

T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NULL CARTAN EĞRİLERİN GEOMETRİSİ VE UYGULAMALARI

Eda YÜCEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA  
Haziran 2015

Tezin Başlığı : NULL CARTAN EĞRİLERİN GEOMETRİSİ  
VE UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan : Eda YÜCEL

Sınav Tarihi : 17.06.2015

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

**Sınav Jürisi Üyeleri** (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

\_\_\_\_\_

Prof.Dr. Rıfat GÜNEŞ

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

\_\_\_\_\_

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

\_\_\_\_\_  
Prof.Dr. Alaattin ESEN  
Enstitü Müdürü

## ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Null Cartan Eğrilerin Geometrisi Ve Uygulamaları" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Eda YÜCEL

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NULL CARTAN EĞRİLERİN GEOMETRİSİ VE UYGULAMALARI

Eda YÜCEL

İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

67+iv sayfa

2015

Danışman: Prof.Dr. Rıfat GÜNEŞ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, null eğriler ve bir eğri boyunca quasi-ortonormal baz tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde,  $(M_1^{m+2}, g)$  ile verilen bir Lorentzian manifoldun bir null eğri boyunca Frenet çatısı ve Frenet denklemleri sunulmuştur.  $M_1^3, M_1^4, M_1^5$  de null eğrilerin geometrisi verilmiştir ve bazı örnekler sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, Lorentzian manifoldda bir null eğri için distinguish parametre ile verilen Cartan çatısı sunulmuştur ve 3,4,5 boyutlu uzay formlarında null helislerin sınıflandırılması verilmiştir.

Son bölümde ise, null eğrilerin uygulamaları sunulmuştur.

**ANAHTAR KELİMELE:** Frenet Çatı, Frenet Denklemler, Null , Betchov-Da Rios Denklemler.

# ABSTRACT

M.Sc. Thesis

GEOMETRY OF NULL CARTAN CURVES AND APPLICATIONS

Eda YÜCEL

İnönü University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

67+iv pages

2015

Supervisor: Prof.Dr. Rifat GÜNEŞ

This thesis consist of five chapters.

The first chapter, some basic definitions have been presented.

In the second chapter, we have been defined null curves and quasi orthonormal basis along a curve.

The third chapter, we have been defined the Frenet equations and their Frenet frames along a smooth null curve of Lorentzian manifold  $(M, g)$  denoted by  $(M_1^{m+2}, g)$ . We have been given the geometry of null curves in  $M_1^3, M_1^4, M_1^5$  and we have been presented some examples.

The fourth chapter we have been presented Cartan Frenet frame with respect to a distinguished parameter for null curve of Lorentzian manifolds and we have been given classification of null helices in 3,4,5 dimensional Lorentzian space forms.

In the last chapter we have been presented applications of null curves.

**KEY WORDS:** Frenet Frame, Frenet Equations, Null Helice, Betchov-Da Rios Equations

## TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında beni görüş ve önerileriyle yönlendiren aynı zamanda danışmanım olan değerli hocam Prof.Dr.Rıfat GÜNEŞ'e, beni destekleyen ve yardımını esirgemeyen sayın hocalarım Prof. Dr. Sadık KELEŞ, Prof. Dr. Bayram ŞAHİN ve Yrd. Doç. Dr. Cumali YILDIRIM 'a, bana Latex programını öğreten ve vakit ayıran sayın hocam Doç. Dr. M.Kemal ÖZDEMİR'e, çok teşekkür ederim. Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve değerli arkadaşlarım Esra KARATAŞ ve Selin ERTAŞ'a sonsuz teşekkürler.

# İÇİNDEKİLER

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET . . . . .                                                          | i   |
| ABSTRACT . . . . .                                                      | ii  |
| TEŞEKKÜR . . . . .                                                      | iii |
| İÇİNDEKİLER . . . . .                                                   | iv  |
| 1. GİRİŞ . . . . .                                                      | 1   |
| 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR . . . . .                                   | 4   |
| 2.1 Semi Öklidyen Uzaylar . . . . .                                     | 4   |
| 2.2 Semi Öklidyen Uzayların Alt Uzayları . . . . .                      | 8   |
| 3. NULL EĞRİLER . . . . .                                               | 10  |
| 3.1 Screen ve Null Transversal Demetler . . . . .                       | 12  |
| 3.2 Bir Null Eğri Boyunca Quasi Ortonormal Baz . . . . .                | 13  |
| 4. $M_1^{m+2}$ LORENTZ MANİFOLDUNDA NULL EĞRİLER . . . . .              | 19  |
| 4.1 Null Eğriler Boyunca Frenet Çatıları . . . . .                      | 19  |
| 4.2 Frenet Çatılarının İnvaryantları . . . . .                          | 29  |
| 4.3 $M_1^3, M_1^4, M_1^5$ de Null Eğriler . . . . .                     | 35  |
| 5. NULL CARTAN EĞRİLERİN GEOMETRİSİ . . . . .                           | 41  |
| 5.1 Lorentzian Manifolddlarda Null Cartan Eğriler . . . . .             | 41  |
| 5.2 Null Cartan Helisler . . . . .                                      | 47  |
| 5.3 $R_1^4$ Minkowski Uzayda Null Helisler . . . . .                    | 52  |
| 5.4 $R_1^5$ de Null Helisler . . . . .                                  | 55  |
| 5.5 $S_1^4 \subset R_1^5$ De-Sitter Uzayda Null Helisler . . . . .      | 57  |
| 5.6 $H_1^4 \subset R_1^5$ anti De-Sitter Uzayda Null Helisler . . . . . | 58  |
| 6. NULL CARTAN EĞRİLERİN UYGULAMALARI . . . . .                         | 60  |
| 6.1 3-boyutlu Lorentzian Uzay Formlarda Soliton Çözümler . . . . .      | 60  |
| 7. KAYNAKLAR . . . . .                                                  | 66  |
| ÖZGEÇMİŞ . . . . .                                                      | 67  |

# 1. GİRİŞ

Eğrilerin ve yüzeylerin diferansiyel geometrisinin iki yüzü vardır. Klasik diferansiyel geometri olarak adlandırılabilir olan yüzü, diferansiyel ve integral hesabın başlangıcıyla birlikte ortaya çıkmıştır. Kabaca söylemek gerekirse, klasik diferansiyel geometri eğrilerin ve yüzeylerin yerel(lokal) özelliklerini araştırır. Diğer bir yüzü global diferansiyel geometri olarak adlandırılır. Burada yerel özelliklerin, eğrinin veya yüzeyin tümünün davranışı üzerindeki etkileri araştırılır.

Geometrideki problemleri çözenin en etkili yöntemlerinden biri probleme uyarlanmış bir koordinat sistemi bulmaktır. Bir eğrinin  $s$  noktasının komşuluğundaki lokal özelliklerini incelerken bir doğal koordinat sistemi olan  $s$  noktasındaki Frenet çatısı (koordinat sistemi)ni bulmaya çalışırız. Bu Frenet çatısı eğrinin tanımlandığı uzaya(metriğe) göre değişir. Öklid geometride, Riemann geometride ve Semi-Riemann geometride tanımlanan eğrilerin bir nokta komşuluğundaki Frenet çatıları metriğe göre değişiklik gösterir.

Semi-Riemann geometride uzayın indekside, eğrinin Frenet sisteminde değişiklik gösterir. Semi-Riemann geometride indeks 1 ise uzaya Lorentz Uzayı denir.  $M_1^{m+2}$  Lorentz manifoldunda null eğrileri ele alarak bu eğriler boyunca Frenet çatılarını oluşturacağız. Ayrıca bu Frenet çatılarının invaryantları üzerinde duracağız.  $M_1^3, M_1^4$ , ve  $M_1^5$  da null Cartan eğrilerine ait Frenet çatıları ve bu eğrilere ait özellikleri inceledik.

Bu çalışmada  $(M, g)$  Semi-Riemann manifoldunun bir null eğrisi boyunca tanımlanan Frenet sistemlerini çalışacağız. Öncelikle  $M_1^{m+2}$  Lorentz uzayında alınan bir null eğrisinin ortonormal bazını oluşturacağız. Daha sonra 2 indeksli  $M_2^{m+2}$  uzayında bir null eğrisini göz önüne alacağız.

İndeksi 1'den büyük olan Semi-Riemann manifoldlarının null eğrileri için Frenet çatılarının inşasında, eğri üzerine bazı sınırlama şartları getirilebilir. Bu nedenle

Duggal ve Jin 2 indeksli Semi-Riemann manifoldlarının bir null eğrisi için iki çeşit Frenet denklemi inşa ettiler. Type I ve Type II genel Frenet denklemlerini elde ettiler.  $M_2^4$  ve  $M_2^6$  Semi-Riemann geometride null eğrilerini ele alarak bunların geometrisini oluşturarak bunlara ait özellikleri incelediler.

$M$  Semi-Riemann manifoldda bir eğri düşünüldüğünde bu eğrilerin causal karakterlerine bağlı (yani spacelike, timelike, lightlike yada null eğriler) eğri aileleri vardır. Spacelike üzerinde çalışmalar timelike eğri ile benzerlik gösterir. Fakat null eğrilerin üzerinde bulunan metriğin dejenere olması daha komplike çalışmalara yol açmıştır ve bu non dejenere durumlardan farklı olmuştur. Geometride null eğrilerin yay uzunluğunun kaybolması gibi sorunlar ortaya çıkmıştır. Bilinen yollarla tanjant vektörünü normalleştirmek mümkün olmazdı. Bunu gidermek için yay uzunluğu parametresiyle aynı görevi gören distinguish parametre diye adlandırılan yeni bir parametre bulunmuştur. Böylece Lorentzian uzay formlarında eğrilik fonksiyonlarıyla Frenet çatıları oluşturuldu.

Daha sonra Lorentzian uzayda null helisler yani sabit eğriliklere sahip eğriler üzerinde çalışıldı. Düşük boyutlu Lorentzian uzay formlarındaki helisler için bir sınıflandırılma yapıldı.  $R_1^5$  Lorentz-Minkowski uzayda helislerin 3 farklı ailesini,  $S_1^4$  De-Sitter uzayda sadece 1 tip,  $H_1^4$  anti De-sitter uzayda helisleri 9 tip olarak sınıflandırdık.

Genel olarak, null Cartan eğrilerin geometrisini oluşturduk ve bu eğrilerin uygulamaları üzerinde durduk. Bu uygulamalar matematikde olduğu kadar fizikte de önemli bir yer tutar. Lokalize indiksiyon yaklaşımı (LIA) olarak bilinen Betchov-Da Rios denklemleri göz önüne alındı. Yani  $\gamma(s, t)$  eğrisi için  $\frac{\partial}{\partial t} \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial s}$  soliton denklemler üzerinde durduk.  $s \rightarrow \gamma(s, t)$  olduğunda yay uzunluğu parametrelendirilmesiyle vortex filament denklemi olarak adlandırılan  $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \kappa W$  denklemi elde edildi ve  $\{\xi, W, B\}$  çatısı oluşturuldu. Daha sonra yeniden parametrelendirme yapılarak eğrilik ve torsiyon bulundu.

Bu çalışma bir derleme çalışması olacaktır. Bu alanda yapılan çalışmalarını bir araya getirerek bu konuda çalışmak isteyen matematikçiler için bir kaynak oluşturmak hedefimiz olacaktır.

## 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

### 2.1 Semi Öklidyen Uzaylar

**Tanım 2.1.1.**  $V$ ,  $m$ -boyutlu reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \rightarrow R$$

dönüşümü  $\forall x, y, z \in V$  ve  $\forall a, b \in R$  için

$$1. \quad g(x, y) = g(y, x)$$

$$2. \quad g(ax + by, z) = ag(x, z) + bg(y, z)$$

$$g(x, ay + bz) = ag(x, y) + bg(x, z)$$

özelliklerine sahip ise  $g$  dönüşümüne  $V$  reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form denir.[1]

**Tanım 2.1.2.**  $V$  reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form  $g$  olsun. Bu durumda ;

$$i.) \quad g(x_i, x_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$ii.) \quad g(x_i, x_i) = -1 \quad 1 \leq i \leq q$$

$$iii.) \quad g(x_i, x_i) = +1 \quad q + 1 \leq i \leq p + q$$

$$iv.) \quad g(x_i, x_i) = 0 \quad p + q + 1 \leq i \leq p + q + r = m$$

olacak şekilde  $V$  nin bir  $B = \{x_1, \dots, x_m\}$  ortonormal bazı vardır. Burada  $p + q + r = m$  olup  $(p, q, r)$  üçlüsüne de  $g$  formunun tipi denir.[1].

**Tanım 2.1.3.**  $V$ , reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form  $g$  olsun.  $0 \neq \varepsilon \in V$  olmak üzere  $\forall v \in V$  için  $g(\varepsilon, v) = 0$  ise  $g$ 'ye  $V$  üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda  $g$ 'ye non dejeneredir denir. Bu tanıma göre,  $g$ 'nin non dejenerer olması için gerek ve yeter şart  $\forall v \in V$  için

$$g(u, v) = 0 \quad \text{iken} \quad u = 0$$

olmasıdır[2].

**Tanım 2.1.4.**  $V$  reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form  $g$  olsun.  $V$ 'nin

$$\text{Rad}V = \{\varepsilon \in V \mid g(\varepsilon, v) = 0, v \in V\}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına  $g$  ye göre  $V$  uzayının radikal(veya null) uzayı denir.  $\text{Rad}V$ 'nin boyutuna  $g$ 'nin nulllık derecesi denir ve  $\text{null}V$  ile gösterilir. Eğer  $\text{null}V > 0$  ise  $g$  dejeneredir, eğer  $\text{null}V = 0$  ise  $g$  non dejeneredir[2].

**Tanım 2.1.5.**  $V$  reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form  $g$  olsun.

- i.)  $\forall v \in V$  ve  $v \neq 0$  için  $g(v, v) > 0$  ise  $g$ 'ye pozitif tanımlı
- ii.)  $\forall v \in V$  ve  $v \neq 0$  için  $g(v, v) < 0$  ise  $g$ 'ye negatif tanımlı
- iii.)  $g(v, v) > 0$  ve  $g(u, u) < 0$  olacak şekilde  $u, v \in V$  mevcut ise  $g$ 'ye definit denir[2].

**Sonuç 2.1.1.** Her yarı pozitif ya da yarı negatif tanımlı metrik dejeneredir.

**Tanım 2.1.6.**  $V$  reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form  $g$  olsun.

$$g|_W: W \times W \rightarrow R$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu,  $W$  alt uzayının boyutuna  $g$ 'nin indeksi denir[2].

**Önerme 2.1.1.** Her  $g$  simetrik bilinear formuna

$$h: V \rightarrow R$$

$$v \rightarrow h(v) = g(v, v)$$

şeklinde tanımlı bir quadratik form karşılık gelir. Burada  $h$  ile  $g$  arasında  $\forall v, w \in V$  için

$$g(v, w) = \frac{1}{2}\{h(v+w) - h(v) - h(w)\}$$

bağıntısı vardır.  $V$  nin  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  bazına göre  $h$  kuadratik formu,  $\lambda_i \in R$  ve  $(v^i)$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $v$ 'nin koordinat bileşenleri olmak üzere

$$h(v) = g(v, v) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (v^i)^2 \quad (2.1.1)$$

kanonik formuna sahiptir. (3.0.1) de  $p, q, r$  sırasıyla  $\lambda_i \in R$  lerin pozitif, negatif ve sıfır olanlarının sayısıdır. (2.1.1) deki  $h$ 'nin kanonik formu tek değildir,  $V$  nin bazına göre değişir[2].

**Önerme 2.1.2.**  $h, V$  üzerinde  $(p, q, r)$  tipindeki  $g$  nin kuadratik formu olarak tanımlansın.

1.  $g$ ,  $r > 0$  ise dejenere veya  $r = 0$  ise non dejenere.
2.  $g$ ,  $p = m$  ise pozitif tanımlıdır veya  $q = m$  ise negatif tanımlıdır.
3.  $g$ ,  $q = 0, p > 0, r > 0$  ise yarı pozitif tanımlı ya da  $p = 0, q > 0, r > 0$  ise yarı negatif tanımlıdır[1].

**Tanım 2.1.7.**  $V$  nin keyfi bazı  $U = \{u_1, \dots, u_m\}$  olsun.  $V$  üzerinde  $g$ , simetrik bilineer formu

$$g_{ij} = g(u_i, u_j) \quad 1 \leq i, j \leq m$$

olmak üzere  $G = [g_{ij}]_{m \times m}$  simetrik matrisi ile ifade edilebilir. Bu  $G$  matrisine,  $g$  nin  $U$  bazına karşılık gelen matrisi denir[1].

**Tanım 2.1.8.** Bir  $V$  reel vektör uzayı üzerinde non dejenere simetrik bilineer  $g$  formuna,  $V$  reel vektör uzayı üzerinde bir skaler çarpım (yarı öklid metriği) ve  $(V, g)$  ikilisine de skaler çarpım uzayı (yarı öklid uzayı) denir[1].

**Tanım 2.1.9.**  $V$  yarı öklid uzayı üzerinde tanımlı bir  $g$  skaler çarpımı için;

- i.)  $g$  pozitif tanımlı ise  $g$  ye Öklid metriği,  $(V, g)$  Öklid uzayı,
- ii.)  $g$  nin indeksi  $q = 1$  ise  $g$  ye Lorentz (minkowski) metriği,  $(V, g)$  ye Lorentz(minkowski) uzayı,
- iii.)  $g$  dejenere ise  $(V, g)$  ye lightlike(dejenere) vektör uzayıdır[2].

**Tanım 2.1.10.**  $V$  yarı öklid uzayı üzerinde tanımlı bir  $g$  skaler çarpımı için,

- i.)  $g(v, v) > 0$  veya  $v = 0$  ise  $v$  ye spacelike,
- ii.)  $v \neq 0$  için  $g(v, v)$  ise  $v$  ye timelike,
- iii.)  $v \neq 0$  iken  $g(v, v) = 0$  ise  $v$  ye lightlike(null veya isotropik) vektör denir.  $v \in V$  vektörünün bu üç tipine  $v$  nin causal karakteri denir[5].

$V$  yarı öklid uzayı üzerinde bir  $g$  skaler çarpımı için

$$\|v\| = |g(v, v)|^{1/2} \quad (2.1.2)$$

sayısına  $v$  vektörünün uzunluğu (boyu) denir. Uzunluğu bir birim olan (yani  $g(v, v) = \pm 1$ ) vektöre, birim vektör denir.  $u, v \in V$  için  $g(u, v) = 0$  ise bu iki vektöre ortogonaldır denir.  $\vec{0}$  vektörü tüm vektörlere ortogonaldır. Eğer  $g$  indefinit ise herhangi bir null vektör kendisine ortogonaldır.  $V$  deki lineer bağımsız vektörlerin sayısına  $V$  nin boyutu adı verilir. Bu vektörlerin kümesi  $V$  için bir taban oluşturur. Sonlu boyutlu her vektör uzayı için bir taban mevcuttur ve bu taban ortonormal hale getirilebilir[2].

