

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



NULL EĞRİLERİ İÇİN YENİ TİP HELİSLER

Yusuf KAÇAR

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2021

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

NULL EĞRİLERİ İÇİN YENİ TİP HELİSLER

Tez Yazarı
Yusuf KAÇAR

Danışman
Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

MAYIS 2021
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Null Eğrileri için Yeni Tip Helisler

Yazarı: Yusuf KAÇAR

İlk Teslim Tarihi: 21.04.2021

Savunma Tarihi: 21.05.2021

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Onayladım

Başkan: Doç. Dr. Gülden ALTAY SUROĞLU
Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi

Onayladım

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Fatma BULUT
Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

Doç. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Null Eğrileri İçin Yeni Tip Helisler” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

21.05.2021

Yusuf KAÇAR



ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanma sürecince düşünceleri ve önerileriyle bana yol gösteren, çalışmam boyunca benden yardımını esirgemeyen elinden gelen her türlü desteği sağlayan saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Yusuf KAÇAR
ELAZIĞ, 2021



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1. Yarı-Öklid Uzaylar	2
2.2. Null Eğrileri.....	6
3. MİNKOWSKI SPACETIME’DA NULL EĞRİLERİ.....	9
4. t PARAMETRELİ NULL EĞRİLERİ İÇİN (k, m)–TİPİNDEN HELİSLER	13
5. s PARAMETRELİ NULL EĞRİLERİ İÇİN (k, m) - TİPİNDEN HELİSLER	20
KAYNAKLAR	27
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Null Eğrileri için Yeni Tip Helisler

Yusuf KAÇAR

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs 2021, Sayfa: vii+27

Bu çalışmada null eğiler üzerinde çalışılmıştır.

Özellikle distinguished (özel seçilmiş) bir t parametresi ile oluşturulan distinguished Frenet çatısı ve bir s pseude-yay parametrelili null eğrinin Frenet çatısı tanımları verildi.

Daha sonra distinguished Frenet çatısı ve s pseude-yay parametrelili Frenet çatısının (k,m) -tipinden helis olması için önemli karakterizasyonlar verildi.

Anahtar Kelimeler: distinguished Frenet çatısı, pseude-yay parametrelili Frenet çatısı, (k,m) -tipinden helis

ABSTRACT

New Type of Helixes for Null Curves

Yusuf KAÇAR

Master Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

May 2021, Pages: vii +27

In the working, null Curves are studied.

In particular, the definitions of the distinguished Frenet frame created with a distinguished parameter and the Frenet frame of a null curve with a pseudo-arc parameter are granted.

Subsequently, important characterizations are given for the distinguished Frenet frame and the frenet frame with pseudo-arc parameters to be helical from (k, m) - type.

Keywords: distinguished Frenet frame, pseudo-arc parameter Frenet frame, (k, m) - type helical

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri temelde eğriler ve manifoldlar teorisinin çalışıldığı bir alandır. Özellikle eğriler teorisi birçok bilim dalında uygulama alanı bulduğu için gerek matematikçiler gerekse biyolog, fizik ve hatta mühendis ve tıpın bazı alanlarında çalışılan önemli bir alana dönüşmüştür. Her geçen gün üzerinde gerek uygulama ve gerekse yeni teoriler inşa edilmektedir.

Geometriciler genellikle teorik kısmıyla ilgilenip Bertrand eğriler, involüt-evolüt eğriler, helisler ve çeşitli karakterizasyonlarını inşa etmekle çalışmalarına devam etmektedirler. Bu ve benzeri konuları çeşitli uzaylarda, örneğin Öklid uzayında Lorentz-Minkowski uzayında, Semi-Öklidyen uzayda ifade ve ispat etmeye çalışmaktadırlar. Özellikle Lorentz-Minkowski ve Semi-Öklidyen uzayında eğriler teorisi, eğrilerin spacelike, timelike ve null şeklinde sınıflandırılmasında kaynaklanan ayrımın getirdiği farklılıklar çok ilginç sonuçları doğurmuştur.

Lorentz-Minkowski ve Semi-Öklidyen uzayda Spacelike ve timelike eğrilerinin Frenet vektörlerinin inşası sonrası Bertrand eğri, involüt-evolüt eğri Bishop çatı vb. konular üzerine [4, 10, 14, 16, 18, 20] çalışmaları oldukça dikkat çekici sonuçlar vermiştir.

Oysa time-like ve spacelike eğrilerden daha farklı olan ve yapılan çalışmalarda bazı zorlukları da üzerinde barındıran null eğrilerinin üzerinde inşa edilen geometrik yapılar ve Frenet vektörlerinin inşası tamamıyla farklı kapıları açarak çok geniş bir platformda çalışmalara imkân tanımıştır. Elbette null eğrilerinin Frenet çatısında sonra bu uzayda da null helisler [2, 3, 6, 9, 11, 15] Bertrand eğriler, involüt-evolüt eğriler kavramları ifade ve ispat edilmiştir. Yine en ilginç ve en çok farklı null eğrileri bulunduran 4-boyutlu Minkowski Uzayında çok önemli teoriler ispatlanmıştır. [1, 8, 13, 19] Çünkü 4-boyutlu Minkowski Uzayında Cartan null çatı, Pseudo null çatı ve Partially null çatılar ifade edilmiş bunlarda herbiri kendine has geometrik yapıları içerdiğinden geniş bir perspektifte olayların incelenmesine imkân tanımıştır.

Bu tez çalışmamızda yukarıda bahsettiğimiz null eğrilerinin çeşitlerinden olan distinguished null eğriler ve Pseudo yay parametresi ile ifade edilen null eğrilerin (k, m) -tipinde helislerinin yapılarını inceleyeceğiz.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Temel kavramlara ayrılan bu bölümde çalışmamıza esas olacak kavramlar verilecektir.

2.1. Yarı-Öklid Uzaylar

Tanım 2.1.1. (Simetrik Bilineer Form). V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow R$$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

- i.) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- ii.) $\langle au + bv + w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$
 $\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle, \rangle$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form denir [17].

Tanım 2.1.2 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form $\langle, \rangle$ olsun.

- i.) $\forall v \in V$ ve $u \neq 0$ için $\langle u, v \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ a pozitif tanımlı,
- ii.) $\forall v \in V$ ve $u \neq 0$ için $\langle u, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ a negatif tanımlı,
- iii.) $\langle v, v \rangle > 0$ ve $\langle w, w \rangle < 0$ olacak şekilde $u, w \in V$ mevcut ise $\langle, \rangle$ indefinit denir [17].

Tanım 2.1.3. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form $\langle, \rangle$ olsun.

$0 \neq \xi \in V$ olmak üzere $\forall v \in V$ için

$$\langle \xi, v \rangle = 0$$

ise $\langle, \rangle$ 'a V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda $\langle, \rangle$ 'a non-dejeneredir denir.

Bu tanıma göre $\langle, \rangle$ 'a non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ iken } u = 0$$

olmasıdır [17].

Tanım 2.1.4. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form $\langle, \rangle$ olsun. V 'nin

$$RadV = \{\xi \in V : \langle \xi, v \rangle = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına $\langle, \rangle$ 'a göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir. $RadV$ 'nin boyutuna $\langle, \rangle$ 'nin nullluk derecesi denir ve $nullV$ ile gösterilir.

