



**NÖTRAL 4-MANİFOLDLAR ÜZERİNDE
HEMEN HEMEN HERMİT YAPILAR VE
HEMEN HEMEN KÄHLER YAPILAR**

Ayşenur ÖĞE

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Prof. Dr. Aydın GEZER
2017
Her hakkı saklıdır**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**NÖTRAL 4-MANİFOLDLAR ÜZERİNDE HEMEN HEMEN
HERMİT YAPILAR VE HEMEN HEMEN KÄHLER YAPILAR**

Ayşenur ÖĞE

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı

ERZURUM
2017

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

**NÖTRAL 4-MANİFOLDLAR ÜZERİNDE HEMEN HEMEN HERMİT
YAPILAR VE HEMEN HEMEN KÄHLER YAPILAR**

Prof. Dr. Aydın GEZER danışmanlığında, Ayşenur ÖĞE tarafından hazırlanan bu çalışma, 24/03/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Aydın GEZER

İmza :

Üye : Doç. Dr. İsa YILDIRIM

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 30/03/2017 tarih ve 13/31 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NÖTRAL 4-MANİFOLDLAR ÜZERİNDE HEMEN HEMEN HERMİT YAPILAR VE HEMEN HEMEN KÄHLER YAPILAR

Ayşenur ÖĞE

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aydın GEZER

Bu tezin amacı, 4-boyutlu Walker manifoldlar üzerindeki hemen hemen kompleks yapılar ile Hermit metriklerle çalışmaktır. Walker 4-manifoldlar üzerinde Hermit metrik olduğunu gösteren metotlar uygulanıp anlatılmıştır. Ayrıca, Walker 4-manifoldlar üzerinde hemen hemen Hermit ve hemen hemen Kähler yapılar için örnekler verilmiştir.

2017, 34 sayfa

Anahtar Kelimeler: Walker manifold, Kähler yapı, Hermit metrik, Kompleks yapı.

ABSTRACT

Master Thesis

ALMOST HERMITIAN AND ALMOST KÄHLER STRUCTURES ON NEUTRAL 4-MANIFOLDS

Ayşenur ÖĞE

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Geometry

Supervisor: Prof. Dr. Aydın GEZER

The aim of the present paper is to study Hermitian metrics for given almost complex structure on 4-dimensional Walker manifolds. As an illustration, by applying the method show explicitly Hermitian metrics on Walker 4-manifolds. Also, give examples for almost Hermitian manifolds and almost Kähler structures on Walker 4-manifolds.

2017, 34 pages

Keywords: Walker manifold, Kähler structure, Hermitian metric, Complex structure.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, çok değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Aydın GEZER'e en içten dileklerle saygılarımı sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayşenur ÖGE

Mart - 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar.....	3
2.2. Tensör Alanları.....	5
2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon.....	7
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	13
3.1. Pseudo-Riemann Manifoldu.....	13
3.2. Paralel Null-Dağılımı	13
3.3. g Walker Metriği	13
3.4. Hemen Hemen Hermit ve Hemen Hemen Kähler Manifoldlar.....	14
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	17
4.1. 4-Boyutlu Nötral Manifoldlar	17
4.2. Hermit Metriklerin Oluşumu.....	19
4.3. Hemen Hemen Hermit Walker Yapılar.....	23
4.4. Hemen Hemen Kähler-Walker Yapılar	27
5. SONUÇ.....	30
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	35

SİMGELER DİZİNİ

D	Null Dağılımı
I	Birim Afinor Alanı
g	Riemann Metriği
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
Γ_{ij}^k	Afin Konneksiyonunun Katsayıları
$T_p(M_n)$	$p \in M_n$ Noktasındaki Tanjant Uzay
$T_p^*(M_n)$	$p \in M_n$ Noktasındaki Kovektör Uzayı
$T_q^p(m)$	$m \in M_n$ Noktasındaki (p, q) Tipli Tensör Uzayı
∇	Riemann Konneksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Diferensiyellenebilir Atlas.....	5
---	---



1. GİRİŞ

Manifoldlar üzerindeki yapılar teorisi modern diferensiyel geometrinin önemli konularındandır. Bu konulardan birisi de kompleks yapılardır. Böyle yapılara sahip manifoldların diferensiyel geometrik yönleri, Riemann geometri için geniş bir alandır.

Walker manifoldu (M, g, D) şeklindeki üçlüdür. Burada, M n -boyutlu bir manifold, g belirsiz (indefinite) bir metriği, D ise null dağılımı ifade eder. Böyle metriklerin kanonik formları Walker (1950) tarafından elde edilmiştir. Burada (x_1, x_2, x_3, x_4) şeklindeki uygun koordinatların var olduğu gösterilmiş ve metriğin koordinatları üzerinde bazı a , b ve c fonksiyonlarına bağlı olan

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}$$

şekildeki gibi elde edilmiştir.

Walker manifoldu üzerindeki en yoğun çalışmalar 2004 yılından sonra başlamıştır. Matsushita (2004) Walker 4-manifoldlar için uygun hemen hemen kompleks yapılar oluşturmuştur. Chaichi (2005) 4-boyutlu Walker metriklerinin eğrilik özelliklerini incelemiştir. Davidov (2007) hemen hemen Kähler-Walker 4-manifoldları ve (2008) Hermit-Walker 4-manifoldları araştırmıştır.

Sunulan bu tezde 4-boyutlu manifoldlar üzerinde hemen hemen Hermit ve hemen hemen Kähler yapılar üzerinde çalışılmıştır. Çalışmanın daha iyi anlaşılması için konunun sınırlanması amacıyla ikinci bölümde ilgili özellikler ve tanımlar, kuramsal temeller adı altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise pseudo-riemann manifoldu, paralel null dağılımı, g Walker metriği ile hemen hemen Hermit ve hemen hemen Kähler manifoldlar hakkında genel bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise 4-boyutlu nötral manifoldlar üzerinde hemen hemen kompleks ve zıt hemen hemen kompleks yapı oluşturmak için gerekli şartlar ve bu yapılar üzerindeki Kähler formun oluşumu incelenmiştir. Oluşturulan bu kompleks yapı çiftleri ile Hermit metrik oluşturma şartları ve Hermit metriklere örnekler verilmiştir. Son olarak da hemen hemen Hermit Walker yapılar ve hemen hemen Kähler Walker yapılar üzerinde çalışılmıştır (Iscan 2016).