**Örnek 2.1.1.**  $R^m$  standard vektör uzayı ve kanonik bazı

$$E = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_m = (0, 0, \dots, 1)\}$$

olarak alınsın. O zaman  $R^m$  üzerinde  $0 < q < m$  proper semi öklidyen metrik

$$g(x, y) = -\sum_{i=1}^q x^i y^i + \sum_{\alpha=q+1}^m x^\alpha y^\alpha, \forall x, y \in R^m \quad (2.1.3)$$

tanımlanabilir.  $R_1^m$  ile  $m$  boyutlu  $q$  indeksli proper semi öklidyen uzayı tanımlansın.

Özel olarak  $R_1^m$  Lorentz(minkowski) vektör uzayıdır.  $R_1^m$  nin null konisi

$$\Lambda_{q-1}^{m-1} = \{x \in (R_q^m - \{0\}) \mid -\sum_{i=1}^q (x_i)^2 + \sum_{\alpha=q+1}^m (x^\alpha)^2 = 0\}$$

şeklinde  $R_q^m$  nin hiperyüzeyini verir[1].

## 2.2 Semi Öklidyen Uzayların Alt Uzayları

$(W, g)$  reel  $n$  boyutlu lightlikevektör uzayı ve  $RadW$  onun radikali (null uzayı) olsun. O zaman  $W$  nin bir alt uzayı dejenere olmayabilir. Bu iddiayı desteklemek için aşağıdaki önerme verilir.

**Önerme 2.2.1.**  $(W, g)$ ,  $n$  boyutlu lightlike vektör uzayı olsun. Öyleki  $nullW = r < n$  olsun. O zaman  $RadW$  ye komplement her alt uzay non dejenere dir[2].

**Önerme 2.2.2.**  $(V, g)$  bir  $m$  boyutlu semi öklidyen uzay ve  $W, V$  nin bir alt uzayı olsun. Bu takdirde

$$1.) \quad boyW + boyW^\perp = m \quad (2.2.1)$$

$$2.) \quad (W^\perp)^\perp = W \quad (2.2.2)$$

$$3.) \quad RadW = RadW^\perp = W^\perp \cap W \quad (2.2.3)$$

olur.

**Sonuç 2.2.1.**  $V$ , bir semi öklidyen uzay ve  $W, V$  nin bir alt uzayı olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

a.)  $W$  bir non dejenere alt uzaydır

b.)  $W^\perp$  bir non dejenere alt uzaydır.

c.)  $W$  ve  $W^\perp, V$  nin ortogonal komplementleridir.

d.)  $W$  ve  $W^\perp$  nin ortogonal direkt toplamı  $V$  dir ve  $V = W \perp W^\perp$  ifadesinden

bir  $v \in V$  vektörü  $v = w_r + w^\perp$  olmak üzere

$$\begin{aligned} h(v) &= g(v, v) = g(w_r + w^\perp, w_r + w^\perp) \\ &= g(w_r, w_r) + g(w^\perp, w^\perp) \end{aligned}$$

olduğundan

$$indV = indW + indW^\perp$$

elde edilir.

$W$ , non dejenere ise bu durumda da  $nullW = 0$  yani  $RadW = \{ \}$  olup buradan da

$$RadW = RadW^\perp = W^\perp \cap W = \{ \}$$

olacağından  $RadW = \{ \}$  olup  $W^\perp$  de non dejenere uzay ve  $W^\perp \cap W = \{ \}$  olduğundan dolayı  $V = W \oplus W^\perp$  dir[2].

**Önerme 2.2.3.**  $g, q$  indeksli  $m$  boyutlu  $V$  vektör uzayında bir proper semi öklidyen metrik olsun. Bu taktirde  $V$  nin  $\min\{q, m - q\}$  boyutu geçmeyen boyutlu bir  $\overline{W}$  alt uzayı vardır, öyleki  $g|_{\overline{W}} = 0$  dir[2].

### 3. NULL EĞRİLER

$M$  ,  $(m + 2)$  boyutlu proper semi Riemann manifoldu ve  $M$  nin indeksi  $q \geq 1$  olsun. Bu manifoldu  $(M = M_q^{m+2}, g)$  ile gösterelim. Bu manifold üzerinde diferensiyellenebilir immersed bir eğri  $C$  olsun.  $C$  nin lokal koordinat komşuluğu  $U$  ve parametresi  $t$  olmak üzere

$$x_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$$

$$t \rightarrow x_i(t) \quad i \in \{0, \dots, m+1\}$$

eğrisi için

$$dx_t^i = \frac{dx^i}{dt}, \text{rank}(dx_t^0, \dots, dx_t^{m+1}) = 1, \forall t \in I$$

olsun.  $U$  üzerinde verilen

$$\frac{d}{dt} = (dx_t^0, \dots, dx_t^{m+1})$$

tanjant vektör alanı sıfırdan farklıdır. Özel olarak  $\frac{dC}{dt} \neq 0$  ise  $C$  ye regüler eğri denir. Bir non-null  $C$  eğrisi için  $g(\frac{dC}{dt}, \frac{dC}{dt}) = \pm 1$  olduğu yerde  $C$  yay parametresiyle parametrelendirilebilir. Diğer taraftan null vektörler sıfır uzunluğa sahip olduklarından null bir eğri için yay uzunluğu ile parametrelendirme yapmak mümkün değildir.

$$(R_1^{m+2}, g)$$

$$g(x, y) = -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^{m+1} x^i y^i$$

Minkowski metriği ile birlikte Minkowski uzay olsun.  $R_1^{m+2}$  nin tüm null vektörlerinin kümesi

$$(x_0)^2 = \sum_{i=1}^{m+1} (x^i)^2, \quad x^0 \neq 0$$

dir. Bu vektörlerin kümesine null koni denir[1].

**Örnek 3.0.1.**  $R_1^3$  te non-null eğri olarak

$$(x_0)^2 = (x^1)^2 + 1, \quad x^2 = 0 \quad (\text{hiperbol})$$

*bir spacelike eğridir. Çünkü burada*

$$C(t) = (\cosh t, \sinh t, 0) \implies g\left(\frac{dC}{dt}, \frac{dC}{dt}\right) = \pm 1$$

*dir.  $C$  non-null bir eğri olup yay parametresiyle parametrelendirilebilir.*

Kabul edilsin ki  $C$ ,  $M$  üzerinde non-null bir eğri ve  $TC$  de  $C$  nin 2 boyutlu bir tanjant demeti olsun. Bu taktirde  $C$  nin normal demeti

$$TC^\perp = \{X \in \Gamma(TM) \mid g(X, V) = 0\} \quad , \quad V = \frac{d}{dt} \quad (3.0.1)$$

şeklinde tanımlanır. Öyleki

$$TM = TC \perp TC^\perp \quad , \quad TC \cap TC^\perp = \{ \} \quad (3.0.2)$$

olmak üzere  $TC^\perp, TM$  nin non-null  $2(m+1)$  boyutlu bir alt uzay demetidir.

Eğer  $C$  eğrisi boyunca  $\nabla_V Y = 0$  ise  $Y$  vektör alanına  $C$  eğrisi boyunca paraleldir denir.

$$\nabla_V Y = 0 \implies \quad v = \frac{dx^i}{dt} \partial_i \quad \text{ve} \quad Y = Y^j \partial_j$$

den

$$\implies \quad \frac{dY^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k Y^i \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad (3.0.3)$$

elde edilir. Eğer  $V$ ,  $C$  boyunca paralel ise (tanjant vektörü  $C$  boyunca paralel ise)  $C$  ye geodezik eğri denir. Öte yandan  $f$ ,  $C$  boyunca diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere  $\nabla_V V = fV$  ise non-null  $C$  eğrisi için  $C$  nin  $s$ -yay parametresini bulmak mümkündür [3].

$C$  boyunca  $f = 0$  ise  $\nabla_V V = 0$  olacağından  $(x^i)$  lokal koordinat sisteminde geodezik eğri

$$\nabla_V V = 0 \implies \frac{d^2 x_k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (3.0.4)$$

bulunur. Eğer  $\nabla$  konneksiyonu diferensiyellenebilir ise diferensiyel denklem teorisinden,  $M$  nin bir  $x$  noktası ve  $X_x$  tanjant vektörü verildiğinde

$$C(0) = x \quad \text{ve} \quad \left. \frac{dx^i}{ds} \right|_{s=0} = X_x^i$$

olacak şekilde,  $C(s)$  maksimal geodezik eğrisi vardır.

$C$  nin normal demeti (3.0.1) deki gibi

$$TC^\perp = \{X \in \Gamma(TM) \mid g(X, \frac{d}{dt}) = 0\} \quad \text{boy}(TC^\perp)_x = m + 1 \quad (3.0.5)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bununla beraber null eğriler, non-null eğrilerden aşağıda belirtildiği gibi farklı şekilde davranır;  $C$  null bir eğri olduğu zaman

$$(1) \quad TC^\perp, TM \text{ nin null alt uzayıdır.}$$

$$(2) \quad TC \cap TC^\perp = TC \implies TC \oplus TC^\perp \neq TM$$

dir. Burada non-null eğrilerdeki durumun tersine normal demet  $TC^\perp$ ,  $C$  nin tanjant demetini içine alır. Null eğrilerde  $T_x M$  nin bir vektörü,  $C$  nin dik bileşeni ve tanjant bileşeni içine tek bir şekilde ayrıştırılamaz[2].

### 3.1 Screen ve Null Transversal Demetler

Null eğrilerin geometrisini incelemek için non-null eğriler için verilen

$$TM = TC \oplus TC^\perp, \quad TC \cap TC^\perp = \{ \}$$

denkleminde farklı düşünülmesi gerekir.

$TM$  tanjant demetinin ortogonal olmayan, kesişimleri boştan farklı, tanjant demetlerinin komplementleri üç duruma ayrılabilir. Bu düşünce ile  $TC^\perp$  içinde  $TC$  ye komplement  $S(TC^\perp)$  vektör demeti göz önüne alınsın. Bunun anlamı

$$TC^\perp = TC \oplus S(TC^\perp)$$

dir.  $S(TC^\perp)$  e  $M$  de  $C$  nin screen vektör demeti denir ve  $S(TC^\perp)$  non-dejeneredir. Bir screen vektör demetinin olduğu manifold, parakompakt olarak kabul edilir. Böylece  $C$  boyunca,  $TM|_C$  de,  $S(TC^\perp)$  in ortogonal komplementi  $S(TC^\perp)^\perp$  olarak alınır

$$TM|_C = S(TC^\perp) \oplus \text{orth} S(TC^\perp)^\perp \quad (3.1.1)$$

ayrışımına sahip olur.  $S(TC^\perp)^\perp$  in rankı 2 dir ve  $TC$  yi içerir. Açıkca non-null durumun tersine, (3.1.1) denklemi tek olmayan screen vektör demetinin seçimine bağlı olarak tek değildir.

Diğer taraftan null bir eğri için , rankı 1 olan tek bir  $S(TC^\perp)$  null vektör demeti vardır ki bu non-null eğrilerin normal vektör demetine benzer bir rol oynar ve  $TM$  yi arakesitleri boştan farklı olan üç alt demete ayırır. Bunun için aşağıdaki teorem verilebilir[2].

**Teorem 3.1.1.**  $C, (M, g)$  proper semi Riemann manifoldunun bir null eğrisi ve

$$\pi : ntr(C) \rightarrow M$$

olmak üzere  $C$  nin screen vektör demeti  $S(TC^\perp)^\perp$  nin bir alt demeti olsun. Öyleki

$$S(TC^\perp)^\perp = TC \oplus ntr(C)$$

dir ve  $V \in \Gamma^\infty(U, ntr(C))$   $U \subseteq M$  açık kümesi üzerinde tanımlı, lokal olarak hiçbir yerde sıfır olmayacak şekilde tanımlansın. Bu durumda,

$$(i) \quad g\left(\frac{d}{dt}, V\right) \neq 0 \quad , \quad U \subseteq M$$

$$(ii) \quad \text{Eğer } N_V \in \Gamma^\infty(U, S(TC^\perp)^\perp) \text{ olarak verilirse} \quad (3.1.2)$$

$$N_V = \frac{1}{g\left(\frac{d}{dt}, V\right)} \left\{ V - \frac{g(V, V)}{2g\left(\frac{d}{dt}, V\right)} \frac{d}{dt} \right\}$$

dir. Bu durumda  $ntr(C)$  rankı 1 olan,  $C$  üzerinde tek bir vektör demetidir. Öyleki;  $\forall U \subset C$  üzerinde bir tek  $N \in \Gamma(ntr(TC) |_U)$  vektör kısıtlaması vardır ve

$$g(N_V, N_V) = 0 \quad \text{ve} \quad g\left(\frac{d}{dt}, N_V\right) = 1 \quad (3.1.3)$$

tür.

$$(iii) \quad TM \text{ tanjant demeti aşağıdaki gibi üç demet uzayına ayrılabilir}[4].$$

$$TM |_C = TC \oplus ntr(C) \oplus orthS(TC^\perp) = TC \oplus tr(TC) \quad (3.1.4)$$

### 3.2 Bir Null Eğri Boyunca Quasi Ortonormal Baz

Bu bölümde bir proper semi Riemann manifoldunun doğal bazından faydalananarak, onun bir  $C$  null eğrisi boyunca null vektörleri ihtiva eden bir başka bazını bulmaya çalışacağız.

$\forall x \in M$  de  $g$ ,  $q$  indeksli  $p + q = m + 2$  ve  $p \cdot q \neq 0$  olan  $(0, p, q)$  tipindeki  $T_x M$  semi öklidyen uzayında bir quadratik form olsun.

$\{e_1, \dots, e_{m+2}\}$ ,  $T_x M$  nin  $dia(-, \dots, -, +, \dots, +)$  toplamı üzerinde kurulan bir ortonormal bazı olsun. Öyleki  $\{e_1, \dots, e_q\}$  ve  $\{e_{q+1}, \dots, e_{p+q}\}$  sırasıyla birim timelike ve birim spacelike vektörler olsunlar. Null vektörlerin inşası için aşağıdaki durumlar göz önünde bulundurulur.

**Not 3.2.1.** : *Doğal tabandaki birim timelike vektör sayısı, birim spacelike vektör sayısından küçük olsun. Yani  $q < p$  olsun. Bu durumda null vektörlerin inşası için*

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0 \text{ ve } g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, \dots, q\} \quad (3.2.1)$$

olacak şekilde

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\} \quad f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\} \quad , \quad i \in \{1, \dots, q\}$$

alınsın. Böylece

$$\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*, e_{2q+1}, \dots, e_{p+q}\}$$

$p - q$  tane spacelike ve  $2q$  tane nul vektörlerden oluşan  $T_x M$  nin bir tabanı bulunur.  $f_i$  ve  $f_i^*$  lar birer null vektörlerdir.

**Not 3.2.2.** : *Doğal tabandaki birim timelike vektör sayısı, birim spacelike vektör sayısından büyük olsun. Yani  $q > p$  olsun. Bu durumda null vektörlerin inşası*

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\} \quad f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\} \quad , \quad i \in \{1, \dots, p\}$$

dir. Böylece  $2p$  tane null vektör ve  $q - p$  tane timelike vektörden oluşan

$$\{f_1, \dots, f_p, f_1^*, \dots, f_p^*, e_{p+1}, \dots, e_q\}$$

tabanı elde edilir.

**Not 3.2.3.** : *Doğal tabandaki timelike vektör sayısı ile spacelike vektör sayısı birbirine olsun. Yani  $p = q$  ise bu durumda null vektörlerin inşası*

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\} \quad f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\} \quad , \quad i \in \{1, \dots, q\}$$

olup  $2p$  ya da  $2q$  tane null vektörden oluşan

$$\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*\}$$

tabanı elde edilir. Yukarıdaki üç çeşit inşa gösterir ki genel olarak  $\forall x \in M$  de  $T_x M$  proper semi öklidyen uzayının

$$B = \{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\}$$

şeklinde bir bazı vardır.  $f_i, f_i^*$  lar null vektör olduklarından

$$g(u_\alpha, u_\beta) = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad i, j \in \{1, \dots, r\} \text{ ve } \alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}$$

dir. Yukarıda açıklanan  $B$  bazına  $T_x M$  nin quasi ortonormal bazı denir. Özel olarak  $C$ ,  $M_1^{m+2}$  Lorentzian uzayının bir null eğrisi olsun. O zaman  $C$  boyunca  $T_x M$  nin bir quasi ortonormal bazı

$$B = \{f, f^*, u_1, \dots, u_m\}$$

dir, öyleki  $T_x C = Sp\{f\}$  dir.

$$TM|_C = TC \oplus ntr(C) \oplus orthS(TC^\perp) = TC \oplus tr(TC)$$

ayrışımıyla

$$T_x(ntr(C)) = Sp\{f^*\} \text{ ve } T_x(S(TC^\perp)) = Sp\{u_1, \dots, u_m\}$$

elde edilir[2].

**Önerme 3.2.1.**  $W$ ,  $m+2$  boyutlu proper semi öklidyen uzayı  $V$  nin  $n$ -boyutlu dejenere alt uzayı olsun.  $W$  boyunca  $V$  nin quasi ortonormal bazı vardır[2].

