

EYLÜL 2023

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

AHMET KILIN

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÖTROSOFİK TOPOLOJİK UZAYLAR

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMET KILIN
EYLÜL 2023

NÖTROSOFİK TOPOLOJİK UZAYLAR

Gaziantep Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitü

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah KARGIN

İkinci Danışman

Prof. Dr. Memet ŞAHİN

Ahmet KILIN

Eylül 2023



©2023[Gaziantep Üniversitesi]

NÖTROSOFİK TOPOLOJİK UZAY

başlıklı bu çalışma, **Ahmet KILIN** tarafından hazırlanmış ve yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü'nde** Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Çiğdem AYKAÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

.....

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
Matematik Bölüm Başkanı

.....

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah KARGIN
Danışman

.....

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
İkinci Danışman
Gaziantep Üniversitesi

.....

Sınav Tarihi: 08 Eylül 2023

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Necati OLGUN
Gaziantep Üniversitesi

.....

Doç. Dr. Vakkas ULUÇAY
Kilis 7 Aralık Üniversitesi

.....

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah KARGIN
Gaziantep Üniversitesi

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Ahmet KILIN

ABSTRACT

NEUTROSOPHIC TOPOLOGICAL SPACES

KILIN, Ahmet

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Abdullah KARGIN

Co-Supervisor : Prof. Dr. Memet ŞAHİN

September 2023

61 pages

This master thesis consists of six chapters. In the first part; brief history of fuzzy set, intuitionistic fuzzy set and neutrosophic set was mentioned. In the second part; Fuzzy set, intuitionistic fuzzy set definitions, neutrosophic set and neutrosophic topological space definitions and properties were given. In the third chapter, the cartesian product of neutrosophic topological spaces and the definitions and properties of some types of neutrosophic sets in neutrosophic topological spaces were focused on. In the fourth chapter, definitions, propositions and examples related to some new concepts and functions in neutrosophic topology are given in the fourth chapter. Generalized neutrosophic b-open clusters in neutrosophic topological space are mentioned in the fifth chapter. In the last chapter, the results obtained in this thesis are given.

Key Words: Fuzzy Set, Intuitionistic Fuzzy Set, Neutrosophic Set, Neutrosophic Topologic Spaces

ÖZET

NÖTROSOFİK TOPOLOJİK UZAYLAR

KILIN, Ahmet

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Abdullah KARGIN

İkinci Danışman : Prof. Dr. Memet ŞAHİN

Eylül 2023

61 sayfa

Bu yüksek lisans tezi altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; bulanık küme, sezgisel bulanık küme ile nörtrosofik kümenin kısaca tarihçelerinden bahsedildi. İkinci bölümde; bulanık küme, sezgisel bulanık küme tanımları ile nörtrosofik küme ve nörtrosofik topolojik uzay tanım ve özellikleri verildi. Üçüncü bölümde ise, nörtrosofik topolojik uzayların kartezyen çarpımı ve nörtrosofik topolojik uzaylarda bazı nörtrosofik küme çeşitlerinin tanım ve özellikleri üzerinde duruldu. Dördüncü bölümde ise nörtrosofik topolojide bazı yeni kavramlar ve fonksiyonlar üzerine alanlarla ilgili tanımlar, önermeler ve örnekler verildi. Beşinci bölümde nörtrosofik topolojik uzayda genelleştirilmiş nörtrosofik b-açık kümelere ise değinildi. Son bölümde ise bu tezde elde edilen sonuçlara yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Küme, Sezgisel Bulanık Küme, Nörtrosofik Küme, Nörtrosofik Topolojik Uzaylar



'Canum aileme'

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Prof. Dr. Memet ŞAHİN'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Örneklerin toplanmasında, izlenecek yol ve yöntemlerin belirlenmesinde desteklerini benden esirgemeyen Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Abdullah KARGIN'a, çok teşekkür ederim.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik annem ve babam ile tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SEMBOLLER LİSTESİ	xi
KISALTMALAR LİSTESİ	xii
BÖLÜM I: GİRİŞ	1
BÖLÜM II: GENEL BİLGİLER	3
2.1. Bulanık Küme	3
2.2. Sezgisel Bulanık Küme.....	3
2.3. Nötrosofik Küme ve Özellikleri.....	4
2.4. Nötrosofik Topolojik Uzaylar	7
BÖLÜM III: NÖTROSOFİK TOPOLOJİK UZAYLARIN KARTEZYEN	
ÇARPIMI VE NÖTROSOFİK TOPOLOJİK	
UZAYLARDA BAZI NÖTROSOFİK KÜME ÇEŞİTLERİ	12
3.1. Nötrosofik Topolojik Uzayların Kartezyen Çarpımı.....	12
3.2. Nötrosofik Topolojik Uzaylardaki Nötrosofik Yarı Açık Kümeler	21
3.3. Nötrosofik Topolojik Uzaylardaki Nötrosofik Yarı Kapalı Kümeler	24
3.4. Nötrosofik Topolojik Uzaylarda Nötrosofik Yarı İç	28
3.5. Nötrosofik Topolojik Uzaylarda Nötrosofik Yarı Kapanış	31
BÖLÜM IV: NÖTROSOFİK TOPOLOJİDE BAZI YENİ KAVRAMLAR VE	
FONKSİYONLAR ÜZERİNE ALANLAR	39
4.1. Nötrosofik Topolojik Uzaylarda Bazı Yeni Kavramlar	39
4.2. Nötrosofik Süreklilik	42

BÖLÜM V: NÖTROSOFİK TOPOLOJİK UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ

b-AÇIK KÜMELER.....47

5.1. Genelleştirilmiş Nötrosofik b-Açık Küme 47

BÖLÜM VI: SONUÇ VE ÖNERİLER.....56

KAYNAKLAR.....57

ÖZGEÇMİŞ (CV).....61



SEMBOLLER LİSTESİ

$\mu_A(x)$	x 'in A kümesine ait olma derecesi
$\vartheta_A(x)$	x 'in A kümesine ait olmama derecesi
$T_A(x)$	x 'in A kümesindeki doğruluk derecesi
$I_A(x)$	x 'in A kümesindeki belirsizlik derecesi
$F_A(x)$	x 'in A kümesindeki yanlışlık derecesi
$\leq$	Küçük eşit
$\geq$	Büyük eşit
$\cap$	Kesişim işlemi
$\cup$	Birleşim işlemi
$\setminus$	Fark işlemi
$\times$	Kartezyen çarpım
$\subseteq$	Alt küme
$\in$	Elemanıdır
$\wedge$	Ve
$\vee$	Veya
$\supseteq$	Kapsar
$\not\subseteq$	Alt kümesi veya eşit değil
A^c	A 'nın tümleyeni

KISALTMALAR LİSTESİ

N_k	Nötrosofik Kapanışı
N_i	Nötrosofik İçi
N_a	Nötrosofik Açık Küme
NK	Nötrosofik Kapalı Küme
N_{yi}	Nötrosofik Yarı İç Kısım
N_{yk}	Nötrosofik Yarı Kapanışı
$NDAK$	Nötrosofik Düzenli Açık Küme
$NÖAK$	Nötrosofik Ön Açık Küme
NTU	Nötrosofik Topolojik Uzay
$NYAK$	Nötrosofik Yarı Açık Küme
$NPOK$	Nötrosofik Pro Açık Küme
$N\alpha AK$	Nötrosofik α Açık Küme

BÖLÜM I

GİRİŞ

Hayatımızın her alanında belirsizlik içeren problemlerle karşı karşıya kalmaktayız. Karşılaştığımız bu problemleri çözebilmek, modelleyebilmek adına birçok metod geliştirilmiştir. Bu teorilerin bazıları klasik küme teorisi, olasılık teorisi, bulanık küme teorisidir. Klasik küme teorisi, bir elemanın bir kümeye kesin üye olması veya kesin üye olmaması ile ilgilidir. Bu teoriye göre istediğimiz özelliğe sahip olan bir eleman veya çalışma alanı içerisindeki ölçümler tanımlanmış olan bir kümeye ya aittir ya da değildir. 1965 yılında Zadeh [1] tarafından tanımlanan bulanık küme teorisi bir X evrensel kümesinin elemanlarını $[0,1]$ aralığına taşıyan bir üyelik fonksiyonu yardımı ile inşa edilmiştir. Bazı araştırmacılar ilerleyen zamanlarda bulanık küme üzerine araştırma [2-4] yaptılar. Ayrıca bulanık küme kavramının ortaya çıkışından sonra, Chang [5] tarafından bulanık topolojik uzay kavramı tanımlandı ve genel topolojik kavramlar bulanık mantığa göre dönüştürüldü. 1983 yılında Atanassov tarafından bulanık kümenin bir genellemesi olarak üye olmanın yanında, üye olmama fonksiyonunu ilave ederek sezgisel bulanık küme teorisi [6] tanımlandı. Bunun üzerine araştırmacılar sezgisel bulanık kümeyi kullanarak yeni çalışmalar [7-9] yaptılar. Coker ise sezgisel bulanık küme kavramını kullanarak, sezgisel bulanık topolojik uzay [10] kavramını tanımlandı. Sezgisel bulanık küme teorisinde, her elemanın üye ve üye olmama derecesinin aldığı değerler toplamı her zaman $[0,1]$ aralığında yer almaktadır. Bu kısıtlama belirsizlik içeren problemler için modelleme sıkıntısı oluşturmaktadır. Bu durumun giderilmesi için 1998 yılında Smarandache tarafından bulanık küme ve sezgisel küme teorisini de içeren nütrosifik küme [11] kavramı tanımlandı. Nütrosifik kümede üyelik derecesi, üye olmama derecesi ve belirsizlik derecesi birbirinden bağımsız olarak tanımlanmıştır. Böylece en objektif değerlendirmelerin yapılabileceği bir mantık türü elde edilmiştir. Bazı araştırmacılar nütrosifik mantığı kullanarak yeni çalışmalar [12-14] yaptılar. Nütrosofi kavramlarının tanımlanmasından sonra Salama ve Alblowi nütrosifik klasik küme ve nütrosifik klasik topolojik uzayı [15] tanımlandı.

Salama ve Alblowi ayrıca genelleştirilmiş n trosofik uzayı [16] inceledi. Ayrıca çok sayıda araştırmacı n trosofik küme üzerine çeşitli araştırmalar [17-35] yaptılar.

Jeon ve arkadaşları n trosofik topoloji bağlamında incelenen sezgisel bulanık α - süreklilik ve  n süreklilik [36] kavramlarını tanımladı. Arokiarani, ve arkadaşları n trosofik yarı açık fonksiyonları [37] inceledi.

Ishwarya ve Bhageerathi n trosofik yarı kapalı küme ve n trosofik yarı açık küme [38] üzerine çalıştı. Rao ve Srinivasa n trosofik pro-açık ve pro-kapalı kümeyi [39] tanımladı. Dhavaseelan ve Jafari genelleştirilmiş n trosofik kapalı kümelere [40] çalıştı. Pushpalatha ve Nandhini n trosofik topolojik uzaylarda n trosofik genelleştirilmiş kapalı kümeleri [41] tanımladı. Shanthi, ve arkadaşları n trosofik topolojik uzaylarda n trosofik genelleştirilmiş yarı kapalı kümeleri [42] inceledi. Ebenanjar, ve arkadaşları n trosofik topolojik uzaylarda n trosofik b -açık kümeler [43] üzerinde çalıştı. Maheswari, ve arkadaşları n trosofik topolojik uzaylar da n trosofik genelleştirilmiş b -kapalı kümeleri [44] tanımladı. Wang ve arkadaşları tek değerli n trosofik kümeyi [45] tanımladılar. Das ve arkadaşları ise n trosofik topolojik uzayda genelleştirilmiş n trosofik b -açık kümeler üzerine [46] çalıştılar.

Bu tezin ikinci bölümünde bulanık küme [1] ve sezgisel bulanık küme [6] tanımları ile n trosofik küme [11], n trosofik topolojik uzay tanımları [15] verildi ve özellikleri incelendi.    nc  bölüm de ise çarpım ile ilgili n trosofik topolojik uzay gözden geçirildi ve bununla ilgili bazı teoremler verildi ve ispatları [38] incelendi. Ayrıca n trosofik topolojik uzaylarda n trosofik yarı açık kümeler ve n trosofik yarı kapalı kümeler verildi. Bunun yanı sıra n trosofik yarı i  ve n trosofik yarı kapanış kavramları üzerinde duruldu. Dördüncü bölüm de ise n trosofik topolojide bazı yeni kavramlar ve fonksiyonlar üzerine alanlarla ilgili tanımlar, önermeler ve örnekler [37] verildi. Beşinci bölüm de ise n trosofik topolojik uzayda genelleştirilmiş n trosofik b -açık kümelere [46] değinildi. Son bölüm olan altıncı bölüm de ise bu tezde elde edilen sonuçlara yer verildi.

BÖLÜM II

GENEL BİLGİLER

Bu bölümde bulanık küme, sezgisel bulanık küme tanımları ile nütrosifik küme ve nütrosifik topolojik uzay tanımı verildi, özellikleri gözden geçirildi.

2.1 Bulanık Küme

Tanım 2.1.1: [1] X boştan farklı bir küme olsun.

$\forall x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ olmak üzere

$$\mu_A: X \rightarrow [0,1]$$

fonksiyonu ile bir A bulanık kümesi;

$$A = \{\langle x, \mu_A(x) \rangle : x \in X\}$$

şeklindedir. Burada $\mu_A(x)$, $x \in X$ in A kümesine ait olma derecesidir.

X kümesi ve $\emptyset$ küme

$$X = \{\langle x, 1 \rangle : x \in X\}, \emptyset = \{\langle x, 0 \rangle : x \in X\}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.1.2: $A = \{\langle x_1, (0.7) \rangle, \langle x_2, (0.2) \rangle, \langle x_3, (0.5) \rangle : x_1, x_2, x_3 \in X\}$ bulanık kümesi verilsin. Burada $\mu_A(x) = 0.7$, $x_1 \in X$ 'in, $\mu_A(x) = 0.2$, $x_2 \in X$ 'in, $\mu_A(x) = 0.5$, $x_3 \in X$ 'in A kümesine ait olma dereceleridir.

2.2 Sezgisel Bulanık Küme

Tanım 2.2.1: [6] X boştan farklı bir küme olsun.

$\forall x \in X$ için

$$0 \leq \mu_B(x) + \vartheta_B(x) \leq 1$$

olmak üzere

$$\mu_B: X \rightarrow [0,1] \text{ ve } \vartheta_B: X \rightarrow [0,1]$$

fonksiyonları ile bir B sezgisel bulanık kümesi;

$$B = \{\langle x, \mu_B(x), \vartheta_B(x) \rangle : x \in X\}$$

şeklindedir. Burada $\mu_B(x)$, $x \in X$ in B kümesine ait olma derecesi ve $\vartheta_B(x)$,

$x \in X'$ in B kümesine ait olmama derecesidir.

2.3 Nötrosofik Küme Ve Özellikleri

Tanım 2.3.1: [11] X boş olmayan bir küme olsun. Bir A nötrosofik kümesi,

$$A = \{\langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle : x \in X\}$$

şeklindedir. Burada

$$0 \leq T_{A(x)} + I_{A(x)} + F_{A(x)} \leq 3^+$$

olmak üzere

$$T_A: X \rightarrow]0, 1^+[, I_A: X \rightarrow]0, 1^+[, F_A: X \rightarrow]0, 1^+[$$

fonksiyonları sırasıyla, üyelik, belirsizlik derecesi ve üye olmama derecesidir.

Tanım 2.3.2: [45] X boş olmayan bir küme olsun. Bir A tek değerli nötrosofik kümesi,

$$A = \{\langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle : x \in X\}$$

şeklindedir. Burada

$$0 \leq T_{A(x)} + I_{A(x)} + F_{A(x)} \leq 3$$

olmak üzere

$$T_A: X \rightarrow [0,1], I_A: X \rightarrow [0,1], F_A: X \rightarrow [0,1]$$

fonksiyonları sırasıyla, $x \in X'$ in üyelik, belirsizlik derecesi ve üye olmama derecesidir.