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: f , $\mathbb{R}^n$ uzayının bir U açık kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun r . mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli ise f fonksiyona r . mertebeden diferensiyellenebilirdir denir ve $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Şahin 2013).

Tanım 2.1.2: M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer her $p \in M$ için, $\mathbb{R}^n$ deki bir açık kümeye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir açık komşuluğu U varsa M Hausdorff uzayına bir topolojik manifold veya kısaca manifold denir. Bu durumda $\text{boy}(\mathbb{R}^n) = n$ olduğundan, manifoldun boyutu da n dir ve M_n ile gösterilir (Şahin 2013).

Tanım 2.1.2’de verilen homeomorfizma $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ise, (U, φ) ikilisine bir harita denir. M_n manifoldunun bütün noktalarının en az bir haritada yer alması için bu açık kümelerin arakesitinin boştan farklı olması gerekir. φ bir homeomorfizma olduğundan, $p \in U$ noktasının koordinatları $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ noktasının koordinatları olarak tanımlanabilir. Böylece φ homeomorfizması M_n manifoldunun bir p noktasına $(x_1(p), \dots, x_n(p))$ n -lisini karşılık getirir. $(x_1(p), \dots, x_n(p))$ sayılarına p noktasının φ altındaki yerel koordinatları denir. Bu nedenle manifold, herhangi bir noktasının komşuluğunda n tane bağımsız koordinatla verilen bir küme olarak da düşünülebilir (Şahin 2013).

$U \cap V \neq \emptyset$ olmak üzere (U, φ) ve (V, ψ) iki harita olsun. $U \cap V$ kümesinde bir noktanın φ altındaki koordinatları $(x_1, \dots, x_n)$ olsun. φ dönüşümünün φ^{-1} tersi olduğundan, $U \cap V$ de bir tek p noktası vardır. Şimdi p noktasının ψ altındaki koordinatları da $(y_1, \dots, y_n)$ olsun. Bu durumda bu koordinatlar arasında,

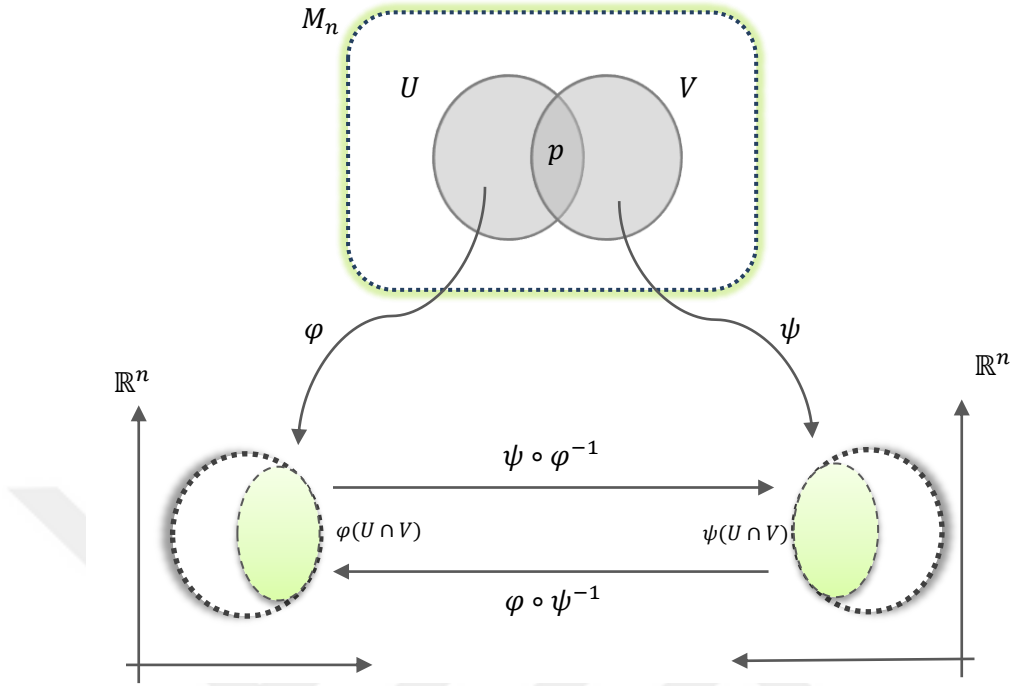
$$y_i = f^i(x_1, \dots, x_n) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n))^i,$$

$$x_i = g^i(y_1, \dots, y_n) = (\varphi \circ \psi^{-1}(y_1, \dots, y_n))^i$$

bağıntısı elde edilir, burada $(x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U \cap V)$, $(y_1, \dots, y_n) \in \psi(U \cap V)$, $i = 1, \dots, n$ şeklindedir. $\psi \circ \varphi^{-1}$ ve $\varphi \circ \psi^{-1}$ homeomorfizmaları birbirinin tersi olduğundan, f^i ve g^i fonksiyonları süreklidir. $U \cap V \neq \emptyset$ durumunda $f^i(x_1, \dots, x_n)$ ve $g^i(y_1, \dots, y_n)$ fonksiyonları r . mertebeden diferensiyellenebiliyorsa (φ, U) ve (ψ, V) haritaları r . mertebeden uyumludur denir. Eğer $U \cap V = \emptyset$ ise uyumlu kabul edilir (Şahin 2013).

Tanım 2.1.3: M_n n -boyutlu manifold olsun. Eğer M_n üzerindeki haritaların bir ailesi olan $\mathbb{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \xi), \dots\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathbb{A}$ kümesine M_n üzerinde r . mertebeden diferensiyellenebilir yapı (veya atlas) denir (Şahin 2013).

- 1) $\{U, V, W, \dots\}$ açık kümeleri M_n manifoldunun bir açık örtüsüdür,
- 2) $\mathbb{A}$ daki herhangi iki harita r . mertebeden uyumludur,
- 3) $\mathbb{A}$ maksimaldir, yani eğer bir $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ haritası $\mathbb{A}$ daki bütün koordinat haritaları ile uyumlu ise bu durumda $(\bar{U}, \bar{\varphi}) \in \mathbb{A}$ dır.