**İspat.** İlk olarak  $null W = r < \min\{n, m+2-n\}$  olduğu farz edilsin. O zaman

$$W = RadW \perp RadW^\perp$$

$$W^\perp = RadW \perp RadW^{\perp\perp}$$

dür. Burada  $W^I$  ve  $W^{II}$  screen alt uzaylardır. Bu takdirde  $V$  nin ayrışımı

$$V = W^I \perp (W^I)^\perp \quad (3.2.2)$$

şeklinde olur.  $(W^I)^\perp$  in non-dejenere alt uzayı  $W^{II}$  olarak alınırsa  $(W^{II})^\perp, (W^I)^\perp$  içinde  $W^{II}$  alt uzayına komplement olduğu yerde

$$(W^I)^\perp = W^{II} \perp (W^{II})^\perp \quad (3.2.3)$$

olur. Burada  $RadW$  nin  $(W^{II})^\perp$  in alt uzay olduğu kolayca görülür.  $(W^{II})^\perp$  içinde  $RadW$  yi tamamlayan bir alt uzay  $U$  olsun.  $(W^{II})^\perp$  de  $RadW$  ve  $U$  nun  $\{f_1, \dots, f_r\}$  ve  $\{v_1, \dots, v_r\}$  bazları olarak düşünülebilir. Burada  $(W^{II})^\perp$  in boyutu  $2r$  olur. Şimdi (3.2.1) in ilk uzanımıyla ilişkili çalışılarak ve

$$f_i^* = A_i^j f_j + B_i^j u_j \quad (3.2.4)$$

ile  $\{f_1^*, \dots, f_r^*\}$  bulmaya çalışılır. Direkt olarak hesaplanır ki

$$g(f_i, f_k^*) = \delta_{ik} \iff B_k^i g(f_i, v_j) = \delta_{ik} \quad (3.2.5)$$

dir.  $\det[g(f_i, v_j)] \neq 0$  ise (aksi halde  $(W^{II})^\perp$  dejenere olur. ), (3.2.5) sistemi  $B_k^j$  nin tek çözümüdür. (3.2.4) ve (3.2.5) i kullanılarak

$$V = W^I \perp (W^I)^\perp$$

den  $A_i^j$  nin varlığının kanıtlanmasıyla

$$A_i^j + A_j^i + B_i^h B_h^k g(v_h, v_k) = 0 \iff g(f_i^*, f_j^*) = 0$$

dir. Sonuçta  $V = W^I \perp (W^I)^\perp$  ve  $(W^I)^\perp = W^{II} \perp (W^{II})^\perp$  den üstteki yapının göz önüne alınmasıyla aşağıdaki ayrışım yazılabilir.

$$V = W^I \perp W^{II} \perp (RadW \oplus \{f_1^*, \dots, f_r^*\})$$

dir. Bundan dolayı  $W^I$  ve  $W^{II}$  nün bazları sırasıyla  $\{u_1, \dots, u_{n-r}\}$  ve  $\{w_1, \dots, w_{m+2-n-r}\}$  olduğu yerde

$$\{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_{n-r}, w_1, \dots, w_{m+2-n-r}\}$$

$W$  boyunca  $V$  nin quasi ortonormal bazıdır. Bu durumda

$$W = Sp\{f_1, \dots, f_r, u_1, \dots, u_{n-r}\}$$

dir. □

**Not 3.2.4.** \*  $n = r < m + 2 - n$  durumunda  $RadW = W \subset W^\perp$  olup  $W^\perp$  ,  
 $W^\perp$  in keyfi bir alt uzayı olduğu yerde

$$W^\perp = W \perp W^\perp$$

olur.  $V$  için  $(W^\perp)^\perp$  ,  $V$  nin  $W^\perp$  alt uzayının ortogonal komplemanı olduğu yerde

$$V = W^\perp \perp (W^\perp)^\perp$$

ayrışımı göz önünde bulundursun. Bununla beraber  $(W^\perp)^\perp, W$  yi içerir ve boyutu  $2n$  dir. İlk duruma benzer bir şekilde  $V$  nin  $W$  boyunca quasi ortonormal bazını

$$W = Sp\{f_1, \dots, f_n\}$$

ve  $W^\perp$  nin ortonormal bazı  $\{w_1, \dots, w_{m+2-2n}\}$  olduğu yerde

$$\{f_1, \dots, f_n, f_1^*, \dots, f_n^*, w_1, \dots, w_{m+2-2n}\}$$

olarak bulunur. \*  $r = m + 2 - n < n$  olması durumunda  $RadW = W^\perp \subset W$   
 iken  $W^\perp, W$  nin screen alt uzayı olduğu yerde

$$V = W^\perp \perp W^\perp$$

elde edilir. Böylece ,  $V$  de  $(W^\perp)^\perp, W^\perp$  nün ortogonal komplemant alt uzayı olduğu  
 yerde

$$V = W^\perp \perp (W^\perp)^\perp$$

olarak ayrışır. Bu gösterir ki  $(W^\perp)^\perp, 2(m + 2 - n)$  boyutludur ve  $W^\perp$  i içine alır.  
 Buradan

$$\{u_1, \dots, u_{2n-m-2}\}$$

$W^\perp$  nün bir ortonormal bazı olduğu yerde  $W$  boyunca  $V$  nin quasi ortonormal bazı

$$\{f_1, \dots, f_{m+2-n}, f_1^*, \dots, f_{m+2-n}^*, u_1, \dots, u_{2n-m-2}\}$$

olarak elde edilir. Bu durum da

$$W = Sp\{f_1, \dots, f_{m+2-n}, u_1, \dots, u_{2n-m-2}\}$$

dir. Son olarak  $r = n = \frac{m+2}{2}$  ise  $RadW = W = W^\perp$  olarak alınır ve ayrışımı

$$V = W \oplus Sp\{f_1^*, \dots, f_n^*\}$$

olur. O zaman  $\{f_1, \dots, f_n\}$ ,  $W$  nin bir bazı olduğu yerde

$$\{f_1, \dots, f_n, f_1^*, \dots, f_n^*\}$$

$W$  boyunca  $V$  nin quasi ortonormal bazı olur.

## 4. $M_1^{m+2}$ LORENTZ MANİFOLDUNDA NULL EĞRİLER

### 4.1 Null Eğriler Boyunca Frenet Çatıları

$(M_1^{m+2}, g)$  reel  $m + 2$  boyutlu Lorentz manifold ve  $C$ ,  $M_1^{m+2}$  de üzerindeki  $U$  koordinat komşuluğu için

$$x^i = x^i(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad i \in \{0, 1, \dots, m+1\}$$

ile verilen bir diferensiyellenebilir null eğri olsun.  $M_1^{m+2}$  Lorentz manifold için  $S(TC)^\perp$  screen vektör demetinin bir Riemannian vektör demeti olduğu açıktır ve  $\text{rank} S(TC)^\perp = m$  dir.  $\nabla$ ,  $M_1^{m+2}$  üzerinde Levi civita metrik konneksiyon olsun. O zaman  $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  için

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \quad (4.1.1)$$

dir. Buradan

$$TM|_C = TC \oplus ntr(C) \oplus orthS(TC^\perp) = TC \oplus tr(TC)$$

boyunca

$$g(N_V, N_V) = 0 \quad , \quad g\left(\frac{d}{dt}, N_V\right) = 1 \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dt} = \xi$$

da kullanılır.

$$g(\xi, \xi) = 0 \quad \text{ve} \quad g(\xi, N) = 1$$

den  $h$  ,  $U$  da diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$g(\xi, N) = 1 \implies \xi g(\xi, N) = 0$$

$$\implies g(\nabla_\xi \xi, N) + g(\xi, \nabla_\xi N) = 0$$

$$\implies g(\nabla_\xi \xi, N) = -g(\xi, \nabla_\xi N) = h$$

olur. Tüm bunlardan  $S(TC)^\perp$  Riemannian vektör demetinde

$$k_1 = \|\nabla_\xi \xi\|$$

eğrilik fonksiyonu ve  $W_1, C$  boyunca birim spacelike vektör olmak üzere

$$\nabla_\xi \xi = h\xi + k_1 W_1$$

dir. Gerçekten

$$\nabla_\xi \xi = \xi' = a\xi + bN + cW_1 + \dots + kW_m$$

denirse  $a, b, c \in R$  olup bu denklem sırasıyla  $\xi, N, W_1, \dots, W_m$  ile çarpılırsa

$$g(\xi', \xi) = ag(\xi, \xi) + bg(N, \xi) + cg(W_1, \xi) + \dots + kg(W_m, \xi)$$

$$b = 0$$

$$g(\xi', N) = ag(\xi, N) + bg(N, N) + cg(W_1, N) + \dots + kg(W_m, N)$$

$$h = a$$

$$g(\xi', W_1) = ag(\xi, W_1) + bg(N, W_1) + cg(W_1, W_1) + \dots + kg(W_m, W_1)$$

$$k_1 = c$$

olup,  $W_2, \dots, W_m$  lerin katsayıları aynı yolla sıfır bulunup

$$\xi' = h\xi + k_1 W_1$$

elde edilir.

$$g(\nabla_\xi N, \xi) = -h \quad , \quad g(N, W_1) = 0$$

olduğunu biliyoruz.  $k_2$  eğrimizin ikinci eğrilik fonksiyonu olmak üzere

$$g(N, N) = 0 \implies \xi g(N, N) = 0$$

$$\implies g(\nabla_\xi N, N) + g(N, \nabla_\xi N) = 0$$

$$\implies g(\nabla_\xi N, N) = 0$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
g(N, W_1) = 0 &\implies \xi g(N, W_1) = 0 \\
&\implies g(\nabla_\xi N, W_1) + g(N, \nabla_\xi W_1) = 0 \\
&\implies g(\nabla_\xi N, W_1) = -g(N, \nabla_\xi W_1) = k_2 \\
&\implies g(\nabla_\xi N, W_1) = k_2
\end{aligned}$$

ye sahip olunur.

$$\nabla_\xi N = N^! = a_1 \xi + b_1 N + c_1 W_1 + \dots + k_1 W_m$$

eşitliğin her iki tarafını sırasıyla  $\xi, N, W_1, \dots, W_m$  ile çarparsak

$$\begin{aligned}
g(N^!, \xi) &= a_1 g(\xi, \xi) + b_1 g(N, \xi) + c_1 g(W_1, \xi) + \dots + k_1 g(W_m, \xi) \\
g(N^!, \xi) &= -h = b_1 \\
g(N^!, N) &= a_1 g(\xi, N) + b_1 g(N, N) + c_1 g(W_1, N) + \dots + k_1 g(W_m, N) \\
g(N^!, N) &= 0 = a_1 \\
g(N^!, W_1) &= a_1 g(\xi, W_1) + b_1 g(N, W_1) + c_1 g(W_1, W_1) + \dots + k_1 g(W_m, W_1) \\
g(N^!, W_1) &= k_2 = c_1
\end{aligned}$$

dir.  $T_1; \xi, N, W_1, \dots, W_m$  e dik spacelike bir vektör olmak üzere

$$N^! = -hN + k_2 W_1 + T_1$$

sağlanır.

$$k_3 = \|T_1\|$$

olacak şekilde üçüncü bir eğrilik fonksiyonu tanımlanırsa , buradan

$$W_2 = \frac{T_1}{\|T_1\|} = \frac{T_1}{k_3}$$

birim spacelike bir vektör olup

$$T_1 = k_3 W_2$$

gelir ve

$$N^\perp = -hN + k_2W_1 + k_3W_2$$

olup

$$k_3 = g(N^\perp, W_2) = -g(N, \nabla_\xi W_2)$$

olur. Bu şekilde  $\Gamma(S(TC^\perp))$  in  $\{W_1, \dots, W_m\}$  ortonormal bazının tüm birim vektörleri için yukarıdaki yöntem tekrarlanırsa aşağıdaki durumları elde ederiz:

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \xi &= h\xi + k_1W_1 \\ \nabla_\xi N &= -hN + k_2W_1 + k_3W_2 \\ \nabla_\xi W_1 &= -k_2\xi - k_1N + k_4W_2 + k_5W_3 \\ \nabla_\xi W_2 &= -k_3\xi - k_4W_1 + k_6W_3 + k_7W_4 \\ \nabla_\xi W_3 &= -k_5W_1 - k_6W_2 + k_8W_4 + k_9W_5 \\ &\dots \\ \nabla_\xi W_{m-2} &= -k_{2m-5}W_{m-4} - k_{2m-4}W_{m-3} + k_{2m-2}W_{m-1} + k_{2m-1}W_m \\ \nabla_\xi W_{m-1} &= -k_{2m-3}W_{m-3} - k_{2m-2}W_{m-2} + k_{2m}W_m \\ \nabla_\xi W_m &= -k_{2m-1}W_{m-2} - k_{2m}W_{m-1} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

$h$  ve  $\{k_1, \dots, k_{2m}\}, m \geq 5, U$  üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.  $m > 0$  için

$$F = \left\{ \frac{d}{dt} = \xi, N, W_1, \dots, W_m \right\}$$

ye  $C$  boyunca  $M$  de Frenet çatısı denir. (4.1.2) denklemlerine  $C$  eğrisinin genel Frenet denklemleri denir.

**Örnek 4.1.1.**  $R_1^3$  te

$$C(t) = \left( \frac{t^3}{3} + t, t^2, \frac{t^3}{3} - t \right) \quad t \in R$$

ile verilen  $C$  null eğrisi için eğrilik fonksiyonlarını ve Frenet çatısını bulalım;

$$\xi = C'(t) = (t^2 + 1, 2t, t^2 - 1)$$

olup  $V = (0, \frac{1}{2t}, 0)$  seçilirse

$$g(\xi, V) = 1 \quad \text{ve} \quad g(V, V) = 1$$

olur. Böylece

$$N = \frac{1}{g(\frac{d}{dt}, V)} \left\{ V - \frac{g(V, V)}{2g(\frac{d}{dt}, V)} \frac{d}{dt} \right\}$$

den

$$N = \frac{-1}{8t^2} (t^2 + 1, -2t, t^2 - 1)$$

elde edilir.

$$g(\nabla_\xi \xi, N) = h$$

$$h = \frac{1}{t} \quad \text{ve} \quad k_1 = \|\nabla_\xi \xi\| = 2$$

bulunur. O zaman

$$\nabla_\xi \xi = \frac{1}{t} \xi + 2W_1$$

dir ve buradan

$$W_1 = \frac{1}{2t} (t^2 - 1, 0, t^2 + 1)$$

elde edilir. Daha sonra

$$\nabla_\xi N = \frac{-1}{t} N - \frac{1}{4t^2} W_1$$

ve

$$\nabla_\xi W_1 = \frac{1}{4t^2} \xi - 2N$$

bulunur.

Riemannian durumunun tersine , yukarıda verilen Frenet çatısı ve Frenet denklemleri tek değildir; screen vektör demetine ve  $C$  üzerindeki parametreye bağlıdır.

(4.1.2) denklemlerinden farklı olarak bir özel durumla null eğriler için Cartan denklemlerini içeren bir diğer Frenet çatısı elde edilebilir. İlk olarak aşağıdaki sonuca ihtiyaç duyulur.

**Sonuç 4.1.1.**  $(t, S(TC^\perp), U)$  ve  $(\bar{t}, \bar{S}(TC^\perp), \bar{U})$  ya göre iki farklı Frenet çatısı sırasıyla

$$F = \left\{ \frac{d}{dt}, N, W_1, \dots, W_m \right\} \text{ ve } \bar{F} = \left\{ \frac{d}{d\bar{t}}, \bar{N}, \bar{W}_1, \dots, \bar{W}_m \right\}$$

olsun.  $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$  üzerinde  $F$  ve  $\bar{F}$  nin elemanlarının birbiri cinsinden değeri;  $c_\alpha$  ve  $B_\alpha^\beta$ ,  $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$  üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve  $[B_\alpha^\beta]_{m \times m}$  matrisi  $\forall x \in U \cap \bar{U}$  için  $O(m)$  ortogonal grubun bir elemanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{t}} &= \frac{dt}{d\bar{t}} \frac{d}{dt} \\ \bar{N} &= -\frac{1}{2} \frac{dt}{d\bar{t}} \sum_{\alpha=1}^m (c_\alpha)^2 \frac{d}{dt} + \frac{d\bar{t}}{dt} N + \sum_{\alpha=1}^m c_\alpha W_\alpha \\ \bar{W}_\alpha &= \sum_{\beta=1}^m B_\alpha^\beta (W_\beta - \frac{dt}{d\bar{t}} c_\beta \frac{d}{dt}) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

ile verilir. Bu (4.1.3) denklemlerine  $C$  nin screen vektör demetinin dönüşüm denklemleri denir[5].

**Teorem 4.1.1.**  $(M_1^{m+2}, g)$  Lorentz manifoldunun bir null eğrisi  $C$  ve  $C$  nin  $S(TC)^\perp$  screen vektör demetine göre Frenet çatısı  $F$  ve burada  $k_1 \neq 0$  olsun. Bu durumda  $U \cap \bar{U}$  üzerinde

$$\bar{k}_4 = \bar{k}_5 = 0$$

olacak şekilde  $\bar{U}$  üzerinde bir başka Frenet çatısının olduğu  $\bar{S}(TC)^\perp$  screen vektör demeti vardır[5].

**İspat.**

$$\nabla_{\bar{\xi}} \bar{\xi} = \bar{h}\xi + \bar{k}_1 \bar{W}_1$$

denkleminde (4.1.3) denklemleri kullanılırsa ve karşılıklı Frenet vektörlerinin önlerindeki katsayılar eşitlenirse,  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  terimlerinin önündeki katsayıların eşitliğinden

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2 k_1 &= \bar{k}_1 B_1^1 \\ \bar{k}_1 B_1^\alpha W_\alpha &= 0 \implies \bar{k}_1 B_1^\alpha = 0, \quad \alpha \in \{2, \dots, m\} \end{aligned}$$

elde edilir.  $U \cap \bar{U}$  üzerinde  $\bar{k}_1 \neq 0$  olduğu için ,

$$B_1^2 = \dots = B_1^m = 0$$

elde edilir. Ayrıca  $[B_\alpha^\beta(x)]$  ortogonal olduğundan

$$B_1^1 = B_1 = \pm 1 \quad \text{ve} \quad B_2^1 = \dots = B_m^1 = 0$$

dir. Bununla beraber (4.1.2) nin üçüncü denklemden

$$\begin{aligned} \bar{k}_4 B_2^2 + \bar{k}_5 B_3^2 &= B_1^1 (k_4 + k_1 c_2 \frac{dt}{d\bar{t}}) \frac{dt}{d\bar{t}} \\ \bar{k}_4 B_2^3 + \bar{k}_5 B_3^3 &= B_1^1 (k_5 + k_1 c_3 \frac{dt}{d\bar{t}}) \frac{dt}{d\bar{t}} \\ \bar{k}_4 B_2^\alpha + \bar{k}_5 B_3^\alpha &= B_1^1 k_1 c_\alpha (\frac{dt}{d\bar{t}})^2, \quad \alpha \in \{4, \dots, m\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemlerde

$$c_2 = -\frac{k_4}{k_1} \frac{d\bar{t}}{dt}, \quad c_3 = -\frac{k_5}{k_1} \frac{d\bar{t}}{dt}$$

alınırsa

$$\bar{k}_4 = \bar{k}_5 = 0$$

elde edilir. □

**Uyarı 4.1.1.** Yukarıdaki teoremden  $t = \bar{t}$  alınırsa

$$c_2 = -\frac{k_4}{k_1} \quad \text{ve} \quad c_3 = -\frac{k_5}{k_1}$$

olur ve

$$k_1 c_\alpha = 0$$

dan  $k_1 \neq 0$  olduğu için  $c_\alpha = 0, \alpha \in \{4, \dots, m\}$  elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \xi \\ \bar{N} &= \frac{-1}{2} \left( \frac{k_4^2 + k_5^2}{k_1^2} \right) \xi + N - \frac{k_4}{k_1} W_1 - \frac{k_5}{k_1} W_3 \\ \bar{W}_2 &= W_2 + \frac{k_4}{k_1} \frac{d}{dt} \\ \bar{W}_3 &= W_3 + \frac{k_5}{k_1} \frac{d}{dt} \\ \bar{W}_i &= W_i \quad i \in \{1, 4, \dots, m\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi  $\overline{N} = N$  ,  $\overline{W_1} = W_1$  ,  $\overline{W_2} = W_2$  ,  $\overline{k_i} = k_i$   $i \in \{1, 2, 3\}$  ve  $\overline{S(TC)}^\perp = S(TC)^\perp$  olarak kabul edilirse ve (4.1.2) de ilk dört denklem aşağıdaki gibi alınır

$$\nabla_\xi \xi = h\xi + k_1 W_1$$

$$\nabla_\xi N = -hN + k_2 W_1 + k_3 W_2$$

$$\nabla_\xi W_1 = -k_2 \xi - k_1 N$$

$$\nabla_\xi W_2 = -k_3 \xi + R_3$$

olur.  $R_3$ ,  $\xi, N, W_1, W_2$  ye dik  $\Gamma(S(TC)^\perp)$  de bir vektör alanıdır. Yeni dördüncü eğrilik  $k_4 = \|R_3\|$  olarak tanımlansın ve

$$W_3 = \frac{R_3}{\|R_3\|}$$

denirse, bu durumda  $W_3$  aynı zamanda  $C$  üzerinde birim spacelike vektör alanıdır. Bu durumda

$$\nabla_\xi W_2 = -k_3 \xi + k_4 W_3$$

elde ederiz.  $\Gamma(S(TC)^\perp)$  in  $\{W_1, \dots, W_m\}$  ortonormal bazının  $m$  tane birim vektörü için yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa ve basitleştirilirse aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 4.1.2.**  $C, (M_1^{m+2}, g)$  Lorentz manifoldunun bir null eğrisi olsun. Bu takdirde

$$F = \left\{ \frac{d}{dt}, N, W_1, \dots, W_m \right\}$$

$\Gamma(S(TC^\perp|_U))$  nın bir ortonormal bazı olduğu yerde

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \xi &= h\xi + k_1 W_1 \\
\nabla_\xi N &= -hN + k_2 W_1 + k_3 W_2 \\
\nabla_\xi W_1 &= -k_2 \xi - k_1 N \\
\nabla_\xi W_2 &= -k_3 \xi + k_4 W_3 \\
\nabla_\xi W_3 &= -k_4 W_2 + k_5 W_4 \\
&\dots \\
\nabla_\xi W_i &= -k_{i+1} W_{i-1} + k_{i+2} W_{i+1} \quad i \in \{3, \dots, m+1\} \\
\nabla_\xi W_m &= -k_{m+1} W_{m-1}
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

olur. (4.1.2) denklemlerinin karşılıkları ve  $S(TC^\perp)$  screen vektör demetinin verilmesine göre  $C$  boyunca  $M_1^{m+2}$  boyunca teorem 3.1.2 deki  $F = \{\frac{d}{dt}, N, W_1, \dots, W_m\}$  çatısını doğal Frenet çatısı diye adlandırırız.  $\{k_1, \dots, k_{m+1}\}$  eğrilik fonksiyonlarıyla (4.1.4) e doğal Frenet denklemleri denir[5].