Eğer $\text{null}V > 0$ ise $\langle, \rangle$ dejeneredir, eğer $\text{null}V = 0$ ise $\langle, \rangle$ non-dejeneredir [17].

Tanım 2.1.5. (indeks) V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form $\langle, \rangle$ olsun.

$W \subset V$ olmak üzere

$$\langle, \rangle|_W: W \times W \rightarrow R$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle, \rangle$ 'nin indeksi denir ve q ile gösterilir [17].

Teorem 2.1.1 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form $\langle, \rangle$ olsun. Bu durumda,

- i) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0, i \neq j$
- ii) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 1, 1 \leq i \leq \gamma$
- iii) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -1, \gamma + 1 \leq i \leq \gamma + q$
- iv) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0, \gamma + q + 1 \leq i \leq \gamma + q + \mu = n$

olacak şekilde V 'nin bir $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ bazı vardır [12,21].

Tanım 2.1.6 Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejener simetrik bilinear $\langle, \rangle$ formuna, V reel vektör uzayı üzerinde bir skaler çarpım (yarı Öklid metriği) ve $(V, \langle, \rangle)$ ikilisine de skaler çarpım uzayı (yarı-Öklid uzayı) denir [12,17,21].

Tanım 2.1.7. V yarı-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir $\langle, \rangle$ skalar çarpımı için,

- i) $\langle, \rangle$ pozitif tanımlı ise $\langle, \rangle$ 'a Öklid metriği, $(V, \langle, \rangle)$ 'a da Öklid uzayı,
- ii) $\langle, \rangle$ 'nin indeksi $q = 1$ ise $\langle, \rangle$ 'a Lorentz (Minkowski) metriği, $(V, \langle, \rangle)$ 'da Lorentz (Minkowski) uzayı,
- iii) $\langle, \rangle$ dejenere ise V vektör uzayına $\langle, \rangle$ 'a göre lightlike (dejenere) vektör uzayı denir [17].

Tanım 2.1.8. V yarı-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir $\langle, \rangle$ skalar çarpımı için,

- i) $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise v 'ye spacelike,
 - ii) $v \neq 0$ iken $\langle v, v \rangle < 0$ ise v 'ye timelike,
 - iii) $v \neq 0$ iken $\langle v, v \rangle = 0$ ise v 'ye de lighlike (null veya isotropik) vektör denir.
- $v \in V$ vektörünün bu üç tipine v 'nin causal karakteri denir [17].

Tanım 2.1.9. Bir V reel vektör uzayı ve $W \subset V$ de bir alt uzayı olsun. Bu durumda $\langle, \rangle|_W$, dejenere ise W 'ye lightlike (dejenere) alt uzayı denir.

Genel olarak W 'nin diki

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$$

olmak üzere,

$$W \cap W^\perp \neq \{0\}$$

dır [17].

Tanım 2.1.10. V yarı-Öklid uzayının;

$$\begin{aligned} \langle f_i, f_j \rangle &= \langle f_i^*, f_j^* \rangle = 0, \langle f_i, f_j^* \rangle = \delta_{ij}, & i, j &\in \{1, \dots, \mu\} \\ \langle u_\alpha, f_j \rangle &= \langle u_\alpha, f_i^* \rangle = 0, \langle u_\alpha, u_\beta \rangle = \epsilon \delta_{\alpha\beta}, & \alpha, \beta &\in \{1, \dots, t\}, \epsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

olacak şekildeki

$$\{f_1, \dots, f_\mu, f_1^*, \dots, f_\mu^*, u_1, \dots, u_t\}$$

bazına V 'nin quasi-ortonormal bazı denir [7, 12, 21].

Teorem 2.1.2. V yarı-Öklid uzayı ve W da bu uzayın bir lightlike alt uzayı olsun. Bu durumda, W boyunca V uzayının bir quasi-ortonormal bazı vardır [7, 12, 21].

Tanım 2.1.11. q indeksli ve $m = p + q$ boyutlu V yarı-Öklid uzayının $\{e_1, \dots, e_q\}$ birim timelike ve $\{e_{q+1}, \dots, e_{q+p}\}$ birim spacelike vektörlerinden oluşan $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ bir ortonormal bazı ile;

$$q < p \Rightarrow i \in \{1, \dots, q\} \text{ ve } p < q \Rightarrow i \in \{1, \dots, p\}$$

için

$$\langle f_i, f_j \rangle = \langle f_i^*, f_j^* \rangle = 0, \langle f_i, f_j^* \rangle = \delta_{ij}$$

yi sağlayacak şekilde oluşturulan

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\}; \quad f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\}$$

vektörleri yardımıyla light like vektörleri kapsayan V yarı-Öklid uzayının aşağıdaki bazıları mevcuttur.

i) $q < p$ ise $2q$ tane lightlike vektör ve $(p - q)$ tane spacelike vektörlerden oluşan

$$\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*, e_{q+1}, \dots, e_p\}$$

kümesi,

ii) $p < q$ ise $2p$ tane lightlike vektör ve $(q - p)$ tane timelike vektörlerden oluşan

$$\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_p^*, e_{p+1}, \dots, e_q\}$$

kümesi,

iii) $p = q$ ise $2p = 2q$ adet lightlike vektörlerden oluşan

$$\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_p^*\}$$

kümesi V 'nin bir bazıdır [7,12,21].

Tanım 2.1.12 (Yarı-Öklid uzay). $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ üzerinde n -boyutlu standart vektör uzayı olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $0 \leq q \leq n$ olmak üzere q tam sayısı için

$$\langle x, y \rangle = -\sum_{i=1}^q x_i y_i + \sum_{i=q+1}^n x_i y_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınarak elde edilen uzaya q indeksli n -boyutlu yarı-Öklid uzayı denir ve $\mathbb{R}_q^n$ ile gösterilir [7].

Tanım 2.1.13. $\mathbb{R}_q^n$ uzayının $\langle, \rangle$ yarı-Riemann metriğinin $W \subset \mathbb{R}_q^n$ altmanifoldu üzerine indirgenen $\langle, \rangle$ yarı-Riemann metriği;

- i) Bir Riemann metrik ise M' ye spacelike altmanifold,
- ii) Bir dejenere quadratik form ise M' ye dejenere altmanifold denir [17].

Tanım 2.1.14. $c \in \mathbb{R}_q^n$ sabit bir nokta ve $r > 0$ sabiti için;

$$S_q^n(c, r) = \{x \in \mathbb{R}_q^{n+1} : \langle x - c, x - c \rangle = r^2\}$$

kümesine yarı-Riemann küre,

$$H_q^n(c, r) = \{x \in \mathbb{R}_q^{n+1} : \langle x - c, x - c \rangle = -r^2\}$$

kümesine yarı-Riemann hiperbolik uzayı,

$$Q_q^n(c, r) = \{x \in \mathbb{R}_q^{n+1} : \langle x - c, x - c \rangle = 0\}$$

kümesine de yarı-Riemann lightlike koni (veya null koni) denir [17].

Tanım 2.1.15. n -boyutlu $\mathbb{R}_q^n$ yarı-Öklid uzayına;

- i) $q = 0$ ise Öklid uzayı denir ve $\mathbb{R}^n$ ile,
- ii) $q = 1, n \geq 2$ ise Minkowski n -uzay denir ve $\mathbb{R}_1^n$ ile,
- iii) $q = 1, n = 4$ ise Minkowski Spacetime denir ve $\mathbb{R}_1^4$ ile gösterilir [17].

