



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**NULL NOKTALAR YAKININDAKİ MANYETİK ALAN
ÇİZGİLERİNİN GEOMETRİSİNİN KESİRLİ TÜREV İLE
YORUMLANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HASAN DURMAZ

OCAK

HASAN DURMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2024

**NULL NOKTALAR YAKININDAKİ MANYETİK ALAN ÇİZGİLERİNİN
GEOMETRİSİNİN KESİRLİ TÜREV İLE YORUMLANMASI**

Hasan DURMAZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

İkinci Danışman

Doç. Dr. Ameth Ndiaye

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Hasan DURMAZ tarafından hazırlanan “NULL NOKTALAR YAKININDAKİ MANYETİK ALAN ÇİZGİLERİNİN GEOMETRİSİNİN KESİRLİ TÜREV İLE YORUMLANMASI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Başkan: Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye: Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Tez Savunma Tarihi: 31/01/2024

Juri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dökümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Hasan DURMAZ

(Tarih)

NULL NOKTALAR YAKININDAKİ MANYETİK ALAN ÇİZGİLERİNİN GEOMETRİSİNİN KESİRLİ TÜREV İLE YORUMLANMASI (Yüksek Lisans Tezi)

Hasan DURMAZ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
OCAK -2024

ÖZET

Bu tez çalışmasında, 3-boyutlu Öklid uzayında Caputo kesirli hesaplama yöntemi kullanarak manyetik alanın null (nötr) noktalarının karakterizasyonu verilmiştir. Daha sonra, sayısal olarak çözülmüş sınır başlangıç değer problemi yeniden formüle edilerek, manyetik yeniden bağlanma durumları ve null noktalar etrafındaki manyetik alan çizgilerinin davranışı analiz edilmiştir. Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre Killing manyetik vektör alanları hesaplanarak, bu manyetik alan çizgileri etrafındaki yüklü parçacık hareketi karakterize edilmiştir. Daha sonra bu manyetik alan çizgilerini parametre eğrileri olarak kabul eden akı tüpleri adı verilen manyetik yüzeyler incelenmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar matematik programları yardımıyla görselleştirilerek tamsayı ve kesirli hesaplamalar ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Altı bölümden oluşan tez çalışmasının birinci bölümü, tezde adı geçen konu ile ilgili yapılmış çalışmaları ve bu tezde yapılanların motivasyonunun anlatıldığı bir giriş kısmından oluşmaktadır. İkinci bölümde, tezi hazırlarken yararlanılan matematiksel ve fiziksel tanımlar, teoremler ve lemmalara yer verilmiştir. Tezin özgün bölümünü oluşturan üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümünde ise Caputo kesirli analiz yöntemi kullanılarak null noktalar karakterizasyonu, null noktalar yakınındaki manyetik alan çizgilerinin davranışı incelenmiştir. Manyetik yeniden bağlanma, manyetohidrodinamik çerçeveye göre araştırılmıştır. Ayrıca Killing manyetik alanı Caputo kesirli analiz yöntemi ile hesaplanmıştır. Daha sonra Killing manyetik alan içerisindeki bir yüklü parçacığın hareketi ile elde edilen eğriler Caputo hesaplama yöntemi ile analiz edilmiştir. Ayrıca, null noktalar etrafındaki manyetik alan çizgilerini üretici eğri kabul eden manyetik akı tüpü olarak adlandırılan manyetik yüzeyler elde edilmiştir. Ayrıca manyetik alan çizgileri ile ilişkili matris formunun özdeğerleri sayesinde manyetik akı tüpü yüzeylerinin sınıflandırılması yapılmıştır. Son olarak bulunan sonuçları doğrulayan örnekler verilerek matematik programları yardımıyla görselleştirilmiştir. Tezin son bölümünü oluşturan altıncı bölümde ise elde edilen sonuçlar, geometriksel ve fiziksel olarak yorumlanmıştır.

Sayfa Adedi	: 69
Anahtar Kelimeler	: Kesirli türev, Nümerik simülasyon, Hesaplamalı modelleme, Manyetik akış, Fizik uygulamaları, Flux tüp, Vektör alanı, Caputo kesirli kalkülüs
Danışman	: Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR
İkinci Danışman	: Doç. Dr. Ameth Ndiaye

INTERPRETATION OF THE GEOMETRY OF MAGNETIC FIELD LINES NEAR NULL POINTS BY FRACTIONAL DERIVATION

(M. Sc. Thesis)

Hasan DURMAZ

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January-2024

ABSTRACT

In this thesis, the characterization of the null (neutral) points of the magnetic field is given using the Caputo fractional calculation method in 3-dimensional Euclidean space. Then, by reformulating the numerically solved boundary initial value problem, magnetic reconnection states and the behavior of magnetic field lines around null points are analyzed. Killing magnetic vector fields are calculated according to the Caputo fractional calculation method, and the charged particle movement around these magnetic field lines is characterized. Then, magnetic surfaces called flux tubes, which accept these magnetic field lines as parameter curves, are examined. In addition, the results obtained are visualized with the help of mathematical programs and compared with the results obtained with integer and fractional calculations.

The first part of the thesis, which consists of six chapters, consists of an introduction where the studies on the subject mentioned in the thesis and the motivation of what is done in this thesis are explained. In the second chapter, mathematical and physical definitions, theorems, and lemmas used in preparing the thesis are included. In the third, fourth, and fifth chapters, which constitute the original part of the thesis, the characterization of null points and the behavior of magnetic field lines near null points are examined using the Caputo fractional analysis method. Magnetic reconnection has been investigated according to the magnetohydrodynamic equation. Additionally, the Killing magnetic field is calculated by the Caputo fractional analysis method. Then, the curves obtained by the movement of a charged particle in the Killing magnetic field are analyzed by the Caputo calculation method. Additionally, magnetic surfaces called magnetic flux tubes have been obtained, which accept the magnetic field lines around null points as generating curves. Additionally, the magnetic flux tube surfaces are classified thanks to the eigenvalues of the matrix form associated with the magnetic field lines. Finally, examples confirming the results are given and visualized with the help of mathematical programs. In the sixth chapter, which is the last part of the thesis, the results obtained are interpreted geometrically and physically.

Page Number : 69

Keywords : Fractional derivatives, Numerical simulation, Computational modeling, Magnetic flows, Applications to physics, Flux tubes, Vector fields, Caputo fractional calculus.

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Zehra ÖZDEMİR

Second Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ameth Ndiaye

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam büyük bir özveriyle, samimiyetle, gülen yüzüyle yardımcı olan ve gelecekteki meslek hayatımda örnek alacağım değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR' e ve ikinci danışman hocam Sayın Assoc. Prof. Ameth Ndiaye' ye, yüksek lisans eğitimimde en baştan itibaren desteğini esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Yadigar ŞEKERCİ FIRAT' a ve hocam Sayın Doç. Dr. Tefik ŞAHİN' e, tez aşamam da en baştan itibaren yanımda olan ve yardımını hiçbir zaman esirgemeyen hocam Sayın Dr. Hazal CEYHAN' a ve yüksek lisans eğitimime başlamama büyük katkısı olan hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Güner TOPCU' ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bütün hayatım boyunca yanımda olan, bugünlere gelmemdeki emeklerini hiçbir zaman esirgemeyen annem Filiz DURMAZ, babam Bekir DURMAZ ve kardeşim Hacer GÜRBÜZ' e ve her zaman yanımda olan çok değerli arkadaşım Yasin ÇEKEN' e en derin duygularıyla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
1.1. Teoriyi Oluşturmak İçin Literatür İncelemesi	2
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	5
3. MANYETİK ALANIN NULL NOKTALARININ KARAKTERİZASYONU	12
4. CAPUTO KESİRLİ HESAPLAMA YÖNTEMİ İLE MANYETİK ALANIN NULL NOKTALAR YAKININDAKİ DAVRANIŞI	22
4.1. Null Noktalar Yakınında Manyetik Yeniden Bağlanma	26
4.2. Killing Manyetik Alanında Yüklü Parçacığın Hareketinin Kesirli Hesaplama Yöntemi İle İncelenmesi	28
4.2.1. Kesirli Hesaplama Yöntemine Göre Killing Vektör Alanları	29
5. CAPUTO KESİRLİ HESAPLAMA YÖNTEMİ İLE MANYETİK AKI TÜPLERİ	33
5.1. Manyetik Alan Bileşenleri Boyunca Manyetik Akı Tüpünün Yapısı	36
5.2. Manyetik Akı Tüp Yüzeylerinin Sınıflandırılması	38
5.3. Manyetik Akı Tüpündeki Yüklü Nokta Parçacık Yörüngelerinin Kesirli Hesaplama Yöntemine Göre İncelenmesi	39
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	48
KAYNAKLAR	51

ÖZGEÇMİŞ	59
--------------------	----



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Manyetik alan çizgilerinin null (nötr) noktalar yakınındaki sırasıyla $X - tip$ ve $O - tip$ davranışı (Lau ve Finn, 1990).	14
Şekil 3.2. Manyetik alan çizgilerinin null noktalar yakınındaki sırasıyla $B - tip$ ve $A - tip$ davranışı (Lau ve Finn, 1990).	15
Şekil 3.3. Manyetik alan çizgilerinin null (nötr) noktalar yakınındaki sırasıyla $B_s - tip$ ve $A_s - tip$ davranışı (Lau ve Finn, 1990).	15
Şekil 4.1. Null nokta yakınında manyetik alan çizgilerinin davranışı (O-tip) $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0.95$, $\alpha = 0.99$ değerleri ve $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 1$ başlangıç değerleri için.	23
Şekil 4.2. Null nokta yakınında manyetik alan çizgilerinin davranışı (X-tip) $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0.9$ değerleri ve $x_1(0) = -5.9, x_2(0) = 0, x_3(0) = 6$ başlangıç değerleri için.	24
Şekil 4.3. Null nokta yakınında manyetik alan çizgilerinin davranışı $\alpha = 0.87$, $\alpha = 0.9$, $\alpha = 0.97$, $\alpha = 0.99$ değerleri $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 1$ başlangıç değerleri için.	26
Şekil 4.4. Aşağıdaki şekilde gölgeli olarak verilen lokalize bir difüzyon bölgesinde (null noktaların olduğu bölge) yeniden bağlanma yoluyla manyetik alan çizgilerinde bir değişiklik meydana gelir; öyle ki, bir alan çizgisi A başlangıçta B ile bağlantılı iken, null noktada kopup yeniden bağlanmanın ardından C'ye bağlanır (Pontin ve Priest, 2022).	27
Şekil 4.5. Null nokta yakınında manyetik alan çizgilerinin davranışı (A ya da B-nokta) $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0.95$ değerleri, $B_0 = 0.8$; $L = 3$; $j = 1$; $p = 0.7$ parametreleri ve $x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0.1, x_3(0) = 0.5$ başlangıç değerleri için.	28
Şekil 4.6. Sırasıyla $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.9$ değerleri için $\mathbf{B} = \partial_{x_3}$ manyetik alanına dik açı ile giren bir yüklü parçacığın izlediği yörüngeler.	31
Şekil 4.7. Sırasıyla $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.99$ değerleri ve $x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0.1, x_3(0) = 0.5$ değerleri için $\mathbf{B} = \partial_{x_3}$ manyetik alanına dik olmayan sabit bir açı ile giren bir yüklü parçacığın izlediği yörüngeler.	32
Şekil 5.1. Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre bazı α değerlerine karşılık gelen spiral küre yüzeyleri.	33
Şekil 5.2. $B = \partial_{x_3}$ Paralel Killing manyetik alanı boyunca bazı α değerleri için silindirik manyetik akı tüpü	41
Şekil 5.3. Bazı α değerleri için manyetik alanının null noktaları yakınındaki toroidal manyetik akı tüpleri.	42

Şekil 5.4. Null noktalar etrafında $\mathbf{B} = \partial_{x_3}$ manyetik alanına göre bazı α değerleri için helisel manyetik akı tüpleri.	44
Şekil 5.5. Null noktalar yakınındaki hiperbolik manyetik alanı ile ilişkili bazı α değerlerine göre hiperbolik manyetik akı tüpleri.	45
Şekil 5.6. Null noktalar etrafında bazı α değerine karşılık gelen spiral manyetik alan çizgisi ile ilişkili spiral manyetik akı tüpleri.	47



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$T_{\mathbb{E}^n}(p)$	Tanjant vektör uzayı
$\mathbb{R}^3$	3-Boyutlu Reel vektör uzayı
$\chi(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi
g	Metrik
∇	Levi-Civita Koneksiyonu
Σ	Toplam Sembolü
$[\cdot]$	Lie operatörü
$\mathbf{E}$	Elektrik Alan
F	Lorentz kuvveti
ϕ	Lorentz kuvveti operatörü
Ψ	Elektrik Potansiyeli
$\mathbf{B}$	Manyetik Alan
η	Elektrik öz direnci
σ	Elektrik iletkenliği

1. GİRİŞ

Diverjansı sıfır olan vektör alanlarına manyetik vektör alanları denir. Manyetik alan birçok yerde karşımıza çıkar. Örneğin, dünya kendi manyetik alanını üretir ve bu manyetik alan pusulanın temel çalışma prensibini oluşturur. Bunun yanısıra dönel manyetik alan, elektrik motorlarında ve jeneratörlerde kullanılır. Buna benzer daha birçok kullanım alanı mevcuttur. Bir yüklü parçacık bir manyetik alana girdiğinde, manyetik alandan etkilenir ve Lorentz kuvveti olarak adlandırılan aynı zamanda aşağıdaki denklemle belirtilen kuvvet açığa çıkar. Her X vektör alanı için,

$$\Phi(X) = \mathbf{B} \times X, \quad (1.1)$$

burada $\mathbf{B}$ manyetik vektör alanıdır. Bu kuvvetin etkisiyle parçacık manyetik eğri olarak adlandırılan yeni bir yörünge izlemeye başlar. Manyetik eğrilerle ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar literatür incelemesi bölümünde ayrıntılı olarak verilmiştir. Lorentz kuvveti, fizikte özellikle elektromanyetik alanların oluşturduğu noktasal yük üzerindeki elektrik ve manyetik kuvvetlerin bileşkesidir. Lorentz kuvveti Φ , manyetik alan vektörü $\mathbf{B}$ ve parçacığın hız vektörü $\mathbf{t}$ vektörüne diktir. Yani, manyetik alan içerisindeki bir yüklü parçacığın hareketi aşağıdaki denklemle belirlenebilir:

$$\Phi(\mathbf{t}) = \mathbf{B} \times \mathbf{t} = \nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{t}. \quad (1.2)$$

$\mathbf{t}$ teğet vektörü ve $\mathbf{B}$ manyetik vektörü arasındaki vektörel çarpımdan dolayı, parçacık manyetik alana hız vektörü manyetik vektör alanına paralel olacak şekilde girerse, etkiyen manyetik kuvvet sıfır olur ve parçacık manyetik alan boyunca ilerler. Parçacık hız vektörü manyetik vektör alanına dik olacak şekilde manyetik alana girerse Lorentz kuvveti maksimum değerini alır. Manyetik kuvvet parçacığın hızına daima dik olduğundan manyetik kuvvet, parçacığın sadece yönünü değiştirir. Dolayısıyla, yüklü parçacık manyetik alan içerisinde dairesel hareketler yapar (Synge, 1960). Parçacık manyetik alana teğet vektörü ile manyetik alan vektörü sabit açı yapacak şekilde girerse parçacık eksen bu manyetik alan vektörü olan helis eğrisi şeklinde bir yörünge izler (Barros, 2007).

Kesirli hesabın uygulama alanlarına yönelik çalışmalar ise matematik ve fizik alanlarında gün geçtikçe artmaktadır. Kesirli türevler ve integraller klasik çözümlere göre daha fazla sayısal sonuç sağladığı için matematik, fizik, mühendislik, matematiksel biyoloji, akışkanlar mekaniği gibi birçok alanda çeşitli problemlerin çözümünde önemli ölçüde kullanılmaktadır. Ayrıca klasik analiz yöntemleriyle çözülemeyen birçok problem kesirli hesaplama yöntemi kullanılarak çözülebilmektedir. Bu bağlamda diferansiyel geometride Caputo kesirli analizi ile hesaplama yöntemi kullanıldığında özellikle eğriler ve yüzeyler teorisinde matematiksel ve

fiziksel olarak anlamlı sonuçlar verir.

Bu çalışmanın temel amacı kesirli analizin eğriler ve yüzeyler üzerindeki etkisini ortaya çıkarmak, fiziksel ve geometrik yorumlama yapabilmektir. Bir eğri için kesirli hesaplama yönteminin klasik yöntemlerden farkı, eğrinin değişmezleri olan eğrilik ve burulma fonksiyonlarının bir α değişkenine bağımlı olarak değişmesidir. Bu ise eğrinin teğet vektöründen ve bulunduğu düzlemden ne kadar saptığını sayısal olarak daha kolay analiz etmemize, geometrik ve fiziksel olarak daha iyi yorumlanmasına olanak sağlar. Diğer taraftan, kesirli hesabın diferansiyel geometriye etkisi incelenirken geometrik hesaplamalarla en uygun yapıya sahip olan Caputo kesirli hesaplama yöntemi kullanılmıştır. Bilindiği gibi Caputo kesirli hesaplama yönteminde sabit fonksiyonun kesirli türevi sıfırdır ve bu çeşitli fiziksel problemlerin çözülmesine ve geometrik yorumlanmasına olanak sağlar.

1.1. Teoriyi Oluşturmak İçin Literatür İncelemesi

Bu kısımda, tezin ilerlemesine ve gelişimine katkıda bulunan ve bu alanda şimdiye kadar yapılmış çalışmalar üzerinde durulacaktır.