**Örnek 4.1.2.**  $R_1^5$  de bir  $C(t) = (\sqrt{2} \sinh t, \sqrt{2} \cosh t, \cos t, \sin t, t)$  null eğrisi alınsın. Aşağıdaki gibi bir doğal Frenet çatısı seçilsin.

$$\begin{aligned}
\xi &= (\sqrt{2} \cosh t, \sqrt{2} \sinh t, -\sin t, \cos t, 1) \\
N &= -\frac{1}{18}(15\sqrt{2} \cosh t, 15\sqrt{2} \sinh t, -7 \sin t, 7 \cos t, -1) \\
W_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} \sinh t, \sqrt{2} \cosh t, -\cos t, -\sin t, 0) \\
W_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sinh t, \cosh t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, 0) \\
W_3 &= \frac{1}{3}(\cosh t, \sinh t, \sin t, -\cos t, 2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

O zaman (4.1.4) doğal Frenet denklemleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \xi &= (\sqrt{2} \sinh t, \sqrt{2} \cosh t, -\cos t, -\sin t, 0) = \sqrt{3} W_1 \quad \text{olup,} \\
\nabla_\xi \xi &= h\xi + k_1 W_1 = \sqrt{3} W_1 \quad \text{den} \\
h &= 0 \quad \text{ve} \quad k_1 = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\nabla_{\xi}N = -hN + k_2W_1 + k_3W_2$$

ifadesinden

$$\nabla_{\xi}N = k_2W_1 + k_3W_2$$

olup

$$k_2 = g(\nabla_{\xi}N, W_1) \quad \text{ve} \quad k_3 = g(\nabla_{\xi}N, W_2)$$

den

$$k_2 = -\frac{37}{18\sqrt{3}} \quad \text{ve} \quad k_3 = -\frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$$

gelir. Buradan

$$\nabla_{\xi}N = -\frac{37}{18\sqrt{3}}W_1 - \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}W_2$$

elde edilir.

$$\nabla_{\xi}W_1 = -k_2\xi - k_1N$$

denkleminden  $k_1$  ve  $k_2$  değerleri yerlerine yazılırsa

$$\nabla_{\xi}W_1 = -\frac{37}{18\sqrt{3}}\xi - \sqrt{3}N$$

ifadesi bulunur.

$$k_4 = g(\nabla_{\xi}W_2, W_3) = -\frac{(1 + \sqrt{2})}{3\sqrt{3}}$$

olup

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi}W_2 &= -k_3\xi + k_4W_3 \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\xi - \frac{(1 + \sqrt{2})}{3\sqrt{3}}W_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak da

$$\nabla_{\xi}W_3 = -k_4W_2 + k_5W_4 = \frac{(1 + \sqrt{2})}{3\sqrt{3}}W_2$$

elde edilir.

## 4.2 Frenet Çatılarının İnvaryantları

Bu bölümde Frenet çatılarının ilişkileri ,  $C$  nin screen vektör demeti ve koordinat komşuluğu dönüşümlerinin ikisi ile (4.1.2) ve (4.1.4) Frenet denklemlerinin neyi ima ettiği üzerinde durulacaktır.

İlk olarak ,  $S(TC^\perp)$  screen vektör demeti oluşturulur ve  $U \cap U^* \neq \emptyset$  iken sırasıyla  $U$  ve  $U^*$  boyunca  $F$  ve  $F^*$  Frenet çatıları göz önünde bulundurulursa ;  $\beta \in \{1, \dots, m\}$  ve  $A_\alpha^\beta, U \cap U^*$  da diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve  $\forall x \in U \cap U^*$  için  $[A_\alpha^\beta]_{m \times m}$  ,  $O(m)$  ortogonal grubun bir elemanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^*} &= \frac{dt}{dt^*} \frac{d}{dt} \\ N^* &= \frac{dt^*}{dt} N \\ W_\alpha^* &= \sum_{\beta=1}^m A_\alpha^\beta W_\beta \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

dir.(4.2.1) e  $C$  nin koordinat komşuluklarının dönüşüm denklemleri denir[5].

Yukarıdaki verilenleri kullanarak  $F$  ve  $F^*$  çatıları için (4.1.2) ile (4.1.4) Frenet denklemlerinin ilk denklemlerinden

$$\frac{d^2 t}{dt^*} + h \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2 = h^* \frac{dt}{dt^*} \quad (4.2.2)$$

$$k_1^* A_1^1 = k_1 \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2 \quad (4.2.3)$$

$$k_1^* A_1^2 = \dots = k_1^* A_1^m = 0 \quad (4.2.4)$$

elde edilir. Gerçekten

$$\nabla_\xi \xi = h\xi + k_1 W_1 \quad \text{ve} \quad \nabla_{\xi^*} \xi^* = h^* \xi^* + k_1^* W_1^*$$

dan

$$g(\nabla_\xi \xi, \nabla_{\xi^*} \xi^*) = g(h\xi + k_1 W_1, h^* \xi^* + k_1^* W_1^*)$$

$$\left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2 k_1^2 = k_1 k_1^* A_1^\beta g(W_1, W_\beta)$$

$$k_1^* A_1^1 = k_1 \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2$$

olup

$$\xi^* = \frac{dt}{dt^*} \frac{d}{dt}$$

den

$$\begin{aligned}\nabla_{\xi^*} \xi^* &= \frac{d^2 t}{dt^{*2}} \frac{d}{dt} + \frac{dt}{dt^*} \nabla_{\frac{d}{dt^*}} \frac{d}{dt} \\ h^* \xi^* + k_1^* W_1^* &= \frac{d^2 t}{dt^{*2}} \xi + \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2 \nabla_{\xi} \xi\end{aligned}$$

denklemlerinde karşılıklı eşleme yapılırsa

$$\begin{aligned}h^* \frac{dt}{dt^*} &= \frac{d^2 t}{dt^{*2}} + \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2 h \\ k_1^* A_1^2 &= k_1^* A_1^3 = \dots = k_1^* A_1^m = 0\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.1.4) doğal Frenet denklemlerinin kullanılmasıyla aşağıdaki önerme verilebilir:

**Önerme 4.2.1.**  $M_1^{m+2}$  Lorentz manifoldunun bir null eğrisi  $C$  olsun. Bir  $S(TC^\perp)$  screen vektör demeti alınsın.  $F$  ve  $F^*$  sırasıyla  $\{k_1, \dots, k_{m+1}\}$  ve  $\{k_1^*, \dots, k_{m+1}^*\}$  eğrilik fonksiyonlarıyla  $U$  ve  $U^*$  üzerinde iki doğal Frenet çatısı olsun.  $U \cap U^* \neq \emptyset$  ve burada  $\prod_{i=1}^{m+1} k_i \neq 0$  kabul edilsin.  $U \cap U^*$  in her noktasında ve  $A_i = \pm 1$  seçilirse

$$\begin{aligned}k_1^* &= k_1 A_1 \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2 \\ k_2^* &= k_2 A_1 \\ k_3^* &= k_3 A_2 \\ k_\alpha^* &= k_\alpha A_{\alpha-1} \frac{dt}{dt^*}, \quad \alpha \in \{4, \dots, m+1\}\end{aligned}$$

dir. Böylece  $C$  üzerinde parametre dönüşümüne göre  $k_2$  ve  $k_3$  fonksiyonları bir işarete kadar invaryanttır[5].

**İspat.** İlk olarak

$$k_1^* A_1^1 = k_1 \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2$$

den  $A_i = \pm 1$  olduğundan

$$k_1^* = k_1 A_1 \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2$$

yazılabilir. Hipotezden dolayı

$$k_1^* \neq 0$$

olup yukarıdaki önermeden

$$k_1^* A_1^2 = k_1^* A_1^3 = \dots = k_1^* A_1^m = 0 \implies A_1^2 = A_1^3 = \dots = A_1^m = 0$$

olur.  $[A_\alpha^\beta]$  ortogonal matris olduğundan dolayı

$$A_1^1 = A_1 = \pm 1 \text{ ve } A_2^1 = A_2^3 = \dots = A_m^1 = 0$$

dır. Bu durumda  $F$  ve  $F^*$  a göre (4.1.4) denklemlerinin ikinci denkleminde dolayı hipotezimiz göz önünde bulundurulursa

$$g(\nabla_{\xi^*} N^*, W_1) = g(\nabla_\xi N, W_1) = k_2 = k_2^* A_1^\beta$$

olup

$$k_2^* = k_2 A_1^1$$

gelir. Aynı yöntemle

$$g(\nabla_{\xi^*} N^*, W_2) = g(\nabla_\xi N, W_2) = k_3 = k_3^* A_2^\beta$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse önermedeki diğer denklemlerde bulunur. Ayrıca (4.1.4) ün denklemleri devam ettirilirse ,

$$A_3^3 = A_3 = \pm 1 \text{ ve } A_4^3 = A_4^3 = \dots = A_m^3 = 0$$

elde edilir. Burada (4.1.4) denklemlerinin geri kalanları kullanılarak benzer şekilde devam edilerek

$$k_\alpha^* = k_\alpha A_{\alpha-1} \frac{dt}{dt^*} \quad \alpha \in \{4, \dots, m+1\}$$

ispat tamamlanmış olur. □

**Önerme 4.2.2.**  $C, M_1^{m+2}$  Lorentz manifoldunun bir null eğrisi olsun.  $F$  ve  $\overline{F}$  sırasıyla  $S(TC^\perp)$  ve  $\overline{S}(TC^\perp)$  iki screen vektör demetiyle  $U$  ve  $\overline{U}$  üzerinde iki

Frenet çatısı olsun. O zaman bir komşuluk üzerinde  $k_1$  ilk eğriliği,  $C$  üzerindeki parametre dönüşümlerine ve screen vektör demeti dönüşümlerine bağlı olarak yok edilir. Bununla beraber  $C$  üzerinde,  $C$ ,  $M$  nin null geodeziği olacak şekilde bir parametre bulmak mümkündür[5].

**İspat.**  $F$  ve  $\bar{F}$  için (4.1.2) ve (4.1.4) te ilk denklemler kullanılarak

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \frac{dt}{d\bar{t}}\xi \\ \nabla_{\bar{\xi}}\bar{\xi} &= \frac{d^2t}{d\bar{t}^2}\xi + \frac{dt}{d\bar{t}}\nabla_{\bar{\xi}}\xi\end{aligned}$$

ifadesi düzenlenirse,

$$\frac{d^2t}{d\bar{t}^2}\xi + h\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2\xi + k_1\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2W_1 = \bar{h}\frac{dt}{d\bar{t}}\xi + \bar{k}_1W_1 - \bar{k}_1\frac{dt}{d\bar{t}}c_1\xi$$

olup karşılıklı bileşenlerin katsayıları eşitlenirse

$$\bar{h} = \frac{d^2t}{d\bar{t}^2}\frac{d\bar{t}}{dt} + h\frac{dt}{d\bar{t}} + k_1c_1\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2 \quad (4.2.5)$$

elde edilir.

$$\bar{k}_1 = k_1B_1^1\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2$$

olduğundan ve  $B_1 = \pm 1$  den dolayı

$$\bar{k}_1B_1^1 = k_1\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2 \quad (4.2.6)$$

gelir.  $W_2, W_3, \dots, W_m$  li terimlerin eşitliğinden

$$\bar{k}_1B_1^2 = \dots = \bar{k}_1B_1^m = 0 \quad (4.2.7)$$

dir. Eğer  $C$  üzerinde  $k_1 = 0$  ise  $B_1^1 = \pm 1$  olduğundan  $\bar{k}_1 = 0$  dır. Diğer bir deyişle  $B_1^\alpha = 0$  elde edilir ki bu da  $B_1^1 = B_1^2 = B_1^3 = \dots = B_1^m = 0$  olması demektir, bu da  $[B_\alpha^\beta(x)] \in O(m)$  olmasıyla çelişir.

$k_1 = 0$  olması durumun da ilk Frenet denklemi;

$$\nabla_\xi\xi = h\xi$$

olur.  $C$  üzerinde  $h = 0$  olacak şekilde özel bir parametre bulunabilir, böylece  $\nabla_\xi\xi = 0$  olup  $C$ ,  $M$  nin null geodeziği olur. Buradan ispat tamamlanır.  $\square$

**Tanım 4.2.1.** (4.2.5) denkleminde  $h = 0$  alınrsa elde edilen diferensiyel denklemin çözümünde bulunan  $p$  parametresine *distinguished parametre* denir. Bu *distinguished* (pseudo-yay) parametre non-null eğrilerdeki yay parametresine benzer rol oynar[5].

**Teorem 4.2.1.**  $C$  üzerinde  $p$ , pseudo yay parametresi olsun.  $(M_1^{m+2}, g)$  Lorentz manifoldunun non geodezik null eğrisi  $C(p)$  ile verilsin. O zaman aşağıdaki denklemlerle verilen  $\{\xi, N, W_1, \dots, W_m\}$  doğal Frenet çatısı vardır[5].

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \xi &= k_1 W_1 \\
\nabla_\xi N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \\
\nabla_\xi W_1 &= -k_2 \xi - k_1 N \\
\nabla_\xi W_2 &= -k_3 \xi + k_4 W_3 \\
\nabla_\xi W_3 &= -k_4 W_2 + k_5 W_4 \\
&\dots \\
\nabla_\xi W_i &= -k_{i+1} W_{i-1} + k_{i+2} W_{i+1} \quad \alpha \in \{3, \dots, m-1\} \\
\nabla_\xi W_m &= -k_{m+1} W_{m-1}
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

**Örnek 4.2.1.**  $C(p) = (\frac{1}{3}p^3 + 2p, p^2, \frac{1}{3}p^3, 2p)$   $p \in R$  ile  $R_1^4$  te null bir eğri alınsın.  $p$  nin distinguished parametresi olduğunu gösterip Frenet denklemlerini bulalım.

$$\frac{d}{dp} = \xi = (p^2 + 2, 2p, p^2, 2)$$

olup,  $V = (0, 0, 0, \frac{1}{2})$  alınrsa  $g(\frac{d}{dp}, V) = 1$  ve  $g(V, V) = \frac{1}{4}$  bulunur. Böylece

$$N = \frac{1}{g(\frac{d}{dp}, V)} \left\{ V - \frac{g(V, V)}{2g(\frac{d}{dp}, V)} \frac{d}{dp} \right\} = \frac{1}{8}(p^2 + 2, 2p, p^2, -2)$$

elde edilir.

$$\nabla_\xi \xi = 2(p, 1, p, 0)$$

olup

$$h = g(\nabla_\xi \xi, N) = 0 \quad \text{ve} \quad k_1 = \|\nabla_\xi \xi\| = 2$$

olduğundan  $p$ , distinguished parametredir.

$$\nabla_\xi \xi = h\xi + k_1 W_1$$

den

$$W_1 = (p, 1, p, 0)$$

bulunur ve

$$\nabla_\xi \xi = 2W_1$$

olur.

$$k_2 = g(\nabla_\xi N, W_1) = -\frac{1}{4}$$

olup

$$\begin{aligned}\nabla_\xi N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \implies -\frac{1}{4}(p, 1, p, 0) = -\frac{1}{4}(p, 1, p, 0) + k_3 W_2 \\ &\implies k_3 = 0 \\ &\implies N = -\frac{1}{4}W_1\end{aligned}$$

bulunur.

$$W_2 = \frac{1}{2}(p^2, 2p, p^2 - 2, 0)$$

seçilirse

$$\nabla_\xi W_1 = (1, 0, 1, 0) = -k_2 \xi - k_1 N + k_4 W_2$$

ifedesinden

$$k_4 = -1$$

elde edilir ve

$$\nabla_\xi W_1 = \frac{1}{4}\xi - 2N - W_2$$

olur.

$$\nabla_\xi W_2 = (p, 1, p, 0) = W_1$$

olup

$$\nabla_\xi W_2 = W_1$$

bulunur.

### 4.3 $M_1^3, M_1^4, M_1^5$ de Null Eğriler

$M_1^{m+2}$  nin bir null eğrisi göz önüne alınsın. Pseudo yay parametresi  $p$  ye göre  $C$  boyunca Frenet çatısı  $F$  olsun.  $(C(p), F)$  çiftini null eğri çatısı olarak isimlendiririz. Önceki bölümde görüldüğü üzere  $(C(p), F)$  genelde tek değildir, hem  $S(TC^\perp)$  screen vektör demetine hem de  $p$  ye bağlı olarak değişir. Bu tek olmama probleminin üstesinden gelmek için , Lorentz dönüşümler altında invariant kalan eğrilik fonksiyonlarının minimum sayısıyla Cartan Frenet çatıları bulundu.