Tanım 2.1.12'den Minkowski Spacetime için $\langle, \rangle$ indefinit metriği

$$\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4; \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^4$$

şeklindedir.

Lemma 2.1.1. $\mathbb{R}_1^4$ 'de timelike vektöre ortogonal olan causal vektörler yoktur ve iki null vektörün ortogonal olması için gerek ve yeter şart bu vektörlerin lineer bağımlı olmasıdır [17].

2.2. Null Eğrileri

Tanım 2.2.1. M bir C^∞ Lorentz manifold olsun. M üzerindeki bir $\langle, \rangle$ indefinit metriğe göre $k = 1, 2, \dots$ için C^k sınıfından bir $C: I \rightarrow M$ eğrisine $\forall t \in I$ için $C''(t)$ teğet vektörü,

- i) Spacelike ise spacelike eğri,
- ii) Timelike ise timelike eğri,
- iii) Null ise null (lightlike veya isotropik) eğri denir [17].

$(M, \langle, \rangle)$, boyutu $n = (m + 2)$ ve $0 < q < n$ olmak üzere indeksi q olan (yanimetriği indefinit olan), bir yarı-Riemann manifold olsun. Bir $C: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ null eğrisi için C 'nin tanjant demeti TC ile gösterilir ve non-dejenere durumda olduğu gibi $TC^\perp$ vektör demeti $TC^\perp = \bigcup_{p \in C} T_p C^\perp$;

$$T_p C^\perp = \{\xi_p \in T_p M \mid g(\xi_p, V_p) = 0, \forall V_p \in T_p C\}$$

olarak tanımlanır. Buna göre $TC^\perp$ 'nin rankı $(m + 1)$ 'dir. V_p bir null vektör olduğundan, TC 'nin $TC^\perp$ 'nin rankı 1 olan bir alt vektör demeti olduğu görülür. Bu durumda $TC^\perp$ 'de TC 'nin

$$TC^\perp = TC \perp S(TC^\perp)$$

biçiminde bir ortogonal tümleyeni vardır. Burada $S(TC^\perp)$ alt uzayı, C 'nin ekran vektör demeti (screen vektor bundle) olarak bilinir ve rankı m olan bir non-dejenere alt uzaydır. Böylece,

$$TM|_C = S(TC^\perp) \perp S(TC^\perp)^\perp$$

olarak yazılabilir [7,12,21].

Teorem 2.2.1. C , bir $(M, \langle, \rangle)$ yarı-Riemann manifold üzerinde bir null eğrisi olsun. Bu durumda C üzerinde, $\forall U \subset C$ koordinat komşuluğunda $T = \frac{dC}{dt}$ olmak üzere,

denkleri mevcuttur. Burada;

$$F = \left\{ \frac{dC}{dt} = T, N, W_1, \dots, W_m \right\}$$

kümesine C boyunca M üzerinde C 'nin $S(TC^\perp)$ ekran vektör demetine göre genel Frenet çatısı, (2.2) denklemlerin de F 'ye göre genel Frenet denklemleri ve k_i fonksiyonlarınada C 'nin eğrilik fonksiyonları denir [7].

3. MINKOWSKI SPACETIME’DA NULL EĞRİLERİ

Bu bölümde eğrinin distinguished (özel seçilmiş) bir t parametresi ile verilmesi durumunda distinguished Frenet çatısı ve bir s pseude-yay uzunluk parametresi ile oluşturulan null eğrinin Frenet çatısı tanımları verilecektir.

Minkowski Spacetime’da C bir null eğri ve D Levi-Civita konneksiyonu olsun. h ve $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ bir $U \subset C$ koordinat komşuluğu üzerinde tanımlı smooth fonksiyonlar ve $\{W_1, W_2\}$ de $\Gamma(S(TC^\perp)|_U)$ ’nin belirlenmiş bir bazı olmak üzere $n = 4$ için,

$$\begin{aligned} D_T T &= hT + k_1 W_1 \\ D_T N &= -hN + k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ D_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 \\ D_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

denklemleri mevcuttur. Burada T ile N null ve W_1 ve W_2 spacelike vektörler olmak üzere $\{T, N, W_1, W_2\}$, C eğrisi boyunca bazdır. $F = \{T, N, W_1, W_2\}$ ‘ye $\mathbb{R}_1^4$ ’de C eğrisi boyunca $S(TC^\perp)$ ekran vektör demetine göre Frenet çatı, $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ fonksiyonlarına F ’ye göre C ’nin eğrilik fonksiyonları ve (3.1) denklemlerinde F ’ye göre Frenet denklemleri denir [7].

Böylece aşağıdaki uyarı verilebilir

Uyarı 3.1.1. Minkowski Spacetime’da bir C null eğrisi için daima bir $S(TC^\perp)$ ekran vektör demeti ve $U \subset C$ koordinat komşuluğunda $S(TC^\perp)$ ’den elde edilen F Frenet çatısı vardır. Gerçekten, C boyunca $TC^\perp$ vektör demeti üzerinde bir $\langle, \rangle$ Riemann metrik vardır. Böylece $S(TC^\perp)$, $\langle, \rangle$ ’a göre $TC^\perp$ ’de TC ’ye tamamlayıcı ortogonal vektör demeti olarak alınır [5].

(3.1) Frenet denklemlerinde $h = \langle D_T T, N \rangle = 0$ olacak şekilde seçilen t parametresine distinguished parametre denir. Bu durumda (3.1) Frenet denklemleri,

$$\begin{aligned} D_T T &= k_1 W_1 \\ D_T N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ D_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 \\ D_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

halini alır [7].

Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.1.1. Eğer $\mathbb{R}_1^4$ 'de bir C null eğrisi t distinguished parametresi ile verilirse, $D_T T$ bir spacelike vektör alanıdır ve $W_1, D_T T$ 'ye paralel bir birim spacelike vektör alanı olarak seçilebilir. [5].

Sonuç 3.1.2. Eğer $\mathbb{R}_1^4$ 'de t distinguished parametresi ile verilen bir C null eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonu $k_1 = 0$ ise $D_T T = 0$ olacağından $C, \mathbb{R}_1^4$ 'de bir null geodeziktir [5].

Sonuç 3.1.3. $C \subset \mathbb{R}_1^4$, ' t distinguished parametresi ile verilen bir null eğrisi olsun. C null eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$ 'de bir null geodezik olması için gerek ve yeter şart birinci eğrilik fonksiyonun özdeş olarak sıfır olmasıdır.

$\mathbb{R}_1^4$ 'de t distinguished parametresi ile verilen bir C null eğrisinin son eğrilik fonksiyonu k_4 sıfır ise $\{T, N, W_1, W_2\}$ Frenet çatısına distinguished Frenet çatısı denir [5].

t distinguished parametresi ile verilen bir null eğri için kullanılan $\{T, N, W_1, W_2\}$ çatısı distinguished Frenet çatı olması durumunda (3.2) Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} D_T T &= k_1 W_1 \\ D_T N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ D_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N \\ D_T W_2 &= -k_3 T \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde elde edilir [7].