Tanım 2.3.3: [15] A boş olmayan bir X kümesi üzerinde her sezgisel bulanık kümenin nütrosifik küme üzerindeki formu,

$$A = \{\langle x, T_A(x), 1 - (T_A(x) + F_A(x)), F_A(x) \rangle : x \in X\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.4: [15] X' 'de tanımlı nütrosifik kümeler için 0_N ve 1_N kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

0_N 4 farklı şekilde gösterilir.

$$(i) 0_{N_1} = \{\langle x, 0, 0, 1 \rangle : x \in X\}$$

$$(ii) 0_{N_2} = \{\langle x, 0, 1, 1 \rangle : x \in X\}$$

$$(iii) 0_{N_3} = \{\langle x, 0, 1, 0 \rangle : x \in X\}$$

$$(iv) 0_{N_4} = \{\langle x, 0, 0, 0 \rangle : x \in X\}$$

1_N 4 farklı şekilde gösterilir.

$$(i) 1_{N_1} = \{\langle x, 1, 0, 0 \rangle : x \in X\}$$

$$(ii) 1_{N_2} = \{\langle x, 1, 0, 1 \rangle : x \in X\}$$

$$(iii) 1_{N_3} = \{\langle x, 1, 1, 0 \rangle : x \in X\}$$

$$(iv) 1_{N_4} = \{\langle x, 1, 1, 1 \rangle : x \in X\}$$

Önerme 2.3.5: [15] A bir nütrosifik küme olsun.

$$(i) 0_N \subseteq A, 0_N \subseteq 0_N$$

$$(ii) 0_N \subseteq 1_N, 1_N \subseteq 1_N$$

Tanım 2.3.6: [15] $A = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle$ X üzerinde bir nütrosifik küme olsun. A kümesinin komplementi $C(A)$ üç farklı şekilde tanımlanır,

$$(i) C(A_1) = \{\langle x, 1 - T_A(x), 1 - I_A(x), 1 - F_A(x) \rangle : x \in X\}$$

$$(ii) C(A_2) = \{\langle x, F_A(x), I_A(x), T_A(x) \rangle : x \in X\}$$

$$(iii) C(A_3) = \{\langle x, F_A(x), 1 - I_A(x), T_A(x) \rangle : x \in X\}$$

Tanım 2.3.7: [15] X boş olmayan bir küme,

$$A = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle \text{ ve } B = \langle x, T_B(x), I_B(x), F_B(x) \rangle$$

X üzerinde iki nütrosofik küme olmak üzere $A \subseteq B$ alt küme işlemi iki şekilde tanımlanır.

$$(i) (A \subseteq B)_1 \Leftrightarrow T_A(x) \leq T_B(x), F_A(x) \geq F_B(x) \text{ ve } I_A(x) \leq I_B(x), \forall x \in X$$

$$(ii) (A \subseteq B)_2 \Leftrightarrow T_A(x) \leq T_B(x), F_A(x) \geq F_B(x) \text{ ve } I_A(x) \geq I_B(x), \forall x \in X$$

Tanım 2.3.8: [15] X boş olmayan bir küme ve

$$A = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle \text{ ve } B = \langle x, T_B(x), I_B(x), F_B(x) \rangle$$

X' 'de iki nütrosofik küme olsun.

a) $A \cap B$ iki farklı şekilde tanımlanır:

$$(i) A \cap_1 B = \langle x, T_A(x) \wedge T_B(x), I_A \wedge I_B(x), F_A(x) \vee F_B(x) \rangle$$

$$(ii) A \cap_2 B = \langle x, T_A(x) \wedge T_B(x), I_A(x) \vee I_B(x), F_A(x) \vee F_B(x) \rangle$$

b) $A \cup B$ iki farklı şekilde tanımlanır:

$$(i) A \cup_1 B = \langle x, T_A(x) \vee T_B(x), I_A(x) \vee I_B(x), F_A(x) \wedge F_B(x) \rangle$$

$$(ii) A \cup_2 B = \langle x, T_A(x) \vee T_B(x), I_A(x) \wedge I_B(x), F_A(x) \wedge F_B(x) \rangle$$

Tanım 2.3.9: [15] X boş olmayan bir küme ve

$$A = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle \text{ ve } B = \langle x, T_B(x), I_B(x), F_B(x) \rangle$$

X' 'de iki nütrosofik küme olsun. $[]$ ve $< >$ işlemleri,

$$i) [] A = \langle x, T_A(x), I_A(x), 1 - T_A(x) \rangle$$

$$ii) < > A = \langle x, 1 - F_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle.$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.10: [15] $\{A_j : j \in J\}$ X' 'te bir ntrosofik kme ailesi olsun.

(a) $\cap A_j$ işlemi iki farklı şekilde tanımlanır:

$$(i) \cap_1 A_j = \langle x, \wedge_{j \in J} T_{A_j}(x), \wedge_{j \in J} I_{A_j}(x), \vee_{j \in J} F_{A_j}(x) \rangle$$

$$(ii) \cap_2 A_j = \langle x, \wedge_{j \in J} T_{A_j}(x), \vee_{j \in J} I_{A_j}(x), \vee_{j \in J} F_{A_j}(x) \rangle$$

(b) $\cup A_j$ işlemi iki farklı şekilde tanımlanır:

$$(i) \cup_1 A_j = \langle x, \vee_{j \in J} T_{A_j}(x), \vee_{j \in J} I_{A_j}(x), \wedge_{j \in J} F_{A_j}(x) \rangle$$

$$(ii) \cup_2 A_j = \langle x, \vee_{j \in J} T_{A_j}(x), \wedge_{j \in J} I_{A_j}(x), \wedge_{j \in J} F_{A_j}(x) \rangle$$

Tanım 2.3.11: [15] $A = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle$ ve $B = \langle x, T_B(x), I_B(x), F_B(x) \rangle$

X' 'te iki ntrosofik kme olsun.

$A \setminus B$ fark işlemi

$A \setminus B = \langle x, T_A(x) \wedge F_B(x), I_A(x) \vee I_B(x), F_A(x) \vee T_B(x) \rangle$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.3.12: [15] $A = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle$ ve $B = \langle x, T_B(x), I_B(x), F_B(x) \rangle$

X' 'de iki ntrosofik küme olsun.

$$(i) C(A \cap B) = C(A) \cup C(B)$$

$$(ii) C(A \cup B) = C(A) \cap C(B).$$

2.4 Nötrosofik Topolojik Uzaylar

Tanım 2.4.1: [15] X boştan farklı bir küme olsun. τ , X' 'teki ntrosofik kümelerin bir ailesi olsun. Bir ntrosofik topoloji aşağıdaki şartları sağılayan, bir τ ailesidir.

$$(i) 0_N, 1_N \in \tau$$

$$(ii) \text{Herhangi } G_1, G_2 \in \tau \text{ için } G_1 \cap G_2 \in \tau$$

$$(iii) \forall \{G_i : i \in J\} \subseteq \tau \text{ keyfi ailesi için } \bigcup G_i \in \tau.$$

Burada (X, τ) ikilisine ntrosofik topolojik uzay denir ve τ 'daki herhangi bir ntrosofik küme, X' 'teki ntrosofik açık küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.2: [15] A bir ntrosofik bir açık küme olsun. A' 'nın komplementi $C(A)$ X 'te bir ntrosofik kapalı kümedir.

Sonuç 2.4.3: [15] Nötrosofik topolojik uzaylar, bulanık topolojik uzayların genellemesidir.

rnek 2.4.4: [15] X boştan farklı bir küme,

$$A = \{\langle x, 0.5, 0.5, 0.4 \rangle : x \in X\}$$

$$B = \{\langle x, 0.4, 0.6, 0.8 \rangle : x \in X\}$$

$$C = \{\langle x, 0.5, 0.6, 0.4 \rangle : x \in X\}$$

$$D = \{\langle x, 0.4, 0.5, 0.8 \rangle : x \in X\}$$

X üzerinde dört ntrosofik küme olsun.

$\tau = \{0_N, 1_N, A, B, C, D\}$ ailesi, X üzerinde bir ntrosofik topolojidir.

Tanım 2.4.5: [15] X boştan farklı bir küme olsun. τ , X' 'teki ntrosofik kümelerin bir ailesi olsun. τ ailesi $i), ii), iii)$ aksiyomlarını sağladığından, Tanım 2.4.1'den dolayı X kümesi üzerinde topolojidir. Bu topolojiye $\forall x \in X$ noktası için $\{x\} \subset X$ alt kümesi, bir açık kümedir. Bu nedenle τ topolojisine, X kümesi üzerinde ayrık topoloji denir.

rnek 2.4.6: [15] (X, τ_0) bir ntrosofik topolojik uzay ve τ_0 ayrık olmayan bir topoloji olsun.

$\tau_0 = \{0_N, 1_N\} \cup \{V_j : j \in J\}$ aşığıdaki gibi X üzerinde iki ntrosofik topolojik uzaylardır.

$$a) \tau_0 = \{0_N, 1_N\} \cup \{\langle x, V_j, I(x), 0 \rangle : j \in J\}$$

$$b) \tau_0 = \{0_N, 1_N\} \cup \{\langle x, V_j, 0, I(x), 1 - V_j \rangle : j \in J\}$$

Önerme 2.4.7: [15] (X, τ) bir ntrosofik topolojik uzay olsun.

$$a) \tau_{0,1} = \{[\]G : G \in \tau\}$$

$$b) \tau_{0,2} = \{<> G : G \in \tau\}$$

İspat: X bir ntrosofik topolojik uzay olduğundan

a) (NT_1) ve (NT_2) Őartları kolayca sağlanır.

$$(NT_3) \{ [] G_j : j \in J, G_j \in \tau \} \subseteq \tau_{0,1}$$

$$U_1 G_j = \{ \langle x, \vee T_{G_j}, \vee I_{G_j}, \wedge F_{G_j} \rangle \} \text{ veya}$$

$$U_2 G_j = \{ \langle x, \vee T_{G_j}, \wedge I_{G_j}, \wedge F_{G_j} \rangle \} \text{ veya}$$

$$U_3 G_j = \{ \langle x, \vee T_{G_j}, \wedge I_{G_j}, \vee F_{G_j} \rangle \} \in \tau$$

olduğundan,

$$\cup ([] G_j) = \{ \langle x, \vee T_{G_j}, \vee I_{G_j}, \wedge (1 - T_{G_j}) \rangle \} \vee \{ \langle x, \vee T_{G_j}, \vee I_{G_j}, \vee (1 - T_{G_j}) \rangle \} \in \tau_{0,1}$$

elde edilir.

b) (a)'daki ispata benzer Şekilde yapılır.

Tanım 2.4.8: [15] $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$ X 'te iki ntrosofik topolojik uzay olsun.

$\forall G \in \tau_1$ için eğer $G \in \tau_2$ ise $\tau_1 \tau_2$ 'yi içerir denir ve

$$\tau_1 \subseteq \tau_2$$

ile gösterilir. Bu durumda τ_1, τ_2 'den daha kabadır denir.

Önerme 2.4.9: [15] $\{ \tau_j : j \in J \}$ X 'te ntrosofik topoloji ailesi olsun. Bu topolojilerin kesişimi $\cap \tau_j$, X 'te bir ntrosofik topolojidir. Ayrıca, $\cap \tau_j$ bu topolojilerin hepsini içeren X üzerindeki en kaba ntrosofik topolojidir.

Tanım 2.4.10: [15] (X, τ) bir ntrosofik topolojik uzay ve

$$A = \langle x, T_A(x), F_A(x), I_A(x) \rangle$$

τ bir ntrosofik küme olsun. A 'nın ntrosofik kapanışı ve ntrosofik içi

$$N_k(A) = \cap \{ K : K, X\text{'teki bir ntrosofik kapalı kümedir ve } A \subseteq K \}$$

$$N_i(A) = \cup \{ G : G, X\text{'teki bir ntrosofik açık kümedir ve } G \subseteq A \}.$$

Şeklinde tanımlanır.

Burada $N_k(A)$ ntrosofik kapalı küme ve $N_i(A)$ bir ntrosofik açık kümedir. Ayrıca

i) $N_i(A) = A$ ancak ve ancak A, X 'te ntrosofik açık kümedir.

ii) $N_k(A) = A$ ancak ve ancak A, X 'te ntrosofik kapalı kümedir.

Önerme 2.4.11: [15] (X, τ) ntrosofik topolojik uzaydaki herhangi bir ntrosofik A kümesi için

$$a) N_k(C(A)) = C(N_i(A))$$

$$b) N_i(C(A)) = C(N_k(A))$$

İspat: a) $A = \{\langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle : x \in X\}$ bir ntrosofik küme olsun. A 'nın ntrosofik alt kümeler ailesini içerdiğini varsayalım, A 'nın içerdiği ntrosofik alt kümeler A ailesi tarafından indisleniyorsa,

$$A = \{\langle x, T_{Gi}, I_{Gi}, F_{Gi} \rangle : i \in J\}$$

A ailesi tarafından indislenir. Burada

$$N_i(A) = \{\langle x, \vee T_{Gi}, \vee I_{Gi}, \wedge F_{Gi} \rangle\}$$

ve

$$C(N_i(A)) = \{\langle x, \wedge T_{Gi}, \vee I_{Gi}, \vee F_{Gi} \rangle\}$$

olduğundan $T_{Gi} \leq T_A$ ve $F_{Gi} \geq F_A$ her biri için $i \in J$, $C(A)$ yani

$$N_i(C(A)) = \{\langle x, \wedge F_{Gj}, \vee \sigma_{Gj}, \wedge \mu_{Gj} \rangle\}$$

elde edilir.

$$N_k(C(A)) = C(N_i(A))$$

olur.

b) (a)'daki ispata benzer Şekilde yapılır.

Önerme 2.4.12: [15] (X, τ) , X' 'te bir nörtrosofik topolojik uzay olsun. A ve B , τ' 'da iki nörtrosofik küme olsun.

a) $N_i(A) \subseteq A$,

b) $A \subseteq N_k(A)$,

c) $A \subseteq B \Rightarrow N_i(A) \subseteq N_i(B)$,

d) $A \subseteq B \Rightarrow N_k(A) \subseteq N_k(B)$,

e) $N_i(N_i(A)) = N_i(A) \wedge N_i(B)$,

f) $N_k(A \cup B) = N_k(A) \vee N_k(B)$,

g) $N_i(1_N) = 1_N$,

h) $N_k(0_N) = 0_N$.

BÖLÜM III

NÖTROSOFİK TOPOLOJİK UZAYLARIN KARTEZYEN ÇARPIMI VE NÖTROSOFİK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI NÖTROSOFİK KÜME ÇEŞİTLERİ

Bu bölümde, kartezyen çarpım ile ilgili nütrosolik topolojik uzay, nütrosolik topolojik uzaylarda nütrosolik yarı açık ve kapalı kümeler kavramları incelendi. Ayrıca nütrosolik yarı iç ve nütrosolik yarı kapanış tanım ve özellikleri gözden geçirildi.

3.1 Nütrosolik Topolojik Uzayların Kartezyen Çarpımı

Tanım 3.1.1: [38] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzayında bir β alt ailesi, τ 'nin her nütrosolik kümesi β 'nin bazı üyelerinin birleşimiye, τ için bir tabandır denir.

Tanım 3.1.2: [38] X ve Y boş olmayan kümeler

$$A = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle X'de$$

ve

$$B = \langle y, T_B(y), I_B(y), F_B(y) \rangle Y'de$$

iki nütrosolik küme olsun. O halde $A \times B, X \times Y$ 'de bir nütrosolik kümedir ve

$$(M_1) (A \times B)_1(x, y) = \langle (x, y), \min(T_A(x), T_B(y)), \min(I_A(x), I_B(y))$$

$$\max(F_A(x), F_B(y)) \rangle$$

$$(M_2) (A \times B)_2(x, y) = \langle (x, y), \min(T_A(x), T_B(y)), \max(I_A(x), I_B(y)),$$

$$\max(F_A(x), F_B(y)) \rangle$$

olacak şekilde iki farklı yöntemle gösterilir. Burada A ve B 'nin komplementi

$$(CM_1) C(A \times B)_1(x, y) = \langle (x, y), \max(T_A(x), T_B(y)), \max(I_A(x), I_B(y)),$$

$$\min(F_A(x), F_B(y))\rangle$$

$$(CM_2) C(A \times B)_2(x, y) = \langle (x, y), \max(T_A(x), T_B(y)), \min(I_A(x), I_B(y)),$$

$$\min(F_A(x), F_B(y))\rangle$$

iki farklı şekilde gösterilir.

Lemma 3.1.3: [38] $A = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle$ X 'te ve $B = \langle y, T_B(y), I_B(y), F_B(y) \rangle$ Y 'de iki nütrosifik küme olsun.

$$(i) (A \times 1_N) \cap (1_N \times B) = A \times B,$$

$$(ii) (A) \cup (1_N \times B) = C(C(A) \times C(B)),$$

$$(iii) C(A \times B) = (C(A) \times 1_N) \cup (1_N \times C(B)).$$

İspat: (i) $A = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle$, $B = \langle y, T_B(y), I_B(y), F_B(y) \rangle$

$1_{N_3} = \{\langle x, 1, 1, 0 \rangle : x \in X\}$ olduğundan

$$A \times 1_N = \langle x, \min(T_A, 1_N), \min(I_A, 1_N), \max(F_A, 0_N) \rangle = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle = A$$

ve benzer şekilde

$$1_N \times B = \langle y, \min(1_N, T_B), \min(1_N, I_B), \max(0_N, F_B) \rangle = B,$$

Böylelikle verilenleri yerine konulduğunda,

$$(A \times 1_N) \cap (1_N \times B) = A(x) \cap B(y)$$

$$= \langle (x, y), T_A(x) \wedge T_B(y), I_A(x) \wedge I_B(y), F_A(x) \vee F_B(y) \rangle$$

$$= A \times B$$

ispat tamamlanmış olur.

(ii) (i)'ye benzer şekilde gösterilebilir.

(iii) (ii)'de $C(A)$, $C(B)$ yerine A ve B 'yi yazdığımızda ispat sağlanır.

Tanım 3.1.4: [38] X ve Y boş olmayan iki n trosofik küme ve $f: X \rightarrow Y$ bir n trosofik fonksiyon olsun.