Şekil 2.1. Diferensiyellenebilir Atlas

Tanım 2.1.4: M_n n -boyutlu manifold olarak verilsin. Eğer M_n manifoldu üzerinde r . mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa M_n manifolduna r . mertebeden diferensiyellenebilir manifold adı verilir. Diferensiyellenebilir yapının her bir haritasına M_n manifoldunun uyumlu haritası denir. Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa M_n manifolduna C^∞ -manifold (veya diferensiyellenebilir manifold) adı verilir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.2. Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_p(M_n)$, her $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olarak verilsin. M_n manifoldunun her $p \in M_n$ noktasına $T_p(M_n)$ uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Kobayashi and Nomizu 1963).

Tanım 2.2.2: Her $p \in M_n$ noktasına bir ve yalnız bir $\omega_p \in T_p^*$ (T_p^* , $p \in M_n$ noktasındaki kovektör uzayıdır) kovektörünü karşılık getiren $\omega: p \rightarrow \omega_p$ dönüşümüne M_n üzerinde kovektör alanı adı verilir.

C^∞ sınıfından bir manifold M_n olmak üzere her $m \in M_n$ noktasındaki her bir (p, q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı bulunur.

Tanım 2.2.3: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m)$, her $m \in M_n$ noktasındaki (p, q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p, q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p = 1, q = 0$ ise vektör alanı bulunur. Yani, $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = 0, q = 1$ olursa kovektör alanı bulunur. Eğer $p = 0 = q$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Dolayısıyla $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

$U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise her $x \in U$ için $df|_x \in T_1^0(x)$ olur. Bu yüzden f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü $(0,1)$ tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı adı verilir. Eğer herhangi bir m noktasındaki T_m tensör antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı adı verilir.

T , (p, q) tipli tensör alanı olsun. Kovektör alanları $\theta_1, \dots, \theta_p$ ve vektör alanları $X_1, \dots, X_q$ olmak üzere

$$T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)(m) = T_m(\theta_1(m), \dots, \theta_p(m), X_1(m), \dots, X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özellikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial j_1, \dots, \partial j_q)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan $(0,1)$ tipli tensör alanına 1-form (Pfaffian form) adı verilir.

(p, q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her C^∞ sınıfından $\theta_1, \dots, \theta_p$ kovektör alanları ve her C^∞ sınıfından $X_1, \dots, X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma: u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesi eğrinin noktalarına eşleştirilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralıdır. γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilmiş konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilirdir. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon denir.

Afin konneksiyonun invariant tanımı aşağıdaki gibi verilmektedir.

Tanım 2.3.1: M_n manifoldu üzerinde vektör alanlarının modülü $\mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X, Y): \mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M_n)$$

dönüşümü

$$1) \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

$$2) \nabla_Z (fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X: \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M_n)$$

dönüşümüne de X vektör alanı boyunca kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968). Lokal koordinatlarda $x \in U \subset M_n$ olmak üzere $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n)$ olsun.

$$\nabla_X = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \nabla_i \text{ olmak üzere}$$

$$\nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \Gamma_{ij}^k(x^1, \dots, x^n) \quad (2.1)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $x \in U'$ olacak şekilde $\Psi(x) = (x^{1'}, \dots, x^{n'})$ koordinat komşuluğu alınsın. Burada;

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \nabla_{i'}, \nabla_{i'} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) = \Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \quad (2.2)$$

yazılır. $\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = A_{i'}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ olduğundan ve kovaryant türevin özelliklerinden dolayı

$$\nabla_{A_{i'}^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) = A_{i'}^i \nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad (2.3)$$

olur. Ayrıca

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = A_{j'}^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

olduğundan bu (2.3) denkleminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \nabla_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} A_{j'}^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} + A_{i'}^i A_{j'}^j \Gamma_{ij}^k A_k^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \right) \end{aligned}$$

bulunur. (2.3) denkleminde

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = A_k^{k'} A_{i'}^i A_{j'}^j \Gamma_{ij}^k + A_k^{k'} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \quad (2.4)$$

bulunur. Bu kurala göre dönüşen n^3 sayıdaki Γ_{ij}^k sayılarına afin konneksiyon katsayıları adı verilir. Bazen afin konneksiyon yerine bu katsayılar kullanılabilir.

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{x^j \partial_j} (y^i \partial_i) = x^i \nabla_i (y^j \partial_j) \\ &= x^i \partial_i y^k \partial_k + x^i y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \\ &= x^i (\partial_i y^k + \Gamma_{ij}^k y^j) \partial_k \end{aligned}$$

şeklinde lokal koordinatlarla yazılabilir. Buradan

$$\nabla_i y^k = \partial_i y^k + \Gamma_{ij}^k y^j \quad (2.5)$$

bulunur. (2.5) denklemi du^i ile çarpılırsa

$$\nabla_i y^k du^i = dy^k + \Gamma_{ij}^k du^i y^j \quad (2.6)$$

bulunur. Buradan $\delta y^k = \nabla_i y^k \cdot du^i$ ve $\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k du^i$ ile gösterilirse,

$$\delta y^k = dy^k + w_j^k y^j \quad (2.7)$$

olur. (2.7) denkleminde du yönünde kovaryant türev adı verilir. (2.7) kovaryant türev vektör alanını öteler. Eğer $\delta y^k = 0$ ise vektör alanına paralel vektör alanı adı verilir.

$f = W_k y^k$ fonksiyonunu göz önüne alınsın. Eğer $df = 0$ ise W_k vektör alanı paralel olur.

Bu bilgiyi kullanarak f nin türevi alınır

$$\begin{aligned} df &= \delta W_k y^k + W_k \delta y^k \\ 0 &= \delta W_k y^k + W_k (dy^k + w_j^k y^j) \\ &= \delta W_k y^k + (-dW_k y^k + W_k w_j^k y^j) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\delta W_k = dW_k + W_j w_k^j$$

olarak bulunur. Böylece

$$\nabla_i W_k = \partial_i W_k - \Gamma_{ik}^j W_j \quad (2.8)$$

olarak yazılır. (2.5) ve (2.8) eşitlikleri yardımıyla tensörlerin kovaryant türevi

$$\nabla_k t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \partial_k t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} + \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{km}^{i_\lambda} t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, m, \dots, i_p} - \sum_{\mu=1}^q \Gamma_{kj_\mu}^m t_{j_1, \dots, m, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \quad (2.9)$$

denklemini ile verilir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.4. Riemann Manifoldu

Tanım 2.4.1: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold ve $\mathfrak{S}_0^1(M_n)$ bu manifold üzerinde vektör alanları olmak üzere,

$$g: \mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow C^\infty(M_n, \mathbb{R})$$

ile tanımlanan g bilineer formu (yada (0,2) tipli tensör) simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için,

- 1) $g(X, Y) = g(Y, X)$,
- 2) $g(X, X) \geq 0$ ve her X için $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$,

şartlarını sağlıyorsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. (M_n, g) ikilisi Riemann manifoldu olarak adlandırılır.

