ile Wright fonksiyonunun ve türevinin reel sıfırlarının bazı özellikleridir.

Yıl 2021, 42 sayfa

Anahtar Kelimeler: Wright fonksiyonu, Bernoulli lemniskat yıldızılık ve Bernoulli lemniskat konvekslik yarıçapları, Janowski yıldızılık ve Janowski konvekslik yarıçapları.

ABSTRACT
MASTER'S THESIS
ON SOME GEOMETRIC PROPERTIES OF NORMALIZED WRIGHT
FUNCTIONS

Jury: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Assoc. Prof. Dr. İbrahim AKTAŞ

Assoc. Prof. Dr. Evrim TOKLU

The main purpose of the present thesis is to determine the radii of Bernoulli lemniscate starlikeness, Bernoulli lemniscate convexity, Janowski starlikeness and Janowski convexity of normalized Wright functions. The key tools in the proof of our main results are the infinite product representation of Wright function and some properties of real zeros of the Wright function and its derivative.

Year 2021, 42 pages

Key Words: Wright function, radii of Bernoulli lemniscate starlikeness and convexity, radii of Janowski starlikeness and convexity.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, büyük bir sabır ve özveriyle bilgi ve tecrübelerini paylaşan değerli danışman hocam Doç. Dr. Evrim TOKLU'ya; tez çalışmama hazırlanma sürecimde içten desteklerini her zaman hissettiren, derslerinden çokça faydalandığım, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Matematik Bölümünün kıymetli hocalarına; süreç boyunca moral ve motivasyonlarıyla her zaman yanımda olan çok sevgili arkadaşlarıma; üzerimdeki emeklerini anlatabilmemin mümkün olmadığı canım babam ve annem, Bayram ve Gülhan KARAGÖZ'e ve biricik kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz 2021

Neslihan KARAGÖZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1.GİRİŞ	1
2.KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Temel Kavramlar	4
2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar.....	5
2.3. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları	10
3.MATERYAL VE YÖNTEM	21
3.1. Subordinasyon	21
3.2. Bernoulli Lemniskat Yıldızıl ve Bernoulli Lemniskat Konveks Fonksiyonlar .	22
3.3. Janowski Yıldızıl ve Janowski Konveks Fonksiyonlar.....	24
3.4. Wright Fonksiyonu	26
4.ARAŞTIRMA BULGULARI	29
4.1. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonları	29
4.2. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonlarının Lemniskat Yıldızılık ve Lem- niskat Konvekslik Yarıçapları	29
4.3. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonlarının Janowski Yıldızılık ve Janowski Konvekslik Yarıçapları.....	35
5.SONUÇ	39
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	45

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Birim diskin Koebe dönüşümü altındaki resmi	9
2.2 Yıldızıl ve konveks küme	11
2.3 0 dan $f(re^{i\theta})$ ya uzanan yarıçap vektörü	12
2.4 $\mathcal{D}_r$ diskinin görüntüsünün konveksliği	14
2.5 $f(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ fonksiyonu altında $\mathcal{D}$ birim diskinin resmi	17
2.6 Konvekse yakın olmayan bölge	17
2.7 $\mathcal{D}$ birim diskinin $H(z) = \frac{1+z}{1-z}$ dönüşümü altındaki resmi	19
3.1 Bernoulli lemniskatı	23
3.2 $\mathcal{D}$ birim diskinin $\phi(z) = \sqrt{1+z}$ dönüşümü altındaki resmi	24

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathcal{D}_r$	: $\{z \in \mathbb{C} : z < r\}$ şeklinde tanımlanmış açık disk
$\mathcal{D}$	: $\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$ birim disk
$\partial\mathcal{D}$	: $\{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$ birim çember
$\mathcal{A}$	: $\mathcal{D}$ birim diskinde tanımlı $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ şeklindeki analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	: $\mathcal{A}$ sınıfındaki ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	: $\mathcal{A}$ sınıfındaki yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	: $\mathcal{A}$ sınıfındaki α mertebeden yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	: $\mathcal{A}$ sınıfındaki konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	: $\mathcal{A}$ sınıfındaki α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
$\prec$	: Subordinasyon
$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^*$	: Lemniskat yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$	: Lemniskat konveks fonksiyonların sınıfı
$S[A, B]$	: Janowski yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$C[A, B]$	: Janowski konveks fonksiyonların sınıfı
$r_{\alpha}^*(f)$	: f fonksiyonunun α mertebeden yıldızlılık yarıçapı
$r_{\alpha}^c(f)$	: f fonksiyonunun α mertebeden konvekslik yarıçapı
$r_{\mathcal{L}}^*(f)$	: f fonksiyonunun lemniskat yıldızlılık yarıçapı
$r_{\mathcal{L}}^c(f)$	: f fonksiyonunun lemniskat konvekslik yarıçapı
$r_{A,B}^*(f)$	: f fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapı
$r_{A,B}^c(f)$	: f fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı
$\arg f(z)$	: $f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\operatorname{Re} f(z)$	: $f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	: $f(z)$ fonksiyonunun imajiner kısmı
$\Gamma(z)$	: Gamma fonksiyonu

1. GİRİŞ

Kompleks analizin önemli bir dalı olan Geometrik Fonksiyon Teorisi, analitik fonksiyonların geometrik özelliklerini incelemektedir. Temelde, analiz ile geometri arasındaki derin bağlantıyı bize sunan bu teori ilk olarak 1851 yılında G.Bernhard Riemann'ın doktora tezinde yer verdiği ve "Riemann Dönüşüm Teoremi" olarak bilinen teorem ile ortaya çıkmıştır. Riemann'ın bu teoremi; en az iki sınır noktasına sahip basit bağlantılı bir $D_1 \subset \mathbb{C}$ bölgesini, herhangi bir basit bağlantılı $D_2 \subset \mathbb{C}$ bölgesine resmeden analitik bir f fonksiyonunun varlığını garantilemektedir. Ancak ispatında birtakım boşlukları bulunan bu teorem, 1912 yılında Paul Koebe'nin " D_1 en az iki sınır noktasına sahip basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in D_1$ olmak üzere, $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olacak şekilde, D_1 bölgesini $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde resmeden, D_1 üzerinde analitik ve ünivalent bir tek f fonksiyonu vardır." şeklindeki teoremi ile daha da sadeleşmiş ve tam ispatı yapılmıştır. Analitik ve ünivalent bir fonksiyon, eğriler arasındaki açılar koruduğundan konform dönüşüm olarak da adlandırılabilir. Riemann dönüşüm teoreminin Koebe tarafından ortaya konulan bu güçlü versiyonu, herhangi bir basit bağlantılı D_1 bölgesinin $\mathcal{D}$ birim diski ile yer değiştirebilmesine olanak sağlamakta olup bu durum bir çok problemin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamıştır.

Tezimiz boyunca $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulu ile normalize edilmiş ve $\mathcal{D}$ birim diskinde analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz. Bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfındaki herhangi bir $f(z)$ fonksiyonunun

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n \quad (1.1)$$

şeklinde bir seri açılımına sahip olacağı açıktır. Ayrıca, $\mathcal{D}$ birim diskinde analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfını $\mathcal{S}$ ile göstereceğiz. Açıkça anlaşılabileceği üzere $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ dır. Normalize edilmiş ünivalent fonksiyonların $\mathcal{S}$ sınıfı göz önüne alındığında bu sınıftaki her bir $f(z)$ fonksiyonu için $|a_n| \leq A_n$, ($n > 2$) olacak biçimde bir A_n sınırı vardır. Esasen, Koebe tarafından böyle bir A_n sınırının varlığının gösterilmesiyle ünivalent fonksiyonlar teorisi yirminci yüzyılın başlarında şekillenmeye başlamıştır. Ardından 1916 yılında Bieberbach tarafından (1.1) deki gibi tanımlanmış $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$|a_n| \leq n, \quad (n \geq 2) \quad (1.2)$$

katsayı tahminini ortaya atılmıştır. Literatürde "Bieberbach Tahmini" olarak bilinen bu tahmin, zengin ve süregelen bir tarihe sahiptir ve birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir.

Bieberbach [23], (1.2) deki katsayı problemini $|a_2| \leq 2$ için ispatladıktan sonra bir dipnotunda geçici olarak, $|a_n| \leq n$ şeklinde genelleştirilebileceğini önermiş ve bu önerme meşhur tahminin kaynağı olarak görülmüştür. Birkaç yıl sonra Loewner yarık eşleştirmelerinin parametrik temsilini geliştirmiş ve bunu $|a_3| \leq 3$ katsayısının kanıtında kullanmıştır. Dördüncü katsayı, $|a_4| \leq 4$ durumu ise yaklaşık otuz yıl sonra Garabedian ve Schiffer [26] tarafından varyasyonel bir yöntemle ispatlanmıştır. Oldukça zor olan bu ispatı Cherezynski ve Schiffer daha da basitleştirmiştir. İspatlardan biri, alan prensibinin doğrudan uzantısı olan Grunsky eşitsizliklerine dayanmaktadır. Bu keşif, 1939 yılında ortaya konulmuş olan Grunsky eşitsizliklerinin dikkatleri yeniden üzerine çekmesini sağlamıştır. 1960'tan bu yana Grunsky eşitsizlikleri, Fitzgerald'ın $|a_n| \leq \sqrt{\frac{7}{6}}n$ katsayı ispatı da dahil olmak üzere bir dizi önemli ilerlemenin temelini oluşturmaktadır. Biz, Bieberbach'ın katsayı tahmini için bulunan sonuçlarda tarihsel bir şekilde ilerlediğimizden 1968 yılında Pederson tarafından yine Grunsky eşitsizliği kullanılarak $|a_6| \leq 6$ sonucunun ispatlandığını görürüz [40]. Birkaç yıl sonra Pederson ve Schiffer, Grunsky eşitsizliklerinin bir genelleştirmesi olan Garabedian-Schiffer eşitsizliklerini kullanarak, $|a_5| \leq 5$ sonucunu ispatladılar [41]. Nihayet 1984 yılında Louis de Branges tarafından, hipergeometrik fonksiyonlar kullanılarak, (1.2) deki katsayı probleminin tüm $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) için doğru olduğu gösterilmiştir [24].

Bieberbach'ın katsayı tahmini üzerine 1916'dan beri yapılan bu zorlu çalışmaların 1984 yılında Branges'in ispatı ile nihayete erdirilmesi, ünivalent fonksiyonların daha da zenginleşmesini sağlamış ve bu alanda çalışan matematikçilerin ünivalent fonksiyonların farklı alt sınıfları üzerine eğilmelerine sebep olmuştur. Ayrıca Branges'in katsayı probleminin ispatında hipergeometrik fonksiyonları kullanması hipergeometrik fonksiyonların geometrik özelliklerinin incelenmesinin yolunu açmıştır. Bilindiği üzere, birçok özel fonksiyon hipergeometrik fonksiyonların özel halleridir. İlk olarak 1732 yılında D. Bernoulli tarafından çalışılan ancak ismini F. W. Bessel (1734-1846) den alan Bessel fonksiyonu da hipergeometrik fonksiyonların özel bir halidir. Bessel fonksiyonlarının geometrik özellikleri birçok matematikçi tarafından ele alınmıştır. İlk olarak 1960 yılında R. K. Brown, Bessel fonksiyonlarının ünivalentliğini incelemiştir. Aynı yıl E. Kreyszing ve J. Todd tarafından Bessel fonksiyonlarının ünivalentlik yarıçapı elde edilmiştir. V. Selinger, 1995 yılında normalize edilmiş Bessel fonksiyonlarının geometrik özelliklerini araştırmıştır. Özel fonksiyonların geometrik özellikleri üzerine çalışmalar hala canlılığını korumakta olup son zamanlarda ortaya konan çalışmalardan bazıları şunlardır: [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19,

20, 21, 49, 50, 51, 52].

Bu tezde, yukarıda verilen özel fonksiyonların geometrik özellikleri üzerine yapılan çalışmalardan ilham alınarak, normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının lemniskat yıldızlılık ve konvekslik ile Janowski yıldızlılık ve konvekslik yarıçapları elde edilmiştir.



2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde kompleks fonksiyonlar teorisinde büyük öneme sahip olan ve tez boyunca faydalanacağımız tanım, teorem ve örnekler yer almaktadır.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1 (r komşuluğu) Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilmiş olsun. Bu durumda z_0 noktasının r komşuluğu, $\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ olarak tanımlanan kümedir.

Bir $\mathcal{D}(z_0, r)$ komşuluğu verildiğinde $\mathcal{D}(z_0, r) - \{z_0\} = N_0$ kümesine z_0 ın delinmiş komşuluğu denir. $\mathcal{D}(z_0, r)$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk de denildiği gibi $\overline{\mathcal{D}}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ kümesine kapalı disk denir. Bu çalışma boyunca $\mathcal{D}$ ile göstereceğimiz orijin merkezli, bir birim yarıçaplı diske ise birim disk denir.

Tanım 2.2 (Yığılma Noktası) $S \subset \mathbb{C}$ boştan farklı bir küme ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer her $\mathcal{D}(z_0, r)$ komşuluğunda S 'nin z_0 'dan farklı bir z noktası varsa z_0 , S 'nin bir yığılma noktasıdır denir.

Tanım 2.3 (İç Nokta) Bir $z \in S \subset \mathbb{C}$ noktası için, $\mathcal{D}(z, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ varsa z , S 'nin bir iç noktasıdır denir.

Tanım 2.4 (Açık Küme) $S \subset \mathbb{C}$ verilmiş olsun. Eğer her $z \in S$ noktası S 'nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 2.5 (Kapalı Küme) $S \subset \mathbb{C}$ verilmiş olsun. S kümesinin tümleyeni açık ise S kapalı kümedir denir.

Tanım 2.6 (Bağlantılı Küme [22]) Bir $S \subset \mathbb{C}$ verilsin. $S \subseteq A_1 \cup A_2$, $S \cap A_1 \neq \emptyset$, $S \cap A_2 \neq \emptyset$ ve $S \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset$ olacak şekilde boştan farklı ayrık ve açık A_1 ve A_2 kümeleri bulunamıyor ise S kümesine bağlantılı küme denir.

Buradan görülüyor ki, bağlantılı bir S kümesinin herhangi iki noktası S içinde kalacak bir kırık çizgiyle birleştirilebilir.

Benzer şekilde $S \subseteq A_1 \cup A_2$, $S \cap A_1 \neq \emptyset$ ve $S \cap A_2 \neq \emptyset$ olacak şekilde ayrık ve açık A_1 ve A_2 kümeleri varsa S kümesi bağlantısız kümedir denir.