(i) Eğer $B = \{\langle y, T_B(y), I_B(y), F_B(y) \rangle : y \in Y\}$ Y 'de bir n trosofik küme ise o zaman, B 'nin f altındaki ters görüntüsü

$$f^{-1}(B) = \{\langle y, f^{-1}(T_B)(x), f^{-1}(I_B)(x), f^{-1}(F_B)(y) \rangle : x \in X\}$$

ile gösterilir.

(ii) Eğer $A = \{\langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle : x \in X\}$ X 'te bir n trosofik küme ise o zaman, A 'nin f altındaki görüntüsü

$$f(A) = \{\langle y, f(T_A)(y), f(I_A)(y), f_{-}(F_A)(y) \rangle : y \in Y\}$$

ile gösterilir. Burada

$$f_{-}(F_A)(y) = C\left(f(C(A))\right).$$

Ayrıca (i), (ii) $T_B, I_B, F_B, T_A, I_A, F_A$ n trosofik kümeler olduğundan,

$$f^{-1}(T_B)(x) = T_B(f(x)),$$

ve

$$f(T_A)(y) = \begin{cases} \sup \alpha_A(x) & x \in f^{-1}(y) \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 3.1.5: [38] (X, τ) ve (Y, σ) iki n trosofik topolojik uzay olsun. (X, τ) ve (Y, σ) 'nin n trosofik topolojik çarpım uzayı, $\{M_1^{-1}(A_i), M_2^{-1}(B_j) : A_i \in \tau, B_j \in \sigma \text{ ve } M_1, M_2, X \times Y \text{nin sırasıyla } X \text{ ve } Y \text{ üzerine izdüşümleridir.}\}$ ailesi tarafından üretilen $X \times Y$ 'nin n trosofik topolojik ξ 'si ile birlikte X ve Y n trosofik kümelerinin $X \times Y$ kartezyen çarpımıdır.

Açıklama 3.1.6: [38] Tanım 3.1.5'den dolayı

$$M_1^{-1}(A_i) = A_i \times 1_N \text{ ve } M_2^{-1}(B_j) = 1_N \times B_j$$

ve

$$A_i \times 1_N = 1_N \times B_j = A_i \times B_j$$

$$\beta = \{A_i \times B_j : A_i \in \tau, B_j \in \sigma\}$$

ailesi $X \times Y'$ 'nin nütrosifik topolojik kartezyen çarpım uzayı ξ için bir taban oluşturur.

Tanım 3.1.7: [38] $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ ve $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ iki nütrosifik fonksiyon olsun. Nütrosifik kartezyen çarpım

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$$

$\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ için

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.8: [38] A ve A_i ($i \in J$) X 'te, B ve B_i ($j \in K$) Y' 'de nütrosifik kümeler ve $f : X \rightarrow Y$ nütrosifik fonksiyon olsun.

$$(i) f^{-1}(\cup B_j) = \cup f^{-1}(B_j)$$

$$(ii) f^{-1}(\cap B_j) = \cap f^{-1}(B_j)$$

$$(iii) f^{-1}(1_N) = 1_N, f^{-1}(0_N) = 0_N$$

$$(iv) f^{-1}(C(B)) = C(f^{-1}(B)),$$

$$(v) f(\cup A_i) = \cup f(A_i),$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.9: [38] $f : X \rightarrow Y$ bir nütrosifik fonksiyon olsun. O halde f' 'nin nütrosifik grafiği $g : X \rightarrow X \times Y$, $\forall x \in X$ için

$$g(x) = (x, f(x))$$

ile tanımlanır.

Lemma 3.1.10: [38] $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ ($i = 1, 2$) nörtrosofik fonksiyon ve A, B sırasıyla Y_1, Y_2 üzerinde nörtrosofik kümeler olsun.

$$(f_1(A) \times f_2(B))^{-1} = f_1^{-1}(A) \times f_2^{-1}(B).$$

İspat: $A = \langle x_1, T_A(x_1), I_A(x_1), F_A(x_1) \rangle, B = \langle x_2, T_B(x_2), I_B(x_2), F_B(x_2) \rangle$ olsun.

$\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ için

$$\begin{aligned} (f_1(A) \times f_2(B))^{-1}(x_1, x_2) &= (A \times B)(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (A \times B)(f_1(x_1), f_2(x_2)) \\ &= \langle (f_1(x_1), f_2(x_2)), \min(T_A(f_1(x_1)), T_B(f_2(x_2))), \min(I_A(f_1(x_1)), I_B(f_2(x_2))), \\ &\quad \max(F_A(f_1(x_1)), F_B(f_2(x_2))) \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2), \min(T_A(f_1^{-1}(x_1)), T_B(f_2^{-1}(x_2))), \min(I_A(f_1^{-1}(x_1)), I_B(f_2^{-1}(x_2))), \\ &\quad \max(F_A(f_1^{-1}(x_1)), F_B(f_2^{-1}(x_2))) \rangle = ((f_1^{-1}(A) \times f_2^{-1}(B))(x_1, x_2) \end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.11: [38] $f: X \rightarrow Y$ bir nörtrosofik fonksiyon ve $G: X \rightarrow X \times Y$ f 'nin nörtrosofik grafiği olsun. O halde

$$g^{-1}(A \times B)(x) = (A \cap f^{-1}(B))(x).$$

İspat: $A = \langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \gamma_A(x) \rangle, B = \langle x, \mu_B(x), \sigma_B(x), \gamma_B(x) \rangle$ olsun.

$\forall x \in X$ için

$$\begin{aligned} g^{-1}(A \times B)(x) &= (A \times B)g(x) = (A \times B)(x, f(x)) \\ &= \langle (x, f(x)), \min(T_A(x), T_B(f(x))), \min(I_A(x), I_B(f(x))), \max(F_A(x), F_B(f(x))) \rangle \\ &= \langle (x, f(x)), \min(T_A(x), f^{-1}(T_B)(x)), \min(I_A(x), f^{-1}(I_B)(x)), \max(F_A(x), f^{-1}(F_B)(x)) \rangle \\ &= (A \cap f^{-1}(B))(x). \end{aligned}$$

Lemma 3.1.12: [38] X boş olmayan bir küme ve A, B, C ve D, X' te nörtrosofik kümeler olsun.

$A \subseteq B, C \subseteq D$ ise $A \times C \subseteq B \times D$ olur.

İspat: $A = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle$,

$B = \langle x, T_B(x), I_B(x), F_B(x) \rangle$,

$C = \langle x, T_C(x), I_C(x), F_C(x) \rangle$

$D = \langle x, T_D(x), I_D(x), F_D(x) \rangle$

olsun.

$A \subseteq B$ ise $T_A \leq T_B, I_A \leq I_B, F_A \geq F_B$ olduğundan

ve ayrıca

$C \subseteq D$ ise $T_C \leq T_D, I_C \leq I_D, F_C \geq F_D$ olduğundan,

$\{T_A, T_C\} \leq \min\{T_B, T_D\}, \{I_A, I_C\} \leq \min\{I_B, I_D\}, \{F_A, F_C\} \geq \max\{F_B, F_D\}$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.1.13: [38] (X, τ) ve (Y, σ) iki nörtrosofik topolojik uzay olsun. A ve B , sırasıyla X ve Y üzerindeki nörtrosofik topolojik uzaylarında nörtrosofik kapalı küme olsun. O zaman $A \times B, X \times Y'$ nin nörtrosofik çarpım topolojisindeki nörtrosofik kapalı kümedir.

İspat: $A = \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle, B = \langle x, T_B(x), I_B(x), F_B(x) \rangle$ olsun.

Lemma 3.1.3'den

$$C(A \times B)(x, y) = (C(A) \times 1_N) \cup (1_N \times C(B))(x, y)$$

olduğu elde edilir.

$C(A) \times 1_N$ ve $1_N \times C(B)$ sırasıyla X ve Y' de nörtrosofik açık küme olduğundan buradan $(C(A) \times 1_N) \cup (1_N \times C(B))$, $X \times Y'$ nin nörtrosofik açık kümesidir. Dolayısıyla $C(A \times B)$, $X \times Y'$ nin bir nörtrosofik açık kümesi ve sonuç olarak $A \times B, X \times Y'$ nin nörtrosofik kapalı kümesidir.

Teorem 3.1.14: [38] A ve B , sırasıyla X ve Y üzerindeki nütrosolik topolojik uzaylarında nütrosolik küme ise,

$$(i) N_k(A) \times N_k(B) \supseteq N_k(A \times B)$$

$$(ii) N_i(A) \times N_i(B) \subseteq N_i(A \times B)$$

İspat: i) $A \subseteq N_k(A)$ ve $B \subseteq N_k(B)$ olduğundan $A \times B \subseteq N_k(A) \times N_k(B)$ elde edilir.

Bundan dolayı

$$N_k(A \times B) \subseteq N_k(N_k(A) \times N_k(B))$$

ve lemma 3.1.13'den

$$N_k(A \times B) \subseteq N_k(A) \times N_k(B)$$

olduğu elde edilir.

(ii) (i)'den $N_i(C(A)) = C(N_k(A))$ olduğu açıktır.

Tanım 3.1.15: [38] (X, τ) , (Y, σ) iki nütrosolik topolojik uzay ve $A \in \tau$, $B \in \sigma$ olsun. Eğer herhangi bir nütrosolik küme için C , X 'in ve D , Y 'nin nütrosolik kümeleri olarak alındığında,

$$C(A) \not\supseteq C \text{ ve } C(B) \not\supseteq D \implies C(A) \times 1_N \cup 1_N \times C(B) \supseteq C \times D$$

koşulunu sağlıyorsa (X, τ) , (Y, σ) ile ilişkili nütrosolik kartezyen çarpımdır. Burada

$A_1 \in \tau$ ve $B_1 \in \sigma$ olmak üzere $C(A_1) \supseteq C$ veya $C(B_1) \supseteq D$ olduğundan

$$C(A_1) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_1) = C(A) \times 1_N \cup 1_N \times C(B)$$

koşullarını sağlayan A_1 ve B_1 ikilileri vardır.

Lemma 3.1.16: [38] X ve Y nütrosolik topolojik uzay olsun. A_i ve B_j sırasıyla X ve Y 'de nütrosolik k me aileleri olsunlar.

$$(i) \cap \{A_i, B_j\} = \min(\cap A_i, \cap B_j);$$

$$\cup \{A_i, B_j\} = \max(\cup A_i, \cup B_j).$$

$$(ii) \cap \{A_i, 1_N\} = (\cap A_i) \times 1_N;$$

$$\cup \{A_i, 1_N\} = (\cup A_i) \times 1_N.$$

$$(iii) \cap \{1_N, B_j\} = 1_N \times (\cap B_j);$$

$$\cup \{1_N, B_j\} = 1_N \times (\cup B_j).$$

Teorem 3.1.17: [38] $(X, \tau), (Y, \sigma)$ iki nütrosolik topolojik uzay olsun. Eğer X, Y ile ilişkili nütrosolik çarpım ise X 'teki A nütrosolik k meleri ve Y 'deki B nütrosolik k meleri için,

$$(i) N_k(A \times B) = N_k(A) \times N_k(B)$$

$$(ii) N_i(A \times B) = N_i(A) \times N_i(B)$$

şartları sağlanır.

İspat: i) Teorem 3.1.14'e göre

$$N_k(A \times B) \subseteq N_k(A) \times N_k(B)$$

olduğundan,

$$N_k(A \times B) \supseteq N_k(A) \times N_k(B)$$

g stermek yeterlidir. $A_i \in \tau, B_j \in \sigma$ olsun.

$$N_k(A \times B) = \langle (x, y), \cap C(\{A_i \times B_j\}) \rangle :$$

$$C(\{A_i \times B_j\}) \supseteq A \times B, \cup \{A_i \times B_j\} : \{A_i \times B_j\} \subseteq A \times B \rangle$$

$$= \langle (x, y), \cap (C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j)) \rangle :$$

$$C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j) \supseteq A \times B,$$

$$\cup (A_i \times 1_N \cup 1_N \times B_j) : A_i \times 1_N \cup 1_N \times B_j \subseteq A \times B \rangle$$

$$= \langle (x, y), \cap (C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j)) \rangle : C(A_i) \supseteq A.$$

veya

$$C(B_j) \supseteq B, \cup (A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j) : A_i \subseteq A \text{ ve } B_j \subseteq B \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (x, y), \min(\cap \{C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j)\}, \\
&\quad \cap \{C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j) : C(B_j) \supseteq B\}), \\
&\quad maks(\cup \{A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j : A_i \subseteq A\}, \\
&\quad \cup \{A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j : B_j \subseteq B\}) \rangle. \\
&\langle (x, y), \cap \{C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j) : C(A_i) \supseteq A\}, \\
&\quad \cap \{C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j) : C(B_j) \supseteq B\} \rangle \supseteq \langle (x, y), \\
&\quad \cap \{C(A_i) \times 1_N : C(A_i) \supseteq A\}, \cap \{1_N \times C(B_j) : C(B_j) \supseteq B\} \rangle \\
&= \langle (x, y), \cap \{C(A_i) : C(A_i) \supseteq A\} \times 1_N, 1_N \times \cap \{C(B_j) : C(B_j) \supseteq B\} \rangle \\
&= \langle (x, y), N_k(A) \times 1_N, 1_N \times N_k(B) \rangle.
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\langle (x, y), \cup \{A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j : A_i \subseteq A\}, \\
&\quad \cup \{A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j : B_j \subseteq B\} \rangle \subseteq \langle (x, y), \\
&\quad \cup \{A_i \times 1_N : A_i \subseteq A\}, \cup \{1_N \times B_j : B_j \subseteq B\} \rangle.
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
N_k(A \times B) &\supseteq \langle (x, y), \min(N_k(A) \times 1_N, 1_N \times N_k(B)), maks(N_i(A) \times 1_N, 1_N \times N_i(B)) \rangle \\
&= \langle (x, y), \min(N_k(A), N_k(B)), maks(N_i(A), N_i(B)) \rangle \\
&= N_k(A) \times N_k(B).
\end{aligned}$$

(ii) (i)'deki ispata benzer şekilde yapılır.

3.2 Nötrosofik Topolojik Uzaylardaki Nötrosofik Yarı Açık Kümeler

Tanım 3.2.1: [38] (X, τ) bir nötrosofik topolojik uzay ve A, X' 'te nötrosofik küme olsun. Bu durumda, $N_a \subseteq A \subseteq N_k(N_a)$ olacak şekilde bir N_a nötrosofik açık küme varsa, A 'ya nötrosofik yarı açık kümesi denir.

Teorem 3.2.2: [38] (X, τ) bir nötrosofik topolojik uzay ve A, X' 'te nötrosofik küme olsun. A , yarı açıktır ancak ve ancak $A \subseteq N_k(N_i(A))$ 'dır.

İspat: $\Rightarrow A \subseteq N_k(N_i(A))$ olsun. O halde $N_a = N_i(A)$ için $N_a \subseteq A \subseteq N_k(N_a)$.

$\Leftarrow A, X'$ 'te nötrosofik yarı açık küme olsun. O halde bazı N_a nötrosofik açık küme için $N_a \subseteq A \subseteq N_k(N_a)$ 'dır. Ayrıca

$$N_a \subseteq N_i(A) \text{ ve } N_k(N_a) \subseteq N_k(N_i(A))$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$A \subseteq N_k(N_a) \subseteq N_k(N_i(A))$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3: [38] (X, τ) bir nötrosofik topolojik uzay olsun. İki nötrosofik yarı açık kümesinin birleşimi, (X, τ) 'da bir nötrosofik yarı açık kümedir.

İspat: A ve B, X' 'teki iki nötrosofik yarı açık küme olsun. O halde

$$A \subseteq N_k(N_i(A)) \text{ ve } B \subseteq N_k(N_i(B)).$$

Böylece

$$A \cup B \subseteq N_k(N_i(A)) \cup N_k(N_i(B))$$

$$= N_k(N_i(A) \cup N_i(B))$$

$$\subseteq N_k(N_i(A \cup B)).$$

Dolayısıyla $A \cup B, X'$ 'te nötrosofik yarı açık kümedir.

Teorem 3.2.4: [38] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay olsun. $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$, bir (X, τ) 'da nütrosolik yarı açık kümelerin ailesi ise, $\cup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$, X 'teki nütrosolik yarı açık kümedir.

İspat: Her $\alpha \in \Delta$ için $N_{a_\alpha} \subseteq A_\alpha \subseteq N_k(N_{a_\alpha})$ olacak şekilde bir nütrosolik açık N_{a_α} küme vardır. O halde,

$$\cup_{\alpha \in \Delta} N_{a_\alpha} \subseteq \cup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \subseteq N_k(N_{a_\alpha}) \subseteq N_k(\cup_{\alpha \in \Delta} N_{a_\alpha}).$$

Bu durumda $N_{a_\alpha} = \cup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ elde edilir.

 rnek 3.2.5: [38] X bo tan farklı bir küme ve

$$A = \langle (0.3, 0.5, 0.4), (0.6, 0.2, 0.5) \rangle$$

$$B = \langle (0.2, 0.6, 0.7), (0.5, 0.3, 0.1) \rangle$$

$$C = \langle (0.3, 0.6, 0.4), (0.6, 0.3, 0.1) \rangle$$

$$D = \langle (0.2, 0.5, 0.7), (0.5, 0.2, 0.5) \rangle.$$

X üzerinde nütrosolik kümeler olsun.

