



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

NULL EĞRİLİ REGLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bashdar YOUNUS

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM

ORTAK DANIŞMAN

Prof.Dr.Durmuş BOZKURT

AKSARAY, 2016



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

NULL EĞRİLİ REGLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bashdar YOUNUS

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM

ORTAK DANIŞMAN

Prof.Dr.Durmuş BOZKURT

AKSARAY, 2016

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 142309804 numaralı Yüksek Lisans, "Bashdar YOUNUS", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "NULL EĞRİLİ REGLE YÜZEYLER" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Adı Soyadı

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM

Aksaray Üniversitesi

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Nesip AKTAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Pelin POŞPOŞ TEKİN

Aksaray Üniversitesi

Teslim Tarihi: 18/05/ 2016

Savunma Tarihi: 02/06/2016

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Bashdar YOUNUS

TEŞEKKÜR

Bana Türkiye’de eğitim alma fırsatı veren Aksaray Üniversitesi yetkililerine ve eğitim süresince yardımlarını esirgemeyen Fen Bilimleri Enstitüsü idareci ve çalışanlarına en derin şükranlarımı sunarım.

Bu tezin çalışma ve hazırlık aşamalarında sürekli yardım ve desteğini gördüğüm, danışmanım Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM’a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen aileme şükranlarımı sunuyorum.

Bashdar YOUNUS

ÖNSÖZ

Regle Yüzeyler, özellikle 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında çok iyi bilinen yüzeylerdir. Bu anlamda bu yüzeylerin boğaz noktası, boğaz çizgisi, dağılma parametresi, açılabilir olmalarına dair özellikler ve buna bağlı teoremler önem arz etmektedir.

Öklidyen geometride, bir eğri boyunca hareket eden, X doğrultmanı regle yüzeyler yüzeyler teorisi içinde ilginç ve bir o kadar da dikkat çekici bir araştırma konusu olmuştur.

Regle yüzeyler, ilk olarak tüm regle yüzeyler için kısmi diferensiyel denklemlerini elde eden G. Monge tarafından keşfedilmiştir. Daha sonra regle yüzeyler bir-parametrelili doğruların kümesi tarafından oluşturulmuş ve V.Hlavati ve J. Hoschek tarafından araştırılmıştır. Regle yüzey teorisi kinematiğe uygulanabilir, bir konudur. Özellikle bir-parametrelili kapalı hareketlerin çalışılması kinematikte J. Steiner ve A. Holditch in çalışmalarından sonra ilgi çekici bir konu haline gelmiştir.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1 Lorentz Uzayı.....	2
2.2 Yarı-Riemann Manifoldları.....	3
2.3 IR_1^3 Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım	5
2.4 IR_1^3 Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler.....	10
2.5 IR_1^3 Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler	13
3.NULL EĞRİLİ REGLE YÜZEYLER	14
3.1 Dayanak Eğrili Spacelike Anadoğruları Null Olan Regle Yüzeyler.....	14
3.2 Dayanak Eğrili Null Anadoğruları Null Olan Darboux Çatısı Regle Yüzeyler	21
3.3 Dayanak Eğrili Null Anadoğruları Null Olan B-scroll Yüzeyler	23
4. ÖRNEKLER.....	29
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	34
KAYNAKLAR.....	35
ÖZGEÇMİŞ.....	37

ÖZET

NULL EĞRİLİ REGLE YÜZEYLER

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde regle yüzeyin tarihi gelişimi incelenmiştir. İkinci Bölümde ise tezde kullanılacak olan ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümün birinci kısmında Null doğrultmanlı Timelike Regle Yüzeyler, ikinci kısmında null eğrili ve anadağruları null olan doğrultmanlı, null doğrultmanlı Darboux çatılı ve son olarak null eğrili ve null doğrultmanlı Cartan ve Darboux çatılı Regle Yüzeyler incelenmiştir. Ayrıca bu yüzeylerin Gauss eğrilikleri, dağılma parametreleri, açılabilir olmaları, striksiyon eğrileri, ortogonal yörüngeleri incelenmiş ve örneklerle desteklenmiştir. Dördüncü bölümde ise örneklerle yer verilmiş olup, son bölümde ise sonuç ve önerilerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Null Eğri, Regle Yüzeyler, Eğrilikler, Darboux çatısı

ABSTRACT

ON THE RULED SURFACES WITH NULL RULING

This thesis consists of five chapters. At the first chapter historical development of ruled surfaces are given. The second chapter some fundamental definition and theorems that we used in this thesis are given. In the third chapter, first section time like ruled surface, which is null curve, in the second section, timelike ruled surface with darboux frame, in the last section, b-scroll surface are given. In the fourth chapter some examples are given. Final chapter conclusion is given. More ever we give distribution of parameter, gauss curvature, striction of curve, orthogonal trajectory of ruled surface.

Keywords: Null Curve, Ruled Surfaces, Curvatures, Darboux frame.

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3. 1: Komşu anadoğruları ile verilen regle yüzey.....	17
Şekil 3. 2: Komşu anadoğruları ile verilen regle yüzey.....	25
Şekil 4. 1: V null üreteçli bir regle yüzey.....	29
Şekil 4. 2: Merkez normal yüzey	30
Şekil 4. 3: B-Scroll yüzey.....	32
Şekil 4. 4: Null eğrili regle yüzey	33

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbf{B}$	: Binormal vektör alanı
$\mathbf{D}$	: Riemann manifoldu üzerindeki koneksiyon
D	: Riemann koneksiyonu
$\mathbf{E}^n$	: n-boyutlu Öklid uzay
κ	: Eğrilik
$\mathbf{k}_i$	: i-inci eğrilik
$\mathbf{N}$	: Asli normal vektör alanı
$\mathbf{P}_X$	: Regle yüzeyin dağılma parametresi
$\mathbb{R}_1^3$	: Minkowski 3-uzayı
$\mathbf{R}$	: Riemann eğrilik tensörü
$\mathbf{S}$	: Şekil operatörü
$\mathbf{T}$	: Teget vektör alanı
$T_M(\mathbf{P})$	: $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
τ	: Torsiyon
ν	: İndeks
$\chi(M)$	: M nin vektör alanları uzayı
$\mathbf{X}$	: Doğrutman vektör
ξ	: M manifoldun birim normal vektör alanı
∇	: Yarı-Riemann manifoldu üzerindeki koneksiyon
$\varphi(t, \nu)$	: Regle yüzey

1. GİRİŞ

Regle yüzeyler teorisi hem yüzey teorisi hem de E-Study dönüşümü yardımıyla bir parametrelili regle yüzeylerin geometrisi incelenerek geliştirilmiş vebir parametrelili kapalı hareketler teorisi ilginç bir hale gelmiştir. Daha sonra, regle yüzeyler geometrisi kinematik ve uzaysal mekanik çalışmalarında kullanılmaya başlanmıştır. Özellikle, Alman matematikçi H.R. Müller bu konuda pek çok çalışma yapmıştır.

Regle yüzeyler, özellikle açılabilir regle yüzeyler; arabalar, gemiler, ürü nimalatı, katı cisim ve örnek temelli nesne tanıma sisteminin hareket analizi ve simülasyon gibi bir çok alanlarda tasarlama işlemlerinde kullanılmaktadır.

Bu çalışmaları takiben, son zamanlarda Lorentz metriği kullanılarak, daha önce öklidyen geometride verilen bir çok tanım ve teoremler tekrardan 3-boyutlu Minkowski uzayında ele alınmıştır. Örnek olarak, 3-boyutlu Minkowski uzayında A. Turgut ve H. H. Hacısalihoğlu tarafından spacelike ve timelike regle yüzeyler için dağılıma parametresi ve boğaz noktası incelenmiştir.

Minkowski uzayı adını, uzayın üç boyutlu zamanın boyutunu birleştiren dört boyutlu bir uzay zamanı olabildiğini 1907.li yıllarda özel izafiyet teorisinde yardımıyla fark eden ünlü Alman matematikçi Hermann Minkowski'den almıştır. Aslında ilk olarak bu çalışmaları izafiyet teorisi ile bilinen Albert Einstein ele almıştır.

Lorentz metriği ile verilen ve özel fî uzayı olarak da bilinen Öklidyen uzayına Minkowski uzay zamanı denir. Ayrıca, bir Lorentz uzayı Minkowski uzay zamanının bir hiperyüzeyidir. Bu konu ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmada, 3-boyutlu Minkowski uzayındaki spacelike ve timelike regle yüzeylerden farklı olarak null eğrili regle yüzeyler konusunu ele alacağız. Bu konuda daha önce yapılmış çalışmaları kullanarak, null eğrili regle yüzeyler ve özellikleri incelenmiştir. Genel anlamda null eğrili, null doğrultmanlı ve null çatılı çalışmalar temel alınmıştır. Ayrıca Darboux çatısı ile ilişkileri, eğrilikler ile incelemeler yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu tezde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Kavramlar (H.H.H., 1983 ve O'Neill, 1983) den alınmıştır.

2.1 Lorentz Uzayı

Tanım 2.1.1 V bir reel vektör uzayı olmak üzere. V üzerinde tanımlı

$$G: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve non-dejenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım, V vektör uzayına ise bir skalar çarpım uzayı denir.

Tanım 2.1.2 V ve W sırasıyla bir skalar çarpım uzayı ve üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu alt uzayı olsunlar. Burada g skalar çarpımının indeksi diye V nin boyutuna denir.

g skalar çarpım indeksi v ise $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir. Skalar çarpım indeksi ise, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.3 Bir skalar çarpım uzayına V diyelim. v , V nin indeksi olsun $v = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir lorentz uzayı denir.