Tanım 2.7 (Bölge) *Kompleks düzlemde bağlantılı açık kümeye bölge denir.*

Tanım 2.8 (Limit) f , z_0 in delinmiş bir komşuluğunda tanımlı olsun ve bir $w_0 \in \mathbb{C}$ sayısı verilsin. Eğer herhangi bir $\epsilon > 0$ için $0 < |z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - w_0| < \epsilon$ olacak biçimde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ varsa f nin z_0 daki limiti w_0 dır denir ve

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.9 (Süreklilik [22]) $S \subseteq \mathbb{C}$ olmak üzere, $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Eğer herhangi bir $\epsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(z_0, \epsilon) > 0$ sayısı varsa f , z_0 noktasında süreklidir denir.

Bir başka ifadeyle, $S \subseteq \mathbb{C}$ kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu ve S kümesinin bir yığılma noktası olan $z_0 \in S$ noktası için, $f(z_0) \neq \infty$ ve $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ ise f , z_0 da süreklidir denir. Buradan, bir $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu S kümesinin her noktasında sürekli ise f , S üzerinde süreklidir denir.

Tanım 2.10 (Diferansiyellenebilme [22, 55]) f fonksiyonu $z_0 \in S$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $f'(z_0)$ sayısına f nin z_0 daki türevi denir. Yani $f'(z_0)$ değeri,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olarak tanımlanır.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölüme kadar bazı temel topolojik kavramların tanımları ve karmaşık fonksiyonların bir noktada diferansiyellenebilirliği verildi. Şimdi ise herhangi bir z_0 noktasının bir komşuluğundaki tüm noktalarında diferansiyellenebilen fonksiyonlardan bahsedeceğiz.

Tanımını aşağıda vereceğimiz bu fonksiyonlar analitik fonksiyonlar olarak adlandırılır ve kompleks analizin temel konusunu oluştururlar. Bundan böyle elde edeceğimiz tüm sonuçlar doğrudan veya dolaylı olarak analitik fonksiyonlara bağlı olacaktır.

Tanım 2.11 (Analitik Fonksiyonlar) *Bir f fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $\mathcal{D}(z_0, r)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa, f, z_0 da analitiktir (holomorfiktir) denir.*

Eğer bir f karmaşık fonksiyonu bir D bölgesinin tüm noktalarında analitik ise f, D de analitiktir denir. Ayrıca, bu çalışmamız boyunca, (1.1) deki gibi normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz. Buradan $\mathcal{A}$ sınıfı

$$\mathcal{A} = \{f : f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n \text{ ve } f(z), \mathcal{D} \text{ de analitik}\}$$

kümesi ile verilir.

Tanım 2.12 (Tam Fonksiyon) *f fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitikse, f ye tam fonksiyon denir.*

Tanım 2.13 (Eğri) *$[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir.*

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eğrisi $\mathbb{C}$ düzleminde parametrik olarak $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.14 (Kapalı Eğri) *$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ bir eğri olmak üzere, $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.*

Tanım 2.15 (Basit Eğri) *U_γ noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğriler denir.*

Bir eğri hem basit hem de kapalı olabilir ki böyle eğrilere basit kapalı eğri (Jordan eğrisi) denir.

Tanım 2.16 (Düzgün ve Parçalı Düzgün Eğri) *i. $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ eğrisi verilmiş olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir.*

ii. $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ eğrisi verilmiş olsun. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ olmak üzere $\mathbb{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $[a, b]$ aralığının sonlu bölüntüsü olsun. γ nun $[x_{k-1}, x_k]$ aralıklarına kısıtlanması bir düzgün eğri olacak şekilde sonlu bir $\mathbb{P}$ bölüntüsü varsa γ eğrisine parçalı düzgün eğri (veya çevre veya yol) denir.

Teorem 2.1 (Cauchy Türev Formülü) $w = f(z)$ fonksiyonu bir γ kapalı çevresinin içinde ve üzerinde analitik olsun. Eğer z_0, γ nın içinde bir nokta ise, $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dir.

Teorem 2.2 (Taylor Serisi) f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitikse bu noktanın bir komşuluğundaki z ler için geçerli olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

serisine $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının bir komşuluğundaki Taylor serisi denir.

Tanım 2.17 (Singüler Nokta) $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 da analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun bir singüler (tekil) noktası denir.

Singüler noktalar, ayırık ve ayırık olmayan singüler noktalar şeklinde iki kısma ayrılır. Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $\mathcal{D}(z_0, r) - z_0$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 da analitik değilse z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun ayırık singüler noktası denir. Ve $z_0, w = f(z)$ fonksiyonunun bir singüler noktası olmak üzere, $w = f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının her $\mathcal{D}(z_0, r) - z_0$ delinmiş komşuluğunda en az bir singüler noktası varsa z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir ayırık olmayan singüler noktası denir.

Tanım 2.18 (Laurent Serisi) $w = f(z)$ fonksiyonu $A = \{z : s_1 < |z - z_0| < s_2\}$ komşuluğunda analitik olmak üzere,

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

serisine $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent serisi denir.

Burada $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ ve $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ serilerine, sırasıyla, Laurent serisinin esas ve analitik kısmı denir.

Tanım 2.19 (Kutup Noktası) $z_0, f(z)$ nin bir ayırık noktası olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonunun Laurent açılımındaki b_n katsayılarının sonlu tanesi hariç diğerlerinin tümü sıfıra eşit ise veya bir başka deyişle açılımın esas kısmında sonlu sayıda terim varsa $z_0, f(z)$ nin bir kutup noktasıdır denir.

Tanım 2.20 (Meromorf Fonksiyon) Bir $f(z)$ fonksiyonunun bir A bölgesindeki singüler noktaları sadece kutup noktaları ise $f(z), A$ da bir meromorf fonksiyondur denir.

Teorem 2.3 (Maksimum Modül Teoremi) $f(z)$ fonksiyonu bir A bölgesinde analitik olsun. Eğer $|f(z)|$, A da maksimum değer alıyorsa, $f(z)$ sabittir.

Teorem 2.4 Sınırlı bir A bölgesi ve sabit olmayan bir $f(z)$ fonksiyonu bu bölgenin sınırında sürekli, içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$, maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Teorem 2.5 (Minimum Modül Teoremi) $f(z)$, A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ ise $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz.

f , A nın sınırında sürekli ve A bölgesinde hiçbir yerde sıfır olmayan analitik bir fonksiyon ise $|f(z)|$, minimum değerini A nın sınırında alır.

Teorem 2.6 (Schwarz Lemması [25]) $f : \mathcal{D} = \{z : |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ birim diskinde analitik, $z \in \mathcal{D}$ için $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda $z \in \mathcal{D}$ noktaları için

$$|f(z)| \leq |z| \text{ ve } |f'(0)| \leq 1$$

dir.

Ayrıca $z_0 \in \mathcal{D}$ ($z_0 \neq 0$) için $|f(z_0)| = |z_0|$ ise $c, |c| = 1$ özelliğinde bir sabit olmak üzere, $f(z) = cz$ biçimindedir.

Tanım 2.21 (Ünivalent Fonksiyon [43, 27]) $f, A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ iken $z_1 = z_2$ oluyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyorsa) f fonksiyonu A bölgesinde ünivalenttir (yalnıkat veya schlicht) denir.

Bu çalışmamız boyunca (1.1) deki gibi normalize edilmiş, $\mathcal{D}$ birim diskinde analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfını $\mathcal{S}$ ile göstereceğiz. Yani,

$$\mathcal{S} = \{f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} : f(z), \mathcal{D} \text{ de analitik, ünivalent, } f(0) = 0 \text{ ve } f'(0) = 1\}$$

Geometrik olarak, bir ünivalent fonksiyon basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Analitik ve ünivalent fonksiyonlar ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere resmeder.

Teorem 2.7 $f, A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve ünivalent bir fonksiyon olmak üzere, her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ dır.

İspat $z_0 \in \mathcal{A}$ ve $f(z_0) = w_0$ olsun. Bu durumda, z_0 noktasının $f - w_0$ ın sıfırı olduğu görülür. Ayrıca, f ünivalent olduğundan $f - w_0 \neq 0$ dır ve f analitik olduğundan z_0 noktası $f(z) - w_0$ ın izole edilmiş bir sıfırır. Dolayısıyla, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, bazı $\mathcal{D}(z_0, r)$ disklerinde analitik ve sıfırdan farklı bir G fonksiyonu için, $f(z) - w_0 = (z - z_0)^n G(z)$ şeklindedir. Riemann Dönüşüm Teoreminden, $G = g^n$ ve $g(z_0) \neq 0$ olacak biçimde bir g analitik fonksiyonu vardır. Buradan, $f(z) - w_0 = [(z - z_0)g(z)]^n$ olur. $h(z) = (z - z_0)g(z)$ diyelim, $f(z) - w_0 = h^n(z)$ olur. Ters Fonksiyon Teoremine göre, $h'(z_0) = g(z_0) \neq 0$ olduğundan h yerel olarak ünivalenttir ve dolayısıyla f de yerel olarak ünivalent olur. Ancak f ünivalent olduğundan $f'(z_0) = h'(z_0) \neq 0$ elde edilir.

$\mathcal{S}$ sınıfına ait en önemli fonksiyon örneklerinden biri, aşağıdaki şekilde tanımlanan ve ünivalent fonksiyonlar teorisinde de çok önemli bir yere sahip olan

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$$

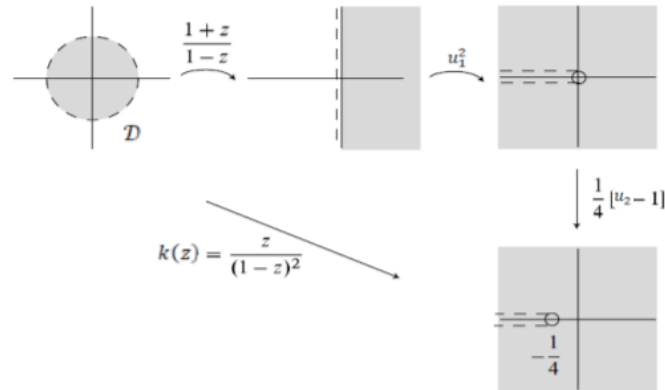
Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyon altında $\mathcal{D}$ birim diskinin görüntüsünü bulmak için Koebe fonksiyonu

$$k(z) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$$

şeklinde düzenlenir ve

$$u_1(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad u_2(z) = u_1^2(z) \text{ ve } u_3(z) = \frac{1}{4}[u_2(z) - 1]$$

denirse, $k(z) = (u_3 \circ u_2 \circ u_1)(z)$ olduğu görülür. Burada u_1 , Möbiüs dönüşümüdür ve $\mathcal{D}$ birim diskini, sınırı imajiner eksen olan sağ yarı düzleme; u_2 , u_1 in karesi dönüşümüdür ve sağ yarı düzlemi, negatif reel eksen boyunca uzanan yarık hariç tüm kompleks düzleme resmeder. u_3 ise bu son bölgeyi bir birim sola öter ve $\frac{1}{4}$ ile çarpar.



Şekil 2.1. Birim diskin Koebe dönüşümü altındaki resmi

$\mathcal{S}$ sınıfına ait diğer temel fonksiyon örnekleri şu şekildedir:

- i. $f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$ fonksiyonu, $\mathcal{D}$ birim diskini $\{w = u + iv : \operatorname{Re}(w) > -1/2\}$ kümesine resmeder.
- ii. $f(z) = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \dots$ fonksiyonu, $\mathcal{D}$ birim diskini $\mathbb{C} - \{(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty)\}$ bölgesine resmeder.
- iii. $f(z) = \frac{1}{2} \log(\frac{1+z}{1-z})$ fonksiyonu, $\mathcal{D}$ birim diskini $\{-\pi/4 < \operatorname{Im}(w) < \pi/4\}$ şeridine resmeder.
- iv. $f(z) = 1 - \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}[1 - (1-z)^2]$ fonksiyonu, $\mathcal{D}$ birim diskini bir kardioidin içine resmeder.

$\mathcal{S}$ sınıfına ait herhangi iki fonksiyonun toplamının $\mathcal{S}$ sınıfına ait olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu ile $g(z) = \frac{z}{1+iz}$ fonksiyonu, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyon olup bu fonksiyonların toplamının $\frac{1}{2}(1+i)$ noktasındaki türevinin sıfır olduğu basit bir hesaplamayla görülebilir. Dolayısıyla Teorem 2.7 ışığında, toplam fonksiyonunun $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmadığı söylenebilir [1]. Ancak, $\mathcal{S}$ sınıfı aşağıda listelenen bazı temel dönüşümler altında korunur:

- a. Eşlenik. $f \in \mathcal{S}$ olmak üzere, $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \overline{a_3}z^3 + \dots$ şeklinde tanımlanan g fonksiyonu da $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.
- b. Dönme. $f \in \mathcal{S}$ ve $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ olmak üzere, $g \in \mathcal{S}$ dir.
- c. Disk Otomorfizmi. $f \in \mathcal{S}$ ve

$$g(z) = \frac{f(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}) - f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2) \cdot f'(\alpha)}, \quad |\alpha| < 1$$

olmak üzere, $g \in \mathcal{S}$ dir.

2.3. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

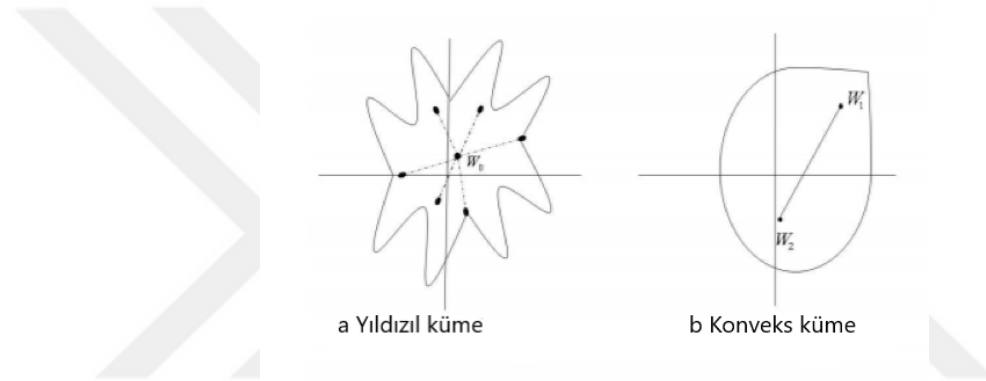
Ünivalent fonksiyonların bazı özel alt sınıfları geometrik özellikleri nedeniyle geometrik fonksiyonlar teoresinde önemli bir role sahiptirler. Bu kısımda ünivalent fonksiyonların bu özel alt sınıflarından bazılarını vereceğiz.