Fizik ve matematik alanında elektromanyetik teori önemli yer tutmaktadır. Elektromanyetik teori de bu konu ile ilgili yapılan ilk yayınlardan biri Rytov tarafından 1938 yılında yapılan topolojik fazının araştırıldığı yayındır (Rytov, 1938). Bu yayın ile birlikte Berry faz olarak da bilinen geometrik faz bir çok yazar tarafından araştırılmış ve Rytov yasasının geometrik tanımı ve geometrik sonuçları incelenmiştir (Berry, 1984; Kugler, Shritkman, 1988; Ross, 1984). Dandaloff, Berry fazı ile Fermi-Walker paralel öteleme hareketinin ilişkisini araştırmış ve farklı sonuçlar elde etmiştir (Dandaloff, 1989; Dandaloff, Zakrzewski, 1989). Sunada, Riemann yüzeyleri üzerindeki manyetik akışları ele alarak önemli sonuçlar elde etmiştir (Sunada, 1993). Bu süreçte, Adachi manyetik alan ile çalışmaları ilerleterek, geometride önemli bir yapı olan Kahler yapısı ile ilişkili manyetik alanı tanımlamıştır (Adachi, 1994; Adachi, 1995). Manyetik eğriler ile özel eğrilerin ilişkisi ise Barros tarafından verilmiştir (Barros, 1997). Frins ve arkadaşları ise optik fiber boyunca geometrik faz ilişkisini araştırarak, polarizasyon düzleminin dönme hareketini incelemiştir (Frins, Dultz, 1997). Sabit bir manyetik alanda Landau-Hall problemi ve hiperbolik düzlem üzerinde hareket eden yüklü bir parçacığın klasik ve kuantum mekaniği 1987 yılında Comtet tarafından araştırılmıştır (Comtet, 1987). Aynı zamanda fizik alanında önemli olan Landau-Hall problemi geometrik bakış açısıyla Barros tarafından ele alınarak Riemann yüzeyinde Gauss-Landau-Hall manyetik alanı kavramını tanıtılmıştır. Bu çalışma aynı zamanda düzgün bir manyetik alanla ilişkili Landau-Hall problemine ilişkin sonuçları da içermektedir (Barros, 2005). 3-Boyutlu uzayda Killing manyetik alanıyla ilişkili manyetik eğriler ise Barros ve arkadaşları tarafından incelenmiştir. Burada değişken bir yaklaşım sergilenerek klasik elastik teoriyi Hall etkisiyle ilişkilendi-

recek olan Lorentz kuvvet denkleminin çözümleri ile Kirchhoff elastik çubukları arasındaki bağlantı verilmiştir (Barros, Cabrerizo, Fernández ve Romero, 2007). Daha sonra, 3-boyutlu uzaylarda Killing vektör alanlarının tanımladığı Killing manyetik vektör alanı ile ilgili manyetik eğrilerde incelenerek önemli sonuçlar elde edilmiştir (Munteanu, Nistor, 2012; Druta-Romaniuc, Munteanu, 2011;2013; Calvaruso, Munteanu, Perrone, 2015; Aydın, 2016) Geometrideki farklı yapılara ve uzaylara göre de manyetik eğriler bir çok yazar tarafından araştırılmıştır (Efimov, 2005; Cabrerizo, Fernandez ve Gomez, 2009; Özdemir ve arkadaşları, 2015; Druta-Romaniuc, Inoguchi, Munteanu, Nistor, 2015;2016; Aydın, 2016; Ceyhan ve Özdemir, 2020; Güvenç, 2022). Aynı zamanda bu çalışmalar ve matematik alanında yaşanan ilerlemeler sayesinde, bu tez çalışmasında da incelenecek olan ve fizikte çok önemli bir konu olan manyetik alanın null noktaları ve bu noktalar çevresindeki manyetik teori incelenmesi, araştırma konuları arasında yerini aldı (Sweet, 1958; Lau, Finn, 1990; Priest, Titov, 1996; Priest, Forbes, 2000; Kostomarov, Echkina, Inovenkov, Bulanov, 2010; Pontin, Priest, 2022).

Kesirli hesaplama yöntemi, Leibniz ve Newton tarafından bulunmuş klasik türev ve integral hesaplama yöntemlerinin genelleştirilmiş halidir. Kesirli türev herhangi bir dereceden türev hesaplama yöntemidir. Türev ve integral hesabında kesirli hesaplama yönteminin kullanılması tamsayı hesaplama yöntemi kadar eskidir. Bu yöntemden ilk defa Leibniz'in 1695 yılında L'Hospital'e yazdığı mektupta bahsedilmiştir (Dalir, Bashour, 2010). Ayrıca, Liouville, Weyl, Riemann, Lagrange, Laplace, Fourier, Euler ve Abel gibi birçok bilim insanı bu konuyu incelemiştir. Kesirli hesaplama yönteminde kullanılan türevleme yöntemlerinden birkaçı şöyledir: Riemann Liouville (R-L), Caputo, Grünwald-Letnikov, Wely ve Riesz'dir (Hilfer, 2000; Miller, Ross, 1993; Oldham, Spanier, 1974). Bu tez çalışmasında da kullanılacak olan Caputo kesirli analiz yöntemi ise İtalyan matematikçi M. Caputo tarafından 1960'lı yıllarında bulunmuştur (Caputo, 1966). Caputo türevi ile türetilen kesirli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının, tamsayı türevi ile elde edilen diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarıyla aynı olması nedeniyle Caputo kesirli türev operatörünü kullanmak matematikte avantaj sağlamaktadır. Kesirli türev hesaplama yöntemleri tamsayı türevlere göre daha fazla sayısal sonuç vermesi nedeniyle daha detaylı geometrik ve fiziksel sonuçlar vermektedir. Bu yüzden matematik ve diğer bilim dallarında bu konu ile ilgili oldukça fazla yayınlar yapılmıştır. Dumitru ve arkadaşları kesirli hesaplama yöntemi ile nümeriksel anlamda çalışma yayınlamıştır (Dumitru, Kai, Enrico, 1988). Ardından, Podlubny kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri ve uygulama alanlarını araştırdığı kapsamlı bir kitap yayınlamıştır (Podlubny, 1998). Loverro, mühendisler için kesirli hesaplama yöntemini tarihsel ve uygulamalı bir biçimde incelediği bir kitap yayınladı (Loverro, 2004). Bu bilgiler ışığında, 2006 yılında, kesirli diferansiyel denklemlerin uygulamalarının araştırıldığı bir yayın yayımlandı (Kilbas, Srivastava, Trujillo, 2006). Kesirli hesaplama yönteminin uygulama alanlarının genişliğinin anlaşılması ile Baleanu ve arkadaşları

nümerik sistemlerinde optimal kontrol problemlerine bu yöntem ile bakış açısı geliştirdiler (Baleanu, Defterli, Agrawal, 2009). Aynı sene, Zhang kısmi diferensiyel denklemleri kesirli hesaplama yöntemi ile araştırdı (Zhang, 2009). Diethelm, 2010 yılında Caputo kesirli türev yardımıyla diferensiyel denklemleri içeren bir çalışma yayınladı (Diethelm, 2010). Daha sonra, bu zamana kadar yapılmış yayınları incelemek için Machado ve arkadaşları bir yayın yapmıştır (Machado, Kiryakova, Mainardi, 2011). Ayrıca sabit fonksiyonun Caputo kesirli türevi sıfır olduğundan Caputo kesirli türevi yapılan hesaplamaları geometrik yorumlamaya olanak sağlar. Caputo'nun Riemann-Liouville'e göre en önemli avantajı bir sabitin kesirli türevinin sıfır olması ve başlangıç koşullarının tam sayı mertebesine sahip olmasıdır. Son yıllarda kesirli analiz hem teoride hem de pratikte büyük ilerleme kaydetmiştir (Diethelm, 2010; Kilbas, Srivastava ve Trujillo, 2006). Kesirli diferansiyel denklemler, uygulama alanlarının çokluğu nedeniyle oldukça ilgi çekici bir araştırma alanı haline gelmiştir. Bu uygulama alanlarından bazıları şöyle özetlenebilir: Tıp alanında (Bolton, Cloot, Schoombie ve Slabbert, 2014), farmakokinetik alanında (Dokoumetzidis, Macheras, 2009; Popović, Atanacković, Pilipović, . Rapaić, Pilipović ve & Atanacković, 2010), fizikte (Baleanu, Defterli ve Agrawal, 2009; Atangana, Baleanu, 2016; Ozarslan, Ercan ve Bas, 2019; Bas, Acay ve Ozarslan, 2019; Bas, Ozarslan, 2018; Durmaz, Özdemir, Fırat, 2024), biyolojide (Petrás, Magin, 2011; Ionescu, Lopes, Copot, Machado ve Bates, 2017) salgın alanları modellenmesinde (Qureshi, Yusuf, 2019; Qureshi, Atangana, 2019; Almeida, Qureshi, 2019), nümerik sistemler ve optimal kontrol problemlerinde (Jarad, Abdeljawad ve Baleanu, 2010; Baleanu, Magin, Bhalekar, Daftardar-Gejji, 2015; Asl, Javidi, Yan, 2018; Milici, Machado, Draganescu, 2019) dinamik sistemler ile ilgili (Abdeljawad, 2019) yayınlarını verebiliriz. Tüm bu farklı alanlardaki çalışmalar ile birlikte, son yıllarda matematik alanında da önemli birçok yayın bulunmaktadır. Kesirli hesaplama yönetiminin barındırdığı farklı türev türleri ile ilgili de çalışmalar yapılmıştır (Jarad, Abdeljawad, Baleanu, 2012; Bas, Özarslan, 2018; Ameen, Jarad, Abdeljawad, 2018). Aynı zamanda kesirli hesaplama yöntemine yeni bakış açısı ile diferensiyel denklemler konusunda çalışma yapılmıştır (Garrappa, 2015). Adjabi ve arkadaşları genelleştirilmiş kesir operatörü yardımıyla Gronwall eşitsizliğini incelemiştir (Adjabi, Jarad, Abdeljawad, 2017). Eğriler teorisi için oldukça önemli olan özel eğriler ve eğri çiftlerinin karakterizasyonları da kesirli hesaplama yöntemi ile incelenmiştir, (Has, Yılmaz, 2022; Has, Yılmaz, 2022; Has, Yılmaz, 2023). Ayrıca fiziksel olarak önemli bir eğri olan manyetik eğriler ve elektromanyetik eğriler kesirli hesaplama yöntemi kullanılarak incelenmiştir, (Yılmaz, 2021; Yılmaz, Has, 2021; Has, Yılmaz, 2022;). Aydın ve arkadaşları düzlem eğrilerini bu yöntem ile incelemiştir (Aydın, Mihai, Yokuş, 2021). Son yıllarda geometri alanında bu çalışmalar ile birlikte kesirli hesaplama yöntemi çalışmalarının gittikçe artacağı kanaatindeyiz.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Tanım: Bir A reel Afin uzayı ile birleşen ve $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlanmış vektör uzayı V olsun. V vektör uzayı üzerinde, her $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in V$

$$g(,) : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

$$(x, y) \rightarrow g(x, y) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A Afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.2. Tanım: $\mathbb{E}^3$ uzayında alınan bir x vektörünün normu

$$\|x\| = \sqrt{g(x, x)} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.3. Tanım: $\mathbb{E}^3$ uzayında alınan x, y vektörlerinin vektörel çarpımı

$$x \times y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.4. Tanım: $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ şeklinde tanımlanan diferansiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{E}^3$ uzayında bir eğri denir. Her $s \in I$ için $\gamma'(s) \neq 0$ ise γ eğrisine regüler eğri denir. Eğer her $s \in I$ için $\|\gamma'(s)\| = 1$ ise γ eğrisine birim hızlı eğri denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.5. Tanım: $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, birim hızlı bir eğri olmak üzere γ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathbf{t} = \gamma'(s)$, normal vektör alanı $\mathbf{n} = \gamma''(s) / \|\gamma''(s)\|$ ve binormal vektör alanı $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca κ ve τ sırasıyla, eğrinin eğriliğini ve burulmasını göstermek üzere $\kappa = \|\gamma''(s)\|$ ve $\tau = g(\mathbf{n}'(s), \mathbf{b})$ şeklinde tanımlıdır. Bu şekilde tanımlanan $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ vektörlerine γ eğrisinin Serret-Frenet çatısı denir

$$\nabla_t \mathbf{t} = \kappa \mathbf{n}, \quad (2.4)$$

$$\nabla_t \mathbf{n} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b},$$

$$\nabla_t \mathbf{b} = -\tau \mathbf{n}.$$

Frenet vektörleri ile ilgili türev denklemleri ise (2.4) eşitliğindeki gibi verilir. Ayrıca

$$\mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}, \mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{t}, \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \mathbf{n} \quad (2.5)$$

eşitlikleri sağlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.6. Tanım: $p \in \mathbb{E}^n$ olmak üzere $T_{\mathbb{E}^n}(p) = \{(p, V) = v_p : v \in \mathbb{R}^n\}$ cümlesi için iç işlem

$$\begin{aligned} + : T_{\mathbb{E}^n}(p) \times T_{\mathbb{E}^n}(p) &\rightarrow T_{\mathbb{E}^n}(p) \\ ((p, v), (p, w)) &\rightarrow (p, v) + (p, w) = (p, v + w) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ve dış işlem

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times T_{\mathbb{E}^n}(p) &\rightarrow T_{\mathbb{E}^n}(p) \\ (\lambda, (p, v)) &\rightarrow \lambda \cdot (p, v) = (p, \lambda \cdot v) \end{aligned} \quad (2.7)$$

biçiminde tanımlanıyor. Bu durumda $(T_{\mathbb{E}^n}(p), +, \cdot)$ cümlesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır ve tanjant vektör uzayı olarak adlandırılır. Bu cümlelerin elemanlarına tanjant vektör denir ve v_p ile gösterilir. $T_{\mathbb{E}^n}(p) = Sp\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ cümlesi tanjant vektör uzayının bazı ile ifadesidir (Hacısalıhoğlu, 2000).

2.7. Tanım: $\mathbb{E}^n$ cümlesindeki her noktaya bir tanjant vektör karşılık getiren fonksiyona vektör alanı denir. Vektör alanları

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{E}^n &\rightarrow \cup_{p \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(p) \\ p &\rightarrow \chi(p) = v_p \end{aligned} \quad (2.8)$$

biçiminde tanımlanır. Bu cümle $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı, $C^\infty(\mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ halkası üzerinde bir modüldür. Vektör alanlarının cümlesi $\chi(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir ve her bir elemanına bir vektör alanı denir. $\chi(\mathbb{E}^n) = Sp\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ cümlesi vektör alanlarının bazı ile ifadesidir (Hacısalıhoğlu, 2000).

2.8. Tanım: $U, \mathbb{E}^2$ düzleminin bağlantılı bir açık alt cümlesi olsun.

$$\begin{aligned} S : U \subset \mathbb{E}^2 &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (x, y) &\rightarrow S(x, y) = (S_1(x, y), S_2(x, y), S_3(x, y)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanan diferansiyellenebilir dönüşümüne 3-boyutlu Öklid uzayında bir yama, lokal yüzey veya iki parametrelili yüzey denir (Gray, 1993).

2.9. Tanım: $F : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^m$ dönüşümü verilsin,

$$F_*|_p : T_{\mathbb{E}^n}(p) \rightarrow T_{\mathbb{E}^m}(F(p)) \quad (2.10)$$

$$v_p \rightarrow F_*|_p(v_p) = \frac{dF(p+tv)}{dt} \Big|_{t=0}$$

biçiminde tanımlanan F_{*p} dönüşüme F dönüşümünün p noktasındaki türev dönüşümü denir. Bu türev dönüşümüne karşılık gelen matrise jakobiyen matrisi denir ve $J(F, p)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

2.10. Tanım: $S : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ yüzeyi verilsin. S yüzeyi regüler bir yüzey ise aşağıdakiler denktir. Her $(x_0, y_0) \in U$ için,

i. Sırasıyla $S_x(x_0, y_0)$ ve $S_y(x_0, y_0)$ biçiminde verilen x ve y değişkenine göre kısmi türevler lineer bağımsızdır.

ii. Her $(x_0, y_0) \in U$ noktasında

$$\begin{vmatrix} g(S_x, S_x) & g(S_x, S_y) \\ g(S_y, S_x) & g(S_y, S_y) \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

değeri sıfırdan farklıdır.

iii. $S : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ yüzeyi için türev dönüşümü $S_{*p} : T_{\mathbb{E}^2}(p) \rightarrow T_{\mathbb{E}^3}(S(p))$ türev dönüşümüne karşılık gelen jakobiyen matrisinin rankı 2 değerine eşittir (Gray, 1993).

2.11. Tanım: $S : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ yüzeyi verilsin. $(x_0, y_0) \in U$, S yüzeyi üzerinde sabit bir nokta olmak üzere, S yüzeyi üzerinde $S(x, y_0)$ ve $S(x_0, y)$ şeklinde tanımlanan eğrilere sırasıyla x -parametre eğrileri ve y -parametre eğrileri denir (Gray, 1993).

2.12. Tanım: $L_X Y$ vektör alanına X in Y yönünde Lie Türevi denir. Lie türevi her $p \in M$ noktasında tanımlı olup $\| (L_X Y) \|_p = \lim_{(t \rightarrow 0)} \frac{1}{t} [(\theta - t)(Y_{\theta(t)}(p)) - Y_p]$ olarak tanımlanır. Burada $\theta(t)$, 1-parametrelili grubu X vektör alanının integral eğrisidir (Boothby, 1975).

2.13. Tanım: V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlanan ve $[\cdot, \cdot]$ ile gösterilen bilineer operatörü aşağıdaki gibi belirtilir:

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V \quad (2.12)$$

$$(X, Y) \rightarrow [\cdot, \cdot](X, Y) = [X, Y]. \quad (2.13)$$

Yukarıdaki gibi tanımlanan $[\cdot, \cdot]$ operatörü her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $X, Y, Z \in V$ için aşağıda verilen

koşulları sağlar:

- i) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,
- ii) $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$,
- iii) $[X, Y] = -[Y, X]$,
- iv) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0$,

Bu operatör parantez operatörü olarak adlandırılır ve $(V, [,])$ ikilisine Lie cebiri denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

2.14. Teorem: M manifoldu üzerinde X ve Y vektör alanları ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_X f &= X(f) \\ (L_X Y)P &= [X, Y]P \end{aligned} \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlıdır (Boothby, 1975).