Tanım 2.1.4 V bir Lorentz uzayı olsun. $v \in V$ için

$g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike vektör,

$g(v, v) < 0$ ise v ye timelike vektör,

$g(v, v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye null (lightlike) vektör

ve $\|v\| = |g(v, v)|^{1/2}$ reel sayısına v vektör uzayının normu denir.

V Lorentz uzayında tüm timelike vektörlerin cümlesi Γ olsun. $u \in \Gamma$ için

$$C(u) = \{v \in \Gamma \mid g(v, v) < 0\} \setminus$$

u vektörünü kapsayan V Lorentz uzayının timekonisi denir.

Teorem 2.1.5 V bir Lorentz uzayı ve v, w de bu uzayda timelike vektörler olsun. Bu durumda

$$i) \quad g(v, w) \geq \|v\| \cdot \|w\|$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik sağlanır ancak ve ancak v ve w vektörleri lineer bağımlıdır.

$$ii) \quad v, w \text{ timelike vektörleri aynı timekonide ise}$$

$$g(v, w) = -\|v\| \cdot \|w\| \cosh \theta$$

olacak şekilde birtek $\theta \geq 0$ sayısı vardır. Bu θ sayısı v ve w timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır.

Bu spacelike vektörler için

$$g(v, w) \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 2.1.6 V bir Lorentz uzayı, W de V nin bir altuzayı olsun. $\dim W \geq 2$ ise bu halde aşağıdaki önermeler denktirler.

- i) W timelike uzayı ise W bir Lorentz vektör uzayıdır.
- ii) W uzayı iki adet doğrusal bağımsız olan null vektör içerir.
- iii) W uzayı bir adet timelike vektör içerir.

2.2 Yarı-Riemann Manifolları

Tanım 2.2.1 Diferensiyellenebilir bir manifold M olsun. Bir metrik tensör diye M üzerinde simetrik, non-dejenere ve $(0,2)$ -tipinden sabit indeksli g tensör alanına denir.

Tanım 2.2.2 R^n , n – boyutlu standart reel vektör uzayını alalım. R^n üzerinde her $p \in R^n$ ve $v_p, w_p \in T_p R^n$ olmak üzere

$$\langle v_p, w_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} v_i w_i - \sum_{i=n-v+1}^n v_i w_i$$

eşitliği ile verilen v -indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı-Öklidyen uzay denir. $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olması şartıyla, sırasıyla v_i ve w_i ler v_p ve w_p tanjant vektörlerin bileşenidir.

Tanım 2.2.3 $\mathbb{R}_v^n$ yarı-Öklidyen uzayı olsun. $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}_1^n$ yarı öklidyen uzayına Minkowski n -uzay denir.

Tanım 2.2.4 M ve g sırasıyla diferensiyellenebilir manifold ve M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olsun. (M, g) ikilisine yarı-Riemann manifoldu denir.

Bundan böyle (M, g) yarı-Riemann manifoldu sadece M ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.5 M yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine M yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir.

Tanım 2.2.6 M yarı-Riemann manifoldu olsun. $\dim M \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir Lorentz manifoldu denir.

Tanım 2.2.7 Lorentz manifoldu M olsun ve bir eğri $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ olsun. T, α eğrisinin teğet vektör alanı olmak üzere

$g(T, T) > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,

$g(T, T) = 0$ ise α eğrisine timelike eğri,

$g(T, T) = 0$ ve $T \neq 0$ ise α eğrisine null eğri denir

Tanım 2.2.8 M ve $\bar{M}$ sırasıyla yarı-Riemann manifold ve M nin bir altmanifoldu olmak üzere. $j: \bar{M} \rightarrow M$ inclusion dönüşümü için her $p \in \bar{M}$ için

$$(j(g))(p) = g(j(p))$$

biçiminde tanımlanan $j(g)$ dönüşümü eğer $\bar{M}$ üzerinde bir metrik tensörse $\bar{M}$ ye M nin bir yarı- Riemann alt manifoldu denir.

Tanım 2.2.9 M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu $\bar{M}$ ve ayrıca M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun. M yarı-Riemann altmanifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon diye

$$D: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$$

indirgenmiş fonksiyona denir. Burada $\chi(\bar{M})$ ile $\bar{M}$ nin her bir P noktasına $T_P \bar{M}$ de bir tanjant vektör karşılık getiren vektör alanlarının $\chi(\bar{M})$ -modülü gösterilmektedir.

Teorem 2.2.10 M nin yarı -Riemann altmanifoldu $\overline{M}$, ve D de M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olsun. $\forall V, W \in \chi(\overline{M})$ için

$$\overline{D}_V W = \tan D_V W$$

şekinde tanımlanan $\overline{D}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde bir Levi-Civita koneksiyonudur.

Tanım 2.2.11 V, M nin bir yarı -Riemann altmanifoldu olsun.

$$\Pi : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \rightarrow \chi(\overline{M})$$

$$(V, W) \rightarrow \Pi(V, W) = \text{nor} D_V W$$

şeklinde tanımlı $\mathfrak{S}(\overline{M})$ -bilineer ve simetrik fonksiyonuna $\overline{M}$ nin şekil tensörü (veya ikinci temel form tensörü) denir.

Tanım 2.2.12 M nin yarı-Riemann hiperyüzeyi diye n -boyutlu bir M yarı-Riemann manifoldunun $(n - 1)$ -boyutlu bir $\overline{M}$ yarı-Riemann alt manifolduna denir.

Tanım 2.2.13 M nin yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun ve N de $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı olmak üzere. $\forall V, W \in \chi(\overline{M})$ için

$$g(S(V), W) = g(\Pi(V, W), N)$$

şeklindeki (1,1) tipinden S tensör alanına $\overline{M}$ nin N den elde edilen şekil operatörü denir.

2.3 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım

$\mathbb{R}_v^n$, n -boyutlu, v -indeksli bir yarı-Öklidyen uzayın, boyutu 3 ve indeksi 1 olsun. O halde $\mathbb{R}^3$ üzerinde her $p \in \mathbb{R}^3$ ve $v_p, w_p \in T_p \mathbb{R}^3$ için

$$\langle v_p, w_p \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3$$

eşitliğiyle verilen ve indeksi 1 olan $(+ + -)$ metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya 3-boyutlu Minkowski uzayı denir ve IR_1^3 ile gösterilir.

Tanım 2.3.1 $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında iki vektör v ve w olsun. $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $w = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$(v_3 w_2 - v_2 w_3, v_1 w_3 - v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

vektörüne v ve w nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir ve $v \times w$ veya $v \wedge w$ şeklinde gösterilir. (Akutagawa ve Nishikawa, 1990)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \dots ise \\ 0, i \neq j \dots ise \end{cases} \text{ ve } e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$v \wedge w = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$v \wedge w = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada $e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 \wedge e_3 = -e_1, e_3 \wedge e_1 = -e_2$ olarak alınmıştır. Ayrıca saat yönünün tersi pozitif yön olarak ele alınmıştır. Bu durumda

$$v \wedge w = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.2

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında üç vektör $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $w = (w_1, w_2, w_3)$ olsun. Bu durumda Tamamla.

$$\text{i) } \langle u \wedge v, w \rangle = -\det(u, v, w) \quad (2.3)$$

$$\text{ii) } (u \wedge v) \wedge w = -\langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u \quad (2.4)$$

$$\text{iii) } \langle u \wedge v, u \rangle = 0 \text{ ve } \langle u \wedge v, v \rangle = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{iv) } (u \wedge v, u \wedge v) = -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2 \quad (2.6)$$

dir.

İspat :

$$\text{i) } (2.1) \text{ den } u \wedge v = (u_3 v_2 - u_2 v_3, u_1 v_3 - u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

der.

$$\langle u \wedge v, w \rangle = u_3 v_2 w_1 - u_2 v_3 w_1 + u_1 v_3 w_2 - u_3 v_1 w_2 - u_1 v_2 w_3 + u_2 v_1 w_3 \quad (2.7)$$

elde edilir.

$$-\det(u, v, w) = -\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$-\det(u, v, w) = u_1 v_2 w_3 + u_1 v_3 w_2 + u_2 v_1 w_3 - u_2 v_3 w_1 - u_3 v_1 w_2 + u_3 v_2 w_1$$

(2.8)

Bulunur. (2.7) ve (2.8) den

$$\langle u \wedge v, w \rangle = -\det(u, v, w)$$

dir.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad (u \wedge v) \wedge w &= -\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_3 v_2 - u_2 v_3 & u_1 v_3 - u_3 v_1 & u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= (-u_1 v_3 w_3 + u_3 v_1 w_3 + u_1 v_2 w_2 - u_2 v_1 w_2) e_1 + (u_3 v_2 w_3 - u_3 v_2 w_3 \\ &\quad -u_1 v_2 w_1 + u_2 v_1 w_1) e_2 + (u_3 v_2 w_2 - u_2 v_3 w_2 - u_1 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_1) e_3 \end{aligned}$$

elde edilir. $(u \wedge v) \wedge w$ vektörünün birinci bileşeni $u_1 v_1 w_1$, ikinci bileşeni $u_2 v_2 w_2$ ve üçüncü bileşeni de $u_3 v_3 w_3$ ifadeleri birleştirilip bir çıkarırsak olursa

$$\begin{aligned} (u \wedge v) \wedge w &= (-u_1 v_3 w_3 + u_3 v_1 w_3 + u_1 v_2 w_2 - u_2 v_1 w_2 - u_1 v_1 w_1 + u_1 v_1 w_1) e_1 \\ &\quad + (u_3 v_2 w_3 - u_2 v_3 w_3 - u_1 v_2 w_1 + u_2 v_1 w_1 - u_2 v_2 w_2 + u_2 v_2 w_2) e_2 \\ &\quad + (u_3 v_2 w_2 - u_2 v_3 w_2 - u_1 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_1 - u_3 v_3 w_3 + u_3 v_3 w_3) e_3 \\ &= (-u_1 w_1 - u_2 w_2 + u_3 w_3)(v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) \\ &\quad + (v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3)(u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) \\ &= -\langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u \end{aligned}$$

elde edilir

$$\text{iii)} \quad (2.3) \text{ den, } (u \wedge v, u) = -\det(u, v, u) = 0 \text{ dır.}$$

$$\text{Aynı düşünce ile } (u \wedge v, v) = -\det(u, v, v) = 0 \text{ dır.}$$

$$\text{iv)} \quad (2.3), (2.4) \text{ ve determinant fonksiyonu özelliklerinden}$$

$$(u \wedge v, u \wedge v) = -\det(u, v, u \wedge v)$$

$$= \det(u, u \wedge v, v)$$

$$\begin{aligned}
&= -\det(u \wedge v, u, v) \\
&= \langle (u \wedge v) \wedge v, v \rangle \\
&= \langle -\langle u, u \rangle v + \langle v, u \rangle u, v \rangle \\
&= -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.3.3 $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör u ve v olsun.