Tanım 2.22 (Yıldızıl Küme) $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin ve $w_0 \in B$ olsun. Bu durumda, her $w \in B$ için $\{(1-t)w + tw_0\} \subseteq B$ ise B kümesine w_0 noktasına göre yıldızıl (starlike veya star-shaped) küme denir.

Yani, B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her bir $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. Bir başka ifadeyle, $w_0 \in B$ noktasından çıkan her bir ışın B kümesinin sınırını bir tek noktada kesiyorsa B ye yıldızıl küme denir. Eğer w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir (bakınız Şekil 2.2a).

Tanım 2.23 (Konveks Küme) $B \subset \mathbb{C}$ verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için $\{tw_1 + (1-t)w_2\} \subseteq B$ ise B kümesine konveks küme denir.

Bu tanım geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme adı verilir (bakınız Şekil 2.2b).



Şekil 2.2. Yıldızıl ve konveks küme

Tanım 2.24 (Yıldızıl Fonksiyon [29]) Bir $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ birim diskini $f(z_0) = w_0$ noktasına göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel olarak, $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ birim diskini orijine göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir.

Yıldızıl fonksiyonların sınıfını $\mathcal{S}^*$ ile göstereceğiz. O halde, $\mathcal{S}^*$ sınıfını analitik olarak aşağıdaki gibi verebiliriz:

Teorem 2.8 ([33]) $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu verilmiş olsun. f nin yıldızıl fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0, \quad z \in \mathcal{D}$$

olmasıdır.

İspat $f \in \mathcal{S}^*$ olsun. Tanım 2.24 den dolayı $f(\mathcal{D})$ orijine göre yıldızıldır. $0 \leq \theta < 2\pi$ ve $r < 1$ olacak şekilde bir $z = re^{i\theta}$ noktası alalım. $\theta \in [0, 2\pi)$ olduğundan, $w = 0$ dan

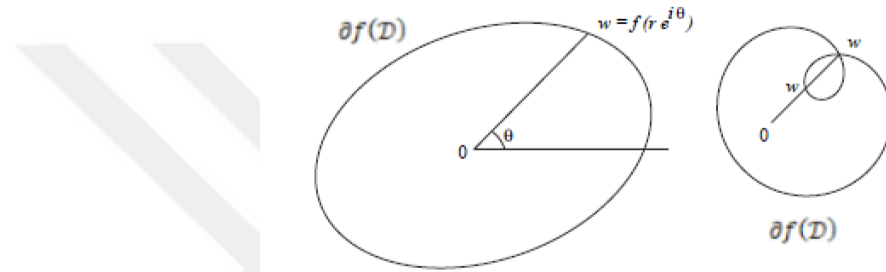
$w = f(re^{i\theta})$ a yarıçap vektörü $f(\mathcal{D})$ içinde yer alır. Böylece $\arg \{f(re^{i\theta})\}$ nın, θ nın artan bir fonksiyonu olduğu görülür. Aksi halde, yarıçap vektörü $\partial f(\mathcal{D})$ üzerinde en az iki noktada kesişir (Bakınız Şekil 2.3).

$\frac{\partial}{\partial \theta} \{\arg \{f(re^{i\theta})\}\} > 0$ olduğundan $\arg \{f(re^{i\theta})\}$, θ ya göre artan bir fonksiyondur.

$\log f(re^{i\theta}) = \log |f(re^{i\theta})| + i \arg f(re^{i\theta})$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) eşitliğinden, $\frac{\partial}{\partial \theta} \{\operatorname{Im}\{\log f(re^{i\theta})\}\} > 0$ olur. Buradan,

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} i re^{i\theta} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} re^{i\theta} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

elde edilir.



Şekil 2.3. 0 dan $f(re^{i\theta})$ ya uzanan yarıçap vektörü

$f \in \mathcal{S}$ olduğundan, $f'(0) \neq 0$, $f(0) = 0$ ve 0 noktasının f için bir kutup noktası olmadığını biliyoruz. Argüment ilkesi gereği $f(0) = 0$ (ve 0 kutup noktası değil) ise, $\partial \mathcal{D}_r$ nin orijin etrafında sadece bir tam tur attığı sonucuna ulaşılır. Ayrıca $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$ şartı, $\arg \{f(z)\}$ nin, $\arg \{z\}$ nin bir artan fonksiyonu olduğunu gösterir. Bir başka deyişle $\arg \{z\}$ arttıkça $\arg \{f(z)\}$ artar. Böylece, $\partial \mathcal{D}_r$ nin bir basit kapalı eğri olduğu görülür. Yani $\mathcal{D}_r$, orijine göre yıldızlıdır. O halde, $f \in \mathcal{S}^*$ elde edilir [33].

$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0$ şartını, $\arg \{f(z)\}$, $\arg \{z\}$ nin artan bir fonksiyonudur şeklinde geometrik olarak yorumlamak mümkündür. Yani, $\arg \{z\}$ arttıkça $\arg \{f(z)\}$ de artar. Ayrıca, bu şartın sağlanması $f(\mathcal{D})$ nin yıldızlı bir bölge olmasını gerektirir ancak f nin ünivalentliğini garanti etmez. Örneğin $f(z) = z^2$ fonksiyonunu ele alalım. $\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) = 2 > 0$ ve $f(0) = 0$ olmasına rağmen $f(z) = z^2$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ diskinde ünivalent değildir. Ayrıca, $\mathcal{D}$ birim diskini yıldızlı bir bölgeye resmeden ünivalent olmayan bir fonksiyonun orijindeki türevi sıfır olur. Şunu da vurgulayalım ki, $f(z) = z^2 \notin \mathcal{S}$ dir.

Teorem 2.9 $f(z)$ fonksiyonu (1.1) deki gibi seri açılımına sahip $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. O halde, $|a_n| \leq n$, ($n = 2, 3, \dots$) dir.

Yukarıda verilen teorem 1920 yılında Nevanlinna tarafından ifade ve ispat edilmiştir. Bu teorem $\mathcal{S}^*$ sınıfındaki fonksiyonlar için Bieberbach tahmininin doğruluğunu göstermesi açısından son derece önemlidir. Esasen, bu teoremden sonra Bieberbach tahmininin doğru olduğuna dair umutlar artmıştır. Ancak, birinci bölümde ayrıntılarıyla ifade edildiği üzere, bu teoremden çok uzun yıllar sonra Bieberbach tahmininin $\mathcal{S}$ sınıfından fonksiyonlar için de doğruluğu gösterilebilmiştir. Şimdi, $\mathcal{S}^*$ sınıfının en önemli alt sınıflarından biri olan α mertebeden yıldızlı fonksiyonların sınıfını vereceğiz. Bu sınıf, ilk olarak, 1936 yılında M. S. Robertson tarafından çalışılmıştır.

Teorem 2.10 $f(z) \in \mathcal{S}$ olsun. O halde, $f(z)$ fonksiyonunun $0 \leq \alpha < 1$ olacak şekilde α mertebeden yıldızlı olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha, \quad z \in \mathcal{D}$$

olmasıdır.

α mertebeden yıldızlı fonksiyonların sınıfını $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile göstereceğiz. Bu halde, $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfının küme gösterimi

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{S} : \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha, \quad z \in \mathcal{D} \right\}$$

olur.

Açıkça görülebileceği üzere, $\alpha = 0$ için, $\mathcal{S}^*(0) \equiv \mathcal{S}^*$ dır. Yani, $\mathcal{S}^*(\alpha) \subseteq \mathcal{S}^*(0) \equiv \mathcal{S}^*$ dir.

Tanım 2.25 (Konveks Fonksiyon) Eğer bir $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ birim diskini konveks bir kümeye resmediyorsa bu f fonksiyonuna konveks fonksiyon adı verilir. Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem konveks fonksiyonların analitik tasvirini vermektedir.

Teorem 2.11 ([29]) $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0, \quad z \in \mathcal{D}$$

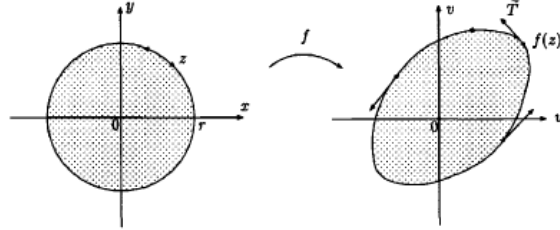
olmasıdır.

İspat $f \in \mathcal{S}$ olduğundan, ünivalent ve $f'(0) \neq 0$ dır. Biz $f(\mathcal{D}_r)$ görüntüsünün tüm $r \in (0, 1)$ için konveks olduğunu gösterelim. Bu amaçla $r \in (0, 1)$ olmak üzere, $z_2 \neq 0, |z_1| \leq |z_2|$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in \mathcal{D}_r$ alalım ve $0 \leq t \leq 1$ olsun. $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ fonksiyonu,

$$g(z) = f^{-1} \left((1-t)f \left(\frac{z_1}{z_2} z \right) + tf(z) \right), \quad z \in \mathcal{D}$$

şeklinde tanımlansın.

f konveks olduğundan, g fonksiyonu $\mathcal{D}$ üzerinde iyi tanımlı ve analitik bir fonksiyondur. Ayrıca, $g(0) = 0$ olduğundan ve Schwarz Lemmmasından dolayı $z \in \mathcal{D}$ için $|g(z)| \leq |z|$ dir. $z = z_1$ alırsak $|g(z_2)| \leq |z_2| < r$ ve $(1-t)f(z_1) + tf(z_2) \in f(\mathcal{D}_r)$ olur ve buradan $f(\mathcal{D}_r)$ nin konveks olduğu görülür.



Şekil 2.4. $\mathcal{D}_r$ diskinin görüntüsünün konveksliği

$|z| = r$ eğrisini Γ_r ile gösterelim. Burada Γ_r , içi konveks olan pozitif odaklı bir basit kapalı eğridir. Ayrıca bu eğri $w = f(re^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ parametrik denklemi ile gösterilir. $f(\mathcal{D}_r)$ konveks olduğundan, Γ_r eğrisinin teğet vektörünün argümanı, $\theta \in [0, 2\pi]$ için azalmayan bir fonksiyondur. O halde,

$$\psi(\theta) = \arg \left[\frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right] = \arg [ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})],$$

ve $\theta \in [0, 2\pi]$ için $\psi'(\theta) \geq$ veya

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im} [\log(izf'(z))] \geq 0, \quad z = re^{i\theta}$$

olmalıdır. Basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im} [\log(izf'(z))] &= \operatorname{Im} \left[i \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right], \quad z = re^{i\theta} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla,

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] \geq 0, \quad |z| = r.$$

Analitik fonksiyonlar için minimum prensibini dikkate aldığımızda

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0, \quad z \in \mathcal{D}_r$$

olduğu görülür ve r keyfi olduğundan

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0, \quad z \in \mathcal{D}$$

elde edilir.

Yıldızıl ve konveks fonksiyonlar arasında önemli ve oldukça kullanışlı bir ilişki vardır. Bu ilişki ilk olarak J. W. Alexander tarafından verilmiştir.

Teorem 2.12 $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyon olsun. O halde, f nin konveks olması için gerek ve yeter şart, zf' nin yıldızıl olmasıdır.

İspat $\mathcal{D}$ birim diskinde $f'(z) \neq 0$ olmak üzere

$$F(z) = zf'(z)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Basit bir hesaplama ile

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = z \frac{f'(z) + zf''(z)}{zf'(z)}$$

ve böylece $F(z) \neq 0$ için

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \quad (2.1)$$

elde edilir. Eğer $f(z)$ orijinde k' nci mertebeden sıfıra sahipse, o zaman (2.1) deki ifadenin her ikisi orijinde analitik olur. Bu durumda

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zF'(z)}{F(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem 1917 yılında Loewner tarafından ifade ve ispat edilmiş olup Bieberbach tahmininin konveks fonksiyonların $\mathcal{C}$ sınıfı için doğruluğunu göstermesi bakımından önemlidir.

Teorem 2.13 $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n \in \mathcal{C}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu halde, $|a_n| \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$) dir.

İspat Teorem 2.12 den,

$$zf'(z) = z + \sum_{n \geq 2} na_n z^n \in \mathcal{S}^*$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, $|na_n| \leq n$ sonucuna ulaşılır ki buradan, $|a_n| \leq 1$ elde edilir.

Bu teorem için birim diski konveks bir bölgeye resmeden $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu ekstremal fonksiyondur. Dikkat edilecek olursa, $zf'(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu Koebe fonksiyonudur. Koebe fonksiyonu $\mathcal{S}^*$ sınıfı için ekstremal fonksiyondur. Ayrıca, $f \in \mathcal{S}$ (ya da $f \in \mathcal{S}^*$) için $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}(0, 1/4)$ iken $f \in \mathcal{C} \Rightarrow f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}(0, 1/2)$ dir.

Teorem 2.14 $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer, $0 \leq \alpha < 1$ için,

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha, \quad z \in \mathcal{D}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna α mertebeden konveks fonksiyon denir.

α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}(\alpha)$ ile gösterilir. Konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}(\alpha)$ arasında $\mathcal{C}(\alpha) \subseteq \mathcal{C}(0) \equiv \mathcal{C}$ bağıntısı vardır.

Aşağıdaki teorem, konveks ve yıldızlı fonksiyon sınıfları arasında var olan Alexander bağıntısının, α mertebeden yıldızlı ve konveks fonksiyonlar sınıfı için de geçerli olduğunu göstermesi bakımından oldukça önemlidir.

Teorem 2.15 $f(z) \in \mathcal{C}(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ olmasıdır.

Tüm bu incelemelerin ışığında şu önemli çıkarımı yapabiliriz; $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{S}$ fonksiyon sınıfları arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ şeklinde bir kapsama bağıntısı da vardır.

Tanım 2.26 (Konvekse yakın (close-to-convex) fonksiyon [32, 39]) $f(z)$ ve $\phi(z)$ fonksiyonları $\mathcal{D}$ de analitik olsun. Eğer $\mathcal{D}$ birim diskinde

$$\operatorname{Re} \left[\frac{f'(z)}{\phi'(z)} \right] > 0 \quad z \in \mathcal{D} \quad (2.2)$$

şartını sağlayan konveks bir $\phi(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$ fonksiyonuna konvekse yakın (close-to-convex) fonksiyon denir.