2.15. Tanım: M diferansiyellenebilir bir manifold ve g , M de bir metrik tensör olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için $(L_{\mathbf{B}}g)(X, Y) = 0$ oluyorsa $\mathbf{B}$ vektör alanına g metriğine göre Killing vektör alanı denir (Kobayashi ve Nomizu, 1996).

Örneğin, $\mathbb{R}^3$ de standart koordinat sistemi (x_1, x_2, x_3) ve bu uzaydaki metriği de

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (2.15)$$

olarak alalım. Bu metriğe karşılık gelen Killing vektör alanları, her $i, j \in \{1, 2, 3\}$ için,

$$L_{\xi} g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) = \sum_{a=1}^3 (\xi^a \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_a} + \frac{\partial \xi^a}{\partial x_i} g_{aj} + \frac{\partial \xi^a}{\partial x_j} g_{ia}) = 0, \quad (2.16)$$

denkleminin çözümü yapılarak Killing vektör alanının baz vektörleri

$$\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, -x_2 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2}, -x_3 \partial_{x_2} + x_2 \partial_{x_3}, x_3 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_3}\}, \quad (2.17)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\mathbb{E}^3$ uzayının genel koordinatları $\{x_1, x_2, x_3\}$ notasyonu ile gösterilecektir ve $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}\}$ biçimindedir.

Ayrıca Killing vektör alanı $\mathbf{B}$ olmak üzere, $\mathbf{B}$ vektör alanı,

$$g(\nabla_X \mathbf{B}, Y) + g(\nabla_Y \mathbf{B}, X) = 0 \quad (2.18)$$

şeklinde verilen denklemi sağlar (Druță-Romaniuc, Munteanu, 2011).

2.16. Tanım: M , n -boyutlu bir Riemann Manifoldu olsun. M üzerindeki Lorentz kuvveti F anti simetrik Φ oparetörüyle birlikte aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y), X, Y \in \chi(M) \quad (2.19)$$

M üzerindeki F manyetik alanının yörüngesi olan γ eğrileri

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \Phi(\gamma') \quad (2.20)$$

denklemini sağlayacak şekilde verilir. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için karma çarpım

$$g(X \times Y, Z) = dv_g(X, Y, Z). \quad (2.21)$$

biçiminde verilir. Eğer $\mathbf{B}$, M üzerinde tanımlı Killing vektör alanı ise bu vektör alanına karşılık gelen Killing manyetik alanı $F_{\mathbf{B}} = l_{\mathbf{B}} dv_g$ şeklindedir. Bu durumda Lorentz kuvveti eşitliği

$$\Phi(X) = \mathbf{B} \times X \quad (2.22)$$

olarak verilir. Buradan, Lorentz kuvveti ile ilgili manyetik eğriler aşağıdaki denklemle bulunur:

$$\Phi(\gamma') = \nabla_{\gamma'} \gamma' = \mathbf{B} \times \gamma' \quad (2.23)$$

(Barros ve Romeo, 2007).

2.17. Tanım: Birim hızlı γ manyetik eğrisi $\mathbf{B}$ manyetik alanının manyetik yörüngesidir; gerek ve yeter şart $\mathbf{B}$ manyetik alanı γ eğrisi boyunca $\mathbf{B} = \omega \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$ şeklinde yazılır burada ω fonksiyonu bir yüklü parçacığın manyetik alana girerken parçacığın teğet vektörü ile manyetik alan arasındaki açı ile ilişkilidir ve her bir $\mathbf{B}$ manyetik alanına göre manyetik alanın yarı-eğimi olarak adlandırılır. Burada yarı-eğim denilmesinin sebebi $\mathbf{B}$ manyetik alanı ile parçacığın $\mathbf{t}$ teğet vektörü arasındaki açının $\cos$ fonksiyonu ile ilişkili olmasıdır (Barros ve Romeo, 2007).

2.18. Tanım: Caputo kesirli türevi $0 < \alpha \leq 1$ değer aralığı ve f düzgün fonksiyonu için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{d_C^\alpha u(x)}{ds^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \left[\frac{1}{(x-t)^\alpha} \frac{du(t)}{dt} \right] dt, \quad (2.24)$$

(Podlubny, 1998).

2.19. Tanım: Riemann-Liouville integrali $\alpha > 0$ değeri ve sürekli bir $f \in C^n([0, 1], \mathbb{R})$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.25)$$

burada $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$ dır (Podlubny, 1998).

2.20. Tanım: $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ üç boyutlu Öklid uzayında bir eğri ve γ eğrisinin teğet vektörü $\mathbf{t}_\alpha = \frac{d_C^\alpha \alpha}{ds^\alpha}$ olarak tanımlanır. γ eğrisinin normal vektörü $\mathbf{n}_\alpha = \frac{d_C^\alpha \mathbf{t}_\alpha}{\|\mathbf{t}_\alpha\|}$ ve binormal vektörü $\mathbf{b}_\alpha = \mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{n}_\alpha$ olarak tanımlanır. $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha\}$ üçlüsüne α eğrisi boyunca bu eğrinin Caputo türev hesabına göre Frenet çatısı denir. Frenet çatısının kesirli hesaba göre türev formülleri ise aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} \frac{d_C^\alpha \mathbf{t}_\alpha(s)}{ds^\alpha} \\ \frac{d_C^\alpha \mathbf{n}_\alpha(s)}{ds^\alpha} \\ \frac{d_C^\alpha \mathbf{b}_\alpha(s)}{ds^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\alpha & 0 \\ -\kappa_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & -\tau_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_\alpha(s) \\ \mathbf{n}_\alpha(s) \\ \mathbf{b}_\alpha(s) \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

κ_α ve τ_α , α eğrisinin eğrilikleridir ve kesirli hesaba göre aşağıdaki şekilde verilir:

$$\kappa_\alpha = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}} \kappa(s), \quad \tau_\alpha = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}} \tau(s), \quad (2.27)$$

$\kappa(s)$, $\tau(s)$ eğrinin tamsayı değerine karşılık gelen eğrilikleri, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $x \in \mathbb{R}^+$ biçimindedir (Aydın ve arkadaşları; 2021).

2.21. Tanım: $\mathbb{E}^3$ de 1-parametrelili küre ailesinin zarfına kanal yüzeyi denir. Kanal yüzeyinin, merkezlerinin yörüngesi bir $C(t)$ eğrisi ve yarıçap fonksiyonu $r(s)$ olan değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfı olarak tanımlanır (Gray, 1998).

2.22. Tanım: $\mathbb{S}^2(s)$ kürelerinin merkezlerinin yörüngesi olan $C(t)$ eğrisine kanal yüzeyinin merkez eğrisi $r = r(s)$ fonksiyonuna ise kanal yüzeyinin yarıçap fonksiyonu denir (Gray, 1998).

2.23. Tanım: Bir kanal yüzeyi için yarıçap fonksiyonu $r = r(t) = \text{sabit}$ ise, kanal yüzeyine tüp yüzeyi denir (Gross, 1994).

2.24. Tanım: Bir $\alpha(t)$ merkez eğrisi etrafında genelleştirilmiş tüp yüzeyi

$$X(t, s) = \alpha(t) + r(s)(\cos s \mathbf{n}(t) + \sin s \mathbf{b}(t)), 0 \leq s < 2\pi \quad (2.28)$$

şeklindedir. Burada, $r(s)$ iki kez türevlenebilir bir fonksiyon ve $r(0) = r(2\pi)$ eşitliği sağlanır (Gross, 1994).

2.25. Teorem: $X(t,s)$ Kanal yüzeyi ile $\mathbb{S}^2(s)$ kureleri karakteristik çember adı verilen çemberler boyunca teğettir (Gross, 1994).



3. MANYETİK ALANIN NULL NOKTALARININ KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde üç boyutlu null (nötr) noktaların yani manyetik alanın sıfır olduğu veya elektrik alanın singüler olduğu noktaların karakterizasyonları tanıtılmıştır. Diverjansı sıfır olan vektör alanlarına manyetik vektör alanı adı verilir. Bir $\mathbf{B}$ manyetik alanı

$$g(\nabla, \mathbf{B}) = 0 \quad (3.1)$$

biçiminde verilen ve Gauss yasası adı verilen eşitliği sağlar. Manyetik alan çizgilerinin parametrik denklemi ise

$$\frac{dx_1}{B_{x_1}} = \frac{dx_2}{B_{x_2}} = \frac{dx_3}{B_{x_3}} = ds \quad (3.2)$$

denklemlerinin çözümü ile elde edilir. $\mathbf{B}$ manyetik alan $\mathbf{E}$ elektrik alan olmak üzere Faraday Yasası

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.3)$$

şeklindedir. Burada J akış ve $\mu_0 = c/4\pi$ boşluğun geçirgenliği (sabit), c ışık hızı olmak üzere Ampere yasası

$$\nabla \times \mathbf{B} = J\mu_0 \quad (3.4)$$

şeklinde verilir. $\mathbf{E}$ elektrik alanı, $\mathbf{v}$ manyetik alanın hızı, η elektrik öz direnci ve elektrik iletkenliği σ için $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ olmak üzere (magnetohydrodynamic) MHD Ohm yasası

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta J \quad (3.5)$$

eşitliğini sağlar. Ohm yasasının ideal MHD formu

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (3.6)$$

eşitliği ile verilir. İdeal olma durumunda $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{//} + \mathbf{E}_{\perp}$ elektrik alanının paralel parçası olan $\mathbf{E}_{//}$ vektörünün, $\mathbf{B}$ manyetik alanına paraleldir. Bu durumda η öz direnci sıfırdır. O halde, ideal MHD akışı

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \text{ ve } \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.7)$$

eşitliklerini sağlar. Ayrıca $\mathbf{E}$ elektrik alanı $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ eşitliğinin bir sonucu olarak Ψ elektrik potansiyeli cinsinden

$$\mathbf{E} = -\nabla\Psi \quad (3.8)$$

şeklinde de yazılabilir. Buradan $\nabla\Psi = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ olup $g(\mathbf{B}, \nabla\Psi) = 0$ bulunur. Bu ise Ψ elektrik potansiyeli $\mathbf{B}$ manyetik alanı boyunca sabit demektir. Diğer taraftan

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (3.9)$$

eşitliğinde her iki tarafı $\mathbf{B}$ ile vektörel çarpım yaparsak

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} + g(\mathbf{v}, \mathbf{B})\mathbf{B} - g(\mathbf{B}, \mathbf{B})\mathbf{v} = 0 \quad (3.10)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{g(\mathbf{B}, \mathbf{B})} + \frac{g(\mathbf{v}, \mathbf{B})}{g(\mathbf{B}, \mathbf{B})}\mathbf{B} \quad (3.11)$$

biçiminde olup manyetik alan çizgilerinin hızıdır. Buradan hız vektörünün dik ve paralel bileşeni

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{g(\mathbf{B}, \mathbf{B})}, \mathbf{v}_\parallel = \frac{g(\mathbf{v}, \mathbf{B})}{g(\mathbf{B}, \mathbf{B})}\mathbf{B} \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir. Eğer $\mathbf{v}_\perp$ bir yerde singüler ise burada manyetik difüzyon gibi ideal olmayan etkiler ortaya çıkar. Bu durum ise $\mathbf{E}$ singüler ya da $\mathbf{B}$ sıfırdır. İdeal MHD durumunda singülerite ortaya çıkar. Bu singüleriteler dış gücün etkisiyle manyetik alanda topolojik değişikliğe yol açar, (Priest, 1996); (Pontin ve Priest, 2022). Sonuç olarak burada verilen null noktalar $\mathbf{v}_\perp$ veya $\mathbf{E}$ vektörünün singüler olduğu yani manyetik alanın sıfır olduğu noktalardır.

$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{x_1}, \mathbf{B}_{x_2}, \mathbf{B}_{x_3})$ manyetik alan olmak üzere null noktalar civarında manyetik alan çizgileri farklı davranışlar sergiler. Manyetik alanın sergilediği bu davranışları aşağıdaki 3×3 tipinde reel matrisin karakteristik değerleri yardımıyla karakterize edebiliriz (Lau ve Finn, 1990).

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}_{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{B}_{x_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{B}_{x_1}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mathbf{B}_{x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{B}_{x_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{B}_{x_2}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mathbf{B}_{x_3}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{B}_{x_3}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{B}_{x_3}}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Burada verilen karakterizasyon manyetik alan çizgilerinin yaklaştığı ve yayıldığı düzlem olan ve fan düzlemi olarak adlandırılan düzlemdeki manyetik alan çizgilerinin görüntüsüdür. 3-boyutlu uzayda null noktaların karakterizasyonu Şekil 3.1- 3.3’de görselleştirilmiştir.

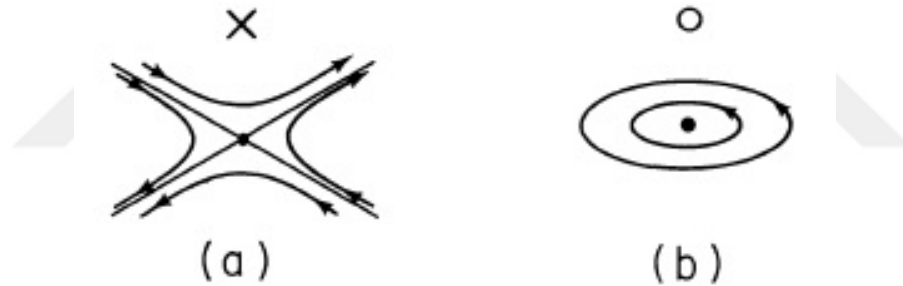
$\mathbf{B}^*$ matrisinin özdeğerleri aracılığıyla manyetik alan çizgilerinin null noktaları yakınındaki davranışı aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$\mathbf{B}^*$ matrisinin $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ şeklinde üç özdeğere sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda $g(\nabla, \mathbf{B}) = 0$ olduğundan $\mathbf{B}^*$ matrisinin izi sıfırdır. Bu takdirde $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ eşitliği sağlanır.

1. $\mathbf{B}^*$ matrisinin özdeğerlerinden birisi sıfırsa, genelliği bozmadan $\lambda_1 = 0$ alabiliriz. O halde $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ olur.

i. λ_2 ve λ_3 reel ise $X - tip$ (Şekil 3.1 (a)),

ii. λ_2 ve λ_3 kompleks ise eşlenik olmalıdır. Ayrıca, $iz(\mathbf{B}^*) = 0$ olduğundan, özdeğerler tamamen imajiner olmalıdır. Bu durumda ise $O - tip$ (Şekil 3.1 (b)) elde edilir.

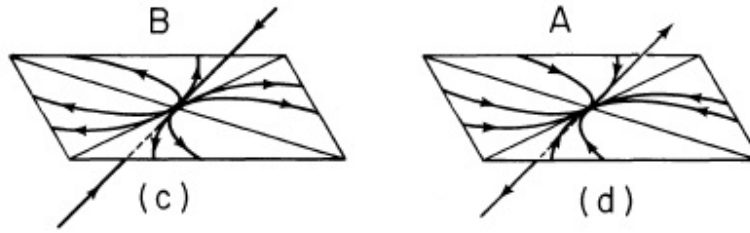


Şekil 3.1. Manyetik alan çizgilerinin null (nötr) noktalar yakınındaki sırasıyla $X - tip$ ve $O - tip$ davranışı (Lau ve Finn, 1990).

2. $\mathbf{B}^*$ matrisinin özdeğerlerinden hepsi reel ise $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ olduğundan sırasıyla özdeğerlerin işaretleri aşağıdaki gibidir.

i. $(+, -, -)$ ise $A - tip$ (Şekil 3.2 (d)),

ii. $(-, +, +)$ ise $B - tip$ (Şekil 3.2 (c)) elde edilir.



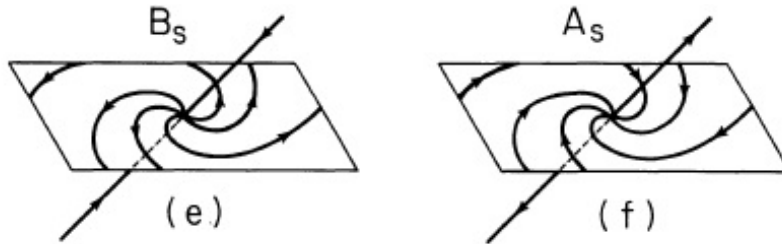
Şekil 3.2. Manyetik alan çizgilerinin null noktalar yakınındaki sırasıyla B – tip ve A – tip davranışı (Lau ve Finn, 1990).

Not: Eğer null noktalarda akım sıfır ise yani $\mathbf{B}^*$ simetrik ise özdeğerler reeldir. Tersisi doğru değildir yani öz değerler reel ise akım sıfır yani $\mathbf{B}^*$ simetrik olmak zorunda değildir.

3. $\mathbf{B}^*$ matrisinin λ_1 özdeğeri reel, λ_2 ve λ_3 özdeğerleri kompleks ise λ_2 ve λ_3 kompleks eşlenik olmalıdır. O halde $\lambda_1 + 2Re(\lambda_2) = 0$ olur. Bu durumda;

i. $\lambda_1 > 0$ ise A_s – tip (Şekil 3.3 (f)),

ii. $\lambda_1 < 0$ ise B_s – tip (Şekil 3.3 (e)) elde edilir.



Şekil 3.3. Manyetik alan çizgilerinin null (nötr) noktalar yakınındaki sırasıyla B_s – tip ve A_s – tip davranışı (Lau ve Finn, 1990).

Yani, $\lambda_1 > 0$ ($\lambda_1 < 0$) ise alan çizgileri spiral çizer ve bu spiraller kompleks özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin gerdiği düzlemde dir. Bu durumda $\mathbf{B}^*$ antisimetriktir ve null noktalar boyunca akım mevcuttur. Fan düzleminde akım sıfır ise fan düzlemi null noktaların bulunduğu doğruya diktir.