Örnek 3.1.1. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ eğrisi

$$\gamma(t) = (t, 0, \cos t, \sin t)$$

İle tanımlansın. γ eğrisinin teğet vektörü,

$$T = \frac{d\gamma}{dt} = (1, 0, -\sin t, \cos t)$$

olup, $\langle T, T \rangle = 0$ olduğundan γ eğrisi bir null eğrisidir. $\mathbb{R}_1^4$ 'de bir $X = (0, 1, 0, 0)$ sabit vektörü için, $\langle T, X \rangle = -1$ dir.

Şimdi γ eğrisi boyunca,

$$T = (1, 0, -\sin t, \cos t) \quad N = \frac{1}{2}(-1, 0 - \sin t, \cos t)$$

$$W_1 = (0, 0, -\cos t, -\sin t) \quad W_2 = (0, 1, 0, 0)$$

İle verilen $\{T, N, W_1, W_2\}$ Frenet çatısı için (3.1) denklemleri gözönüne alındığında,

$D_T T = (0, 0, -\cos t, -\sin t)$ olup $h = \langle D_T T, N \rangle = 0$ olduğundan t bir distinguished parametredir.

$D_T W_1 = (0, 0, \sin t, -\cos t)$ olup, $k_4 = \langle D_T W_1, W_2 \rangle = 0$ olduğundan $\{T, N, W_1, W_2\}$ Frenet çatısı distinguished Frenet çatıdır. O halde (3.3)'den,

$$D_T T = W_1 \Rightarrow k_1 = 1$$

$$D_T N = \frac{1}{2} W_1 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2} \text{ ve } k_3 = 0$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\langle T, X \rangle = -1, \quad \langle W_1, X \rangle = 0, \quad \langle N, X \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle W_2, X \rangle = 0$$

olur.

Tanım 3.1.1. $\alpha(s)$, $\mathbb{R}_1^4$ 'de bir null eğrisi olsun. $s = \int_0^t (\langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle)^{\frac{1}{4}} dt$ olmak üzere,

$$\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 1$$

ise $\alpha(s)$ null eğrisine s pseudo-yay fonksiyonu ile parametrize edilmiştir denir [7].

Pseudo-yay parametresi ile verilen null eğrilere birim hızlı null eğri tabirini kullanacağız.

Minkowski Spacetime'da s pseudo-yay uzunluk fonksiyonu ile parametrize edilmiş α null eğrisi için Frenet formülleri Walrave tarafından verilmiştir. Buna göre; Minkowski Spacetime'da α eğrisi boyunca verilen ve sırasıyla tanjant, asli normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanları ile oluşturulan $\{T, N, B_1, B_2\}$ hareketli frenet çatısı için α null eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ -k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

ile verilir. Burada $k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s)$, $k_3 = k_3(s)$; $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilik fonksiyonlarını göstermektedir. Ayrıca T, N, B_1, B_2

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle B_1, B_1 \rangle = 0, \\ \langle N, N \rangle &= \langle B_2, B_2 \rangle = \langle T, B_1 \rangle = 1 \\ \langle T, N \rangle &= \langle T, B_2 \rangle = \langle N, B_1 \rangle = \langle N, B_2 \rangle = \langle B_1, B_2 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

denklemlerini sağlar.

Minkowski Spacetime'da $\alpha(s)$ null eğrisinin k_1 birinci eğrilik fonksiyonu sadece iki değer alabilir. Bunlar $k_1 = 0$ veya $k_1 = 1$ 'dir. α bir null doğru ise $k_1 = 0$ ve α 'nın diğer tüm durumları için $k_1 = 1$ 'dir [1].

Tanım 3.1.1. $C \subset \mathbb{R}_1^4$, ' t distinguished parametresi ile verilen (veya s pseudo-yay fonksiyonu ile parametrize edilmiş) bir null eğri olsun. C null eğrisinin distinguished Frenet çatısı (veya Pseudo-yay parametresi ile verilen Frenet çatısı) $\{T, N, W_1, W_2\}$ olsun.

Eğer

$$\langle T, U \rangle = \text{sabit}$$

ise $C \subset \mathbb{R}_1^4$ eğrisine bir helis denir.

Tanım 3.1.2. $C \subset \mathbb{R}_1^4$, ' t distinguished parametresi ile verilen (veya s pseudo-yay fonksiyonu ile parametrize edilmiş) bir null eğri olsun. C null eğrisinin distinguished Frenet çatısı (veya Pseudo-yay parametresi ile verilen Frenet çatısı) $\{T, N, W_1, W_2\}$ olsun.

Eğer $\langle T, U \rangle = c_1 = \text{sabit}$ ve $\langle N, U \rangle = c_2 = \text{sabit}$ ise C eğrisine (1,2)-tipinden helis,

Eğer $\langle T, U \rangle = c_1 = \text{sabit}$ ve $\langle W_1, U \rangle = c_3 = \text{sabit}$ ise C eğrisine (1,3)-tipinden helis,

Eğer $\langle T, U \rangle = c_1 = \text{sabit}$ ve $\langle W_2, U \rangle = c_4 = \text{sabit}$ ise C eğrisine (1,4)-tipinden helis,

Eğer $\langle N, U \rangle = c_2 = \text{sabit}$ ve $\langle W_1, U \rangle = c_3 = \text{sabit}$ ise C eğrisine (2,3)-tipinden helis,

Eğer $\langle N, U \rangle = c_2 = \text{sabit}$ ve $\langle W_2, U \rangle = c_4 = \text{sabit}$ ise C eğrisine (2,4)-tipinden helis,

Eğer $\langle W_1, U \rangle = c_3 = \text{sabit}$ ve $\langle W_2, U \rangle = c_4 = \text{sabit}$ ise C eğrisine (3,4)-tipinden helis

olarak adlandırılır [5].

4. t PARAMETRELİ NULL EĞRİLERİ İÇİN (k, m) -TİPİNDEN HELİSLER

Bu bölümde eğrinin distinguished (özel seçilmiş) bir t parametresi ile verilen distinguished Frenet çatısı için (k, m) -tipinden helisler için karakterizasyonlar verilecektir.

Teorem 4.1.1. $\mathbb{R}_1^4$ 'de t distinguished parametresi ile verilen bir C null eğrisinin distinguished Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2\}$ olsun. Eğer C (1;2) tipinde slant helis ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1.Durum: $k_1 = 0$ ve $\langle W_1, u \rangle \neq 0$ ise

$$\frac{k_2}{k_3} = -\frac{\langle W_2, u \rangle}{\langle W_1, u \rangle}$$

dır.