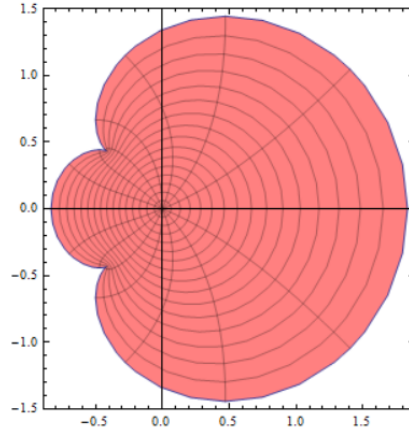
İhtiyaç duyulması halinde Teorem 2.11 denkleminin Teorem 2.12 kullanılarak $h(z)$, $\mathcal{D}$ de yıldızlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{h(z)} \right] > 0, \quad z \in \mathcal{D}$$

şartı ile değiştirilebileceği açıktır. $\mathcal{D}$ birim diskinde normalize edilmiş konvekse yakın fonksiyonların sınıfını $\mathcal{K}$ ile göstereceğiz.

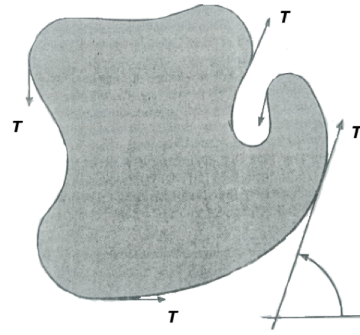
Böylece $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ birim diskinde yıldızlı bir fonksiyon ise $f(z)$ nin aynı zamanda konvekse yakın (close-to-convex) fonksiyon olduğunu görmek kolaydır. Bu ifadenin tersinin doğru olmadığına dikkat çekmek önemlidir. Gerçekten; $f(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ konvekse yakın fonksiyon olduğu halde yıldızlı fonksiyon değildir (bakınız Şekil 2.5).

Geometrik olarak konvekse yakın fonksiyonu şu şekilde ifade etmek mümkündür: $f(z)$ fonksiyonunun konvekse yakın olması için gerek ve yeter koşul $\partial\mathcal{D}_r : |z| = r$ nin $f(z)$ altındaki görüntüsünün "büyük firkete" dönüşlere sahip olmamasıdır; yani, $f(\partial\mathcal{D}_r)$ eğrisinin



Şekil 2.5. $f(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ fonksiyonu altında $\mathcal{D}$ birim diskinin resmi

herhangi bir bölümünde teğet vektörünün geri dönüş açısı $\geq \pi$ olmamalıdır (bakınız Şekil 2.5). Eğer $f(z)$, $\mathcal{D}$ birim diskini Şekil 2.6 de gösterilen bölge üzerine resmeden bir fonksiyon ise, T nin π den daha fazla geriye döndüğü bir yayı olduğundan $f(z)$ konvekse yakın bir fonksiyon değildir.



Şekil 2.6. Konvekse olmayan bölge

Teorem 2.16 (Noshiro-Warschawski Teoremi [25]) $f(z)$ konveks D bölgesinde analitik bir fonksiyon ve bu bölgede $\text{Re}(f'(z)) > 0$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde ünivalenttir.

Noshiro-Warschawski Teoreminin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2.17 ([25]) Her konvekse yakın fonksiyon ünivalenttir.

Yukarıda verilen ünivalent fonksiyonların $\mathcal{S}$ sınıfı ile onun alt sınıfları arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ ilişkisi vardır.

Şimdi geometrik fonksiyonlar teoresindeki birçok problemin çözümünde oldukça önemli bir yere sahip olan pozitif reel kısımlı fonksiyonların sınıfını vereceğiz.

$g(z)$ fonksiyonun $\mathcal{D}$ birim diskinde analitik olduğunu ve $g(\mathcal{D})$ nin kompleks düzlemin bazı açık yarı düzleminde yer aldığını varsayalım. Esasen bu tür fonksiyonlarla ilgili olarak pek çok soru-cevap türetilir. Ünivalent fonksiyonlardaki çalışmalarda olduğu gibi bu türden fonksiyonlar için de bir normalizasyon vermek yerinde olacaktır. Şimdi, keyfi yarı düzlem yerine $H^+ : \operatorname{Re}(w) > 0$ sağ yarı düzlemini ele almayı, normalize edilmiş $f(z)$ fonksiyonu için $f(0) = 1$ olmasını istiyoruz. Bu normalizasyonu elde etmek için $g(\mathcal{D})$ nin $L : w = A + te^{i\alpha}$ çevresi tarafından sınırlandırılmış açık yarı düzlemde yer aldığını varsayalım. Burada, t ve α reel sayılar, L çevresi t nin $-\infty$ dan ∞ a artması ile tanımlanmış mutabakatla yönlendirilmiş ve $g(\mathcal{D})$, L nin sağında yer alır. Bu koşullar altında, $h(\mathcal{D})$ H^+ sağ yarı düzleminde yer alan $h(z) = e^{-i\alpha}(g(z) - A)$ fonksiyonunun ele alalım. $h(0) = C + iD$ olsun. Burada, $h(\mathcal{D}) \subset H^+$ olduğundan $C > 0$ olduğu açıktır. Sonuç olarak, eğer $f(z) = \frac{h(z) - iD}{C}$ fonksiyonunu tanımlarsak $f(\mathcal{D}) \subset H^+$ ve $f(0) = 1$ şartlarını sağlayan normalize edilmiş fonksiyonumuzu elde etmiş oluruz.

Tanım 2.27 $\mathcal{D}$ birim diskinde $p(0) = 1$ ve $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ koşullarını sağlayan

$$p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \cdots + p_nz^n + \cdots = 1 + \sum_{n \geq 1} p_nz^n$$

şeklinde seri açılımına sahip olan $\mathcal{D}$ de analitik tüm fonksiyonların oluşturduğu sınıfa pozitif reel kısma sahip fonksiyonların sınıfı ya da Carathéodory sınıfı adı verilir ve bu sınıf $\mathcal{P}$ ile gösterilir.

$\mathcal{P}$ sınıfındaki herhangi bir fonksiyon, $\mathcal{D}$ de pozitif reel kısımlı fonksiyon olarak isimlendirilir. Burada $\mathcal{P}$ sınıfındaki bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmeyeceğini vurgulamak önemlidir. Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ ($n \geq 0, n \in \mathbb{N}$) $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \geq 2$ için ünivalent değildir.

Bu açıklamaların ardından $\mathcal{P}$ sınıfı ile ünivalent fonksiyonlar arasında yakın bir ilişki olduğunu gözlemlemek oldukça önemlidir. Bu ilişkilerden bazıları aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.18 ([43]) $f(z)$ analitik fonksiyonunun $\mathcal{D}$ birim diskinde yıldızlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$$

olmasıdır.

Teorem 2.19 ([43]) $f(z)$ analitik fonksiyonunun $\mathcal{D}$ birim diskinde konveks olması için gerek ve yeter koşul

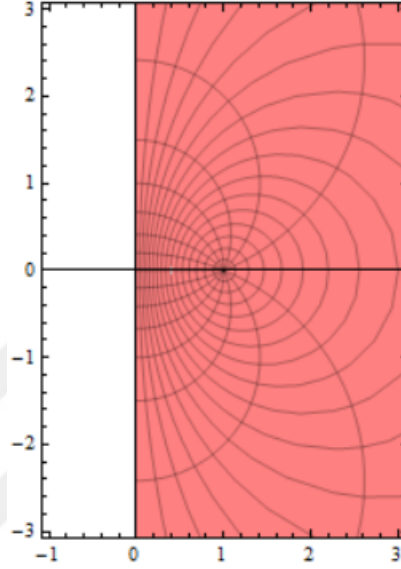
$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

olmasıdır.

$\mathcal{S}$ sınıfında Koebe fonksiyonunun oynadığı önemli rolde olduğu gibi $\mathcal{P}$ sınıfında da

$$H(z) = \frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{1-z} - 1 = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + \dots$$

fonksiyonu çok önemli bir role sahiptir. Bu fonksiyon $\mathcal{D}$ birim diskini H^+ sağ yarı düzleme resmeden Mobius dönüşümü olarak bilinir (bakınız Şekil 2.7).



Şekil 2.7. $\mathcal{D}$ birim diskini $H(z) = \frac{1+z}{1-z}$ dönüşümü altındaki resmi

Tanım 2.28 (Ünivalentlik Yarıçapı) $f \in \mathcal{A}$ verilmiş olsun. f fonksiyonu $\mathcal{D}_\rho$ diskinde ünivalent olacak şekilde belirlenen en büyük ρ_0 reel sayısına f fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı denir.

Tanım 2.29 (Yıldızlılık Yarıçapı) f fonksiyonu (1.1) deki gibi tanımlanmış olsun. O halde, $0 \leq \alpha < 1$ için,

$$r_\alpha^*(f) = \sup \left\{ r > 0 : \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha, \quad z \in \mathcal{D}_r \right\} \quad (2.3)$$

reel sayısına f fonksiyonunun α mertebeden yıldızlılık yarıçapı denir.

Bu tanıma göre $r_\alpha^*(f)$ biçiminde gösterdiğimiz bu yarıçap $w = f(z) \in \mathcal{S}$ fonksiyonu altında orijine göre yıldızlı bir bölgeye resmedilen $\mathcal{D}_r$ çemberlerinin r yarıçapları için bir üst sınırdır. Ayrıca, $r_0^*(f) = r^*(f)$ reel sayısı, $f(\mathcal{D}_{r^*(f)})$ görüntü bölgesi orijine göre yıldızlı bir bölge olacak şekilde, en büyük yarıçaptır.

Tanım 2.30 (Konvekslik Yarıçapı) f fonksiyonu (1.1) deki gibi tanımlanmış olsun. O halde, $0 \leq \alpha < 1$ için,

$$r_\alpha^c(f) = \sup \left\{ r > 0 : \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha, \quad z \in \mathcal{D}_r \right\} \quad (2.4)$$

reel sayısına f fonksiyonunun α mertebeden konvekslik yarıçapı denir.

Yukarıdaki açıklamaya benzer olarak: $r_0^c(f) = r^c(f)$ reel sayısı, $f(\mathcal{D}_{r^c(f)})$ görüntü bölgesi konveks bir bölge olacak şekilde en büyük yarıçaptır.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tezin bulgular kısmının oluşturulmasında faydalanılacak bazı tanım ve teoremler sunulmuştur.

3.1. Subordinasyon

Kompleks değerli iki fonksiyon arasındaki subordinasyon kavramı reel değişkenli fonksiyonlar arasındaki eşitsizlik fikrinin doğal bir genellemesidir. Esas itibarıyla, subordinasyon fikri Lindelöf'ün çalışmasına kadar eskilere dayandırılabilmeyle birlikte bu teoremi ilk ortaya koyanlar Littlewood [34, 35] ve Rogosinski [44, 45] idi.

Tanım 3.1 (Subordinasyon) $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $\mathcal{D}$ birim diskinde analitik fonksiyonlar olmak üzere,

$$f(z) = g(w(z)), \quad |z| < 1$$

için, $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ şartlarını sağlayan, $\mathcal{D}$ birim diskinde analitik bir $w(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna subordinatedir denir ve $f(z) \prec g(z)$ ile gösterilir.

Lemma 3.1 $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ birim diskinde ünivalent olsun. Bu durumda, $f(z) \prec g(z)$ olması için gerek ve yeter şart $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathcal{D}) \subset g(\mathcal{D})$ olmasıdır.

Teorem 3.1 (Rogosinski Teoremi [44, 45]) $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$ ve $f \prec g$ olsun. O halde, her $n \geq 1$ tam sayısı için

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |b_k|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Yıldızıl ve konveks fonksiyonların çeşitli alt sınıflarının subordinasyon kavramı yardımı ile tanımlanabildiği bilinmektedir. Aşağıdaki teoremler bununla ilgilidir.

Teorem 3.2 $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}$$

ise f yıldızlı fonksiyondur.

Teorem 3.3 $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}$$

ise f konveks fonksiyondur.

Aşağıda bu sınıfların en genel hali verilmiştir.

Tanım 3.2 (Ma-Minda Yıldızlı ve Ma-Minda Konveks Fonksiyonlar [36]) ϕ pozitif reel kısma sahip analitik bir fonksiyon, $\phi(0) = 1$ ve ϕ fonksiyonu $\mathcal{D}$ birim diskini 1'e göre yıldızlı bir bölgeye resmediyor olsun. Bu durumda Ma-Minda yıldızlı fonksiyonların $\mathcal{S}^*(\phi)$ sınıfı ve Ma-Minda konveks fonksiyonların $\mathcal{C}(\phi)$ sınıfı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^*(\phi) &= \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \phi(z) \right\}, \\ \mathcal{C}(\phi) &= \left\{ f \in \mathcal{A} : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \phi(z) \right\}.\end{aligned}$$

Burada, Tanım 3.2 yardımıyla yıldızlı ve konveks fonksiyonların bazı meşhur alt sınıflarının elde edilebileceğini vurgulamak önemlidir. Açıkça görülebileceği üzere $\mathcal{S}^*\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathcal{C}$ dir.

Bunların dışında Tanım 3.2'deki ϕ fonksiyonunun uygun seçimi ile elde edilebilecek ve tezimizin ana sonuçlarının oluşturulmasında oldukça önemli bir yere sahip olan bazı önemli alt sınıflar Bölüm 3.2 ve Bölüm 3.3'de etraflıca ele alınmıştır.

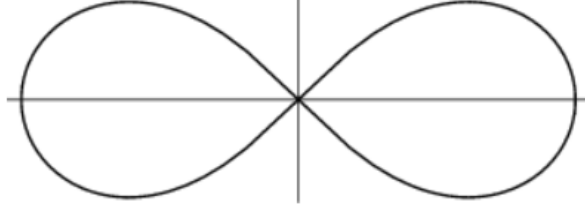
3.2. Bernoulli Lemniskat Yıldızlı ve Bernoulli Lemniskat Konveks Fonksiyonlar

Bernoulli lemniskatı (ya da kısaca lemniskat) Kartezyen koordinatlarda

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

denklemleri ile verilen dördüncü dereceden cebirsel bir eğridir.

Bu durumda, $\mathcal{L} := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 0, |w^2 - 1| < 1\}$ bölgesinin $\gamma : (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ denklemi ile verilen Bernoulli lemniskat eğrisinin (Bakınız Şekil 3.1) sağ yarı düzlemde kalan kısmının içi olacağını gözlemlemek kolaydır. Bu bölümde, $\mathcal{D}$ birim diskini $\mathcal{L} := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 0, |w^2 - 1| < 1\}$ bölgesine hapseden yıldızlı ve konveks fonksiyonların bazı alt sınıflarını ele alacağız.