Yukarıda pozitif tanımlılık şartı yerine bu şarttan daha zayıf olan, “ Her $Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $g(X, Y) = 0$ olması $X = 0$ olmasını gerektirir.” şeklinde tanımlanan g bilineer formunun regülerlik (yada non-dejenere) şartı konulursa, bu durumda (M_n, g) ikilisine yarı-Riemann (pseudo-Riemann) manifoldu denir (Kühnel 2005).

Regülerlik şartını koordinatlarla ifade etmek gerekirse $X = X^i \partial_i$ ve $Y = Y^j \partial_j$ için,

$$g(X, Y) = g(\partial_i, \partial_j) X^i Y^j = g_{ij} X^i Y^j = 0$$

olur. Son eşitlik her Y^j için sağlandığından $g_{ij}X^i = 0$ olur. Bu denklem sisteminin $X^i = 0$ çözümüne sahip olması için,

$$\text{Det}(g_{ij}) \neq 0$$

olması şarttır. Burada (g_{ij}) , g_{ij} tensörüne karşılık gelen matristir.

Tanım 2.4.2: (M_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere bu manifold üzerinde tanımlı ∇ afin konneksiyon için eğer $\nabla g = 0$ ise bu konneksiyona g ye göre metrik konneksiyon adı verilir (Kobayashi and Nomizu 1963).

Teorem 2.4.1: (M_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere bu manifold üzerinde tanımlı burulmasız bir tek metrik konneksiyon bulunur (Kobayashi and Nomizu 1963).

Yukarıda Teorem 2.4.1 de bahsi geçen metrik konneksiyona Levi-Civita veya Riemann konneksiyonu adı verilir.

Teorem 2.4.2: (M_n, g) Riemann manifoldu ve ∇ ise bu manifoldun Riemann konneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Yukarıdaki (2.10) eşitliğine Kozsul formülü adı verilir ve $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ ve $Z = \partial_k$ doğal koordinatları için,

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \quad (2.11)$$

elde edilir. Burada ki Γ_{ij}^h fonksiyonlarına, ∇ Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları adı verilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Pseudo-Riemann Manifoldu

(M_n, g) pseudo-Riemann manifoldu g simetrik, iki bileşenine göre liner ve regülerlik şartını sağlarsa M_n Riemann manifoldudur. Buradaki g metrik tensörünün pozitif tanımlı olması gerekmez. Böyle metriklere pseudo-Riemann metrik denir (Kobayashi and Nomizu 1963).

3.2. Paralel Null-Dağılımı

M , (p, q) işaretli pseudo-Riemann manifold olsun. $T(M)$ tanjat demetinin $T(M) = V_1 \oplus V_2$ şeklindeki parçalanışı verilmiş olsun. Burada V_1 ve V_2 diferensiyellenebilir alt demetlerine dağılımlar (tamamlayıcı dağılımlar) adı verilir.

$$\pi_1 = T(M_n) \rightarrow V_1$$

$$\pi_2 = T(M_n) \rightarrow V_2$$

tamamlayıcı izdüşüm operatörleri tanımlanmış olur. Eğer $\nabla\pi_1 = 0$ ise V_1 e paralel dağılım adı verilir. (Buna denk olarak X_1 , V_1 değerini alan herhangi bir diferensiyellenebilir vektör alanı ise $\nabla\pi_1$ de V_1 de değerini alır.)

V_1 paralel ve V_1 e kısıtlanmış metrik sıfıra eşit ise V_1 e paralel null dağılımı denir (Kobayashi and Nomizu 1963).

3.3. g Walker Metriği

M_4 manifoldunda g metriğine göre paralel olan 2-boyutlu bir D null dağılımı var ise 4 boyutlu M_4 manifoldu üzerindeki g nötral metriğine Walker metriği adı verilir.

Walker'ın (Walker 1950) teoreminden, a , b ve c ; (x, y, z, t) koordinatlarının fonksiyonları olmak üzere, lokal koordinat sistemine göre Walker metriği

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ile gösterilir. Paralel D null 2 manifoldu lokal olarak $\{\partial_x, \partial_y\}$ ifadesi ile örtülür. Burada $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ ile gösterilecektir. Matsushita (2005) da, g ye göre uygun bir J hemen hemen kompleks yapısı $J\partial_x = \partial_y$ ve $J\partial_y = -\partial_x$ olmak üzere;

$$J = (J_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -c & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

şeklinde tek türlü tanımlanır.

Buradaki uygun J hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$a_x - b_x - 2c_y = 0, \quad a_y - b_y - 2c_x = 0 \quad (3.3)$$

kısmı diferensiyel denklemlerin sağlanmasıdır.

3.4. Hemen Hemen Hermit ve Hemen Hemen Kähler Manifolflar

M_{2n} diferensiyellenebilir bir manifold olarak verilsin. M_{2n} üzerinde $(1,1)$ tipli φ tensör alanı için $\varphi^2 = -1$ olan tensör alanına hemen hemen kompleks yapı adı verilir.

(M_{2n}, φ) ise hemen hemen kompleks manifold denir. M_{2n} üzerindeki Hermit metrik, M_{2n} üzerindeki her X, Y vektör alanları için

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \quad (3.4)$$

eşitliğini sağlayan g Riemann metriğidir. Bazen (3.4) şartını sağlayan g metriğini hibrid metrik olarak da adlandırılabilir.

Hermit metriğe sahip hemen hemen kompleks manifolda hemen hemen Hermit manifold, Hermit metriğe sahip kompleks manifolda ise Hermit manifold adı verilir.