2.Durum: $k_1 \neq 0$ ve $\langle W_1, u \rangle = 0$ ise

a) $k_3 = 0$ ve $\langle W_2, u \rangle \neq 0$

b) $k_3 \neq 0$ ve $\langle W_2, u \rangle = 0$

c) $k_3 = 0$ ve $\langle W_2, u \rangle = 0$

3.Durum: $k_1 = 0$ ve $\langle W_1, u \rangle = 0$ ise

a) $k_3 = 0$, $\langle W_2, u \rangle \neq 0$

b) $k_3 \neq 0$ ise $\langle W_2, u \rangle = 0$

c) $k_3 = 0$ ve $\langle W_2, u \rangle = 0$

İspat: Kabul edelim ki distinguished Frenet çatılı C null eğrisi (1;2) tipinde slant helis olsun. O zaman

$$\langle T, u \rangle = c_1 \quad (4.1)$$

ve

$$\langle N, u \rangle = c_2 \quad (4.2)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı c_1 ve c_2 reel sabitleri vardır. (4.1) ve (4.2)'nin her iki tarafının t parametresine göre türevi alınır ve distinguished Frenet çatısı kullanılırsa, sırasıyla

$$k_1 \langle W_1, u \rangle = 0 \quad (4.3)$$

ve

$$k_2 \langle W_1, u \rangle + k_3 \langle W_2, u \rangle = 0 \quad (4.4)$$

elde edilir. Böylece (4.3)'den

1.Durum: $k_1 = 0$, $\langle W_1, u \rangle \neq 0$,

2.Durum: $k_1 \neq 0$, $\langle W_1, u \rangle = 0$,

3.Durum: $k_1 = 0$, $\langle W_1, u \rangle = 0$

elde edilir.

1. Durumda $k_1 = 0$ ve $\langle W_1, u \rangle \neq 0$ ise (4.4) eşitliğinden

$$\frac{k_2}{k_3} = -\frac{\langle W_2, u \rangle}{\langle W_1, u \rangle}$$

elde edilir.

2. Durumda $k_1 \neq 0$ ve $\langle W_1, u \rangle = 0$ ise (4.4)'den $k_3 \langle w_2, u \rangle = 0$ elde edilir ki bu durumda

a) $k_3 = 0, \langle W_2, u \rangle \neq 0,$

b) $k_3 \neq 0, \langle W_2, u \rangle = 0$ veya

c) $k_3 = 0, \langle W_2, u \rangle = 0,$

bulunur.

3. Durumda $k_1 = 0$ ve $\langle W_1, u \rangle = 0$ ise (4.4)'den $k_3 \langle w_2, u \rangle = 0$ elde edilir ki bu durumda da

a) $k_3 = 0, \langle W_2, u \rangle \neq 0,$

b) $k_3 \neq 0, \langle W_2, u \rangle = 0$ veya

c) $k_3 = 0, \langle W_2, u \rangle = 0,$

bulunur.

Teorem 4.1.2. $\mathbb{R}_1^4$ 'de t distinguished parametresi ile verilen bir C null eğrisinin distinguished Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2\}$ olsun. Eğer C (1; 3) tipinde slant helis ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$k_1 = 0 \text{ ve } k_2 = 0$$

dır.

İspat : Kabul edelim ki C null eğrisi distinguished Frenet çatısı ile verilen eğri (1;3) tipinde slant helis olsun. Bu durumda

$$\langle T, u \rangle = c_1 \tag{4.5}$$

ve

$$\langle W_1, u \rangle = c_3 \tag{4.6}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı reel c_1 ve c_3 sabitleri vardır. (4.5) ve (4.6)'nın t parametresine göre türevleri alınır ve distinguished Frenet çatısı kullanılırsa, sırasıyla,

$$k_1 \langle W_1, u \rangle = 0 \tag{4.7}$$

ve

$$-k_2 \langle T, u \rangle = 0 \tag{4.8}$$

bulunur. $\langle W_1, u \rangle = c_3$ olduğundan (4.7)'den $k_1 = 0$ ve $\langle T, u \rangle = c_1$ olduğundan (4.8)'den $k_2 = 0$ elde edilir.

Teorem 4.1.3. $\mathbb{R}_1^4$ 'de t distinguished parametresi ile verilen bir C null eğrisinin distinguished Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2\}$ olsun. Eğer C , (1;4) tipinde slant helis ise $k_3 = 0$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. **Durum** $k_1 = 0$ ve $\langle W_1, u \rangle \neq 0$,
2. **Durum** $k_1 \neq 0$ ve $\langle W_1, u \rangle = 0$,
3. **Durum** $k_1 = 0$ ve $\langle W_1, u \rangle = 0$ ise $k_2 = 0$

dır.

İspat : Kabul edelim ki distinguished Frenet çatısı ile verilen C null eğrisi eğri (1;4) tipinde slant helis olsun. Bu takdirde;

$$\langle T, u \rangle = c_1 \quad (4.9)$$

ve

$$\langle W_2, u \rangle = c_4 \quad (4.10)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı reel c_1 ve c_4 sabitleri vardır. (4.9) ve (4.10)'nun t parametresine göre türevleri alınır ve distinguished Frenet çatısı kullanılırsa, sırasıyla,

$$k_1 \langle W_1, u \rangle = 0 \quad (4.11)$$

ve

$$k_3 \langle T, u \rangle = 0 \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12)'den $\langle T, u \rangle = c_1$ ise $k_3 = 0$ olur. Böylece (4.11)'den

$$k_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \langle W_1, u \rangle \neq 0,$$

$$k_1 \neq 0 \quad \text{ve} \quad \langle W_1, u \rangle = 0$$

veya

$$k_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \langle W_1, u \rangle = 0$$

bulunur. Ayrıca $k_1 = 0$ ve $\langle W_1, u \rangle = 0$ olduğu gözönüne alınarak $\langle W_1, u \rangle = 0$ ifadesinin bir kez daha t distinguished parametresine göre türevi alınır ve Frenet çatısı kullanılırsa $k_2 = 0$ da bulunur.

Teorem 4.1.4. $\mathbb{R}_1^4$ 'de t distinguished parametresi ile verilen bir C null eğrisinin distinguished Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2\}$ olsun. Eğer C , (2; 3) tipinde slant helis ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$\langle T, u \rangle = \frac{k_2}{k_1} c_2 \quad (4.14)$$

ve

$$\langle W_2, u \rangle = \frac{k_2}{k_3} c_3 \quad (4.15)$$

elde edilir. Burada c_2 ve c_3 sıfırdan farklı birer reel sabitlerdir.

İspat: Distinguished Frenet çatısı ile verilen C null eğrisi eğri (2; 3) tipinde slant helis olsun. Bu takdirde;

$$\langle N, u \rangle = c_2 \quad (4.16)$$

ve

$$\langle W_1, u \rangle = c_3 \quad (4.17)$$

olacak şekilde c_2 ve c_3 sıfırdan farklı birer reel sabitleri vardır. (4.16) ve (4.17)'nin distinguished t parametresine göre türevleri alınır, sırasıyla,

$$-k_2 \langle W_1, u \rangle + k_3 \langle W_2, u \rangle = 0 \quad (4.18)$$

ve

$$-k_2 \langle T, u \rangle + k_3 \langle N, u \rangle = 0 \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.18) ve (4.19)'da (4.16) ve (4.17)'de yazılıp düzenlenirse (4.14) ve (4.15) bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.5. $\mathbb{R}_1^4$ 'de t distinguished parametresi ile verilen bir C null eğrisinin distinguished Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2\}$ olsun. Eğer C , (2; 4) tipinde slant helis ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. Durum $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle \neq 0$ ise

- i) $k_2 = 0, \langle W_1, u \rangle \neq 0,$
- ii) $k_2 \neq 0, \langle W_1, u \rangle = 0,$
- iii) $k_2 = \langle W_1, u \rangle = 0$

ifadeleri vardır.