Şekil 3.1. Bernoulli lemniskatı

Tanım 3.3 (Bernoulli Lemniskat Yıldızıl Fonksiyon [11, 46]) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu

$$\left| \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 - 1 \right| < 1, \quad z \in \mathcal{D}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonu Bernoulli lemniskat yıldızıl fonksiyondur denir.

Bernoulli lemniskat yıldızıl fonksiyonların sınıfını $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^*$ ile göstereceğiz.

Yukarıdaki tanım geometrik olarak şu şekilde ifade edilebilir: Eğer $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}^*$ ise $\mathcal{D}$ birim diskinin $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ dönüşümü altındaki görüntüsü, $|w^2 - 1| < 1$ ile verilen Bernoulli lemniskatının sağ yarısı tarafından sınırlandırılmış bölgenin içinde kalıyor demektir.

Ayrıca Tanım 3.2 yi kullanarak şu önemli çıkarımı yapmak mümkündür: $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}^*$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \phi(z) = \sqrt{1+z}, \quad \phi(0) = 1$$

olmasıdır.

Tanım 3.4 (Bernoulli Lemniskat Konveks Fonksiyon) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu

$$\left| \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)^2 - 1 \right| < 1, \quad z \in \mathcal{D}$$

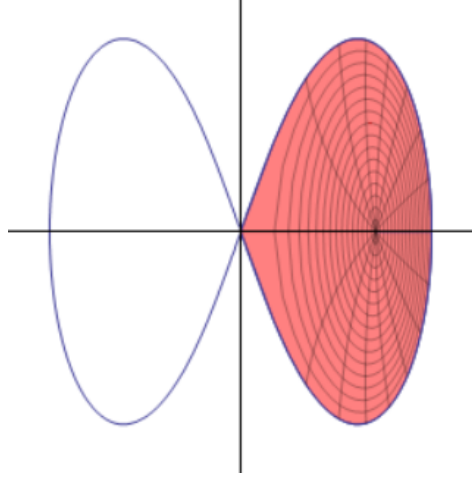
şartını sağlıyorsa f fonksiyonu Bernoulli lemniskat konveks fonksiyondur denir.

Bernoulli lemniskat konveks fonksiyonların sınıfını $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ile göstereceğiz. Yukarıdaki tanım geometrik olarak şu şekilde ifade edilebilir: Eğer $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ise $\mathcal{D}$ birim diskinin $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü, $|w^2 - 1| < 1$ ile verilen Bernoulli lemniskatının sağ yarı düzlemde kalan kısmının içinde kalıyor demektir.

Açıkça görülebileceği üzere; $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ olması için gerek ve yeter şart

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \phi(z) = \sqrt{1+z}$$

olmasıdır.



Şekil 3.2. $\mathcal{D}$ birim diskinin $\phi(z) = \sqrt{1+z}$ dönüşümü altındaki resmi

Burada $\phi(\mathcal{D})$ nin $\mathcal{L} := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 0, |w^2 - 1| < 1\}$ bölgesinde yer aldığına dikkat çekmek oldukça önemli olacaktır (Bakınız Şekil 3.2).

$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^*$ ve $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ sınıfları ile ilgili daha detaylı bilgi için [10, 11, 37, 38, 46, 48, 47, 53] çalışmalarına başvurulabilir.

Şimdi bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun lemniskat yıldızlılık ve lemniskat konvekslik yarıçapı kavramlarını vereceğiz.

Tanım 3.5 Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun.

$$r_{\mathcal{L}}^*(f) = \sup \left\{ r > 0 : \left| \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 - 1 \right| < 1, \quad z \in \mathcal{D}_r \right\}$$

reel sayısına f fonksiyonunun lemniskat yıldızlılık yarıçapı denir.

Bu tanıma göre $r_{\mathcal{L}}^*(f)$ biçiminde gösterdiğimiz bu yarıçap, $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonu altında $\mathcal{L} := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 0, |w^2 - 1| < 1\}$ bölgesine resmedilen $\mathcal{D}_r$ disklerinin r yarıçapları için bir üst sınırdır.

Tanım 3.6 Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun.

$$r_{\mathcal{L}}^c(f) = \sup \left\{ r > 0 : \left| \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)^2 - 1 \right| < 1, \quad z \in \mathcal{D}_r \right\}$$

reel sayısına f fonksiyonunun lemniskat konvekslik yarıçapı denir.

Yukarıdaki çıkarıma benzer olarak, $r_{\mathcal{L}}^c(f)$ biçiminde gösterdiğimiz bu yarıçap, $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ fonksiyonu altında $\mathcal{L} := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 0, |w^2 - 1| < 1\}$ bölgesine resmedilen $\mathcal{D}_r$ disklerinin r yarıçapları için bir üst sınırdır.

3.3. Janowski Yıldızıl ve Janowski Konveks Fonksiyonlar

Şu ana kadar ortaya konulan bilgiler ışığında, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar fikrini genelleştirmenin en kolay yollarından birinin $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonunun görüntüsünü sağ yarı düzlemin belirli alt kümeleriyle sınırlamak olduğu görülmektedir.

Bilindiği üzere, $-1 \leq B < A \leq 1$ için $\frac{1+Az}{1+Bz}$ birim diski reel eksene göre simetrik, $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ çap uç noktalarına sahip olan sağ yarı düzlemde konveks bir bölgeye ünivalent olarak resmeden bir dönüşümdür. Bu dönüşüm literatürde Janowski fonksiyonu olarak bilinmektedir. Şimdi Janowski dönüşümünün bahsedilen bu geometrik özelliğinden istifade ederek yıldızıl ve konveks fonksiyonların iki önemli alt sınıfını tanımlayacağız.

Tanım 3.7 (Janowski Yıldızıl Fonksiyon) $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda f fonksiyonu $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna Janowski yıldızıl fonksiyondur denir.

Janowski yıldızıl fonksiyonların sınıfını $S^*[A, B] := \mathcal{S}^*\left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)$ ile göstereceğiz. Yukarıdaki tanım geometrik olarak şu şekilde ifade edilebilir: Eğer $f \in S^*[A, B]$ ise $\frac{zf'(z)}{f(z)}$, $-1 \leq B < A \leq 1$ olacak şekilde, çap uç noktaları $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ olan birim diskin içinde yer alıyor demektir.

Tanım 3.8 (Janowski Konveks Fonksiyon) $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda, f fonksiyonu $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere,

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna Janowski konveks fonksiyondur denir.

Janowski konveks fonksiyonların sınıfını $\mathcal{C}[A, B] := \mathcal{C}\left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)$ ile göstereceğiz. Yukarıdaki tanım geometrik olarak şu şekilde ifade edilebilir: Eğer $f \in \mathcal{C}[A, B]$ ise $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$, $-1 \leq B < A \leq 1$ olacak şekilde, çap uç noktaları $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ olan diskin içinde yer alıyor demektir.

Açıkça görülebileceği üzere, Tanım 3.7 ve Tanım 3.8 de $A = 1$ ve $B = -1$ seçmek suretiyle, sırasıyla, yıldızıl ve konveks fonksiyonların $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ sınıfları elde edilirken $A = 1 - 2\alpha$ ve $B = -1$ ($0 \leq \alpha < 1$) alınmak suretiyle de, sırasıyla, α mertebeden yıldızıl ve konveks fonksiyonların $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfları elde edilir.

Janowski yıldızıl ve Janowski konveks fonksiyon sınıfları ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için [15, 30, 31, 42] çalışmalarından istifade edilebilir.

Şimdi bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun Janowski yıldızılık ve Janowski konvekslik yarıçapı kavramlarını vereceğiz.

Tanım 3.9 Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu halde $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere,

$$r_{A,B}^*(f) = \sup \left\{ r > 0 : \left| \frac{\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) - 1}{A - B \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)} \right| < 1, \quad z \in \mathcal{D}_r \right\}$$

reel sayısına f fonksiyonunun Janowski yıldızılık yarıçapı denir.

Bu tanıma göre $r_{A,B}^*(f)$ biçiminde gösterdiğimiz bu yarıçap $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonu altında reel eksene göre simetrik, sağ yarı düzlemde $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ çap uç noktalarına sahip diskin içine resmedilen $\mathcal{D}_r$ disklerinin r yarıçapları için bir üst sınırdır.

Tanım 3.10 Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu halde $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere,

$$r_{A,B}^c(f) = \sup \left\{ r > 0 : \left| \frac{\frac{zf''(z)}{f'(z)}}{A - B \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)} \right| < 1, \quad z \in \mathcal{D}_r \right\}$$

reel sayısına f fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı denir.

Yukarıdakine benzer bir çıkarımla, $r_{A,B}^c(f)$ biçiminde gösterdiğimiz bu yarıçap $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ fonksiyonu altında reel eksene göre simetrik, sağ yarı düzlemde $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ çap uç noktalarına sahip diskin içine resmedilen $\mathcal{D}_r$ disklerinin r yarıçapları için bir üst sınırdır.

3.4. Wright Fonksiyonu

Tanım 3.11 (Wright Fonksiyonu [28]) $\rho > -1$ ve $z, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\phi(\rho, \beta; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n! \Gamma(n\rho + \beta)} \quad (3.1)$$

özel fonksiyonuna Wright fonksiyonu denir.

Bu fonksiyon, esasen, $\rho > 0$ için Wright tarafından bölüntülerin asimptotik teorisi ile ilgili araştırmalarıyla ilişkili olarak tanımlanmıştır [54]. Ayrıca önemli bir not olarak, $\rho > -1$ için Wright fonksiyonunun bir tam fonksiyon olduğunu vurgulayalım. Dolayısıyla tezimizin bazı kısımlarında tam fonksiyonlar teorisindeki bazı özellikleri Wright fonksiyonuna uygulayacağız.

Aşağıdaki lemma Wright fonksiyonunun sonsuz çarpım temsilini, Wright fonksiyonunun sıfırlarının verilen şartlar altında reelliğini, Wright fonksiyonu ve türevlerinin sıfırları arasındaki ilişkiyi göstermesi bakımından oldukça önemlidir. Bu lemmada verilen sonuçlar tezimizin temel sonuçlarının elde edilmesinde oldukça önemli bir rol oynamaktadır.

Lemma 3.2 ([20]) (i) Eğer $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ ise $z \mapsto \lambda_{\rho,\beta}(z) = \phi(\rho, \beta, -z^2)$ fonksiyonu tamamı reel olan sonsuz sayıda sıfıra eşittir.

(ii) $\lambda_{\rho,\beta,n}$, $\phi(\rho, \beta, -z^2)$ fonksiyonunun n 'inci sıfırını göstermek üzere,

$$\Gamma(\beta)\phi(\rho, \beta, -z^2) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2}\right)$$

Weierstrass çarpımı geçerli olup bu çarpım kompleks düzlemin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaktır.

(iii) Ayrıca, $\Psi_{\rho,\beta}(z) = z^\beta \lambda_{\rho,\beta}(z)$ olmak üzere, $\zeta'_{\rho,\beta,n}$ ile $\Psi'_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun n 'inci sıfırını gösterelim. Bu durumda, $\Psi'_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun ardışık iki pozitif sıfırı arasında $\lambda_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun yalnız bir pozitif sıfırı (ya da $\Psi_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun pozitif reel sıfırı) vardır. Bir başka ifadeyle, bu fonksiyonların sıfırları arasında

$$\zeta'_{\rho,\beta,1} < \lambda_{\rho,\beta,1} < \zeta'_{\rho,\beta,2} < \lambda_{\rho,\beta,2} < \dots$$

eşitsizlik zinciri geçerlidir.

İspat (i) Fonksiyonun sıfırlarının reel olduğunu [16] çalışmasına benzer yaklaşımlar kullanılarak göstermek mümkündür. $\phi(\rho, \beta, \cdot)$ tam fonksiyonunun büyüme mertebesi, $(1 + \rho)^{-1}$ olup bu değer $(0, 1)$ aralığında olduğundan Wright fonksiyonu sonsuz sayıda sıfıra sahiptir.

(ii) Ayrıca, Wright fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan, Hadamard çarpım teoremi gereğince, Lemma 3.2 deki gibi bir sonsuz çarpım temsiline sahiptir.

(iii) Bu sonsuz çarpım temsilini kullanarak,

$$\frac{\psi'_{\rho,\beta}(z)}{\psi_{\rho,\beta}(z)} = \frac{\beta}{z} + \frac{\lambda'_{\rho,\beta}(z)}{\lambda_{\rho,\beta}(z)} = \frac{\beta}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - \lambda_{\rho,\beta,n}^2} \quad (3.2)$$

elde edilir. (3.2) eşitliğinin her iki tarafının diferansiyelini alırsak

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\psi'_{\rho,\beta}(z)}{\psi_{\rho,\beta}(z)} \right) = -\frac{\beta}{z^2} - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{z^2 + \lambda_{\rho,\beta,n}^2}{(z^2 - \lambda_{\rho,\beta,n}^2)^2}, \quad z \neq \lambda_{\rho,\beta,n}$$

bulunur. $\rho, \beta > 0$ ve reel z değerleri için, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı negatif bir reel sayı olduğundan $(\lambda_{\rho,\beta,n}, \lambda_{\rho,\beta,n+1})$, $n \in \mathbb{N}$ açık aralığındaki reel değerler için z arttıkça $\frac{\psi'_{\rho,\beta}}{\psi_{\rho,\beta}}$ oranı $+\infty$ dan $-\infty$ a azalan bir fonksiyondur. Bu halde, $\psi'_{\rho,\beta}$ fonksiyonu $\lambda_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı arasında sadece bir kez sıfır değerini alır. Böylece ispat tamamlanmış olur.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, şimdiye kadar verdiğimiz tanım ve teoremler ışığında, normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının lemniskat yıldızlılık, lemniskat konvekslik, Janowski yıldızlılık ve Janowski konvekslik yarıçaplarını elde edeceğiz.