O halde $\tau = \{0_N, A, B, C, D, 1_N\}$, X 'te nütrosolik topolojidir. Şimdi, iki nütrosolik yarı açık kümeyi aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$A_1 = \langle (0.4, 0.6, 0.4), (0.8, 0.3, 0.4) \rangle$$

ve

$$A_2 = \langle (1, 0.9, 0.2), (0.5, 0.7, 0) \rangle.$$

Burada,

$$N_i(A_1) = A, N_k(N_i(A_1)) = 1_N \text{ ve } N_i(A_2) = B, N_k(N_i(A_2)) = 1_N.$$

Fakat

$$A_1 \cap A_2 = \langle (0.4, 0.6, 0.4), (0.5, 0.3, 0.4) \rangle$$

X 'te bir nütrosolik yarı açık küme değıldir.

Açıklama 3.2.6: [38]  rnek 3.2.5'da gösterildiğı gibi, herhangi iki nütrosolik yarı açık kümenin kesi iminin X 'te bir nütrosolik yarı açık küme olması her zaman gerekmez.

Teorem 3.2.7: [38] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay olsun. A , nütrosolik yarı açık küme ve

$$A \subseteq B \subseteq N_k(A)$$

olsun. O halde B , X' 'te nütrosolik yarı açık kümedir.

İspat: $N_a \subseteq A \subseteq N_k(N_a)$ olacak şekilde bir N_a nütrosolik açık küme vardır.

O halde $N_a \subseteq B$. Ancak $N_k(A) \subseteq N_k(N_a)$ ve $B \subseteq N_k(N_a)$ 'dır.

Bu durumda

$$N_a \subseteq B \subseteq N_k(N_a)$$

elde edilir. Bu ise B' 'nin X' 'te nütrosolik yarı açık küme olduğu anlamına gelir.

Teorem 3.2.8: [38] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay olsun. X' 'teki her nütrosolik açık küme X' 'te nütrosolik yarı açık kümedir.

İspat: (X, τ) nütrosolik topolojik uzay ve A , X' 'de nütrosolik açık küme olsun.

O halde $A = N_i(A)$ ve $N_i(A) \subseteq N_k(N_i(A))$ olur. Buradan

$$A \subseteq N_k(N_i(A))$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.2.2'ye göre A , X' 'te nütrosolik yarı açık kümedir.

 rnek 3.2.9: [38] X boştan farklı bir küme ve $\tau = \{0_N, A, B, 1_N\}$ nütrosolik topolojik uzay olsun. Nütrosolik yarı açık kümelerinden bazıları

$$A = \langle (0.4, 0.5, 0.2), (0.3, 0.2, 0.1), (0.9, 0.6, 0.8) \rangle$$

$$B = \langle (0.2, 0.4, 0.5), (0.1, 0.1, 0.2), (0.6, 0.5, 0.8) \rangle$$

$$C = \langle (0.5, 0.6, 0.1), (0.4, 0.3, 0.1), (0.9, 0.8, 0.5) \rangle$$

$$D = \langle (0.3, 0.5, 0.4), (0.1, 0.6, 0.2), (0.7, 0.5, 0.8) \rangle$$

$$E = \langle (0.5, 0.6, 0.1), (0.4, 0.6, 0.1), (0.9, 0.8, 0.5) \rangle$$

$$F = \langle (0.3, 0.5, 0.4), (0.1, 0.3, 0.2), (0.7, 0.5, 0.8) \rangle$$

$$G = \langle (0.4, 0.5, 0.2), (0.3, 0.6, 0.1), (0.9, 0.6, 0.8) \rangle$$

$$H = \langle (0.3, 0.5, 0.4), (0.1, 0.2, 0.2), (0.7, 0.5, 0.8) \rangle$$

$$I = \langle (0.4, 0.5, 0.2), (0.3, 0.3, 0.1), (0.9, 0.6, 0.8) \rangle$$

$$J = \langle (0.3, 0.5, 0.4), (0.1, 0.2, 0.2), (0.7, 0.5, 0.8) \rangle \text{ dir.}$$

Burada C, D, E, F, G, H, I ve J nütrosolik yarı açık kümeleridir ancak nütrosolik açık kümeler değildir.

Açıklama 3.2.10: [38]  rnek 3.2.9'da gösterildiği gibi Teorem 3.2.8'in tersi her zaman doğru değildir.

Önerme 3.2.11: [38] (X, τ) ve (Y, τ) iki nörtrosofik topolojik uzay olsun. Eğer X, Y ile ilişkili nörtrosofik kartezyen çarpım ise X' 'teki bir nörtrosofik yarı açık küme A ve Y' 'deki bir nörtrosofik yarı açık küme B 'nin nörtrosofik kartezyen çarpımı $A \times B$, nörtrosofik topolojik kartezyen çarpım uzayı $X \times Y'$ 'de bir nörtrosofik yarı açık kümedir.

İspat: $O_1 \subseteq A \subseteq N_k(O_1)$ ve $O_2 \subseteq B \subseteq N_k(O_2)$

olsun. Burada O_1 ve O_2 sırasıyla X ve Y üzerinde nörtrosofik açık kümelerdir. O halde,

$$O_1 \times O_2 \subseteq A \times B \subseteq N_k(O_1) \times N_k(O_2).$$

Teorem 3.1.17 (i)'den

$$N_k(O_1) \times N_k(O_2) = N_k(O_1 \times O_2)$$

olduğundan ispat tamamlanır.

3.3 Nörtrosofik Topolojik Uzaylardaki Nörtrosofik Yarı Kapalı Kümeler

Tanım 3.3.1: [38] X bir nörtrosofik topolojik uzay ve A, X 'te bir nörtrosofik küme olsun. O halde $N_i(NK) \subseteq A \subseteq NK$ olacak şekilde bir nörtrosofik kapalı küme NK varsa A, X 'te nörtrosofik yarı kapalı kümedir.

Teorem 3.3.2: [38] X , bir nörtrosofik topolojik uzay ve A, X 'te bir nörtrosofik küme olsun. A' 'nın alt kümesi ancak ve ancak

$$N_i(N_k(A)) \subseteq A$$

ise nörtrosofik yarı kapalı kümedir.

İspat: $\Rightarrow N_i(N_k(A)) \subseteq A$ olsun.

O halde $NK = N_k(A)$ için

$$N_i(NK) \subseteq A \subseteq NK$$

elde edilir.

$\Leftarrow A, X$ 'te nörtrosofik yarı kapalı küme olsun. O halde bazı nörtrosofik kapalı küme NK için

$$N_i(NK) \subseteq A \subseteq NK$$

olur. Ancak $N_k(A) \subseteq NK$ ve $N_i(N_k(A)) \subseteq N_i(NK)$.

Dolayısıyla

$$N_i(N_k(A)) \subseteq N_i(NK) \subseteq A$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Önerme 3.3.3: [38] (X, τ) bir nörtrosofik topolojik uzay ve A , X' 'te nörtrosofik bir altküme olsun. Ancak ve ancak $C(A)$ X' 'te nörtrosofik yarı açık küme ise A , nörtrosofik yarı kapalı kümedir.

İspat: A , X' 'te nörtrosofik yarı kapalı bir alt küme olsun. Teorem 3.3.2'den,

$$N_i(N_k(A)) \subseteq A$$

olur. Her iki tarafın komplementini alarak,

$$C(A) \subseteq C(N_i(N_k(A))) = N_k(C(N_k(A))).$$

elde edilir. Önerme 2.4.11 (b)'den,

$$C(A) \subseteq N_k(N_i(C(A))).$$

Teorem 3.2.3'ye göre, $C(A)$ nörtrosofik yarı açıktır. Tersine $C(A)$ nörtrosofik yarı açıktır. Teorem 3.2.3'den,

$$C(A) \subseteq N_k(N_i(C(A))).$$

Her iki tarafın komplementini alarak,

$$A \supseteq C(N_k(N_i(C(A)))) = N_i(C(N_k(C(A)))).$$

Önerme 2.4.11 (b),

$$A \supseteq N_i(N_k(A))$$

kullanılarak, Teorem 3.3.2'ye göre A , nörtrosofik yarı kapalı kümedir.

Teorem 3.3.4: [38] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay olsun. İki nütrosolik yarı kapalı kümenin kesişimi, nütrosolik topolojik uzay X 'te bir nütrosolik yarı kapalı kümedir.

İspat: A ve B , X 'teki nütrosolik yarı kapalı kümeler olsun. O halde,

$$N_i(N_k(A)) \subseteq A \text{ ve } N_i(N_k(B)) \subseteq B.$$

Öyleyse

$$A \cap B \supseteq N_i(N_k(A)) \cap N_i(N_k(B)) = N_i(N_k(A) \cap N_k(B)) \supseteq N_i(N_k(A \cap B))$$

Dolayısıyla $A \cap B$, X 'te nütrosolik yarı kapalı kümedir.

Teorem 3.3.5: [38] X bir nütrosolik topolojik uzay ve $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, X 'teki nütrosolik yarı kapalı kümelerinin bir toplamı olsun. O halde $\cap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$, X 'te nütrosolik yarı kapalı kümelerdir.

İspat: Her $\alpha \in \Delta$ için, $N_i(NK_\alpha) \subseteq A_\alpha \subseteq NK_\alpha$ olacak şekilde bir nütrosolik kapalı NK_α kümesine sahibiz. O halde

$$N_i(\cap_{\alpha \in \Delta} NK_\alpha) \subseteq \cap_{\alpha \in \Delta} N_i(NK_\alpha) \subseteq \cap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \subseteq \cap_{\alpha \in \Delta} NK_\alpha.$$

Dolayısıyla $NK = \cap_{\alpha \in \Delta} NK_\alpha$ olur.

 rnek 3.3.6: [38] X boştan farklı k me ve

$$A = \langle (1, 0.5, 0.7) \rangle$$

$$B = \langle (0, 0.9, 0.2) \rangle$$

$$C = \langle (1, 0.9, 0.2) \rangle$$

$$D = \langle (0, 0.5, 0.7) \rangle.$$

O zaman $\tau = \{0_N, A, B, C, D, 1_N\}$, X 'te nütrosolik topolojik uzaydır. İki nütrosolik yarı kapalı k me aşığıdaki gibi tanımlanır:

$$A_1 = \langle (0.4, 0.5, 1) \rangle$$

ve

$$A_2 = \langle (0.2, 0, 0.8) \rangle.$$

Burada

$$N_k(A_1) = \langle (0.7, 0.5, 1) \rangle, N_i(N_k(A_1)) = 0_N$$

ve

$$N_k(A_2) = \langle (0.2, 0.1, 0) \rangle, N_i(N_k(A_2)) = 0_N.$$

Ancak

$$A_1 \cup A_2 = \langle (0.4, 0.5, 0.8) \rangle$$

X' 'te bir nütrosolik yarı kapalı küme değildir.

Açıklama 3.3.7: [38]  rnek 3.3.6'da gösterildiği gibi, herhangi iki nütrosolik yarı kapalı kümenin birleşiminin X' 'te bir nütrosolik yarı kapalı küme olması gerekmez.

Teorem 3.3.8: [38] X bir nütrosolik topolojik uzay ve A , X' 'te nütrosolik yarı kapalı küme ve $N_i(A) \subseteq B \subseteq A$ olsun. O halde B , X' 'te nütrosolik yarı kapalı küme olur.

İspat: $N_i(NK) \subseteq A \subseteq NK$ olacak şekilde bir nütrosolik kapalı küme NK ve $B \subseteq NK'$ dir. Buradan

$$N_i(NK) \subseteq N_i(A) \text{ ve } N_i(NK) \subseteq B$$

olur. Dolayısıyla

$$N_i(NK) \subseteq B \subseteq NK$$

olduğundan istenilen elde edilir.

Teorem 3.3.9: [38] X nütrosolik topolojik uzay ve A , X' 'te nütrosolik kapalı küme ise o halde A , X' 'te nütrosolik yarı kapalı kümedir.

İspat: X , nütrosolik topolojik uzay ve A , X' 'te nütrosolik kapalı küme olsun.

O halde $A = N_k(A)$ ve $N_i(N_k(A)) \subseteq N_k(A)$ dir. Bu ise

$$N_i(N_k(A)) \subseteq A$$

anlamına gelir. Dolayısıyla Teorem 3.3.2'den A , X' 'te nütrosolik yarı kapalı kümedir.

 rnek 3.3.10: [38] X boştan farklı bir küme ve $\tau = \{0_N, A, B, 1_N\}$ ile

$C(\tau) = \{1_N, C, D, 0_N\}$ nütrosolik topolojik uzay olsun.

$$A = \langle (0.5, 0.6, 0.3), (0.1, 0.7, 0.9), (1, 0.6, 0.4) \rangle$$

$$B = \langle (0, 0.4, 0.7), (0.1, 0.6, 0.9), (0.5, 0.5, 0.8) \rangle$$

$$C = \langle (0.3, 0.4, 0.5), (0.9, 0.3, 0.1), (0.4, 0.4, 1) \rangle$$

$$D = \langle (0.7, 0.6, 0), (0.9, 0.4, 0.1), (0.8, 0.5, 0.5) \rangle$$

$$E = \langle (0.2, 0.4, 0.9), (0, 0.2, 0.9), (0.3, 0.2, 1) \rangle.$$

Burada nütrosolik yarı kapalı kümeler C , D ve E' dir. Ayrıca E , nütrosolik yarı kapalı kümedir ancak nütrosolik kapalı küme değildir.

Açıklama 3.3.11: [38]  rnek 3.3.10'da gösterildiği gibi, Teorem 3.3.9'un tersi doğru olmak zorunda değildir.

Önerme 3.3.12: [38] (X, τ) ve (Y, σ) iki nütrosolik topolojik uzay olsun Eğer X ile Y ile ilişkili nütrosolik kartezyen çarpım ise X' in bir nütrosolik yarı kapalı A kümesinin ve Y' nin bir nütrosolik yarı kapalı B kümesinin nütrosolik kartezyen  arpımı $A \times B$, $X \times Y$ nütrosolik topolojik kartezyen çarpım uzayının bir nütrosolik yarı kapalı kümesidir.

İspat: $N_i(C_1) \subseteq A \subseteq C_1$ ve $N_i(C_2) \subseteq B \subseteq C_2$ olsun, burada C_1 ve C_2 sırasıyla X ve Y' de nütrosolik kapalı kümelerdir. O halde

$$N_i(C_1) \times N_i(C_2) \subseteq A \times B \subseteq C_1 \times C_2.$$

Teorem 3.1.17 (ii)'den,

$$N_i(C_1) \times N_i(C_2) = N_i(C_1 \times C_2).$$

Bu nedenle

$$N_i(C_1 \times C_2) \subseteq A \times B \subseteq C_1 \times C_2$$

olur. Dolayısıyla Tanım 3.3.1'e göre $A \times B$, $X \times Y'$ de nütrosolik yarı kapalı kümedir.

3.4 Nütrosolik Topolojik Uzaylarda Nütrosolik Yarı İ 

Tanım 3.4.1: [38] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay olsun. O halde, X' in bir nütrosolik alt kümesi için, A' nın nütrosolik yarı iç kısmı, A' da bulunan tüm nütrosolik yarı açık X kümelerinin birleşimidir ve

$$N_{yi}(A) = \cup \{G: G, X \text{ ve } G \subseteq A\}$$

ile gösterilir.

Önerme 3.4.2: [38] (X, τ) bir nôtrosifik topolojik uzay olsun. O halde bir nôtrosifik topolojik uzay X' 'in herhangi bir nôtrosifik alt kümesi A ve B için,

$$(i) N_{yi}(A) \subseteq A$$

$$(ii) A, X \Leftrightarrow N_{yi}(A) = A \text{ da nôtrosifik yarı açık kümedir.}$$

$$(iii) N_{yi}(N_{yi}(A)) = N_{yi}(A)$$

$$(iv) A \subseteq B \text{ ise } N_{yi}(A) \subseteq N_{yi}(B)$$

İspat: (i) Tanım 3.4.1'den A, X' te nôtrosifik yarı açık küme olsun. Buradan,

$A \subseteq N_{yi}(A)$. (i) kullanarak $A = N_{yi}(A)$ elde ederiz. Tersine, $A = N_{yi}(A)$ olduğunu varsayalım. Tanım 3.4.1 kullanılarak, A, X' te nôtrosifik yarı açık kümedir. Böylece (ii) ispatlanır.

(ii) kullanılarak, $N_{yi}(N_{yi}(A)) = N_{yi}(A)$. Bu, (iii)'ü kanıtlar.

$A \subseteq B$ olduğundan, (i)'deki $N_{yi}(A) \subseteq A \subseteq B$ kullanılarak $N_{yi}(A) \subseteq B$ olur ve (iii)'den $N_{yi}(N_{yi}(A)) \subseteq N_{yi}(B)$. Böylece $N_{yi}(A) \subseteq N_{yi}(B)$. Bu ise (iv)'ü kanıtlar.