2. Durum $k_3 \neq 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$ ise

- i) $k_1 = 0, \langle W_1, u \rangle \neq 0,$
- ii) $k_1 \neq 0, \langle W_1, u \rangle = 0,$
- iii) $k_1 = \langle W_1, u \rangle = 0$

ifadeleri vardır.

3. Durum $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$ ise

- i) $k_1 = 0, \langle W_1, u \rangle \neq 0,$
- ii) $k_1 \neq 0, \langle W_1, u \rangle = 0,$
- iii) $k_1 = \langle W_1, u \rangle = 0$

ifadeleri vardır.

İspat: Kabul edelim ki distinguished Frenet çatısı ile verilen C null eğrisi eğri (2; 4) tipinde slant helis olsun. Bu takdirde;

$$\langle N, u \rangle = c_2 \quad (4.20)$$

ve

$$\langle W_2, u \rangle = c_4 \quad (4.21)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı reel c_2 ve c_4 sabitleri vardır. (4.20) ve (4.21)'nin t distinguished parametresine göre türevleri alınır ve distinguished Frenet çatısı kullanılırsa sırasıyla

$$k_2 \langle W_1, u \rangle + k_3 \langle W_2, u \rangle = 0 \quad (4.22)$$

ve

$$-k_3 \langle T, u \rangle = 0 \quad (4.23)$$

bulunur. (4.23)'den

1. Durum $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle \neq 0,$

2. Durum $k_3 \neq 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$ veya

3. Durum $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$

elde edilir. Bu durumlar detaylıca incelenirse:

1. Durumda $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle \neq 0$ ise

- i) $k_2 = 0, \langle W_1, u \rangle \neq 0,$
- ii) $k_2 \neq 0, \langle W_1, u \rangle = 0,$
- iii) $k_2 = \langle W_1, u \rangle = 0$

ifadeleri

2. Durumda $k_3 \neq 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$ ise

- i) $k_1 = 0, \langle W_1, u \rangle \neq 0,$
- ii) $k_1 \neq 0, \langle W_1, u \rangle = 0,$
- iii) $k_1 = \langle W_1, u \rangle = 0$

ifadeleri

3. Durumda $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$ ise

- i) $k_1 = 0, \langle W_1, u \rangle \neq 0,$
- ii) $k_1 \neq 0, \langle W_1, u \rangle = 0,$
- iii) $k_1 = \langle W_1, u \rangle = 0$

ifadeleri bulunur.

Teorem 4.1.6. $\mathbb{R}_1^4$ 'de t distinguished parametresi ile verilen bir C null eğrisinin distinguished Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2\}$ olsun. Eğer C , (3;4) tipinde slant helis ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1.Durum: $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle \neq 0$ ise $k_1 \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{k_2}{k_1} = -\frac{\langle N, u \rangle}{\langle T, u \rangle}$$

dir.

2.Durum: $k_3 \neq 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$ ise $k_1 = 0$ dır.

3. Durum: $k_3 = \langle T, u \rangle = 0$ ise $k_1 = 0$ 'dır.

İspat: Kabul edelim ki distinguished Frenet çatısı ile verilen C , null eğrisi eğri (3;4) tipinde slant helis olsun. Bu takdirde;

$$\langle W_1, u \rangle = c_3 \quad (4.24)$$

ve

$$\langle W_2, u \rangle = c_4 \quad (4.25)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı reel c_3 ve c_4 sabitleri vardır. (4.24) ve (4.25)'in t distinguished parametresine göre türevleri alınıp, distinguished Frenet çatısı kullanılırsa, sırasıyla,

$$-k_2 \langle T, u \rangle - k_1 \langle N, u \rangle = 0 \quad (4.26)$$

ve

$$k_3 \langle T, u \rangle = 0 \quad (4.27)$$

bulunur. (4.27)'den aşağıdaki

1.Durum: $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle \neq 0$,

2.Durum: $k_3 \neq 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$ veya

3. Durum: $k_3 = \langle T, u \rangle = 0$

durumları mevcuttur.

1.Durumda $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle \neq 0$ ise $k_1 \neq 0$ olmak üzere (4.26)'dan

$$\frac{k_2}{k_1} = -\frac{\langle N, u \rangle}{\langle T, u \rangle}$$

bulunur.

$$\frac{k_2}{k_1} = -\frac{\langle N, u \rangle}{\langle T, u \rangle}$$

2.Durumda $k_3 \neq 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$ ise $\langle T, u \rangle = 0$ ifadesinin tekrar distinguished parametresine göre türevleri alınıp, distinguished Frenet çatısı kullanılırsa $k_1 = 0$ bulunur.

3. Durumda $k_3 = \langle T, u \rangle = 0$ ise benzer yöntemle $k_1 = 0$ bulunur.

5. s PARAMETRELİ NULL EĞRİLERİ İÇİN (k, m) - Tipinden HELİSLER

Bu bölümde s pseude-yay uzunluk parametresi ile oluşturulan null eğrinin Frenet çatısı için (k, m) -tipinden helisler için karakterizasyonlar verilecektir.

Teorem 5.1.1. $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N_1, B_1, B_2\}$ olsun. Eğer α , $(1; 2)$ tipinde slant helis ise $k_1 = 0$ ve $k_2 = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisi $(1; 2)$ tipinde slant helis olsun. Bu takdirde;

$$\langle T, u \rangle = c_1 \quad (5.1)$$

ve

$$\langle N, u \rangle = c_2 \quad (5.2)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı reel c_1 ve c_2 sabitleri vardır. (5.1) ve (5.2)'nin türevleri alınır ve Frenet çatısı kullanılırsa, sırasıyla;

$$k_1 \langle N, u \rangle = 0 \quad (5.3)$$

ve

$$k_2 \langle T, u \rangle - k_1 \langle B_1, u \rangle = 0 \quad (5.4)$$

bulunur. (5.2) ifadesi (5.3) de yazılırsa $k_1 = 0$ bulunur. Ayrıca $k_1 = 0$ ve (5.1) ifadesi (5.4) de göz önüne alınırsa $k_2 = 0$ elde edilir. Buda teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 5.1.1 $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir $k_1=1$ eğrilikli α null eğrisi için bu teorem ifade edilemez.

Teorem 5.1.2. $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N_1, B_1, B_2\}$ olsun. Eğer α $(1; 3)$ tipinde slant helis ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. Durum: $k_1 = 0$ ve $\langle N, u \rangle \neq 0$ ise $k_2 \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{k_2}{k_3} = \frac{\langle B_2, u \rangle}{\langle N, u \rangle}$$

dir.

2. Durum: $k_1 \neq 0$ ve $\langle N, u \rangle = 0$ ise

- i) $k_3 = 0$ ve $\langle B_2, u \rangle \neq 0$,
- ii) $k_3 \neq 0$ ve $\langle B_2, u \rangle = 0$,
- iii) $k_3 = \langle B_2, u \rangle = 0$

dir.

3. Durum : $k_1 = \langle N, u \rangle = 0$

i) $k_3 = 0$ ve $\langle B_2, u \rangle \neq 0$

ii) $k_3 \neq 0$ ve $\langle B_2, u \rangle = 0$

iii) $k_3 = \langle B_2, u \rangle = 0$

dır.