4.1. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonları

(3.1) denkleminde, (işlemlerde kolaylık sağlaması bakımından $\lambda_{\rho,\beta}(z) = \phi(\rho, \beta, -z^2)$ alacağız)

$$\begin{aligned}\lambda_{\rho,\beta}(z) &= \phi(\rho, \beta, -z^2) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n\rho + \beta)} z^{2n} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \frac{z^2}{\Gamma(\rho + \beta)} + \frac{z^4}{2\Gamma(2\rho + \beta)} - \dots\end{aligned}\quad (4.1)$$

olduğu kolayca gözlemlenebilir. (4.1) denkleminde de açıkça görüldüğü üzere $\lambda_{\rho,\beta}$ fonksiyonu $\mathcal{A}$ sınıfına ait değildir. Ancak bu fonksiyonun geometrik özelliklerini incelemek için evvela fonksiyonun normalize edilmesi gerekmektedir. O halde, her biri $\phi(\rho, \beta, \cdot)$ fonksiyonundan türetilmiş olan

$$f_{\rho,\beta}(z) = (z^\beta \Gamma(\beta) \phi(\rho, \beta, -z^2))^{\frac{1}{\beta}}, \quad (4.2)$$

$$g_{\rho,\beta}(z) = z \Gamma(\beta) \phi(\rho, \beta, -z^2), \quad (4.3)$$

$$h_{\rho,\beta}(z) = z \Gamma(\beta) \phi(\rho, \beta, -z). \quad (4.4)$$

fonksiyonlarını ele alalım. Açıkça bu fonksiyonların tamamı $\mathcal{A}$ sınıfına aittirler. Hiç şüphesiz Wright fonksiyonunun yukarıda verilenlerin dışında sonsuz çoklukta normalizasyonunun yazılması mümkündür. Ancak yukarıda verilen normalizasyonları ele almamızın temel nedeni literatürde Bessel fonksiyonları açısından bu normalizasyonların özel durumlarıyla sıklıkla karşılaşılmasıdır.

Şimdi, sırasıyla, (4.2), (4.3) ve (4.4) deki gibi normalize edilmiş $f_{\rho,\beta}(z)$, $g_{\rho,\beta}(z)$ ve $h_{\rho,\beta}(z)$ Wright fonksiyonlarının bazı geometrik özelliklerini elde edeceğiz.

4.2. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonlarının Lemniskat Yıldızlılık ve Lemniskat Konvekslik Yarıçapları

Bu bölümde normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının Bernoulli lemniskatı ile ilişkili konvekslik yarıçapını ve yıldızlılık yarıçapını ele alacağız.

Teorem 4.1 ([52]) $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a. $f_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun lemniskat yıldızlılık yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^*(f_{\rho,\beta})$,

$$r^2 (\lambda'_{\rho,\beta}(r))^2 - 2\beta \lambda'_{\rho,\beta}(r) \lambda_{\rho,\beta}(r) - \beta^2 (\lambda_{\rho,\beta}(r))^2 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $g_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun lemniskat yıldızlılık yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^*(g_{\rho,\beta})$,

$$r^2 (\lambda'_{\rho,\beta}(r))^2 - 2r \lambda'_{\rho,\beta}(r) \lambda_{\rho,\beta}(r) - (\lambda_{\rho,\beta}(r))^2 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

c. $h_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun lemniskat yıldızlılık yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^*(h_{\rho,\beta})$,

$$r (\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}))^2 - 4\sqrt{r} \lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) \lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) - (\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}))^2 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

İspat Lemma 3.2 den

$$\Gamma(\beta) \lambda_{\rho,\beta}(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2} \right)$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifadenin logaritmik türevi alınarak

$$\frac{z \lambda'_{\rho,\beta}(z)}{\lambda_{\rho,\beta}(z)} = - \sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - z^2} \quad (4.5)$$

elde edilir. $f_{\rho,\beta}(z)$, $g_{\rho,\beta}(z)$ ve $h_{\rho,\beta}(z)$ normalizasyonları ile birlikte (4.5) denklemi göz önüne alındığında

$$\frac{z f'_{\rho,\beta}(z)}{f_{\rho,\beta}(z)} = 1 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{z \lambda'_{\rho,\beta}(z)}{\lambda_{\rho,\beta}(z)} \right) = 1 - \frac{1}{\beta} \sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - z^2} \quad (4.6)$$

$$\frac{z g'_{\rho,\beta}(z)}{g_{\rho,\beta}(z)} = 1 + \frac{z \lambda'_{\rho,\beta}(z)}{\lambda_{\rho,\beta}(z)} = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - z^2} \quad (4.7)$$

$$\frac{z h'_{\rho,\beta}(z)}{h_{\rho,\beta}(z)} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{z} \lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{z})}{\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{z})} \right) = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{z}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - z}. \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.6), (4.7), (4.8) denklemleri göz önüne alındığında $|z| < \lambda_{\rho,\beta,1}$, $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ için

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{zf'_{\rho,\beta}(z)}{f_{\rho,\beta}(z)} \right)^2 - 1 \right| &\leq \frac{1}{\beta^2} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2|z|^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2} \right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2|z|^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2} + 2\beta \right) \\ &= \left(\frac{|z| f'_{\rho,\beta}(|z|)}{f_{\rho,\beta}(|z|)} \right)^2 - 4 \left(\frac{|z| f'_{\rho,\beta}(|z|)}{f_{\rho,\beta}(|z|)} \right) + 3, \\ \left| \left(\frac{zg'_{\rho,\beta}(z)}{g_{\rho,\beta}(z)} \right)^2 - 1 \right| &\leq \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2|z|^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2} \right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2|z|^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2} + 2 \right) \\ &= \left(\frac{|z| g'_{\rho,\beta}(|z|)}{g_{\rho,\beta}(|z|)} \right)^2 - 4 \left(\frac{|z| g'_{\rho,\beta}(|z|)}{g_{\rho,\beta}(|z|)} \right) + 3, \\ \left| \left(\frac{zh'_{\rho,\beta}(z)}{h_{\rho,\beta}(z)} \right)^2 - 1 \right| &\leq \left(\sum_{n \geq 1} \frac{|z|}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|} \right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{|z|}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|} + 2 \right) \\ &= \left(\frac{|z| h'_{\rho,\beta}(|z|)}{h_{\rho,\beta}(|z|)} \right)^2 - 4 \left(\frac{|z| h'_{\rho,\beta}(|z|)}{h_{\rho,\beta}(|z|)} \right) + 3. \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Kolaylık olması açısından $f_{\rho,\beta}$, $g_{\rho,\beta}$ ve $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonlarına karşılık $z \mapsto \phi_{\rho,\beta}$ fonksiyonunu ele alalım.

$$\left(\frac{r\phi'_{\rho,\beta}(r)}{\phi_{\rho,\beta}(r)} \right)^2 - 4 \left(\frac{r\phi'_{\rho,\beta}(r)}{\phi_{\rho,\beta}(r)} \right) + 2 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif kökünün r^* olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|z| < r^*$ için

$$\left| \left(\frac{z\phi'_{\rho,\beta}(z)}{\phi_{\rho,\beta}(z)} \right)^2 - 1 \right| \leq 1$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu halde, (4.6), (4.7) ve (4.8) denklemleri yardımı ile $f_{\rho,\beta}$, $g_{\rho,\beta}$ ve $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonları için yukarıda bahsedilen denklemin sıfırlarının

$$\begin{aligned} r^2 (\lambda'_{\rho,\beta}(r))^2 - 2\beta \lambda'_{\rho,\beta}(r) \lambda_{\rho,\beta}(r) - \beta^2 (\lambda_{\rho,\beta}(r))^2 &= 0, \\ r^2 (\lambda'_{\rho,\beta}(r))^2 - 2r \lambda'_{\rho,\beta}(r) \lambda_{\rho,\beta}(r) - (\lambda_{\rho,\beta}(r))^2 &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$r (\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}))^2 - 4\sqrt{r} \lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) \lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) - (\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}))^2 = 0$$

denklemlerinin sıfırları ile çakıştığı görülür. Bu da, $r_{\mathcal{L}}^*(f_{\rho,\beta})$, $r_{\mathcal{L}}^*(g_{\rho,\beta})$ ve $r_{\mathcal{L}}^*(h_{\rho,\beta})$ lemniskat yıldızlılık yarıçaplarının sırasıyla yukarıdaki denklemlerin en küçük pozitif kökleri olduğu anlamına gelir.

İspatı sonlandırmak için, yukarıdaki her bir denklemin $(0, \lambda_{\rho,\beta,1})$ açık aralığında tek bir köke sahip olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} F'_{\rho,\beta}(r) &= \frac{2}{\beta} \sum_{n \geq 1} \frac{4r\lambda_{\rho,\beta,n}^2}{(\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \sum_{n \geq 1} \frac{2r^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - r^2} \right) > 0, \\ G'_{\rho,\beta}(r) &= \sum_{n \geq 1} \frac{4r\lambda_{\rho,\beta,n}^2}{(\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2} \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{2r^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - r^2} \right) > 0, \\ H'_{\rho,\beta}(r) &= 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_{\rho,\beta,n}^2}{(\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - r)^2} \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{r}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - r} \right) > 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $F_{\rho,\beta}, G_{\rho,\beta}, H_{\rho,\beta} : (0, \lambda_{\rho,\beta,1}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{\rho,\beta}(r) &= \left(\frac{rf'_{\rho,\beta}(r)}{f_{\rho,\beta}(r)} \right)^2 - 4 \left(\frac{rf'_{\rho,\beta}(r)}{f_{\rho,\beta}(r)} \right) + 2, \\ G_{\rho,\beta}(r) &= \left(\frac{rg'_{\rho,\beta}(r)}{g_{\rho,\beta}(r)} \right)^2 - 4 \left(\frac{rg'_{\rho,\beta}(r)}{g_{\rho,\beta}(r)} \right) + 2, \\ H_{\rho,\beta}(r) &= \left(\frac{rh'_{\rho,\beta}(r)}{h_{\rho,\beta}(r)} \right)^2 - 4 \left(\frac{rh'_{\rho,\beta}(r)}{h_{\rho,\beta}(r)} \right) + 2 \end{aligned}$$

fonksiyonları $(0, \lambda_{\rho,\beta,1})$ aralığında r nin artan fonksiyonlarıdır. Ayrıca,

$$\lim_{r \searrow 0} F_{\rho,\beta}(r) = \lim_{r \searrow 0} G_{\rho,\beta}(r) = \lim_{r \searrow 0} H_{\rho,\beta}(r) = -1 < 0,$$

ve

$$\lim_{r \nearrow \lambda_{\rho,\beta,1}} F_{\rho,\beta}(r) = \lim_{r \nearrow \lambda_{\rho,\beta,1}} G_{\rho,\beta}(r) = \lim_{r \nearrow \lambda_{\rho,\beta,1}} H_{\rho,\beta}(r) = \infty$$

limitleri kolaylıkla elde edilebilir. Bu ise, $f_{\rho,\beta}, g_{\rho,\beta}$ ve $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonlarının $r_{\mathcal{L}}^*(f_{\rho,\beta}), r_{\mathcal{L}}^*(g_{\rho,\beta})$ ve $r_{\mathcal{L}}^*(h_{\rho,\beta})$ ile gösterdiğimiz lemniskat yıldızlılık yarıçaplarının sırasıyla $F_{\rho,\beta}(r), G_{\rho,\beta}(r)$ ve $H_{\rho,\beta}(r)$ fonksiyonlarının $(0, \lambda_{\rho,\beta,1})$ aralığındaki tek kökleri oldukları anlamına gelir.

Teorem 4.2 ([52]) $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a. $f_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun lemniskat konvekslik yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^c(f_{\rho,\beta})$

$$\left(\frac{z\Psi''_{\rho,\beta}(z)}{\Psi'_{\rho,\beta}(z)} + \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{z\Psi'_{\rho,\beta}(z)}{\Psi_{\rho,\beta}(z)} \right)^2 - 2 \left(\frac{z\Psi''_{\rho,\beta}(z)}{\Psi'_{\rho,\beta}(z)} + \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{z\Psi'_{\rho,\beta}(z)}{\Psi_{\rho,\beta}(z)} \right) - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. Burada $\Psi_{\rho,\beta}(z) = z^\beta \lambda_{\rho,\beta}(z)$ dır.

b. $g_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun lemniskat konvekslik yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^c(g_{\rho,\beta})$

$$\left(\frac{r^2\lambda''_{\rho,\beta}(r) + 2r\lambda'_{\rho,\beta}(r)}{\lambda_{\rho,\beta}(r) + r\lambda'_{\rho,\beta}(r)} \right)^2 - 2 \left(\frac{r^2\lambda''_{\rho,\beta}(r) + 2r\lambda'_{\rho,\beta}(r)}{\lambda_{\rho,\beta}(r) + r\lambda'_{\rho,\beta}(r)} \right) - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

c. $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun lemniskat konvekslik yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^c(h_{\rho,\beta})$

$$\left(\frac{3\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) - r\lambda''_{\rho,\beta}(\sqrt{r})}{4\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) + 2\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r})} \right)^2 - 2 \left(\frac{3\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) - r\lambda''_{\rho,\beta}(\sqrt{r})}{4\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) + 2\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r})} \right) - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

İspat a. $\Psi_{\rho,\beta}(z) = z^\beta \lambda_{\rho,\beta}(z)$ olmak üzere, [20, Teorem 5] den

$$1 + \frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)} = 1 + \frac{z\Psi''_{\rho,\beta}(z)}{\Psi'_{\rho,\beta}(z)} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \frac{z\Psi'_{\rho,\beta}(z)}{\Psi_{\rho,\beta}(z)}$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $\zeta_{\rho,\beta,n}$ ve $\zeta'_{\rho,\beta,n}$ sırasıyla $\Psi_{\rho,\beta}$ ve $\Psi'_{\rho,\beta}$ nin n 'inci pozitif kökleri olmak üzere

$$\Psi_{\rho,\beta}(z) = \frac{z^\beta}{\Gamma(\beta)} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2}\right), \quad \Psi'_{\rho,\beta}(z) = \frac{z^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2}\right)$$

denklemleri geçerlidir ([20]). Her iki tarafın logaritmik türevi alındığında,

$$1 + \frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)} = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - z^2} - \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - z^2} \quad (4.9)$$

elde edilir. $\frac{1}{\beta} - 1 \geq 0$ için $\beta \in (0, 1]$ olduğunu varsayalım. $|z| < \zeta'_{\rho,\beta,1} < \zeta_{\rho,\beta,1}$ olmak üzere, (4.9) denklemi ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left| \left(1 + \frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)}\right)^2 - 1 \right| \leq \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2|z|^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \sum_{n \geq 1} \frac{2|z|^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2} \right)^2 + 2 \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2|z|^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \sum_{n \geq 1} \frac{2|z|^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2} \right)$$

sonucu elde edilir. (4.9) denkleminin yardımıyla yukarıdaki eşitsizlikten

$$\left| \left(1 + \frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)}\right)^2 - 1 \right| \leq \left(\frac{|z| f''_{\rho,\beta}(|z|)}{f'_{\rho,\beta}(|z|)} \right)^2 - 2 \left(\frac{|z| f''_{\rho,\beta}(|z|)}{f'_{\rho,\beta}(|z|)} \right) \quad (4.10)$$

elde edilir.