Şimdi  $F = \{\xi = \frac{d}{dt}, N, W\}$  ile birlikte  $M_1^3$  , 3- boyutlu Lorentz manifoldunun  $(C(p), F)$  null eğri çatısının durumuyla başlayalım. Bunun Frenet denklemleri ;

$$\begin{aligned}\nabla_\xi \xi &= k_1 W \\ \nabla_\xi N &= k_2 W \\ \nabla_\xi W &= -k_2 \xi - k_1 N\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

dir.

**Teorem 4.3.1.**  $p, C$  üzerinde pseudo yay parametresi olduğunda  $(C(p), (M_1^3, g))$  Lorentz manifoldunun non-geodezik null eğrisi olsun.  $\forall p$  için  $T_{C(p)}M_1^3$  ün  $E = \{C', C'', C^{(3)}\}$  bazı göz önünde bulundurulsun. Öyleki burada  $g(C'', C'') = 1$  olsun. O zaman  $F$  ve  $E$  aynı yönlendirmeye sahip olduğunda  $(C(p), F)$  için  $F = \{\xi, N, W\}$  sadece bir tek Frenet çatısı olduğunda  $(C(p), F)$

$$\begin{aligned}\nabla_\xi \xi &= W \\ \nabla_\xi N &= \tau W \\ \nabla_\xi W &= -\tau \xi - N\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

Frenet denklemleriyle bir tek Frenet çatısıdır. Bununla birlikte  $\tau$  torsiyon fonksiyonu Lorentz dönüşümü altında bir işarete kadar invarianttır[5].

**Örnek 4.3.1.**  $R_1^3$  ün null eğrisi,  $p$  distinguished parametresi olmak üzere ,  $(t, x, y)$  lokal koordinatlara göre

$$t = \frac{1}{2}p\sqrt{p^2 + 1} + \frac{1}{2}In | p^2 + \sqrt{p^2 + 1} | \quad , \quad x = \frac{1}{2}p^2, y = p$$

ile tanımlansın.

$$\xi = (\sqrt{p^2 + 1}, p, 1)$$

olup

$$g(\xi, N) = 1 \text{ ve } g(N, N) = 0$$

şartlarını sağlayacak şekilde

$$N = (-\frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 1}, \frac{1}{2}p, \frac{1}{2})$$

ve

$$g(\xi, W) = 0 \text{ ve } g(N, W) = 0$$

şartlarını sağlayacak şekilde

$$W = (\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}, 1, 0)$$

seçilirse  $F = \{\xi, N, W\}$  frenet çatısında (4.3.2) Frenet denklemleri kullanılarak

$$\nabla_\xi \xi = W$$

olup  $k_1 = 1$  ve

$$\nabla_\xi W = (\frac{1}{(p^2 + 1)\sqrt{p^2 + 1}}, 0, 0)$$

olduğundan

$$\nabla_\xi W = -\tau \xi - N$$

denkleminde

$$\tau = -\frac{1}{2}$$

bulunur.

Şimdi  $(C(p), F)$ ,  $M_1^4$  4-boyutlu Lorentz manifoldunun bir Frenet çatısı olsun.

$p$ , pseudo yay parametresi olduğu yerde Frenet denklemleri

$$\nabla_\xi \xi = k_1 W_1$$

$$\nabla_\xi N = k_2 W_1 + k_3 W_2$$

$$\nabla_\xi W_1 = -k_2 \xi - k_1 N + k_4 W_2 \quad (4.3.3)$$

$$\nabla_\xi W_2 = -k_3 \xi + k_4 W_1$$

olsun.

**Önerme 4.3.1.**  $F = \{\xi = \frac{d}{dt}, N, W_1, W_2\}$ ,  $S(TC^\perp)$  ile  $U \subset C$  üzerinde bir Frenet çatısı ve  $p$ ,  $C$  üzerinde bir Frenet çatısı ve  $p, C$  üzerinde pseudo yay parametresi olduğu yerde  $C(p), (M_1^4, g)$  Lorentz manifoldunun non-geodezik null eğrisi olsun. Ozaman bir  $\bar{S}(TC^\perp)$  screen vektör demeti vardır., öyleki  $U$  üzerinde,  $\bar{F} = \{\frac{d}{dt}, N, W_1, W_2\}$  çatısında  $\bar{k}_4 = 0$  dır[5].

**Uyarı 4.3.1.** Önerme (4.3.1) de genel  $t$  parametresiyle  $M_1^4$  herhangi bir eğrisi ele alınabilir. Sonuç olarak  $M_1^3$  teki durum gibi,  $C(p)$  non geodeziği için eğer  $\xi = C'$  ve  $k_1 = 1$  olduğu farzedilirse o zaman

$$g(C'', C'') = 1$$

olur.  $W = C''$  seçilir,  $k_2 = \frac{1}{2}g(C^{(3)}, C^{(3)})$  olduğu yerde görülür ki, tek null transversal demet

$$N = -C^{(3)} - k_2 C''$$

ile verilir. Böylece  $k_2$  yerine  $k_1$  ve  $k_3$  yerine  $k_2$  alınır. Böylece aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

**Teorem 4.3.2.**  $C$  üzerinde  $p$ , pseudo yay parametresi olsun ve  $(M_1^4, g)$  Lorentz manifoldunun non-geodezik null eğrisi  $C(p)$  ile verilsin.  $\forall p$  için  $T_{C(p)}M_1^4$  ün  $E = \{C', C'', C^{(3)}, C^{(4)}\}$  bazı göz önüne alınsın. Öyleki burada  $g(C'', C'') = 1$  olsun.  $O$  zaman

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \xi &= W_1 \\ \nabla_\xi N &= k_1 W_1 + k_2 W_2 \\ \nabla_\xi W_1 &= -k_1 \xi - N \\ \nabla_\xi W_2 &= -k_2 \xi \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

elde edilir. Bu Cartan Frenet denklemleriyle  $(C(p), F)$  null Cartan eğrisi için sadece bir tane  $F = \{\xi, N, W_1, W_2\}$  Frenet çatısı vardır. Burada  $F$  ve  $E$  aynı

pozitif yöndedir. Bununla beraber  $k_1$  ve  $k_2$  eğrilik fonksiyonları Lorentz dönüşümler altında bir işarete kadar invaryant kalır[5].

**Örnek 4.3.2.**  $C(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh p, \cosh p, \sin p, \cos p), p \in \mathbb{R}$  ile verilen null eğrinin Frenet çatısını bulalım;

$$C' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cosh p, \sinh p, \cos p, \sin p) = \xi$$

$$C'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh p, \cosh p, -\sin p, -\cos p) = W_1$$

$$k_1 = \|\nabla_\xi \xi\| = 1$$

$$C^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cosh p, \sinh p, -\cos p, \sin p)$$

$$k_2 = \frac{1}{2}g(C^{(3)}, C^{(3)})$$

$$N = -C^{(3)} - k_2 C' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cosh p, -\sinh p, \cos p, -\sin p)$$

elde edilir.

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh p, \cosh p, \sin p, \cos p)$$

olarak alınırsa

$$\nabla_\xi \xi = W_1$$

$$\nabla_\xi N = -W_2$$

$$\nabla_\xi W_1 = -N$$

$$\nabla_\xi W_2 = \xi$$

bulunur.

$M_1^5$  te null eğrilerin çatı durumları için; distinguished parametresiyle ve  $k_1 = 1$  ile benzer argümanlar kullanılarak  $k_4 = k_5 = 0$  olduğu gösterilebilir. O zaman  $k_2$  yerine  $k_1$ ,  $k_3$  yerine  $k_2$ ,  $k_6$  yerine  $k_3$  alınabileceği aşağıdaki teoremle verilebilir.

**Teorem 4.3.3.**  $C(p), M_1^5$  Lorentz manifoldunun bir non-geodezik null eğrisi olsun.

$\forall p$  için  $T_{C(p)}M_1^5$  in  $E = \{C', C'', C^{(3)}, C^{(4)}, C^{(5)}\}$  bazı göz önüne alınsın. Öyleki

bu bazda  $g(C'', C'') = 1$  olsun. O zaman aşağıda verilen Frenet denklemleriyle bu non-geodezik null eğrinin yalnız bir tane  $F = \{\xi, N, W_1, W_2, W_3\}$  Frenet çatısı vardır;

$$\begin{aligned}\nabla_\xi \xi &= W_1 \\ \nabla_\xi N &= k_1 W_1 + k_2 W_2 \\ \nabla_\xi W_1 &= -k_1 \xi - N \\ \nabla_\xi W_2 &= -k_2 \xi + k_3 W_3 \\ \nabla_\xi W_3 &= -k_3 W_2\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

Burada  $F$  ve  $E$  aynı pozitif yöndedir. Bununla beraber  $\{k_1, k_2, k_3\}$  eğrilik fonksiyonları Lorentz dönüşümler altında bir işarete kadar invaryant kalır[5].

**Örnek 4.3.3.**  $C, C(p) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{1}{3}p^3 + 2p, p^2, \frac{1}{3}p^3, 2\cos p, 2\sin p), p \in R$  ile verilen  $R_1^5$  te null bir eğri olsun. Bu eğrinin Frenet çatılarını bulalım.

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(p^2 + 2, , 2p, p^2, -2\sin p, 2\cos p) \\ C'' &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2p, 2, 2p, -2\cos p, -2\sin p) \\ N &= -\frac{1}{8\sqrt{2}}(p^2 + 10, 2p, p^2 + 8, 6\sin p, -6\cos p) \\ C^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, \sin p, -\cos p)\end{aligned}$$

olup

$$k_1 = \sqrt{g(C'', C'')} = 1 \text{ ve } k_2 = \frac{1}{2}g(C^{(3)}, C^{(3)}) = \frac{1}{4}$$

olduğundan  $k_2$  yerine  $k_1$  ,  $k_3$  yerine  $k_2$  alınırsa

$$N = -C^{(3)} - k_2 C''$$

sağlanır ve

$$W_1 = C'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(p, 1, p, -\cos p, -\sin p)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}W_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(p, 1, p, \cos p, \sin p) \\ W_3 &= \frac{1}{4}(p^2 - 2, 2p, p^2 - 4, 2\sin p, -2\cos p)\end{aligned}$$

alnırsa (4.3.5) denklemleri

$$\nabla_{\xi}\xi = W_1$$

$$\nabla_{\xi}N = \frac{1}{4}W_1 + \frac{1}{2}W_2$$

$$\nabla_{\xi}W_1 = -\frac{1}{4}\xi - N$$

$$\nabla_{\xi}W_2 = -\frac{1}{2}(1, 0, 1, -\sin p, \cos p) = -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}W_3$$

$$\nabla_{\xi}W_2 = \frac{1}{2}(p, 1, p, \cos p, \sin p) = -\frac{1}{\sqrt{2}}W_2$$

bulunur.

## 5. NULL CARTAN EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

### 5.1 Lorentzian Manifoldlarda Null Cartan Eğriler

Bu bölümde ilk olarak  $M_1^{m+2}$  de bir null eğri için bazı sonuçlardan ve daha sonra 3, 4, 5 boyutlu Lorentz uzay formlarında null helislerden bahsedeceğiz.

Amacımız; Lorentzian dönüşümler altında invariant olan eğrilik fonksiyonlarının en küçük sayıyla bir Frenet çatısı bulmaktır. Burada bölüm 2 de verilen doğal Frenet denklemlerini ve doğal Frenet çatısını kullanacağız.

**Teorem 5.1.1.**  *$C$ , distinguished parametresi ile parametrelendirilmiş, yönlendirilmiş  $(M_1^2, g)$  Lorentzian manifoldunda bir null eğri olsun öyleki,*

$$A = \{C'(p), C''(p), \dots, C^{(m+2)}(p)\}$$

her  $p$  için  $T_{C(p)}M$  nin bir bazıdır.

Bu durumda;

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \xi &= W_1 \\ \nabla_\xi N &= \sigma_1 W_1 + \sigma_2 W_2 \\ \nabla_\xi W_1 &= -\sigma_1 \xi - N \\ \nabla_\xi W_2 &= -\sigma_2 \xi + \sigma_3 W_3 \\ &\dots \\ \nabla_\xi W_i &= -\sigma_i W_{i-1} + \sigma_{i+1} W_{i+1} \quad i \in \{3, \dots, m-1\} \\ \nabla_\xi W_m &= -\sigma_m W_{m-1} \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

denklemlerle bir Frenet çatısı  $F = \{\xi, N, W_1, \dots, W_m\}$  dir ve aşağıdaki iki şarta karşılık gelir.

(i)  $\{C^i(p), C^{i+1}(p), \dots, C^{(i+2)}(p)\}$  ve  $\{\xi, N, W_1, \dots, W_i\}$   $2 \leq i \leq m-1$

aynı yönlendirmeye sahiptir.

(ii)  $\{\xi, N, W_1, \dots, W_m\}$  pozitif yönlendirilmiştir ve  $\sigma_i > 0$ ,  $\forall i \geq 2$  dir.

**İspat.** Genelliği bozmaksızın bölüm 2 deki notasyonları kullanarak, kabul edelim ki  $p$  özel parametresi tarafından parametrelendirilmiş,  $(M_1^{m+2}, g)$  nin bir  $C$  null eğrisi olsun, öyleki  $g(C^i, C^i) = 1$  ve  $h = 0$  dir.

Şimdi,  $\xi = C^i$  ve  $W_1 = C^i$  seçelim bu durumda  $k_1 = 1$  olur.

$$N = -C^{(3)} - k_2 C^i$$

dir. Burada

$$k_2 = g(\nabla_\xi N, W_1) = \frac{1}{2}g(C^{(3)}, C^{(3)})$$

tarafından üretilen null transversal demet  $N$  elde edilir.

(4.1.4) ün 2. denkleminde yani,  $\nabla_\xi N = -hN + k_2 W_1 + k_3 W_2$  de,  $N, k_2$  kullanılırsa ve  $\nabla_\xi N$  hesaplanarak

$$k_3 = \pm \sqrt{g(C^{(4)}, C^{(4)}) - g(C^{(3)}, C^{(3)})^2}$$

$$W_2 = \pm \frac{1}{k_3}(C^{(4)} + g(C^{(3)}, C^{(3)})C^i + g(C^{(4)}, C^{(3)})C^i)$$

elde edilir.

$\sigma_1 = k_2$   $\sigma_2 = k_3$   $\sigma_3 = k_4$  alınarak yeniden adlandırılırsa (5.1.1) deki denklemler elde edilir.  $\square$

**Önerme 5.1.1.**  $C, M_1^{m+2}$  de bir null Cartan eğri olsun. Bu durumda

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}g(C^{(3)}, C^{(3)}) \quad \sigma_2^2 = -D_4 \quad \sigma_i^2 = \frac{D_i D_{i+2}}{D_{i+1}^2}$$

olmak üzere,

$$\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$$

Cartan eğriliklerdir.

Üstelik  $\sigma_2 < 0$  ,  $\sigma_i > 0$  her  $i \in \{3, \dots, m-1\}$  ve  $\sigma_m < 0$  A ya göre pozitif ya da negatif yönlendirilmiştir. Burada

$$D_i = \begin{vmatrix} g(C^i, C^i) & g(C^i, C^{ii}) & g(C^i, C^{(i)}) \\ g(C^{ii}, C^i) & g(C^{ii}, C^{ii}) & g(C^{ii}, C^{(i)}) \\ & \dots & \\ g(C^{(i)}, C^i) & g(C^{(i)}, C^{ii}) & g(C^{(i)}, C^{(i)}) \end{vmatrix} \quad (5.1.2)$$

dir.

**Sonuç 5.1.1.**  $M_1^{m+2}$  de bir  $C$  eğrisinin Cartan eğrilikleri Lorentzian dönüşümler altında invarianttır.

Fiziksel sebeplerle , distinguished  $p$  parametresine göre bir Cartan  $\{\xi, N, W_1, W_2\}$  çatısıyla 4–boyutlu  $(M_1^4, g)$  spacetime manifoldunda bir null Cartan  $C$  eğri düşündüğümüzde , Cartan denklemleri

$$\dot{\xi} = \nabla_{\xi} \xi = W_1 \quad (5.1.3)$$

$$\dot{N} = \nabla_{\xi} N = \sigma_1 W_1 + \sigma_2 W_2 \quad (5.1.4)$$

$$\dot{W}_1 = \nabla_{\xi} W_1 = -\sigma_1 \xi - N \quad (5.1.5)$$

$$\dot{W}_2 = \nabla_{\xi} W_2 = -\sigma_2 \xi \quad (5.1.6)$$

dır. Bilindiği üzere  $R^3$  de regüler eğri için , bir  $\{T, N, B\}$  Frenet çatısı vardır. Aynı düşünce ile ,  $\sigma_2 \neq 0$  alınırsa  $\xi$  nin kovaryant türevleri ve  $\xi$  ye dayanan  $\{\xi, N, W_1, W_2\}$  yi şimdi ifade edilebilir.

(5.1.3) denkleminde

$$W_1 = \dot{\xi} \quad (5.1.7)$$

dır. Daha sonra (5.1.7) denkleminin  $\xi$  ye göre kovaryant türevi alınarak ve (5.1.5) denkleminle karşılaştırırsa

$$N = -\sigma_1 \xi - \ddot{\xi} \quad (5.1.8)$$

elde edilir. Burada  $\ddot{\xi} = \nabla_{\xi} \nabla_{\xi} \xi$  dir.

Son olarak ,  $\xi$  ye göre (5.1.8) denkleminin kovaryant türevi alınarak ve (5.1.4) denklemiyle karşılaştırılırsa da

$$W_2 = -\frac{1}{\sigma_2} \{ \dot{\sigma}_1 \xi + 2\sigma_1 \dot{\xi} + \ddot{\xi} \} \quad (5.1.9)$$

elde edilir. Burada  $\ddot{\xi} = \nabla_\xi \nabla_\xi \nabla_\xi \xi$  dir.

**\*\*Semi-Riemann manifoldda bir space form tamamen sabit eğriliğe bağlıdır.**

**Teorem 5.1.2.**

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow R$$

*her yerde türevlenebilen fonksiyonlar olsun.  $\sigma_2 < 0$  ve  $\sigma_i > 0$  her  $i \in \{3, \dots, m-1\}$  için  $x, R_1^{m+2}$  de bir nokta ve  $R_1^{m+2}$  nin pozitif yönlendirilmiş bir quasi ortonormal bazını  $\{\xi^0, N^0, W_0^0, \dots, W_m^0\}$  düşünelim. Bu durumda  $R_1^{m+2}$  de  $C(0) = x$  ile bir tek  $C$  null Cartan eğrisi vardır ve*

$$\xi(0) = \xi^0, \quad N(0) = N^0, \quad W_i(0) = W_i^0 \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

*$\{\xi, N, W_1, \dots, W_m\}$  ile Cartan çatısı verilebilir..*

**Teorem 5.1.3.**  *$C$  ve  $\overline{C}$  iki null Cartan eğrisi,  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$  aynı Cartan eğriliklere sahip olsun. Burada  $\sigma_i : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow R$  diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu durumda  $R_1^{m+2}$  de  $C$  den  $\overline{C}$  ye bir Lorentzian dönüşüm vardır.*

Lorentzian space form, pozitif skaler eğriliğin space time dır. De Sitter space time diye adlandırılır ve  $S_1^{m+2}$  ile ifade edilir. Bu da  $R^1 \times S^{m+1}$  topolojisidir ve  $R_1^{m+3}$  de bir hiper yüzey olarak canlandırılabilir. Burada  $S^{m+1}$ ,  $(m+1)$ – küredir.