Teorem 3.4.3: [38] (X, τ) bir nôtrosifik topolojik uzay olsun. O zaman bir nôtrosifik topolojik uzay X' 'in herhangi bir nôtrosifik alt kümesi A ve B için,

$$(i) N_{yi}(A \cap B) = N_{yi}(A) \cap N_{yi}(B)$$

$$(ii) N_{yi}(A \cup B) \supseteq N_{yi}(A) \cup N_{yi}(B).$$

İspat: $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olduğundan, Önerme 3.4.2 (iv)'den,

$$N_{yi}(A \cap B) \subseteq N_{yi}(A) \text{ ve } N_{yi}(A \cap B) \subseteq N_{yi}(B).$$

Bu ise

$$N_{yi}(A \cap B) \subseteq N_{yi}(A) \cap N_{yi}(B) \tag{1}$$

Önerme 3.4.2 (i)'den, $N_{yi}(A) \subseteq A$ ve $N_{yi}(B) \subseteq B$ 'yi kullanırsak, bu ise

$$N_{yi}(A) \cap N_{yi}(B) \subseteq A \cap B$$

anlamına gelir. Şimdi ise Önerme 3.4.2 (iv)'den,

$$N_{yi}((N_{yi}(A) \cap N_{yi}(B))) \subseteq N_{yi}(A \cap B).$$

(1)'den,

$$N_{yi}(N_{yi}(A)) \cap N_{yi}(N_{yi}(B)) \cap N_{yi}(A \cap B).$$

Önerme 3.4.2 (iii),

$$N_{yi}(A) \cap N_{yi}(B) \subseteq N_{yi}(A \cap B) \quad (2)$$

(1) ve (2)'den,

$$N_{yi}(A \cap B) = N_{yi}(A) \cap N_{yi}(B).$$

(i)'yi göstermiş oluruz.

$A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ olduğundan, Önerme 3.4.2 (iv) kullanılarak,

$$N_{yi}(A) \subseteq N_{yi}(A \cup B) \text{ ve } N_{yi}(B) \subseteq N_{yi}(A \cup B).$$

Bu ise,

$$N_{yi}(A) \cup N_{yi}(B) \subseteq N_{yi}(A \cup B)$$

anlamına gelir. Dolayısıyla (ii)'de ispatlanmış olur.

Örnek 3.4.4, Teorem 3.4.3 (ii)'de eşitliğin sağlanmasına gerek olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.4.4: [38] X boştan farklı bir küme ve $\tau = \{0_N, A, B, C, D, 1_N\}$ olsun

$$A = \langle (0.4, 0.7, 0.1), (0.5, 0.6, 0.2), (0.9, 0.7, 0.3) \rangle,$$

$$B = \langle (0.4, 0.6, 0.1), (0.7, 0.7, 0.2), (0.9, 0.5, 0.1) \rangle,$$

$$C = \langle (0.4, 0.7, 0.1), (0.7, 0.7, 0.2), (0.9, 0.7, 0.1) \rangle,$$

$$D = \langle (0.4, 0.6, 0.1), (0.5, 0.6, 0.2), (0.9, 0.5, 0.3) \rangle.$$

O halde (X, τ) bir nütrosifik topolojik uzaydır.

$$E = \langle (0.7, 0.6, 0.1), (0.7, 0.6, 0.1), (0.9, 0.5, 0) \rangle$$

ve

$$F = \langle (0.4, 0.6, 0.1), (0.5, 0.7, 0.2), (1, 0.7, 0.1) \rangle.$$

X 'de iki nütrosifik küme olsun.

O halde $N_{yi}(E) = D$ ve $N_{yi}(F) = D$. Bu ise, $N_{yi}(E) \cup N_{yi}(F) = D$ anlamına gelir.

Şimdi,

$$E \cup F = \langle (0.7, 0.6, 0.1), (0.7, 0.7, 0.1), (1, 0.7, 0) \rangle,$$

buradan $N_{yi}(E \cup F) = B$ olur. Buradan ise,

$$N_{yi}(E \cup F) \not\subseteq N_{yi}(E) \cup N_{yi}(F)$$

sonucuna ulaşılır.

3.5 Nötrosofik Topolojik Uzaylarda Nötrosofik Yarı Kapanış

Tanım 3.5.1: [38] (X, τ) bir nötrosofik topolojik uzay olsun. O halde, X 'in bir nötrosofik altkümesi A için, A 'nın nötrosofik yarı kapanışı, A 'da bulunan tüm nötrosofik yarı kapalı X kümelerinin kesişimidir. Yani,

$N_{yk}(A) = \cap \{K : K, X \text{ ve } K \supseteq A\}$ 'daki bir nötrosofik yarı kapalı kümedir.

Önerme 3.5.2: [38] (X, τ) bir nötrosofik topolojik uzay olsun. O zaman, X 'in herhangi bir nötrosofik altkümesi için,

$$(i) \ C(N_{yi}(A)) = N_{yk}(C(A)),$$

$$(ii) \ C(N_{yk}(A)) = N_{yi}(C(A)).$$

İspat: Tanım 3.4.1'i kullanarak, $N_{yi}(A) = \cup \{G : G, X \text{ ve } G \subseteq A\}$ içinde bir nötrosofik yarı açık kümedir. Her iki tarafın komplementi alınırsa,

$$\begin{aligned} C(N_{yi}(A)) &= C(\cup \{G : G, X' \text{te bir nötrosofik yarı açık kümedir ve } G \subseteq A\}) \\ &= \cap \{C(G) : C(G) \text{ bir nötrosofik yarı kapalı kümedir } X \text{ ve } C(A) \subseteq C(G)\}. \end{aligned}$$

$C(G)$ 'yi K ile değiştirirsek,

$$C(N_{yi}(A)) = \cap \{K : K, X \text{ ve } K \supseteq C(A)\}'da$$

bir nötrosofik yarı kapalı kümedir. Tanım 3.5.1'den, $C(N_{yi}(A)) = N_{yk}(C(A))$.

Bu, (i)'yi kanıtlar. (i) kullanılarak,

$$C(N_{yi}(C(A))) = N_{yk}(C(C(A))) = N_{yk}(A).$$

Her iki tarafın komplementini alarak, $N_{yi}(C(A)) = C(N_{yk}(A))$ elde edildi. Böylece (ii) ispatlanmış olur.

Önerme 3.5.3: [38] (X, τ) bir nörtrosofik topolojik uzay olsun. O zaman bir nörtrosofik topolojik uzay X' 'in herhangi bir nörtrosofik alt kümesi A ve B için,

$$(i) A \subseteq N_{yk}(A)$$

$$(ii) A, X \Leftrightarrow N_{yk}(A) = A \text{ da nörtrosofik yarı kapalı kümedir.}$$

$$(iii) N_{yk}(N_{yk}(A)) = N_{yk}(A)$$

$$(iv) A \subseteq B \text{ ise, o zaman } N_{yk}(A) \subseteq N_{yk}(B)$$

İspat: (i) Tanım 3.5.1'den gelir. A, X' 'te nörtrosofik yarı kapalı küme olsun. Önerme 3.3.3'i kullanarak, $C(A), X'$ 'te nörtrosofik yarı açık kümedir.

Önerme 3.5.3 (ii)'den,

$$N_{yi}(C(A)) = C(A) \Leftrightarrow C(N_{yk}(A)) = C(A) \Leftrightarrow N_{yk}(A) = A.$$

Böylece (ii) ispatlanmış olur. (ii) kullanılarak,

$$N_{yk}(N_{yk}(A)) = N_{yk}(A).$$

Bu, (iii)'ü ispatlar.

$A \subseteq B, C(B) \subseteq C(A)$ olduğundan, Önerme 3.4.2 (iv)'den,

$$N_{yi}(C(B)) \subseteq N_{yi}(C(A)).$$

Her iki tarafın komplementini alarak,

$$C(N_{yi}(C(B))) \supseteq C(N_{yi}(C(A))).$$

Önerme 3.5.2 (ii)'den,

$$N_{yk}(A) \subseteq N_{yk}(B).$$

Bu, (iv)'ü ispatlar.

Önerme 3.5.4: [38] X bir nôtrosifik topolojik uzay ve A, X' 'te bir nôtrosifik küme olsun. O halde $N_i(A) \subseteq N_{yi}(A) \subseteq A \subseteq N_{yk}(A) \subseteq N_k(A)$.

İspat: Karşılık gelen operatörlerin tanımlarından açıktır.

Önerme 3.5.5: [38] (X, τ) bir nôtrosifik topolojik uzay olsun. Burada bir nôtrosifik topolojik uzay X' 'in bir nôtrosifik alt kümesi A ve B için,

$$(i) N_{yk}(A \cup B) = N_{yk}(A) \cup N_{yk}(B)$$

$$(ii) N_{yk}(A \cap B) \subseteq N_{yk}(A) \cap N_{yk}(B).$$

İspat: $N_{yk}(A \cup B) = N_{yk}(C(C(A \cup B)))$ olduğundan, Önerme 3.5.2 (i),

$$N_{yk}(A \cup B) = C(N_{yi}(C(A \cup B))) = C(N_{yi}(C(A) \cap C(B))).$$

Teorem 3.4.3 (i) kullanılarak,

$$N_{yk}(A \cup B) = C(N_{yi}(C(A)) \cap N_{yi}(C(B))) = C(N_{yi}(C(A))) \cup C(N_{yi}(C(B))).$$

Önerme 3.5.2 (i)'yi kullanarak

$$N_{yk}(A \cup B) = N_{yk}(C(C(A))) \cup N_{yk}(C(C(B))) = N_{yk}(A) \cup N_{yk}(B).$$

Böylece (i) ispatlandı.

$$A \cap B \subseteq A \text{ ve } A \cap B \subseteq B$$

oldüğundan, Önerme 3.5.3 (iv),

$$N_{yk}(A \cap B) \subseteq N_{yk}(A) \text{ ve } N_{yk}(A \cap B) \subseteq N_{yk}(B).$$

elde edilir. Bu ise,

$$N_{yk}(A \cap B) \subseteq N_{yk}(A) \cap N_{yk}(B)$$

anlamına gelir. Bu da (ii)'nin ispatı olur.

Örnek 3.5.6'da, Önerme 3.5.5 (ii)'de eşitliğinin sağlanması gerekmediğini göstermektedir.

Örnek 3.5.6: [38] X boştan farklı bir küme ve $\tau = \{0_N, A, B, C, D, 1_N\}$ ile

$C(\tau) = \{1_N, E, F, G, H, 0_N\}$ olsun.

$$A = \langle (0.5, 0.6, 0.1), (0.6, 0.7, 0.1), (0.9, 0.5, 0.2) \rangle$$

$$B = \langle (0.4, 0.5, 0.2), (0.8, 0.6, 0.3), (0.9, 0.7, 0.3) \rangle$$

$$C = \langle (0.4, 0.5, 0.2), (0.6, 0.6, 0.3), (0.9, 0.5, 0.3) \rangle$$

$$D = \langle (0.5, 0.6, 0.1), (0.8, 0.7, 0.1), (0.9, 0.7, 0.2) \rangle$$

$$E = \langle (0.1, 0.4, 0.5), (0.1, 0.3, 0.6), (0.2, 0.5, 0.9) \rangle$$

$$F = \langle (0.2, 0.5, 0.4), (0.3, 0.4, 0.8), (0.3, 0.3, 0.9) \rangle$$

$$G = \langle (0.2, 0.5, 0.4), (0.3, 0.4, 0.6), (0.3, 0.5, 0.9) \rangle$$

$$H = \langle (0.1, 0.4, 0.5), (0.1, 0.3, 0.8), (0.2, 0.3, 0.9) \rangle.$$

O halde (X, τ) bir nörtrosofik topolojik uzaydır.

$$I = \langle (0.1, 0.2, 0.5), (0.2, 0.3, 0.7), (0.3, 0.3, 1) \rangle$$

$$J = \langle (0.2, 0.4, 0.8), (0.1, 0.2, 0.8), (0.2, 0.5, 0.9) \rangle$$

nörtrosofik kümeler olsun. O zaman

$$N_{yk}(I) = G \text{ ve } N_{yk}(J) = G.$$

Bu ise,

$$N_{yk}(I) \cap N_{yk}(J) = G$$

anlamına gelir.

$$I \cap J = \langle (0.1, 0.2, 0.8), (0.1, 0.2, 0.8), (0.2, 0.3, 1) \rangle,$$

ve

$$N_{yk}(I \cap J) = H$$

olduğunu takip eder.

Buradan

$$N_{yk}(I) \cap N_{yk}(J) \not\subseteq N_{yk}(I \cap J)$$

olur.

Teorem 3.5.7: [38] (X, τ) ve (Y, σ) iki n trosofik topolojik uzay olsun. A ve B , sırasıyla (X, τ) ile (Y, σ) 'de n trosofik küme ise,

$$i) N_{yk}(A) \times N_{yk}(B) \supseteq N_{yk}(A \times B),$$

$$(ii) N_{yi}(A) \times N_{yi}(B) \subseteq N_{yi}(A \times B).$$

İspat: (i) $A \subseteq N_{yk}(A)$ ve $B \subseteq N_{yk}(B)$ olduğundan,

$$A \times B \subseteq N_{yk}(A) \times N_{yk}(B).$$

Bu ise řu anlama gelir:

$$N_{yk}(A \times B) \subseteq N_{yk}(N_{yk}(A) \times N_{yk}(B))$$

ve önerme 3.3.2'den,

$$N_{yk}(A \times B) \subseteq N_{yk}(A) \times N_{yk}(B).$$

(ii), (i)'den ve $N_{yi}(C(A)) = C(N_{yk}(A))$ açıkça görülür.

Lemma 3.5.8: [38] (X, τ) ve (Y, σ) iki n trosofik topolojik uzay olsun. A_i ve B_j , (X, τ) ile (Y, σ) 'de n trosofik kümeler,

$$(i) \cap \{A_i, B_j\} = \min(\cap A_i, \cap B_j);$$

$$\cup \{A_i, B_j\} = \max(\cup A_i, \cup B_j).$$

$$(ii) \cap \{A_i, 1_N\} = (\cap A_i) \times 1_N$$

$$\cup \{A_i, 1_N\} = (\cup A_i) \times 1_N.$$

$$(ii) \cap \{1_N \times B_j\} = 1_N \times (\cap B_j);$$

$$\cup \{1_N \times B_j\} = 1_N \times (\cup B_j).$$

Teorem 3.5.9: [38] (X, τ) ve (Y, σ) iki nütrosolik topolojik uzay olsun. Eğer X ile Y ilişkili nütrosolik kartezyen çarpım ise X 'in nütrosolik kümesi A ve Y 'nin nütrosolik kümesi B için,

$$(i) N_{yk}(A \times B) = N_{yk}(A) \times N_{yk}(B)$$

$$(ii) N_{yi}(A \times B) = N_{yi}(A) \times N_{yi}(B)$$

 spat: (i) $N_{yk}(A \times B) \subseteq N_{yk}(A) \times N_{yk}(B)$

Teorem 3.5.9 (i)'den

$$N_{yk}(A \times B) \supseteq N_{yk}(A) \times N_{yk}(B)$$

g stermek yeterlidir. $A_i \in \tau$ ve $B_j \in \sigma$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} N_{yk}(A \times B) &= \langle (x, y), \cap C(\{A_i \times B_j\}) : \\ C(\{A_i \times B_j\}) &\supseteq A \times B, \cup \{A_i \times B_j\} : \{A_i \times B_j\} \subseteq A \times B \rangle \\ &= \langle (x, y), (C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j)) : \\ C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j) &\supseteq A \times B, \\ \cup (A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j) : \\ A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j &\subseteq A \times B \rangle = \langle (x, y), \\ \cap (C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j)) : C(A_i) &\supseteq A \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} C(B_j) &\supseteq B, \cup (A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j) : A_i \subseteq A \text{ ve } B_j \subseteq B \rangle \\ &= \langle (x, y), \min (\cap \{ C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j) : C(A_i) \supseteq A \}, \\ \cap \{ C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j) : C(B_j) &\supseteq B \}), \\ maks(\cup (A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j : A_i &\subseteq A \}, \\ \cup (A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j : B_j &\subseteq B \}) \rangle. \\ \langle (x, y), \cap \{ C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j) : C(A_i) &\supseteq A \}, \\ \cap \{ C(A_i) \times 1_N \cup 1_N \times C(B_j) : C(B_i) &\supseteq B \} \rangle \\ &\supseteq \langle (x, y), \cap \{ C(A_i) \times 1_N : C(A_i) \supseteq A \}, \\ \cap \{ 1_N \times C(B_j) : C(B_i) &\supseteq B \} \rangle \\ &= \langle (x, y), \cap \{ C(A_i) : C(A_i) \supseteq A \} \times 1_N, 1_N \times \cap \{ C(B_j) : C(B_i) \supseteq B \} \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle (x, y), N_{yk}(A) \times 1_N, 1_N \times N_{yk}(B) \rangle$$

ve

$$\begin{aligned} & \langle (x, y), \cup \{A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j : A_i \subseteq A, \\ & \cup \{A_i \times 1_N \cap 1_N \times B_j : B_j \subseteq B\} \rangle \subseteq \\ & \langle (x, y), \cup \{A_i \times 1_N : A_i \subseteq A\}, \cup \{1_N \times B_j : B_j \subseteq B\} \rangle \\ & = \langle (x, y), \cup \{A_i : A_i \subseteq A\} \times 1_N, 1_N \times \cup \{B_j : B_j \subseteq B\} \rangle \\ & = \langle (x, y), N_{yi}(A) \times 1_N, 1_N \times N_{yi}(B) \rangle, \\ & N_{yk}(A \times B) \supseteq \\ & \langle (x, y), \min(N_{yk}(A) \times 1_N, 1_N \times N_{yk}(B)), \\ & \max(N_{yi}(A) \times 1_N, 1_N \times N_{yi}(B)) \rangle \\ & = \langle (x, y), \min(N_{yk}(A), N_{yk}(B)), \max(N_{yi}(A), N_{yi}(B)) \rangle \\ & = N_{yi}(A) \times N_{yi}(B). \end{aligned}$$