Teorem 3.4.1: M_{2n}, φ hemen hemen kompleks yapısına sahip hemen hemen kompleks manifold olarak verilsin. M_{2n} nin kompleks manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla \varphi = 0$ ve $S = 0$ olacak şekilde ∇ afin konneksiyonunun var olmasıdır. Burada bulunan S , ∇ nın burulma tensörüdür (Kobayashi and Nomizu 1963).

M_{2n}, φ hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermit metriğe sahip hemen hemen Hermit manifold olarak verilsin. M_{2n} üzerindeki Ω esas 2-formu

$$\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y) = (g \circ \varphi)(X, Y) \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.4.2: M_{2n}, φ hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermit metriğe sahip hemen hemen kompleks manifold olarak verilsin. ∇ ise g ile tanımlanan Riemann konneksiyonunun kovaryant türevlemesi olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denk olur:

- 1) $\nabla \varphi = 0$
- 2) φ hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis tensörünün sıfır olması ve Ω esas 2-formunun kapalı olması, yani $N_\varphi = 0$ ve $d\Omega = 0$ (Kobayashi and Nomizu 1963).

M_{2n} hemen hemen kompleks manifoldu üzerindeki g Hermit metriği için Ω esas 2-formu kapalı ise g ye Kähler metrik adı verilir. Kähler metriğe sahip M_{2n} hemen hemen kompleks manifolduna hemen hemen Kähler manifold adı verilir. Kähler metriğe sahip M_{2n} kompleks manifolduna da Kähler manifold adı verilir. Teorem 2.4.1 den, M_{2n} Hermit manifoldunun Kähler manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\varphi = 0$ olmasıdır.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölüm de elde edilen bulgular (Iscan 2016) makalesinde yayımlanmıştır.

4.1. 4-Boyutlu Nötral Manifolds

Bu bölümde 4-boyutlu Hermit ve Kähler yapılar içerisinde bulunan $(+ + - -)$ nötral 4-boyutlu pseudo-Riemann manifoldlar üzerinde çalışılmıştır.

$(2,2)$ şeklinde işaretlenmiş (M_4, g) 4-boyutlu manifoldu alınsın. Eğer g , φ ve φ' tarafından değişmez ve φ ile φ' aşağıdaki özellikleri her $X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M_4)$ için sağlarsa

$$\varphi^2 = \varphi'^2 = -1, \quad \varphi\varphi' = \varphi'\varphi, \quad \varphi \neq \pm\varphi', \quad (4.1)$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y), \quad g(\varphi' X, \varphi' Y) = g(X, Y) \quad (4.2)$$

φ ye hemen hemen kompleks yapı ve φ' ne zıt hemen hemen kompleks yapı denir.

Bu şartları sağlayan g nötral metriği ve ortonormal çatıdaki $\{e_i\}$ ($i = 1,2,3,4$) vektörleri ile $\{e^j\}$ ($j = 1,2,3,4$) kovektörleri, (φ, φ') çifti ile ele alındığında g metriği

$$\begin{aligned} g &= (g(e_i, e_j)) = (g_{ij}) = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 - e^3 \otimes e^3 - e^4 \otimes e^4 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

bulunur.

φ_1 hemen hemen kompleks yapısı ve φ_2 zıt hemen hemen kompleks yapısı, (4.3) de belirtilen $\{e_i\}$ ortonormal çatısına göre verilen g metriğiyle beraber (4.1) ve (4.2) şartlarını sağlar. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\begin{aligned}\varphi_1(e_j, e^i) &= (\varphi_1^i)_j = -e_2 \otimes e^1 + e_1 \otimes e^2 - e_4 \otimes e^3 + e_3 \otimes e^4 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(e_j, e^i) &= (\varphi_2^i)_j = -e_2 \otimes e^1 + e_1 \otimes e^2 + e_4 \otimes e^3 - e_3 \otimes e^4 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.5)$$

Buradaki g ler φ_1 ve φ_2 ile ilişkilidir ve 4-manifoldlarda Kähler formun iki çeşidi aşağıdaki gibi olur.

$$\omega_1(X, Y) = g(\varphi_1 X, Y), \quad \omega_2(X, Y) = g(\varphi_2 X, Y) \quad (4.6)$$

(4.6) daki denklemin matrislerle gösterimi

$$\omega_1 = \varphi_1^T g, \quad \omega_2 = \varphi_2^T g \quad (4.7)$$

şeklindedir. Burada φ^T matrisi φ matrisinin transpozudur.

(4.3), (4.4), (4.5) ve (4.7) den

$$\omega_1 = \omega_{1ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$\omega_2 = \omega_{2ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

eşitlikleri yazılır.

Lokal ortonormal bazların terimleri $\{e^j\}$ ($j = 1,2,3,4$) 1-formdur ve Kähler formu aşağıdaki gibi olur.

$$\omega_1 = \sum_{i<j} \omega_{1ij} e^i \wedge e^j = -e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \quad (4.10)$$

$$\omega_2 = \sum_{i<j} \omega_{2ij} e^i \wedge e^j = -e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4 \quad (4.11)$$

4.2. Hermit Metriklerin Oluşumu

Bu bölümde hemen hemen kompleks yapı çiftlerine göre Hermit metrik oluşumu gösterilmiştir. (φ, φ') hemen hemen kompleks yapı çiftine göre (2,2) şeklinde işaretlenen (M_4, g) pseudo-Riemann 4-manifold olsun.

Herhangi bir g metriği M_4 de (2,2) şeklinde işaretlensin. Hermit metrik olması için

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \quad (4.12)$$

şartını sağlaması gerekir ve matris gösterimi

$$\varphi^T g = -g \varphi \quad (4.13)$$

şeklinde olur. Burada φ^T matrisi φ matrisinin transpozudur.

g matrisinin zıt Hermit metrik olması için

$$g(\varphi'X, Y) = -g(X, \varphi'Y) \quad (4.14)$$

şartını sağlaması gerekir ve matris gösterimi

$$\varphi'^T g = -g \varphi' \quad (4.15)$$

şeklinde olur. Burada φ'^T matrisi φ' matrisinin transpozudur.

Ayrıca, g metriği Hermit ve zıt Hermit metriklerinin her ikisinin özelliklerini sağlıyorsa g ye çift katlı Hermit metrik denir.