Özellikle, 4 boyutlu De Sitter spacetime fiziksel olarak önemli bir uzaydır. 5–boyutlu  $R_1^5$  Minkowski uzayında

$$ds^2 = -dt^2 + du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

metriğiyle

$$\alpha^2 = -t^2 + u^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

hiperboloidi olarak görülebilir[6].

$p$  özel parametresine göre  $C(p)$ ,  $S_1^{m+2} \subset R_1^{m+3}$  De Sitter uzayında bir null eğri olsun.  $S_1^{m+2}$  de  $C$  boyunca kovaryant türev  $D_P$  ile verilsin. Bu durumda  $C$  boyunca her  $X$  vektör alanı ;

$$D_P X = X' + g(X, C')C \quad (5.1.10)$$

elde ederiz. Burada  $g$ ,  $R_1^{m+3}$  de kanonik metriktir.

Bir null Cartan eğri için (5.1.10) kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \xi &= W_1 \\ \nabla_\xi N &= -C + \sigma_1 W_1 + \sigma_2 W_2 \\ \nabla_\xi W_1 &= -\sigma_1 \xi - N \\ \nabla_\xi W_2 &= -\sigma_2 \xi + \sigma_3 W_3 \\ &\dots \\ \nabla_\xi W_i &= -\sigma_i W_{i-1} + \sigma_{i+1} W_{i+1} \quad i \in \{3, \dots, m-1\} \\ \nabla_\xi W_m &= -\sigma_m W_{m-1} \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Frenet denklemleri ve  $F = \{\xi, N, W_1, \dots, W_m\}$  çatısı elde edilir.

**Teorem 5.1.4.**

$$\sigma_1, \dots, \sigma_m : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow R$$

her yerde türevlenebilen fonksiyonlar olsun.  $\sigma_2 < 0$  ve  $\sigma_i > 0$  her  $i \in \{3, \dots, m-1\}$  için  $x$ ,  $S_1^{m+2}$  de bir nokta olsun ve  $T_x S_1^{m+2}$  nin bir pozitif yönlendirilmiş  $\{\xi^0, N^0, W_0^0, \dots, W_m^0\}$  quasi ortonormal bazını düşünelim. Bu durumda  $S_1^{m+2}$  de  $C(0) = x$  ile birlikte bir tek  $C$  null Cartan eğrisi vardır ve

$$\xi(0) = \xi^0, \quad N(0) = N^0, \quad W_i(0) = W_i^0 \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

$\{\xi, N, W_1, \dots, W_m\}$  ile Cartan çatısı verilir.

**Teorem 5.1.5.**  $S_1^{m+2}$  de  $C$  ve  $\overline{C}$  iki null Cartan eğrisi,  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$  aynı Cartan eğriliklere sahip olsun. Burada  $\sigma_i : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow R$  diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu durumda  $S_1^{m+2}$  nin  $C$  den  $\overline{C}$  ye bir Lorentzian dönüşüm vardır.

Son olarak, sabit negatif eğriliğin bir Lorentzian space formu ;  $H_1^{m+2}$  anti De Sitter spacetime olarak bilinir ve bu topolojik olarak bir hiper yüzey ile ilişkilendirilerek  $R_2^{m+3} = R_2^2 \times R^{m+1}$  dir.

Özellikle 4-boyutlu anti De-Sitter spacetime

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

metriğiyle

5-boyutlu  $R_2^5$  semi öklidyen uzayda

$$\alpha^2 = -u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

hiperboloidi olarak görülebilir ve buda fiziksel olarak önemli bir uzaydır[6].

$C(p)$   $p$ , özel parametresine göre  $H_1^{m+2} \subset R_2^{m+3}$  anti De Sitter uzayında bir null eğri olsun.  $H_1^{m+2}$  de  $C$  boyunca kovaryant türev  $D_P$  olsun. De Sitter uzayındaki işlemler  $H_1^{m+2}$  de bir null Cartan eğri için , (5.1.10) denklemi

$$D_P X = X' - g(X, C')C$$

alacaktır burada  $g$ ,  $R_2^{m+3}$  de kanonik metriktir.

**Teorem 5.1.6.**

$$\sigma_1, \dots, \sigma_m : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow R$$

her yerde türevlenebilen bir fonksiyon olsun.  $\sigma_2 < 0$  ve  $\sigma_i > 0$  her  $i \in \{3, \dots, m-1\}$  için  $x$ ,  $H_1^{m+2}$  de bir nokta olsun ve  $T_x H_1^{m+2}$  nin bir pozitif yönlendirilmiş  $\{\xi^0, N^0, W_0^0, \dots, W_m^0\}$  quasi ortonormal bazını düşünelim. Bu taktirde  $H_1^{m+2}$  de  $C(0) = x$  ile birlikte bir tek  $C$  null Cartan eğrisi vardır ve

$$\xi(0) = \xi^0 \quad , \quad N(0) = N^0 \quad W_i(0) = W_i^0 \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

$\{\xi, N, W_1, \dots, W_m\}$  ile Cartan çatısı verilir.

**Teorem 5.1.7.**  $H_1^{m+2}$  de  $C$  ve  $\overline{C}$  iki null Cartan eğri ise aynı  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$  Cartan eğriliklere sahiptir ki burada  $\sigma_i : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow R$  diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu taktirde  $C$  den  $\overline{C}$  ye  $H_1^{m+2}$  de bir Lorentzian bir dönüşümü vardır.

**Tanım 5.1.1.** *Cartan eğrilikleri sabit olan eğriye helis denir.*

*C eğrisi bir helisse bu durumda aşağıdaki diferensiyel denklemler verilir.*

$$C^{(m+3)} = a_1 C' + a_2 C^{(3)} + \dots + a_s C^{(m+1)}, m+2 = 2s \quad (5.1.12)$$

$$C^{(m+3)} = a_1 C'' + a_2 C^{(4)} + \dots + a_s C^{(m+1)}, m+2 = 2s+1 \quad (5.1.13)$$

*burada katsayılar*

$$\begin{aligned} a_i &= \sigma_2^2 \sum_{4 \leq j_1 < \dots < j_{s-i-1} \leq m} \sigma_{j_1}^2 \dots \sigma_{j_{s-i-1}}^2 - 2\sigma_1 \sum_{3 \leq j_1 < \dots < j_{s-1} \leq m} \sigma_{j_1}^2 \dots \sigma_{j_{s-1}}^2, j_r - j_{r-1} \geq 2, \forall r \\ a_{s-1} &= \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sum_{j=3}^m k_j^2 - \sum_{3 \leq j < j_1 < j_2 \leq m} \sigma_{j_1}^2 \sigma_{j_2}^2, j_2 - j_1 \geq 2 \\ a_s &= -2\sigma_1 - \sum_{j=3}^m k_j^2 \end{aligned}$$

*ile verilir.*

## 5.2 Null Cartan Helisler

Bu bölümde şimdiye kadar null Cartan helisler üzerinde yapılan çalışmaları sunacağız. Kısaca , sabit eğrilikli küçük boyutlu Lorentzian uzaylarda helisleri tanımlayacağız. Helislerin fiziksel önemi üzerinde ilerki çalışmalara kaynaklar sağlayacağız ve  $R_1^3$  de null helisler için teoremleri nitelendireceğiz.

**Önerme 5.2.1.** *Bir öklidyen 3–uzayında yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş bir C eğrisi Bertrand eğridir gerek ve yeter şart C düzlemsel bir eğridir ya da  $\kappa$  eğrilik  $\tau$  torsiyon olmak üzere  $a\kappa + b\tau = 1 \quad \exists a, b \in R$  dir[7].*

Bölüm 2 nin 3. kısmına dönersek bir C eğrisi , distinguished p parametresine göre  $F = \{\xi, N, W\}$  Frenet çatısıyla birlikte, null eğri çatısı olarak adlandırılır.

**Tanım 5.2.1.**  *$(C, \overline{C}), R_1^3$  de sırasıyla p ve  $\bar{p}$  distinguished parametresiyle null eğri çatı çifti olsun. Bu çiftin asli normal eğriliği lineer bağımlı ise Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır.*

Bu  $\overline{C}$  eğrisi  $C$  nin Bertrand eşi olarak adlandırılır. Yukarıdaki tanıma göre  $(C, \overline{C})$  null Bertrand eğri çifti için  $\overline{p} = \overline{p}(p)$  ilişkisi vardır öyleki  $\overline{W}(\overline{p}(p)) = \epsilon W(p)$ ,  $\epsilon = \pm 1$  yani normal doğrular kendi noktalarıyla çakışıktır. Null Bertrand eğrilerin, null helisleri tanımlamada kullanıldığını göstermek için ; kabul edelim ki her null eğri çatısı aşağıdaki Cartan denklemleriyle bir null Cartan eğridir:

$$\begin{aligned}\nabla_{\xi}\xi &= W \\ \nabla_{\xi}N &= \tau W \\ \nabla_{\xi}W &= -\tau\xi - N\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

ve  $F = \{\xi, N, W\}$  Frenet çatısına sahiptir ve tek bir Cartan eğrilik  $\tau$  dur.

**Teorem 5.2.1.**  $C(p)$ ,  $p$  özel parametresiyle verilmiş  $R_1^3$  de bir null Cartan eğri olsun. O zaman  $C, \overline{C}$  nin Bertrand eşi olması için gerek ve yeter şart  $C$  ve  $\overline{C}$  sıfırdan farklı aynı sabit eğriliğe sahiptir. Üstelik  $\overline{C}, C$  ye kongruenttir[8].

**İspat.** Kabul edelim ki  $C$ ,  $\overline{p}$  özel parametresiyle verilmiş  $\overline{C}(\overline{p})$  nin Bertrand eşi olsun.  $\{\xi, N, W\}$  ve  $\{\overline{\xi}, \overline{N}, \overline{W}\}$  sırasıyla  $C$  ve  $\overline{C}$  nin Cartan çatıları olsun. Normal doğrular çakışık olduğundan

$$\overline{C} = C + \alpha W\tag{5.2.2}$$

yazabiliriz, her fonksiyon için  $\alpha(p) \neq 0$  dır. (5.2.2) denkleminin  $p$  ye göre diferensiyeli alınarak ve (5.2.1) Cartan denklemleri kullanılarak

$$\frac{d\overline{p}}{dp}\overline{\xi} = (1 - \alpha\tau)\xi - \alpha N + \alpha'W\tag{5.2.3}$$

elde edilir.

Null Bertrand eğriler için  $g(\overline{\xi}, W) = 0$  (5.2.3) de kullanılırsa

$$\alpha' = 0$$

olur ve böylece  $\alpha$  sabittir. Bu  $\overline{\xi}$  null eğrisiyle birlikte

$$\alpha(1 - \alpha\tau) = 0$$

anlamına gelir böylece

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \quad \text{sabit}$$

elde edilir. Bu değer (5.2.3) de kullanılarak

$$\bar{\xi} = \mu N \quad , \quad \mu = -\alpha \frac{dp}{d\bar{p}} \neq 0 \quad (5.2.4)$$

bulunur.

(5.2.4) denkleminin  $p$  ye göre diferensiyeli alınır ve (5.2.1) Cartan denklemleri kullanılarak

$$\frac{d\bar{p}}{dp} \bar{W} = \mu' N + \mu \tau W$$

elde edilir.

$\bar{W} = \pm W$  olduğundan  $\frac{d\bar{p}}{dp} = \pm 1$  ve  $\mu = \pm \alpha = \text{sabit}$  tir. Böylece  $\bar{C}$  nin Frenet çatısı

$$\{\pm \alpha N, \pm \alpha^{-1} \xi, -W\}$$

dir. Böylece  $\bar{C}$  aynı eğriliğe sahip  $\tau = \frac{1}{\alpha}$  dır.

Tersine  $C, \tau = \frac{1}{\alpha} \neq 0$  sabit eğriliğiyle bir null Cartan eğri olsun. O zaman

$$\bar{C} = C + \alpha W$$

$p$  özel parametresiyle ve

$$\bar{\xi} = -\alpha N \quad , \quad \bar{N} = -\alpha^{-1} \xi \quad , \quad \bar{W} = -W$$

Frenet çatısıyla verilen bir null eğridir.

Böylece,  $(\bar{C}, C)$  bir Bertrand eğri çiftidir ve  $\bar{C}, \tau = \frac{1}{\alpha}$  aynı sabit Cartan eğriliğe sahiptir. □

**Örnek 5.2.1.**  $C(p) = (p, \cos p, \sin p)$

$$F = \{C', N = \frac{1}{2}(-1, \sin p, -\cos p), W = (0, -\cos p, -\sin p)\}$$

*Frenet çatısıyla bir null helis olsun:*

$$\tau = \frac{1}{2} \text{ olduğunu göstermek kolaydır. } \tau = \frac{1}{\alpha} \text{ olduğundan } \alpha = 2 \text{ dir.}$$

$\bar{p} = p$  parametresiyle  $\bar{C} = C + 2W$  tanımlansın. Bu durumda

$$\bar{C} = (p, \cos p, \sin p) + 2(0, -\cos p, -\sin p)$$

$$\bar{C} = (p, -\cos p, -\sin p)$$

bulunur. Böylece  $\bar{C}$  orijinal  $C$  eğrisine kongruenttir.

Şimdi genel binormal yönlendirmeye sahip olan null Cartan eğri çiftleri üzerinde bazı sonuçlar vereceğiz.

**Önerme 5.2.2.**  $C(s), R^3$  de  $s$  yay uzunluğu parametresiyle verilen bir null eğri olsun. Binormalleri çakışık ve yay uzunluğu ile verilen bir diğer eğri  $\bar{C}$  olsun. Bu durumda  $\bar{C}, C$  ile çakışık [9].

$C(p)$  ve  $\bar{C}(\bar{p})$ ,  $p$  ve  $\bar{p}$  özel parametresiyle verilmiş iki null Cartan eğri ve sırasıyla Frenet çatıları  $\{\xi, N, W\}$  ve  $\{\bar{\xi}, \bar{N}, \bar{W}\}$  olsun. Kabul edelim ki,

$$\bar{C} = C + u\xi + vN + wW$$

her  $u, v, w$  için olsun. Bu taktirde  $\bar{C}$  ye  $\{u, v, w\}$  koordinatlarıyla  $C$  nin null Cartan eğrisiyle ilişkilidir denir.  $\bar{C}$  nin diferensiyeli ile

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{p}}\bar{\xi} = (1 + u' - \tau w)\xi + (v' - w)N + (w' + u + \tau v)W \quad (5.2.5)$$

olur.

$\bar{\xi}$ , bir null eğri olduğundan

$$(w' + u + \tau v)^2 + 2(1 + u' - \tau w)(v' - w) = 0 \quad (5.2.6)$$

elde ederiz.

**Teorem 5.2.2.** (1)  $C(p), R_1^3$  de  $p$  özel parametresiyle verilmiş bir null Cartan eğri olsun. Kabul edelim ki,  $\bar{p}$  özel parametresi tarafından parametrelendirilmiş bir null Cartan  $\bar{C}(\bar{p})$  eğrisi vardır öyleki  $C$  nin binormal yönlendirmesi  $\bar{C}$  ninki ile çakışık. Bu taktirde karşılık gelen noktalarda Cartan eğrilikler de çakışık.

(2)  $C(p), R_1^3$  de  $p$  özel parametresiyle verilmiş bir null Cartan eğri olsun. Bu durumda  $p$  özel parametresiyle parametrelendirilmiş bir null Cartan  $\bar{C}(\bar{p})$  eğrisi vardır öyleki, binormal yönlendirme ve  $C, \bar{C}$  eğrilikleri çakışık [10].

**İspat.** (1) Kabul edelim ki ,  $(C(p), \overline{C}(\overline{p}))$   $p$  ve  $\overline{p}$  özel parametresiyle parametrelendirilmiş bir null Cartan eğri çifti olsun öyleki binormal vektörleri çakışıktır. Bu durumda  $\overline{C}$ ,

$$\overline{C}(\overline{p}(p)) = C(p) + v(p)N(p) \quad (5.2.7)$$

olarak parametrelendirilmiştir, her  $v(p) \neq 0$  ve  $\overline{p} = \overline{p}(p)$  için . Dolayısıyla  $\overline{C}$ ,  $(0, v, 0)$  referans koordinatlarıyla  $C$  ye bağlıdır. Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki,

$$\overline{N} = \alpha N \quad (5.2.8)$$

her  $\alpha(p) \neq 0$  için . Bu taktirde (5.2.5) kullanılarak

$$\frac{d\overline{p}}{dp}\overline{\xi} = \xi + v'N + \tau vW \quad (5.2.9)$$

elde edilir. Aynı zamanda (5.2.6) ve  $g(\overline{\xi}, \overline{N}) = 1$  den

$$2v' + (v\tau)^2 = 0 \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{d\overline{p}}{dp} \quad (5.2.10)$$

bulunur. Dolayısıyla (5.2.10) den  $v$  fonksiyonu tamamen

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{2} \int (\tau(p))^2 dp + c \quad \text{her } c \in R$$

tarafından belirlenir.

$W \times N = -N$  kullanılarak  $\overline{C}$  nün asli normalı

$$\overline{W} = \overline{\xi} \times \overline{N} = W - v\tau N \quad (5.2.11)$$

ifade edilebilir.

(5.2.8) denklemin  $p$  parametresine göre diferensiyeli ve (5.2.11) kullanılarak

$$\alpha \overline{\tau}(W - v\tau N) = \frac{d\alpha}{dp}N + \alpha \tau W$$

elde edilir.Eşitliğin her iki tarafı karşılaştırılarak

$$\overline{\tau} = \tau \quad , \quad \frac{d\alpha}{dp} = -\alpha v \tau^2 \implies \alpha = \alpha_0 v^2, \alpha_0 \in R^+$$

(5.2.11) in diferensiyeli alınarak  $\alpha^2 = v\tau'$  elde edilir. Böylece cartan eğrilikler karşılık geldikleri noktalarda çakışıktır.

(2) Her null Cartan  $C(p)$  eğrisi için

$$\overline{C} = C + vN \quad , \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{2} \int (\tau(p))^2 dp + c \quad \text{her } c \in R$$

tarafındanyeni bir  $\overline{C}(\overline{p})$  eğrisi tanımlansın.

$$\overline{p} = \alpha_0 \int v^2 dp \quad \alpha_0 \neq 0 \text{ sabit}$$

fonksiyonu tanımlansın. O zaman  $\overline{C}$ ,

$$\{\overline{\xi} = \frac{d}{d\overline{p}}\overline{C}, \overline{N} = \frac{d\overline{p}}{dp}N, \overline{W} = \overline{\xi} \times \overline{N}\}$$

çatısı tarafından  $p$  özel parametresiyle bir null Cartan eğridir.