(ii) (i)'deki ispata benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.5.10: [38] (X, τ) bir nütrosifik topolojik uzay olsun. O halde nütrosifik alt küme A ve B için,

$$(i) N_{yk}(A) \supseteq A \cup N_{yk}(N_{yi}(A)),$$

$$(ii) N_{yi}(A) \subseteq A \cap N_{yi}(N_{yk}(A)),$$

$$(iii) N_i(N_{yk}(A)) \subseteq N_i(N_k(A)),$$

$$(iv) N_i(N_{yk}(A)) \supseteq N_i(N_{yk}(N_{yi}(A))).$$

İspat: Önerme 3.5.3 (i)'den

$$A \subseteq N_{yk}(A) \tag{1}$$

Önerme 3.4.2 (i) kullanılarak,

$$N_{yi} \subseteq (A)$$

olur. O halde,

$$N_{yk}(N_{yi}(A)) \subseteq N_{yk}(A) \tag{2}$$

(1) ve (2)'den

$$A \cup N_{yk}(N_{yi}(A)) \subseteq N_{yk}(A)$$

elde edilir. Bu ise (i)'nin ispatıdır. Önerme 3.4.1 (i)'den

$$N_{yi}(A) \subseteq (A) \tag{3}$$

Önerme 3.5.3 (i) kullanılarak,

$$A \subseteq N_{yk}(A).$$

O halde,

$$N_{yi}(A) \subseteq N_{yi}(N_{yk}(A)) \tag{4}$$

(3) ve (4)'den

$$N_{yi}(A) \subseteq A \cap N_{yi}(N_{yk}(A))$$

olur. Bu ise (ii)'nin ispatıdır. Önerme 3.5.4'den

$$N_{yk}(A) \subseteq N_k(A).$$

Buradan,

$$N_i(N_{yk}(A)) \subseteq N_i(N_k(A))$$

bu ise (iii) ispatıdır. (i)'den

$$N_{yk}(A) \supseteq A \cup N_{yk}(N_{yi}(A)) \text{ 'dir.}$$

Buradan ise,

$$N_i(N_{yk}(A)) \supseteq N_i(A \cup N_{yk}(N_{yi}(A)))$$

elde edilir. O halde,

$$N_i(A \cup B) \supseteq N_i(A) \cup N_i(B),$$

$$N_i(N_{yk}(A)) \supseteq N_i(A) \cup N_i(N_{yk}(N_{yi}(A))) \supseteq N_i(N_{yk}(N_{yi}(A)))$$

bu ise (iv)'ün ispatını verir.

BÖLÜM IV

NÖTROSOFİK TOPOLOJİDE BAZI YENİ KAVRAMLAR VE FONKSİYONLAR ÜZERİNE ALANLAR

Bu bölümde, nôtrosofik yarı açık fonksiyon kavramı ve aralarındaki ilişkiler incelendi. Ayrıca nôtrosofik bir α açık küme karakterizasyon verildi ve nôtrosofik bir α açık kümenin nôtrosofik olması için koşulları gözden geçirildi. Nôtrosofik süreklilik öncesi fonksiyonların karakterizasyonu verildi. Nôtrosofik topolojik uzayların bir fonksiyonunun nôtrosofik α sürekli bir fonksiyon olması için şartlar incelendi.

4.1 Nôtrosofik Topolojik Uzaylarda Bazı Yeni Kavramlar

Tanım 4.1.1: [37] (X, τ) bir nôtrosofik bir topolojik uzay ve A, X' 'te bir nôtrosofik küme olsun.

- 1) Eğer $A \subseteq N_k(N_i(A))$ ise bir nôtrosofik yarı açık kümedir (NYAK).
- 2) Eğer $A \subseteq N_i(N_k(N_i(A)))$ ise nôtrosofik bir α açık kümedir ($N\alpha AK$).
- 3) Eğer $A \subseteq N_i(N_k(A))$ ise nôtrosofik bir pro açık kümedir (NPAK).
- 4) Eğer $A \subseteq N_i(N_k(A))$ ise nôtrosofik bir düzenli açık kümedir (NDAK).
- 5) Eğer $A \subseteq N_k(N_i(N_k(A)))$ ise nôtrosofik bir yarı açık veya β açık kümedir ($N\beta AK$).

Örnek 4.1.2: [37] X boştan farklı bir küme ve X 'teki nôtrosofik kümeler A, B, C, D ve E 'yi aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$A = \langle x, (0.5, 0.4, 0.5), (0.5, 0.4, 0.5), (0.5, 0.6, 0.5) \rangle,$$

$$B = \langle x, (0.5, 0.55, 0.5), (0.5, 0.55, 0.5), (0.5, 0.55, 0.5) \rangle,$$

$$C = \langle x, (0.6, 0.6, 0.5), (0.6, 0.6, 0.5), (0.4, 0.4, 0.5) \rangle.$$

$$T = \{0_N, 1_N, A, B, C\},$$

X üzerindeki nütrosolik topolojidir. Dolayısıyla, (X, τ) nütrosolik topolojik uzaydır.

$D = \langle x, (0.5, 0.5, 0.5), (0.5, 0.5, 0.5), (0.5, 0.5, 0.5) \rangle$ 'nin hem yarı açık hem de

(X, τ) 'da α -açıktır.

$E = \langle x, (0.5, 0.4, 0.4), (0.5, 0.4, 0.4), (0.5, 0.6, 0.6) \rangle$ 'nin hem pro açık hem de (X, τ) 'da β -açıktır.

Önerme 4.1.3: [37] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay olsun. A, X' 'te bir nütrosolik α -açık küme ise o zaman A , bir nütrosolik yarı açık kümedir.

Önerme 4.1.4: [37] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay olsun. A, X' 'te bir nütrosolik α -açık küme ise o zaman A , bir nütrosolik pro açık kümedir.

Önerme 4.1.5: [37] (X, τ) nütrosolik bir topolojik uzay ve A, X' 'te bir nütrosolik küme olsun. B ,

$$B \subseteq A \subseteq N_i(N_k(B))$$

olacak şekilde bir nütrosolik yarı açık küme ise o zaman A , bir nütrosolik α -açık kümedir.

 spat: B , nütrosolik bir yarı açık küme olduğundan,

$$B \subseteq N_k(N_i(B))$$

Böylece

$$A \subseteq N_i(N_k(B)) \subseteq N_i(N_k(N_k(N_i(B)))) = N_i(N_k(N_i(B))) \subseteq N_i(N_k(N_i(A)))$$

ve böylece A , bir nütrosolik α -açık kümedir.

Lemma 4.1.6: [37] Nütrosolik α -açık kümelerin herhangi bir birleşimi, nütrosolik bir α -açık kümelerdir.

Önerme 4.1.7: [37] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay olsun. A, X' 'te bir nütrosolik α -açık küme ise her nütrosolik nokta $x_i \in A$ için, nütrosolik bir α -açık kümesi var B_i öyleki $x_i \in B_{x_i} \subseteq A$.

İspat: B , nörtrosofik bir yarı açık küme olduğundan,

$$B \subseteq N_k(N_i(B))$$

Böylece

$$A \subseteq N_i(N_k(B)) \subseteq N_i(N_k(N_k(N_i(B)))) = N_i(N_k(N_i(B))) \subseteq N_i(N_k(N_i(A)))$$

ve böylece A , bir nörtrosofik α -açık kümedir.

Lemma 4.1.6: [37] Nörtrosofik α -açık kümelerin herhangi bir birleşimi, nörtrosofik bir α -açık kümelerdir.

Önerme 4.1.7: [37] (X, τ) bir nörtrosofik topolojik uzay olsun. A , X' 'te bir nörtrosofik α -açık küme ise her nörtrosofik nokta $x_i \in A$ için, nörtrosofik bir α -açık kümesi var B_i öyleki $x_i \in B_{x_i} \subseteq A$.

İspat: A , X' 'te nörtrosofik bir α -açık küme ise, her bir $x_i \in A$ için $B_{x_i} = A$ olur. Tersine, her nörtrosofik nokta için $x_i \in A$, bir nörtrosofik α -açık küme, B_{x_i} öyleki $x_i \in B_{x_i} \subseteq A$.

Sonra,

$$A = \cup \{x_i | x_i \in A\} \subseteq \cup \{B_{x_i} | x_i \in A\} \subseteq A$$

ve yani

$$A = \cup \{B_{x_i} | x_i \in A\}$$

Lemma 4.1.6'den dolayı nörtrosofik bir α -açık kümedir.

Tanım 4.1.8: [37] (X, τ) ve (Y, S) iki nörtrosofik topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir nörtrosofik fonksiyon olsun.

(i) $f(A)$, X' 'teki her nörtrosofik açık A kümesi için Y' 'de bir nörtrosofik açık küme ise, bir nörtrosofik açık fonksiyondur.

(ii) $f(A)$, X' 'teki her nörtrosofik açık A kümesi için Y' 'de bir nörtrosofik α -açık küme ise, bir nörtrosofik α -açık fonksiyondur.

(iii) $f(A)$, X 'teki her n6trosofik açık A k6mesi için Y 'de bir n6trosofik pro açık k6me ise, f bir n6trosofik pro açık fonksiyondur.

(iv) $f(A)$, X 'teki her n6trosofik açık A k6mesi için Y 'de bir n6trosofik yarı açık k6me ise, bir n6trosofik yarı açık fonksiyondur.

6nerme 4.1.9: [37] (X, τ) , (Y, S) ve (Z, R) 6 n6trosofik topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, S)$ ve $g: (Y, S) \rightarrow (Z, R)$ iki n6trosofik fonksiyon olsun. f n6trosofik açık ve g n6trosofik α -açık ise $g \circ f$ n6trosofik α -açıktır.

6nerme 4.1.10: [37] (X, τ) ve (Y, S) iki n6trosofik topolojik uzay ve

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, S)$ bir n6trosofik fonksiyon olsun. Eğer n6trosofik α -açık ise o zaman n6trosofik yarı açıktır.

İspat: f 'nin n6trosofik α -açık olduğunu varsayalım ve A , X 'te n6trosofik açık k6me olsun. O halde, $f(A)$, Y 'de bir n6trosofik α -açık k6medir.

6nerme 4.1.3'den, $f(A)$ 'nın n6trosofik bir yarı açık k6me olduğu, b6ylece f 'nin bir n6trosofik yarı açık fonksiyon olduğu açık sonucu ortaya çıkar.

6nerme 4.1.11: [37] (X, τ) ve (Y, S) iki n6trosofik topolojik uzaylar olsun. Eğer $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, S)$ n6trosofik α -açık ise o zaman n6trosofik pro açıktır.

4.2 N6trosofik S6reklilik

Tanım 4.2.1: [37] (X, τ) ve (Y, S) iki n6trosofik topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, S)$ bir n6trosofik fonksiyon olsun. $f^{-1}(B)$, Y 'deki her n6trosofik açık k6me B için X 'te bir n6trosofik pro açık k6me ise f , n6trosofik bir ters fonksiyon olarak adlandırılır.

6nerme 4.2.2: [37] (X, τ) ve (Y, S) iki n6trosofik topolojik uzay ve

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, S)$ bir n6trosofik fonksiyon olsun.

(i) f , n6trosofik 6n s6reklidir.

(ii) $f^{-1}(B)$, Y 'deki her n6trosofik kapalı B k6mesi için X 'te pro kapalı bir n6trosofik k6medir.

(iii) Y 'deki her n6trosofik A k6mesi için $N_k(N_i(f^{-1}(A))) \subseteq f^{-1}(N_k(A))$.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) ispat basittir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) A, Y 'de bir nütrosolik küme olsun. O halde $N_k(A)$ nütrosolik kapalıdır.

(ii)'den $f^{-1}(N_k(A))$ 'nın X 'te nütrosolik pro kapalı küme yani

$$N_k(N_i(f^{-1}(A))) \subseteq N_k(N_i(f^{-1}(N_k(A)))) \subseteq f^{-1}(N_k(A)).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) A, Y 'de bir nütrosolik açık küme olsun. O halde $C(A)$, Y 'de nütrosolik kapalı bir küme ve buradan

$$N_k(N_i(f^{-1}C(A))) \subseteq f^{-1}(N_kC(A)) = f^{-1}(A).$$

Bu Őu anlama gelir:

$$\begin{aligned} C(N_i(N_k(f^{-1}(A))) &= N_k\left(C\left(N_k(f^{-1}(A))\right)\right) = N_k\left(N_i\left(C(f^{-1}(A))\right)\right) \\ &= N_k\left(N_i(f^{-1}C(A))\right) \subseteq f^{-1}C(A) = C(f^{-1}(A)) \end{aligned}$$

ve böylece

$$f^{-1}(A) \subseteq N_i(N_k(f^{-1}(A))).$$

Bu nedenle, $f^{-1}(A)$, X 'teki nütrosolik pro açık bir kümedir ve f , nütrosolik  n sürekli dir.

Tanım 4.2.3: [37] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay ve X_i nütrosolik nokta olsun. X 'in nütrosolik A kümesine, X 'teki X_i noktasını içeren nütrosolik açık bir B kümesi varsa, $X_i \in B \subseteq A$ 'nın nütrosolik komşuluğu denir.

Önerme 4.2.4: [37] (X, τ) ve (Y, S) iki nütrosolik topolojik uzay ve

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, S)$ bir nütrosolik fonksiyon olsun. O halde,

(i) f , nütrosolik  n sürekli dir.

(ii) Her nütrosolik nokta için $X_i \in A$ ve $f(x_i)$ 'nin her nütrosolik komşuluğu A, X 'te $x_i \in B \subseteq f^{-1}(A)$ olacak Şekilde nütrosolik bir pro açık B kümesi vardır.

(iii) Her nütrosolik nokta için $X_i \in A$ ve $f(x_i)$ 'nin her nütrosolik komşuluğu A, X 'te $x_i \in B$ ve $f(B) \subseteq A$ olacak Şekilde nütrosolik bir pro açık B kümesi vardır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) X_i , X 'te bir n trosofik nokta olsun ve A , $f(x_i)$ 'nin n trosofik bir komşuluğu olsun. O zaman, Y 'de $f(x_i) \in B \subseteq A$ olacak şekilde n trosofik açık bir B kümesi vardır. f , n trosofik sürekli olmayan bir fonksiyon olduğundan, $f^{-1}(B)$ 'nin X 'teki n trosofik pro açık kümeler olduğunu biliyoruz ve

$$x_{r,t,s} \in f^{-1}(f(x_{r,t,s})) \subseteq f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A).$$

Sonuç olarak (ii) geçerlidir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) x_i , X 'te bir n trosofik nokta olsun ve A , $f(x_i)$ 'nin n trosofik komşuluğu olsun. (ii) koşulu, X 'te n trosofik pro açık bir B kümesinin var olduğunu gösterir, öyle ki $x_i \in B \subseteq f^{-1}(A)$ böylece

$$x_i \in B \text{ ve } f(B) \subseteq f(f^{-1}(A)) \subseteq A.$$

Dolayısıyla (iii) doğrudur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) B , Y 'de bir n trosofik açık küme olsun ve $x_i \in f^{-1}(B)$.

O halde $f(x_i) \in B$ ve bu nedenle B , $f(x_i)$ 'nin n trosofik bir komşuluğudur, çünkü B n trosofik açık kümedir. (iii)'den, X 'te n trosofik bir pro açık A kümesi olduğu, öyle ki $x_i \in A$ ve $f(A) \subseteq B$ böylece

$$x_i \in A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(B).$$

Önerme 4.1.4' n uygulanması, $f^{-1}(B)$ 'nin X 'te bir n trosofik pro açık küme olmasına neden olur. Bu nedenle f , n trosofik sürekli olmayan bir fonksiyondur.

Tanım 4.2.5: [37] (X, τ) ve (Y, S) iki n trosofik topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, S)$ bir n trosofik fonksiyon olsun. O halde $f^{-1}(B)$, Y 'deki her n trosofik açık küme B için X 'te n trosofik bir α -açık küme ise f , n trosofik bir α -sürekli fonksiyon olarak adlandırılır.

Önerme 4.2.6: [37] (X, τ) ve (Y, S) iki n trosofik topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, S)$ bir n trosofik fonksiyon olsun. Y 'de ki her n trosofik B kümesi için

$$N_k(N_i(N_k(f^{-1}(B)))) \subseteq f^{-1}(N_k(B))\text{'yi}$$

karşılar. O halde f , nörtrosofik bir α -sürekli fonksiyondur.