- i) u ve v spacelike vektör ise $u \wedge v$ bir timelike vektördür.
- ii) u spacelike ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür,
- iii) u spacelike ve v null vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise $u \wedge v$ null vektör, eğer $\langle u, v \rangle \neq 0$ ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.
- iv) u ve v null vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.
- v) u timelike ve v null vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.
- vi) u ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

İspat:

- i) u ve v spacelike vektör olduğundan $\langle u, u \rangle > 0, \langle v, v \rangle < 0$ ve $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$, $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ dir. (2.6) dan

$$\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = (\langle u \wedge v \rangle)^2 - \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle = (\langle u, v \rangle)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2$$

dir. (2.3) den $(\langle u \wedge v \rangle)^2 - \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$ elde edilir ve buradan $(\langle u \wedge v \rangle)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$ bulunur. Burada u ve v vektörleri lineer bağımsızdır. Eğer lineer bağımlı iseler $\langle u \wedge v \rangle = 0$ dir. Bu nedenle

$(\langle u \wedge v \rangle)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \neq 0$ dir. O halde $\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle < 0$ dir. Dolayısıyla, $u \wedge v$ vektörü bir timelike vektördür.

- ii) u spacelike ve v timelike vektör olduğundan $\langle u \wedge v \rangle > 0$, $\langle v \wedge v \rangle < 0$ ve $\|u\|^2 = \langle u \wedge u \rangle, -\|v\|^2 = \langle v \wedge v \rangle$ dir. (2.6) dan

$$\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = (\langle u \wedge v \rangle)^2 - \langle u \wedge u \rangle \langle v \wedge v \rangle$$

$$= (\langle u \wedge v \rangle)^2 + \|u\|^2 \|v\|^2$$

elde edilir. Buradan $\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = 0$ dir. O halde $u \wedge v$ vektörü spacelike vektördür.

iii) u spacelike ve v null vektör olduğundan $\langle u \wedge u \rangle = 0$ ve $\langle v \wedge v \rangle = 0$ dir. (2.6) dan

$$\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = (\langle u \wedge v \rangle)^2 - \langle u \wedge u \rangle \langle v \wedge v \rangle = (\langle u, v \rangle)^2$$

dir.

Eğer $\langle u \wedge v \rangle = 0$ ise $\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = 0$ dir. O zaman $u \wedge v$ null vektördür. Eğer $u \wedge v \neq 0$ ise $\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = 0$ dir. Buradan $u \wedge v$ spacelike vektördür.

iv) u ve v null vektör olduğundan $\langle u, u \rangle = 0$ ve $\langle v, v \rangle = 0$ dir. (2.6) dan

$$\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = (\langle u \wedge v \rangle)^2 - \langle u \wedge u \rangle \langle v \wedge v \rangle = (\langle u, v \rangle)^2$$

elde edilir. (O'Neill, 1983) den ortogonal iki null vektör lineer bağımlıdır. Bu durumda $u \wedge v = 0$ dir. O halde $\langle u, v \rangle \neq 0$ dir. Buradan $\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = 0$ olduğundan $u \wedge v$ spacelike vektördür.

v) u timelike ve v null vektör olduğundan $\langle u, u \rangle < 0$ ve $\langle v, v \rangle = 0$ dir. (2.6) dan

$$\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = (\langle u \wedge v \rangle)^2 - \langle u \wedge u \rangle \langle v \wedge v \rangle = (\langle u, v \rangle)^2$$

dir. (O'Neill, 1983) den $\langle u, v \rangle \neq 0$ dir. O halde $u \wedge v$ spacelike vektördür.

vi) u ve v timelike vektör olduğundan $\langle u, u \rangle < 0$ ve $\langle v, v \rangle < 0$ ve $-\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$, $-\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ dir. (2.6) dan

$$\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = (\langle u \wedge v \rangle)^2 - \langle u \wedge u \rangle \langle v \wedge v \rangle = (\langle u, v \rangle)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2$$

elde edilir. Teorem 2.3.2. nin i) şikkından

$$|\langle u, v \rangle| \geq \|u\| \|v\|$$

$$|\langle u, v \rangle| \geq \|u\|^2 \|v\|^2$$

$$|\langle u, v \rangle| - \|u\| \|v\| > 0$$

bulunur. (O'Neill, 1983) den $\langle u, v \rangle \neq 0$ dir. O halde $u \wedge v$ spacelike vektördür.

2.4 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler

M yarı-Riemann manifoldu olarak $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayını ve $\overline{M}$ yarı-Riemann hiperyüzeyi olarak da (U, ϕ) parametrizasyonu ile verilen

$$\phi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v))$$

$\phi(U)$ yüzeyini göz önüne alalım. $\left\{ \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\}$ lineer bağımsız olmak üzere

yüzeyin vektör alanlarının bir bazı $\left\{ \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\}$ dir. Kısalık için $\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$ yu ϕ_u

ile göstereceğiz. Yüzeyin bir normali $N = \phi_u \wedge \phi_v$ dir. Gerçekten (2.5) den $\langle N, \phi_u \rangle = 0$ ve $\langle N, \phi_v \rangle = 0$ dir. Yüzeyin birinci temel formunu hesaplamadan önce bazı eşitlikleri verelim.

$$E = \langle \phi_u, \phi_u \rangle, F = \langle \phi_u, \phi_v \rangle, G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle \quad (2.9)$$

dir. Buradan $\langle N, N \rangle = \langle \phi_u \wedge \phi_v, \phi_u \wedge \phi_v \rangle$ ve (2.6), (2.9) dan

$$\langle N, N \rangle = (\langle \phi_u, \phi_v \rangle)^2 - \langle \phi_u, \phi_u \rangle \langle \phi_v, \phi_v \rangle$$

$$\langle N, N \rangle = F^2 - EG$$

elde edilir. Şimdi yüzeyin I. temel formunu hesaplayalım. ϕ nin tam diferensiyeli

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv$$

dir.

$$I = (ds)^2 = \langle d\phi, d\phi \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle \frac{d\phi}{du}, \frac{d\phi}{du} \right\rangle (du)^2 + 2 \left\langle \frac{d\phi}{du}, \frac{d\phi}{dv} \right\rangle dudv + \left\langle \frac{d\phi}{dv}, \frac{d\phi}{dv} \right\rangle (dv)^2 \\ &= E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{(ds)^2}{(dv)^2} = E \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G$$

ve $\lambda = \frac{du}{dv}$, $I' = \frac{(ds)^2}{(dv)^2}$ olmak üzere

$$I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$$

elde edilir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki $I = (ds)^2$ indirgenmiş metriğinin pozitif tanımlı veya indefinit olup olmadığını incelemek ile $I = (dv)^2 I'$ olduğundan, I' yü incelemek aynıdır.

Tanım 2.4.1 $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. Her $p \in \overline{M}$ ve her

$w_p, v_p \in T_p \overline{M}$ için

$$\langle v_p, w_p \rangle = 0 \Rightarrow v_p = 0$$

önermesi sağlanıyor ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ uzayında non-dejenere yüzey denir (Beem ve Ehrlich,1981).

$\overline{M}$ üzerinde metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

dir. M yüzeyi üzerindeki metriğin non-dejenere değildir ancak ve ancak

$$\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0$$

dır.

Bir başka ifadeyle, $\overline{M}$ yüzeyi non-dejenere yüzeydir ancak ve ancak yüzeyin normal null vektör alanıdır.

Tanım 2.4.2 $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olmak üzere. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike yüzey denir.

Teorem 2.4.3 $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında

$$\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$$

şeklinde (U, φ) parametrizasyonu ile verilen bir yüzeyin spacelike yüzeydir ancak ve ancak yüzeyin normali timelike bir vektör alanıdır. Yani

$$\langle N, N \rangle < 0$$

dır. Burada $\overline{M}$ yüzeyinin normal vektör alanı N ile gösterilmiştir.

İspat:

$\overline{M}$ yüzeyi üzerine $I = (dv)^2 I'$ ve $I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$ şeklinde indirgenmiş metrikleri verilsin. ikinci dereceden bu denklemin diskriminantı λ ya göre,

$$\Delta = 4(F^2 - EG) = 4\langle N, N \rangle$$

dir. $I' > 0$ dır ancak ve ancak $\Delta < 0$ dır. Böylece $\langle N, N \rangle < 0$ dır.

Tanım 2.4.4 $\overline{M}$, $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında bir yüzey olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir timelike yüzey denir.

Teorem 2.4.5 $\overline{M}$ yüzeyinin $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında bir timelike yüzeydir ancak ve ancak yüzeyin normali spacelike bir vektör alanıdır, yani

$$\langle N, N \rangle > 0$$

olmasıdır.

İspat:

$I = (dv)^2 I'$ ve $I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$, M yüzeyi üzerine indirgenmiş metriktir. ikinci dereceden olan bu denklemin λ ya göre diskriminantı

$$\Delta = 4(F^2 - EG) = 4\langle N, N \rangle$$

dir. I' nun Lorentz metriğidir ancak ve ancak $\Delta > 0$ dır. Burada bir $\overline{M}$ yüzeyi timelike yüzeydir ancak ve ancak yüzeyin normali spacelike vektör alanıdır.

Tanım 2.4.6 (Gauss Eğriliği): $\overline{M}$, $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında bir yüzey ve S de $\overline{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris olsun. $p \in \overline{M}$ için

$$K(p) = \varepsilon \det S_p$$

$\overline{M}$ yüzeyinin bir p noktasındaki Gauss Eğriliği, $K: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna da $\overline{M}$ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. Burada $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ dir. N , $\overline{M}$ yüzeyinin normal vektör alanıdır.

$\overline{M}$ yüzeyi spacelike ise $\varepsilon = \langle N, N \rangle = -1$ dir. O zaman

$$K = -\det S$$

ve $\overline{M}$ yüzeyi timelike ise $\varepsilon = \langle N, N \rangle = +1$ dir. O halde

$$K = +\det S$$

olur.

2.5 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler

3-boyutlu Öklid uzayında, regle yüzey ve regle yüzeylere ait bazı kavramları verilmiştir.

Tanım 2.5.1 $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında, verilen bir ℓ doğrusunun, verilen α eğrisi boyunca hareket ettirilerek elde edilen yüzeye regle yüzey denir. Burada ℓ doğrusuna, regle yüzeyin anadoğrusu ve α eğrisine, regle yüzeyin dayanak eğrisi denir.

Tanım 2.5.2 $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir.

Tanım 2.5.3 $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Bu yüzeyin komşu iki anadoğrusunun ortak dikmenin esas anadoğru üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir.

Tanım 2.5.4 $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında açılabilir olmayan regle yüzeyin anadoğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine boğaz (striksiyon) çizgisi denir.

Tanım 2.5.5 $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında regle yüzeyin anadoğrularının herbirini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir.

3. NULL EĞRİLİ REGLE YÜZEYLER

3.1 Dayanak Eğrisi Spacelike Anadoğruları Null Olan Regle Yüzeyler

Bu kesimde dayanak eğrisi spacelike anadoğruları null olan regle yüzeyler ve özellikleri incelenecektir. Ayrıca bu regle yüzeylerin gauss eğriliği, striksiyon eğrisi, açılabilirliği ve ortogonal yörüngesi ele alınacaktır.

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi ve $\alpha'(t)$, $\forall t \in I$ için teğet doğrusu spacelike olsun. X anadoğrusu null olarak alınırsa, X anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile elde edilen regle yüzeyin parametrizasyonu, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ ve $t \in I, v \in J$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda 3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayında bir regle yüzey elde etmiş oluruz. Bu yüzeye kısaca null üreteçli timelike regle yüzey de denir.

$\mathbb{R}_1^3$ üzerinde spacelike eğri ve D , Levi-Civita koneksiyonu olsun. O halde α eğrisi (1) nolu denklemde S-Frenet denklemlerini sağlar. Öyleki $F = \{T, N, Z\}$ ortonormal tabanı

$$\langle T, T \rangle = 1, \quad \langle N, N \rangle = 1, \quad \langle Z, T \rangle = 0, \quad \langle Z, Z \rangle = -1,$$

$$N = T \wedge Z.$$

alındığında,

$$a = \langle D_T Z, T \rangle,$$

$$b = -\langle T, D_T N \rangle,$$

$$c = \langle D_T Z, N \rangle,$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T N \\ D_T Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & a \\ -b & 0 & c \\ a & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ Z \end{bmatrix}, \quad (1)$$

elde edilir.

Şimdi bu matrisin bileşenlerini T vektör alanı yönünde türev alınırsa,

$$\varphi_t = \alpha'(t) + v D_T X.$$

ifadesinde

$$D_T X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 Z, \quad (2)$$

ve

$$X = C_1 T + C_2 N + C_3 Z \quad (3)$$

bulunur

$$Z = \frac{1}{k} (X - \langle X, T \rangle T),$$

ifadeleri yerlerine yazılırsa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ katsayıları bulunur. Z bağıntısı (3) nolu denklemde yerine yazılırsa

$$X = C_1 T + C_2 N + C_3 k X - C_3 k \langle X, T \rangle T.$$

elde edilir. $C_3 = \frac{1}{k}$ olduğundan $C_1 = \langle X, T \rangle, C_2 = 0$ ve $X = \langle X, T \rangle T + \frac{1}{k} Z$ yazılırsa

$$D_T X = \langle D_T X, T \rangle T + \left(b \langle X, T \rangle + \frac{c}{k} \right) N + a \langle X, T \rangle Z.$$

elde edilir. Eğer v parametresi sabit alınırsa, $\varphi_v : I \times \{v\} \rightarrow M$ eğrisi elde edilebilir.

Bu durumda bu eğrinin teğet vektörü

$$A = (1 + v \langle D_T X, T \rangle) T + v a (\langle X, T \rangle) \frac{1}{k} (X - \langle X, T \rangle T)$$

veya (3) nolu denklem yerine yazılırsa

$$A = (m \langle X, T \rangle + n) T + \frac{m}{k} Z. \quad (4)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1 M, X null üreteçli bir regle yüzey olsun. O halde M nin anadoğrusu boyunca teğet düzlemlerinin çakışık olması için gerek ve yeter şart

$$b\langle X, T \rangle + \frac{c}{k} = 0 .$$

dir.

Teorem 3.1.2 M, X null üreteçli bir regle yüzey olsun. M açılabilir ancak ve ancak

$$c = -kb\langle X, T \rangle$$

dir.

Teorem 3.1.3 M timelike bir regle yüzey olsun. M nin anadoğrularından herbiri hem asimptotik hemde jeodeziktir.

İspat 3.1.3 $\mathbb{R}_1^3$ de herbir anadoğru jeodezik olduğundan böylece $D_X X = 0$ olur. Burada Gauss denkleminde $\bar{D}$, M nin Levi-Civita konneksiyonu S , M nin şekil operatörü olmak üzere

$$D_X X = \bar{D}_X X + \langle S(X), X \rangle N,$$

elde edilebilir. Ayrıca $\bar{D}_X X \in \chi(M)$ ve $\langle S(X), X \rangle N \in \chi^+(M)$ olduğundan

$\chi(\mathbb{R}_1^3) = \chi(M) \oplus \chi^+(M)$ ve $\chi(M) \cap \chi(M) = \{0\}$ den $\bar{D}_X X = 0$ ve $\langle S(X), X \rangle = 0$. elde edilir.

Teorem 3.1.4 M timelike bir regle yüzey olsun. Dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı, birim normal vektör alanı ve binormal vektör alanı,

$$Z \wedge T = N, \quad Z \wedge N = -T,$$

$$T \wedge N = -Z$$

dir.

İspat 3.1.4 İspat doğrudan hesaplanabilir.

Teorem 3.1.5 M timelike bir regle yüzey olsun. O halde M yüzeyinin $K(p)$ Gauss eğrilik fonksiyonu her $p \in M$ noktasında

$$K(p) \leq 0$$

dir.

İspat 3.1.5 $p \in M$ noktasında T spacelike olsun. $\chi(M)$ nin ortogonal tabanı $\{T, Z\}$ vektör alanları olmak üzere, M nin S şekil operatörü ile matris formu

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(T), T \rangle & \langle S(Z), T \rangle \\ \langle S(T), Z \rangle & \langle S(Z), Z \rangle \end{bmatrix}.$$

yazılabilir. Böylelikle Gauss eğriliği,

$$K = \det S = \frac{1}{k^2} \langle S(T), T \rangle \langle S(Z), Z \rangle - \langle S(T), Z \rangle^2$$

olur. $\mathbb{R}_1^3$ de her bir anadoğru jeodezik olduğundan $D_X X = \bar{D}_X X + \langle S(X), X \rangle N$ ve $D_X X = 0$ dir. Ayrıca $\underbrace{\bar{D}_X X}_{\in \chi(M)} = -\varepsilon \underbrace{\langle S(X), X \rangle}_{\in \chi^\perp(M)} N$, $\bar{D}_X X = 0$ ve $\langle S(X), X \rangle = 0$ elde edilir.

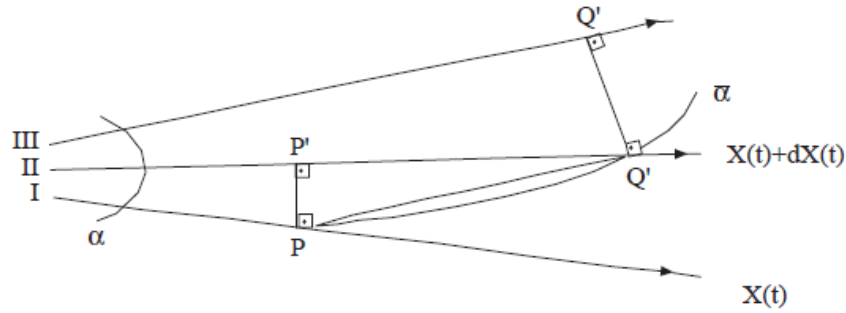
Böylece $p \in M$ noktasında,

$$K = \det S = -\frac{1}{k^2} \langle S(T), X \rangle^2 \leq 0$$

olduğu görülmektedir. Bir $\varphi(t, u)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\bar{\alpha}(t)$ yervektörü dayanak eğrisinin $\bar{\alpha}(t)$ yervektörü, $X(t)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\bar{\alpha}(t, u) = \alpha(t) + \bar{u}X(t); \quad (5)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $\bar{X}(t)$ ve $\bar{X}(t) + d\bar{X}(t)$ olan komşu üç anadoğrusu verilsin (Şekil 3.1).



Şekil 3.1: Komşu anadoğruları ile verilen regle yüzey

P, P' ve Q, Q' komşu anadoğrularının ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$X(t) \wedge (X(t) + D_T X(t) dt) = X(t) \wedge D_T X(t)$$

bağıntısından dolayı $X \wedge D_T X$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\langle X, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0, \langle X + D_T X ds, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0 \quad (6)$$

olacağından $\langle D_T X, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0$ elde edilir. Ayrıca (5) den dayanarak α eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınır ve (6) den dolayı,

$$\langle D_T X, \frac{d\bar{a}}{ds} \rangle = 0 \quad (7)$$

veya $\langle D_T X, T + \frac{d\bar{u}}{ds} X + \bar{u} D_T X \rangle = 0$ veya $\langle D_T X, T \rangle + \bar{u} \|D_T X\|^2 = 0$ bağıntısından

$$\bar{u} = -\frac{\langle D_T X, T \rangle}{\|D_T X\|^2} = -\frac{a}{a^2 + c^2} \quad (8)$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yervektörü için $\langle D_T X, D_T X \rangle \neq 0$ olmak üzere,

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) - \frac{\langle D_T X, T \rangle}{\langle D_T X, D_T X \rangle} X(t).$$

elde edilir. Eğer $\|D_T X\| = 0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (8) bağıntısından, $\bar{u} = 0$ veya $\langle D_T X, T \rangle = 0$ alınması yeterli olacaktır.

M regle yüzeyinin dayanak eğrisi olarak boğaz eğrisini alalım. Bu durumda

$$\bar{u} = \frac{\langle D_T X, T \rangle}{\langle D_T X, D_T X \rangle} = 0.$$

veya $\bar{u} = \frac{a}{a^2 - c^2}$ olur. Buradan $D_T X$ ve Z lineer bağımlı olduğundan,

$$\lambda D_T Z = \frac{d\bar{\alpha}}{dt} \wedge Z.$$

olur. Böylelikle

$$\lambda = \frac{\langle T \wedge Z, Z' \rangle}{\langle Z', Z' \rangle} = \frac{\det(T, Z, Z')}{\langle Z', Z' \rangle} = \frac{\det(T, Z, Z')}{-1}$$

veya $\det(T, Z, Z') = -\lambda$ elde edilir.

λ ya timelike regle yüzeyin dağılma parametresi denir. Aym zamanda P_x ile de gosterilir. Eğer herbir anadoğru ile sabit açı yapan bir eğri varsa bu eğriye M nin pseudo-ortogonal yörüngesi denir.

Teorem 3.1.6 Bir M timelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

Teorem 3.1.7 Timelike bir regle yüzey M olsun. M nin her noktasından birtek ortogonal yörünge geçer.

Teorem 3.1.8 Açılabilir olmayan timelike bir regle yüzey M olsun. M nin herhangi iki anadoğru arasında ortogonal yörüngeler boyunca en kısa uzaklık $\varphi_v : I \rightarrow M$ eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat 3.1.8 $\alpha(s_0)$ ve $\alpha(s_1)$ noktalarından geçen iki doğrultmanı göz önüne alalım.

($s_0 < s_1$ ve $s_0, s_1 \in I$). Bu iki anadoğru arasında, $v =$ sabit ortogonal yörüngesi boyunca elde edilen uzaklığı $J(v)$ ile gösterelim

$$J(v) = \int_{s_0}^{s_1} \|A\| ds,$$

dir.

Burada A yerine yazılırsa

$$J(v) = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{m^2 \langle X, T \rangle^2 + 2mn \langle X, T \rangle + n^2 - \frac{m^2}{k^2}} dt,$$

elde edilir. $J(v)$ değerini minimum yapan değerini bulmak için $J'(v)$ alınırsa

$$v = -\frac{\langle D_T X, T \rangle}{\langle D_T X, D_T X \rangle}.$$

bulunur.

Teorem 3.1.9 Bir regle yüzeyinin Gauss eğriliğinin mutlak değeri, bir doğrultman boyunca, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada minimum değerini alır.

İspat 3.1.9 $\chi(M)$ nin $\{A_0, Z\}$ ortonormal tabanı olsun. M , açılabilir bir regle yüzey olsun. $\chi(M) = \text{sp}\{A_0, Z\}$ ortogonal bir bazdır. $\varphi(t, v)$ noktasında M spacelike regle yüzeyin normalini $\tilde{N} = N_{\varphi(t, v)} = A_0 \wedge Z$ ile gösterelim.

$$A_0 = \frac{A}{\|A\|} = \frac{(m\langle X, T \rangle + n)T + \frac{m}{k}Z}{\sqrt{m^2\langle X, T \rangle^2 + 2mn\langle X, T \rangle + n^2 - \frac{m^2}{k^2}}}$$

Böylece

$$A_0 = \frac{1}{\|A\|} [m\langle X, T \rangle T \wedge Z].$$

den $\langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle = \langle A_0 \wedge Z, A_0 \wedge Z \rangle = \langle A_0 \wedge Z \rangle^2 - \langle A_0, A_0 \rangle \langle Z, Z \rangle = 1$ elde edilir.

Böylece, Gauss eğriliği

$$K = \det S = \frac{1}{k^2} \langle S(A_0), Z \rangle^2$$

veya

$$S(A_0) = \lambda_1 A_0 + \lambda_2 Z,$$

ve

$$S(Z) = \lambda_3 A_0 + \lambda_4 Z$$

den

$$K = \det S = \frac{1}{k^2} \langle S(A_0), Z \rangle^2$$

$$= \frac{m^2 c^2 \langle X, T \rangle^2}{k^4 \|A\|^4}.$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(t, v)}{\partial v} &= \frac{m^2 c^2 \langle X, T \rangle^2}{k^4 \|A\|^4} \frac{[\|T + v D_T X\|^4]^2}{\|A\|^4} \\ &= \frac{m^2 c^2 \langle X, T \rangle^2}{k^4} \frac{4[2\langle T, D_T X \rangle + 2v\langle D_T X, D_T X \rangle]}{\|A\|^5} = 0 \\ &= 2\langle T, D_T X \rangle + 2v\langle D_T X, D_T X \rangle = 0. \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $K(t, v)$ yi minimum yapan değer $\frac{\partial^2 K(t, v)}{\partial^2 v}$ olduğundan merkez nokta

$$v = -\frac{\langle D_T X, T \rangle}{\langle D_T X, D_T X \rangle}$$

elde edilir.

3.2 Dayanak Eğrisi Null Anadoğruları Null Olan Darboux Çatısı Regle Yüzeyler

Bu kesimde dayanak eğrisi null anadoğruları null olan B-Scroll yüzeyler ve özellikler incelenecektir. Ayrıca bu yüzeylerin null çatısı ve darboux çatısı arasındaki eğrilik ilişkileri ele alınacaktır.

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi ve $\alpha'(t)$, $\forall t \in I$ için teğet doğrusu null olsun. Böylece null eğrili çatının denklemleri $k_i = k_i(s)$, $1 \leq i \leq 3$, i . eğrilikler olmak üzere,

$$k_1 = \langle T', N \rangle, \quad k_2 = \langle T', W \rangle, \quad k_3 = \langle N', W \rangle.$$

tanımlanarak

$$\begin{aligned} T' &= k_1 T + k_2 W \\ N' &= -k_1 N + k_3 W, \\ W' &= -k_3 T - k_2 N, \end{aligned} \tag{9}$$

şeklinde ifade edilir.

V anadoğrusu null olarak alınırsa, V anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile elde edilen regle yüzeyin parametrizasyonu, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ ve $t \in I, v \in J$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ \varphi(t, v) &= \alpha(t) + vV(t), \end{aligned}$$

elde edilir.

$\alpha(t)$ noktasında Darboux çatısı $\{T, V, U\}$ alınırsa, T , α eğrisinin teğet vektör alanı olmak üzere, biricik V vektör alanı

$$V = \frac{1}{\langle X, T \rangle} \left\{ X - \frac{\langle X, X \rangle}{2 \langle X, T \rangle} T \right\}, \quad X \in T_{\alpha(t)}M, \quad \langle X, T \rangle \neq 0,$$

şeklinde elde edilir. Burada U vektörü M yüzeyinin spacelike birim normal vector alanıdır. Ayrıca $U = V \times T$ olarak bulunur. Böylece

$$\langle T, T \rangle = \langle V, V \rangle = \langle V, U \rangle = \langle T, U \rangle = 0,$$

$$\langle T, V \rangle = \langle U, U \rangle = 1.$$

alınırsa, $\{T, V, U\}$ Darboux çatısının türevleri ile ilişkisi veren matris formu

$$\begin{bmatrix} T' \\ V' \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_g & 0 & \kappa_n \\ 0 & -\kappa_g & \tau_g \\ -\tau_g & -\kappa_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix}, \quad (10)$$

Şeklinde yazılabilir. Burada, κ_g , κ_n and τ_g sırasıyla geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik torsion olmak üzere $\langle T', V \rangle = \kappa_g$, $\langle T', U \rangle = \kappa_n$, ve $\langle V', U \rangle = \tau_g$ şeklinde tanımlanır.

şimdi M yüzeyinde α eğrisinin $\{T, V, U\}$ Darboux çatısı ile Null eğrili $\{T, N, W\}$ çatı arasında ilişkisini inceleyelim;

Teorem 3.2.1 M , $\mathbb{R}_1^3$ de $\{T, V, U\}$ Darboux çatılı bir Lorentz regle yüzey olsun. α null eğrisinin de çatısı $\{T, N, W\}$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(\kappa_g - k_1)^2}{2k_2^2} & 1 & -\frac{\kappa_g - k_1}{k_2} \\ \frac{\kappa_g - k_1}{k_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix} \quad (11)$$

dir.

İspat 3.2.1 (9) ve (10) denklemi Lagrange denklemi ile kullanılırsa ispat kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.2.2 M , $\mathbb{R}_1^3$ de $\{T, V, U\}$ Darboux çatısı bir Lorentz regle yüzey olsun. α null eğrisinin de çatısı $\{T, N, W\}$ olsun. O halde V üretici boyunca striksiyon çizgisi, c herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\beta(t) = \alpha(t) - \left(-\frac{1}{2} \int \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^2} dt + c\right) V(t),$$

dir.

İspat 3.2.2 Striksiyon çizgisinin tanımından V üretici boyunca striksiyon çizgisinin yeri, μ reel-değerli parameter olmak üzere,

$$\beta(t) = \alpha(t) - \mu V(t), \quad (12)$$

olur. Böylece striksiyon çizgisinin birinci yer değişkeni, $\Delta = \frac{\kappa_g}{\tau_g}$, $\Omega = 1$, $\Gamma = \mu' + \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^2}$ olmak üzere,

$$\beta' = \Omega T - \Gamma V + \Delta U, \quad (13)$$

olarak ifade edilir. β null vektörü olarak kabul edilirse, (10) denklemi c herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\mu = -\frac{1}{2} \int \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^2} dt + c,$$

olarak elde edilir. Böylelikle (9) nolu denklemden

$$\beta(t) = \alpha(t) - \left(-\frac{1}{2} \int \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^2} dt + c\right) V(t).$$

elde edilir. Ω , Γ ve Δ , M Lorentz regle yüzeyinin eğrilik fonksiyonlarıdır.

Teorem 3.2.3 $X_U(t, v)$ Lorentz regle yüzeyinin merkezi normal ve $\beta(t)$ da dayanak eğrisi olsun. O halde merkez normal regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin yeri

$$\beta_u(t) = \beta(t) - \frac{\kappa_g^2 - 2\kappa_g \tau_g}{4\tau_g \kappa_g} U(t).$$

dir.

3.3 Dayanak Eğrisi Null Anadoğruları Null Olan B-Scroll Yüzeyler

Bu kesimde dayanak eğrisi null anadoğruları null olan B-Scroll yüzeyler ve özellikleri incelenecektir. Ayrıca bu yüzeylerin Gauss dönüşümleri, seodezik eğrilikle 2.Temel form arasındaki ilişki ve Chasles teoremini ile özellikleri ele alınacaktır.

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ regle yüzeyinin dayanak eğrili ve $\alpha'(t)$, $\forall t \in I$ için teğet doğrusu null olsun. Böylece $F = \{X, Y, Z\}$ bazlarıyla $\mathbb{R}_1^3$ de null çatı adı verilir. Y anadoğrusu null olarak alınırsa, Y anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile elde edilen regle yüzeyin parametrizasyonu, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ ve $t \in I, v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + vY(t),$$

elde edilir.

$$\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = 0, \quad \langle X, Y \rangle = -1,$$

ve

$$Z = X \wedge Y = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \det [X; Y; e_i] e_i,$$

Dolayısıyla,

$$\langle X, Z \rangle = \langle Y, Z \rangle = 0, \quad \langle Z, Z \rangle = 1.$$

elde edilebilir. $d = d(t)$ pozitif fonksiyon verilsin. Bu durumda

$$X = X(t) = d^{-1} \alpha'.$$

null vektörüdür. O halde X null vektörü ve $Y = Y(t)$ vektörü de null ise $\langle X, Y \rangle = -1$ olur. $Z = X \wedge Y$ alınır ; α null eğrisi ve ∇ Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere α null eğrisinin

$$\begin{aligned}\nabla_X X &= aX + bZ, \\ \nabla_X Y &= -aY + cZ, \\ \nabla_X Z &= cX + bY,\end{aligned}\tag{14}$$

çatısı denklemlerini sağlar. Burada matris formundaki bileşenler hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}a &= -\langle \nabla_X X, Y \rangle \\ b &= \langle \nabla_X X, Z \rangle \\ c &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle\end{aligned}\tag{15}$$

olarak bulunur.

Öte yandan $(\alpha; F)$ ikilini ele alalım. Burada $d = 1$ ve $a = 0$ olursa çatıya Cartan çatısı denir. $F = \{X, Y, Z\}$ Cartan çatısı verildiğinde S-Frenet denklemleri

$$\begin{aligned}\nabla_X X &= bZ, \\ \nabla_X Y &= cZ, \\ \nabla_X Z &= cX + bY,\end{aligned}\tag{16}$$

Eğer v parametresi sabit alınır, O halde $\varphi_v : I \times \{v\} \rightarrow M$ eğrisi elde edilebilir. Bu durumda bu eğrinin teğet vektörü

$$A = X + cvZ,$$

elde edilir.

Teorem 3.3.1 M bir B-scroll yüzeyi olsun. O halde M nin anadoğrusu boyunca teğet düzlemlerinin çakışık olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır.

İspat 3.3.1 Kolayca hesaplanabilir.

Teorem 3.3.2 M bir B-scroll yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi açılabilir ise ancak ve ancak $c = 0$ dır

Teorem 3.3.3 M , B-scroll yüzeyi için

$$c = -\det(X, Y, \nabla_X Y)$$

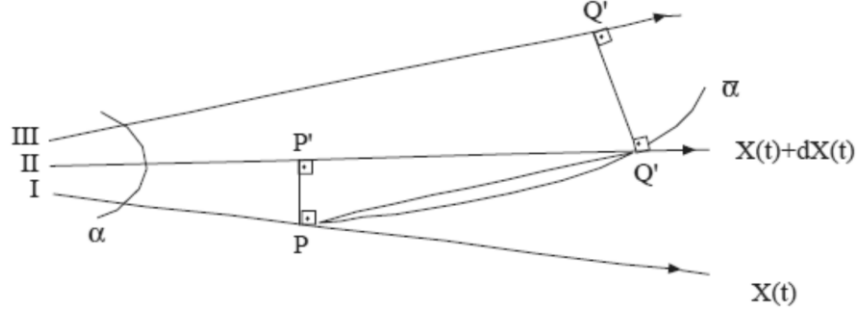
dir.

İspat 3.3.3 (16) denklemini kullanılırsa kolayca hesaplanabilir.

Bir M , B-Scroll yüzeyinin merkez noktasının $\bar{\alpha}$ yervektörü dayanak eğrisinin $\bar{\alpha}(t)$ yervektörü, $Y(t)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\bar{\alpha}(t, \bar{u}) = \alpha(t) + \bar{u}Y(t),$$

şeklinde ifade edilebilir. $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $Y(t)$ ve $Y(t) + dY(t)$ olan komşu üç anadoğrusu verilsin (Şekil 3.2).



Şekil 3.2: Komşu anadoğruları ile verilen regle yüzey

P, P' ve Q, Q' komşu anadoğrularının ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$X(t) \wedge (X(t) + D_T X(t) dt) = X(t) \wedge D_T X(t)$$

bağıntısından dolayı $X \wedge \nabla_X Y$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır, $\overrightarrow{PQ} = \frac{d\bar{\alpha}}{dt}$. Dolayısıyla

$$\langle \nabla_X Y dt, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0$$

elde edilir.

Teorem 3.3.4 M açılabilir olmayan timelike bir B-Scroll yüzey olsun. O halde dayanak eğrisi aynı zamanda striksiyon eğrisidir.

Teorem 3.3.5 M açılabilir olmayan timelike bir B-Scroll yüzey olsun. O halde striksiyon eğrisi null eğridir.

Teorem 3.3.6 M açılabilir olmayan timelike bir B-Scroll yüzey olsun. O halde point $\alpha(t)$ noktasında üreteç boyunca $\varphi(t, v_0)$ merkez noktasıdır ancak ve ancak $\nabla_X Y$, $\varphi(t, v_0)$ noktasında tanjant düzleminin normal vektörüdür.

İspat 3.3.6 M açılabilir olmayan timelike bir B-Scroll yüzey ve $\nabla_X Y$, $\varphi(t, v_0)$ noktasında tanjant düzleminin normal vektörüdür. Eğrinin teğet vektör alanı $\varphi_{v_0} : IX\{v_0\} \rightarrow M$ olacağından

$$A = X + cv_0 Z.$$

dır. Eğriye teğet olduğundan

$$\langle \nabla_X Y, A \rangle = 0$$

gösterilebilir. O halde

$$v_0 = 0,$$

elde edilir. Bunun anlamı ise $\varphi(t, v_0)$ M nin merkez noktasıdır. Tersine $\varphi(t, v_0), \alpha(t)$ boyunca üreteç üzerinde merkezi nokta olsun. Bu durumda

$$\langle \nabla_X Y, A \rangle = 0.$$

olur. Dolayısıyla $\nabla_X Y, \varphi(t, v_0)$ da teğet düzlemin normal vektörü olur.

Teorem 3.3.7 M bir B-Scroll yüzey olsun. M nin her noktasından birtek ortogonal yörünge geçer.

İspat 3.3.7 $\varphi : IXJ \rightarrow \mathbb{R}_1^3$

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + vY(t)$$

parametrizasyonu ile tanımlansın. M nin pseudo ortogonal yörüngesi $\beta(t) = \alpha(t) + f(t)Y(t); t \in \tilde{I}$ ve $\beta: \tilde{I} \rightarrow M$ olmak üzere $\beta(t) = \alpha(t) + f(t)Y(t); t \in \tilde{I}$ ve $\langle \beta', Y \rangle = sbt$. Kabul edelim ki $\tilde{I} \subset I$ olsun. Şimdi $\varphi(t_0, v_0)$ noktasından geçen bir eğri bulalım.

$$p_0 = \alpha(t) + f(t)Y(t)$$

$$p_0 = \alpha(t_0) + v_0Y(t_0)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\alpha(t) = \alpha(t_0)$$

ve

$$f(t) = v_0.$$

elde ederiz. Eğer I yı bire-bir seçersek, $t = t_0$ olur. Böylece p_0 noktası boyunca M nin pseudo-ortogonal yörüngesi tektir. M nin pseudo-ortogonal yörüngesi M nin doğrultmanlardan herbiri ile sabit açı yaptığından $\tilde{I} \subset I$ dır.

Teorem 3.3.8 M bir B-Scroll yüzey olsun. M nin herhangi iki anadoğru arasında ortogonal yörüngeler boyunca en kısa uzaklık striksiyon eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat 3.3.8 $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktalarından geçen iki doğrultmanı gözönüne alalım.

$(t_1 < t_2, t_1, t_2 \in I)$. Bu iki anadoğru arasında, $v = \text{sabit}$ ortogonal yörüngesi boyunca elde edilen uzaklığı $J(v)$ ile gösterelim

$$J(v) = \int_{t_1}^{t_2} \|A\| dt = \int_{t_1}^{t_2} (c^2 v^2)^{\frac{1}{2}} dt,$$

elde edilir. $J(v)$ değerini minimum yapan değerini bulmak için $J'(v)$ alınırsa

$$\frac{\partial \ell(v)}{\partial v} = 0.$$

Böylece

$$v = 0.$$

elde ederiz.

M regle yüzeyinin dayanak eğrisi olarak boğaz eğrisini alalım. Bu durumda $\bar{u} = 0$.

olur. Buradan $\nabla_X Y$ ve Z lineer bağımlı olduğundan,

$$\lambda \nabla_X Y = X \wedge Y.$$

olur. Böylelikle λ dağılma parametresi $\langle \nabla_X Y, \nabla_X Y \rangle \neq 0$ olmak üzere

$$\lambda = \frac{\langle X \wedge Y, \nabla_X Y \rangle}{\|\nabla_X Y\|^2} = -\frac{\det(X, Y, \nabla_X Y)}{\|\nabla_X Y\|^2} = \frac{1}{c^2}.$$

elde edilir.

M , B-Scroll yüzeyinin Gauss dönüşümü $\varphi_t \wedge \varphi_v$ eşitliğinden hesaplanırsa

$$G(t; v) = -cvY(t) + Z(t) \quad (17)$$

olarak bulunur. M nin şekil operatörü S olmak üzere

$$G_v = -c\varphi v$$

ve

$$G_t = -\langle \nabla_X X \wedge Y; X \rangle \varphi_v - c\varphi_t;$$

elde edilir. Bu durumda matris formunda

$$S = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ -\langle \nabla_X X \wedge Y; X \rangle & -c \end{bmatrix} \quad (18)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.9 M bir B-Scroll yüzey olsun. M nin Gauss eğriliği K pozitifdir

İspat 3.3.9 Lorentz uzayında bir yüzeyin Gauss eğriliği $\varepsilon = 1$ veya $\varepsilon = -1$ olmak üzere

$$K = \varepsilon \det S,$$

tanımlandığından, S şekil oeratörü matrisinin determinantından

$$K = c^2$$

olarak bulunur.

Theorem 3.3.10 M bir B-Scroll yüzey olsun. M nin anadoğrularından herbiri hem asimptotik hemde jeodeziktir.

İspat 3.3.10 $\mathbb{R}_1^3$ de herbir anadoğru jeodezik olduğundan böylece $\nabla_Y Y = 0$ olur. Bu da Y nin M de geodezik olduğunu gösterir.

$$S(Y) = S(\varphi_v) = -cY;$$

olduğundan $\langle S(Y), Y \rangle = 0$ olur ki bunnun anlamı da Y nin asimptotik olması demektir.

Theorem 3.3.11 M bir B-Scroll yüzey olsun. $\{X, Y, Z\}$ Cartan çatısında dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı, birim normal vektör alanı ve binormal vektör alanı, $\xi = -cvY + Z$ olmak üzere

$$X \wedge Y = Z, \quad Y \wedge Z = -Y, \quad X \wedge Z = X$$

ve

$$X \wedge \xi = X = -cvZ, \quad Y \wedge \xi = -Y, \quad Z \wedge \xi = -cvY,$$

dir.

Theorem 3.3.12 M bir B-Scroll yüzey olsun. O halde M açılabilir ise ancak ve ancak M nin Gauss eğrilik fonksiyonu sıfırdır.

Theorem 3.3.13 M açılabilir olmayan timelike bir B-Scroll yüzey olsun. O halde λ ve K , M nin dağılma parametresi ve Gauss eğrilik fonksiyonu olmak üzere

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{K}},$$

dir.

Theorem 3.3.14 $\mathbb{R}_1^3$ de B-scroll yüzeyler için doğrultmanın noktasında paraleldir

İspat 3.3.14 (t, v) noktasında B-Scroll yüzeyinin birim normal vektörü $\xi = -cvY + Z$ ve M üzerinde striksiyon eğrisi boyunca normal

$$N = \frac{\nabla_X Y}{\|\nabla_X Y\|}$$

olur. N bir birim spacelike vektör olduğundan ξ da birim spacelike vektördür.

Böylece N normal ile ξ arasındaki açı

$$\sin \theta = \|N \wedge \xi\| = \left\| (-cvY + Z) \wedge \frac{\nabla_X Y}{\|\nabla_X Y\|} \right\|.$$

olur. Gerekli hesaplamalardan sonra $\theta = 0$ elde edilir.

4. ÖRNEKLER

Örnek 4.1 Lorentz uzayında bir regle yüzey

$$X(t, v) = (t, \sin t, -\cos t) + v(-1, -\sin t, \cos t),$$

Parametrik denklemle verilmiş olsun. Burada $\alpha(t) = (t, \sin t, -\cos t)$ null eğri ve doğrultman ise $V = (-1, -\sin t, \cos t)$ olmak üzere şekilde gösterilmiştir. Ayrıca Darboux çatısı elemanları da

$$T = (1, \cos t, \sin t), \quad V = (-1, -\sin t, \cos t),$$

ve

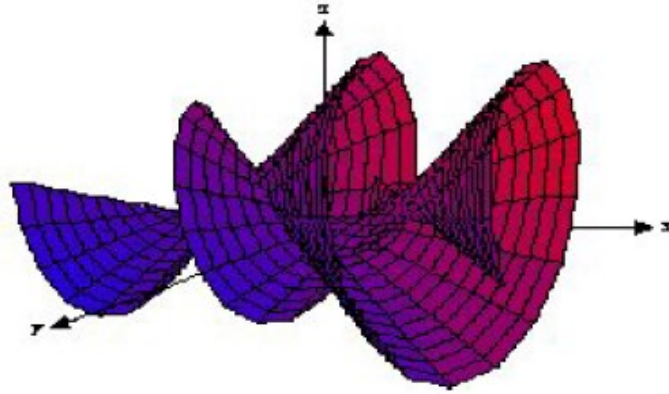
$$U = (1, \sin t + \cos t, \sin t - \cos t).$$

olarak veriliyor.

T , V ve U vektörleri aşağıdaki şartları sağlamakla birlikte

$$\langle T, T \rangle = \langle V, V \rangle = \langle V, U \rangle = \langle T, U \rangle = 0,$$

$$\langle T, V \rangle = \langle U, U \rangle = 1, \quad -U = V \times T.$$



Şekil 4.1: V null üreteçli bir regle yüzey

α null eğrili $F = \{T, N, W\}$ çatısının elemanları sırasıyla

$$T = (1, \cos t, \sin t), \quad N = (-1, \sin t, -\cos t),$$

ve

$$W = (-1, \sin t - \cos t, -\sin t - \cos t).$$

elde edilir. Böylece (α, F) null eğrili çatısının Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} T' &= -T - W, \\ N' &= N - W, \\ W' &= T + N. \end{aligned}$$

Şeklindedir. Öte yandan Darboux çatısı ile null eğrili çatının ilişkisini veren denklem

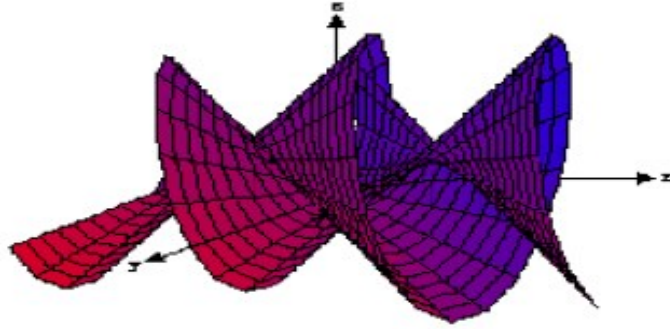
$$\begin{aligned} T' &= T - U, \\ V' &= -V - U, \\ U' &= T + V. \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylelikle, regle yüzeyin dağılma parametresi, eğrilik fonksiyonu

$$\delta = -\frac{1}{2} \text{ and } \Delta = -1, \Gamma = 1, \Omega = 1.$$

olarak elde edilir. Ayrıca yüzeyin merkez normali de şekilde verilmiştir.

$$X_U(t, v) = (t, \sin t, -\cos t) + v(1, \sin t - \cos t, \sin t - \cos t).$$



Şekil 4.2 : Merkez normal yüzey

Darboux çatısı kullanıldığından ötürü de $\alpha(t) = (t, \sin t, -\cos t)$ eğrisinin geodezik eğrilik κ_g , normal eğrilik κ_n ve geodezik torsion τ_g olmak üzere

$$\kappa_g = 1, \quad \kappa_n = -1 \text{ ve } \tau_g = -1$$

elde edilir. Sonuç olarak, $X_U(t, v)$ merkez normal yüzeyinin dağılma parametresi eğrilik fonksiyonu da hesaplanırsa

$$\delta = -1 \text{ ve } \Delta_U = -\frac{3}{4}, \quad \Gamma_U = -\frac{1}{4}, \quad \Omega_U = -\frac{9}{4}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.2 $\mathbb{R}_1^3$ uzayında verilen

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 1, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

eğrisinin doğrultman eğrisi $X = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 0, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$ null olarak verilsin. Ayrıca $\{T, N, Z\}$ ortogonal çatısını

$$T = \alpha'(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 0, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

ve

$$Z = T \wedge X = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = (0, 1, 0).$$

olarak seçersek, yüzeyin parametrizasyonu

$$\varphi(t, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - v, \sqrt{2}, t + v).$$

olur ve buna ek olarak,

$$\varphi_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \quad \varphi_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \text{ ve } \varphi_{tt} = 0, \quad \varphi_{tv} = 0, \quad \varphi_{vv} = 0.$$

$$E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 0, \quad F = \langle \varphi_t, \varphi_v \rangle = -1 \text{ ve } G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 0$$

hesaplanırsa

$$\varphi_t \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = (0, 1, 0)$$

elde edilir. Buradan

$$\|\varphi_t \wedge \varphi_v\| = 1, \quad N = (0, 1, 0), \quad J = -\langle N, \varphi_{tt} \rangle, \quad m = -\langle N, \varphi_{tv} \rangle,$$

$$n = -\langle N, \varphi_{vv} \rangle$$

bileşenleri yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{Jn - m^2}{EG - F^2} = 0$$

bulunur ve $\det(T, Z, Z') = 0$ olduğundan, M yüzeyinin açılabilir bir regle yüzey olduğunu gösterir.

Örnek 4.3 $\mathbb{R}_1^3$ de α null eğrisi

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\sinh t, t, \cosh t)$$

şeklinde verilmiş olsun. Cartan çatı elemanları olarak $\{X, Y, Z\}$ seçersek

$$X(t) = \alpha'(t) = (\cosh t, 1, \sinh t)$$

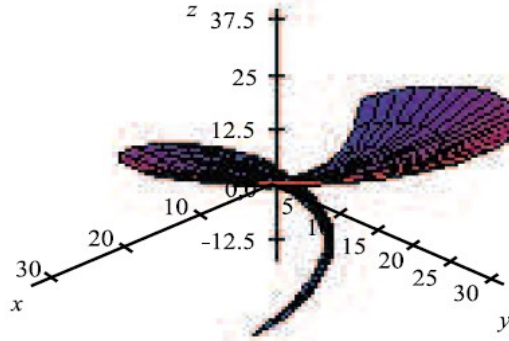
$$Y(t) = \frac{1}{2}(\cosh t, -1, \sinh t)$$

$$Z(t) = (\sinh t, 0, \cosh t).$$

olur. Ayrıca B-scroll yüzeyinin parametrizasyonu

$$\varphi(t, v) = (\sinh t, t, \cosh t) + v \left(\frac{1}{2} \cosh t, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \sinh t \right).$$

olarak verilsin. Burada $\det(X, Y, \nabla_X Y) = -1 \neq 0$, olduğundan B-Scroll yüzeyi açılabilir bir yüzey değildir. Striksiyon eğrisi $\bar{\alpha}(t) = (\sinh t, t, \cosh t)$ elde edilir.



Şekil 4.3 : B-Scroll yüzeyi

Dağılma parametresi ise $\lambda = 4$. bulunur

Örnek 4.4 $\mathbb{R}_1^3$ de α null eğrili

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = k \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t}{4}, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3} - \frac{t}{4} \right), \quad k \neq 0,$$

Burada k , α eğrisinin eğriliği olmak üzere Cartan çatısı $\{X, Y, Z\}$ olarak seçilirse elemanları sırasıyla

$$X(t) = \alpha'(t) = k \left(t^2 + \frac{1}{4}, t, t^2 - \frac{1}{4} \right)$$

$$Y(t) = \frac{2}{k}(1, 0, 1)$$

$$Z(t) = (2t, 1, 2t)$$

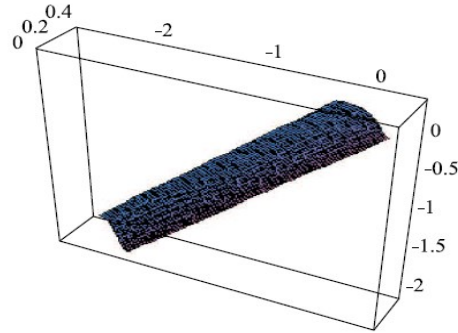
olur. Böylece B-Scroll yüzeyinin parametreziyonu

$$\varphi(t, v) = \left(k\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t}{4}\right) + \frac{2v}{k}, \frac{kt^2}{2}, k\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t}{4}\right) + \frac{2v}{k} \right).$$

olarak yazılır. Burada $\det(X, Y, \nabla_X Y) = 0$, olduğundan B-Scroll yüzeyi açılabilir bir yüzeydir. Ayrıca striksiyon eğrisi

$$\bar{\alpha}(t) = k\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t}{4}, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3} - \frac{t}{4}\right), \quad k \neq 0,$$

olur.



Şekil 4.4 : Null eğrili regle yüzey

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu yapılan çalışmalar sonucunda null çatılı yüzeylerin darboux çatısı ve diğer çatılarla ilişkileri hala açık bir problemdir.



KAYNAKLAR

- Balgetir, H. Bektas, M. ve Ergüt, M. 2003. Null Scrolls in the 3-dimensional Lorentzian space. Appl. Sciences, 5, 1, 1-5.
- Beem, J. K. ve Ehrlich, P. E. 1981. Global Lorentzian Geometry. Marcell Decker. ABD.
- Dajczer, M. ve Nomizu, K. 1981. On flat surfaces in S_1^3 and E_1^3 . In Manifolds and Lie groups. Birkhäuser Boston, 71-108.
- Bejancu, A. ve Duggal, K. L. 1995. Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds. Acta Applicandae Mathematica, 38, 2, 197-215.
- Graves, L. K. 1979. Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces. Transactions of the American Mathematical Society, 252, 367-392.
- O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, 103. Academic press, ABD.
- Turgut, A. ve Hacisalihoğlu H. H. 1997. On the distribution parameter of timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space. Far East Journal of Mathematical Sciences, 5, 321-328.
- Blacshke W. 1949. Differential Geometry, Istanbul Üniversitesi, No. 433.
- Çelik Y. 1997. Ruled surface on Lorentz space, Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- Özüsağlam, E. 2002. on the extension B-scroll surface on Minkowski 3-space, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Özüsağlam, E. Ekici, C. ve Görgülü, A. 2007. Second Gaussian curvature of B-scroll surfaces in Minkowski 3-space, SDU Fen-Ed. Fak. Fen-Dergisi, 2, 248-255.

- Turgut, A. ve Hacisalihoğlu, H. H. 1998. Timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space-II. Turkish Journal of Mathematics, 22, 1, 33-46.
- Ayyildiz, N. ve Yucesan, A. 2006. On the scalar and dual formulations of the curvature theory of line trajectories in the Lorentzian space. Journal of the Korean Mathematical Society, 43, 6, 1339-1355.
- Choi, S. M. Ki, U. H. ve Suh, Y. J. 1998. On the Gauss map of null scrolls. Tsukuba journal of mathematics, 273-279.
- Çöken, A. C. ve Çiftçi, Ü. 2007. On null curves on surfaces ve null vectors in Lorentz Space, SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, 2, 1, 111-116
- Ersoy, S. ve Tosun, M. 2008. On the Trajectory Null Scrolls in 3-Dimensional Minkowski Space-Time E_1^3 . Kyungpook mathematical journal, 48, 1, 81-92.
- Ferrandez, A. Gimenez, A. ve Lucas, P. 2001. Null helices in Lorentzian space forms. International Journal of Modern Physics A, 16, 30, 4845-4863.
- Liu, H. 2009. Ruled surface with lightlike ruling in 3-Minkowski space. Journal of Geometry and physics, 59, 1, 74-78.
- McCarthy, J. M. ve Roth, B. 1981. The curvature theory of line trajectories in Spatial kinematics, ASME Journal of Mechanical Design, 103, 4, 718-724.
- McCarthy, J. M. 1987. On the scalar and dual formulations of the curvature theory of line trajectories. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 109, 1, 101-106.
- Ryuh, B. S. 1989. Robot trajectory planning using the curvature theory of ruled surfaces. Doktora Tezi, Purdue University, West Lafayette, Ind, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : BASHDAR AHMED YOUNUS

Birth date ve place : 13.05.1985 Erbil / Irak

E-posta adresi : bashdar.math85@gmail.com

Lisans : Erbil Koya Üniversitesi Fen ve Sağlık Fakültesi
Matematik Bölümü,

Kürdistan Özerk Bölgesi, Irak.

2007-2010.