(4.4) ve (4.5) de verilen (φ'_1, φ'_2) çiftine göre g Hermit metriğini bulmak için aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.2.1: M_4 de (2,2) olarak işaretlenmiş g^+ metriği (4.4) deki hemen hemen kompleks yapıya göre Hermit metrik olması için gerek ve yeter şart ortonormal bazdaki $\{e_i\}$ lere göre metriğin aşağıdaki gibi olmasıdır.

$$g^+ = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & \alpha & -\delta & \gamma \\ \gamma & -\delta & \beta & 0 \\ \delta & \gamma & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \det g^+ \neq 0 \quad (4.16)$$

α, β, γ ve δ , M_4 de fonksiyonlardır.

İspat: $\{e_i\}$ $i = (1,2,3,4)$ ortonormal çatısına göre g^+ matrisi aşağıdaki gibidir.

$$g^+ = (g_{ij}^+) = \begin{bmatrix} g_{11}^+ & g_{12}^+ & g_{13}^+ & g_{14}^+ \\ g_{21}^+ & g_{22}^+ & g_{23}^+ & g_{24}^+ \\ g_{31}^+ & g_{32}^+ & g_{33}^+ & g_{34}^+ \\ g_{41}^+ & g_{42}^+ & g_{43}^+ & g_{44}^+ \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

(4.4) ve (4.17); (4.13) de yazıldığında aşağıdaki koşullar bulunur.

$$\begin{aligned} g_{11}^+ &= g_{22}^+ (= \alpha), & g_{14}^+ &= g_{41}^+ = -g_{23}^+ = -g_{32}^+ (= \delta), \\ g_{13}^+ &= g_{31}^+ = g_{24}^+ = g_{42}^+ (= \gamma), & g_{33}^+ &= g_{44}^+ (= \beta). \end{aligned}$$

Dolayısıyla g^+ tarafından belirtilen (4.16), (4.4) de verilen φ e göre Hermit metriktir.

Teorem 4.2.2: M_4 de (2,2) şeklinde işaretlenmiş g^- metriği (4.5) deki zıt hemen hemen kompleks yapıya göre zıt Hermit metrik olması için gerek ve yeter şart ortonormal bazdaki $\{e_i\}$ lere göre metriğin aşağıdaki gibi olmasıdır.

$$g^- = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & \alpha & \delta & -\gamma \\ \gamma & \delta & \beta & 0 \\ \delta & -\gamma & 0 & \beta \end{bmatrix}, \det g^- \neq 0 \quad (4.18)$$

α, β, γ ve δ , M_4 de fonksiyonlardır.

İspat: Teorem 4.2.1 nin ispatında olduğu gibi, g_{ij}^- zıt Hermit metriği için (4.5) ve (4.17); (4.15) de yazıldığında aşağıdaki koşullar bulunur.

$$\begin{aligned} g_{11}^- &= g_{22}^- (= \alpha), & g_{14}^- &= g_{41}^- = g_{23}^- = g_{32}^- (= \delta), \\ g_{13}^- &= g_{31}^- = -g_{24}^- = -g_{42}^- (= \gamma), & g_{33}^- &= g_{44}^- (= \beta). \end{aligned}$$

Dolayısıyla g^- tarafından belirtilen (4.18), (4.5) de verilen φ ye göre zıt Hermit metriktir.

Teorem 4.2.1 de görüldüğü gibi g_{11} , g_{22} , g_{33} ve g_{44} bileşenleri g^+ ve g^- de aynıdır. Hermit ve zıt Hermit metriğinin birlikte bulunduğu çift katlı Hermit metriği tanımlamak için aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.2.1: M_4 de (2,2) olarak işaretlenmiş metrik (4.4) ve (4.5) de verilen (φ'_1, φ'_2) ikilisine göre çift katlı Hermit metrik olması için gerek ve yeter şart $\{e_i\}$ ortonormal çatısına göre metriğin aşağıdaki gibi olmasıdır.

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \det g \neq 0. \quad (4.19)$$

Hermit metrikler için örnekler aşağıdaki gibidir.

$$g^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

ve

$$g^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

(4.20) de $g_{13}^+ = g_{24}^+ = 1$ ve $g_{14}^+ = g_{23}^+ = 0$

(4.21) de $g_{14}^+ = -g_{23}^+ = 1$ ve $g_{13}^+ = g_{24}^+ = 0$

durumları karşılık gelir.

Zıt Hermit metrikler için örnekler aşağıdaki gibidir.

$$g^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

ve

$$g^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

(4.22) de $g_{13}^- = -g_{24}^- = 1$ ve $g_{14}^- = g_{23}^- = 0$

(4.23) de $g_{14}^- = g_{23}^- = 1$ ve $g_{13}^- = g_{24}^- = 0$

durumları karşılık gelir.

4.3. Hemen Hemen Hermit Walker Yapılar

Bu bölümde Walker 4-manifoldlar üzerindeki Hermit metriklere çalışılmıştır. (M_4, g, D) üçlüsü Walker 4-manifolttur. Buradaki D ; g metriği üzerinde paralel dağıtım ve 2 boyutlu null düzlemdir. Walker'ın teoremine göre (Walker 1950) uygun (x^1, x^2, x^3, x^4) koordinatlarıyla g metriği aşağıdaki gibidir.

$$g = g_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

a, b ve c , (x^1, x^2, x^3, x^4) koordinatlarında fonksiyonlardır (Matsushita 2005; Devidov 2007; Devidov 2008; Salimov 2010; İşcan 2010, 2012, 2014; Ozkan 2014).

(4.24) deki Walker g metriği ile (M_4, g) Walker 4-manifolttur. Eğer $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) yi ortonormal çatı, $\{\partial_j\}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) yi doğal çatı ve $A = (A_j^i)$ matris şeklinde yazılırsa aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$g = A^T g' A \quad (4.25)$$

g' metriği $\{\partial_j\}$ doğal çatısına göre verilen metrik, A^T matrisi A matrisinin transpozudur ($\det A = \pm 1$).