Not: $\mathbf{B}^*$ asimetrik olduğunda akım mevcuttur. Null noktalarda akım sıfır gerek ve yeter koşul $\mathbf{B}^*$ simetriktir. Dahası fan düzlemi null noktaların bulunduğu doğruya diktir.

Fan düzleminde $A - tip$ ve $B - tip$ görüntü oluştuğunda, 3 boyutta pozitif (negatif) özdeğere karşılık gelen vektör null noktaların bulunduğu doğruyu verir. Diğer özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise fan düzlemini gerer.

Fan düzleminde $A_s - tip$ ve $B_s - tip$ görüntü oluştuğunda, 3 boyutta reel özdeğere karşılık gelen vektör null noktaların bulunduğu doğruyu verir. Diğer iki kompleks özdeğere karşılık gelen özvektörler ise fan düzlemini gerer (Lau ve Finn, 1990).

B manyetik alanı için alan çizgilerini

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \mathbf{B}_{x_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = \mathbf{B}_{x_2}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t} = \mathbf{B}_{x_3} \text{ veya kapalı olarak } \frac{\partial r}{\partial t} = \mathbf{B} \quad (3.14)$$

eşitliklerinin çözümü ile elde ederiz. Buradaki t herhangi bir parametredir yani yay parametresi olmak zorunda değildir. Bu eşitliğin çözümü $r = F_{\mathbf{B}}(r_0, t)$ herhangi bir t anındaki akışı verir.

Ayrıca manyetik alan çizgileri

$$\frac{dx_1}{\mathbf{B}_{x_1}} = \frac{dx_2}{\mathbf{B}_{x_2}} = \frac{dx_3}{\mathbf{B}_{x_3}} \quad (3.15)$$

denkleminin çözümünden elde edilen iki akı yüzeyin arakesit eğrisi olarakda elde edilebilir. Bu iki akı yüzeyi $u(x_1, x_2, x_3) = C$ ve $v(x_1, x_2, x_3) = K$ ise Ψ elektrik potansiyeli manyetik alan boyunca sabit olduğunda $\Psi = \Psi(C, K)$ şeklindedir. Buradan $\mathbf{E} = -\nabla\Psi$ olduğundan $\mathbf{E}$ de belirlenmiş olur. O halde $\mathbf{B}$ manyetik alanının null noktaları $\mathbf{E}$ elektrik alanının veya $v \perp = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{g(\mathbf{B}, \mathbf{B})}$ in singülerliği yardımıyla elde edilir.

Örnek. ($X - tip$ manyetik alan çizgisi) iki boyutlu uzayda, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{x_1}, \mathbf{B}_{x_2})$ alalım $\mathbf{E} + v \times \mathbf{B} = 0$ olduğundan $V = (v_{x_1}, v_{x_2})$ sadece x_1 ve x_2 bileşenine sahiptir ve $\mathbf{E}$ sadece x_3 bileşenine sahiptir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \mathbf{E}_{x_3} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{x_3}}{\partial x_2}, -\frac{\partial \mathbf{E}_{x_3}}{\partial x_1}, 0 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

olduğundan $\mathbf{E}_{x_3} = \mathbf{E}_0 = \text{sabittir}$. Buradan

$$v \perp = \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}}{g(\mathbf{B}, \mathbf{B})} \quad (3.17)$$

kullanılarak null noktalar bulunur. $\mathbf{B}$ manyetik alanını $\mathbf{B}_{x_1} = x_1$, $\mathbf{B}_{x_2} = -x_2$ olarak alalım. Bu

durumda

$$v_{\perp} = \left(\frac{\mathbf{E}_0 \cdot x_1}{x_1^2 + x_2^2}, -\frac{\mathbf{E}_0 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \quad (3.18)$$

olarak bulunur. O halde null noktalar $x_1 = x_2 = 0$ dir. Buradan manyetik alan çizgilerinin denklemi:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = x_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial s} = -x_2, \quad (3.19)$$

eşitliğinin çözümü ile

$$x_1 x_2 = C \quad (3.20)$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda manyetik alan çizgileri hiperbol eğrisi şeklindedir. Yani fan düzlemindeki görüntüsü $X - tip$ manyetik alan çizgisidir.

Örnek. ($X - tip$ manyetik alan çizgisi) Üç boyutlu uzayda, manyetik alan bileşenlerini $\mathbf{B}_{x_1} = x_2$, $\mathbf{B}_{x_2} = x_1$, $\mathbf{B}_{x_3} = 1$ olarak alalım. Bu durumda $\mathbf{B}$ manyetik alanına karşılık gelen matris

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

olarak hesaplanır. Matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ olarak bulunur. $\lambda_1 = 0$ ve λ_2, λ_3 reel olduğundan manyetik alan çizgilerinin davranışı $X - tip$ biçimindedir (Şekil 3.1 (a)). Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ ve $v_3 = (-1, 1, 0)$ şeklindedir. O halde null noktalar $x_1 = x_2 = 0$ yani x_3 eksenini üzerindeki noktalardır. Fan düzlemi ise $x_3 = d$, $d \in \mathbb{R}$ düzlemdir. Manyetik alan çizgileri ise

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = x_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial s} = -x_2, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t} = -1 \quad (3.22)$$

denkleminin çözümü ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$x_1 = C^{1/2} \sinh s, \quad x_2 = C^{1/2} \cosh s, \quad x_3 = s + K. \quad (3.23)$$

Aynı zamansa

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{1} \quad (3.24)$$

denkleminin çözülmesiyle aşağıdaki iki akı yüzeyin arakesit eğrisi

$$C = x_1^2 - x_2^2, K = x_3 - \operatorname{arctanh}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \quad (3.25)$$

olarak da elde edilir. Buradan $\mathbf{E}$ yi C ve K cinsinden ifade ettikten sonra Ψ elektrik potansiyeli fonksiyonunu belirlemeliyiz. $\mathbf{E} = \nabla \times \Psi$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x_1} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial x_1} \\ &= 2\sqrt{C} \sinh s \frac{\partial \Psi}{\partial C} + \frac{\cosh s}{\sqrt{C}} \frac{\partial \Psi}{\partial K} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{E}_{x_2} = -\frac{x_2 \mathbf{E}_{x_1} + \mathbf{E}_{x_3}}{x_1}, \mathbf{E}_{x_3} = -\frac{\partial \Psi}{\partial K} \quad (3.27)$$

dır. Dolayısıyla Ψ elektrik potansiyeli C ve K cinsinden aşağıdaki gibi

$$\Psi = -\mathbf{E}_{x_3} K \text{ veya } \Psi = C \arctan \frac{K - K_0}{C - C_0} \quad (3.28)$$

ve $C = 0$ için $C = C_0$, $K = 0$ için $K = K_0$ olarak elde edilir. Ayrıca burada $J\mu_0 = \nabla \times \mathbf{B} = 0$ dır. Yani akım sıfırdır ve $\mathbf{B}^*$ matrisi simetrik matristir.

Örnek. (O – tip manyetik alan çizgisi) $\mathbf{B}_{x_1} = x_2 - x_3$, $\mathbf{B}_{x_2} = x_3 - x_1$, $\mathbf{B}_{x_3} = x_1 - x_2$ manyetik alan bileşenlerini ele alalım. Buradan

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

matrisi elde edilir. Bu matrisin özdeğerleri

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i\sqrt{3}, \lambda_3 = -i\sqrt{3}, \quad (3.30)$$

ve sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = \left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}, 1\right), v_3 = \left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}, 1\right) \quad (3.31)$$

şeklinde hesaplanır. Öz değerlerden birisi sıfır diğer ikisi kompleks sayı ve bu sayının eşleniği olduğundan manyetik alan çizgisinin fan düzlemindeki görüntüsü O – tip olarak bulunur (bkz. Şekil 3.1 (b)). O halde null noktaların bulunduğu doğru $\alpha(t) = (t, t, t)$ ve fan düzlemi

$x_1 + x_2 + x_3 - d = 0$ ve burada $t, d \in \mathbb{R}$ 'dir. Diğer taraftan

$$\frac{dx_1}{x_2 - x_3} = \frac{dx_2}{x_3 - x_1} = \frac{dx_3}{x_1 - x_2} \quad (3.32)$$

denkleminin çözümlendiğinde akı yüzeyleri (manyetik yüzeyler) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 = C, \quad v(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = K \quad (3.33)$$

O halde

$$\Phi(C, K) = F(x_1 + x_2 + x_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 \quad (3.34)$$

dır. Bu çözüm

$$f(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = x + y + z \text{ veya } g(x_1 + x_2 + x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (3.35)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Örnek. (B – tip manyetik alan çizgisi) Üç boyutta manyetik alan bileşenlerini $\mathbf{B}_{x_1} = x_1$, $\mathbf{B}_{x_2} = x_2$, $\mathbf{B}_{x_3} = -2x_3$ olarak alalım. Buradan

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

olup $\mathbf{B}^*$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$ dir. Üç özdeğer de reel ve $\lambda_1 > 0$ olduğundan fan düzleminde B – tip görüntü (bkz. Şekil 3.2 (c)) elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$ ve $v_3 = (0, 1, 0)$ biçimindedir. O halde v_1 null noktaların bulunduğu doğruyu, v_2 ve v_3 vektörlerinin gerdiği düzlem ise fan düzlemini verir.

$$\mathbf{B}^* = \lambda X \quad (3.37)$$

eşitliğinden null noktaların bulunduğu doğru $x_1 = x_2 = 0$ yani x_3 eksenindeki noktalar-dır. Fan düzlemi ise $x_3 = 0$ yani $x_1 x_2$ düzlemidir. Ayrıca burada $J\mu_0 = \nabla \times \mathbf{B} = 0$ dır. Yani akım sıfırdır ve $\mathbf{B}^*$ simetriktir.

$$\frac{\partial x_1}{\partial s} = x_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial s} = x_2, \quad \frac{\partial x_3}{\partial s} = -2x_3 \quad (3.38)$$

denklemleri çözülürse manyetik alan çizgilerinin denklemleri

$$\gamma(s) = (c_1 e^s, c_2 e^s, c_3 e^{-2s}), \quad c_1, c_2, c_3 = \text{sabit} \quad (3.39)$$

olarak bulunur. Bu alan çizgilerini iki yüzeyin arakesit eğrisi olarak ifade edip bu yüzeyler yardımıyla Ψ elektrik potansiyelini belirleyelim. Aşağıdaki denklemleri ele alıp,

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{-2x_3} \quad (3.40)$$

bu ilk iki eşitlikten,

$$\frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{x_2 x_1 - x_1 x_2} = 0 \quad (3.41)$$

elde edilir. Bu ifadenin paydası sıfır olduğundan çözüm olması için $x_2 dx_1 - x_1 dx_2 = 0$ olmalıdır. Buradan

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{x_1} = C \quad (3.42)$$

elde edilir. Diğer iki eşitlikten ise

$$\frac{2x_3 dx_1 + x_1 dx_3}{2x_1 x_3 - 2x_1 x_3} = 0 \quad (3.43)$$

elde edilir. Bu ifadenin de paydası sıfır olduğundan çözüm olması için $2x_3 dx_1 + x_1 dx_3 = 0$ olmalıdır. Buradan

$$v(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_3 = K \quad (3.44)$$

olarak bulunur. $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ 2x_1 x_3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ dır. Sadece birisinin sıfırdan farklı olması yeterlidir. O halde

$$\Psi(C, K) = F\left(\frac{x_2}{x_1}, x_1^2 x_3\right) = 0 \quad (3.45)$$

dır. Bu çözüm

$$f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = x_1^2 x_3 \text{ veya } g(x_1^2 x_3) = \frac{x_2}{x_1} \quad (3.46)$$

şeklinde de ifade edilebilir. $\Psi(C, K) = C + K = x_1^2 x_3 + \frac{x_2}{x_1}$ olarak alırsak

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (\mathbf{E}_{x_1}, \mathbf{E}_{x_2}, \mathbf{E}_{x_3}) = -\nabla \Psi \\ &= \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) \\ &= \left(-2x_1 x_3 + \frac{x_2}{x_1^2}, -\frac{1}{x_1}, -x_1^2 \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

dır. O halde null noktalar $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ ($x_2 = Cx_1$) dır.

Örnek. ($A_s - tip$ manyetik alan çizgisi) $\mathbf{B}_{x_1} = -x_1 + x_2$, $\mathbf{B}_{x_2} = -x_1 + 2x_2 - 2x_3$, $\mathbf{B}_{x_3} = 2x_2 - x_3$ manyetik alanını alalım. Buradan verilen manyetik alanın matris formu

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

şeklinde dir. Matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{1}{2}i\sqrt{11} + \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{11}, \quad (3.49)$$

ve sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$v_1 = (-2, 0, 1), v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i\sqrt{11}, 1 \right), v_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}i\sqrt{11} + \frac{3}{4}, 1 \right) \quad (3.50)$$

biçimindedir. Öz değerlerden birisi reel diğer ikisi kompleks ve $\lambda_1 < 0$ olduğundan manyetik alan çizgileri fan düzleminde $A_s - tip$ görüntü verir (Şekil 3.3 (f)). Ayrıca burada $J\mu_0 = \nabla \times \mathbf{B} = (4, 0, -2)$ dir. Yani akım mevcuttur ve $\mathbf{B}^*$ anti-simetriktir. Şimdi de null noktaları ve fan düzlemini bulalım. O halde null noktalar $\alpha(t) = (-2t, 0, t)$ doğrusu üzerindeki noktalar ve fan düzlemi $2x_1 - x_3 = 1$ düzlemdir. Bu durumda

$$\frac{\partial x_1}{\partial s} = -x_1 + x_2, \frac{\partial x_2}{\partial s} = -x_1 + 2x_2 - 2x_3, \frac{\partial x_3}{\partial s} = 2x_2 - x_3 \quad (3.51)$$

denklemini çözülürse manyetik alan çizgilerinin denklemi:

$$\gamma(t) = \exp\left(\frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} \left(\frac{3-\sqrt{11}}{10}\right) \cos \frac{\sqrt{11}t}{2} + \left(\frac{3+\sqrt{11}}{10}\right) \sin \frac{\sqrt{11}t}{2}, \\ \cos \frac{\sqrt{11}t}{2} + \sin \frac{\sqrt{11}t}{2}, \\ \left(\frac{3-\sqrt{11}}{5}\right) \cos \frac{\sqrt{11}t}{2} + \left(\frac{3+\sqrt{11}}{5}\right) \sin \frac{\sqrt{11}t}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

biçiminde bulunur.

4. CAPUTO KESİRLİ HESAPLAMA YÖNTEMİ İLE MANYETİK ALANIN NULL NOKTALAR YAKININDAKİ DAVRANIŞI

Bu bölümde öncelikle üç boyutlu null noktalarının karakterizasyonlarını tanıttık ve ardından manyetik alanın null (nötr) noktaları yakınındaki manyetik alan çizgilerinin davranışını Caputo kesirli analiz yöntemiyle araştırdık. Ayrıca manyetik alan çizgilerinin null noktası yakınındaki davranışının tamsayı ve kesirli türev sonuçlarını matematik programları aracılığıyla görselleştirdik. Tezin bu bölümünden (Durmaz, Özdemir, Fırat, 2024) yayını elde edilmiştir.

Caputo kesirli diferansiyel denklem aracılığıyla $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{x_1}, \mathbf{B}_{x_2}, \mathbf{B}_{x_3})$ manyetik alan çizgilerinin sağlaması gereken denklem aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\frac{d_C^\alpha x_1}{dt^\alpha} = \mathbf{B}_{x_1}, \quad \frac{d_C^\alpha x_2}{dt^\alpha} = \mathbf{B}_{x_2}, \quad \frac{d_C^\alpha x_3}{dt^\alpha} = \mathbf{B}_{x_3}. \quad (4.1)$$

Manyetik alanın null noktalar yakınındaki davranışını Caputo kesirli hesaplama yöntemi ile karakterize etmek için aşağıdaki örnekleri vereceğiz. Bu örnekleri görselleştirdiğimiz Şekil 4.2-4.6'de, kırmızı renkli eğriler ilgili denklemlerin kesirli çözümlerine, siyah renkli eğriler ise tamsayı çözümlerine karşılık gelmektedir.