Açıkça  $\overline{C}, C$  ortak binormal yönlendirmeye sahiptir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

**Sonuç 5.2.1.**  $(C(p), \overline{C}(\overline{p}))$ ,  $p$  ve  $\overline{p}$  özel parametresiyle verilmiş bir null Cartan eğri çifti olsun. Kabul edelim ki eğrilerin binormal yönlendirmesi eşit olsun ve  $g(\overline{C} - C, \xi)$  bir sabit olsun. Bu durumda  $C$  bir null kübiktir.

### 5.3 $R_1^4$ Minkowski Uzayda Null Helisler

$C(p)$ , bir null eğri ve  $p$  distinguished parametresiyle Frenet çatısı  $\{\xi, N, W_1, W_2\}$  düşünelim. Her null eğri çatısı bir null Cartan eğridir ve  $\sigma_1, \sigma_2$  cartan eğrilikleriyle Cartan denlemleri

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \xi &= W_1 \\ \nabla_\xi N &= \sigma_1 W_1 + \sigma_2 W_2 \\ \nabla_\xi W_1 &= -\sigma_1 \xi - N \\ \nabla_\xi W_2 &= -\sigma_2 \xi \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

dir. Sabit  $\sigma_1, \sigma_2$  eğriliklerine sahip null Cartan eğriler null helis olarak adlandırılır ve denklemleri ;

$$\begin{aligned} \sigma_2 \neq 0; \quad C(p) &= \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2}} \left( \frac{1}{a} \sinh ap, \frac{1}{a} \cosh ap, \frac{1}{b} \sin bp, \frac{1}{b} \cos bp \right) \\ a &= [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2} - \sigma_1]^{1/2} \quad b = [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2} + \sigma_1]^{1/2} \\ \sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 > 0 \quad C(p) &= b^{-2} (bp, \sin bp, 0, \cos bp), b = \sqrt{2\sigma_1} \\ \sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 < 0 \quad C(p) &= \frac{1}{a^2} (\sinh ap, \cosh bp, 0, ap), a = \sqrt{-\sigma_1} \end{aligned}$$

dir.

Şimdi,  $R_1^4$  de null helislerin karakterizasyonu için teoremler verilir ispatlanacaktır.

**Tanım 5.3.1.**  $(C, \bar{C})$ ,  $p$  ve  $\bar{p}$  distinguished parametresiyle bir null eğri çatı çifti olsun. Eğer asli normal vektör alanı lineer bağımlı ise bu çiftte bir Bertrand eğri çifti denir.

$\bar{C}$  eğrisi  $C$  nin Bertrand eşi olarak adlandırılır. yukarıdaki tanıma göre  $(C, \bar{C})$  bir null Bertrand eğri çifti için  $\bar{p} = \bar{p}(p)$  fonksiyonel ilişkisi vardır öyleki  $\bar{W}(\bar{p}(p)) = \epsilon W(p)$ ,  $\epsilon = \pm 1$  ,yani normal doğrular çakışıktır.

**Lemma 5.3.1.** Bertrand null eğri ve Bertrand eşine karşılık gelen noktalar arasındaki mesafe sabittir.

**İspat.**  $(C(p), \bar{C}(\bar{p}))$  bir null Bertrand eğri çifti ve Frenet çatıları sırasıyla  $\{\xi, N, W_1, W_2\}$  ve  $\{\bar{\xi}, \bar{N}, \bar{W}_1, \bar{W}_2\}$  olsun. O zaman normal doğrular çakıştığından dolayı

$$\bar{C} = C + \alpha W_1$$

her  $\alpha(p) \neq 0$  için yazabiliriz.  $p$  ye göre diferensiyel alırsak

$$\frac{d\bar{p}}{dp} \bar{\xi} = (1 - \alpha\tau)\xi - \alpha N + \alpha' W_1$$

elde edilir.

Null Bertrand eğriler için  $g(\bar{\xi}, W_1) = 0$  olduğunu biliyoruz ve bunu kullanarak  $\alpha' = 0$  böylece  $\alpha$  sabit bulunur. Dolayısıyla  $\| \bar{C} - C \|$  sabit elde edilir ve lemma ispatlanmış olur.  $\square$

**Teorem 5.3.1.**  $R_1^4$  de bir null Cartan eğri , null Bertrand eğridir gerek ve yeter şart  $\sigma_1 \neq 0$  sabit ve  $\sigma_2 = 0$  dır.

**İspat.** Kabul edelim ki,  $(C(p), \bar{C}(\bar{p}))$  bir null Bertrand eğri çifti olsun. O zaman, yukarıdaki lemmadan

$$\bar{C} = C + \alpha W \quad (5.3.2)$$

yazabiliriz , burada  $\alpha$  iki eğri arasındaki sabit mesafedir.

(5.3.2)  $p$  ye göre diferensiyeli alınarak

$$\frac{d\bar{p}}{dp} \bar{\xi} = (1 - \alpha\tau)\xi - \alpha N \quad (5.3.3)$$

elde edilir. Burada  $\bar{\xi}$  nin null olması  $\alpha(1 - \alpha\tau) = 0$  anlamına gelir. Bu durumda

$$(1 - \alpha\tau) = 0 \quad \text{ve} \quad \tau = \sigma_1 = \frac{1}{\alpha} = \text{sabit}$$

dir. Bu değer (5.3.3) de yerine yazılırsa

$$\bar{\xi} = -\left(\frac{d\bar{p}}{dp}\right)^{-1} \frac{1}{\sigma_1} N \quad (5.3.4)$$

olur. (5.3.4) in  $p$  ye göre diferensiyeli alınır ve (5.3.1) Cartan çatı denklemlerinde kullanılırsa

$$\frac{d\bar{p}}{dp} \bar{W} = -\left(\frac{d\bar{p}}{dp}\right)^{-1} W_1 + \left(\frac{d\bar{p}}{dp}\right)^{-2} \frac{d^2 \bar{p}}{dp^2} \frac{1}{\sigma_1} N - \left(\frac{d\bar{p}}{dp}\right)^{-1} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} W_2$$

elde edilir.

$$\bar{W} = \pm W \text{ olduğundan } \frac{d^2 \bar{p}}{dp^2} = 0 \text{ ve } \sigma_2 = 0 \text{ dır.}$$

Tersine;  $C, \sigma_1$  ve  $\sigma_2$  ile bir null cartan eğri olsun. Bu durumda ,  $\bar{C}$  yi koordinat fonksiyonuyla

$$\bar{C} = C + \frac{1}{\sigma_1} W \quad (5.3.5)$$

düşünebiliriz.  $p$  ye göre diferensiyel alırsak

$$\overline{C}' = -(\sigma_1)^{-1}N$$

bulunur. Bu da gösterir ki  $\overline{C}$  bir null eğridir. Üstelik  $\overline{C}, (\overline{C})'' = W_1$  den dolayı bir Cartan eğridir. Dolayısıyla  $C$  ve  $\overline{C}$  nün özel parametresi aynıdır ve  $C$  normal vektörü,  $\overline{C}$  normal vektörüyle aynı parametre değerine eşittir.  $\square$

**Uyarı 5.3.1.**  $R_1^4$  de sadece Bertrand null eğriler  $\sigma_2 = 0$  ile null helislerdir.

**Önerme 5.3.1.**  $R_1^4$  de bir null Cartan  $C$  eğrisi 3-boyutlu bir null helistir gerek ve yeter şart bir  $V$  sabit yönlendirmesi vardır. öyleki

$$g(\xi, V) = a \quad g(N, V) = b \quad (5.3.6)$$

dir. Burada  $a \neq 0, b \neq 0$  sabitlerdir ve  $\{\xi, N, W_1, W_2, W_3\}$   $C(p)$  nin Cartan çatılarıdır.

**İspat.** Kabul edelim ki ,  $V$  (5.3.6) ile sabit bir yönlendirme olsun.  $p$  ye göre (5.3.6) nin türevi alınarak

$$\sigma_1 = -\frac{b}{a} \text{ ve } \sigma_2 = 0$$

elde edilir.

Tersine , kabul edelim ki  $C$  bir null helis ve  $\sigma_2 = 0$  olsun. Bu durumda eğer,

$$V = \sigma_1 \xi - N$$

varsa  $V$  nin sabit bir yönlendirme olduğunu ve (5.3.6) nin iki denklemi arasındaki ilişki elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.  $\square$

## 5.4 $R_1^5$ de Null Helisler

$m = 3$  için (5.1.1) ve (5.1.13) Cartan denklemleri kullanılarak  $R_1^5$  de bir  $C(p)$  null helis denklemi

$$C^{(6)} + (2\sigma_1 + \sigma_3^2)C^{(4)} - (\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3^2)C''' = 0$$

dır. Burada  $\sigma_1, \sigma_2$  ve  $\sigma_3$  Cartan eğriliklerdir.

|                     |                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                   |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Problem1<br>(Type1) | $C_{(a,b,c)}(p) = (cp, A \sin ap, A \cos ap,$<br>$B \sin bp, B \cos bp)$                                                                                                                                                                                   | $\frac{1}{b^2} < c^2 < \frac{1}{a^2}$<br>$A = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{c^2 b^2 - 1}{b^2 - a^2}}$<br>$B = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{1 - c^2 a^2}{b^2 - a^2}}$<br>$a, b, c \neq 0$ | $\sigma_1 = \frac{1}{2} [b^2 + a^2(1 - b^2 c^2)]$<br>$\sigma_2^2 = -a^2 b^2 (a^2 c^2 - 1)(b^2 c^2 - 1)$<br>$\sigma_3^2 = (abc)^2$ |
| Problem2<br>(Type2) | $C_{(a,b,c)}(p) = (A \sinh ap, A \cosh ap,$<br>$B \sin bp, B \cos bp, cp)$                                                                                                                                                                                 | $0 < a^2 c^2 < 1$<br>$A = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1 + c^2 b^2}{a^2 + b^2}}$<br>$B = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{1 - c^2 a^2}{a^2 + b^2}}$<br>$a, b, c \neq 0$                     | $\sigma_1 = \frac{1}{2} [b^2 - a^2(1 + b^2 c^2)]$<br>$\sigma_2^2 = -a^2 b^2 (a^2 c^2 - 1)(b^2 c^2 + 1)$<br>$\sigma_3^2 = (abc)^2$ |
| Problem3<br>(Type3) | $C_{(a,b)}(p) = (\frac{3}{2}(\frac{1-2b^2}{(ab)^2})p + \frac{1}{6}b^2 p + p^3, \frac{b^2}{\sqrt{2}}p^2,$<br>$\frac{3}{2}(\frac{1-2b^2}{(ab)^2})p, -\frac{1}{6}b^2 p + p^3,$<br>$(\frac{\sqrt{1-2b^2}}{a^2}) \sin ap, (\frac{\sqrt{1-2b^2}}{a^2}) \cos ap)$ | $0 < 2b^2 < 1,$<br>$a, b \neq 0$                                                                                                                                              | $\sigma_1 = \frac{1}{2} a^2 (1 - 2b^2)$<br>$\sigma_2^2 = 2a^4 b^2 (1 - 2b^2)$<br>$\sigma_3^2 = 2a^2 b^2$                          |

Bu durumda yukarıdaki tabloda verilen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  Cartan eğrilikleriyle  $C(p)$  eğrisi bir helistir.

**Teorem 5.4.1.** ([11]):  $C(p)$ ,  $R_1^5$  de immersed bir eğri olsun. Bu durumda  $C$  bir helistir gerek ve yeter şart  $C$  Type1, Type2, Type3 ün bir helisine kongruenttir.

**İspat.** Kabul edelim ki  $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$  ve  $\sigma_3 \neq 0$   $C$  nin sabit eğrilikleri olsun Aşağıdaki üç durumu düşünelim:

**Durum 5.4.1.** Kabul edelim ki  $\alpha > \beta$   $\alpha = 2\sigma_1 + \sigma_3^2$  ,  $\beta = \sqrt{(2\sigma_1 - \sigma_3^2)^2 + 4\sigma_2^2}$  ve  $w = \frac{\sigma_2^2}{2\sigma_1\sigma_3^2 - \sigma_2^2}$  olsun .

Yani,  $2\sigma_1 + \sigma_3^2 > \sqrt{(2\sigma_1 - \sigma_3^2)^2 + 4\sigma_2^2}$  dir.

$C_{(a,b,c)}$  Type1 in helisi alınırsa

$$a^2 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad b^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad c^2 = w$$

ve  $\frac{1}{b^2} < c^2 < \frac{1}{a^2}$  ile  $C_{(a,b,c)}$  nin Cartan eğrilikleri  $\sigma_1, \sigma_2$  ve  $\sigma_3$  tür.

**Durum 5.4.2.** Kabul edelim ki ,  $\alpha < \beta$  ve  $C$  de Type 2 nin bir helisi olsun.

$$a^2 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \quad b^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad c^2 = w$$

ve  $0 < a^2 c^2 < 1$  durumunda ,  $C$  nin Cartan eğrilikleri  $\sigma_1, \sigma_2$  ve  $\sigma_3$  tür.

**Durum 5.4.3.** Son olarak eğer ,  $\alpha = \beta$  ise bu durumda  $C$  helisi

$$a^2 = \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^4}{\sigma_3^2} \quad b^2 = \frac{\sigma_3^4}{2(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)}$$

ve  $0 < 2b^2 < 1$  durumunda  $C$  nin Cartan eğrilikleri  $\sigma_1, \sigma_2$  ve  $\sigma_3$  tür.

Böylece ispat tamamlanır.

□

## 5.5 $S_1^4 \subset R_1^5$ De-Sitter Uzayda Null Helisler

(5.1.11) Cartan denklemlerinde  $m = 3$  alınarak  $S_1^4$  de  $C(p)$  nin bir null helis denklemini,

$$C^{(5)} + 2\sigma_1 C^{(3)} - (1 + \sigma_2^2)C' = 0$$

dır ve genel çözümü

$$C_{(a,b)}(p) = A_1 \sin hap + A_2 \cosh ap + A_3 \sin bp + A_4 \cos bp + A_5$$

dir. Burada  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ve  $A_5$   $R_1^5$  de sabit vektörlerdir.  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$  eğrilikler  $a$  ve  $b$  sıfırdan farklı sabitlerdir.

|          |                                                                                                                                                                                |                                |                                                              |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Problem4 | $C_{(a,b)}(p) = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}} (\frac{1}{a} \sinh ap, \frac{1}{a} \cosh ap, \frac{1}{b} \sin bp, \frac{1}{b} \cos bp, \sqrt{\frac{a^4-1}{a^2} + \frac{b^4-1}{b^2}})$ | $a^2 b^2 > 1$<br>$a, b \neq 0$ | $\sigma_1 = \frac{b^2-a^2}{2}$<br>$\sigma_2^2 = a^2 b^2 - 1$ |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------------------------|

$\sigma_1, \sigma_2$  Cartan eğrilikleriyle  $C(p)$  eğrisi bir helistir.

**Teorem 5.5.1.** ([11])  $C(p)$  ,  $S_1^4$  te immersed bir null eğri olsun. Bu durumda  $C$ , problem 4 te tanımlanan helislerden birine kongruenttir.

**İspat.**  $a = \sqrt{\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 1}}$  ve  $b = \sqrt{-\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 1}}$  sabitlerini düşünelim. Bu durumda (5.1.11) den  $C$  eğrisinin problem 4 teki  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$  eğriliklerine sahiptir. Yani  $C$  eğrisinden problem 4 te bulunan helislerden birine kongruent Lorentzian dönüşüm vardır.

□

## 5.6 $H_1^4 \subset R_1^5$ anti De-Sitter Uzayda Null Helisler

Benzer şekilde  $m = 3$  için (5.1.11) Cartan denklemleri kullanılarak ve C yerine  $-C$  alınarak  $H_1^4$  de null helis denklemi

$$C^{(5)} + 2\sigma_1 C^{(3)} + (1 - \sigma_2^2)C' = 0$$

|                                    |                                                                                                                                                                                          |                                                                                         |                                                                    |
|------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Problem5<br>(TypeA <sub>1</sub> )  | $C_a(p) = (\frac{p}{2a} \cosh ap, \frac{1}{a^2} (\cosh ap - \frac{1}{2} \sinh ap), \frac{1}{a^2} (\sinh ap - \frac{1}{2} ap \cosh ap), \frac{p}{2a} \sinh ap, \frac{\sqrt{1-a^4}}{a^2})$ | $0 < a^2 < 1$                                                                           | $\sigma_1 = -a^2,$<br>$\sigma_2^2 = 1 - a^4$                       |
| Problem6<br>(TypeA <sub>2</sub> )  | $C_b(p) = (\frac{1}{b^2} (\sin bp - \frac{1}{2} bp \cos bp), \frac{1}{b^2} (\cos bp + \frac{1}{2} \sin bp), -\frac{p}{2b} \cos b, \frac{p}{2b} \sin bp, \frac{\sqrt{1-b^4}}{b^2})$       | $0 < b^2 < 1$                                                                           | $\sigma_1 = b^2,$<br>$\sigma_2^2 = 1 - b^4$                        |
| Problem7<br>(TypeA <sub>3</sub> )  | $C_a(p) = (1 - \frac{p^4}{24}, \frac{a(p^3+p)}{2\sqrt{3}}, \frac{p^4}{24}, \frac{a(p^3-p)}{2\sqrt{3}}, \frac{p^2}{2})$                                                                   | $a^2 = 1$                                                                               | $\sigma_1 = 0,$<br>$\sigma_2^2 = 1$                                |
| Problem8<br>(TypeB <sub>1</sub> )  | $C_{(a,b)}(p) = \sqrt{\frac{1}{b^2-a^2}} (\frac{1}{a} \sin ap, \frac{1}{a} \cos ap, \frac{1}{b} \sin bp, \frac{1}{b} \cos bp, c)$                                                        | $0 < a^2 < b^2,$<br>$a^2 b^2 < 1$<br>$c = \sqrt{\frac{1+a^4}{a^2} - \frac{1+b^4}{b^2}}$ | $\sigma_1 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$<br>$\sigma_2^2 = 1 - a^2 b^2$  |
| Problem9<br>(TypeB <sub>2</sub> )  | $C_{(a,b)}(p) = \sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}} (\frac{1}{a} \sinh ap, \frac{1}{b} \cosh bp, \frac{1}{b} \sinh bp, \frac{1}{b} \cosh ap, d)$                                                    | $0 < b^2 < a^2,$<br>$a^2 b^2 < 1$<br>$d = \sqrt{\frac{1+b^4}{b^2} - \frac{1+a^4}{a^2}}$ | $\sigma_1 = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$<br>$\sigma_2^2 = 1 - a^2 b^2$ |
| Problem10<br>(TypeB <sub>3</sub> ) | $C_a(p) = (\frac{2+2a^4+a^2 p^2}{2a^2 \sqrt{1+a^4}}, \frac{p}{a}, \frac{p^2}{2\sqrt{1+a^4}}, \frac{1}{a^2} \sin ap, \frac{1}{a^2} \cos ap)$                                              | $a \neq 0$                                                                              | $\sigma_1 = \frac{a^2}{2}, \sigma_2^2 = 1$                         |
| Problem11<br>(TypeB <sub>4</sub> ) | $C_b(p) = (\frac{2+2b^4+b^2 p^2}{2b^2 \sqrt{1+b^4}}, \frac{1}{b^2} \sinh bp, \frac{1}{b^2} \cosh bp, \frac{p^2}{2\sqrt{1+b^4}}, \frac{p}{b})$                                            | $b \neq 0$                                                                              | $\sigma_1 = -\frac{b^2}{2}, \sigma_2^2 = 1$                        |
| Problem12<br>(TypeB <sub>5</sub> ) | $C_{(a,b)}(p) = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}} (c, \frac{1}{a} \sinh ap, \frac{1}{a} \cosh ap, \frac{1}{b} \sin bp, \frac{1}{b} \cos bp, c)$                                                   | $ab \neq 0,$<br>$c = \sqrt{\frac{1+a^4}{a^2} + \frac{1+b^4}{b^2}}$                      | $\sigma_1 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$<br>$\sigma_2^2 = 1 + a^2 b^2$  |
| Problem13<br>(TypeD)               | $C_{(a,b)}(p) = \frac{1}{2abc} (2ab \cosh ab \sin bp + d \sinh ap \cos ap, -2ap \cosh ap \cos bp + d \sinh ap \sin bp, c \sinh ap \cos bp, c \sinh ap \sin bp, 2ab\sqrt{1-c^2})$         | $a^2 + b^2 < 1$<br>$c = a^2 + b^2$<br>$d = a^2 - b^2$                                   | $\sigma_1 = b^2 - a^2,$<br>$\sigma_2^2 = 1 - (a^2 + b^2)$          |

$\sigma_1, \sigma_2$  Cartan eğrilikleriyle C(p) eğrisi bir helistir.