Ayrıca, $|z| \leq r < a < b$ ve $0 \leq \lambda < 1$ için [17, Lemma 2.1] deki

$$\left| \frac{z}{a-z} - \lambda \frac{z}{b-z} \right| \leq \frac{|z|}{a-|z|} - \lambda \frac{|z|}{b-|z|} \quad (4.11)$$

bağıntısı nedeniyle (4.10) denklemi $\beta > 1$ durumu için de geçerlidir. Bu da (4.10) eşitsizliğinin $\beta > 0$ ve $|z| < \zeta'_{\rho,\beta,1}$ için de geçerli olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, $|z| < r_1$ için $f_{\rho,\beta}(z)$ lemniskat konveks fonksiyonu olmak üzere, r_1 ,

$$\left(\frac{rf''_{\rho,\beta}(r)}{f'_{\rho,\beta}(r)} \right)^2 - 2 \left(\frac{rf''_{\rho,\beta}(r)}{f'_{\rho,\beta}(r)} \right) - 1 = 0 \quad (4.12)$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

İspatın tamamlanması için yukarıdaki denklemin $(0, \zeta'_{\rho,\beta,1})$ aralığında tek bir köke sahip olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $u_{\rho,\beta} : (0, \zeta'_{\rho,\beta,1}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_{\rho,\beta}(r) = \left(\frac{r f''_{\rho,\beta}(r)}{f'_{\rho,\beta}(r)} \right)^2 - 2 \left(\frac{r f''_{\rho,\beta}(r)}{f'_{\rho,\beta}(r)} \right) - 1$$

fonksiyonunu dikkate alalım. $\beta > 0$ için,

$$u'_{\rho,\beta}(r) > \left(8r \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\zeta_{\rho,\beta,n}^2}{(\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2} - \frac{\zeta_{\rho,\beta,n}^2}{(\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2} \right) \right) \left(2r^2 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2} - \frac{1}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2} \right) \right) > 0$$

olduğundan bu fonksiyon artandır. Burada, $r < \sqrt{\zeta_{\rho,\beta,n} \zeta'_{\rho,\beta,n}}$ ve $\beta > 0$ için

$$\zeta_{\rho,\beta,n}^2 (\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2 < \zeta_{\rho,\beta,n}^2 (\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2$$

olduğunu dolaylı olarak kullandık. Ayrıca,

$$\lim_{r \searrow 0} u_{\rho,\beta}(r) = -1 < 0 \text{ ve } \lim_{r \nearrow \zeta'_{\rho,\beta,1}} u_{\rho,\beta}(r) = \infty$$

limitleri kolayca elde edilir.

Yukarıdaki tüm açıklamaların sonucunda, $f_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun $r_{\mathcal{L}}^c(f_{\rho,\beta})$ ile gösterdiğimiz lemniskat konvekslik yarıçapının (4.12) denkleminin $(0, \zeta'_{\rho,\beta,1})$ aralığındaki tek kökü olduğu anlamına gelir.

- b.** Şimdi normalize edilmiş $g_{\rho,\beta}(z)$ Wright fonksiyonunun lemniskat konvekslik yarıçapını bulmaya odaklanalım. [20, Theorem 5] den, $\vartheta_{\rho,\beta,n}$, $g'_{\rho,\beta}(z)$ nin n 'inci pozitif sıfırı olmak üzere, $g'_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun sonsuz çarpım temsili

$$g'_{\rho,\beta}(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\vartheta_{\rho,\beta,n}^2} \right)$$

şeklinde dir. Her iki tarafın logaritmik türevi alındığında

$$1 + \frac{z g''_{\rho,\beta}(z)}{g'_{\rho,\beta}(z)} = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{\vartheta_{\rho,\beta,n}^2 - z^2}$$

elde edilir.

Teorem 4.1 in ispatına benzer bir yaklaşımla, $|z| < \vartheta_{\rho,\beta,1}$ için

$$\left| \left(1 + \frac{z g''_{\rho,\beta}(z)}{g'_{\rho,\beta}(z)} \right)^2 - 1 \right| \leq \left(\frac{z g''_{\rho,\beta}(z)}{g'_{\rho,\beta}(z)} \right)^2 - 2 \left(\frac{z g''_{\rho,\beta}(z)}{g'_{\rho,\beta}(z)} \right)$$

olur. Dolayısıyla, $r_{\mathcal{L}}^c(g_{\rho,\beta})$ lemniskat konvekslik yarıçapının $(0, \vartheta_{\rho,\beta,1})$ aralığında

$$\left(\frac{rg''_{\rho,\beta}(r)}{g'_{\rho,\beta}(r)}\right)^2 - 2\left(\frac{rg''_{\rho,\beta}(r)}{g'_{\rho,\beta}(r)}\right) - 1 = 0 \quad (4.13)$$

denkleminin tek pozitif kökü olduğu görülür.

İspatın tamamlanması için yukarıdaki denklemin $(0, \vartheta_{\rho,\beta,1})$ aralığında tek bir köke sahip olduğunu göstermeliyiz. Bunun için, $v_{\rho,\beta} : (0, \vartheta_{\rho,\beta,1}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$v_{\rho,\beta}(r) = \left(\frac{rg''_{\rho,\beta}(r)}{g'_{\rho,\beta}(r)}\right)^2 - 2\left(\frac{rg''_{\rho,\beta}(r)}{g'_{\rho,\beta}(r)}\right) - 1$$

fonksiyonunu dikkate alalım.

$$v'_{\rho,\beta}(r) = 8r \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\vartheta_{\rho,\beta,n}^2}{(\vartheta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2} \right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2r^2}{\vartheta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2} + 1 \right) > 0$$

olduğundan, fonksiyonun aynı aralıkta kesin artan olduğu kolayca görülür. Ayrıca,

$$\lim_{r \searrow 0} v_{\rho,\beta}(r) = -1 < 0 \text{ ve } \lim_{r \nearrow \vartheta_{\rho,\beta,1}} v_{\rho,\beta}(r) = \infty$$

dır. Bu da, $r_{\mathcal{L}}^c(g_{\rho,\beta})$ lemniskat konvekslik yarıçapının (4.13) denkleminin $(0, \vartheta_{\rho,\beta,1})$ aralığındaki tek kökü olduğu anlamına gelir.

- c. [20] göz önüne aldığımızda $\tau_{\rho,\beta,n}$, $h'_{\rho,\beta}$ nin n 'inci pozitif sıfırı iken, $h'_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonun seri açılımı

$$h'_{\rho,\beta}(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{\tau_{\rho,\beta,n}} \right)$$

şeklinde. (b) bölümündeki adımlar benzer şekilde izlendiğinde, $r_{\mathcal{L}}^c(h_{\rho,\beta})$ lemniskat konvekslik yarıçapının teoremin (c) kısmında verilen denklemin tek kökü olduğu çıkarılabilir.

4.3. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonlarının Janowski Yıldızlılık ve Janowski Konvekslik Yarıçapları

Bu bölümde normalize edilmiş $f_{\rho,\beta}(z)$, $g_{\rho,\beta}(z)$ ve $h_{\rho,\beta}(z)$ Wright fonksiyonlarının Janowski yıldızlılık ve Janowski konvekslik yarıçaplarını inceleyeceğiz.

Teorem 4.3 ([52]) $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a. $f_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapı $r_{A,B}^*(f_{\rho,\beta})$,

$$\frac{r\lambda'_{\rho,\beta}(r)}{\lambda_{\rho,\beta}(r)} + \beta \left(\frac{A-B}{1+|B|} \right) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $g_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapı $r_{A,B}^*(g_{\rho,\beta})$,

$$\frac{r\lambda'_{\rho,\beta}(r)}{\lambda_{\rho,\beta}(r)} + \frac{A-B}{1+|B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

c. $h_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapı $r_{A,B}^*(h_{\rho,\beta})$,

$$\frac{\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r})}{\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r})} + 2\frac{A-B}{1+|B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

İspat $f_{\rho,\beta}(z)$ normalizasyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapını bulabilmek için,

$$\left| \frac{\frac{zf'_{\rho,\beta}(z)}{f_{\rho,\beta}(z)} - 1}{A - B \frac{zf'_{\rho,\beta}(z)}{f_{\rho,\beta}(z)}} \right| < 1, \quad |z| < r^*$$

olacak şekilde pozitif bir r^* reel sayısı bulmalıyız. (4.6) denklemi ve üçgen eşitsizliği yardımı ile $\beta > 0$ ve $z = |z| = r$ olacak şekilde

$$\left| \frac{\frac{zf'_{\rho,\beta}(z)}{f_{\rho,\beta}(z)} - 1}{A - B \frac{zf'_{\rho,\beta}(z)}{f_{\rho,\beta}(z)}} \right| \leq \frac{\frac{1}{\beta} \sum_{n \geq 1} \frac{2|z|^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2}}{A - B - |B| \frac{1}{\beta} \sum_{n \geq 1} \frac{2|z|^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2}}, \quad |z| < \lambda_{\rho,\beta,1}$$

eşitsizliği kolayca elde edilebilir. Buradan,

$$\left| \frac{\frac{zf'_{\rho,\beta}(z)}{f_{\rho,\beta}(z)} - 1}{A - B \frac{zf'_{\rho,\beta}(z)}{f_{\rho,\beta}(z)}} \right| \leq \frac{1 - \frac{|z|f'_{\rho,\beta}(|z|)}{f_{\rho,\beta}(|z|)}}{A - B + |B| \left(\frac{|z|f'_{\rho,\beta}(|z|)}{f_{\rho,\beta}(|z|)} - 1 \right)} \quad (4.14)$$

eşitsizliği açıkça görülür. r^*

$$\frac{rf'_{\rho,\beta}(r)}{f_{\rho,\beta}(r)} + \frac{A-B}{1+|B|} - 1 = 0 \quad (4.15)$$

denkleminin en küçük pozitif kökü olsun. Bu, (4.14) eşitsizliğinde $f_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun $|z| < r^*$ için Janowski yıldızlı olduğunu gösterir.

İspatın tamamlanması için yukarıdaki denklemin $(0, \lambda_{\rho,\beta,1})$ açık aralığında tek bir köke sahip olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $u_{\rho,\beta} : (0, \lambda_{\rho,\beta,1}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_{\rho,\beta}(r) = \frac{rf'_{\rho,\beta}(r)}{f_{\rho,\beta}(r)} + \frac{A-B}{1+|B|} - 1$$

fonksiyonunu dikkate alalım.

$$u'_{\rho,\beta}(r) = -\frac{1}{\beta} \sum_{n \geq 1} \frac{4r\lambda_{\rho,\beta,n}^2}{(\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2} < 0$$

olduğundan, $u_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun $(0, \lambda_{\rho,\beta,1})$ aralığında kesin azalan olduğu görülür. Ayrıca,

$$\lim_{r \nearrow \lambda_{\rho,\beta,1}} u_{\rho,\beta}(r) = -\infty \text{ ve } \lim_{r \searrow 0} u_{\rho,\beta}(r) = \frac{A-B}{1+|B|} > 0$$

limitleri kolayca elde edilir. Dolayısıyla $f_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun $r_{A,B}^*(f_{\rho,\beta})$ Janowski yıldızlılık yarıçapının, $(0, \lambda_{\rho,\beta,1})$ açık aralığında (4.15) denkleminin bir tek kökü olduğu sonucuna varılır. $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere, $g_{\rho,\beta}(z)$ ve $h_{\rho,\beta}(z)$ normalizasyonları için de benzer sonuçların elde edilebileceği açıktır. Bu nedenle, $r_{A,B}^*(g_{\rho,\beta})$ ve $r_{A,B}^*(h_{\rho,\beta})$ Janowski yıldızlılık yarıçaplarının, teoremin sırasıyla (b) ve (c) bölümlerindeki denklemlerin tek kökleri olduğu söylenebilir.

Teorem 4.4 ([52]) $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a. $f_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı $r_{A,B}^c(f_{\rho,\beta})$,

$$\frac{r\Psi''_{\rho,\beta}(r)}{\Psi'_{\rho,\beta}(r)} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \frac{r\Psi'_{\rho,\beta}(r)}{\Psi_{\rho,\beta}(r)} + \frac{A-B}{1+|B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $g_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı $r_{A,B}^c(g_{\rho,\beta})$,

$$\frac{r^2\lambda''_{\rho,\beta}(r) + 2r\lambda'_{\rho,\beta}(r)}{\lambda_{\rho,\beta}(r) + r\lambda'_{\rho,\beta}(r)} + \frac{A-B}{1+|B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

c. $h_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı $r_{A,B}^c(h_{\rho,\beta})$,

$$\frac{3\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) - r\lambda''_{\rho,\beta}(\sqrt{r})}{4\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) + 2\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r})} + \frac{A-B}{1+|B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

İspat Janowski konveksliğinin $\mathcal{D}_r$ açık diski üzerindeki tanımını dikkate aldığımızda, $|z| < r$ olmak üzere $f_{\rho,\beta}$ fonksiyonu için,

$$\left| \frac{\frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)}}{A-B\left(1+\frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)}\right)} \right| < 1$$

eşitsizliğini görürüz. (4.9) denklemi kullanılarak, $0 \leq \beta < 1$ için ve $|z| < \zeta'_{\rho,\beta,1}$ ile $z = |z| = r$ olacak şekilde, $f_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun,

$$\left| \frac{\frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)}}{A - B \left(1 + \frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)}\right)} \right| \leq \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - z^2} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - z^2}}{A - B + |B| \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - z^2} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - z^2} \right)}$$

eşitsizliğini karşıladığı kolaylıkla görülebilir. (4.11) eşitsizliği yardımıyla, yukarıdaki eşitsizliğin $\beta \geq 1$ için de geçerlidir. (4.9) denkleminde dolayı, z nin yerine $|z|$ yazılarak, ρ ve $\beta > 0$ olmak üzere,

$$\left| \frac{\frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)}}{A - B \left(1 + \frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)}\right)} \right| \leq \frac{-\frac{|z|f''_{\rho,\beta}(|z|)}{f'_{\rho,\beta}(|z|)}}{A - B + |B| \frac{|z|f''_{\rho,\beta}(|z|)}{f'_{\rho,\beta}(|z|)}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu nedenle, $r_{A,B}^c(f_{\rho,\beta})$ Janowski konvekslik yarıçapının,

$$\frac{rf''_{\rho,\beta}(r)}{f'_{\rho,\beta}(r)} + \frac{A - B}{1 + |B|} = 0 \quad (4.16)$$

denkleminin en küçük pozitif kökü olduğu sonucuna varırız.

İspatın tamamlanması için, yukarıdaki denklemin $(0, \zeta'_{\rho,\beta,1})$ açık aralığında bir tek kökü olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için, $u_{\rho,\beta} : (0, \zeta'_{\rho,\beta,1}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_{\rho,\beta}(r) = \frac{rf''_{\rho,\beta}(r)}{f'_{\rho,\beta}(r)} + \frac{A - B}{1 + |B|}$$

fonksiyonunu dikkate alırsak,

$$u'_{\rho,\beta}(r) < 4r \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\zeta_{\rho,\beta,n}^2}{(\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2} - \frac{\zeta_{\rho,\beta,n}^2}{(\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2} \right) < 0$$

olduğundan, $(0, \zeta'_{\rho,\beta,1})$ üzerinde sürekli ve $(0, \zeta'_{\rho,\beta,1})$ de kesin azalan olduğu görülür.

Burada dolaylı olarak, $r < \sqrt{\zeta_{\rho,\beta,n}\zeta'_{\rho,\beta,n}}$ ve $\beta > 0$ için $\zeta_{\rho,\beta,n}^2 (\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2 < \zeta_{\rho,\beta,n}^2 (\zeta_{\rho,\beta,n}^2 - r^2)^2$ özelliğini kullandık. Ayrıca,

$$\lim_{r \searrow 0} u_{\rho,\beta}(r) = \frac{A - B}{1 + |B|} > 0 \text{ ve } \lim_{r \nearrow \zeta'_{\rho,\beta,1}} u_{\rho,\beta}(r) = -\infty$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak, $f'_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun $r_{A,B}^c(f_{\rho,\beta})$ Janowski konvekslik yarıçapı, $(0, \zeta'_{\rho,\beta,1})$ açık aralığında (4.16) denkleminin tek pozitif köküdür. Böylelikle ispat tamamlanır.

Teoremin (b) ve (c) kısımlarının ispatı, (a) kısmındaki adımlar benzer şekilde izlendiğinde, $g'_{\rho,\beta}(z)$ ve $h'_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonlarının seri gösterimleri ile kolayca elde edilebileceğinden, (b) ve (c) ispatlarını atlıyoruz.

5. SONUÇ

$f_{\rho,\beta}(z)$, $g_{\rho,\beta}(z)$, $h_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonları sırasıyla, (4.2), (4.3) ve (4.4) deki gibi tanımlanmış normalize edilmiş Wright fonksiyonları olmak üzere, bu tezde elde ettiğimiz sonuçlar aşağıdaki dört teoremden sunulmuştur.

Teorem 5.1 ([52]) $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- a. $f_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun lemniskat yıldızlılık yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^*(f_{\rho,\beta})$,

$$r^2 (\lambda'_{\rho,\beta}(r))^2 - 2\beta \lambda'_{\rho,\beta}(r) \lambda_{\rho,\beta}(r) - \beta^2 (\lambda_{\rho,\beta}(r))^2 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

- b. $g_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun lemniskat yıldızlılık yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^*(g_{\rho,\beta})$,

$$r^2 (\lambda'_{\rho,\beta}(r))^2 - 2r \lambda'_{\rho,\beta}(r) \lambda_{\rho,\beta}(r) - (\lambda_{\rho,\beta}(r))^2 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

- c. $h_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun lemniskat yıldızlılık yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^*(h_{\rho,\beta})$,

$$r (\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}))^2 - 4\sqrt{r} \lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) \lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) - (\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}))^2 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

Teorem 5.2 ([52]) $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- a. $f_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun lemniskat konvekslik yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^c(f_{\rho,\beta})$,

$$\left(\frac{z \Psi''_{\rho,\beta}(z)}{\Psi'_{\rho,\beta}(z)} + \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{z \Psi'_{\rho,\beta}(z)}{\Psi_{\rho,\beta}(z)} \right)^2 - 2 \left(\frac{z \Psi''_{\rho,\beta}(z)}{\Psi'_{\rho,\beta}(z)} + \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{z \Psi'_{\rho,\beta}(z)}{\Psi_{\rho,\beta}(z)} \right) - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

- b. $g_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun lemniskat konvekslik yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^c(g_{\rho,\beta})$,

$$\left(\frac{r^2 \lambda''_{\rho,\beta}(r) + 2r \lambda'_{\rho,\beta}(r)}{\lambda_{\rho,\beta}(r) + r \lambda'_{\rho,\beta}(r)} \right)^2 - 2 \left(\frac{r^2 \lambda''_{\rho,\beta}(r) + 2r \lambda'_{\rho,\beta}(r)}{\lambda_{\rho,\beta}(r) + r \lambda'_{\rho,\beta}(r)} \right) - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

c. $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun lemniskat konvekslik yarıçapı $r_{\mathcal{L}}^c(h_{\rho,\beta})$,

$$\left(\frac{3\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) - r\lambda''_{\rho,\beta}(\sqrt{r})}{4\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) + 2\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r})} \right)^2 - 2 \left(\frac{3\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) - r\lambda''_{\rho,\beta}(\sqrt{r})}{4\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) + 2\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r})} \right) - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

Teorem 5.3 ([52]) $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a. $f_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapı $r_{A,B}^*(f_{\rho,\beta})$,

$$\frac{r\lambda'_{\rho,\beta}(r)}{\lambda_{\rho,\beta}(r)} + \beta \left(\frac{A-B}{1+|B|} \right) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $g_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapı $r_{A,B}^*(g_{\rho,\beta})$,

$$\frac{r\lambda'_{\rho,\beta}(r)}{\lambda_{\rho,\beta}(r)} + \frac{A-B}{1+|B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

c. $h_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapı $r_{A,B}^*(h_{\rho,\beta})$,

$$\frac{\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r})}{\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r})} + 2 \frac{A-B}{1+|B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

Teorem 5.4 ([52]) $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a. $f_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı $r_{A,B}^c(f_{\rho,\beta})$,

$$\frac{r\Psi''_{\rho,\beta}(r)}{\Psi'_{\rho,\beta}(r)} + \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{r\Psi'_{\rho,\beta}(r)}{\Psi_{\rho,\beta}(r)} + \frac{A-B}{1+|B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $g_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı $r_{A,B}^c(g_{\rho,\beta})$,

$$\frac{r^2\lambda''_{\rho,\beta}(r) + 2r\lambda'_{\rho,\beta}(r)}{\lambda_{\rho,\beta}(r) + r\lambda'_{\rho,\beta}(r)} + \frac{A-B}{1+|B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

c. $h_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı $r_{A,B}^c(h_{\rho,\beta})$,

$$\frac{3\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) - r\lambda''_{\rho,\beta}(\sqrt{r})}{4\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) + 2\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r})} + \frac{A-B}{1+|B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

KAYNAKLAR

- [1] L.V. Ahlfors. *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. McGraw-Hill New York, 1966.
- [2] İ. Aktaş. Lemniscate and exponential starlikeness of regular Coulomb wave functions. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 57:372–384, 2020.
- [3] İ. Aktaş. On some geometric properties and hardy class of q –Bessel functions. *AIMS Mathematics.*, 5, 2020.
- [4] İ. Aktaş and Á. Baricz. Bounds for radii of starlikeness of some q – Bessel functions. *Results Math.*, 72:947–963, 2017.
- [5] İ. Aktaş, Á. Baricz, and S. Singh. Geometric and monotonic properties of hyper-Bessel functions. *Ramanujan J.*, pages 275–295, 2020.
- [6] İ. Aktaş, Á. Baricz, and N. Yağmur. Bounds for the radii of univalence of some special functions. *Math. Inequal. Appl.*, 20(2017):825–843, 2017.
- [7] İ. Aktaş and H. Orhan. Bounds for radii of convexity of some q –Bessel functions. *Bull. Korean Math. Soc.*, 57, 2020.
- [8] İ. Aktaş, E. Toklu, and H. Orhan. Radii of uniform convexity of some special functions. *Turkish J. Math.*, 42:3010–3024, 2018.
- [9] İ. Aktaş, Á. Baricz, and H. Orhan. Bounds for radii of starlikeness and convexity of some special functions. *Turkish J. Math.*, 42(1):211–226, 2018.
- [10] R.M. Ali, N.K Jain, and V. Ravichandran. Radii of starlikeness associated with the lemniscate of Bernoulli and the left-half plane. *Appl. Math. Comput.*, 218:6557–6565, 2012.
- [11] M. K. Aouf, J. Dziok, and J. Sokół. On a subclass of strongly starlike functions. *Appl. Math. Lett.*, 24(1):27–32, 2011.

- [12] Á. Baricz, DK. Dimitrov, H. Orhan, and N. Yağmur. Radii of starlikeness of some special functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(2016):3355–3367, 2016.
- [13] Á. Baricz, PA. Kupán, and R. Szász. The radius of starlikeness of normalized Bessel functions of the first kind. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142(2014):2019– 2025, 2014.
- [14] Á. Baricz, H. Orhan, and R. Szász. The radius of α -convexity of normalized Bessel functions of the first kind. *Comput. Methods Funct. Theory.*, 16(2016):93–103, 2016.
- [15] Á. Baricz and A. Prajapati. Radii of starlikeness and convexity of generalized Mittag-Leffler functions. *Math. Commun.*, 25:117–135, 2020.
- [16] Á. Baricz and S. Singh. Zeros of some special entire functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2017.
- [17] Á. Baricz and R. Szász. The radius of convexity of normalized Bessel functions of the first kind. *Anal. Appl.*, 12(2014):485–509, 2014.
- [18] Á. Baricz and R. Szász. The radius of convexity of normalized Bessel functions. *Anal. Math.*, 41(2015):141–151, 2015.
- [19] Á. Baricz and R. Szász. Close-to-convexity of some special functions. *Bull. Malay. Math. Sci. Soc.*, 39(2016):427–437, 2016.
- [20] Á. Baricz, E. Toklu, and E. Kadioğlu. Radii of starlikeness and convexity of Wright function. *Math. Commun.*, 22:1–21, 2018.
- [21] Á. Baricz and N. Yağmur. Geometric properties of some Lommel and Struve functions. *Ramanujan J.*, 42(2017):325–346, 2017.
- [22] T. Başkan. *Kompleks fonksiyonlar teorisi*. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı, 2000.
- [23] L. Bieberbach. Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln. *Sitzungsberichte Preussische Preuss. Akad. Wiss.*, 38:940–955, 1916.

- [24] L. Branges. A proof of the bieberbach conjecture. *Acta Math.*, 154:137–152, 1985.
- [25] P. L. Duren. *Univalent functions*, volume 259. Springer Science & Business Media, 2001.
- [26] P.R. Garabedian and M. Schiffer. A proof of the bieberbach conjecture for the fourth coefficient. *J. Rational Mech. Anal.*, 4:427–465, 1955.
- [27] A.W. Goodman. *Univalent functions. Vol. I*. 1983.
- [28] R. Gorenflo, Y. Luchko, and F. Mainardi. Analytical properties and applications of the Wright function. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2(4):383–414, 1999.
- [29] I. Graham and G. Kohr. *Geometric function theory in one and higher dimensions*. CRC Press, 2003.
- [30] W. Janowski. Extremal problems for a family of functions with positive real part and for some related families. *Ann. Polon. Math.*, 23:159–177, 1970/1971.
- [31] W. Janowski. Some extremal problems for certain families of analytic functions 1. 28(3):297–326, 1973.
- [32] W. Kaplan. Close-to-convex schlicht functions. *Michigan Math. J.*, 1(2):169–185, 1952.
- [33] P. K. Kythe. *Complex analysis: Conformal inequalities and the Bieberbach conjecture*, volume 17. CRC Press, 2016.
- [34] J. E. Littlewood. On inequalities in the theory of functions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2(1):481–519, 1925.
- [35] J. E. Littlewood. *Lectures on the Theory of Functions*. London, 1944.
- [36] W. Ma and D. Minda. A unified treatment of some special classes of univalent functions. In *Proceeding of the Conference on Complex Analysis*, Z. Li, F. Ren, L. Yang and S. Zhang (Eds), Int. Press, pages 157–169, 1994.
- [37] V. Madaan, A. Kumar, and V. Ravichandran. Lemniscate convexity and other properties

- of generalized Bessel functions, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 56(4):404–419, 2019.
- [38] V. Madaan, A. Kumar, and V. Ravichandran. Radii of starlikeness and convexity of some entire functions. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2020.
- [39] S. Ozaki. On the theory of multivalent functions. *Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku, Section A*, 2(40):167–188, 1935.
- [40] R.N. Pederson. A proof of the bieberbach conjecture for the sixth coefficient. *Arc. Rational Mech. Anal.*, 31:331–351, 1968.
- [41] R.N. Pederson and M. Schiffer. A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient. *Arc. Rational Mech. Anal.*, 45:161–193, 1972.
- [42] Y. Polatoğlu and M. Bolcal. The radius of convexity for the class of Janowski convex functions of complex order. *Mat. Vesnik*, 54(1-2):9–12, 2002.
- [43] C. Pommerenke. *Univalent Functions: With a Chapter on Quadratic Differentials by Gerd Jensen*. Vandenhoeck und Ruprecht, 1975.
- [44] W. Rogosinski. *On subordinate functions*. Cambridge University Press, 1939.
- [45] W. Rogosinski. On the coefficients of subordinate functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):48–82, 1945.
- [46] J. Sokół. On application of certain sufficient condition for starlikeness. *J. Math. Appl.*, 30:131–135, 2008.
- [47] J. Sokół. Radius problems in the class S_L^* . *Applied Mathematics and Computation*, 214(2):569–573, 2009.
- [48] J. Sokół and J. Stankiewicz. Radius of convexity of some subclasses of strongly starlike functions. *Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat.*, 19:101–105, 1996.
- [49] E. Toklu. Radii of starlikeness and convexity of q -Mittag-Leffler functions. *Turkish J. Math.*, 43:2610–2630, 2019.

- [50] E. Toklu. Radii of starlikeness and convexity of generalized Struve functions. *Hacet. J. Math. Stat.*, 49:1216–1233, 2020.
- [51] E. Toklu and O. Kara. Radii problems for normalized hyper-Bessel function. *Turkish Journal of Science*, 5:16–22, 2020.
- [52] E. Toklu and N. Karagöz. On some geometric properties of normalized Wright functions. *Cumhuriyet Sci. J.*, 41(3):625–634, 2020.
- [53] S. Verma and V. Ravichandran. Radius problems for ratios of Janowski starlike functions with their derivatives. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 40(2):819–840, 2017.
- [54] E.M. Wright. On the coefficients of power series having exponential singularities. *J.Lond. Math. Soc.*, 8:71–79, 1933.
- [55] D. G. Zill. *A first course in differential equations with modeling applications*. Cengage Learning, 2012.