Örnek. $\mathbf{B} = x_3 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_3}$ dairesel ($O - tip$) manyetik alanını alalım. Üç boyutlu uzayda $\mathbf{B}$ ile belirtilen manyetik alan çizgisi aşağıdaki diferansiyel denklemin çözümü olarak elde edilebilir:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = x_3, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t} = -x_1 \quad (4.2)$$

(4.2) denkleminin tamsayı çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir:

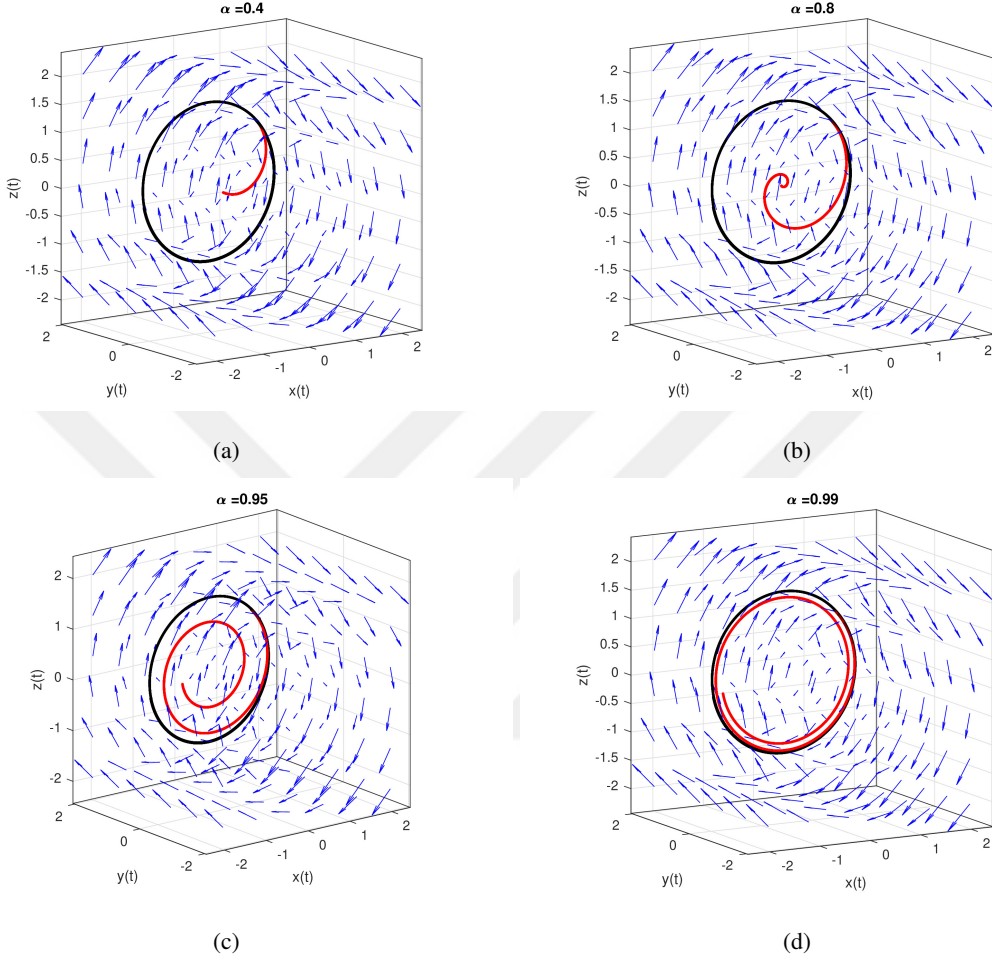
$$X(t) = (a_1 \cos t + a_2 \sin t) \partial_{x_1} + a_3 \partial_{x_2} + (a_2 \cos t - a_1 \sin t) \partial_{x_3}, \quad (4.3)$$

burada $a_i, i = \{1, 2, 3\}$ reel sabitlerdir. (4.2) denkleminin Caputo kesirli analiz yöntemiyle çözümü ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t^{2\alpha-1} E_{2\alpha, 2\alpha}(-t^{2\alpha}) + t^{\alpha-1} E_{2\alpha, \alpha}(-t^{2\alpha}) \\ x_2(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ x_3(t) &= -t^{2\alpha-1} E_{2\alpha, 2\alpha}(-t^{2\alpha}) + t^{\alpha-1} E_{2\alpha, \alpha}(-t^{2\alpha}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

burada $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $x \in \mathbb{R}^+$ ve $E_{i,j}(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{\Gamma(ik+j)}$, $i, j > 0, x \in \mathbb{C}$ biçiminde tanımlıdır. Buradan, Şekil 3.1' de verilen ($O - tip$) manyetik alan çizgilerini ve bu alan çizgi-

leri ile ilgili kesirli yaklaşımla elde edilen manyetik alan çizgilerini elde ederiz.



Şekil 4.1. Null nokta yakınında manyetik alan çizgilerinin davranışı (O-tip) $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0.95$, $\alpha = 0.99$ değerleri ve $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 1$ başlangıç değerleri için.

Örnek. $\mathbf{B} = x_3 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_3}$ hiperbolik (X -tip) manyetik alanını alalım. Bu durumda ilgili manyetik alan çizgisi aşağıdaki diferansiyel denklemin çözümü ile elde edilir:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = x_3, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t} = x_1. \quad (4.5)$$

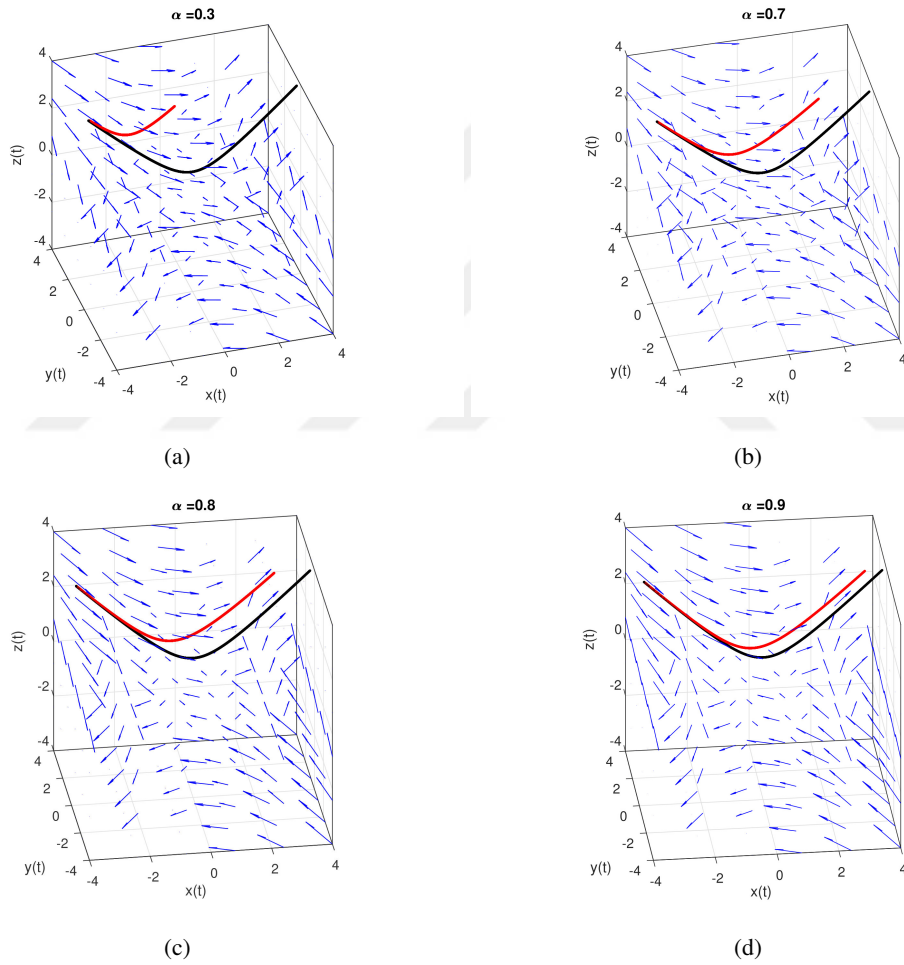
(4.5) denkleminin tamsayı çözümü aşağıdaki gibidir:

$$X(t) = (a_1 \cosh t + a_2 \sinh t) \partial_{x_1} + a_3 \partial_{x_2} + (a_2 \cosh t + a_1 \sinh t) \partial_{x_3}. \quad (4.6)$$

(4.5) denkleminin Caputo kesirli analiz yöntemi ile çözümü ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha) \\ x_2(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ x_3(t) &= t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Bu çözümler Şekil 4.2 de görselleştirilmiştir.



Şekil 4.2. Null nokta yakınında manyetik alan çizgilerinin davranışı (X-tip) $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0.9$ değerleri ve $x_1(0) = -5.9, x_2(0) = 0, x_3(0) = 6$ başlangıç değerleri için.

Örnek. $\mathbf{B} = (-x_1 + x_2)\partial_{x_1} + (-x_1 + 2x_2 - 2x_3)\partial_{x_2} + (2x_2 - x_3)\partial_{x_3}$ spiral ($A_s - tip$) manyetik alanını alalım. Üç boyutlu uzayda, $\mathbf{B}$ ile belirtilen manyetik alan çizgisi aşağıdaki diferansi-

yel denklemin çözümü olarak elde edilebilir:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = -x_1 + x_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = -x_1 + 2x_2 - 2x_3, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t} = 2x_2 - x_3. \quad (4.8)$$

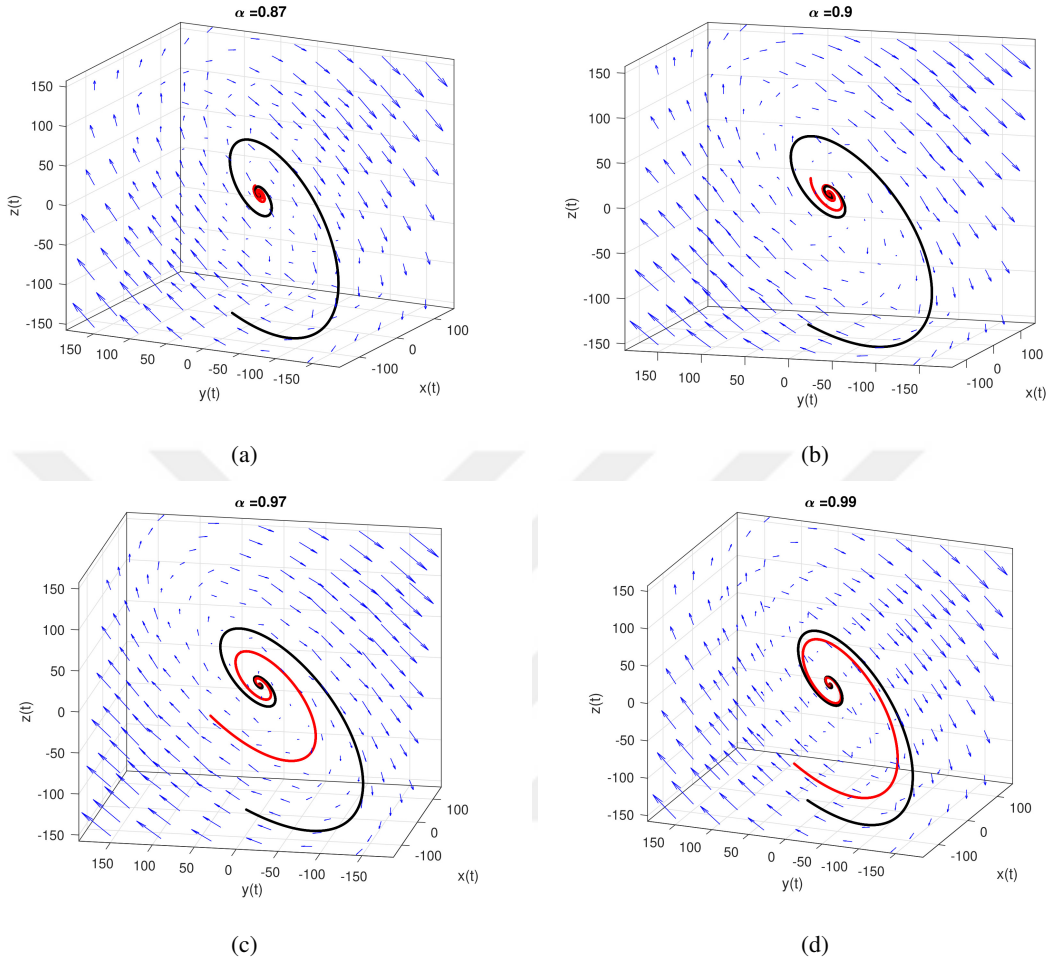
(4.8) denkleminin tamsayı çözümü

$$\gamma(t) = \exp\left(\frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} \left(\frac{3-\sqrt{11}}{10}\right) \cos \frac{\sqrt{11}t}{2} + \left(\frac{3+\sqrt{11}}{10}\right) \sin \frac{\sqrt{11}t}{2}, \\ \cos \frac{\sqrt{11}t}{2} + \sin \frac{\sqrt{11}t}{2}, \\ \left(\frac{3-\sqrt{11}}{5}\right) \cos \frac{\sqrt{11}t}{2} + \left(\frac{3+\sqrt{11}}{5}\right) \sin \frac{\sqrt{11}t}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

biçiminde hesaplanır. (4.8) denkleminin Caputo kesirli analiz yöntemine göre çözümü ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t^{3\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-2)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(2k\alpha + 3(n+1)\alpha)} t^{\alpha(2k+3n)} \\ &\quad + t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-2)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(2k\alpha + 3(n+1)\alpha - 2\alpha)} t^{\alpha(2k+3n)} \\ x_2(t) &= -2t^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k\alpha + 2(n+1)\alpha - \alpha)} t^{\alpha(k+2n)} \\ &\quad + t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k\alpha + 2(n+1)\alpha - \alpha)} t^{\alpha(k+2n)} \\ x_3(t) &= -t^{3\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-2)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(2k\alpha + 3(n+1)\alpha)} t^{\alpha(2k+3n)} \\ &\quad + t^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-2)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(2k\alpha + 3(n+1)\alpha - \alpha)} t^{\alpha(2k+3n)} \\ &\quad + t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-2)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(2k\alpha + 3(n+1)\alpha - 2\alpha)} t^{\alpha(2k+3n)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Buradan Şekil 4.3' te verilen manyetik alan çizgileri elde edilir. **B** ile gösterilen manyetik alanın matrisinin özdeğerlerinden biri reel, diğer ikisi karmaşık sayılardır. Böylece ortaya çıkan manyetik alan çizgileri spiral şeklindedir.

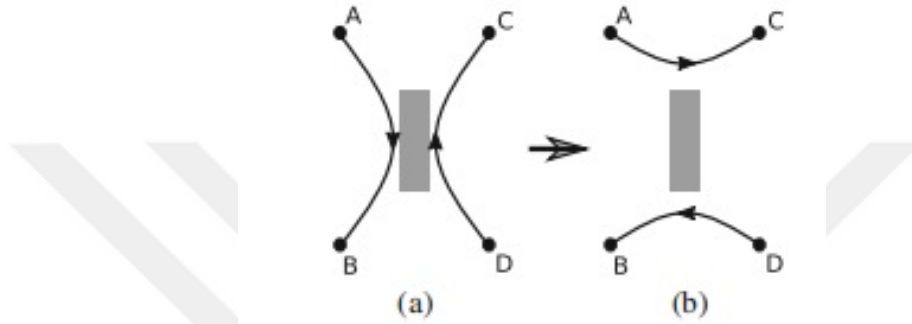


Şekil 4.3. Null nokta yakınında manyetik alan çizgilerinin davranışı $\alpha = 0.87$, $\alpha = 0.9$, $\alpha = 0.97$, $\alpha = 0.99$ değerleri $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 1$ başlangıç değerleri için.

4.1. Null Noktalar Yakınında Manyetik Yeniden Bağlanma

Manyetik yeniden bağlanma, plazma fiziğinin birçok alanında manyetik alanın yeniden yapılandırıldığı temel bir süreçtir. Manyetik alanın genel topolojisi null noktalarda değişir. Bu bölümde manyetik yeniden bağlanma Caputo kesirli analiz yöntemi ile incelenecektir. Yeniden bağlanma, genellikle $X - tip$ noktalar olarak bilinen (bkz. Şekil 4.4) hiperbolik manyetik alanın hiperbolik null noktalarında iki boyutta gerçekleşir. Yeniden bağlanma manyetik alan çizgileri bir plazma akışıyla $X - tip$ noktasına doğru taşınır; null noktasının her iki tarafında taşınan alan çizgileri, alanın ayırıcıları boyunca uzandığı yerde kırılmaya uğrar. Akış daha sonra yeniden bağlanan manyetik alan çizgilerini, son noktalarını artık çiftler halinde karşılıklı olarak bağlanan $X - tip$ noktasından uzağa taşır. Çoğunlukla aşağıdaki fiziksel etkiler manyetik yeniden bağlanmayla üretilir:

- (a) Güneş atmosferinde hızlı parçacıkları hızlandırabilecek güçlü elektrik akımlarının, elektrik alanlarının ve şok dalgalarının oluşması;
- (b) Manyetik enerjinin bir kısmını ısıya dönüştüren akımların omik dağılımı;
- (c) Plazmayı yüksek hızlara çıkaran güçlü Lorenz kuvvetlerinin ortaya çıkışı;
- (d) Hızlı parçacıkların ve ısı akışının yollarını değiştiren manyetik alan çizgilerinin küresel bağlantılarındaki değişiklikler (Pontin ve Priest, 2022).



Şekil 4.4. Aşağıdaki şekilde gölgeli olarak verilen lokalize bir difüzyon bölgesinde (null noktaların olduğu bölge) yeniden bağlanma yoluyla manyetik alan çizgilerinde bir değişiklik meydana gelir; öyle ki, bir alan çizgisi A başlangıçta B ile bağlantılı iken, null noktada kopup yeniden bağlanmanın ardından C'ye bağlanır (Pontin ve Priest, 2022).