İspat : Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisi (1;3) tipinde slant helis olsun. Bu takdirde;

$$\langle T, u \rangle = c_1 \quad (5.5)$$

ve

$$\langle B_1, u \rangle = c_3 \quad (5.6)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı reel c_1 ve c_3 sabitleri vardır. (5.5) ve (5.6)'nın türevleri alınır ve Frenet çatısı kullanılırsa, sırasıyla;

$$k_1 \langle N, u \rangle = 0 \quad (5.7)$$

ve

$$-k_2 \langle N, u \rangle + k_3 \langle B_2, u \rangle = 0 \quad (5.8)$$

bulunur. (5.7)'den üç farklı durum ortaya çıkar. Bunlar

1. Durum: $k_1 = 0$ ve $\langle N, u \rangle \neq 0$

2. Durum: $k_1 \neq 0$, ve $\langle N, u \rangle = 0$

3. Durum: $k_1 = \langle N, u \rangle = 0$

şeklinde ifade edilebilir.

1. Durumda: $k_1 = 0$ ve $\langle N, u \rangle \neq 0$ olması durumunda (5.8)'den

$$\frac{k_2}{k_3} = \frac{\langle B_2, u \rangle}{\langle N, u \rangle}$$

elde edilir.

2. Durumda: $k_1 \neq 0$, $\langle N, u \rangle = 0$ ise (5.8)'den

i) $k_3 = 0$ ve $\langle B_2, u \rangle \neq 0$

- ii) $k_3 \neq 0$ ve $\langle B_2, u \rangle = 0$
- iii) $k_3 = \langle B_2, u \rangle = 0$

bulunur. Nihayet

3. Durumda: $k_1 = \langle N, u \rangle = 0$ ise (5.8)'den

- i) $k_3 = 0$ ve $\langle B_2, u \rangle \neq 0$
- ii) $k_3 \neq 0$ ve $\langle B_2, u \rangle = 0$
- iii) $k_3 = \langle B_2, u \rangle = 0$

bulunur.

Teorem 5.1.3. $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N_1, B_1, B_2\}$ olsun. Eğer α (1; 4) tipinde slant helis ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- 1) $k_1 = 0, \langle N, u \rangle \neq 0$ ve $k_3 = 0,$
- 2) $k_1 \neq 0, \langle N, u \rangle = 0$ ve $k_3 = 0,$
- 3) $k_1 = k_3 = \langle N, u \rangle = 0.$

İspat : Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisi (1;4)tipinde slant helis olsun. Bu takdirde;

$$\langle T, u \rangle = c_1 \quad (5.9)$$

ve

$$\langle B_2, u \rangle = c_4 \quad (5.10)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı reel c_1 ve c_4 sabitleri vardır. (5.9) ve (5.10)'nın türevleri alınır ve Frenet çatısı kullanılırsa, sırasıyla;

$$k_1 \langle N, u \rangle = 0 \quad (5.11)$$

ve

$$k_3 \langle T, u \rangle = 0 \quad (5.12)$$

bulunur. (5.12) ve (5.9)'dan $k_3 = 0$ bulunur. Ayrıca (5.11)'den

- i) $k_1 = 0$ ve $\langle N, u \rangle \neq 0$
- ii) $k_1 \neq 0$ ve $\langle N, u \rangle = 0$
- iii) $k_1 = \langle N, u \rangle = 0$

bulunur. O halde

- 1) $k_1 = 0, \langle N, u \rangle \neq 0$ ve $k_3 = 0$
- 2) $k_1 \neq 0, \langle N, u \rangle = 0$ ve $k_3 = 0$
- 3) $k_1 = k_3 = \langle N, u \rangle = 0$.

olur.

Teorem 5.1.3. $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N_1, B_1, B_2\}$ olsun. Eğer α (2;3) tipinde slant helis ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$\langle T, u \rangle = \frac{k_1}{k_2} c_3 \quad (5.13)$$

ve

$$\langle B_2, u \rangle = \frac{k_2}{k_3} c_2 \quad (5.14)$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisi (2;3) tipinde slant helis olsun. Bu takdirde;

$$\langle N, u \rangle = c_2 \quad (5.15)$$

ve

$$\langle B_1, u \rangle = c_3 \quad (5.16)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı reel c_2 ve c_3 sabitleri vardır. (5.15) ve (5.16)'nın türevleri alınır ve Frenet çatısı kullanılırsa, sırasıyla;

$$k_2 \langle T, u \rangle - k_1 \langle B_1, u \rangle = 0 \quad (5.17)$$

ve

$$-k_2 \langle N, u \rangle + k_3 \langle B_2, u \rangle = 0 \quad (5.18)$$

elde edilir. (5.17) de (5.16) kullanılırsa (5.13), benzer şekilde (5.18) de (5.15) kullanılırsa (5.14) elde edilir.

Teorem 5.1.4. $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N_1, B_1, B_2\}$ olsun. Eğer α (2;4) tipinde slant helis ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- 1) $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle \neq 0$ ise $\frac{k_2}{k_1} = \frac{\langle B_1, u \rangle}{\langle T, u \rangle}$ dir.

2) $k_3 \neq 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$ ise

- i) $k_1 = 0$ ve $\langle B_1, u \rangle \neq 0$
- ii) $k_1 \neq 0$ ve $\langle B_1, u \rangle = 0$
- iii) $k_1 = \langle B_1, u \rangle = 0$

3) $k_3 = \langle T, u \rangle = 0$ ise

- i) $k_1 = 0$ ve $\langle B_1, u \rangle \neq 0$
- ii) $k_1 \neq 0$ ve $\langle B_1, u \rangle = 0$
- iii) $k_1 = \langle B_1, u \rangle = 0$

dır.

İspat : Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisi (2;4) tipinde slant helis olsun. Bu takdirde;

$$\langle N, u \rangle = c_2 \quad (5.19)$$

ve

$$\langle B_2, u \rangle = c_4 \quad (5.20)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı reel c_2 ve c_4 sabitleri vardır. (5.19) ve (5.20)'nın türevleri alınır ve Frenet çatısı kullanılırsa, sırasıyla;

$$k_2 \langle T, u \rangle - k_1 \langle B_1, u \rangle = 0 \quad (5.21)$$

ve

$$k_3 \langle T, u \rangle = 0$$

(5.22)

elde edilir. (5.22) den

- i) $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle \neq 0$,
- ii) $k_3 \neq 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$,
- iii) $k_3 = \langle T, u \rangle = 0$

bulunur. Böylece

1) $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle \neq 0$ ise $\frac{k_2}{k_1} = \frac{\langle B_1, u \rangle}{\langle T, u \rangle}$ bulunur.

2) $k_3 \neq 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$ ise

- i) $k_1 = 0$ ve $\langle B_1, u \rangle \neq 0$
- ii) $k_1 \neq 0$ ve $\langle B_1, u \rangle = 0$
- iii) $k_1 = \langle B_1, u \rangle = 0$

3) $k_3 = \langle T, u \rangle = 0$ ise

- i) $k_1 = 0$ ve $\langle B_1, u \rangle \neq 0$
- ii) $k_1 \neq 0$ ve $\langle B_1, u \rangle = 0$
- iii) $k_1 = \langle B_1, u \rangle = 0$

Teorem 5.1.5. $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N_1, B_1, B_2\}$ olsun. Eğer α (3; 4) tipinde slant helis ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle \neq 0$ ise

- i) $k_2 = 0$ ve $\langle N, u \rangle \neq 0$
- ii) $k_2 \neq 0$ ve $\langle N, u \rangle = 0$
- iii) $k_2 = \langle N, u \rangle = 0$

2) $k_3 \neq 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$ ise

$$\langle N, u \rangle = \frac{k_3}{k_2} c_4$$

dır.