(4.3) ve (4.24) alt başlıkları (4.25) de yazılırsa; A matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$A = (A_j^i) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(1-a) & 0 & \frac{1}{2}(1+a) \\ \frac{1}{2}(1-b) & c & -\frac{1}{2}(1+b) & c \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Ayrıca afinor alanlar için $A = (A_j^i)$ matrisi koordinatlarla aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\varphi = A^{-1} \varphi' A, \quad (4.27)$$

Burada φ' , $\{\partial_j\}$ doğal çatısında (1,1) tipli tensör alanıdır; A^{-1} matrisi ise (4.26) da verilen A matrisinin ters matrisidir.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & c & \frac{1}{2}(1+b) \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}(1+a) & 0 \\ 0 & -1 & -c & \frac{1}{2}(1-b) \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}(1-a) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

(4.4), (4.26) ve (4.28) alt başlıklarında verilen A matrisi (4.27) de yazıldığında φ'_1 hemen hemen kompleks yapısı ∂_i ($i = 1,2,3,4$) doğal çatısına göre aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varphi'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & c & -\frac{1}{2}(a-b) \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}(a-b) & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Matsushita (2005)'ya göre hemen hemen kompleks yapısının -1 ile çarpılmasıyla φ'_1 örtüşür.

Benzer olarak (4.5), (4.26) ve (4.28) alt başlıklarının (4.27) de yazılmasıyla φ'_2 zıt hemen hemen kompleks yapısı ∂_i ($i = 1,2,3,4$) doğal çatısına göre aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varphi'_2 = \begin{bmatrix} 0 & -a & -ac & -\frac{1}{2}(a-b) \\ b & 0 & -2c^2 - \frac{1}{2}(1-ab) & -bc \\ 0 & 2 & 2c & b \\ -2 & 0 & -a & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Matsushita (2005)'ya göre hemen hemen kompleks yapısının -2 ile çarpılmasıyla φ'_2 örtüşür.

Önerme 4.3.1: (4.26) daki A matrisi ile birlikte Walker 4-manifoldlarda (4.20) ve (4.21) örnekleri alınırsa $\{\partial_i\}$ ($i = 1,2,3,4$) doğal çatısına göre aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$g^{+'} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -a & 0 \\ 0 & -2 & -2c & -b \\ -a & -2c & -2c^2 + \frac{1}{2}(1-a)^2 & -bc \\ 0 & -b & -bc & \frac{1}{2}(1-b)^2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$g^{+'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2c & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Böylece (M_4, φ'_1, g'_+) üçlüsüne; (4.31) deki g'_+ Hermit metriği ve (4.29) daki φ'_1 hemen hemen kompleks yapısı, (4.32) deki g'_+ Hermit metriği ve (4.29) daki φ'_1 hemen hemen kompleks yapısı ile beraber hemen hemen Hermit Walker 4-manifold denir.

Önerme 4.3.2: (4.26) daki A matrisiyle; Walker 4 -manifold üzerindeki (4.22) ve (4.23) tipik zıt Hermit metrik örnekleri $\{\partial_i\}$ ($i = 1,2,3,4$) doğal çatısına göre alınırsa aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$g'_- = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & -2 & -2c & -b \\ a & -2c & -2c^2 - \frac{1}{2}(1-a)^2 & -bc \\ 0 & -b & -bc & \frac{1}{2}(1-b)^2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$g'_- = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2c & b \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 2c & a & 2ac & -\frac{1}{2}(1-ab) \\ b & 0 & -\frac{1}{2}(1-ab) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Böylece (M_4, φ'_2, g'_-) üçlüsüne; (4.33) deki g'_- zıt Hermit metriği ve (4.30) daki zıt φ'_2 hemen hemen kompleks yapısı, (4.34) deki g'_- zıt Hermit metriği ve (4.30) daki φ'_2 zıt hemen hemen kompleks yapısıyla beraber zıt hemen hemen Hermit Walker 4-manifold denir.

4.4. Hemen Hemen Kähler-Walker Yapılar

Bu bölümde Walker 4-manifold üzerindeki Kähler yapılarında çalışılmıştır.

(M_4, g) , (4.24) deki g Walker metriği ile Walker 4-manifolttur. $(0,2)$ tipindeki tensör alanları ω , $A = (A_j^i)$ matrisi olarak verilirse (4.26) daki eşitlik

$$\omega = A^T \omega' A \quad (4.35)$$

şeklinde olur. Burada ω' , $\{\partial_j\}$ doğal çatısının $(0,2)$ tipli tensör alanları ve A^T matrisi A matrisinin transpoz matrisidir.

(4.8) ve (4.26) alt başlıkları (4.35) de yazılırsa (4.8) deki Kähler formu aşağıdaki gibi olur.

$$\omega'_1 = (\omega'_{1ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2}(a+b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a+b) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

(4.36) daki Kähler formu koordinatlarla aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \sum_{i < j} \omega'_{1ij} dx^i \wedge dx^j \\ &= -dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3 - \frac{1}{2}(a+b) dx^3 \wedge dx^4 \end{aligned} \quad (4.37)$$

(4.9) ve (4.26) alt başlıkları (4.35) de yazılırsa, (4.9) daki Kähler formu aşağıdaki gibi olur.

$$\omega'_2 = (\omega'_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2c & -b \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 2c & -a & 0 & -\frac{1}{2}(1+ab) \\ b & 0 & \frac{1}{2}(1+ab) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

(4.38) deki Kähler formu koordinatlarla aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \omega'_2 &= \sum_{i<j} \omega'_{ij} dx^i \wedge dx^j \\ &= -2dx^1 \wedge dx^2 - 2cdx^1 \wedge dx^3 - bdx^1 \wedge dx^4 + adx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - \frac{1}{2}(1+ab)dx^3 \wedge dx^4 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ayrıca, simplektik yapıyla ilgili aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.4.1: (4.37) deki Kähler form bir simplektik form $(d\omega'_1) = 0$ ise kısmi diferensiyel denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$a_1 + b_1 = 0, \quad a_2 + b_2 = 0. \quad (4.40)$$

Böylece (4.40) daki denklem Walker 4-manifold üzerinde sağlanır.

$(g'_+, \varphi'_1, \omega'_1)$; (4.31) deki g'_+ Hermit metriği ve (4.29) daki φ'_1 hemen hemen kompleks yapısı, (4.32) deki g'_+ Hermit metriği ve (4.29) daki φ'_1 hemen hemen kompleks yapısı ile beraber hemen hemen Kähler yapıdır denir.