Örnek. $\mathbf{B} = x_1 \partial_{x_1} + (px_2 - jx_3) \partial_{x_2} - (p+1)x_3 \partial_{x_3}$ manyetik alanını alalım, buradan $\mathbf{B}$ ile belirtilen manyetik alan çizgisi aşağıdaki diferansiyel denklemin çözümü olarak elde edilebilir:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = x_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = px_2 - jx_3, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t} = -(p+1)x_3. \quad (4.11)$$

(4.11) denkleminin tamsayı çözümü aşağıdaki gibi elde edilen hiperbolik manyetik alanıdır,

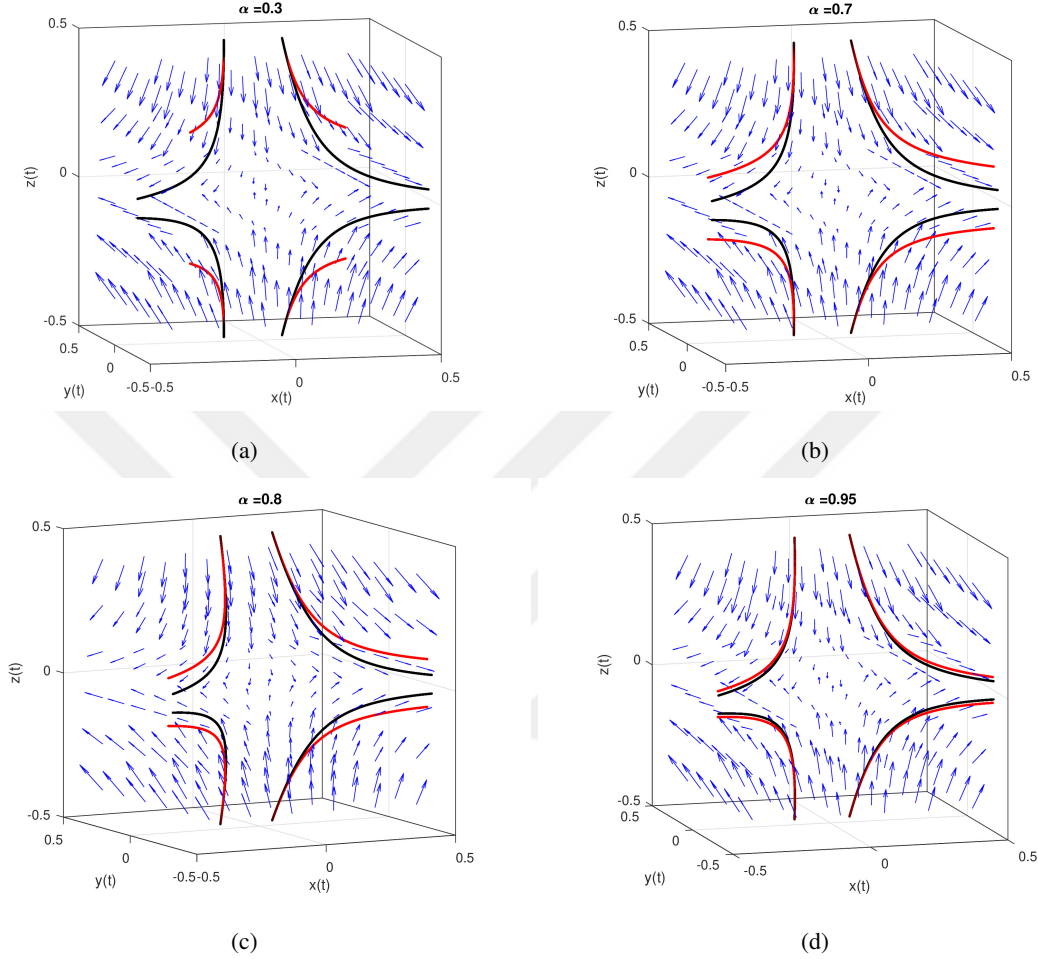
$$X(t) = c_1 e^t \partial_{x_1} + c_2 e^{pt} \partial_{x_2} + c_3 e^{-(p+1)t} \partial_{x_3}. \quad (4.12)$$

(4.11) denklemin Caputo kesirli analize göre çözümü ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha), \\ x_2(t) &= t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(pt^\alpha), \\ x_3(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{p+2} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha) + \frac{p+1}{p+2} E_{\alpha,\alpha}(-(p+1)t^\alpha) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Buradan elde edilen manyetik alan çizgilerinin manyetik yeniden bağlanma hareketinin görüntüsü Şekil 4.5' de görselleştirilmiştir. Burada tamsayı çözümler siyah renkte, Caputo ke-

sirli analiz yöntemiyle elde edilen şekiller ise kırmızı renkte görselleştirilmiştir.



Şekil 4.5. Null nokta yakınında manyetik alan çizgilerinin davranışı (A ya da B-nokta) $\alpha = 0.3, \alpha = 0.7, \alpha = 0.8, \alpha = 0.95$ değerleri, $B_0 = 0.8; L = 3; j = 1; p = 0.7$ parametreleri ve $x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0.1, x_3(0) = 0.5$ başlangıç değerleri için.

4.2. Killing Manyetik Alanında Yüklü Parçacığın Hareketinin Kesirli Hesaplama Yöntemi İle İncelenmesi

3-boyutlu uzayda manyetik alan diverjansı sıfır olan vektör alanıdır. Bir yüklü parçık manyetik alandan etkilendiğinde Lorentz kuvveti olarak adlandırılan bir kuvvet açığa çıkar. Lorentz kuvveti $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \chi(\mathbb{E}^3)$ olmak üzere aşağıdaki gibi kapalı 2-form olarak verilir

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y), \quad (4.14)$$

F ile ilişkili olarak $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{X}(\mathbb{E}^3)$ için manyetik alan vektörü $\mathbf{B}$ üzerindeki Lorentz kuvveti operatörü Φ aşağıdaki formülle verilebilir:

$$\Phi(X) = \mathbf{B} \times X. \quad (4.15)$$

Bir yüklü parçacık Lorentz kuvvetinin etkisiyle manyetik alan içerisinde manyetik eğri adı verilen bir yörünge izler. Kesirli analiz yöntemi kullanılarak manyetik eğrilerin karakterizasyonu aşağıdaki denklemi sağlayacak şekilde verilebilir:

$$\Phi(\mathbf{t}^\alpha) = \mathbf{B} \times \mathbf{t}^\alpha = \nabla_{\mathbf{t}^\alpha} \mathbf{t}^\alpha, \quad (4.16)$$

burada ∇ Levi-Civita konneksiyonu ve $\mathbf{t}^\alpha$ manyetik alanın kesirli hesaplama ile ilgili teğet vektörüdür (Has, Yılmaz;2022).

Bu bölümde kesirli analizi kullanarak paralel Killing vektör alanıyla ilişkili manyetik eğriler belirlenmiştir. Bunun için öncelikle Caputo kesirli hesaplama yöntemini kullanarak üç boyutlu Öklid uzayında Killing vektör alanları belirlenmiştir.

4.2.1. Kesirli Hesaplama Yöntemine Göre Killing Vektör Alanları

$\mathbb{R}^3$ uzayının standart koordinatları (x_1, x_2, x_3) ve bu uzayın metriğini $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ olarak alalım. Bu metriğe göre Killing vektör alanları aşağıdaki gibi verilir:

$$\xi = \xi_1 \partial_{x_1} + \xi_2 \partial_{x_2} + \xi_3 \partial_{x_3} \quad (4.17)$$

ve her $i, j \in \{1, 2, 3\}$ için

$$L_\xi g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) = \sum_{a=1}^3 (\xi^a \frac{\partial^\alpha g_{ij}}{\partial x_a^\alpha} + \frac{\partial_C^\alpha \xi^a}{\partial x_i^\alpha} g_{aj} + \frac{\partial_C^\alpha \xi^a}{\partial x_j^\alpha} g_{ia}) = 0, \quad (4.18)$$

eşitliği sağlar. Burada $\frac{\partial_C^\alpha}{\partial x_i^\alpha}$ Caputo kesirli türev, $0 < \alpha < 1$, $i \in \{1, 2, 3\}$ ve

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

biçimindedir. Sabit fonksiyonun Caputo kesirli türevinin sıfır olduğunu göz önüne alarak (4.18) denkleminin çözümünden aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_C^\alpha \xi^1}{\partial x_1^\alpha} &= 0, \frac{\partial_C^\alpha \xi^2}{\partial x_2^\alpha} = 0, \frac{\partial_C^\alpha \xi^3}{\partial x_3^\alpha} = 0, \\ \frac{\partial_C^\alpha \xi^1}{\partial x_3^\alpha} + \frac{\partial_C^\alpha \xi^3}{\partial x_1^\alpha} &= 0, \frac{\partial_C^\alpha \xi^1}{\partial x_2^\alpha} + \frac{\partial_C^\alpha \xi^2}{\partial x_1^\alpha} = 0, \frac{\partial_C^\alpha \xi^2}{\partial x_3^\alpha} + \frac{\partial_C^\alpha \xi^3}{\partial x_2^\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.19) eşitliklerini kullanılırsa aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$\xi^1 = v_1 x_2 + v_2 x_3 + \delta_1, \xi^2 = -v_1 x_1 + v_3 x_3 + \delta_2, \xi^3 = -v_2 x_1 - v_3 x_2 + \delta_3. \quad (4.20)$$

(4.20) denkleminde elde edilen değerleri (4.17) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\xi = v_1(x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}) + v_2(x_3 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_3}) + v_3(x_3 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_3}) + \delta_1 \partial_{x_1} + \delta_2 \partial_{x_2} + \delta_3 \partial_{x_3}. \quad (4.21)$$

Buradan Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre Killing vektör alanlarının baz vektörlerinin aşağıdaki gibi verilebileceğini söyleyebiliriz:

$$\{\partial_C^\alpha x_1, \partial_C^\alpha x_2, \partial_C^\alpha x_3, -x_2 \partial_C^\alpha x_1 + x_1 \partial_C^\alpha x_2, -x_3 \partial_C^\alpha x_2 + x_2 \partial_C^\alpha x_3, x_3 \partial_C^\alpha x_1 - x_1 \partial_C^\alpha x_3\}. \quad (4.22)$$

Burada elde edilen ilk üç vektör paralel Killing vektör alanını, diğer vektörler ise dönel Killing vektör alanlarını üretir. Killing vektör alanları manyetik alan tanımladığından, bir yüklü parçacığın bir paralel manyetik vektör alanındaki hareketini incelerken genelliği bozmadan $\mathbf{B} = \partial_C^\alpha x_3$ Killing manyetik vektör alanını kullanabiliriz. $\mathbf{B} = \partial_C^\alpha x_3$ manyetik alanını (4.15) eşitliğinde yerine yazarsak aşağıdaki Caputo kesirli diferansiyel denklemlerini elde ederiz:

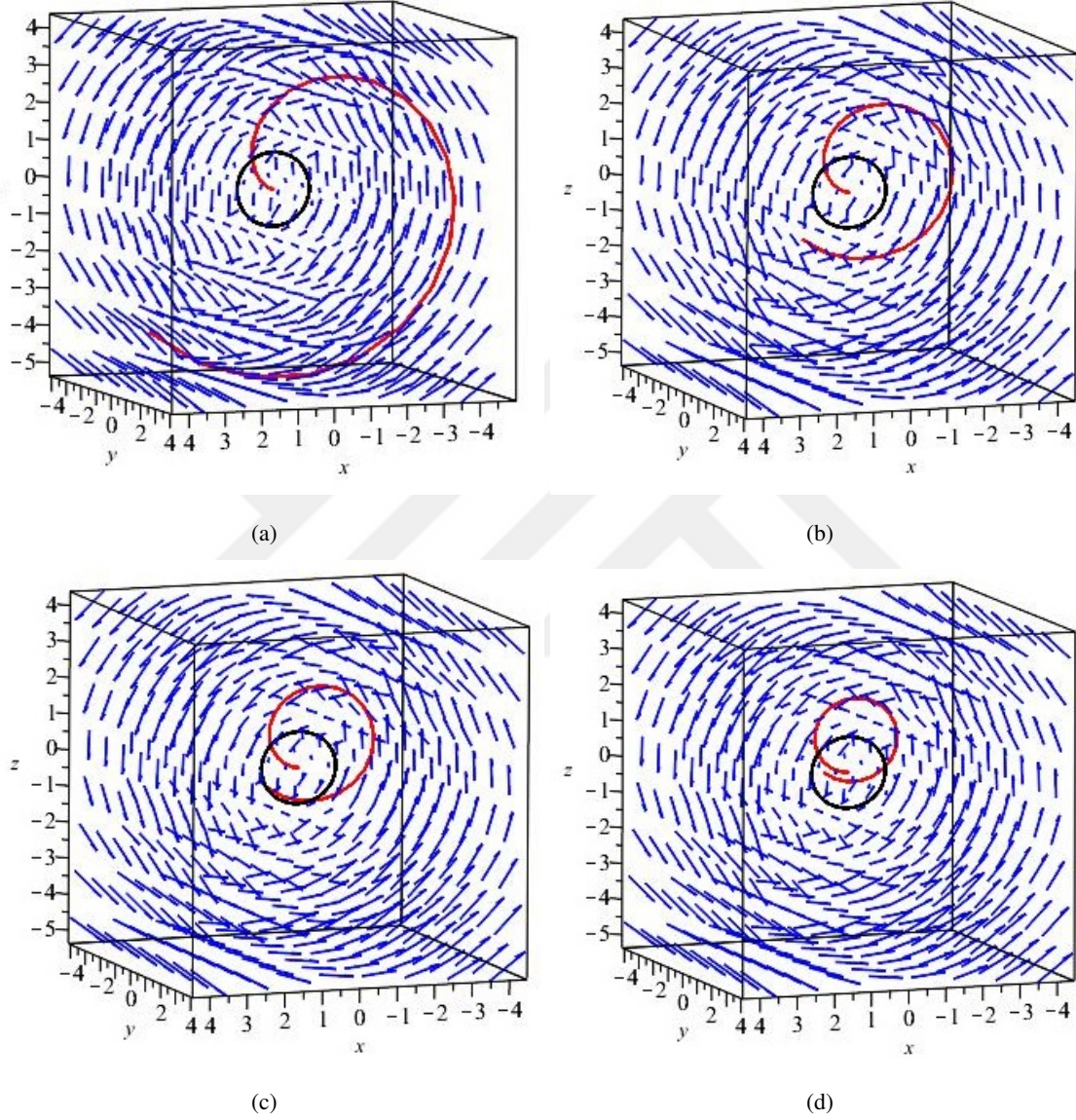
$$\begin{aligned} \frac{d_C^\alpha}{dt^\alpha} \left(\frac{d_C^\alpha x_1(t)}{ds^\alpha} \right) &= \frac{d_C^\alpha x_2(t)}{ds^\alpha} \\ \frac{d_C^\alpha}{dt^\alpha} \left(\frac{d_C^\alpha x_2(t)}{ds^\alpha} \right) &= -\frac{d_C^\alpha x_1(t)}{ds^\alpha} \\ \frac{d_C^\alpha}{dt^\alpha} \left(\frac{d_C^\alpha x_3(t)}{ds^\alpha} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

(4.23) denkleminin Caputo kesirli analize göre çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir:

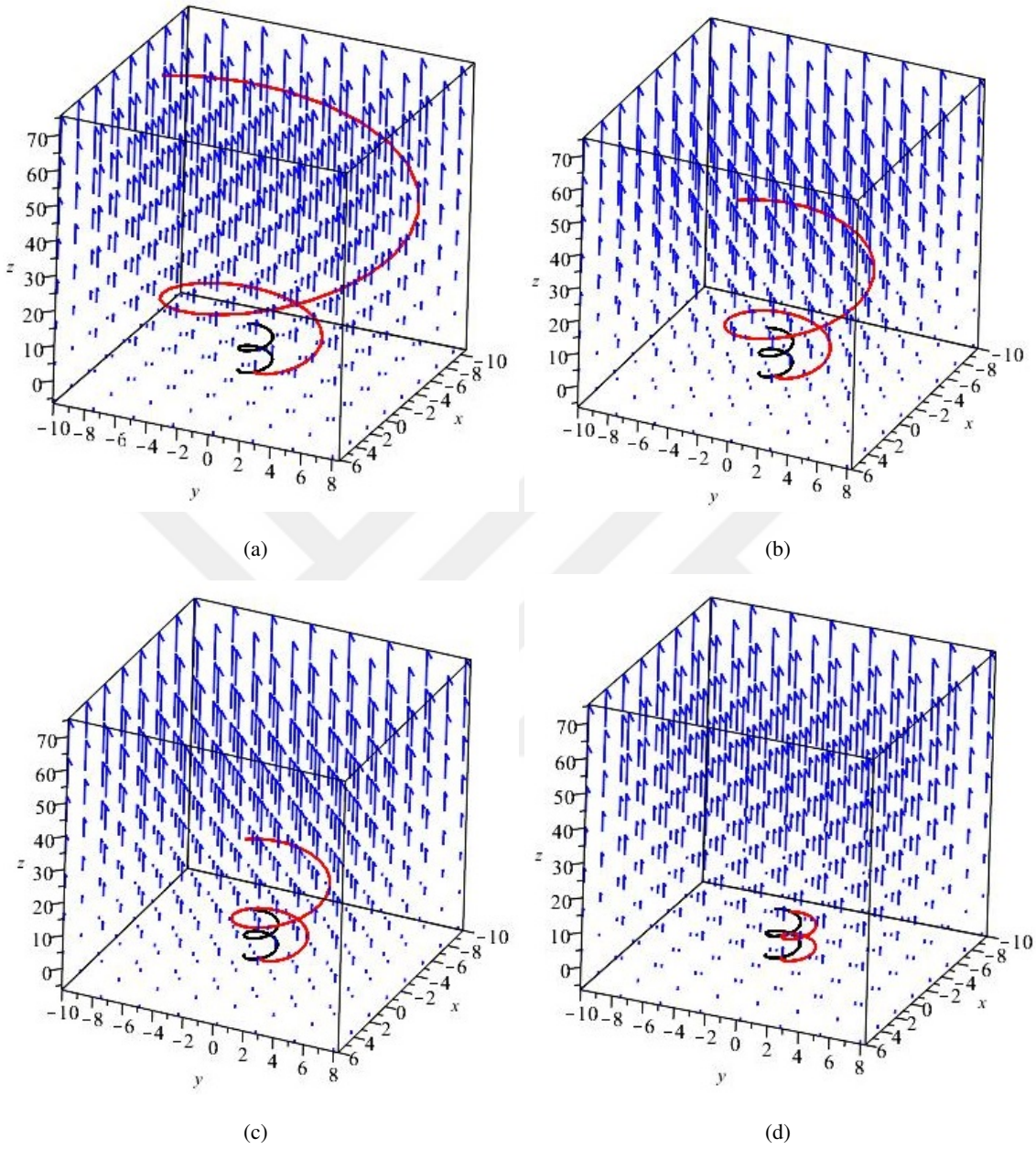
$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int (t^{2\alpha-1} E_{2\alpha, 2\alpha}(-t^{2\alpha}) + t^{\alpha-1} E_{2\alpha, \alpha}(-t^{2\alpha})) \\ x_2(t) &= - \int (t^{2\alpha-1} E_{2\alpha, 2\alpha}(-t^{2\alpha}) + t^{\alpha-1} E_{2\alpha, \alpha}(-t^{2\alpha})) \\ x_3(t) &= \int \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Buradan Caputo kesirli hesaplama ile bir yüklü parçacığın izlediği yörüngeleri Şekil 4.6 ve 4.7'deki gibi elde ederiz. Şekil 4.6'da, parçacık $\mathbf{B} = \partial_{x_3}$ manyetik alanına dik açıyla girdiğinde yüklü parçacığın $\mathbf{B}$ (mavi) manyetik alanındaki davranışı şöyle özetlenebilir: Parçacığın $\alpha = 1$ tamsayı değeri için elde edilen çözümlerde dairesel bir yörünge (siyah), $0 < \alpha < 1$ değerleri için elde edilen çözümlerde ise spiral eğrisi şeklinde bir yörünge (kırmızı) izlediği söylenebilir. Parçacık manyetik alanına dik olmayan sabit bir açıyla girdiğinde izlediği yörüngeler ise Şekil 4.7'de verilmiştir: Parçacık $\alpha = 1$ tamsayı çözümler için spiral helis eğrisi

(kırmızı) şeklinde bir yörünge izlerken, $0 < \alpha < 1$ değerleri için ise helis eğrisi (siyah) şeklinde yörüngeler izlemektedir.