İspat: B , Y 'de bir nörtrosofik açık küme olsun. O zaman $C(B)$, Y 'de nörtrosofik bir kapalı kümedir, bu da hipotezden

$$N_k \left(N_i \left(N_k \left(f^{-1} C(B) \right) \right) \right) \subseteq f^{-1} (N_k C(B)) = f^{-1} C(B).$$

Buradan,

$$\begin{aligned} C(N_i(N_k(N_i(f^{-1}(B)))))) &= N_i(C(N_k(N_i(f^{-1}(B)))))) \\ &= N_k(N_i(C(N_i(f^{-1}(B)))))) \\ &= N_k(N_i(N_k(C(f^{-1}(B))))) \\ &= N_k(N_i(N_k(f^{-1}(C(B))))) \subseteq f^{-1}(C(B)) \\ &= C(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

Böylece

$$f^{-1}(B) \subseteq N_i(N_k(N_i(f^{-1}(B)))).$$

Bu, $f^{-1}(B)$ 'nin X 'de nörtrosofik bir α -açık küme olduğunu gösterir. Bu nedenle f , nörtrosofik bir α -sürekli fonksiyondur.

Önerme 4.2.7: [37] (X, τ) ve (Y, S) iki nörtrosofik topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, S)$ bir nörtrosofik fonksiyon olsun. O halde,

- (i) f , nörtrosofik α -sürekli.
- (ii) Her nörtrosofik nokta için $X_i \in A$ ve $f(x_i)$ 'nin her nörtrosofik komşuluğu A , X 'te $x_i \in B \subseteq f^{-1}(A)$ olacak şekilde nörtrosofik bir α -açık B kümesi vardır.
- (iii) Her nörtrosofik nokta için $X_i \in A$ ve $f(x_i)$ 'nin her nörtrosofik komşuluğu A , X 'te $x_i \in B$ ve $f(B) \subseteq A$ olacak şekilde nörtrosofik bir α -açık B kümesi vardır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) X_i , X 'te bir nörtrosofik nokta olsun ve A , $f(x_i)$ 'nin nörtrosofik bir komşuluğu olsun. O zaman, Y 'de $f(x_i) \in B \subseteq A$ olacak şekilde nörtrosofik açık bir B kümesi vardır.

f , nütrosolik α -sürekli olduğundan, $f^{-1}(B)$ 'nin X 'te, nütrosolik α -sürekli olduğundan

$$x_i \in f^{-1}(f(x_i)) \subseteq f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A).$$

Sonuc olarak (ii) geçerlidir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) X_i , X 'te bir nütrosolik nokta olsun ve A , $f(x_i)$ 'nin nütrosolik bir komşuluğu olsun.

(ii) koşulu, X 'te nütrosolik bir α -açık B kümesinin var olduğunu gösterir, öyle ki $x_i \in B \subseteq f^{-1}(A)$ böylece

$$x_i \in B \text{ ve } f(B) \subseteq f(f^{-1}(A)) \subseteq A.$$

Dolayısıyla (iii) doğrudur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) B , Y 'de bir nütrosolik açık küme ve $x_i \in f^{-1}(B)$. Sonra $f(x_i) \in B$ ve bu nedenle B , $f(x_i)$ 'nin nütrosolik bir komşuluğudur      B , nütrosolik açık kümedir.

(iii)'den X 'de nütrosolik bir α -açık kümesi A vardır, öyle ki $x_i \in B$ ve $f(A) \subseteq B$ böylece

$$x_i \in A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(B).$$

Önerme 4.1.4' n uygulanması, $f^{-1}(B)$ 'nin X 'de bir nütrosolik α -açık küme olmasına neden olur. Bu nedenle f , nütrosolik α -sürekli bir fonksiyondur.

Önerme 4.2.8: [37] (X, τ) ve (Y, S) iki nütrosolik topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, S)$ bir nütrosolik fonksiyon olsun. f nütrosolik ise α -sürekli, o halde nütrosolik yarı süreklidir.

 spat: B , Y 'de nütrosolik bir açık küme olsun. f , nütrosolik α -sürekli olduğundan, $f^{-1}(B)$, X 'te nütrosolik bir yarı açık kümedir. Önerme 4.1.3'den, $f^{-1}(B)$ 'nin X 'te nütrosolik bir yarı açık küme olduğu ve böylece f 'nin bir nütrosolik yarı sürekli fonksiyon olduğu sonucu çıkar.

Önerme 4.2.9: [37] (X, τ) ve (Y, S) iki nütrosolik topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, S)$ bir nütrosolik fonksiyon olsun. f nütrosolik ise α -sürekli, o halde nütrosolik   n süreklidir.

BÖLÜM V

NÖTROSOFİK TOPOLOJİK UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖTROSOFİK b -AÇIK KÜMELER

Bu bölümde nörtrosolik topolojik uzayda genelleştirilmiş nörtrosolik b -açık küme kavramı incelendi ve genelleştirilmiş nörtrosolik b -iç, genelleştirilmiş nörtrosolik b -kapanışı gözden geçirildi ve bazı özellikleri incelendi.

5.1 Genelleştirilmiş Nörtrosolik b -Açık Küme

Tanım 5.1.1: [43] (X, τ) bir nörtrosolik topolojik uzayı ve A, X' 'te bir nörtrosolik küme olsun.

$$A \subseteq N_i(N_k(A)) \cup N_k(N_i(A))$$

ancak ve ancak A, b -açık (N - b -açık) kümedir.

Tanım 5.1.2: [43] (X, τ) bir nörtrosolik topolojik uzay ve A, X' 'te bir nörtrosolik küme olsun. Eğer

$$A \supseteq N_i(N_k(A)) \cap N_k(N_i(A))$$

ise A bir nörtrosolik b -kapalı (N - b -kapalı) kümedir.

Açıklama 5.1.3: [43] (X, τ) bir nörtrosolik topolojik uzay ve A, X' 'te bir N - b -kapalı kümedir, ancak $A^c (X, \tau)$ 'de bir N - b -açık kümedir.

Teorem 5.1.4: [46] Herhangi iki N - b -kapalı kümenin kesişimi yine bir N - b -kapalı kümedir.

İspat: (X, τ) bir nörtrosolik topolojik uzay ve E, F herhangi iki N - b -kapalı küme olduğunu varsayalım. O halde

$$E \supseteq N_i(N_k(E)) \cap N_k(N_i(E)) \quad (5)$$

ve

$$F \supseteq N_i(N_k(F)) \cap N_k(N_i(F)) \quad (6)$$

Herhangi iki nütrosolik küme

E ve F için $E \cap F \subseteq E$ ve $E \cap F \subseteq F$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$E \cap F \subseteq E \Rightarrow N_i(E \cap F) \subseteq N_i(E) \Rightarrow N_k(N_i(E \cap F)) \subseteq N_k(N_i(E)) \quad (7)$$

$$E \cap F \subseteq E \Rightarrow N_k(E \cap F) \subseteq N_k(E) \Rightarrow N_i(N_k(E \cap F)) \subseteq N_i(N_k(E)) \quad (8)$$

$$E \cap F \subseteq F \Rightarrow N_i(E \cap F) \subseteq N_i(F) \Rightarrow N_k(N_i(E \cap F)) \subseteq N_k(N_i(F)) \quad (9)$$

$$E \cap F \subseteq F \Rightarrow N_k(E \cap F) \subseteq N_k(F) \Rightarrow N_i(N_k(E \cap F)) \subseteq N_i(N_k(F)) \quad (10)$$

(5) ve (6) 'dan,

$$\begin{aligned} E \cap F &\supseteq N_i(N_k(E)) \cap N_k(N_i(E)) \cap F \supseteq N_i(N_k(F)) \cap N_k(N_i(F)) \supseteq \\ &N_i(N_k(E \cap F)) \cap N_k(N_i(E \cap F)) \cap N_i(N_k(E \cap F)) \cap N_k(N_i(E \cap F)) \end{aligned}$$

(7,8,9 ve 10 tarafından)

$$= N_i(N_k(E \cap F)) \cap N_k(N_i(E \cap F))$$

$$\Rightarrow E \cap F \supseteq N_i(N_k(E \cap F)) \cap N_k(N_i(E \cap F))$$

Bu nedenle $E \cap F$, N - b -kapalı bir kümedir.

Dolayısıyla, herhangi iki N - b -kapalı kümenin kesişimi yine bir N - b kapalı kümedir.

Açıklama 5.1.5: [46] Herhangi iki N - b -kapalı kümenin birleşimi bir N - b -kapalı küme olamaz.  rnek 5.1.6'da bu gösterilmiştir.

 rnek 5.1.6: [46] X boştan farklı bir küme ve

$$A = \langle (0.5, 0.2, 0.4), (0.6, 0.1, 0.3) \rangle$$

$$B = \langle (0.3, 0.5, 0.6), (0.4, 0.4, 0.5) \rangle$$

X 'teki bazı ntrosofik kümeler olsun. O halde $\tau = \{0_N, 1_N, A, B\}$, (X, τ) 'da açıkça bir ntrosofik topolojik uzaydır.

O halde,

$$E = \{(0.6, 0.5, 0.6), (0.5, 0.6, 0.7)\}$$

$$F = \{(1, 0, 1), (0.9, 0.1, 0.1)\}$$

(X, τ) 'de iki N - b -kapalı küme olduğu doğrulanabilir. Ancak birleşimleri

$$E \cup F = \{(1, 0, 0.6), (0.9, 0.1, 0.1)\}$$

bir N - b -kapalı küme değildir.

Tanım 5.1.7: [43] (X, τ) 'nın bir ntrosofik topolojik uzay ve A , X 'te bir ntrosofik küme olsun. A 'nın Nötrosofik b -Kapanışı (N_{bk}) ve Nötrosofik b -İ (N_{bi})

$$N_{bk}(A) = \cap \{P : P, (X, \tau) \text{ } N\text{-}b \text{ kapalı küme ve } A \subseteq P\}$$

$$N_{bi}(A) = \cup \{R : R (X, \tau) \text{ } N\text{-}b \text{ açık küme ve } R \subseteq A\}$$

şeklinde tanımlanır.

Açıklama 5.1.8: [43] $N_{bi}(A)$, (X, τ) içindeki en büyük N - b -açık kümedir ve $N_{bk}(A)$, A 'yı içeren (X, τ) içindeki en küçük N - b -kapalı kümedir.

Tanım 5.1.9: [40] (X, τ) 'nin bir ntrosofik topolojik uzay ve G , X 'deki genelleştirilmiş ntrosofik b -Açık (g - N - b -açık) küme olsun. Eğer en az bir N - b -kapalı küme H (1_N hariç), G yle ki $G \subseteq N_i(H)$. K^c (X, τ) 'de bir g - N - b -açık küme ise, (X, τ) 'deki bir ntrosofik alt küme K , genelleştirilmiş ntrosofik b -kapalı (g - N - b -kapalı) küme olarak adlandırılır.

rnek 5.1.10: [46] X boştan farklı bir küme ve

$$A = \langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.6, 0.1, 0.3) \rangle$$

$$B = \langle (0.6, 0.5, 0.6), (0.7, 0.6, 0.7) \rangle$$

X 'teki bazı ntrosofik kümeler olsun. O halde $\tau = \{0_N, 1_N, A, B\}$, (X, τ) 'da açıkça bir ntrosofik topolojik uzaydır.

Burada

$$K = \{(0.6, 0.7, 0.8), (0.5, 0.8, 0.8)\}$$

bir g - N - b -açık kümedir, çünkü bir N - b -kapalı küme

$$G = \{(0.7, 0.3, 0.4), (0.8, 0.3, 0.4)\}$$

olarak $K \subseteq G$ ile öyle ki $K \subseteq N_i(G)$ 'dir.

Önerme 5.1.11: [46] (X, τ) bir nôtrosifik topolojik uzay olsun. 0_N bir g - N - b -açık küme, ancak 1_N bir g - N - b -açık küme değildir.

İspat: (X, τ) 'nin bir nôtrosifik topolojik uzay olduğunu varsayalım. Bir nôtrosifik açık küme N_i , bir N - b -açık küme olduğundan, 1_N bir N - b -açık kümedir.

Bu nedenle, 0_N bir N - b -kapalı kümedir, çünkü N - b -açık küme 1_N 'nin komplementidir. O halde,

$$0_N \subseteq 0_N \text{ ve } 0_N \subseteq N_i(0_N) = 0_N.$$

Bu nedenle $0_N \subseteq N_i(0_N)$ olacak şekilde $0_N \subseteq 0_N$ ile N - b -kapalı 0_N (1_N hariç) küme vardır. Dolayısıyla 0_N , (X, τ) 'de bir g - N - b -açık kümedir.

Ancak nôtrosifik uzay 1_N durumunda, $1_N \subseteq H$ ile $1_N \subseteq N_i(H)$ olacak şekilde herhangi bir nôtrosifik b -kapalı H kümesi (1_N hariç) bulamıyoruz. Dolayısıyla 1_N , (X, τ) 'de bir g - N - b -açık küme değildir.

Önerme 5.1.12: [46] (X, τ) bir nôtrosifik topolojik uzay ve P , bir g - N - b -açık küme olsun. Bu durumda, P 'de bulunan her nôtrosifik uzay bir g - N - b -açık küme olur.

İspat: (X, τ) bir nôtrosifik topolojik uzay da P , bir g - N - b -açık küme olduğunu ve R 'nin, P 'de bulunan X 'teki herhangi bir keyfi nôtrosifik küme olduğunu varsayalım. P bir g - N - b -açık küme olduğundan, $P \subseteq S$ ile $P \subseteq N_i(S)$ olacak şekilde N - b -kapalı bir S kümesi (1_N hariç) vardır.

Şimdi R , A 'nın içindedir, bu nedenle

$$R \subseteq P$$

$$\Rightarrow R \subseteq P \subseteq S \text{ \& } R \subseteq P \subseteq N_i(S).$$

Bu nedenle, $R \subseteq S$ ile $R \subseteq N_i(S)$ olacak şekilde N - b -kapalı bir S kümesi (1_N hariç) vardır. Dolayısıyla R bir g - N - b -açık kümedir. Dolayısıyla, P 'de bulunan her nütrosifik küme, yine (X, τ) 'de bir g - N - b -açık kümedir.

Tanım 5.1.13: [46] (X, τ) 'nin bir nütrosifik topolojik uzay ve P 'nin X 'teki bir nütrosifik küme olsun. O zaman genelleştirilmiş nütrosifik b -İç (g - N_{bi}) ve genelleştirilmiş nütrosifik b -kapanış (g - N_{bk}) P ile tanımlanır ve

$$g\text{-}N_{bi}(P) = \cup \{R : R, g\text{-}N\text{-}b\text{-}açık küme ve R \subseteq P\}$$

$$g\text{-}N_{bk}(P) = \cap \{S : S, g\text{-}N\text{-}b\text{-}kapalı küme ve P \subseteq S\}$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 5.1.14: [46] (X, τ) 'nın bir nütrosifik topolojik uzay olsun. O halde (X, τ) 'nin her bir nütrosifik açık alt kümesi bir g - N - b -açık kümedir.

İspat: P bir nütrosifik topolojik uzayda (X, τ) keyfi bir nütrosifik açık küme olsun. Yani $P = N_i(P)$. Her nütrosifik kapalı küme bir N - b -kapalı küme olduğundan, $N_i(P)$. bir N - b -kapalı kümedir. Ayrıca $P \subseteq N_k(P)$ olduğunu biliyoruz.

Şimdi $P \subseteq N_k(P)$

$$\Rightarrow N_i(P) \subseteq N_i(N_k(P))$$

$$\Rightarrow P = N_i(P) \subseteq N_i(N_k(P))$$

$$\Rightarrow P \subseteq N_i(N_k(P))$$

Bu nedenle $P \subseteq N_i(N_k(P))$ olacak şekilde $P \subseteq N_k(P)$ ile N - b -kapalı $N_k(P)$ kümesi vardır. Dolayısıyla P , (X, τ) 'de bir g - N - b -açık kümedir. Bu nedenle (X, τ) 'nin her nütrosifik açık alt kümesi yine bir g - N - b -açık kümedir.

Açıklama 5.1.15: [46] Teorem 5.1.14'ün tersi doğru değildir. Bu, örnek 5.1.16 ile gösterilebilir.

Örnek 5.1.16: [46] Örnek 5.1.10'da $K = \{(0.6, 0.7, 0.8), (0.5, 0.8, 0.8)\}$ 'in (X, τ) 'de bir g - N - b -açık küme olduğu kolayca görülebilir, ancak N a değildir.

Teorem 5.1.17: [46] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay olsun. Bu durumda (X, τ) içindeki her Nütrosolik  n-Açık Küme ($N AK$) bir g - N - b -açık kümedir.

 spat: (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay ve P 'nin bir $N AK$ olduğunu varsayalım.

Sonra $P \subseteq N_i(N_k(P))$. Herhangi bir nütrosolik küme P için $N_k(P)$ N - b -kapalı küme ve $P \subseteq N_k(P)$. Bu nedenle $P \subseteq N_i(N_k(P))$ olacak şekilde $P \subseteq N_k(P)$ ile N - b -kapalı bir $N_k(P)$ kümesi vardır. Dolayısıyla P , (X, τ) 'de bir g - N - b -açık kümedir. Böylece (X, τ) içindeki her $N AK$ yine bir g - N - b -açık kümedir.

Teorem 5.1.18: [46] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay olsun. P , hem Na hem de Nütrosolik Yarı Açık Küme ($NYAK$) ise, o zaman bir g - N - b -açık kümedir.

 spat: (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay ve P 'nin hem $NYAK$ hem de Na olduğunu varsayalım. P bir Na olduğundan $P = N_i(P)$.