(4.39) dan aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.4.2: (4.39) da ki Kähler form simplektik form $(d\omega'_2) = 0$ ise kısmi diferensiyel denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 2c_2 + a_1 &= 0, \\
 b_2 &= 0, \\
 4c_4 + b_3 - (ab)_1 &= 0, \\
 2a_4 - (ab)_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Böylece (4.41) deki denklem Walker 4-manifold üzerinde sağlanır.

$(g'_-, \varphi'_2, \omega'_2)$ üçlüsüne; (4.33) deki g'_- zıt Hermit metriği ve (4.30) daki φ'_2 zıt hemen hemen kompleks yapısı, (4.34) deki g'_- zıt Hermit metriği ve (4.30) daki φ'_2 zıt hemen hemen kompleks yapısıyla beraber zıt hemen hemen Kähler yapıdır denir.

5. SONUÇ

Bu tez (Iscan 2016) adlı makalenin derlemesi niteliğindedir. Bu tezde aşağıdaki sonuçlar sunulmuştur.

İlk olarak (M_4, φ'_1, g'_+) üçlüsünün hemen hemen Hermit Walker 4-manifold olması için

$$g^{+'} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -a & 0 \\ 0 & -2 & -2c & -b \\ -a & -2c & -2c^2 + \frac{1}{2}(1-a)^2 & -bc \\ 0 & -b & -bc & \frac{1}{2}(1-b)^2 \end{bmatrix}$$

Hermit metriği ve

$$\varphi'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & c & -\frac{1}{2}(a-b) \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}(a-b) & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

hemen hemen kompleks yapısı ile

$$g^{+'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2c & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & 0 \end{bmatrix}$$

Hermit metriği ile

$$\varphi'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & c & -\frac{1}{2}(a-b) \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}(a-b) & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

hemen hemen kompleks yapısının beraber ele alınması gerektiği sunulmuştur.

Son olarak $(g'_+, \varphi'_1, \omega'_1)$ üçlüsünün hemen hemen Kähler yapı olması için

$$g^{+'} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -a & 0 \\ 0 & -2 & -2c & -b \\ -a & -2c & -2c^2 + \frac{1}{2}(1-a)^2 & -bc \\ 0 & -b & -bc & \frac{1}{2}(1-b)^2 \end{bmatrix}$$

Hermit metriği ve

$$\varphi'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & c & -\frac{1}{2}(a-b) \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}(a-b) & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

hemen hemen kompleks yapısı ile

$$g^{+'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2c & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & 0 \end{bmatrix}$$

Hermit metriği ve

$$\varphi'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & c & -\frac{1}{2}(a-b) \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}(a-b) & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

hemen hemen kompleks yapısının beraber ele alınması gerektiği sunulmuştur.



KAYNAKLAR

- Armstrong J., 1997. On Four-Dimensional Almost Kähler Manifolds, Quart J. Math. Oxford, (2), 405-415.
- Bishop R.L. and Goldberg S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Mcmillan Company, New York, p.19-135.
- Chaichi M., Garcia-Rio E. and Matsushita Y., 2005. Curvature Properties of Four-Dimensional Walker Metrics. Class. Quantum. Grav, 22, No. 3, 559-577.
- Davidov J., Díaz-Ramos J.C., García-Río E., Matsushita Y., Mu.karov O. and Vázquez-Lorenzo R., 2007. Almost Kähler Walker 4 -manifolds, J. Geom. Phys., 57, 1075-1088.
- Davidov J., Díaz-Ramos J.C., García-Río E., Matsushita Y., Mu.karov O. and Vázquez-Lorenzo R., 2008. Hermitian-Walker 4 -manifolds, J. Geom. Phys., 58, 307-323.
- Gray A., 1966. Some examples of almost Hermitian manifolds, Illinois J. Math., 10, 353-366.
- Gray A., Hervella L.M., 1980. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 123 (1), 35-58.
- Iscan M., 2010. On Norden structures on neutral 4 -manifolds with almost paracomplex structures, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 10, 1350052
- Iscan M., Gezer A. and Salimov A.A., 2012. Some properties concerning curvature tensors of eight- dimensional Walker manifolds, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry 8 (1), 21-37.
- Iscan M., Sarsilmaz H., Turanli S., 2014. On 4-dimensional almost para-complex pure-Walker manifolds, Turk J. Math., 38, 1071-1080.
- Iscan M., 2016. Almost Hermitian And Almost Kähler Structures On Neutral 4-Manifolds, Dynamical Systems, Vol.18, pp 32-42.
- Kobayashi S., and Nomizu K., 1963. Foundations of Differential Geometry. Interscience Publishers.
- Kühnel, W., 2005. Differential geometry curves- surfaces- manifolds. Amer. Mat. Soc., New York.
- Matsushita Y., 2004. Four-dimensional Walker metrics and symplectic structure, J. Geom. Phys., 52, 89-99.
- Matsushita Y., 2005. Walker 4 -manifolds with proper almost complex structure, J. Geom. Phys., 55, 385-398.
- Ozkan M., Iscan M., 2014. Some properties of para-Kähler-Walker metrics, Annales Polonici Mathematici, 112, 115-125.
- Salamon S., 1994. Almost-Hermitian geometry, Differential Geometry and its Applications, 4 (3), 259-282.
- Salimov A.A, Iscan M., 2010. Some properties of Norden Walker metrics, Kodai Math. J., 33, 283-293.
- Salimov A.A, Iscan M., Akbulut K., 2010. Notes on para-Norden-Walker 4 -manifolds, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 7, 1331-1347.

- Sekigawa K., 1987. On some 4 -dimensional compact almost Hermitian manifolds, J. Ramanujan Math. Soc., 2, 101.116.
- Şahin, B., 2013. Manifoldların diferensiyel geometrisi., Nobel yayıncılık, Ankara.
- Tricerri F. and Vanhecke L., 1981. Curvature tensors on almost Hermitian manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 267, 365-398.
- Walker A.G., 1950. Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, Quart. J. Math. Oxford, 1, 69-79.



ÖZGEÇMİŞ

Ayşenur ÖĞE 1990 yılında Erzurum’da dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum’ da tamamladı. 2009 yılında girdiği Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2011 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi’ne yatay geçiş yaptı. 2014 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. 2015 yılında aynı bölümde yüksek lisansa başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.