Şekil 4.6. Sırasıyla $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.9$ değerleri için $\mathbf{B} = \partial_{x_3}$ manyetik alanına dik açı ile giren bir yüklü parçacığın izlediği yörüngeler.



Şekil 4.7. Sırasıyla $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.99$ değerleri ve $x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0.1, x_3(0) = 0.5$ değerleri için $\mathbf{B} = \partial_{\mathbf{x}_3}$ manyetik alanına dik olmayan sabit bir açı ile giren bir yüklü parçacığın izlediği yörüngeler.

5. CAPUTO KESİRLİ HESAPLAMA YÖNTEMİ İLE MANYETİK AKI TÜPLERİ

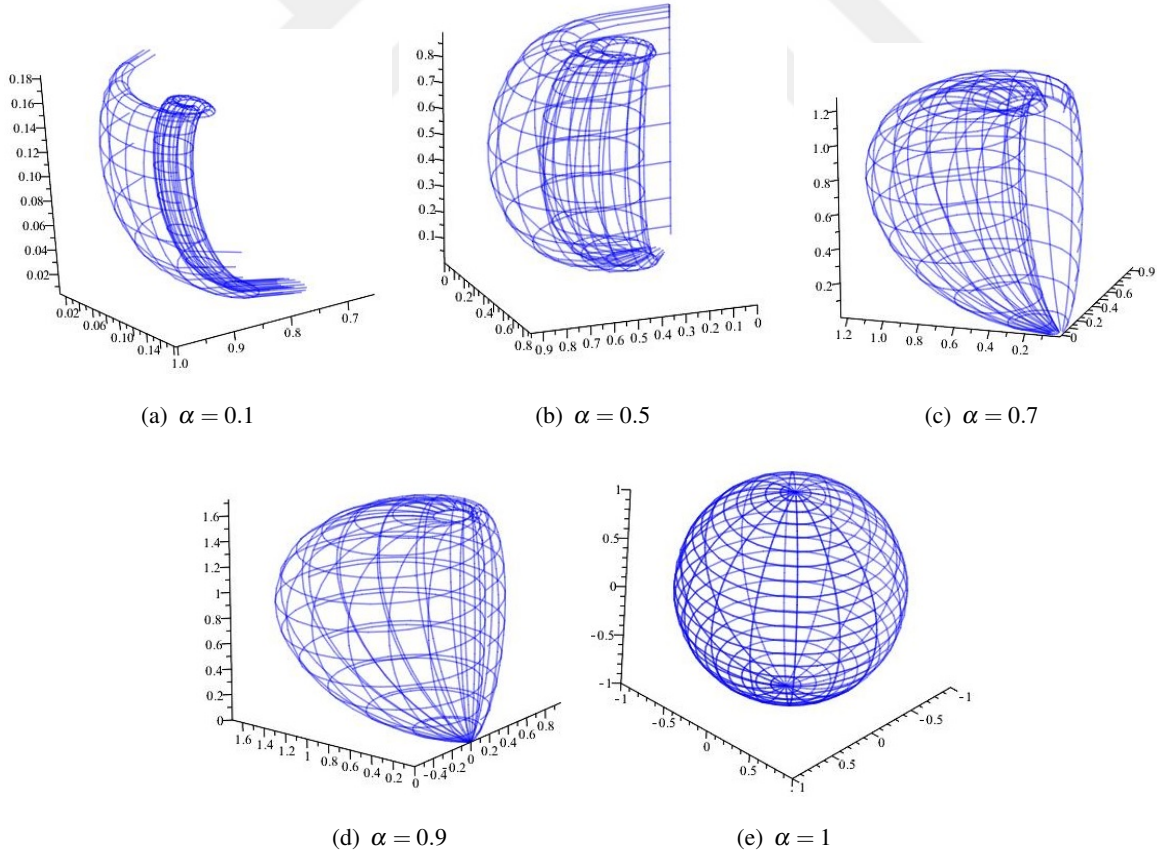
$\mathbb{E}^3$ uzayında olduğu gibi Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre manyetik akı yüzeyini 1-parametrelili küre ailesinin zarfı olarak tanımlayabiliriz ancak burada verilen küre yüzeyi Caputo kesirli hesaplama yöntemiyle elde edilen küre yüzeyidir. Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre küreyi $\mathbb{S}_\alpha^2$ ile göstereceğiz ve denklemi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\mathbb{S}_\alpha^2 = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \left(\int_0^t \int_0^s u^{\alpha-1} \cos(u) v^{\alpha-1} \cos(v) du dv, \right. \quad (5.1)$$

$$\left. \int_0^t \int_0^s u^{\alpha-1} \sin(u) v^{\alpha-1} \cos(v) dv, \right.$$

$$\left. \int_0^t v^{\alpha-1} \sin(v) du dv \right).$$

Bazı α değerleri için spiral küre yüzeylerinin denklemi Şekil 5.1' de verilmiştir.



Şekil 5.1. Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre bazı α değerlerine karşılık gelen spiral küre yüzeyleri.

Bu şekilde tanımlanan manyetik akı yüzeyinin, üretici eğrisi $\mathbf{B}$ manyetik alanının integral

eğrisi olan manyetik alan çizgisi olan $\beta(t)$ eğrisidir. Burada tanımlanan manyetik akı yüzeyi için yarıçap fonksiyonunu $r = r(s, t)$ şeklinde alacağız ve bu şekilde tanımlanan akı tüpüne genelleştirilmiş akı tüpü adını vereceğiz ve bu yüzeyi $F_\alpha(s, t)$ notasyonu ile göstereceğiz. Buradan, akı tüpünün kesit eğrisini oluşturacak olan Caputo kesirli analize göre birim çember aşağıdaki gibi verilebilir

$$\alpha(s) = \left[\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos(u) du, \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin(u) du \right]. \quad (5.2)$$

Bir $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{x_1}, \mathbf{B}_{x_2}, \mathbf{B}_{x_3})$ manyetik alanının integral eğrisi olan manyetik alan çizgisi yani

$$\frac{d_C^\alpha x_1}{dt^\alpha} = \mathbf{B}_{x_1}, \quad \frac{d_C^\alpha x_2}{dt^\alpha} = \mathbf{B}_{x_2}, \quad \frac{d_C^\alpha x_3}{dt^\alpha} = \mathbf{B}_{x_3}. \quad (5.3)$$

denkleminin çözüm eğrisinin parametrik denklemi aşağıdaki gibi verilsin;

$$\beta(t) = [\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)], \quad (5.4)$$

$\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha\}$ kesirli hesaplama ile ilgili Frenet çatı elemanları olsun. Bu durumda akı yüzeyinin denklemi aşağıdaki gibidir:

$$F_\alpha(s, t) = \beta(t) + r_1(s, t)\mathbf{t}_\alpha + r_2(s, t) \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \left[\int_0^s u^{\alpha-1} \cos(u) du \right] \mathbf{n}_\alpha + \int_0^s u^{\alpha-1} \sin(u) du \right) \mathbf{b}_\alpha \quad (5.5)$$

burada $r_1(s, t) = r(s, t) \frac{d_C^\alpha r(s, t)}{ds}$ ve $r_2(s, t) = \pm r(s, t) \sqrt{1 + \left(\frac{d_C^\alpha r(s, t)}{ds} \right)^2}$ eşitliklerini sağlar.

5.1. Teorem: Caputo kesirli hesaba göre $F_\alpha(s, t)$ akı tüpüne $\mathbb{S}_\alpha^2$ küre yüzeyinin büyük çemberler (spiralleri) teğettir ve herhangi bir zaman parametresi t anında çember üzerindeki herbir nokta tüp yüzeyi boyunca $\beta(t)$ ile verilen manyetik alan çizgilerini oluştursun. Bu durumda Frenet çatı elemanları cinsinden Caputo kesirli analiz yöntemine göre manyetik alan çizgisinin bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{x_1} &= -\left(1 + \frac{d_C^\alpha r_1}{dt^\alpha} - \kappa_\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos(udu) \kappa\right) \mathbf{t}_{1\alpha}^c \\ &\quad + \left(\frac{d_C^\alpha r_2}{dt^\alpha} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos(udu) + r_1 \kappa_\alpha - r_2 \tau_\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin(udu)\right) \mathbf{t}_{2\alpha}^c, \\ \mathbf{B}_{x_2} &= -\left(1 + \frac{d_C^\alpha r_1}{dt^\alpha} - \kappa_\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos(udu) \kappa\right) \frac{\mathbf{t}_{2\alpha}^c}{\kappa^c} \\ &\quad + \left(\frac{d_C^\alpha r_2}{dt^\alpha} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos(udu) + r_1 \kappa_\alpha - r_2 \tau_\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin(udu)\right) \frac{\mathbf{t}_{1\alpha}^c}{\kappa^c}, \\ \mathbf{B}_{x_3} &= \frac{\left(\frac{d_C^\alpha r_2}{dt^\alpha} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin(udu) + r_2 \tau_\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos(udu)\right) (t_{1\alpha}^c \frac{d_C^\alpha \mathbf{t}_{2\alpha}^c}{ds^\alpha} - t_{2\alpha}^c \frac{d_C^\alpha \mathbf{t}_{1\alpha}^c}{ds^\alpha})}{\kappa^c}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

İspat. $\alpha(s) = [\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du, \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du]$ kesirli analize göre birim çemberi gösterir. Bu durumda $F_\alpha(s, t)$ akı tüpüne $\mathbb{S}_\alpha^2$ küre yüzeyinin büyük çemberler (spiralleri) teğettir ve çember üzerindeki herbir nokta tüp yüzeyi boyunca $\beta(t) = [\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)]$ ile verilen manyetik alan çizgilerini oluştursun. β eğrisi üzerindeki kesirli Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha\}$ şeklinde gösterilsin. $\{\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha\}$ Frenet çatı vektörlerini kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\chi(s, 0) = (\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du) \mathbf{n}_\alpha + (\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du) \mathbf{b}_\alpha. \quad (5.7)$$

Denklem (5.5) ve α eğrisinin $\{\mathbf{t}_\alpha^c, \mathbf{n}_\alpha^c, \mathbf{b}_\alpha^c, \kappa_\alpha^c, \tau_\alpha^c\}$ şeklinde verilen Frenet çatı elemanlarını kullanarak aşağıdaki denklemini yazabiliriz:

$$\frac{\partial_C^\alpha F_\alpha(s, t)}{\partial t^\alpha} = \mathbf{B}_{x_1} \mathbf{t}_\alpha^c + \mathbf{B}_{x_2} \mathbf{n}_\alpha^c + \mathbf{B}_{x_3} \mathbf{b}_\alpha^c. \quad (5.8)$$

Böylece manyetik alan bileşenleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{x_1} &= g\left(\frac{\partial_C^\alpha F_\alpha(s, t)}{\partial t^\alpha}, \mathbf{t}_\alpha^c\right), \\ \mathbf{B}_{x_2} &= g\left(\frac{\partial_C^\alpha F_\alpha(s, t)}{\partial t^\alpha}, \mathbf{n}_\alpha^c\right), \\ \mathbf{B}_{x_3} &= g\left(\frac{\partial_C^\alpha F_\alpha(s, t)}{\partial t^\alpha}, \mathbf{b}_\alpha^c\right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Buradan s parametresine göre kesirli türev aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_C^\alpha F_\alpha(s, t)}{\partial s^\alpha} &= \frac{\partial_C^\alpha r_1}{\partial s^\alpha} \mathbf{t}_\alpha + \left(\frac{\partial_C^\alpha r_2}{\partial s^\alpha} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du + r_2 \mathbf{t}_{1\alpha}^c\right) \mathbf{n}_\alpha \\ &+ \left(\frac{\partial_C^\alpha r_2}{\partial s^\alpha} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du + r_2 \mathbf{t}_{2\alpha}^c\right) \mathbf{b}_\alpha. \end{aligned} \quad (5.10)$$

t parametresine göre türev ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_C^\alpha F_\alpha(s, t)}{\partial t^\alpha} &= \left(1 + \frac{\partial_C^\alpha r_1}{\partial t^\alpha} t_\alpha - \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du \kappa_\alpha\right) t_\alpha \\ &+ \left(\frac{\partial_C^\alpha r_2}{\partial t^\alpha} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du + r_1 \kappa_\alpha - r_2 \tau_\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du\right) n_\alpha \\ &+ \left(\frac{\partial_C^\alpha r_2}{\partial t^\alpha} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du + \tau_\alpha r_2 \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du\right) b_\alpha. \end{aligned} \quad (5.11)$$

α ve β eğrilerinin Frenet çatı elemanlarını birbirleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha^c &= t_{1\alpha}^c \mathbf{t}_\alpha + t_{2\alpha}^c \mathbf{n}_\alpha, \\ \mathbf{n}_\alpha^c &= \frac{\frac{d_C^\alpha t_{1\alpha}^c}{ds^\alpha} \mathbf{t}_\alpha + \frac{d_C^\alpha t_{2\alpha}^c}{ds^\alpha} \mathbf{n}_\alpha}{\kappa_\alpha^c}, \\ \mathbf{b}_\alpha^c &= \frac{(t_{1\alpha}^c \frac{d_C^\alpha t_{2\alpha}^c}{ds^\alpha} - t_{2\alpha}^c \frac{d_C^\alpha t_{1\alpha}^c}{ds^\alpha}) \mathbf{b}_\alpha}{\kappa_\alpha^c}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

(5.9) ve (5.12) denklemlerini göz önüne alarak manyetik alan çizgilerinin bileşenlerini aşağıdaki gibi hesaplarız:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{x_1} &= -(1 + \frac{\partial_C^\alpha r_1}{\partial \mathbf{t}^\alpha} - \kappa_\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du \kappa) \mathbf{t}_{1\alpha}^c \\ &\quad + (\frac{\partial_C^\alpha r_2}{\partial \mathbf{t}^\alpha} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du + r_1 \kappa_\alpha - r_2 \tau_\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du) \mathbf{t}_{2\alpha}^c, \\ \mathbf{B}_{x_2} &= -(1 + \frac{\partial_C^\alpha r_1}{\partial \mathbf{t}^\alpha} - \kappa_\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du \kappa) \frac{\mathbf{t}_{2\alpha}^c}{\kappa^c} \\ &\quad + (\frac{\partial_C^\alpha r_2}{\partial \mathbf{t}^\alpha} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du + r_1 \kappa_\alpha - r_2 \tau_\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du) \frac{\mathbf{t}_{1\alpha}^c}{\kappa^c}, \\ \mathbf{B}_{x_3} &= \frac{(\frac{\partial_C^\alpha r_2}{\partial \mathbf{t}^\alpha} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du + r_2 \tau_\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du) (\mathbf{t}_{1\alpha}^c \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{t}_{2\alpha}^c}{ds^\alpha} - \mathbf{t}_{2\alpha}^c \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{t}_{1\alpha}^c}{ds^\alpha})}{\kappa^c}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.1. Manyetik Alan Bileşenleri Boyunca Manyetik Akı Tüpünün Yapısı

Bu bölümde $\{\mathbf{B}_{x_1}, \mathbf{B}_{x_2}, \mathbf{B}_{x_3}\}$ manyetik vektör alanlarını kullanarak manyetik akı tüp yüzeyini elde edebiliriz. $F_\alpha(s, t)$ yüzeyinin s ve t parametreleri boyunca kesirli türevi sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\frac{\partial_C^\alpha}{\partial s^\alpha} F_\alpha(s, t) = r t_\alpha^c = Ar, \quad \frac{\partial_C^\alpha}{\partial t^\alpha} F_\alpha(s, t) = \mathbf{B}(s, t) = \mathbf{AB}, \quad (5.14)$$

burada r genişleme katsayısı ve verilen bir eğrinin kesirli Frenet çatısı genel olarak $A=[\text{teğet, normal, binormal}]$ şeklinde verilsin öyle ki $A^T A = A A^T = I_3$ eşitliği sağlansın. Bu durumda, $F_\alpha(s, t)$ yüzeyi sürekli bir yüzey olduğundan aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\frac{\partial_C^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial_C^\alpha}{\partial s^\alpha} F_\alpha(s, t) \right) = \frac{\partial_C^\alpha}{\partial s^\alpha} \left(\frac{\partial_C^\alpha}{\partial t^\alpha} F_\alpha(s, t) \right), \quad (5.15)$$

burada

$$\frac{\partial_C^\alpha}{\partial t^\alpha} (Ar) = \frac{\partial_C^\alpha}{\partial s^\alpha} (\mathbf{AB}) \quad (5.16)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$r \frac{\partial_C^\alpha A}{\partial t^\alpha} + A \frac{\partial_C^\alpha r}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial_C^\alpha A}{\partial s^\alpha} \mathbf{B} + A \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}}{\partial s^\alpha}. \quad (5.17)$$

Diğer taraftan U, W antisimetrik matrisler olmak üzere $\frac{\partial_C^\alpha A}{\partial s^\alpha} = AU$, $\frac{\partial_C^\alpha A}{\partial t^\alpha} = AW$ eşitliği gerçektir ve buradan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$rAU + A \frac{\partial_C^\alpha r}{\partial t^\alpha} = AW\mathbf{B} + A \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}}{\partial s^\alpha}. \quad (5.18)$$

Her iki taraf A^T ile çarpılırsa aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$rU + \frac{\partial_C^\alpha r}{\partial t^\alpha} = W\mathbf{B} + \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}}{\partial s^\alpha}. \quad (5.19)$$