3) $k_3 = \langle T, u \rangle = 0$ ise

- i) $k_2 = 0$ ve $\langle N, u \rangle \neq 0$
- ii) $k_2 \neq 0$ ve $\langle N, u \rangle = 0$
- iii) $k_2 = \langle N, u \rangle = 0$

İspat : Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ 'de Pseudo-yay parametresi ile verilen bir α null eğrisi (3;4) tipinde slant helis olsun. Bu takdirde;

$$\langle B_1, u \rangle = c_3 \quad (5.23)$$

ve

$$\langle B_2, u \rangle = c_4 \quad (5.24)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı reel c_3 ve c_4 sabitleri vardır. (5.23) ve (5.24)'ün türevleri alınır ve Frenet çatısı kullanılırsa, sırasıyla;

$$-k_2 \langle N, u \rangle + \langle B_2, u \rangle = 0 \quad (5.25)$$

ve

$$k_3 \langle T, u \rangle = 0 \quad (5.26)$$

bulunur. (5.26)'dan

- i) $k_3 = 0$ ve $\langle T, u \rangle \neq 0$
- ii) $k_3 \neq 0$ ve $\langle T, u \rangle = 0$

$$\text{iii)} \quad k_3 = \langle T, u \rangle = 0$$

elde edilir ki böylece aşağıdaki durumlar söz konusudur.

$$1) k_3 = 0 \text{ ve } \langle T, u \rangle \neq 0 \text{ ise (5.25)'den}$$

$$\text{i)} \quad k_2 = 0 \text{ ve } \langle N, u \rangle \neq 0$$

$$\text{ii)} \quad k_2 \neq 0 \text{ ve } \langle N, u \rangle = 0$$

$$\text{iii)} \quad k_2 = \langle N, u \rangle = 0$$

$$2) k_3 \neq 0, \langle T, u \rangle = 0 \text{ ise}$$

$$\langle N, u \rangle = \frac{k_3}{k_2} c_4$$

dır.

$$3) k_3 = \langle T, u \rangle = 0 \text{ ise}$$

$$\text{i)} \quad k_2 = 0 \text{ ve } \langle N, u \rangle \neq 0$$

$$\text{ii)} \quad k_2 \neq 0 \text{ ve } \langle N, u \rangle = 0$$

$$\text{iii)} \quad k_2 = \langle N, u \rangle = 0.$$

KAYNAKLAR

- [1] Ali, A.T., Lopez, R. ve Turgut, M (2012), k-type partially null and pseudo null slant helices in Minkowski 4-space. Math. Commun. 17(1), pp. 93–103.
- [2] Balgetir, H., Bektas, M., and Inoguchi, J., (2005). Null Bertrand curves in Minkowski 3-Space and Their Characterizations, Note di Matematica 23, PP: 7-13.
- [3] Barros, M. (1997) General helices and a theorem of Lancert, Proc. Amer. Math. Soc. 125, 1503–1509.
- [4] Bektas, M., Ergüt ve Soylu D. (1998) The Characterization of the Spherical Timelike Curves in 3-Dimensional Lorentzian Space, Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series) 21 , 11-125.
- [5] Bektas, M. ve Yılmaz, M.Y. (2020) (k,m)-type slant helices for partially null and pseudo null curves in Minkowski space E41. Applied Mathematics and Nonlinear Sciences Vol 5, Sayı 1.
- [6] Bonnor W.B. (1969) Null curves in a Minkowski space-time, Tensör (N.S) 20, 229-242.
- [7] Boran A.İ., (2008) 4-Boyutlu Minkowski Uzayında Null Eğriler ve Null Yüzeylerin Geometrisi Üzerine, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [8] Erdoğan, M., Yılmaz, G.: (2008) Null generalized and slant helices in 4-dimensional Lorentz-Minkowski space. Int. J. Contemp. Math. Sci. 3, 1113–1120.
- [9] Ferrández, A., Gimenez, A. (2001) Lucas, P., Null helices in Lorentzian space forms, Internat. J. Modern Phys. A 16, 4845–4863.
- [10] İlarıslan K. (2005) Spacelike normal curves in Minkowski space E 31 . Turk J Math, 29, 53-63.
- [11] İlarıslan K.ve Nešović E. (2008) Some characterizations of null, pseudo null and partially null rectifying curves in Minkowski space-time. Taiwanese J. Math., 12:1035-1044.
- [12] Kaya H., Lorentz- Minkowski Uzaylarında Null Eğriler Üzerine, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,2016.
- [13] Kocayığıt H., Önder M.: (2007) Timelike curves of constant slope in Minkowski space E41. J. Sci. Techn. Beykent Univ. 1, 311–318.
- [14] Kocayığıt H., Önder M. ve Arslan K. (2013) Some Characterizations of Timelike and Spacelike Curves with Harmonic 1-Type Darboux Instantaneous Rotation Vector in The Minkowski 3-Space E3 1, Commun. Fac. Sci.Univ.Ank. Ser. A1 Volum e 62, Number 1, Pages 21 No 32.
- [15] Kulahci, M. and Ergut, M., (2009). Bertrand curves of AW(k)-type in Lorentzian space, Nonlinear Analysis, 70, PP:1725-1731.
- [16] Nesovic, E., Petrovic-Torgasev, M.ve Verstraelen, L. (2005) Curves in Lorentzian spaces, Bolletino U.M.I. 8, 685–696.
- [17] O'Neill, B. (1983) Semi-Riemannian Geometry. With applications to relativity. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc., New York.
- [18] Öztekin, H. B. and Bektaş, M., (2010) “Representation formulae for Bertrand curves in the Minkowski 3- space”, Scientia Magna, 6: 89-96.
- [19] Synge, J. L.: (1967) Timelike helices in flat space-time. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 65, 27–42.
- [20] Yılmaz, S, Turgut, M., (2010) A new version of Bishop frame and an application to spherical images, J. Math. Anal. Appl. 371, 764-776.
- [21] Yücel E., (2015) Cartan Null Eğrilerin Geometrisi ve Uygulaması, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

ÖZGEÇMİŞ

Yusuf KAÇAR

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	Yusuf KAÇAR
T.C. Kimlik No	12345678901
Doğum Tarihi	15.03.1985
Doğum Yeri	İstanbul
Evlilik Durumu	Evli
Çocukları	2
İletişim Bilgileri	0532 123 4567

EĞİTİM

Yıl	2010-2014
Okul	Yusuf KAÇAR

İŞ DENEYİMİ

- B. YIL 2010– 2014 :** Dersanelerde ve kurs merkezlerinde geometri öğretmeni olarak çalıştım.
- B. YIL 2015 –2016 :** Final temel lisesindematematik-geometri öğretmeni olarak çalıştım.
- B. YIL 2017 –2018 :** Özel Bilgem kolejinde matematik-geometri öğretmeni olarak çalıştım.
- S. YIL 2019 - 2021 :** Özel Simya lisesindematematik-geometri öğretmeni olarak çalışıyorum.