**Teorem 5.6.1.** ([11])  $C(p), H_1^4$  de immersed bir null eğri olsun. Bu durumda C bir helistir gerek ve yeter şart 5–13 problemlerinin içindeki bir helise kongruenttir.

**İspat.** Önceki durumlar göz önüne alınarak ispat yapılır. Yani 9 ihtimal düşünülürse

|                    |                                                                                                                                                        |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| TypeA <sub>1</sub> | $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1 \quad \sigma_1 < 0 \quad , 0 < \sigma_2^2 < 1 \quad , a^2 = -\sigma_1$                                                    |
| TypeA <sub>2</sub> | $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1 \quad \sigma_1 > 0 \quad , 0 < \sigma_2^2 < 1 \quad , b^2 = \sigma_1$                                                     |
| TypeA <sub>3</sub> | $\sigma_1 = 0 \quad , \sigma_2^2 = 1$                                                                                                                  |
| TypeB <sub>1</sub> | $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 1 \quad \sigma_1 > 0 \quad , 0 < \sigma_2^2 < 1 \quad , a^2 = \sigma_1 - c, \quad b^2 = \sigma_1 + c$                       |
| TypeB <sub>2</sub> | $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 1 \quad \sigma_1 < 0 \quad , 0 < \sigma_2^2 < 1 \quad , a^2 = -\sigma_1 - c, \quad b^2 = -\sigma_1 - c$                     |
| TypeB <sub>3</sub> | $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 1 \quad \sigma_1 > 0 \quad , \sigma_2^2 = 1 \quad , b^2 = 2\sigma_1$                                                        |
| TypeB <sub>4</sub> | $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 1 \quad \sigma_1 < 0 \quad , \sigma_2^2 = 1 \quad , a^2 = -2\sigma_1$                                                       |
| TypeB <sub>5</sub> | $\sigma_2^2 > 1 \quad , a^2 = -\sigma_1 + c \quad , b^2 = \sigma_1 + c$                                                                                |
| TypeD              | $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 < 1 \quad , a^2 = \frac{1}{2}(-\sigma_1 + \sqrt{1 - \sigma_2^2}) \quad , b^2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sqrt{1 - \sigma_2^2})$ |

dir. Burada  $c = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 1}$  dir.

□

## 6. NULL CARTAN EĞRİLERİN UYGULAMALARI

### 6.1 3-boyutlu Lorentzian Uzay Formlarda Soliton Çözümler

İlk olarak  $s$  bir yay uzunluğu parametresi ve  $\gamma(s) \subset R^3$  spacelike eğri ile başlayacağız.  $\gamma$  boyunca Frenet çatısı  $\{\gamma' = T, N, B, \kappa, \tau\}$  ile  $\gamma(s)$  nin değişimi  $\gamma(s, t)$  olsun. Burada  $\kappa$  ve  $\tau$  sırasıyla eğrilik ve burulmadır.

$\dot{\gamma}$  ile verilen hız vektörü

$$\dot{\gamma} = \nu = \nu_T T + \nu_N N + \nu_B B$$

olsun. Burada  $\dot{\gamma}$ ,  $t$  ye ve  $s$  ye göre kısmi türevlerdir. Bu esas denklem  $\dot{\nu}_N$ ,  $\dot{\kappa}$  ve  $\dot{\tau}$  ye göre verilmiştir.

Bu spacelike eğrinin değişimi, akışkanlar mekaniğinde vortex filamentler gibi fiziksel sistemlerin çalışmalarında anahtar role sahiptir. Bu çalışmalar soliton teorisinin, matematik ve fizik üzerinde önemli etkileri olmuştur.

$\gamma$  vortex hattı ile ince filamenti tanımlamak için, öz etkileşimden arınmış ve pürüzsüz  $\gamma$  nın uç noktalarında hız; lokalize indüksiyon yaklaşımı (LIA) olarak bilinen,  $\nu$  binormal vektörü boyunca

$$\nu_T = \nu_N = 0 \quad \text{ve} \quad \nu_B = \kappa \quad \text{ise} \quad \nu = \kappa B$$

denklemleri kullanılarak Da-Rios tarafından elde edilir. Böylece yapısal denklem (LIA altında)

$$\dot{\nu}_N = 0 \quad \dot{\kappa} = -\kappa\tau' - 2\kappa'\tau \quad \dot{\tau} = (\kappa''/\kappa - \tau^2)' + \kappa\kappa'$$

dir.

Bir ince vortexin hareketi (LIA altında)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial s} \tag{6.1.1}$$

denklemleri tarafından yönetilir ve bu denklem **Betchov-Da Rios** denklemleri olarak adlandırılır. Burada  $\nabla$ , Levi-Civita konneksiyondur.

Betchov-Da Rios denklemlerinin açık klasik çözümleri  $R_1^3$  de regle yüzeylere yerleştirilmiştir ve  $H_1^3$  anti De-Sitter uzayında Betchov-Da Rios denklemlerinin regle yüzeylerine oturtulmuş çözümleri bulunmuştur.

İlk uygulamamızın amacı, bir null eğri için Betchov-Da Rios denklemlerinin soliton çözümleri üzerinde bazı çalışmaları sunmaktır.

$C(p)$ , Lorentzian space formda  $(M = M_1^3(c), g)$  bir null eğri olsun.  $c$  sabit eğrilik  $p$  özel parametre olmak üzere Frenet çatısını  $\{\xi = C', N, W\}$  düşünelim. Fiziksel uygulamadaki notasyonların tutarlı olması için  $-N = B$  alınır. Yani

$$g(\xi, B) = -1 \quad g(W, W) = 1$$

ve diğer iç çarpımlar sıfır olmak üzere Frenet denklemleri

$$\nabla_\xi \xi = \kappa W$$

$$\nabla_\xi B = \tau W$$

$$\nabla_\xi W = \tau \xi + \kappa B$$

dir.  $\kappa = \kappa(p) \neq 0$   $\kappa$ ,  $C$  boyunca eğrilik fonksiyondur ve  $\tau$  bir sabittir.

Eğer  $B$  transversal vektör alanı  $C$  boyunca hareket ettirilirse  $I \times R$  parametrelendirmesi tarafından regle yüzeyleri verir. Burada,

$$f : I \times R \rightarrow M$$

$$(p, t) \rightarrow f(p, t) = C(p) + tB(p) = \text{Exp}_{C(p)}(tB(p))$$

tarafından tanımlanır.

Bu regle yüzey,  $C(s)$  null eğri üzerinde  $B$  nin kaydırılmasıyla oluştuğu bilinir ve bu ilk olarak Graves tarafından tanıtılır ve  $S_c$  ile gösterilir. Bu durumda

$$f_p = (d(\text{Exp}_C))_{tB}(\xi + t\tau W)$$

$$f_t = (d(\text{Exp}_C))_{tB}B$$

dir.

Her sabit  $p$  için ,  $\gamma_p(t)$  eğrisi

$$t \rightarrow \gamma_p(t) = f(p, t)$$

tarafından tanımlanır ve bu eğri  $\gamma_p(0) = C(p)$  başlangıç şartıyla belirlenen  $M$  nin bir geodeziğidir ve  $\gamma_p'(0) = B(p)$  dir. Çünkü  $f(p)$ ,  $\gamma_p(t)$  boyunca bir Jacobi alandır ve  $M$  bir space formdur. Böylece

$$f_p = \xi_p(t) + t\tau W_p(t)$$

yazabiliriz, burada  $\xi_p(t)$  ,  $\gamma_p(t)$  boyunca  $\xi(p)$  nin paralel dönüşümüdür.

$n = f_p \wedge f_t$  ,  $S_c$  de birim normal vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\nabla_{f_p} f_p = \tau^2 t f_p + \tau^4 t^3 f_t + (\kappa + \tau^3 t^2) n$$

$$\nabla_{f_p} f_t = \nabla_{f_t} f_p = -\tau^2 t f_t + \tau n$$

elde edilir.

(6.1.1) Betchov-Da Rios denklemlerinin çözümü olan  $f$  nin yeniden parametrelendirilmesi için

$$h \in F(R^2) \quad \text{ve} \quad h(u, v) = (p(u, v), t(u, v))$$

olsun.

Bu durumda  $\bar{f} = f \circ h$  (6.1.1) denklemlerinin bir çözümüdür gerek ve yeter şart

$$\bar{f}_u \wedge \nabla_{\bar{f}_u} \bar{f}_u = \bar{f}_v$$

ve  $g(\bar{f}_u, \bar{f}_u) = \epsilon = \pm 1$  dir.

$$\bar{f}_u = p_u f_p + t_u f_t$$

$$\bar{f}_v = p_v f_p + t_v f_t$$

kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{f}_u} \bar{f}_u &= p_{uu} f_p + t_{uu} f_t + 2p_u t_u \nabla_{f_p} f_t + p_u^2 \nabla_{f_p} f_p \\ &= (p_{uu} + \tau^2 t p_u^2) f_p + (t_{uu} + 2\tau^2 t p_u t_u + \tau^4 t^3 p_u^2) f_t + (2\tau p_u t_u + (\kappa + \tau^3 t^2) p_u^2) n \end{aligned}$$

elde edilir.

$f_p \wedge n = f_p + \tau^2 t^2 f_t$  ve  $f_t \wedge n = -f_t$  den , $\bar{f}$  Betchov-Da Rios denklemlerinin bir çözümüdür gerek ve yeter şart

$$\tau\left(\frac{t_u}{p_u} - \frac{t_v}{p_v}\right) = \frac{p_v}{p_u^3} + \kappa \quad , \quad \frac{t_u}{p_u} - \frac{t_v}{p_v} = \tau^2 t^2 \quad , \quad \left(\frac{t_v}{p_v}\right)_u = \tau^2 t p_u \frac{t_v}{p_v}$$

kısmi diferensiyel denklem sisteminin elde edilmesidir.

Şimdi  $C$  genelleştirilmiş bir null kübik olsun ki bu durumda biliyoruz ki  $\tau = 0$  dır. Bu durumda yukarıdaki denklemler tekrar düzenlenirse

$$p_v = -\kappa p_u^3$$

$$0 = p_v t_u - p_u t_v$$

$$t_v = -\kappa p_u^2 t_u$$

olur.

Bazı  $b = b(v)$  fonksiyonları için  $t_u = b p_u$  dur ki  $u$ -eğrisinin eğim ölçümüdür. Diğer taraftan ,  $g(\bar{f}_u, \bar{f}_u) = -2p_u t_u = \epsilon$  olduğundan  $2b p_u^2 = -\epsilon$  elde ederiz. Bu yüzden,  $p_u$  sadece  $v$  ye bağlıdır böylece,

$$p(u, v) = h_1(v)u + h_2(v)$$

dir. Burda  $h_1$  ve  $h_2$  diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Özel olarak  $p_{uu} = t_{uu} = 0$  alınırsa

$$\nabla_{\bar{f}} \bar{f} = \kappa p_u^2 n$$

dir.

Yukarıdaki durumlar ve  $p_{uu} = t_{uu}$  ve  $t_{uv} = t_{vu}$  iki şart kullanılırsa  $p_u = a$  ve  $t_u = ab$  olur.  $a$  ve  $b$   $2ba^2 = -\epsilon$  ile ilişkili bazı sabitlerdir. Üstelik,  $\kappa$  aynı zamanda sabittir ve  $u$ -eğrileri B-scroll  $S_c$  de geodeziklerdir ve  $M$  deki eğrilikler  $\rho = \kappa a^2$  dir. Diğer taraftan ,  $(1/\rho)\bar{f}_v$  vektör alanı  $u$ -eğrisinin binormalidir.

$$\theta = -bg(\nabla_{\bar{f}_u} n, \frac{1}{\rho}\bar{f}_v) = \epsilon\rho$$

ile verilen ise  $M$  de  $u$ -eğrisinin torsiyonudur.

**Teorem 6.1.1.** ([12]):  $C(p)$ , 3-boyutlu  $M$  Lorentzian space formda genelleştirilmiş bir null kübik olsun.  $S_c$ ,  $f(p, t)$  tarafından parametrelendirilmiş  $B$ -scroll olsun

Her  $h \in F(R^2)$  için  $\bar{f} = f \circ h : R^2 \rightarrow S_c$  düşünelim. Bu durumda  $\bar{f}$ ,  $M$  de Betchov-Da Rios denklemlerinin bir çözümüdür gerek ve yeter şart

(1)  $C$  boyunca  $\kappa$  eğrilik fonksiyonu sabittir.

(2)  $h(u, v) = (p(u, v), t(u, v))$

$$p(u, v) = au + \kappa a^3 v + c_1, \quad t(u, v) = abu - \kappa b a^3 v + c_2$$

tarafından verilir. Burada  $2ba^2 = -\epsilon = \pm 1$   $u$ -eğrisinin causal karakteridir.  $a$  ve  $b$  sıfırdan farklı sabitlerdir ve  $(c_1, c_2)$  sabit çiftlerdir. Üstelik, bu  $u$ - eğrisi

$$\rho = \kappa a^2 \quad \text{ve} \quad \theta = \epsilon \kappa a^2$$

eğrilik ve torsiyon ile  $M$  de helistir.

**Örnek 6.1.1.**  $C(p) = \kappa(\frac{p^3}{3} - \frac{p}{4}, \frac{p^2}{2}, \frac{p^3}{3} + \frac{p}{4})$ ,  $\kappa \neq 0$

ile verilen  $R_1^3$  de bir null eğridir.

$C$  nin

$$\xi = \kappa(p^2 - \frac{1}{4}, p, p^2 + \frac{1}{4}) \quad B = \frac{2}{\kappa}(1, 0, 1) \quad W = (2p, 1, 2p)$$

ile verilen  $\{\xi, B, W\}$  Cartan çatısı ve  $\kappa$  sabit eğrilikle, genelleştirilmiş bir null kübiktir.

$B$ -scroll  $S_c$ ,  $C$  ile ilişkilidir ve

$$f(p, t) = (\kappa(\frac{p^3}{3} - \frac{p}{4}) + \frac{2t}{\kappa}, \kappa \frac{p^2}{2}, \kappa(\frac{p^3}{3} + \frac{p}{4}) + \frac{2t}{\kappa})$$

$R_1^3$  ün  $B$ -scroll  $S_c$  de Betchov-Da Rios denklemlerinin soliton çözümleri,

$$\bar{f}(u, v) = (\bar{f}_1(u, v), \bar{f}_2(u, v), \bar{f}_3(u, v))$$

ile verilir. Burada

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \kappa \left( \frac{a^3(u + a^2\kappa v)^3}{3} - \frac{a(u + a^2\kappa v)^3}{4} \right) - \frac{\epsilon(u - a^2\kappa v)^3}{a\kappa} \\ \bar{f}_2 &= \frac{a^2\kappa(u + a^2\kappa v)^2}{2} \\ \bar{f}_3 &= \kappa \left( \frac{a^3(u + a^2\kappa v)^3}{3} + \frac{a(u + a^2\kappa v)^3}{4} \right) - \frac{\epsilon(u - a^2\kappa v)^3}{a\kappa} \end{aligned}$$

ve  $a$  sıfırdan farklı sabitlerdir.  $u$ -eğrisi  $R_1^3$  de  $\epsilon = \pm 1$  causal karakter  $\rho = \kappa a^2$  eğriliği ve  $\theta = \epsilon \kappa a^2$  torsiyon ile bir helistir.

## 7. KAYNAKLAR

- [1] BARRET O'NEILL-Semi Riemanian Geometry (Department of Mathematics University of California Los Angeles ,California)
- [2] KRISHAN L. DUGGAL and AUREL BAJANCU -Lightlike Submanifolds of Semi Riemanian Manifolds and Application (University of Windsor, Orrtario Canada and Polytechnic Institute of Lası)
- [3] BAYRAM ŞAHİN, Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Yayınevi, 2012.
- [4] K.L.DUGGAL and BAYRAM ŞAHİN, Differential Geometry of Lightlike Submanifolds,Birkhauser Verlag AG,Basel,Boston,Berlin,2010
- [5] KRISHAN L. DUGGAL and DAE HO JIN -Null curves and Hypersurfaces of Semi Riemanian Manifolds(University of Windsor , Canada and Dongguk University , Korea)
- [6] HAWKING S.W. and ELLİS, G.F.R. - The large scale structure of spacetime Cambridge University Press, 1973
- [7] L.P.EISENHART A treatise on differential geometry of curves and surfaces ,Ginn and Company ,1909
- [8] INOBUCHI,J. and LEE,S.Null curves in Minkowski 3-spacetime,2006
- [9] GUGGENHEIMER ,H. W. Differential geometry ,General publishing com. 1997
- [10] HONDA ,K. and INOBUCHI,J Deformation of Cartan framed null curves preserving the torsion , Differ. Geom. .Dyn. Syst.5,2003
- [11] FERRANDEZ A.GIMENEZ and LUCAS P. Null helices in lorentzian space forms, Int.J.Mod. Phys. A16,2001,4845-4863
- [12] BARROS,M.FERRANDEZ, A.LUCAS,P.and MERONO,M.A.Solitons of the Betchov-Da Rios soliton equation: a Lorentzian approach ,J. Geom. Phsy.,31,1999,217-228

## ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad:** Eda YÜCEL

**Doğum Yeri ve Tarihi:** Malatya - 15/01/1989

**Adres:** Halep Cad. Aslanbey Mah. Şehit Yusuf Kamacı Sok., No: 3/4  
Battalgazi / Malatya

**E-Posta:** edayucel1989@gmail.com

**Lisans:** İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü