



NULL KUATERNİYONİK

EĞRİLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gökmen KATIRCI

Danışman

Doç. Dr. Özgür KALKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2022

T.C.
AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NULL KUATERNİYONİK
EĞRİLER ÜZERİNE

Gökmen KATIRCI

Danışman
Doç. Dr. Özgür KALKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2022

TEZ ONAY SAYFASI

Gökmen KATIRCI tarafından hazırlanan “Null Kuaterniyonik Eğriler Üzerine” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 29/07/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Özgür KALKAN

Başkan : Doç. Dr. Emrah KARAMAN
Karabük Üniversitesi, Fen Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon MYO

Üye : Doç. Dr. Özgür KALKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon MYO

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun

..... /..... /..... tarih ve

..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. İbrahim EROL

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım

bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

29 / 07 / 2022

Gökmen KATIRCI

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

NULL KUATERNİYONİK EĞRİLER ÜZERİNE

Gökmen KATIRCI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özgür KALKAN

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde kuaterniyon kavramının doğuşu ve gereksiniminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde kuaterniyonlar kümesinin ve Minkowski uzayının bazı temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Ayrıca Minkowski uzaylarında null kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilmiştir. Üçüncü bölümde E_1^3 uzayında null kuaterniyonik Bertrand eğrileri ve null kuaterniyonik slant helisler incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise E_1^4 uzayında null kuaterniyonik Bertrand eğrileri ve null kuaterniyonik W-slant helisler incelenmiştir. Beşinci ve son bölümde E_1^3 ve E_1^4 uzaylarında null kuaterniyonik W-eğrilerin parametrik denklemleri elde edilmiştir.

2022, v + 51 sayfa

Anahtar kelimeler: Reel ve yarı-reel kuaterniyonlar, Minkowski uzayı, Null kuaterniyonik eğri, Konum vektörü, W-eğri

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

ON NULL QUATERNIONIC CURVES

Gökmen KATIRCI

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Özgür KALKAN

This thesis consists of five chapters. In the introduction, the birth and necessity of the concept of quaternion are mentioned. In the second chapter, some basic definitions and theorems of the set of quaternions and Minkowski spaces are given. Also Serret-Frenet formulas for the null quaternionic curves in Minkowski spaces are given. In the third chapter, null quaternionic Bertrand curves and null quaternionic slant helices in E_1^3 space are examined. In the fourth chapter, null quaternionic Bertrand curves and null quaternionic W-slant helices in E_1^4 space are examined. In the fifth and final chapter, parametric equations of null quaternionic W-curves in E_1^3 and E_1^4 are obtained.

2022, v + 51 sayfa

Keywords: Real and semi-real quaternions, Minkowski space, Null quaternionic curve,
Position vector, W-curve

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca detaylı çalışma tarzı ve özendirici yaklaşımlarıyla bana izlemem gereken yolda ufuk açan ve çalışmalarımın zorlu virajlarında yapmış olduğu katkılarla desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Özgür KALKAN ve bu çalışma sürecinde manevi desteklerini her zaman üzerimde hissettiren Sayın Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK hocama teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışma dönemimde her türlü destek ve fedakarlıklarından dolayı aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Gökmen KATIRCI

AFYONKARAHİSAR 2022

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR.....	3
2.1. Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar.	3
2.2. Reel Kuaterniyonlar.....	7
2.3. Yarı Reel Kuaterniyonlar.....	12
2.4. Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret–Frenet Formülleri	15
2.4.1. E_1^3 Minkowski Uzayında Null kuaterniyonik Eğriler İçin Serret–Frenet Formülleri.....	15
2.4.2. E_1^4 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri.....	17
3. E_1^3 MINKOWSKİ UZAYINDA BAZI NULL KUATERNİYONİK EĞRİLER	20
3.1. E_1^3 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Bertrand Eğri Çiftleri.....	20
3.2. E_1^3 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Slant Helisler	24
4. E_1^4 MINKOWSKİ UZAYINDA BAZI NULL KUATERNİYONİK EĞRİLER	28
4.1. E_1^4 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Bertrand Eğri Çiftleri.....	28
4.2. E_1^4 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik W-Slant Helisler	31
5. MINKOWSKİ UZAYINDA NULL KUATERNİYONİK W-EĞRİLER	36
5.1. E_1^3 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik W-Eğriler.....	36
5.2. E_1^4 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik W-Eğriler.....	37
6. TARTIŞMA ve SONUÇ	47
7. KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ	51

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

E_1^3	3-boyutlu Minkowski Uzayı
E_1^4	4-boyutlu Minkowski Uzayı
R	Reel sayılar
V	Vektör Uzayı
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$\ , \ $	Norm
$g(v,v)$	Minkowski uzayında iç çarpım
$h(p,q)$	Kuaterniyon iç çarpımı
q	Kuaterniyon
$\wedge_L$	Minkowski uzayında vektörel çarpım
$\times_L$	Minkowski uzayında kuaterniyon çarpım
Q	Kuaterniyonlar Kümesi
S_q	q kuaterniyonunun skaler kısmı
V_q	q kuaterniyonunun vektörel kısmı
$\bar{q}$	q kuaterniyonunun eşleniği
$\ q\ $	q kuaterniyonunun normu
Q_v	Yarı -reel Kuaterniyonların kümesi
γq	Yarı -reel bir kuaterniyonun eşleniği
$\{l,n,u\}$	E_1^3 yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik eğrilerin Frenet vektörleri
$\{L,N,U,W\}$	E_1^4 yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik eğrilerin Frenet vektörleri
$\kappa, K, \tau, \tau + p$	Eğrilikler

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar ilk kez İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından 19.yüzyılda tanımlanmış ve üç boyutlu uzayda çalışmalar yapılmıştır. Üç boyutlu uzaydaki dönme hareketi başlıca uygulama alanlarından biridir. Kuaterniyonlar karmaşık sayılar sisteminin dört ve daha yüksek boyutlara genişletilmiş bir sayı sistemidir. Hamilton 1840'lı yılların başında yaptığı çalışmada bu sayı sisteminin çarpma işleminde değişme özelliğinin sağlanmadığını fark etmiş ve çarpma işleminin bu özelliğinin yerine $e_1^2=e_2^2=e_3^2=-1$ eşitliklerini sağlayan üç imajiner birim tanımlamış ve böylelikle dört boyutlu kompleks sayı sistemini oluşturmuştur. Hamilton (1846) karmaşık sayıları genellemiş “ $q=d+ai+bj+ck$ ” şeklinde ifade etmiştir. Burada kuaterniyon q ile gösterilmek üzere a,b,c ve d reel sayılar ve i, j ve k birim vektörlerdir. Kuaterniyonlar havacılık ve savunma sanayindeki kontrol sistemleri, robotik, bilgisayar görselleştirme, animasyon filmler ve benzeri birçok sektörde kullanılmaktadır.

Hacısalıhoğlu (1983) reel ve dual kuaterniyonların özelliklerini incelemiştir. Üç ve dört boyutlu Öklid uzaylarında kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri keşfedilmiştir (Bharathi ve Nagaraj 1985). Agrawal (1987)'da Hamilton operatörleri ve dual kuaterniyonların uzay kinematikindeki yerini incelemiştir. Ward (1997)'da çalışmasında genelleştirilmiş kuaterniyonları tanımlamıştır. E_2^4 yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik bir eğri için Serret-Frenet formülleri Çöken ve Tuna (2004) tarafından elde edilmiştir. Daha sonra yarı-Öklid uzaylarında null kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir (Aksoy 2014). Bu çalışmadan yararlanılarak Tanju Kahraman (2018) da E_1^3 ve E_1^4 Minkowski uzaylarında null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftlerini incelemiş ayrıca Tanju Kahraman (2019) da E_1^3 Minkowski uzayında null kuaterniyonik slant helisleri ve E_1^4 Minkowski uzayında null kuaterniyonik W-slant helisleri incelemiştir.

Bonnor (1969)'da 4 boyutlu Minkowski uzayında null eğrilerin geometrisini oluşturmuş ve bu çalışmasında Cartan Eğriliklerini kullanıp null çatıyı oluşturarak eğriliklerin durumunu incelemiştir. Dugal ve Bejancu (1996)'da Lorentz ve semi Riemann uzaylarında null eğriler için bir yöntem geliştirmişlerdir. Burada null eğrilerin tanımlanabilmesi için timelike ve spacelike vektörler yardımıyla null vektörleri oluşturarak gerekli bazı çatıları elde etmişlerdir. Bu baz yardımı ile Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir.

W-eğri Öklid uzayında tüm eğrilikleri sabit olan bir eğridir. 3-boyutlu uzayda düzlemsel W-eğri olarak çemberler, düzlemsel olmayan W-eğri olarak ise helisler örnek verilebilir. Minkowski 3-uzayında tüm W-eğriler Walrave tarafından çalışılmıştır. Walrave (1995) örnek olarak Minkowski-3 uzayında düzlemsel spacelike W-eğriler çemberler ve hiperbolleri çalışmıştır. Minkowski uzay-zaman E_1^4 de spacelike W-eğriler (Petrovic vd. 2002) tarafından, E_2^4 Minkowski uzayında W-eğriler ise Ünal (2012) tarafından incelenmiştir.

Bu bilgilerin doğrultusunda; bu tez çalışmasında yarı- Öklid uzaylarında null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri, null kuaterniyonik slant helisler ve null kuaterniyonik W-eğriler incelenmiştir. Tezin ilk bölümü giriş kısmıdır. Devam eden ikinci bölümde tez çalışmasında kullanılan bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde E_1^3 Minkowski uzayında null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri ve null kuaterniyonik slant helisler incelenmiştir. Dördüncü bölümde E_1^4 Minkowski uzayında null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri ve null kuaterniyonik W-slant helisler incelenmiştir. Beşinci bölüm tez çalışmasının orijinal kısmı olup E_1^3 ve E_1^4 Minkowski uzaylarında bir eğrinin null kuaterniyonik W-eğri olması için sabit katsayılı diferensiyel denklemler inşa edilerek çözümü yapılmıştır.

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

2.1 Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1 E_1^3 Minkowski 3-uzayında E_1^3 uzayının bir dik koordinat sistemi (x_1, x_2, x_3) olarak alınırsa,

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

metriği ile verilen $E_1^3 = (R^3, g)$ metrik uzayına Minkowski uzayı denir. g metriği de Minkowski metriği olarak adlandırılır (López 2014).

Tanım 2.1.2 Minkowski 3-uzayında bir v vektörün normu,

$$\|v\| = \sqrt{|g(v, v)|}$$

olarak tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3 E_1^3 Minkowski 3- uzayında $v, w \in E_1^3 - \{0\}$ vektörleri için $g(v, w) = 0$ ise v ve w vektörleri ortogonal iki vektör olarak tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4 E_1^3 Minkowski 3- uzayında $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olmak üzere x ve y nin vektörel çarpımı ,

$$x \wedge_L y = \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_3 y_2 - x_2 y_3, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

olarak tanımlıdır (López 2014).

Tanım 2.1.5 $v \in E_1^3 - \{0\}$ vektörü için;

- i. $g(v, v) > 0$ ise v spacelike vektör,
- ii. $g(v, v) < 0$ ise v timelike vektör,
- iii. $g(v, v) = 0$ $v \neq 0$ ise v null (lightlike) vektör

denir. Ayrıca $v=0$ ise v spacelike vektör olur (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.6 E_1^3 Minkowski 3-uzayında α keyfi bir eğri olsun. Hız vektörü α' sırasıyla spacelike, timelike veya null (lightlike) olursa α eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null (lightlike) eğri olarak isimlendirilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.7 E_1^3 Minkowski 3- uzayında α bir eğri olsun. α' hız vektörü için,

- i. $g(\alpha', \alpha') = 1$ ise α eğrisine birim hızlı spacelike eğri,
- ii. $g(\alpha', \alpha') = -1$ ise eğrisine birim hızlı timelike eğri,
- iii. $g(\alpha', \alpha') = 0$ ise eğrisine null (lightlike) eğri

adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.8 E_1^3 Minkowski 3- uzayında $\vec{a} \in E_1^3$ timelike bir vektör olsun. Eğer bu vektörün ilk bileşeni sırasıyla pozitif ya da negatif ise $\vec{a} \in E_1^3$ vektörü sırasıyla future pointing timelike vektör ya da past pointing timelike vektör olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.9 i) Hiperbolik açı: $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, E_1^3 Minkowski 3-uzayında iki timelike future pointing (ya da past pointing) vektör olsun. O zaman $g(a,b) = -\|a\| \|b\| \cosh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açığa $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir (Ratcliffe 1994).

ii) Merkezi açı: E_1^3 Minkowski 3- uzayında bir timelike alt vektör uzayını geren spacelike vektörler $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. O halde $g(a,b) = \|a\| \|b\| \cosh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açığa $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki merkezi açı denir (Ratcliffe 1994).

iii) Spacelike açı: E_1^3 Minkowski 3- uzayında bir spacelike alt vektör uzayını geren spacelike vektörler $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. O halde $g(a,b) = \|a\| \|b\| \cos\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açığa a ve b vektörleri arasındaki spacelike açı denir (Ratcliffe 1994).

iv) **Lorentzian timelike açı:** E_1^3 Minkowski 3- uzayında $\vec{a}$ spacelike bir vektör ve $\vec{b}$ timelike bir vektör olsun. O zaman $g(a,b) = \|a\| \|b\| \sinh \theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açıya $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir (Ratcliffe 1994).

Tanım 2.1.10 $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ birim hızlı null olmayan (spacelike ya da timelike) bir eğri olsun. α eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektör alanlarından oluşan hareketli frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

i. α bir spacelike eğri ise Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada,

$$g(T, N) = g(N, B) = g(T, B) = 0$$

$$g(T, T) = 1, \quad g(N, N) = \varepsilon = \mp 1, \quad g(B, B) = -\varepsilon$$

olarak verilir. κ ve τ , α spacelike eğrisinin sırasıyla, eğrilik ve burulmasıdır. Ayrıca ε , α spacelike eğrisinin türünü belirler. $\varepsilon = 1$ ise α spacelike eğrisi, $\vec{N}$ spacelike asli normal ve $\vec{B}$ timelike binormali olan bir eğridir. Eğer $\varepsilon = -1$ ise α spacelike eğrisi, $\vec{N}$ timelike asli normal ve $\vec{B}$ spacelike binormali olan bir eğridir (O'Neill 1983).

ii. α bir timelike eğri ise Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada,

$$g(T, N) = g(N, B) = g(T, B) = 0,$$

$$g(T, T) = -1, \quad g(N, N) = g(B, B) = 1$$

dır. κ ve τ , α timelike eğrisinin sırasıyla, eğrilik ve burulmasıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.11 $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ birim hızlı null veya pseudo null bir eğri olsun. α eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektör alanlarından oluşan hareketli çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

i. α bir null eğri ise Frenet formülleri ,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & -\kappa \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. α eğrisi bir doğru ise birinci eğrilik $\kappa = 0$ dır. Bunun dışındaki durumlar için $\kappa = 1$ dir. Burada ,

$$g(T, T) = g(B, B) = g(T, N) = g(N, B) = 0$$

$$g(N, N) = g(T, B) = 1$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$T \wedge_L N = -T, \quad N \wedge_L B = -B, \quad B \wedge_L T = -N,$$

eşitlikleri elde edilir (Walrave 1995).

ii. α bir pseudo-null eğri ise Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. α eğrisi bir doğru ise birinci eğrilik $\kappa = 0$ dır. Bunun dışındaki durumlar için $\kappa = 1$ dir. Burada,

$$g(N, N) = g(B, B) = g(T, N) = g(T, B) = 0, \quad g(T, T) = g(N, B) = 1$$

dır. Dolayısıyla,

$$T \wedge_L N = N, \quad N \wedge_L B = T, \quad B \wedge_L T = B$$

eşitlikleri elde edilir (Walrave 1995).

2.2 Reel Kuaterniyonlar

Tanım 2.2.1 Reel bir kuaterniyon, sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birim değere eşlik etmesiyle tanımlanır. Burada $+1$ bir reel sayı olmak üzere diğer üç birim için aşağıdaki özellikler geçerlidir;

- i. $\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = -1$
- ii. $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$
- iii. $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$, $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

özelliklerine sahiptir. Dolayısıyla bir kuaterniyon ,

$$q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, q kuaterniyonu S_q ile gösterilen skaler kısım ve V_q ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere,

$$S_q = d, \quad V_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

$$q = S_q + V_q$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.2.2 Reel kuaterniyonlar cümlesi Q üzerinde toplama işlemi

$$\oplus : Q \times Q \rightarrow Q$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \oplus q_2 = S_{q_1 \oplus q_2} + \vec{V}_{q_1 \oplus q_2}$$

ile

$$S_{q_1 \oplus q_2} = S_{q_1} \oplus S_{q_2}, \quad \vec{V}_{q_1 \oplus q_2} = \vec{V}_{q_1} \oplus \vec{V}_{q_2}$$

olarak tanımlanır. Burada $S_{q_1}, S_{q_2} \in R$ ve $+$ işlemi R deki toplama işlemidir. $\vec{V}_{q_1}, \vec{V}_{q_2}$ de birer reel vektör olup $\oplus$ işlemi reel vektör uzayındaki abel grubu (vektörlerde toplama) işleminin aynısıdır. O halde $(Q, +)$ ikilisi abel bir gruptur. Buradaki etkisiz eleman sıfır kuaterniyon adını alır ve $(0,0,0,0)$ sıralı dörtlüsünden başka bir şey değildir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.2.3 $\odot : R \times Q \rightarrow Q$

$$(\lambda, q) \rightarrow \lambda \odot q = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanmış dış işlem $\forall \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in R$ ve $\forall q, q_1, q_2 \in Q$ için,

i. $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = (\lambda \odot q_1) \oplus (\lambda \odot q_2)$

ii. $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$

iii. $(\lambda_1 \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$

iv. $I \odot q = q$

dir. O halde $\{ Q, \oplus, R, +, \dots, \odot \}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısacası bu uzayı Q ile göstereceğiz (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.2.4

$$\times : Q \times Q \rightarrow Q$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \times q_2$$

işlemi

$\times$	$+I$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$+I$	$+I$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	$\vec{e}_1$	$-I$	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	$-I$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_3$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	$-I$

ile tanımlanır. Buna göre,

$$q_1 \times q_2 = (d_1 + a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3) \times (d_2 + a_2 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + c_2 \vec{e}_3),$$

$$q_1 \times q_2 = d_1 d_2 - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) \vec{e}_1$$

$$+ (d_1 b_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2 - a_1 c_2) \vec{e}_2 + (d_1 c_2 + c_1 d_2 + a_1 b_2 - b_1 a_2) \vec{e}_3$$

elde edilir ve ifade düzenlendiğinde

$$q_1 \times q_2 = S_{q_1} S_{q_2} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + S_{q_1} V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} + V_{q_1} \wedge V_{q_2}$$

elde edilir. Böylece kuaterniyon çarpımının şu özelliklere sahip olduğu kolaylıkla görülür.

- i. İki kuaterniyon çarpımı bir kuterniyondur.
- ii. Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.
- iii. Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

fakat kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Bu özellikleriyle, $\{ Q, \oplus, R, +, \dots, \odot, \times \}$ sistemi bir birleşimli cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.2.5 $\forall q_1, q_2 \in Q$ olmak üzere kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı,

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } \overrightarrow{V_{q_1}} = \overrightarrow{V_{q_2}}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.2.6

$$K: Q \rightarrow Q$$

$$q \rightarrow K(q) = K_q$$

işlemi $\forall q = S_q + \overrightarrow{V}_q \in Q$ için $K_q = S_q - \overrightarrow{V}_q$ şeklinde tanımlanır ve K_q kuaterniyonuna q nun eşleniği denir. $\overrightarrow{V}_{K_q} = -\overrightarrow{V}_q$ olduğundan,

$$q \times K_q = K_q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \in R$$

dır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Burada $K_q = \bar{q}$ şeklinde de gösterilir. Bundan sonraki kısımlarda kolaylık sağlanması açısından bu ifade kullanılacaktır.

Tanım 2.2.7 $q = d + a\overrightarrow{e}_1 + b\overrightarrow{e}_2 + c\overrightarrow{e}_3$ olmak üzere;

$$N: Q \rightarrow R$$

$$q \rightarrow N(q) = [N_q]^2 = q \times \bar{q} = \bar{q} \times q$$

$$[N_q]^2 = q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

pozitif bir reel sayıdır (Hacısalıhoğlu 1983).

Burada $N_q = \|q\|$ şeklinde de gösterilir. Daha sonraki kısımlarda kolaylık sağlanması açısından bu ifade kullanılacaktır.

Tanım 2.2.8

$$q^{-1} : Q - \{0\} \rightarrow Q - \{0\}$$

$$q \rightarrow q^{-1} = \frac{q}{\|q\|}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $q \times q^{-1} = q^{-1} \times q = 1$ elde edilir. $q \neq 0$ olmak üzere $\forall q \in Q$ elemanının bir q^{-1} inversine sahip olması Q cebirini bir bölüm cebiri yapar. Böylece Q da bölme işlemini tanımlamak mümkün olur (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.2.9 $q \neq 0$ olmak üzere bir p kuaterniyonunu bir q kuaterniyonu ile bölmek için p yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli olmadığından bu çarpım işlemi iki türlüdür ve dolayısıyla p yi q ile iki türlü bölmek gerekir.

$$r_1 = p \times q^{-1}$$

$$r_2 = q^{-1} \times p$$

Burada r_1 kuaterniyonuna p nin q ile sağdan ve r_2 kuaterniyonuna p nin q ile soldan bölümü denir. Genel olarak r_1 ile r_2 farklıdır. Dolayısıyla $\frac{p}{q}$ notasyonu kullanılamaz (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.2.10 Normu 1 birim olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir q kuaterniyonunun normlanması,

$$q_0 = \frac{q}{\|q\|} = \frac{d + a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

olarak ifade edilebilir. Bu q_0 birim kuaterniyonu $q_0 = \cos \theta + \vec{S}_0 \sin \theta$ formunda yazılabilir.

Burada,

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

eşitlikleri sağlanır ve $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ olduğu zaman,

$$\vec{S}_0 = \frac{a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonunun ekseni denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.2.11 $a, b \in Q$ için genel bir kuaterniyon ifadesinde $d_1 = d_2 = 0$ alınırsa $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3$ ve $\vec{b} = a_2 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + c_2 \vec{e}_3$ şeklinde iki vektör elde edilir. Bu iki vektörün kuaterniyon çarpımı,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

olarak bulunur. Bu ise bir kuaterniyondur. Vektör cebirinde, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)$$

şeklinde, vektörel çarpımı ise

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

şeklindedir. Buna göre bu kuaterniyonların çarpımı,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \vec{a} \wedge \vec{b}$$

formunda yazılabilir. O halde iki vektörün kuaterniyon çarpımı öyle bir kuaterniyondur ki bu kuaterniyonun skaler kısmı ve vektörel kısmı sırasıyla,

$$S(\vec{a} \times \vec{b}) = -\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \text{ ve } V(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

şeklindedir. Ayrıca iki vektör dik iseler kuaterniyon çarpımları vektörel çarpımlarına eşit olur. İki vektör paralel iseler kuaterniyon çarpımları bu iki vektörün skaler çarpımının ters işaretlisine eşittir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.2.12 $p, q \in Q$ reel kuaterniyonları verilsin.

$$h : Q \times Q \rightarrow R$$

$$(p, q) \rightarrow h(p, q) = \frac{1}{2} (p \times \bar{q} + q \times \bar{p})$$

ile tanımlanan h fonksiyonuna kuaterniyon iç çarpımı denir. h fonksiyonu reel değerli, simetrik bilineerdir. Dolayısıyla iç çarpım aksiyomlarını sağlar. Burada $\times$ kuaterniyon çarpımını göstermektedir (Bharathi ve Nagaraj 1985). O halde bir kuaterniyonun normu bu tanımla beraber karakterize edilebilir.

Tanım 2.2.13 Bir $q \in Q$ kuaterniyonunun normu

$$\|q^2\| = h(q, q) = q \times \bar{q}$$

eşitliğini sağlayan $\|q\|$ reel sayısı ile ifade edilebilir (Bharathi ve Nagaraj 1985).

Tanım 2.2.14 Bir $q \in Q$ kuaterniyonu,

$$q + \bar{q} = 0$$

oluyorsa q kuaterniyonuna bir uzay kuaterniyon denir. Uzay kuaterniyonların cümlesi 3-boyutlu vektör uzayı R^3 e izomorftur. $q \in Q$ kuaterniyonu için,

$$q - \bar{q} = 0$$

oluyorsa q kuaterniyonuna bir temporal kuaterniyon denir. Genel olarak $q \in Q$ kuaterniyonu

$$q = \frac{1}{2} (q + \bar{q}) + \frac{1}{2} (q - \bar{q})$$

şeklinde ifade edilebilir (Bharathi ve Nagaraj 1985).

2.3 Yarı Reel Kuaterniyonlar

Tanım 2.3.1 Bir yarı reel kuaterniyon sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ olan dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Burada $+1$ reel birim olup, diğer üç birim ise (123) permütasyonu (ijk) ve $a, b, c, d \in R$ iken,

- i. $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = -\varepsilon \vec{e}_i$, $1 \leq i \leq 3$
- ii. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon \vec{e}_i \varepsilon \vec{e}_j \varepsilon \vec{e}_k$, (E_1^3)
- iii. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = -\varepsilon \vec{e}_i \varepsilon \vec{e}_j \varepsilon \vec{e}_k$, (E_2^4)

dır. Buna göre bir q yarı reel kuaterniyonu, q nun sırasıyla skaler ve vektör kısımları

$$S_q = d , \quad V_q = a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2 + c \vec{e}_3$$

olmak üzere,

$$q = S_q + V_q ,$$

$$q = d + a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2 + c \vec{e}_3$$

formunda yazılır. Burada,

$$\varepsilon(\vec{e}_i) = \begin{cases} -1, & \vec{e}_i \text{ timelike} \\ 1, & \vec{e}_i \text{ spacelike} \end{cases}$$

dır. Bundan sonra yarı reel kuaterniyonların cümlesi,

$$Q_v = \left\{ \begin{array}{l} q \mid q = d + a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2 + c \vec{e}_3 , \quad a, b, c, d \in R \\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in E_1^3, \quad h_{v(v=1,2)}(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = \varepsilon(\vec{e}_i) , \quad 1 \leq i \leq 3 \end{array} \right\}$$

ile gösterilecektir (Aksoy 2002).

Tanım 2.3.2 Her $p, q \in Q_v$ için iki yarı reel kuaterniyonun çarpımı E_1^3 de sırasıyla h ve $\wedge_L E_v^3$ semi-Öklid uzayında iç ve vektörel çarpım olmak üzere,

$$p \times_L q = S_p S_q + h(V_p, V_q) + S_p V_q + S_q V_p + V_p \wedge_L V_q$$

olarak tanımlıdır (Aksoy 2002).

Tanım 2.3.3 $q \in Q_v$ kuaterniyonunun eşleniği αq ile gösterilir ve

$$\alpha q = S_q - V_q = d - a \vec{e}_1 - b \vec{e}_2 - c \vec{e}_3$$

ile tanımlıdır ve bu h formunun tanımlanmasına yardım eder (Aksoy 2002).

Tanım 2.3.4 $p, q \in Q_v$ için,

$$h: Q_v \times Q_v \rightarrow R$$

$$h(p, q) = \frac{1}{2} [\varepsilon_p \varepsilon_{\alpha p} (p \times_L \alpha q) + \varepsilon_q \varepsilon_{\alpha p} (q \times_L \alpha)] , E_1^3$$

$$h(p, q) = \frac{1}{2} [-\varepsilon_p \varepsilon_{\alpha p} (p \times_L \alpha q) - \varepsilon_q \varepsilon_{\alpha p} (q \times_L \alpha p)] , E_2^4$$

şeklinde tanımlanan h fonksiyonuna yarı reel kuaterniyon iç çarpım denir. Bu reel değerli h_v fonksiyonu ters simetrik ve bilinearlik özelliğine sahiptir. Burada $\times_L$ yarı reel kuaterniyon çarpımını göstermektedir (Aksoy 2002).

Genel olarak $v=\{1,2\}$ için,

$$h_v(q, q) = a^2 \varepsilon(\vec{e}_1) + b^2 \varepsilon(\vec{e}_2) + c^2 \varepsilon(\vec{e}_3) + d^2$$

olup semi-reel quaterniyonun iç çarpımı diye isimlendirilir. $p = a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3 + d_1$ ve $q = a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2 + c \vec{e}_3 + d$ iki semi-reel kuaterniyonun vektörel çarpımı

$v=1$ için

$$\vec{V}_p \wedge \vec{V}_q = \varepsilon(\vec{e}_2) \varepsilon(\vec{e}_3) (b_1 c - b c_1) \vec{e}_1 - \varepsilon(\vec{e}_1) \varepsilon(\vec{e}_3) (a_1 c - a c_1) \vec{e}_2 + \varepsilon(\vec{e}_1) \varepsilon(\vec{e}_2) (a_1 b - a b_1) \vec{e}_3$$

$v=2$ için

$$\vec{V}_p \wedge \vec{V}_q = -\varepsilon(\vec{e}_2) \varepsilon(\vec{e}_3) (b_1 c - b c_1) \vec{e}_1 + \varepsilon(\vec{e}_1) \varepsilon(\vec{e}_3) (a_1 c - a c_1) \vec{e}_2 - \varepsilon(\vec{e}_1) \varepsilon(\vec{e}_2) (a_1 b - a b_1) \vec{e}_3$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.5 $q \in Q_v$ yarı reel kuaterniyonunun normu,

$$\|q\|^2 = |h_v(q, q)| = |a^2 \varepsilon(\vec{e}_1) + b^2 \varepsilon(\vec{e}_2) + c^2 \varepsilon(\vec{e}_3) + d^2|$$

şeklinde tanımlı olan $\|q\|$ reel sayısına denir (Aksoy 2002).

Tanım 2.3.6 $q \in Q_v$ yarı reel kuaterniyonu için $q + \alpha q = 0$ ise q ya bir spatial kuaterniyon $q - \alpha q = 0$ için q ya bir temporal kuaterniyon denir (Aksoy 2002).

Tanım 2.3.7 $p, q \in Q_v$ için ,

$$h_v(p, q) = 0$$

ise p ve q yarı reel kuaterniyonlarına h_v -ortogonaldır denir (Aksoy 2002).

Tanım 2.3.8 $q \in Q_v$ yarı reel kuaterniyonu için

$$\|q\|^2 = 1$$

ise q kuaterniyonuna yarı reel birim kuaterniyon denir (Aksoy 2002).

Tanım 2.3.9 Bir yarı reel kuaterniyon $I_q = q \times_L \alpha q = \alpha q \times_L q$ olmak üzere sırasıyla $I_q < 0$, $I_q > 0$, $I_q = 0$ ise spacelike, timelike veya lightlike yarı reel kuaterniyon olarak adlandırılır (Özdemir ve Ergin 2006).

2.4 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret–Frenet Formülleri

2.4.1 E_1^3 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret–Frenet Formülleri

1.Durum: E_1^3 vektör uzayı üzerinde semi h semi-Öklidyen kuaterniyon metriğine göre e_1 timelike, e_2 ve e_3 spacelike vektörler olsun. h kuaterniyonik metrik ile E_1^3 bir 3-boyutlu Minkowski uzayı tanımlansın. $\forall s \in I$ için pozitif ve negatif yönlü

$$\gamma: I \rightarrow E_1^3$$

$\{\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)\}$ gibi null kuaterniyonik Cartan eğri olsun. $\{l = \gamma'(s), n, u\}$ Cartan çatısı dikkate alınırsa;

$$h(l, l) = h(n, n) = h(l, u) = h(n, u) = 0, \quad h(l, n) = h(u, u) = 1$$

şartlarını sağlayan ;

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_1), \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_1), \quad u = e_3$$

vektörleri oluşturulsun. Burada E_1^3 in bir bazı $\{l, n, u\}$ biçiminde olup l ve n vektörleri, timelike ve spacelike vektörlerin toplam ve farkları ile oluşturulan null vektörler ve u de

spacelike vektördür. E_1^3 , 3 boyutlu yarı Öklid uzayında uzaysal kuaterniyonların uzayı $\{\gamma \in Q_v | \gamma + a\gamma = 0\}$ olsun, γ eğrisinin Frenet vektörleri ;

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_1), \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_1), \quad u = e_3$$

ve γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet denklemleri,

$$l' = \kappa u \quad n' = \tau u \quad u' = -\tau l - \kappa n \quad (2.4.1.1)$$

ve

$$l' = \kappa u \quad n' = -\tau u \quad u' = \tau l - \kappa n \quad (2.4.1.2)$$

şeklindedir. Burada τ eğrinin torsiyonu ve κ eğrinin eğriliğidir. Bu durumda γ bir null kuaterniyonik Cartan eğrisi, $\kappa(s)=1$ ise

$$l' = u \quad n' = \tau u \quad u' = -\tau l - n \quad (2.4.1.3)$$

ve

$$l' = u \quad n' = -\tau u \quad u' = \tau l - n \quad (2.4.1.4)$$

$\{l, n, u\}$ ile $\gamma(s)$ eğrisinin frenet formülü olur.

2.Durum: E_1^3 vektör uzayı üzerinde h semi-Öklidyen kuaterniyon metriğine göre e_2 timelike, e_1 ve e_3 spacelike vektörler olsun. h kuaterniyonik metrik ile E_1^3 bir 3-boyutlu Minkowski uzayı tanımlansın. $\forall s \in I$ için pozitif ve negatif yönlü

$$\gamma: I \rightarrow E_1^3$$

$\{\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)\}$ gibi null kuaterniyonik Cartan eğri olsun. $\{l = \gamma'(s), n, u\}$ Cartan çatısı dikkate alınırsa;

$$h(l, l) = h(n, n) = h(l, u) = h(n, u) = 0, \quad h(l, n) = -1, \quad h(u, u) = 1$$

şartlarını sağlayan;

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_1), \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_1), \quad u = e_3$$

vektörleri oluşturulsun. Burada E_1^3 in bir bazı $\{l, n, u\}$ biçiminde olup l ve n vektörleri, timelike ve spacelike vektörlerin toplam ve farkları ile oluşturulan null vektörler ve u vektörü spacelike vektördür. E_1^3 , 3 boyutlu yarı Öklid uzayında spatial kuaterniyonların uzayı $\{\gamma \in Q_v | \gamma + a\gamma = 0\}$ olsun, γ eğrisinin Frenet vektörleri ;

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_1), \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_1), \quad u = e_3$$

ve γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet denklemleri,

$$l' = \kappa u, \quad n' = -\tau u, \quad u' = -\tau l + \kappa n \quad (2.4.1.5)$$

ve

$$l' = \kappa u, \quad n' = \tau u, \quad u' = \tau l + \kappa n \quad (2.4.1.6)$$

şeklindedir. Burada τ eğrinin torsiyonu ve κ eğrinin eğriliğidir. Bu durumda γ bir null kuaterniyonik Cartan eğrisi, $\kappa(s)=1$ ise

$$l' = u, \quad n' = -\tau u, \quad u' = -\tau l + n$$

ve

$$l' = u, \quad n' = -\tau n, \quad u' = \tau l + n$$

$\{l, n, u\}$ ile $\gamma(s)$ nin frenet formülü olur.

2.4.2 E_1^4 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri

1.Durum: E_1^4 vektör uzayı üzerinde h semi-Öklidyen kuaterniyon metriğine göre e_1 timelike, e_2, e_3 ve e_4 spacelike olsun. vektörler $\{e_1, e_2, e_3, e_4=1\}$, E_1^4 in bir bazıdır.

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_1), \quad N = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_1), \quad U = e_3, \quad W = e_4$$

$$h(L, L) = h(N, N) = h(L, U) = h(N, U) = h(W, U) = h(N, W) = h(L, W) = 0$$

ve

$$h(L, N) = h(U, W) = h(W, W) = +1$$

eşitlikleri sağlanır.

Böylece E_1^4 in bir bazı $\{L, N, U, W\}$ olur. L ve N null vektörler U ve W spacelike vektörlerdir. h kuaterniyonik metrik ile bir 4-boyutlu Minkowski uzayı E_1^4 ile gösterilir. E_1^4 de 4-boyutlu minkowski uzayları birim kuaterniyonun uzayları olarak tanımlanır. I aralığı üzerinde tanımlanan E_1^4 de bir null kuaterniyonik eğri

$$\beta : I \subset E \rightarrow Q_v$$

$$\beta = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4$$

olsun. Sıfır uzunluğa sahip $L(s) = \sum_{i=1}^4 \gamma_i'(s) e_i$ teğeti gibi olan s parametresi seçilir. E_1^4

Minkowski uzaylarında diferensiyellenebilir Minkowski uzay eğrisinin $\{L(s), N(s), U(s), W(s)\}$ Frenet elemanları olur. Bu özel sınıfın Frenet çatısı ve Frenet denklemleri β ile gösterilir. O zaman Frenet denklemleri

$$L' = K W$$

$$N' = -(\tau + p) U + p W$$

$$U' = (\tau + p) L \quad (2.4.2.1)$$

$$W' = -p L - K N$$

ve

$$L' = K W$$

$$N' = (\tau - p) U + p W$$

$$U' = -(\tau - p) L \quad (2.4.2.2)$$

$$W' = -p L - K N$$

şeklindedir.

2.Durum: E_1^4 vektör uzayı üzerinde h semi-Öklidyen kuaterniyon metriğine göre e_2 timelike, e_1, e_3 ve e_4 spacelike vektörler olsun. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ bir bazıdır. E_1^4 in bir bazıdır.

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_2 + e_1), \quad N = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_2 - e_1), \quad U = e_3, \quad W = e_4$$

$$h(L, L) = h(N, N) = h(L, N) = h(N, U) = h(W, U) = h(N, W) = h(L, W) = 0$$

$$h(U, U) = h(W, W) = +1, \quad h(L, N) = -1$$

sağlanır.

U ve W spacelike vektörler, L ve N null vektörleri için $\{L, N, U, W\}$, E_1^4 de bir bazdır. H kuaterniyonik metrik eğri ile E_1^4 de bir 4-boyutlu Minkowski uzayı belirtir. Birim kuaterniyon uzaylar ile tanımlanan E_1^4 de 4-boyutlu Minkowski uzaylarıdır. I aralığı üzerinde tanımlanan E_1^4 de bir null kuaterniyonik eğri

$$\beta : I \subset E \rightarrow Q_v$$

$$\beta = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4$$

olsun. Sıfır uzunluğa sahip $L(s) = \sum_{i=1}^4 \gamma_i'(s) e_i$ teğeti gibi olan s parametresi seçilir. E_1^4

Minkowski uzaylarında diferensiyellenebilir Minkowski uzay eğrisinin Frenet elemanları $\{L(s), N(s), U(s), W(s)\}$ olsun. (1.durum) önermesi ile β eğrisinin özel sınıfı Frenet çatısı ve Frenet denklemleri tanımlansın.

Frenet denklemleri,

$$L' = KW$$

$$N' = (\tau + p) U + pW$$

$$U' = (\tau + p) L$$

$$W' = pL + KN$$

ve

$$L' = K W$$

$$N' = -(\tau - p) U + pW$$

$$U' = -(\tau - p) L$$

$$W' = pL + K N$$

denklemleridir. Burada, E_1^4 de β eğrisinin birinci eğriliği K , E_1^3 de γ eğrisinin birinci eğriliği κ dır. Ve E_1^4 de β eğrisi için ikinci eğriliktir. Gerçekten $K=1$ ve $\kappa=1$ bulunur. Ve bu değerler $K-\kappa=0$ sağlar.

3. E_1^3 MINKOWSKI UZAYINDA BAZI NULL KUATERNİYONİK EĞRİLER

Bu bölümde E_1^3 yarı-Öklid uzayında null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri ve null kuaterniyonik slant helisler verilecektir. Burada null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri için referansımız Kahraman (2018) ve null kuaterniyonik slant helisler için referansımız ise Kahraman (2019) tarafından yapılan çalışmalar olacaktır.

E_1^3 uzayında $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ null kuaterniyonik eğrisinin aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan $\{l = \alpha'(s), n, u\}$ şeklinde Frenet çatısı vardır.

$$l' = \kappa u, \quad n' = \tau u, \quad u' = -\tau l - \kappa n \quad (3.1)$$

Burada $l = \gamma'(s)$ ve l, n, u karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlar.

$$h(l, l) = h(n, n) = h(l, u) = h(n, u) = 0$$

$$h(l, n) = h(u, u) = 1$$

(Aksoy 2014).

Bu bölümde yukarıda vermiş olduğumuz Frenet denklemleri kullanılacaktır.

3.1 E_1^3 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Bertrand Eğri Çiftleri

Tanım 3.1.1 $\alpha_1 : I \subset E \rightarrow E_1^3$ ve $\alpha_2 : I \subset E \rightarrow E_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında null kuaterniyonik eğriler olsun. α_1 eğrisinin yay uzunluğu parametresi s_1 olmak üzere α_1 eğrisinin $\alpha_1(s_1)$ noktasındaki Frenet üç ayaklısı $\{l_1, n_1, u_1\}$ ve α_2 eğrisinin parametresi s_2 olmak üzere α_2 eğrisinin $\alpha_2(s_2)$ noktasında Frenet üç ayaklısı $\{l_2, n_2, u_2\}$ olsun α_1 eğrisinin asli normali ile α_2 eğrisinin asli normali lineer bağımlı ise (α_1, α_2) eğri çiftine bir null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti denir.

Teorem 3.1.1 E_1^3 de $\alpha_1(s_1)$ ve $\alpha_2(s_2)$ null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{ds_2}{ds_1}\right)^2 = \frac{k_1}{k_2} (1 - 2\lambda \tau_1) \quad (3.1.1)$$

eşitliği vardır. Burada k_1, τ_1 ve k_2, τ_2 sırasıyla α_1 ve α_2 eğrilerinin eğrilikleri s_1, s_2 ise α_1 ve α_2 eğrilerinin yay uzunluğu parametreleridir.

İspat : E_1^3 de α_1 ve α_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun, Tanım 3.1.1'den $\lambda = \lambda(s_1)$, s_1 'e bağlı düzgün bir fonksiyon olmak üzere;

$$\alpha_2(s_2) = \alpha_1(s_1) + \lambda(s_1).u_1(s_1) \quad (3.1.2)$$

eşitliği sağlanır.

(3.1.2) eşitliğinin s_1 'e göre türevi alınarak (3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$l_2 \cdot \frac{ds_2}{ds_1} = (1 - \lambda \tau_1).l_1 - \lambda k_1 n_1 + \lambda' u_1 \quad (3.1.3)$$

elde edilir.(3.1.3) eşitliğinin her iki tarafının u_1 vektörü ile kuaterniyon iç çarpımı alınırsa $\lambda' = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda = \text{sabit} \neq 0$ sonucuna ulaşılır. λ' , (3.1.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$l_2 \cdot \frac{ds_2}{ds_1} = (1 - \lambda \tau_1).l_1 - \lambda k_1 n_1 \quad (3.1.4)$$

bu eşitliğin s_1 e göre tekrar türevi alınırsa

$$\frac{d^2 s_2}{d s_1^2} l_2 + k_2 \left(\frac{ds_2}{ds_1} \right)^2 u_2 = -\lambda \tau_1' l_1 + k_1 u_1 (1 - \lambda \tau_1) - \lambda k_1' n_1 - \lambda \tau_1 u_1 k_1$$

buradan

$$\frac{d^2 s_2}{d s_1^2} l_2 + k_2 \left(\frac{ds_2}{ds_1} \right)^2 u_2 = -\lambda \tau_1' l_1 - \lambda k_1' n_1 + (1 - 2 \lambda \tau_1) k_1 u_1 \quad (3.1.5)$$

elde edilir. (3.1.5) eşitliğinin her iki tarafının u_1 vektörü ile kuaterniyon iç çarpımı yapılırsa

$$\frac{d^2 s_2}{d s_1^2} h(l_2, u_1) + k_2 \left(\frac{ds_2}{ds_1} \right)^2 h(u_2, u_1) = -\lambda \tau_1' h(l_1, u_1) - \lambda k_1' h(n, u_1) + (1 - 2 \lambda \tau_1) k_1 h(u_1, u_1)$$

bulunur. Burada iç çarpım değerleri yerine yazılırsa;

$$k_2 \left(\frac{ds_2}{ds_1} \right)^2 = (1 - 2 \lambda \tau_1) k_1$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$\left(\frac{ds_2}{ds_1} \right)^2 = \frac{k_1}{k_2} (1 - 2 \lambda \tau_1)$$

sonucu bulunur.

Teorem 3.1.1'den aşağıdaki sonuçlar yazılabilir:

Sonuç 3.1.1 E_1^3 de null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri arasındaki uzaklık sabittir.

Sonuç 3.1.2 E_1^3 de α_1 ve α_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. α_1 eğrisinin eğriliklerinden birisi sabittir.

İspat: α_1 ve α_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti ise (3.1.5) eşitliği sağlanır. (3.1.5) eşitliğinin her iki tarafının kendisiyle iç çarpımı alınırsa;

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 s_2}{d s_1^2} \frac{d^2 s_2}{d s_1^2} h(l_2, l_2) + k_2 \frac{d^2 s_2}{d s_1^2} \left(\frac{d s_2}{d s_1} \right)^2 h(l_2, u_2) + k_2 \left(\frac{d s_2}{d s_1} \right)^2 \frac{d^2 s_2}{d s_1^2} h(u_2, l_2) + k_2^2 \left(\frac{d s_2}{d s_1} \right)^4 h(u_2, u_2) \\ &= \lambda^2 (\tau_1')^2 h(l_1, l_1) + 2\lambda^2 \tau_1' k_1' h(l_1, n_1) - 2\lambda \tau_1' (1 - 2\lambda \tau_1) k_1 h(l_1, u_1) + \lambda^2 (k_1')^2 h(n_1, n_1) \\ & - 2\lambda k_1' (1 - 2\lambda \tau_1) k_1 h(n_1, u_1) + (1 - 2\lambda \tau_1)^2 k_1^2 h(u_1, u_1) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$k_2^2 \left(\frac{d s_2}{d s_1} \right)^4 = 2\lambda^2 \tau_1' k_1' + k_1^2 (1 - 2\lambda \tau_1)^2 \quad (3.1.6)$$

elde edilir. (3.1.6) eşitliğinde (3.1.1) kullanılırsa

$$2\lambda^2 \tau_1' k_1' = 0$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.1.2 E_1^3 de α_1 ve α_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. Bu takdirde

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 \tau_2} = c = \text{sabit} \quad (3.1.7)$$

olacak şekilde bir c sayısı vardır.

İspat: Tanım 3.1.1 den

$$\alpha_1(s_1) = \alpha_2(s_2) - \lambda u_2(s_2) \quad (3.1.8)$$

eşitliği yazılır. (3.1.8) eşitliğinin art arda iki kez türevi alınırsa;

$$l_1 \frac{d s_1}{d s_2} = \alpha_2'(s_2) - \lambda u_2'(s_2) = (1 + \lambda \tau_2) l_2 + \lambda k_2 n_2 \quad (3.1.9)$$

ve

$$k_1 \left(\frac{ds_1}{ds_2} \right)^2 u_1 + \frac{d^2 s_1}{ds_2^2} l_1 = \lambda \tau_2' l_2 - \lambda k_2' n_2 + k_2 (1 + 2\lambda \tau_2) u_2 \quad (3.1.10)$$

elde edilir. (3.1.10) eşitliğinin her iki tarafı u_1 vektörü ile kuaterniyon iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds_1}{ds_2} \right)^2 = \frac{k_2}{k_1} (1 + 2\lambda \tau_2) \quad (3.1.11)$$

elde edilir.

(3.1.11) eşitliğinde (3.1.1) yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 \tau_2} = 2\lambda = \text{sabit}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.1.3 E_1^3 de α_1 ve α_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri arasındaki uzaklık

$$\lambda = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 \tau_2}$$

sabit sayısıdır.

Sonuç 3.1.4 E_1^3 de α_1 ve α_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri arasındaki λ sabit uzaklığı k_1 ve k_2 eğriliklerinden bağımsızdır.

Sonuç 3.1.5 E_1^3 de α_1 ve α_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. Bu takdirde α_2 eğrisinin eğriliklerinden birisi sabittir.

İspat: α_1 ve α_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti ise (3.1.10) eşitliği sağlanır. (3.1.10) eşitliğinin her iki tarafının kendisiyle iç çarpımı alınarak (3.1.11) eşitliği kullanılırsa

$$k_1^2 \frac{k_2^2}{k_1^2} (1 + 2\lambda \tau_2) = \lambda^2 k_2' \tau_2' + k_2^2 (1 + 2\lambda \tau_2)^2$$

eşitliğinden

$$\lambda^2 k_2' \tau_2' = 0$$

sonucu elde edilir. Sonuç olarak α_2 eğrisinin eğriliklerinden birisi sabittir.

3.2 E_1^3 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Slant Helisler

Tanım 3.2.1 E_1^3 de, $\alpha(s)$ null kuaterniyonik bir eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin u asli normal vektörü v sabit doğrultusu ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, $\alpha(s)$ eğrisine null kuaterniyonik slant helis denir.

Teorem 3.2.1 E_1^3 de, $\alpha(s)$ null kuaterniyonik bir eğri olsun. Bu takdirde $\alpha(s)$ null kuaterniyonik slant helis ise, aşağıda verilen sonuçlar elde edilir.

i. $a, b, c \in R$, $v = a.l + b.n + c.u$ spacelike bir vektör olmak üzere u ve v vektörleri tarafından gerilen düzlem spacelike ise,

$$v = a.l + b.n + \cos\theta u, \quad a.b = \frac{1}{2} \sin^2\theta.$$

ii. $a, b, c \in R$, $v = a.l + b.n + c.u$ spacelike bir vektör olmak üzere u ve v vektörleri tarafından gerilen düzlem timelike ise,

$$v = a.l + b.n + \cosh\theta u, \quad a.b = -\frac{\sinh^2\theta}{2} = \frac{1 - \cosh^2\theta}{2}.$$

iii. $a, b, c \in R$ olmak üzere $v = a.l + b.n + c.u$ timelike bir vektör ise

$$v = a.l + b.n + \sinh\theta u, \quad a.b = -\frac{\cosh^2\theta}{2}.$$

bağıntıları elde edilir. Burada u vektörü, $\alpha(s)$ eğrisinin asli normal vektörü ve u vektörü ile v sabit doğrultusu arasındaki sabit açı θ dır.

İspat: E_1^3 de, $\alpha(s)$ eğrisi null kuaterniyonik slant helis olsun. Bu takdirde $\alpha(s)$ eğrisinin u asli normal vektörü ile v sabit doğrultusu arasındaki açı θ olur. Kabul edelim ki v sabit doğrultusu

$$v = a.l + b.n + c.u, \quad a, b, c \in R \quad (3.2.1)$$

şeklinde verilsin. (3.2.1) ifadesinin u vektörüyle her iki tarafının kuaterniyon iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} h(u, v) &= h(u, a.l + b.n + c.u) = a.h(u, l) + b.h(u, n) + c.h(u, u) \\ h(u, v) &= c \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

elde edilir.

i. $a, b, c \in R$, $v = al + bn + cu$ spacelike bir vektör olmak üzere u ve v vektörleri tarafından gerilen düzlem spacelike ise u asli normal vektörü spacelike olduğundan

$$h(u, v) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$$

yazabiliriz. u ve v vektörleri birim vektör olarak alınırsa,

$$h(u, v) = c = \cos\theta \quad (3.2.3)$$

elde edilir. v sabit doğrultusu spacelike olduğundan ,

$$h(v, v) = a \cdot b \cdot h(l, n) + b \cdot a \cdot h(n, l) + c^2 \cdot h(u, u)$$

$$h(v, v) = 2 \cdot a \cdot b + c^2 \quad (3.2.4)$$

bulunur. (3.2.2) ifadesi (3.2.4) ifadesinde yerine yazılırsa

$$h(v, v) = 2 \cdot a \cdot b + \cos^2\theta$$

$$1 = 2 \cdot a \cdot b + \cos^2\theta$$

bulunur. Buradan

$$v = al + bn + (\cos\theta)u \quad \text{ve} \quad a \cdot b = \frac{1}{2} \sin^2\theta \quad (3.2.5)$$

şeklinde istenen eşitlikler elde edilir.

ii. $a, b, c \in R$, $v = al + bn + cu$ spacelike bir vektör olmak üzere u ve v vektörleri tarafından gerilen düzlem timelike ise u asli normal vektörü spacelike olduğundan ,

$$h(u, v) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cosh\theta$$

yazabiliriz. u ve v vektörleri birim vektör olarak alınırsa,

$$h(u, v) = c = \cosh\theta \quad (3.2.6)$$

elde edilir. (3.2.6) ifadesi (3.2.4) ifadesinde yerine yazılırsa

$$h(v, v) = 2 \cdot a \cdot b + \cosh^2\theta$$

$$1 = 2 \cdot a \cdot b + \cosh^2\theta$$

bulunur. Buradan

$$v = al + bn + \cosh\theta u , \quad a \cdot b = -\frac{\sinh^2\theta}{2} = \frac{1 - \cosh^2\theta}{2}$$

şeklinde istenen eşitlikler elde edilir.

iii. $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $v = al + bn + cu$ timelike bir vektör ve u asli normal vektörü spacelike olduğundan,

$$h(u, v) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sinh \theta$$

yazabiliriz. u ve v vektörleri birim vektör olarak alınırsa

$$h(u, v) = c = \sinh \theta \quad (3.2.7)$$

elde edilir. (3.2.7) ifadesi (3.2.4) ifadesinde yerine yazılırsa

$$h(v, v) = 2a \cdot b + \sinh^2 \theta$$

$$-1 = 2a \cdot b + \sinh^2 \theta$$

bulunur. Buradan

$$v = a l + b n + \sinh^2 \theta u, \quad a b = -\frac{\cosh^2 \theta}{2}$$

şeklinde istenen eşitlikler elde edilir.

Teorem 3.2.2 E_1^3 de, $\alpha(s)$ eğrisi null kuaterniyonik bir eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin E_1^3 de null kuaterniyonik bir slant helis olması için gerek ve yeter şart;

$$\tau \cdot b + \kappa \cdot a = 0 \quad (3.2.8)$$

olmasıdır.

İspat: E_1^3 de, $\alpha(s)$ eğrisi null kuaterniyonik slant helis olsun. Bu takdirde u asli normal vektörü v sabit doğrultusu ile sabit bir θ açısı yapıyorsa,

$$h(u, v) = c (\text{sabit}) \quad (3.2.9)$$

yazılır. (3.2.9) ifadesinin s ye göre türevi alınırsa

$$h(u', v) = h(-\tau l - \kappa n, v) \quad (3.2.10)$$

$$h(u', v) = h(-\tau l - \kappa n, a l + b n + c u)$$

$$h(u', v) = -\tau b h(l, n) - \kappa a h(n, l) = 0 \quad (3.2.11)$$

buradan (3.2.8) denklemi elde edilir.

Tersine (3.2.8) ifadesi sağlansın (3.1) Frenet formülleri ve (3.2.8) eşitliği (3.2.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$h(u',v)=-\tau. b-\kappa. a=0$$

elde edilir. Buradan

$$h(u,v)=c=\text{sabit}$$

olduğu açıktır. Buradan $\alpha(s)$ eğrisinin null kuaterniyonik slant helis olduğu sonucu elde edilir.



4. E_1^4 MINKOWSKI UZAYINDA BAZI NULL KUATERNİYONİK EĞRİLER

Bu bölümde E_1^4 yarı-Öklid uzayında null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri ve null kuaterniyonik W-slant helisler verilecektir. Bu bölümde referanslarımız Kahraman (2018) ve Kahraman (2019) tarafından yapılan çalışmalardır.

E_1^4 uzayında $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q_v$ null kuaterniyonik eğrisinin aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan $\{L, N, U, W\}$ şeklinde Frenet çatısı vardır.

$$\begin{aligned} L' &= KW \\ N' &= (\tau + p)U + pW \\ U' &= (\tau + p)L \\ W' &= pL + KN \end{aligned} \tag{4.1}$$

burada $L = \gamma'(s)$ ve L, N, U, W karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$h(L, L) = h(N, N) = h(L, U) = h(N, U) = h(W, U) = h(N, W) = h(L, W) = 0$$

ve

$$h(U, U) = h(W, W) = 1,$$

$$h(L, N) = -1$$

(Aksoy 2014).

Bu bölümde vereceğimiz çalışmalarda yukarıda vermiş olduğumuz Frenet denklemleri kullanılacaktır.

4.1 E_1^4 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Bertrand Eğri Çiftleri

Tanım 4.1.1 $\gamma_1 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^4$ ve $\gamma_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ 4-boyutlu Minkowski uzayında null kuaterniyonik eğriler olsun. γ_1 eğrisinin yay uzunluğu parametresi s_1 olmak üzere γ_1 eğrisinin $\gamma_1(s_1)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{L_1, N_1, U_1, W_1\}$ ve γ_2 eğrisinin parametresi s_2 olmak üzere γ_2 eğrisinin $\gamma_2(s_2)$ noktasında Frenet çatısı $\{L_2, N_2, U_2, W_2\}$ olsun. γ_1 eğrisinin U_1 asli normal ile γ_2 eğrisinin U_2 asli normal lineer bağımlı ise (γ_1, γ_2) eğri çiftine bir null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti denir.

Teorem 4.1.1 E_1^4 'de γ_1 ve γ_2 eğrileri null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti ise,

$$\frac{ds_1}{ds_2} \frac{d^2 s_2}{ds_1^2} (1 + \lambda(\tau_1 + p_1)) = \lambda(\tau_1' + p_1')$$

eşitliği vardır.

İspat : Tanım 4.1.1 den $\lambda = \lambda(s_1)$ fonksiyonu için

$$\gamma_2(s_2) = \gamma_1(s_1) + \lambda U_1(s_1) \quad (4.1.1)$$

yazılabilir. (4.1.1) eşitliğinde her iki tarafının s_1 e göre türevi alınır

$$L_2 \frac{ds_2}{ds_1} = (1 + \lambda\tau_1 + \lambda p_1).L_1 + \lambda' U_1 \quad (4.1.2)$$

elde edilir. (4.1.2) eşitliğinin her iki tarafının U_1 vektörü ile kuaterniyon iç çarpımı yapılırsa $\lambda' = 0$ elde edilir. Bu takdirde $\lambda \neq 0$ =sabit elde edilir. $\lambda' = 0$ eşitliği (4.1.2) de yerine yazılırsa

$$L_2 \frac{ds_2}{ds_1} = (1 + \lambda\tau_1 + \lambda p_1).L_1 \quad (4.1.3)$$

elde edilir. (4.1.3) eşitliğinin s_1 e göre tekrar türevi alınır

$$L_2 \frac{d^2 s_2}{ds_1^2} + K_2 \left(\frac{ds_2}{ds_1} \right)^2 .W_2 = \lambda(\tau_1' + p_1').L_1 + (1 + \lambda\tau_1 + \lambda p_1).K_1.W_1 \quad (4.1.4)$$

elde edilir. (4.1.4) eşitliğinin her iki tarafının kendisi ile kuaterniyonik iç çarpımı yapılırsa

$$K_2 \left(\frac{ds_2}{ds_1} \right)^2 = -K_1(1 + \lambda\tau_1 + \lambda p_1) \quad (4.1.5)$$

elde edilir. (4.1.3) ve (4.1.5) ifadeleri (4.1.4) de yerine yazılırsa

$$W_2 = -W_1 \quad (4.1.6)$$

ve

$$\frac{d^2 s_2}{ds_1^2} \frac{ds_1}{ds_2} (1 + \lambda(\tau_1 + p_1)) = \lambda(\tau_1' + p_1') \quad (4.1.7)$$

denklemleri elde edilir.

Teorem 4.1.2 E_1^4 de γ_1 ve γ_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. Bu takdirde γ_1 ve γ_2 eğrilerinin, eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$\frac{(\tau_1 + p_1) - (\tau_2 + p_2)}{(\tau_1 + p_1) \cdot (\tau_2 + p_2)} = c = \text{sabit} \quad (4.1.8)$$

şeklindedir.

İspat: E_1^4 de γ_1 ve γ_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olduğundan

$$\gamma_1(s_1) = \gamma_2(s_2) - \lambda u_2(s_2) \quad (4.1.9)$$

yazılır. (4.1.9) eşitliğinin s_2 'ye göre iki kez türevi alınırsa,

$$L_1 \frac{d^2 s_1}{d s_2^2} + K_1 \left(\frac{d s_1}{d s_2} \right)^2 W_1 = -\lambda (\tau_2' + p_2') \cdot L_2 + (1 - \lambda (\tau_2 + p_2)) K_2 W_2 \quad (4.1.10)$$

elde edilir. (4.1.10) eşitliğinin her iki tarafının kendisi ile kuaterniyon iç çarpımı yapılırsa

$$k_1 \left(\frac{d s_1}{d s_2} \right)^2 = -K_2 (1 - \lambda (\tau_2 + p_2)) \quad (4.1.11)$$

elde edilir. (4.1.5) eşitliğinden $\left(\frac{d s_1}{d s_2} \right)^2$ ifadesi (4.1.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$(\tau_1 + p_1) - (\tau_2 + p_2) = \lambda (\tau_1 + p_1) \cdot (\tau_2 + p_2) \quad (4.1.12)$$

eşitliği bulunur. λ sabit bir sayı olduğundan istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.2'den aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.1.1 γ_1 ve γ_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri arasındaki sabit uzaklık

$$\lambda = \frac{(\tau_1 + p_1) - (\tau_2 + p_2)}{(\tau_1 + p_1) \cdot (\tau_2 + p_2)}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.1.2 γ_1 ve γ_2 null kuaterniyonik Bertrand eğri çiftleri arasındaki sabit uzaklık, K_1 ve K_2 eğriliklerinden bağımsızdır.

4.2 E_1^4 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik W-Slant Helisler

Bu kısımda null kuaterniyonik eğrinin hangi şartlarda W-slant helis olduğu incelenecektir. Ayrıca null kuaterniyonik W-slant helislerin eğrilikleri arasındaki bağıntılar verilecektir.

Tanım 4.2.1 E_1^4 de $\beta(s)$, null kuaterniyonik bir eğri olsun. Eğer $\beta(s)$ eğrisinin her noktasında W binormal vektörü v sabit doğrultusu ile sabit bir θ açısı yapıyorsa $\beta(s)$ eğrisi null kuaterniyonik W-slant helis olarak adlandırılır.

Teorem 4.2.1 E_1^4 de $\beta(s)$, null kuaterniyonik bir eğri olsun. Eğer $\beta(s)$ null kuaterniyonik W-slant helis ise aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

i. $a, b, c, d \in R$, $v^* = aL + bN + cU + dW$ spacelike bir vektör olmak üzere W ve v^* vektörleri tarafından gerilen düzlem spacelike ise,

$$v^* = aL + bN + cU + (\cos\theta)W, \quad 2ab - c^2 = -\sin^2\theta.$$

ii. $a, b, c, d \in R$, $v^* = aL + bN + cU + dW$ vektörü spacelike bir vektör olmak üzere W ve v^* vektörleri tarafından gerilen düzlem timelike ise,

$$v^* = aL + bN + cU + (\cosh\theta)W, \quad 2ab - c^2 = \sinh^2\theta.$$

iii. $a, b, c, d \in R$ olmak üzere $v^* = a.L + b.N + c.U + d.W$ vektörü timelike ise,

$$v^* = aL + bN + cU + (\sinh\theta)W, \quad 2ab - c^2 = \cosh^2\theta.$$

Burada β eğrisinin asli normal vektörü U olmak üzere, U asli normal vektörü ile v^* sabit doğrultusu arasındaki sabit açı θ dır.

İspat: E_1^4 de $\beta(s)$, null kuaterniyonik W-slant helis olsun. Bu takdirde $\beta(s)$ eğrisinin W binormal vektörü v^* sabit doğrultusu ile sabit bir θ açısı yapar. Kabul edelim ki v^* sabit doğrultusu

$$v^* = aL + bN + cU + dW, \quad a, b, c, d \in R \quad (4.2.1)$$

olsun. (4.2.1) eşitliğinin her iki tarafının W vektörü ile kuaterniyon iç çarpımı yapılırsa

$$h(W, v^*) = a h(W, L) + b h(W, N) + c h(W, U) + d h(W, W)$$

eşitliğinden

$$h(W, v^*) = d \quad (4.2.2)$$

elde edilir.

i. $a, b, c, d \in R$, $v^* = aL + bN + cU + dW$ spacelike vektör olmak üzere W ve v^* vektörleri tarafından gerilen düzlem spacelike ise W binormal vektörü spacelike olduğundan,

$$h(W, v) = \|W\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$$

olur. W ve v vektörleri birim vektörler olarak alınır,

$$h(W, v^*) = \cos\theta \quad (4.2.3)$$

yazılır. v^* spacelike vektör olduğundan

$$h(v^*, v^*) = a^2 h(L, L) + b^2 h(N, N) + c^2 h(U, U) + d^2 h(W, W)$$

$$h(v^*, v^*) = -2ab + c^2 + d^2 \quad (4.2.4)$$

$$1 = -2ab + c^2 + \cos^2\theta$$

$$1 - \cos^2\theta = -2ab + c^2$$

$$-\sin^2\theta = -2ab - c^2$$

elde edilir. (4.2.2), (4.2.3) ve (4.2.4) eşitliklerinden ispat tamamlanır.

ii. $a, b, c, d \in R$, $v^* = aL + bN + cU + dW$ spacelike vektör olmak üzere W ve v^* vektörleri tarafından gerilen düzlem timelike ve W binormal vektörü spacelike olduğundan,

$$h(W, v^*) = \|W\| \cdot \|v^*\| \cdot \cosh\theta$$

olur. W ve v^* vektörleri birim vektörler olarak alınır,

$$h(W, v^*) = \cosh\theta \quad (4.2.5)$$

yazılır. v^* vektörü spacelike olduğundan tekrar (4.2.4) eşitliği elde edilir.

(4.2.5) ifadesi (4.2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$1 = -2ab + c^2 + \cosh^2\theta$$

$$2ab - c^2 = \cosh^2\theta - 1$$

$$2ab - c^2 = \sinh^2 \theta$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (4.2.5) ifadesi $v^* = aL + bN + cU + dW$ denkleminde yerine yazılırsa istenen eşitlikler elde edilmiş olur.

iii. $a, b, c, d \in R$, $v^* = aL + bN + cU + dW$ timelike vektör ve W binormal vektörü spacelike olduğundan

$$h(W, v^*) = \|W\| \cdot \|v^*\| \cdot \sinh \theta$$

olur. W ve v^* vektörleri birim vektörler olarak alınırsa,

$$h(W, v^*) = \sinh \theta \quad (4.2.6)$$

yazılır. v^* timelike vektör olduğundan,

$$h(v^*, v^*) = a^2 h(L, L) + b^2 h(N, N) + c^2 h(U, U) + d^2 h(W, W)$$

$$h(v^*, v^*) = -2ab + c^2 + d^2 = -1 \quad (4.2.7)$$

elde edilir. (4.2.6) denklemi (4.2.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$-2ab + c^2 + \sinh^2 \theta = -1$$

$$\sinh^2 \theta + 1 = 2ab - c^2$$

$$\cosh^2 \theta = 2ab - c^2$$

bulunur. Ayrıca (4.2.6) ifadesi $v^* = aL + bN + cU + dW$ denkleminde yerine yazılırsa istenen eşitlik elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.2 E_1^4 de $\beta(s) = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4$ null kuaterniyonik bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin null kuaterniyonik W -slant helis olması için gerek ve yeter koşul

$$p \cdot b = -Ka \quad (4.2.8)$$

olmasıdır.

İspat: E_1^4 de $\beta(s)$ eğrisinin null kuaterniyonik W -slant helis olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\beta(s)$ eğrisinin W binormal vektörü v^* sabit doğrultusu ile sabit bir θ açısı yapar. Kabul edelim ki v^* sabit doğrultusu

$$v^* = aL + bN + cU + dW, \quad a, b, c, d \in R$$

olsun. Bu takdirde (4.2.2) denklemi elde edilir. (4.2.2) ifadesinin s ye göre türevi alınarak (4.1) Frenet denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$h(W', v^*) + h(W, v^{*'}) = 0,$$

$$h(W', v^*) = h(pL + KN, v^*) = 0,$$

$$p.h(L, v^*) + K.h(N, v^*) = 0 \quad (4.2.9)$$

bulunur. (4.2.9) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılsa

$$p.h(L, aL + bN + cU + dW) + K.h(N, aL + bN + cU + dW) = 0$$

$$p.b.h(L, N) + K.a.h(N, L) = 0 \quad (4.2.10)$$

$$p.b = -K.a$$

elde edilir.

Tersine, (4.2.8) eşitliği sağlansın. Kabul edelim ki

$$F(s) = h(W, v^*)$$

olsun $F(s)$ nin türevi alınır,

$$-p.b - K.a = F'(s)$$

elde edilir. (4.2.8) ifadesinden $F(s)$ 'nin sabit olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\beta(s)$ null kuaterniyonik W -slant helistir.

Teorem 4.2.3 E_1^4 de $\beta(s)$ eğrisi null kuaterniyonik W -slant helis olsun. Bu takdirde $\beta(s)$ eğrisinin eğrilikleri

$$2 d. p. K + c. K (\tau + p) - b.p' - a.K' = 0 \quad (4.2.11)$$

denklemini sağlar.

İspat: E_1^4 de $\beta(s)$ eğrisi null kuaterniyonik W -slant helis olsun. Bu takdirde (4.2.8) eşitliği sağlanır. (4.2.9) denkleminin s ye göre türevi alınır

$$p'.h(L, v^*) + p.h(L', v^*) + K'.h(N, v^*) + K.h(N', v^*) = 0 \quad (4.2.12)$$

elde edilir. (4.1) Frenet denklemleri (4.2.12) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$-b.p' + p.K.h(W, v^*) + K'.(-a) + K.h((\tau + p).U + p.W, v^*) = 0 \quad (4.2.13)$$

elde edilir. $h(W, v^*) = d$ ve $h(U, v^*) = c$ ifadeleri (4.2.13) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$2.d.p.K + c.K.(\tau + p) - b.p' - a.K' = 0$$

bulunur.

5. MINKOWSKI UZAYINDA NULL KUATERNİYONİK W-EĞRİLER

Bu bölümde E_1^3 ve E_1^4 Minkowski uzaylarında null kuaterniyonik W-eğrilerin parametrik denklemleri elde edilmiştir.

5.1 E_1^3 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik W-Eğriler

E_1^3 uzayında $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ null kuaterniyonik eğrisinin aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan $\{l, n, u\}$ şeklinde Frenet çatısı vardır.

$$l' = \kappa u, \quad n' = \tau u, \quad u' = -\tau l - \kappa n \quad (5.1.1)$$

Burada $l = \alpha'(s)$ ve l, n, u karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlar.

$$h(l, l) = h(n, n) = h(l, u) = h(n, u) = 0$$

$$h(l, n) = h(u, u) = 1$$

(Aksoy 2014).

Bu bölümde yukarıda vermiş olduğumuz Frenet denklemleri kullanılacaktır.

Tanım 5.1.1 Eğer bir eğrinin bütün eğrilikleri sabit ise W-eğri denir (Klein and Lie 1871). E_1^3 Minkowski uzayında null kuaterniyonik W-eğrinin parametrik denklemi aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 5.1.1 $s \in I \subset \mathbb{R}$, $\kappa(s) > 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ eğrilikleri için E_1^3 de birim hızlı $\alpha = \alpha(s)$ null kuaterniyonik W-eğrinin konum vektörü;

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left[\frac{1}{2}s + c_1 \cdot \tau \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \kappa \cdot \tau}} \sin(\sqrt{2 \kappa \tau} s) - c_2 \cdot \tau \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \kappa \cdot \tau}} \cos(\sqrt{2 \kappa \tau} s) \right] \cdot l(s) \\ & + \left[c_1 \cdot \kappa \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \kappa \cdot \tau}} \sin(\sqrt{2 \kappa \tau} s) - c_2 \cdot \kappa \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \kappa \cdot \tau}} \cos(\sqrt{2 \kappa \tau} s) + \frac{\kappa}{2\tau} s \right] \cdot n(s) \\ & + \left[c_1 \cdot \cos(\sqrt{2 \kappa \tau} s) + c_2 \sin(\sqrt{2 \kappa \tau} s) - \frac{1}{2\tau} \right] \cdot u(s) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

şeklinde elde edilir.

İspat $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi null kuaterniyonik W-eğri olsun. Bu takdirde konum vektörü

$$\alpha(s) = \lambda(s) l(s) + \mu(s) n(s) + \gamma(s) u(s) \quad (5.1.3)$$

şeklinde yazılabilir. (5.1.3) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (5.1.1) Frenet formülleri kullanılırsa

$$l(s) = (\lambda' - \gamma \tau) l + (\mu' - \kappa \gamma) n + (\kappa \lambda + \mu \tau + \gamma') u$$

elde edilir. Bu takdirde;

$$\begin{aligned}\lambda' - \gamma \tau + 1 &= 0 \\ \mu' - \gamma \kappa &= 0 \\ \lambda \kappa + \mu \tau + \gamma' &= 0\end{aligned}\tag{5.1.4}$$

eşitlikleri elde edilir Bu üç denklemden

$$\gamma'' + 2 \kappa \tau \gamma + \kappa = 0\tag{5.1.5}$$

diferensiyel denklemini elde edilir.

Bu diferensiyel denklemin çözümü $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\gamma(s) = c_1 \cos(\sqrt{2\kappa\tau} s) + c_2 \sin(\sqrt{2\kappa\tau} s) - \frac{1}{2\tau}\tag{5.1.6}$$

şeklinde elde edilir. (5.1.6) eşitliği (5.1.4) de verilen eşitliklerde yerlerine yazılırsa,

$$\lambda(s) = \frac{1}{2}s + c_1 \tau \frac{1}{\sqrt{2\kappa\tau}} \sin(\sqrt{2\kappa\tau} s) - c_2 \tau \frac{1}{\sqrt{2\kappa\tau}} \cos(\sqrt{2\kappa\tau} s)\tag{5.1.7}$$

$$\mu(s) = c_1 \kappa \frac{1}{\sqrt{2\kappa\tau}} \sin(\sqrt{2\kappa\tau} s) - c_2 \kappa \frac{1}{\sqrt{2\kappa\tau}} \cos(\sqrt{2\kappa\tau} s) - \frac{\kappa}{2\tau}s\tag{5.1.8}$$

elde edilir. (5.1.6), (5.1.7), (5.1.8) ifadeleri (5.1.3) denkleminde yerine yazılırsa (5.1.2) eşitliği elde edilir.

5.2 E_1^4 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik W-Eğriler

E_1^4 uzayında $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q_v$ null kuaterniyonik eğrisinin aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan $\{L, N, U, W\}$ şeklinde Frenet çatısı vardır.

$$\begin{aligned}L' &= KW \\ N' &= (\tau + p)U + pW \\ U' &= (\tau + p)L \\ W' &= pL + KN\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

Burada $L=\beta'(s)$ ve L, N, U, W karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$h(L, L)=h(N, N)=h(L, U)=h(N, U)=h(W, U)=h(N, W)=h(L, W)=0$$

ve

$$h(U, U)=h(W, W)=1, \quad h(L, N)=-1$$

(Aksoy 2014).

Bu bölümde yukarıda vermiş olduğumuz Frenet denklemleri kullanılacaktır

E_1^4 de $\beta=\beta(s)$ eğrisi birim hızlı null kuaterniyonik W-eğri olsun. Bu takdirde;

$$\beta(s)=\lambda(s)L(s)+\mu(s)N(s)+\gamma(s)U(s)+\nu(s)W(s) \quad (5.2.2)$$

denklemini sağlar. (5.2.2) denkleminin s ye göre türev alınır ve (5.2.1) Frenet formülleri kullanılırsa

$$L(s)=(\lambda'+\tau\gamma+p\gamma+p\nu)L+(\mu'+K\nu)N+(\tau\mu+p\mu+\gamma')U+(K\lambda+p\mu+\nu')W$$

elde edilir. Buradan ,

$$\lambda'+(\tau+p)\gamma+p\nu-1=0 \quad (5.2.3)$$

$$\mu'+K\nu=0 \quad (5.2.4)$$

$$\tau\mu+p\mu+\gamma'=0 \quad (5.2.5)$$

$$K\lambda+p\mu+\nu'=0 \quad (5.2.6)$$

bulunur. Buradan;

$$\mu = \frac{-\gamma'}{\tau+p} \quad (5.2.7)$$

$$\gamma = \frac{1-p\nu-\lambda'}{\tau+p} \quad (5.2.8)$$

$$\nu = \frac{-\mu'}{K} \quad (5.2.9)$$

sonuçları elde edilir. (5.2.6) denkleminin üç kez türevi alınarak (5.2.7), (5.2.8) ve (5.2.9) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\nu^{(4)}-2pK\nu''-(\tau+p)^2K^2\nu=0 \quad (5.2.10)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklem çözülürse, $\Delta=4K^2(p^2+(\tau+p)^2)$

$$Q_1^2=pK-\sqrt{K^2(p^2+(\tau+p)^2)}, \quad Q_2^2=pK+\sqrt{K^2(p^2+(\tau+p)^2)}$$

elde edilir.

(I) $\Delta=4K^2(p^2+(\tau+p)^2)>0$ olsun. Bu takdirde

(a.1) $K p \neq 0$ ve $\tau+p \neq 0$ olsun. Bu durumda;

$Q_1^2 < 0$ ve $Q_2^2 > 0$ dır. Buradan $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$ olmak üzere

$$v(s) = c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) + c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s) \quad (5.2.11)$$

bulunur. (5.2.11) ifadesi kullanılarak gerekli işlemler yapıp (5.2.7), (5.2.8), (5.2.9) denklemlerinde yerlerine yazılırsa.

$$\mu(s) = \frac{K}{Q_1} (c_2 \cos(Q_1 s) - c_1 \sin(Q_1 s)) - \frac{K}{Q_2} (c_3 \sinh(Q_2 s) + c_4 \cosh(Q_2 s)) \quad (5.2.12)$$

$$\gamma(s) = \frac{-K(\tau+p)}{Q_1^2} (c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s)) + \frac{K(\tau+p)}{Q_2^2} (c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s)) \quad (5.2.13)$$

$$\begin{aligned} \lambda(s) = & s + \frac{(pQ_1^2 - K(\tau+p)^2)}{Q_1^3} (c_2 \cos(Q_1 s) - c_1 \sin(Q_1 s)) \\ & - \frac{(pQ_2^2 + K(\tau+p)^2)}{Q_2^3} (c_3 \sinh(Q_2 s) + c_4 \cosh(Q_2 s)) \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

elde edilir. Burada (5.2.11), (5.2.12), (5.2.13), (5.2.14) eşitlikleri (5.2.2) denkleminde yerlerine yazılırsa $\beta(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\begin{aligned} \beta(s) = & [s + \frac{(pQ_1^2 - K(\tau+p)^2)}{Q_1^3} (c_2 \cos(Q_1 s) - c_1 \sin(Q_1 s)) - \frac{(pQ_2^2 + K(\tau+p)^2)}{Q_2^3} (c_3 \sinh(Q_2 s) \\ & + c_4 \cosh(Q_2 s))] L(s) + [\frac{K}{Q_1} (c_2 \cos(Q_1 s) - c_1 \sin(Q_1 s)) - \frac{K}{Q_2} (c_3 \sinh(Q_2 s) \\ & + c_4 \cosh(Q_2 s))] N(s) + [\frac{-K(\tau+p)}{Q_1^2} (c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s)) \\ & + \frac{K(\tau+p)}{Q_2^2} (c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s))] U(s) + [c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) \\ & + c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s)] W(s) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.2.1 E_1^4 de $K p \neq 0$ ve $\tau+p \neq 0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip $\beta=\beta(s)$ birim hızlı null kuaterniyonik W-eğrisinin konum vektörü ;

$$\begin{aligned}
\beta(s) = & \left[s + \frac{(pQ_1^2 - K(\tau+p)^2)}{Q_1^3} (c_2 \cos(Q_1 s) - c_1 \sin(Q_1 s)) - \frac{(pQ_2^2 + K(\tau+p)^2)}{Q_2^3} (c_3 \sinh(Q_2 s) \right. \\
& + c_4 \cosh(Q_2 s)) \Big] L(s) + \left[\frac{K}{Q_1} (c_2 \cos(Q_1 s) - c_1 \sin(Q_1 s)) - \frac{K}{Q_2} (c_3 \sinh(Q_2 s) \right. \\
& + c_4 \cosh(Q_2 s)) \Big] N(s) + \left[\frac{-K(\tau+p)}{Q_1^2} (c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s)) \right. \\
& + \frac{K(\tau+p)}{Q_2^2} (c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s)) \Big] U(s) + [c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) \\
& + c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s)] W(s)
\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

denklemini sağlar.

(a.2) $K p < 0$ ve $\tau+p=0$ olsun. Bu durumda;

$Q_1^2 = 2 K p < 0$ ve $Q_2^2 = 0$ dir. Buradan $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$ olmak üzere

$$v(s) = c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) + c_3 + c_4 s \tag{5.2.16}$$

bulunur. (5.2.16) ifadesi kullanılarak gerekli işlemler yapıp (5.2.7), (5.2.8), (5.2.9) denklemlerinde yerlerine yazılırsa.

$$\mu(s) = \frac{-c_1 K}{Q_1} \sin(Q_1 s) + \frac{c_2 K}{Q_1} \cos(Q_1 s) - c_3 K s - \frac{c_4 K}{2} s^2 \tag{5.2.17}$$

$$\gamma(s) = c_5 \quad (c_5 \in R) \tag{5.2.18}$$

$$\lambda(s) = (1 - c_3 p) s - \frac{c_4 p}{2} s^2 - \frac{c_1 p}{Q_1} \sin(Q_1 s) + \frac{c_2 p}{Q_1} \cos(Q_1 s) \tag{5.2.19}$$

elde edilir. Burada (5.2.16), (5.2.17), (5.2.18), (5.2.19) eşitlikleri (5.2.2) denkleminde yerlerine yazılırsa $\beta(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\begin{aligned}
\beta(s) = & \left[(1 - c_3 p) s - \frac{c_4 p}{2} s^2 - \frac{c_1 p}{Q_1} \sin(Q_1 s) + \frac{c_2 p}{Q_1} \cos(Q_1 s) \right] L(s) \\
& + \left[\frac{-c_1 K}{Q_1} \sin(Q_1 s) + \frac{c_2 K}{Q_1} \cos(Q_1 s) - c_3 K s - \frac{c_4 K}{2} s^2 \right] N(s) + c_5 U(s) \\
& + [c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) + c_3 + c_4 s] W(s)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.2.2 E_1^4 de $K p < 0$ ve $\tau+p=0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip $\beta=\beta(s)$ birim hızlı null kuaterniyonik W-eğrisinin konum vektörü ;

$$\begin{aligned}
\beta(s) = & [(1-c_3p)s - \frac{c_4p}{2}s^2 - \frac{c_1p}{Q_1}\sin(Q_1s) + \frac{c_2p}{Q_1}\cos(Q_1s)]L(s) \\
& + [\frac{-c_1K}{Q_1}\sin(Q_1s) + \frac{c_2K}{Q_1}\cos(Q_1s) - c_3Ks - \frac{c_4K}{2}s^2]N(s) + c_5U(s) \\
& + [c_1\cos(Q_1s) + c_2\sin(Q_1s) + c_3 + c_4s]W(s)
\end{aligned} \tag{5.2.20}$$

denklemini sağlar.

(a.3) $K, p > 0$ ve $\tau + p = 0$ olsun. Bu durumda;

$Q_1^2 = 0$ ve $Q_2^2 = 2Kp > 0$ dır. Buradan $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$ olmak üzere

$$v(s) = c_1 + c_2s + c_3 \cosh(Q_2s) + c_4 \sinh(Q_2s) \tag{5.2.21}$$

bulunur. (5.2.21) ifadesi kullanılarak gerekli işlemler yapıp (5.2.7) , (5.2.8) , (5.2.9) denklemlerinde yerlerine yazılırsa.

$$\mu(s) = -c_1Ks - \frac{c_2K}{2}s^2 - \frac{c_3K}{Q_2}\sinh(Q_2s) - \frac{c_4K}{Q_2}\cosh(Q_2s) \tag{5.2.22}$$

$$\gamma(s) = c_5 \quad (c_5 \in R) \tag{5.2.23}$$

$$\lambda(s) = (1-c_1p)s - \frac{c_2p}{2}s^2 - \frac{c_3p}{Q_2}\sinh(Q_2s) - \frac{c_4p}{Q_2}\cosh(Q_2s) \tag{5.2.24}$$

elde edilir. Burada (5.2.21), (5.2.22), (5.2.23), (5.2.24) eşitlikleri (5.2.2) denkleminde yerlerine yazılırsa $\beta(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\begin{aligned}
\beta(s) = & [(1-c_1p)s - \frac{c_2p}{2}s^2 - \frac{c_3p}{Q_2}\sinh(Q_2s) - \frac{c_4p}{Q_2}\cosh(Q_2s)]L(s) \\
& + [-c_1Ks - \frac{c_2K}{2}s^2 - \frac{c_3K}{Q_2}\sinh(Q_2s) - \frac{c_4K}{Q_2}\cosh(Q_2s)]N(s) + c_5U(s) \\
& + [c_1 + c_2s + c_3 \cosh(Q_2s) + c_4 \sinh(Q_2s)]W(s)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.2.3 E_1^4 de $K, p > 0$ ve $\tau + p = 0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip $\beta = \beta(s)$ birim hızlı null kuaterniyonik W-eğrisinin konum vektörü ;

$$\begin{aligned}
\beta(s) = & [(1-c_1p)s - \frac{c_2p}{2}s^2 - \frac{c_3p}{Q_2}\sinh(Q_2s) - \frac{c_4p}{Q_2}\cosh(Q_2s)]L(s) \\
& + [-c_1Ks - \frac{c_2K}{2}s^2 - \frac{c_3K}{Q_2}\sinh(Q_2s) - \frac{c_4K}{Q_2}\cosh(Q_2s)]N(s) + c_5U(s)
\end{aligned}$$

$$+[c_1+c_2s+c_3 \cosh(Q_2s)+c_4 \sinh(Q_2s)]W(s) \quad (5.2.25)$$

denklemini sağlar.

(a.4) $K \tau \neq 0$ ve $p=0$ olsun. Bu durumda;

$Q_1^2 = -|K \tau|$ ve $Q_2^2 = |K \tau|$ dir. Buradan $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$ olmak üzere

$$v(s) = c_1 \cos(Q_1s) + c_2 \sin(Q_1s) + c_3 \cosh(Q_2s) + c_4 \sinh(Q_2s) \quad (5.2.26)$$

bulunur. (5.2.26) ifadesi kullanılarak gerekli işlemler yapıp (5.2.7), (5.2.8), (5.2.9) denklemlerinde yerlerine yazılırsa.

$$\mu(s) = \frac{K}{Q_1} (c_2 \cos(Q_1s) - c_1 \sin(Q_1s)) - \frac{K}{Q_2} (c_3 \sinh(Q_2s) + c_4 \cosh(Q_2s)) \quad (5.2.27)$$

$$\gamma(s) = \frac{-K\tau}{Q_1^2} (c_1 \cos(Q_1s) + c_2 \sin(Q_1s)) + \frac{K\tau}{Q_2^2} (c_3 \cosh(Q_2s) + c_4 \sinh(Q_2s)) \quad (5.2.28)$$

$$\lambda(s) = s - \frac{K\tau^2}{Q_1^3} (c_1 \sin(Q_1s) + c_2 \cos(Q_1s)) - \frac{K\tau^2}{Q_2^3} (c_3 \sinh(Q_2s) + c_4 \cosh(Q_2s)) \quad (5.2.29)$$

elde edilir. Burada (5.2.26), (5.2.27), (5.2.28), (5.2.29) eşitlikleri (5.2.2) denkleminde yerlerine yazılırsa $\beta(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\beta(s) = [s - \frac{K\tau^2}{Q_1^3} (c_1 \sin(Q_1s) + c_2 \cos(Q_1s)) - \frac{K\tau^2}{Q_2^3} (c_3 \sinh(Q_2s) + c_4 \cosh(Q_2s))]L(s)$$

$$+ [\frac{K}{Q_1} (c_2 \cos(Q_1s) - c_1 \sin(Q_1s)) - \frac{K}{Q_2} (c_3 \sinh(Q_2s) + c_4 \cosh(Q_2s))]N(s)$$

$$+ [\frac{-K\tau}{Q_1^2} (c_1 \cos(Q_1s) + c_2 \sin(Q_1s)) + \frac{K\tau}{Q_2^2} (c_3 \cosh(Q_2s) + c_4 \sinh(Q_2s))]U(s)$$

$$+ [c_1 \cos(Q_1s) + c_2 \sin(Q_1s) + c_3 \cosh(Q_2s) + c_4 \sinh(Q_2s)]W(s)$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.2.4 E_1^4 de $K \tau \neq 0$ ve $p=0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip $\beta=\beta(s)$ birim hızlı null kuaterniyonik W-eğrisinin konum vektörü ;

$$\beta(s) = [s - \frac{K\tau^2}{Q_1^3} (c_1 \sin(Q_1s) + c_2 \cos(Q_1s)) - \frac{K\tau^2}{Q_2^3} (c_3 \sinh(Q_2s) + c_4 \cosh(Q_2s))]L(s)$$

$$+ [\frac{K}{Q_1} (c_2 \cos(Q_1s) - c_1 \sin(Q_1s)) - \frac{K}{Q_2} (c_3 \sinh(Q_2s) + c_4 \cosh(Q_2s))]N(s)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{-K\tau}{Q_1^2} (c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s)) + \frac{K\tau}{Q_2^2} (c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s)) \right] U(s) \\
& + [c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) + c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s)] W(s)
\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

denklemini sağlar.

(II) $\Delta = 4K^2(p^2 + (\tau + p)^2) = 0$ olsun. Bu takdirde;

(a.1) $K=0$, $p=0$ ve $\tau + p \neq 0$ olsun. Bu durumda;

$Q_1^2 = 0$ ve $Q_2^2 = 0$ dir. Buradan $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$ olmak üzere

$$v(s) = c_1 + c_2 s + c_3 s^2 + c_4 s^3 \tag{5.2.31}$$

bulunur. (5.2.31) ifadesi kullanılarak gerekli işlemler yapıp (5.2.7), (5.2.8), (5.2.9) denklemlerinde yerlerine yazılırsa.

$$\mu(s) = c_5 \quad (c_5 \in R) \tag{5.2.32}$$

$$\gamma(s) = -c_5 \tau s \tag{5.2.33}$$

$$\lambda(s) = s + c_5 \tau^2 \frac{s^2}{2} \tag{5.2.34}$$

elde edilir. Burada (5.2.31), (5.2.32), (5.2.33), (5.2.34) eşitlikleri (5.2.2) denkleminde yerlerine yazılırsa $\beta(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\beta(s) = \left[s + c_5 \tau^2 \frac{s^2}{2} \right] L(s) + c_5 N(s) - c_5 \tau s U(s) + [c_1 + c_2 s + c_3 s^2 + c_4 s^3] W(s) \tag{5.2.35}$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz

Teorem 5.2.5 E_1^4 de $K=0$, $p=0$ ve $\tau + p \neq 0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip $\beta = \beta(s)$ birim hızlı null kuaterniyonik W-eğrisinin konum vektörü ;

$$\beta(s) = \left[s + c_5 \tau^2 \frac{s^2}{2} \right] L(s) + c_5 N(s) - c_5 \tau s U(s) + [c_1 + c_2 s + c_3 s^2 + c_4 s^3] W(s) \tag{5.2.36}$$

denklemini sağlar.