Yine P bir $NYAK$ olduğu için, bu yüzden $P \subseteq N_k(N_i(P))$.

$N_k(N_i(P))$ 'nin bir N - b -kapalı küme olduğu doğrulanabilir (bir NKK olduğu için).

Şimdi $P \subseteq N_k(N_i(P))$

$$\Rightarrow N_i(P) \subseteq N_i(N_k(N_i(P))) \quad [P \subseteq O \Rightarrow N_i(P) \subseteq N_i(O)'den]$$

$$\Rightarrow P = N_i(P) \subseteq N_i(N_k(N_i(P))) \quad [P = N_i(P)]$$

$$\Rightarrow P \subseteq N_i(N_k(N_i(P)))$$

Bu nedenle $P \subseteq N_i(N_k(N_i(P)))$ olacak şekilde (X, τ) içinde $P \subseteq N_k(N_i(P))$ ile N - b -kapalı $N_k(N_i(P))$ kümesi vardır. Dolayısıyla P , bir g - N - b -açık kümedir.

Teorem 5.1.19: [46] (X, τ) bir nütrosolik topolojik uzay olsun ve P 'nin hem nütrosolik α -açık hem de nütrosolik açık küme olduğunu varsayalım.

 spat: P 'nin hem nütrosolik α -açık küme hem de Na olan keyfi bir nütrosolik küme olduğunu varsayalım. P bir Na olduğundan $P = N_i(P)$. Yine P , nütrosolik bir α -açık küme olduğundan

$$P \subseteq N_i(N_k(N_i(P)))$$

olur. Bu nedenle $N_k(N_i(P))$ 'nin (X, τ) 'de N - b -kapalı küme olduğu açıktır.

Şimdi $P = N_i(P)$

$$\Rightarrow P = N_i(P) \subseteq N_k(N_i(P))$$

$$\Rightarrow P \subseteq N_k(N_i(P))$$

Bu nedenle $P \subseteq N_i(N_k(N_i(P)))$ olacak şekilde $P \subseteq N_k(N_i(P))$ ile N - b -kapalı $N_k(N_i(P))$ kümesi vardır. Dolayısıyla P , (X, τ) 'da genelleştirilmiş bir N - b -açık kümedir.

Teorem 5.1.20: [46] (X, τ) bir nôtrosifik topolojik uzay olsun ve herhangi iki g - N - b -açık kümenin kesişimi yine bir g - N - b -açık kümedir.

İspat: (X, τ) bir nôtrosifik topolojik uzay ve P ve R , herhangi iki g - N - b -açık küme olsun. O zaman

$$P \subseteq N_i(K) \text{ ve } R \subseteq N_i(L)$$

olacak şekilde iki N - b -kapalı K, L ve $P \subseteq K, R \subseteq L$ vardır. Burada $P \cap R \subseteq K \cap L$.

İki N - b -kapalı kümenin kesişiminin yine bir N - b -kapalı küme olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $K \cap L$, (X, τ) 'de bir N - b -kapalı kümedir.

Şimdi $P \cap R \subseteq N_i(K) \cap N_i(L)$ [$P \subseteq N_i(K)$ ve $R \subseteq N_i(L)$ dan]

$$= N_i(K \cap L)$$

$$\Rightarrow P \cap R \subseteq N_i(K \cap L).$$

Bu nedenle $P \cap R \subseteq K \cap L$ ile N - b -kapalı bir $K \cap L$ kümesi vardır, öyle ki

$$P \cap R \subseteq N_i(K \cap L)$$

olur. Dolayısıyla $P \cap R$, (X, τ) 'de bir g - N - b -açık kümesidir. Böylece, herhangi iki

g - N - b -açık kümenin kesişimi (X, τ) 'de yine bir g - N - b -açık kümedir.

Teorem 5.1.21: [46] İki g - N - b -açık kümenin birleşimi, biri diğesinde yer alıyorsa, bir g - N - b -açık kümedir.

İspat: (X, τ) bir nôtrosifik topolojik uzay ve P ve R , $P \subseteq R$ olacak şekilde herhangi iki g - N - b -açık küme olsun. P ve R g - N - b -açık kümeler olduğundan,

$$P \subseteq G_1 \text{ ve } R \subseteq G_2 \text{ ile } P \subseteq N_i(G_1) \text{ ve } R \subseteq N_i(G_2)$$

olacak şekilde iki N - b -kapalı G_1, G_2 kümesi vardır.

$$\text{Şimdi } P \cap R \subseteq R \quad [P \cap R' \text{ dan}]$$

$$\subseteq G_2$$

$$\Rightarrow P \cap R \subseteq G_2$$

Yine $P \cap R \subseteq R \subseteq N_i(G_2)$, burada $G_2, (X, \tau)$ 'de bir N - b -kapalı kümedir.

Bu nedenle $P \cap R \subseteq N_i(G_2)$ olacak şekilde (X, τ) içinde $P \cap R \subseteq G_2$ ile N - b -kapalı bir G_2 kümesi vardır.

Dolayısıyla, iki g - N - b -açık kümenin birleşimi, eğer biri diğesinde yer alıyorsa, yine bir g - N - b -açık kümedir.

Tanım 5.1.22: [46] $A \subseteq P \cap R$ ile N - b -kapalı bir R kümesi varsa, $A \subseteq N_i(P \cap R)$ olacak şekilde bir nôtrosifik küme A , bir nôtrosifik küme P 'ye göre bir g - N - b -açık küme olarak adlandırılır.

Teorem 5.1.23: [46] (X, τ) bir nôtrosifik topolojik uzay olsun. R, P 'ye göre bir g - N - b -açık küme ve P, A' ya göre bir g - N - b -açık küme ise, o zaman R, A' ye göre bir g - N - b -açık kümedir.

İspat: R, P 'ye göre bir g - N - b -açık küme olduğundan, $R \cap P \subseteq K$ ile N - b -kapalı bir K kümesi vardır, öyleki $R \subseteq N_i(P \cap K)$. Benzer şekilde P, X' e göre bir g - N - b -açık küme olduğundan, $P \cap A \subseteq L$ ile N - b -kapalı bir L kümesi vardır, o halde

$$P \subseteq N_i(A \cap L).$$

olur. İki N - b -kapalı kümenin kesişiminin yine bir N - b -kapalı küme olduğunu biliyoruz.

Yani $K \cap L$, N - b -kapalı bir kümedir. Şimdi

$$R \subseteq P \cap K \subseteq A \cap L \cap K$$

$$= A \cap (L \cap K)$$

$$= A \cap G$$

burada $G = K \cap L$ bir N - b -kapalı kümedir. Buradan

$$R \subseteq N_i(P \cap K)$$

$$\subseteq N_i(A \cap G)$$

Bu nedenle $R \subseteq N_i(A \cap G)$ olacak şekilde $R \subseteq A \cap G$ ile N - b -kapalı bir kümedir.

Dolayısıyla R , A' 'ya göre bir g - N - b -açıktır.

BÖLÜM VI

SONUÇLAR

Bu tez de bulanık küme, sezgisel bulanık küme tanımlarına yer verildi. Nötrosofik küme tanım ve özellikleri değinildi. Nötrosofik topolojik uzaya ait tanım, teorem ve örnekleri incelendi.

Nötrosofik topolojik uzaylarda kartezyen çarpımı ve nötrosofik topolojik uzaylarda bazı nötrosofik küme çeşitleri verildi. Bu kümelerin tanımları ve özellikleri incelendi ve örnekler verildi.

Nötrosofik topolojik uzayda bazı yeni kavramlar ve fonksiyonlar üzerine alanlar incelendi. Bu incelemede yeni kavramlar ve nötrosofik süreklilik üzerine duruldu.

Son olarak nötrosofik topolojik uzayda genelleştirilmiş nötrosofik b -açık küme, genelleştirilmiş nötrosofik b -iç, genelleştirilmiş nötrosofik b -kapanış kavramlarının tanımları verildi ve bazı özellikleri ile teoremleri incelendi.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh L.A., Fuzzy Sets, (1965). *Inform and Control*, **8(3)** 338-353.
- [2] Usha Parameswari R., Bageerathi K., (2013). On fuzzy γ -semi open sets and fuzzy γ -semi closed sets in fuzzy topological spaces, *IOSR Journal of Mathematics*, Vol **7**, 63-70.
- [3] Azad K.K., (1981). On fuzzy semi-continuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity, *J. Math. Anal. Appl* **82**, 14-32.
- [4] Biswas, P, Pramanik, S. & Giri, B. C. (2016a). Aggregation of triangular fuzzy neutrosophic set information and its application to multi-attribute decision making. *Neutrosophic Sets and Systems*, **12**, 20-40.
- [5] Chang C.L., (1968). Fuzzy Topological Spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **24** 182-190.
- [6] Atanassov T. K. (1984). *Intuitionistic fuzzy sets*, in V. Sgurev, ed., VII ITKRS Session, Sofia (June 1983 central Sci. and Techn. Library, Bulg. Academy of Sciences).
- [7] Smarandache F., (2010). Neutrosophic Set: A Generalization of Intuitionistic Fuzzy set, *Journal of Defense Resources Management.* **1**, 107-116.
- [8] Hanafy I.M., (2003). Completely continuous functions in intuitionistic fuzzy topological spaces, *Czechoslovak Mathematics journal*, Vol. **53**, No.4, 793-803.
- [9] Reza Saadati, Jin HanPark, (2006). On the intuitionistic fuzzy topological space, *Chaos, Solitons and Fractals* **27**, 331-344.
- [10] Dogan Coker, (1997). An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces, *Fuzzy Sets and Systems.* **88** 81-89.
- [11] Smarandache F. (1999). A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability. *American Research Press, Rehoboth, NM.*

- [12] Pramanik, S. (2013). A critical review of Vivekanada's educational thoughts for women education based on neutrosophic logic, *MS Academic*, **3**(1), 191-198.
- [13] Pramanik, S. (2016a). Neutrosophic linear goal programming. *Global Journal of Engineering Science and Research Management*, **3**(7), 01-11.
- [14] Pramanik, S. (2016b). Neutrosophic multi-objective linear programming. *Global Journal of Engineering Science and Research Management*, **3**(8), 36-46.
- [15] Salama A.A. and Alblowi S.A., (2012). Neutrosophic set and neutrosophic topological space, *ISOR J. mathematics*, Vol.(3), Issue(4). 31-35.
- [16] Salama A.A. and Alblowi S.A., (2012). *Generalized Neutrosophic Set and Generalized Neutrosophic Topological Spaces*, *Journal computer Sci. Engineering*, Vol. (2) No. (7).
- [17] Lupianez F.G., (2009) Interval Neutrosophic Sets and Topology, Proceedings of 13th WSEAS, *International conference on Applied Mathematics (MATH'08) Kybernetes*, **38**, 621-624.
- [18] Broumi, S., Bakali, A., Talea, M., Smarandache, F., Uluçay, V., Sahin, S. & Pramanik, S. (2018). *Neutrosophic sets: An overview*. In F. Smarandache, & S. Pramanik (Eds., vol.2), *New trends in neutrosophic theory and applications* (pp. 403-434). Brussels: Pons Editions
- [19] Khalid, H. E. (2020). Neutrosophic geometric programming (NGP) with (max-product) operator, an innovative model. *Neutrosophic Sets and Systems*, **32**, 269-281.
- [20] Peng, X., & Dai, J. (2018). A bibliometric analysis of neutrosophic set: two decades review from 1998 to 2017. *Artificial Intelligence Review*.
- [21] Pramanik, S., & Roy, T.K. (2014). Neutrosophic game theoretic approach to Indo-Pak conflict over Jammu-Kashmir. *Neutrosophic Sets and Systems*, **2**, 82-101.
- [22] Pramanik, S. & Mondal, K. (2016). Rough bipolar neutrosophic set. *Global Journal of Engineering Science and Research Management*, **3**(6), 71-81.
- [23] Smarandache, F. & Pramanik, S. (Eds.). (2018). *New trends in neutrosophic theory and applications*, Vol.2. Brussels: Pons Editions.
- [24] Biswas, P, Pramanik, S. & Giri, B. C. (2014). A new methodology for neutrosophic multi-attribute decision-making with unknown weight information. *Neutrosophic Sets and Systems*, **3**, 42-50.

- [25] Biswas, P, Pramanik, S. & Giri, B. C. (2016b). Value and ambiguity index based ranking method of single-valued trapezoidal neutrosophic numbers and its application to multi-attribute decision making. *Neutrosophic Sets and Systems*, **12**, 127-138.
- [26] Dey, P. P., Pramanik, S. & Giri, B. C. (2016a). An extended grey relational analysis based multiple attribute decision making in interval neutrosophic uncertain linguistic setting. *Neutrosophic Sets and Systems*, **11**, 21-30.
- [27] Dey, P. P., Pramanik, S. & Giri, B. C. (2016b). Neutrosophic soft multi-attribute decision making based on grey relational projection method. *Neutrosophic Sets and Systems*, **11**, 98-106.
- [28] Mondal, K., & Pramanik, S. (2015). Neutrosophic decision making model for clay-brick selection in construction field based on grey relational analysis. *Neutrosophic Sets and Systems*, **9**, 64-71.
- [29] Pramanik, S., & Mallick, R. (2018). VIKOR based MAGDM strategy with trapezoidal neutrosophic numbers. *Neutrosophic Sets and Systems*, **22**, 118-130.
- [30] Dalapati, S., Pramanik, S., Alam, S., Smarandache, S., & Roy, T. K. (2017). IN-cross entropy based MAGDM strategy under interval neutrosophic set environment. *Neutrosophic Sets and Systems*, **18**, 43-57.
- [31] Pramanik, S., Mallick, R., & Dasgupta, A. (2018). Contributions of selected Indian researchers to multi-attribute decision making in neutrosophic environment. *Neutrosophic Sets and Systems*, **20**, 108-131.
- [32] Pramanik, S., & Dalapati, S. (2018). A revisit to NC-VIKOR based MAGDM strategy in neutrosophic cubic set environment. *Neutrosophic Sets and Systems*, **21**, 131-141.
- [33] Pramanik, S., Dey, P.P., & Smarandache, F. (2018). Correlation coefficient measures of interval bipolar neutrosophic sets for solving multi-attribute decision making problems. *Neutrosophic Sets and Systems*, **19**, 70-79.
- [34] Mondal, K., Pramanik, S. & Smarandache, F. (2016a). Rough neutrosophic TOPSIS for multi-attribute group decision making. *Neutrosophic Sets and Systems*, **13**, 105-117.
- [35] Mondal, K., Pramanik, S. & Smarandache, F. (2016b). Multi-attribute decision making based on rough neutrosophic variational coefficient similarity measure. *Neutrosophic Sets and Systems*, **13**, 3-17.

- [36] Jeon J.K., Jun Y.B., And Park J.H., (2005). Intuitionistic Fuzzy Alpha-Continuity and Intuitionistic Fuzzy Precontinuity, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **19** 3091-3101.
- [37] Arokiarani, I., Dhavaseelan, R., Jafari, S., & Parimala, M. (2017). On some new notations and functions in neutrosophic topological spaces. *Neutrosophic Sets and Systems*, **16**, 16-19.
- [38] Iswarya, P., & Bageerathi, K. (2016). On neutrosophic semi-open sets in neutrosophic topological spaces. *International Journal of Mathematical Trends and Technology*, **37(3)**, 214-223.
- [39] Rao, V.V., & Srinivasa, R. (2017). Neutrosophic pre-open sets and pre-closed sets in neutrosophic topology. *International Journal of Chem Tech Research*, **10(10)**, 449-458
- [40] Dhavaseelan, R., & Jafari, S. (2018). Generalized neutrosophic closed sets. In F. Smarandache, & S. Pramanik (Eds., vol.2), *New trends in neutrosophic theory and applications* (pp. 261-273). Brussels: Pons Editions.
- [41] Pushpalatha, A., & Nandhini, T. (2019). Generalized closed sets via neutrosophic topological spaces. *Malaya Journal of Matematik*, **7(1)**, 50-54.
- [42] Shanthi, V. K., Chandrasekar, S., Safina, & Begam, K. (2018). Neutrosophic generalized semi closed sets in neutrosophic topological spaces. *International Journal of Research in Advent Technology*, **67**, 1739-1743.
- [43] Ebenanjar, E., Immaculate, J., & Wilfred, C. B. (2018). *On neutrosophic b - open sets in neutrosophic topological space*. Journal of Physics Conference Series, **1139(1)**.
- [44] Maheswari, C., Sathyabama, M., & Chandrasekar, S. (2018). Neutrosophic generalized b-closed sets in neutrosophic topological spaces. *Journal of Physics Conference Series*, **1139(1)**, 012065.
- [45] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y., & Sunderraman, R. (2010). Single Valued Neutrosophic Sets. *Multispace Multistruct.*, **4**, 410-413.
- [46] Das, Suman and Pramanik, S. (2020). "Generalized neutrosophic b-open sets in neutrosophic topological space." *Neutrosophic Sets and Systems* **35**, 1.

ÖZGEÇMİŞ

AD : AHMET

SOYAD : KILIN

YÜKSEK LİSANS : GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

LİSANS : NIĞDE ÖMER HALİS DEMİR ÜNİVERSİTESİ

LİSE : FİTNAT NURİ TEKEREKOĞLU ANADOLU LİSESİ