(a.2) $K=0$, $\tau + p = 0$ ve $p \neq 0$ olsun. Bu durumda;

$Q_1^2 = 0$ ve $Q_2^2 = 0$ dir. Buradan $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$ olmak üzere

$$v(s) = c_1 + c_2 s + c_3 s^2 + c_4 s^3 \tag{5.2.37}$$

bulunur. (5.2.37) ifadesi kullanılarak gerekli işlemler yapıp (5.2.7) , (5.2.8) , (5.2.9) denklemlerinde yerlerine yazılırsa.

$$\mu(s) = c_5 \quad (c_5 \in R) \quad (5.2.38)$$

$$\gamma(s) = c_6 \quad (c_6 \in R) \quad (5.2.39)$$

$$\lambda(s) = (1 - c_1 p)s - c_2 p \frac{s^2}{2} - c_3 p \frac{s^3}{3} - c_4 p \frac{s^4}{4} \quad (5.2.40)$$

elde edilir. Burada (5.2.37), (5.2.38), (5.2.39), (5.2.40) eşitlikleri (5.2.2) denkleminde yerlerine yazılırsa $\beta(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\begin{aligned} \beta(s) = & \left[(1 - c_1 p)s - c_2 p \frac{s^2}{2} - c_3 p \frac{s^3}{3} - c_4 p \frac{s^4}{4} \right] L(s) + c_5 N(s) \\ & + c_6 U(s) + [c_1 + c_2 s + c_3 s^2 + c_4 s^3] W(s) \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz

Teorem 5.2.6 E_1^4 de $K=0$, $\tau + p = 0$ ve $p \neq 0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip $\beta = \beta(s)$ birim hızlı null kuaterniyonik W-eğrisinin konum vektörü ;

$$\begin{aligned} \beta(s) = & \left[(1 - c_1 p)s - c_2 p \frac{s^2}{2} - c_3 p \frac{s^3}{3} - c_4 p \frac{s^4}{4} \right] L(s) + c_5 N(s) \\ & + c_6 U(s) + [c_1 + c_2 s + c_3 s^2 + c_4 s^3] W(s) \end{aligned} \quad (5.2.42)$$

denklemini sağlar.

(a.3) $K=0$, $\tau + p \neq 0$ ve $p \neq 0$ olsun. Bu durumda;

$Q_1^2 = 0$ ve $Q_2^2 = 0$ dır. Buradan $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$ olmak üzere

$$v(s) = c_1 + c_2 s + c_3 s^2 + c_4 s^3 \quad (5.2.43)$$

bulunur. (5.2.43) ifadesi kullanılarak gerekli işlemler yapıp (5.2.7) , (5.2.8) , (5.2.9) denklemlerinde yerlerine yazılırsa.

$$\mu(s) = c_5 \quad (c_5 \in R) \quad (5.2.44)$$

$$\gamma(s) = -c_5(\tau + p)s \quad (5.2.45)$$

$$\lambda(s) = (1 - c_1 p)s + (-c_2 p + c_5(\tau + p)^2) \frac{s^2}{2} - c_3 p \frac{s^3}{3} - c_4 p \frac{s^4}{4} \quad (5.2.46)$$

elde edilir. Burada (5.2.43), (5.2.44), (5.2.45), (5.2.46) eşitlikleri (5.2.2) denkleminde yerlerine yazılırsa $\beta(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\begin{aligned}\beta(s) = & [(1-c_1p)s + (-c_2p + c_5(\tau+p)^2)\frac{s^2}{2} - c_3p\frac{s^3}{3} - c_4p\frac{s^4}{4}]L(s) + c_5N(s) \\ & - c_5(\tau+p)sU(s) + [c_1+c_2s+c_3.s^2+c_4.s^3]W(s)\end{aligned}\quad (5.2.47)$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz

Teorem 5.2.7 E_1^4 de $K=0$, $\tau+p \neq 0$ ve $p \neq 0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip $\beta=\beta(s)$ birim hızlı null kuaterniyonik W-eğrisinin konum vektörü ;

$$\begin{aligned}\beta(s) = & [(1-c_1p)s + (-c_2p + c_5(\tau+p)^2)\frac{s^2}{2} - c_3p\frac{s^3}{3} - c_4p\frac{s^4}{4}]L(s) + c_5N(s) \\ & - c_5(\tau+p)sU(s) + [c_1+c_2s+c_3.s^2+c_4.s^3]W(s)\end{aligned}\quad (5.2.48)$$

denklemini sağlar.

(a.4) $K=0$, $\tau+p=0$ ve $p=0$ olsun. Bu durumda;

$Q_1^2=0$ ve $Q_2^2=0$ dir. Buradan $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$v(s) = c_1 + c_2s + c_3.s^2 + c_4.s^3 \quad (5.2.49)$$

bulunur. (5.2.49) ifadesi kullanılarak gerekli işlemler yapıp (5.2.7) , (5.2.8) , (5.2.9) denklemlerinde yerlerine yazılırsa.

$$\mu(s) = c_5 \quad (c_5 \in \mathbb{R}) \quad (5.2.50)$$

$$\gamma(s) = c_6 \quad (c_6 \in \mathbb{R}) \quad (5.2.51)$$

$$\lambda(s) = s + c_7 \quad (c_7 \in \mathbb{R}) \quad (5.2.52)$$

elde edilir. Burada (5.2.49), (5.2.50), (5.2.51), (5.2.52) eşitlikleri (5.2.2) denkleminde yerlerine yazılırsa $\beta(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\beta(s) = (s+c_7)L(s) + c_5N(s) + c_6U(s) + [c_1+c_2s+c_3s^2+c_4s^3]W(s) \quad (5.2.53)$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz

Teorem 5.2.8 E_1^4 de $K=0$, $\tau+p=0$ ve $p=0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip $\beta=\beta(s)$ birim hızlı null kuaterniyonik W-eğrisinin konum vektörü ;

$$\beta(s)=(s+c_7)L(s)+c_5N(s)+c_6U(s)+[c_1+c_2s+c_3.s^2+c_4.s^3]W(s) \quad (5.2.54)$$

denklemini sağlar.

(b) $K \neq 0$ ve $(p^2+(\tau+p)^2)=0$ olsun. Bu durumda $p=0$ ve $\tau+p=0$ dır. Dolayısıyla

$Q_1^2=0$ ve $Q_2^2=0$ olacaktır. Buradan $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$v(s)=c_1+c_2s+c_3.s^2+c_4s^3 \quad (5.2.55)$$

bulunur. (5.2.55) ifadesi kullanılarak gerekli işlemler yapıp (5.2.7) , (5.2.8) , (5.2.9) denklemlerinde yerlerine yazılırsa.

$$\mu(s)=-c_1Ks-c_2K\frac{s^2}{2}-c_3K\frac{s^3}{3}-c_4K\frac{s^4}{4} \quad (5.2.56)$$

$$\gamma(s)=c_5 \quad (c_5 \in \mathbb{R}) \quad (5.2.57)$$

$$\lambda(s)=s+c_6 \quad (c_6 \in \mathbb{R}) \quad (5.2.58)$$

elde edilir. Burada (5.2.55), (5.2.56), (5.2.57), (5.2.58) eşitlikleri (5.2.2) denkleminde yerlerine yazılırsa $\beta(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\begin{aligned} \beta(s)=(s+c_6)L(s)+[-c_1Ks-c_2K\frac{s^2}{2}-c_3K\frac{s^3}{3}-c_4K\frac{s^4}{4}]N(s)+c_5U(s) \\ +[c_1+c_2s+c_3s^2+c_4s^3]W(s) \end{aligned} \quad (5.2.59)$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz

Teorem 5.2.9 E_1^4 de $K \neq 0$ ve $(p^2+(\tau+p)^2)=0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip $\beta=\beta(s)$ birim hızlı null kuaterniyonik W-eğrisinin konum vektörü ;

$$\begin{aligned} \beta(s)=(s+c_6)L(s)+[-c_1Ks-c_2K\frac{s^2}{2}-c_3K\frac{s^3}{3}-c_4K\frac{s^4}{4}]N(s)+c_5U(s) \\ +[c_1+c_2s+c_3s^2+c_4s^3]W(s) \end{aligned} \quad (5.2.60)$$

denklemini sağlar.

6. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında E_1^3 ve E_1^4 uzaylarında null kuaterniyonik Bertrand eğrileri ve null kuaterniyonik slant helisler incelenmiştir. Ayrıca E_1^3 ve E_1^4 yarı-Öklid uzaylarında null kuaterniyonik W-eğriler için diferensiyel denklemler elde edilmiş ve bu diferensiyel denklemler çözülerek adı geçen eğrilerin parametrik denklemleri oluşturulmuştur. Bu tez çalışması doğrultusunda E_1^3 ve E_1^4 de null kuaterniyonik bazı özel tipli eğriler ve yüzeyler daha geniş bir şekilde çalışılabilir.



7. KAYNAKLAR

- Aksoy A T, 2014, Yarı Kuaterniyonların Geometrisi Üzerine, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 113s, Isparta.
- Aksoy A T, Çöken A C, 2017, Null Quaternionic Cartan Helix in $\mathbf{R}_v^3$, Acta Physica Polonica A, 132, 896–899.
- Agrawal O P, 1987, Hamilton Operators and Dual-Number-Quaternions in Spatial Kinematics, Mechanism and Machine Theory, 22(6), 569–575.
- Beem J K, Ehrlich P E, Easley K L, 2017, Global Lorentzian Geometry, Routledge, New York.
- Bharathi K, Nagaraj M, 1985, Geometry of Quaternionic and Pseudo-Quaternionic Multiplications, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 16(7), 741–756.
- Bharathi K, Nagaraj M, 1987, Quaternion Valued Function of A Real Variable Serret-Frenet Formulae, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 18(6), 507–511.
- Bonnor W, 1969, Null Curves in a Minkowski Space-Time, Tensor, 20(2), 229–242.
- Chen B Y, 1994, Some Classification Teorems for Submanifolds in Minkowski Space Time, Arch. Math., 62, 177–182.
- Çöken A C, Aksoy A T, 2004, On the Quaternionic Inclined Curves in The Semi-Euclidean Space E_2^4 , Applied Mathematics and Computation, 155(2), 373–389.
- Duggal K L, Bejancu A, 1996, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds in Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Springer, 364, 139–189, Dordrecht.
- Ekmekçi N, 1991, Lorentz Manifoldlar Üzerinde Eğilim Çizgileri, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 53s, Ankara.
- Ergin A A, 1989, Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 56s, Ankara.
- Hacısalıhoğlu H H, 1983, Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi, Basın Yayın Y.O. Basımevi, 338s, Ankara
- Hacısalıhoğlu H H, 2000, Diferensiyel Geometri, Cilt 1, Ankara Üniversitesi Yayınları, 272s, Ankara.

- Hamilton W R, 1846, Researches Respecting Quaternions, First Series, The Transactions of the Royal Irish Academy, 21, 199–296.
- Hamilton W R, 1969, Elements of Quaternions, 1, 3rd Ed., Chelsea Pub, New York.
- Inoguchi J I, Lee S, 2008, Null Curves in Minkowski 3-space, International Electronic Journal of Geometry, 1(2), 40–83.
- İlarslan K, Nesovic E, 2004, Timelike and Null Normal Curves in Minkowski Space E_1^3 , Indian journal of Pure & Applied Mathematics, 35(7), 881–888.
- İlarslan K, 2005, Spacelike Normal Curves in Minkowski Space E_1^3 , Turkish Journal of Mathematics, 29(1), 53–63.
- İlarslan K, Boyacıoğlu K Ö, 2007, Position Vectors of A Spacelike W-Curve in Minkowski Space E_1^3 , Bulletin-Korean Mathematical Society, 44(3), 429–438.
- İlarslan K, Boyacıoğlu K Ö, 2008, Position Vectors of Timelike and a Null Helix in Minkowski 3-Space, Chaos, Solitons & Fractals, 38(5), 1383–1389.
- İlarslan K, Nesovic E, 2009, Spacelike and Timelike Normal Curves in Minkowski Space-Time, Publications de l'Institut Mathématique, 85(99), 111–118.
- Kahraman T, 2018, Null Quaternionic Bertrand Partner Curves, Iranian Journal of Science and Tecnology Transaction A, Science, 42, 1511–1515.
- Kahraman T, 2018, Minkowski Uzaylarında Bazı Null Kuaterniyonik Eğriler. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, 14(4), 357–361.
- Kahraman T, 2019, Null Quaternionic Slant Helices in Minkowski Spaces, International Journal of Mathematical Combinatorics, 1, 45–52.
- Boyacıoğlu Ö K, 2018, On The Quaternionic W-Curves in The Semi-Euclidean Spaces, Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III, Mathematics, Informatics, Physics, 11(1), 23–36.
- López R, 2014, Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space, International Electronic Journal of Geometry, 7(1), 44–107.
- Mercan Y, 2007, Pseudo Kuaterniyonlar, Pseudo Hiperbolik Uzay ve Pseudo Küresel Uzaylar, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans Tezi, 64s, Ankara.

Naber G L, 2012, The Geometry of Minkowski Space Time: An Introduction to the Mathematics of Special Theory of Relativity, 92, Springer Science & Business Media, 371s.

O'Neill B, 1983, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, 103, 488s, New York.

Ünal C, 2012, R_2^4 Yarı-Öklidyen Uzayında W-Eğriler, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 51s, Kırıkkale.

Yamada K, 1988, Complete Space Like Surfaces with Constant Mean Curvature in The Minkowski 3-Space, Tokyo, J. Math, 11, 329–338.