Kesit eğrisi $\alpha(s)$ eğrisi olduğundan $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = \kappa_\alpha^c$ olarak alabiliriz. Bu nedenle bileşenler cinsinden aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_1}}{\partial s^\alpha} &= \kappa_\alpha^c \mathbf{B}_{x_2} + rw_2, \\ \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_2}}{\partial s^\alpha} &= -\kappa_\alpha^c \mathbf{B}_{x_1} - rw_1, \\ \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_3}}{\partial s^\alpha} &= \frac{\partial_C^\alpha r}{\partial t^\alpha}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

şeklindedir. Ayrıca $A^T A = AA^T = I_3$ ve

$$\frac{\partial_C^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial_C^\alpha}{\partial s^\alpha} A \right) = \frac{\partial_C^\alpha}{\partial s^\alpha} \left(\frac{\partial_C^\alpha}{\partial t^\alpha} A \right), \quad (5.21)$$

eşitliği kullanılırsa, bileşenler cinsinden aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_C^\alpha w_1}{\partial s^\alpha} &= \kappa_\alpha^c w_2, \\ \frac{\partial_C^\alpha w_2}{\partial s^\alpha} &= -\kappa_\alpha^c w_1, \\ \frac{\partial_C^\alpha w_3}{\partial s^\alpha} &= \frac{\partial_C^\alpha \kappa_\alpha^c}{\partial t^\alpha} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

5.1.1. Teorem: $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{x_1}, \mathbf{B}_{x_2}, \mathbf{B}_{x_3})$ manyetik vektör alan bileşenleri olmak üzere, $F_\alpha(s, t)$ akı tüpü ile ilgili manyetik alanın bileşenleri aşağıdaki gibi verilen Caputo kesirli diferansiyel

denklemini sağlar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_1}}{\partial s^\alpha} &= \kappa_\alpha^c \mathbf{B}_{x_2} + r w_2, \\ \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_2}}{\partial s^\alpha} &= -\kappa_\alpha^c \mathbf{B}_{x_1} - r w_1, \\ \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_3}}{\partial s^\alpha} &= \frac{\partial_C^\alpha r}{\partial t^\alpha}.\end{aligned}\tag{5.23}$$

burada w_i , $i = \{1, 2, 3\}$ 'dir ve $\frac{\partial_C^\alpha w_1}{\partial s^\alpha} = \kappa_\alpha^c w_2$, $\frac{\partial_C^\alpha w_2}{\partial s^\alpha} = -\kappa_\alpha^c w_1$, $\frac{\partial_C^\alpha w_3}{\partial s^\alpha} = \frac{\partial_C^\alpha \kappa_\alpha^c}{\partial t^\alpha}$ eşitliklerini sağlayacak şekilde elde edilir.

5.1.2. Teorem: $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{x_1}, \mathbf{B}_{x_2}, \mathbf{B}_{x_3})$ manyetik vektör alanının bileşenleri (5.23) eşitliklerini sağlayacak şekilde verilsin. Bu durumda $F_\alpha(s, t)$ akı tüpü $\frac{\partial_C^\alpha F_\alpha(s, t)}{\partial t^\alpha} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ denklemin integrali alınarak elde edilebilir.

Bilinen bir manyetik alan çizgisi ile akı yüzeyinin oluşturulmasında kullanılan bu yöntemi açıklamak için silindir ve tor yüzeyini ürettiğimiz bazı örneklerle yer verilmiştir.

5.2. Manyetik Akı Tüp Yüzeylerinin Sınıflandırılması

Manyetik alanın null noktaları yakınındaki manyetik alan çizgilerinin davranışına göre, null noktalarının yakınındaki akı tüpü farklı karakterizasyonlara sahiptir. Bu bölümde kesirli türev hesaplamasını dikkate alarak null noktaları etrafındaki akı tüpünün şeklini tahmin edebiliriz. $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{x_1}, \mathbf{B}_{x_2}, \mathbf{B}_{x_3})$ manyetik alanının matris formu

$$A_\alpha^B = \begin{bmatrix} \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_1}}{\partial x_1^\alpha} & \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_1}}{\partial x_2^\alpha} & \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_1}}{\partial x_3^\alpha} \\ \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_2}}{\partial x_1^\alpha} & \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_2}}{\partial x_2^\alpha} & \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_2}}{\partial x_3^\alpha} \\ \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_3}}{\partial x_1^\alpha} & \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_3}}{\partial x_2^\alpha} & \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_3}}{\partial x_3^\alpha} \end{bmatrix}, \tag{5.24}$$

olmak üzere $\mathbf{B}$ Gauss yasasını sağladığından $\frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_1}}{\partial x_1^\alpha} + \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_2}}{\partial x_2^\alpha} + \frac{\partial_C^\alpha \mathbf{B}_{x_3}}{\partial x_3^\alpha} = 0$ eşitliği sağlanır. A_α^B matrisi $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ şeklinde üç özdeğerine sahiptir ve dolayısıyla $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ sağlanır. Bu özdeğerler aracılığıyla manyetik akı tüpleri ile ilgili aşağıdaki karakterizasyonlar elde edilir:

1. Eğer $\lambda_1 = 0$ ise, $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ olmalıdır. Buradan aşağıdaki durumlar elde edilir:

a) Eğer λ_2 ve λ_3 reel sayılar ise, bu durumda $\mathbf{B}$ manyetik alanı ile ilgili manyetik alan çizgilerine karşılık gelen β eğrisi bir hiperboldür ve böylelikle $F_\alpha(s, t)$ yüzeyi hiperbolik akı tüpü olarak bulunur.

b) Eğer λ_2 ve λ_3 kompleks sayılar ise β eğrisi $0 < \alpha < 1$ değerleri için spiral ve $\alpha = 1$ değeri için dairesel manyetik alan çizgisidir. Dolayısıyla $0 < \alpha < 1$ için $F_\alpha(s, t)$ spiral manyetik akı tüpü, $\alpha = 1$ için ise tor akı tüpü elde edilir.

2. Eğer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sıfırdan farklı reel sayılar ise β eğrisi bir hiperbol ve $F_\alpha(s, t)$ yüzeyi ise hiperbolik akı tüpüdür.

3. Eğer λ_1 reel sayı, λ_2 ve λ_3 kompleks sayılar ise β eğrisi spiral eğrisidir. Dolayısıyla $F_\alpha(s, t)$ yüzeyi ise spiral manyetik tüpüdür.

5.3. Manyetik Akı Tüpündeki Yüklü Nokta Parçacık Yörüngelerinin Kesirli Hesap-lama Yöntemine Göre İncelenmesi

Bir yüklü parçacığın $F_\alpha(s, t)$ yüzeyi içindeki hareketi, yüzeylerin gelişiminde önemli bir faktör olan genişleme faktörü r değerine göre aşağıdaki şekilde sınıflandırılabilir.

i) Eğer genişleme katsayısı r sabit bir reel sayı ise aşağıdaki durumları elde ederiz:

a) β eğrisi bir doğru ise $0 < \alpha < 1$ değer aralığında parçacık spiral-helis şeklinde bir yörünge izler, $\alpha = 1$ değerinde ise parçacık dik dairesel helis eğrisi şeklinde bir yörünge izler. Ayrıca bu durumda, parçacığın manyetik alana giriş yaptığı açı, hareketin hızı, helisin yarıçapı ve adımı sabittir.

b) β eğrisi bir uzay eğrisi ise, $0 < \alpha < 1$ değer aralığında parçacığın yörüngesi spiral-helis eğrisi, $\alpha = 1$ değerinde ise yörünge dik dairesel helis eğrisi şeklindedir. Ayrıca yüklü parçacık $F_\alpha(s, t)$ yüzeyi içerisinde dönüş (drift) hareketi yapar.

ii) Genişleme katsayısı $r = r(t)$ ise aşağıdaki durumları elde ederiz:

a) β bir doğru iken, $0 < \alpha < 1$ değer aralığında yörünge spiral helis eğrisi şeklindedir, $\alpha = 1$ değerinde ise yörünge dik dairesel helis şeklindedir. Bu durumda kesit eğrisinin çapı değiştiğinden, parçacığın hareket hızı değişkendir, yani çap küçüldüğünde parçacık hızlanır, çap büyüdüğünde parçacık yavaşlar, helislerin adımı ise hızıyla doğru orantılı olarak değişir.

b) β bir uzay eğrisi iken, $0 < \alpha < 1$ değer aralığında yörünge spiral helis ve yüklü parçacık akı tüpü içerisinde dönüş (drift) hareketi yapar, $\alpha = 1$ değerinde ise yörünge dairesel helistir. Bu durumda da kesit eğrisinin çapı değiştiğinden, parçacığın hareket hızı değişkendir, yani çap küçüldüğünde parçacık hızlanır, çap büyüdüğünde parçacık yavaşlar, helislerin adımı ise hızıyla doğru orantılı olarak değişir, ayrıca dönüş hareketi yaptığından dolayı da yörüngenin hızı ve adımı da değişir.

iii) Genişleme katsayısı $r(s)$ ise aşağıdaki durumları elde ederiz:

a) β bir doğru iken, $0 < \alpha < 1$ değer aralığında başlangıç durumunda yörünge spiral helis şeklindedir, $\alpha = 1$ değerinde ise yörünge dairesel helis şeklindedir. Ancak, birinci ve ikinci durumların aksine bu durumda kesit eğrisi deformasyona uğrar, dolayısıyla parçacığın hareketinin hızı, helisel yörünge'nin yarıçapı ve adımı değişkendir.

b) β bir uzay eğrisi iken, $0 < \alpha < 1$ değer aralığında yörünge spiral-helis ve yüklü parçacık akı tüpü içerisinde dönüş (drift) hareketi yapar, $\alpha = 1$ değerinde ise yörünge dairesel helistir. Bu durumda da kesit eğrisinin deformasyona uğradığından, parçacığın hareket hızı değişkendir, yani çap küçüldüğünde parçacık hızlanır, çap büyüdüğünde parçacık yavaşlar, adımda hızıyla doğru orantılı olarak değişir, ayrıca dönüş hareketi yaptığından dolayı da yörünge'nin hızı ve adımı değişir.

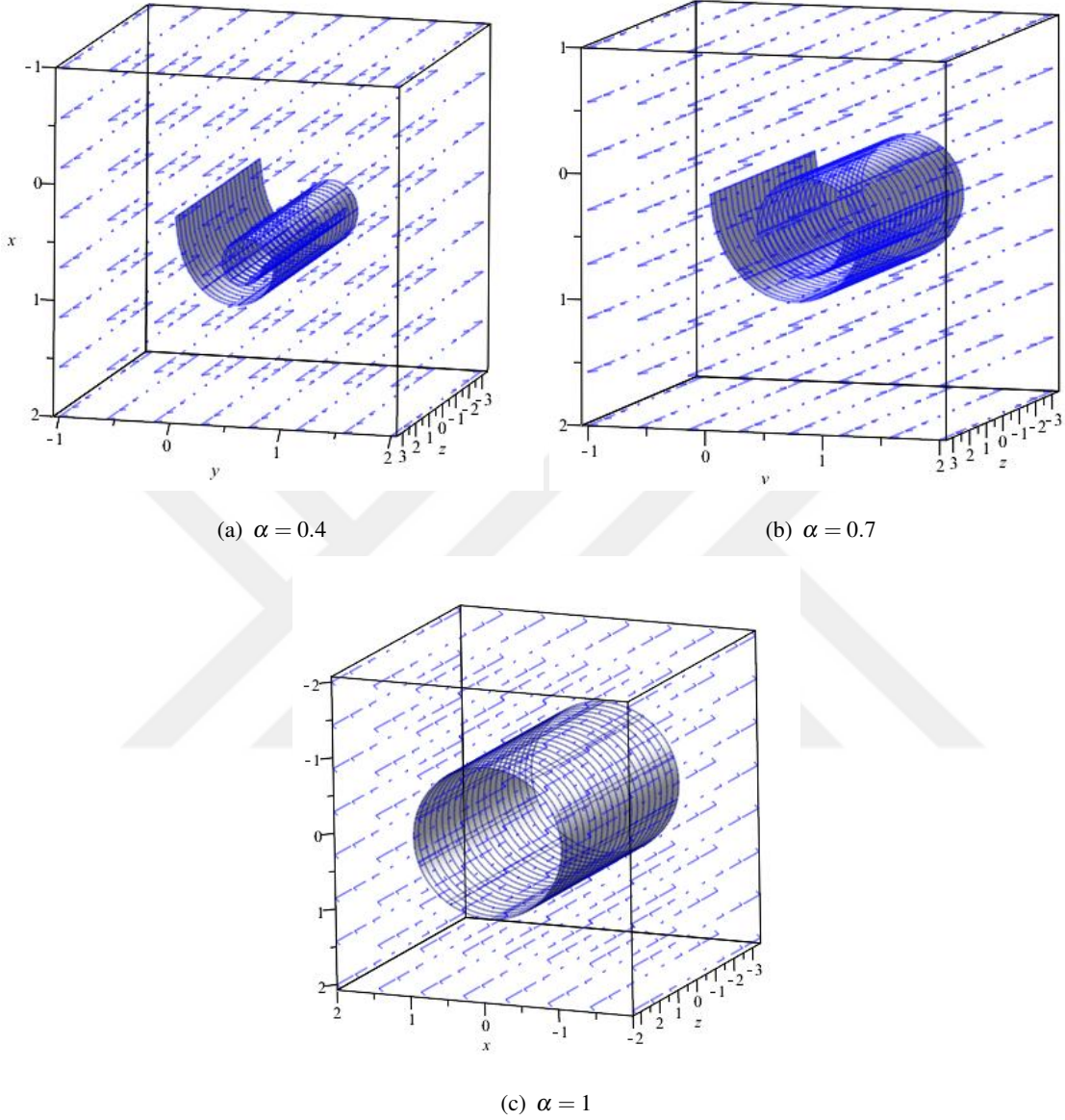
Örnek. Kesit eğrisini aşağıdaki gibi alalım:

$$\begin{aligned} x_1(s) &= \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du, \\ x_2(s) &= \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du \end{aligned} \quad (5.25)$$

ve paralel Killing vektörü $\mathbf{B} = \partial_{x_2}$ olmak üzere, akı tüp yüzeyi denklemini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_C^\alpha F_\alpha(s,t)}{\partial t^\alpha} &= \int_0^t \mathbf{B} dt + \alpha(s) \\ &= \left[\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du, \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Bu yüzey kesirli silindir yüzeyidir (bknz. Şekil 5.2), yani eğer $0 < \alpha < 1$ ise kesit eğrisi α spiral ve eğer $\alpha = 1$ ise α eğrisi çember eğrisidir.



Şekil 5.2. $B = \partial_{x_3}$ Paralel Killing manyetik alanı boyunca bazı α değerleri için silindirik manyetik akı tüpü .

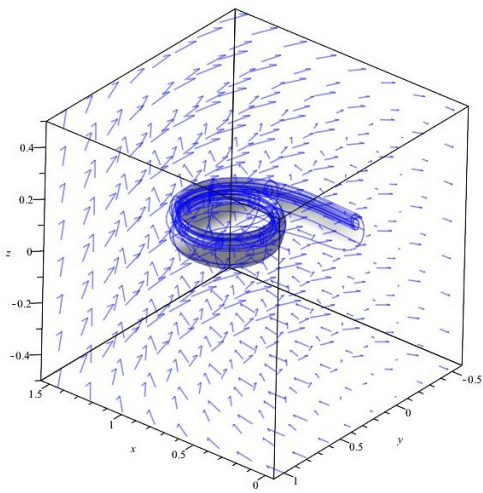
Örnek. $\alpha(s) = [\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du, 0, \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du]$ eğrisi boyunca $\mathbf{B} = x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}$ manyetik alanına göre tor yüzeyini oluşturalım. Aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\mathbf{B}_{x_1}(s) = 0, \mathbf{B}_{x_2}(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du, \mathbf{B}_{x_3}(s) = 0. \quad (5.27)$$

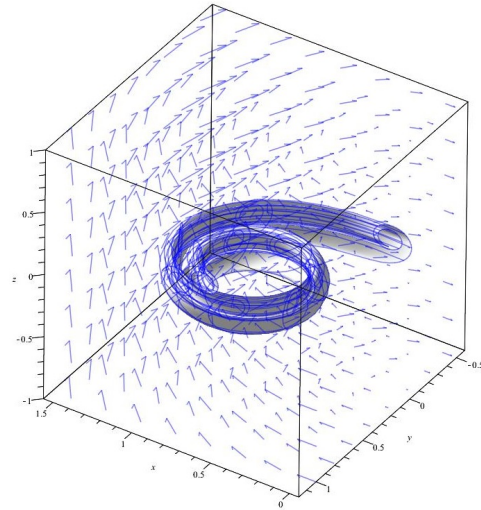
Ardından gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du, \\ w_2 &= -\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du, \\ w_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

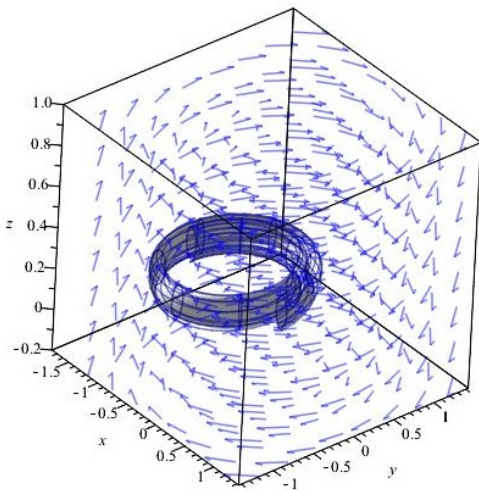
elde edilir. Sonuç olarak $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} F_\alpha(s,t) = AB$ integrasyonu yardımıyla tor yüzeyinin elde edilmesi tamamlanır. Şekil 5.3(a)-(d)'de kesirli hesaplama yöntemi ile tor yüzeyi görselleştirilmiştir.



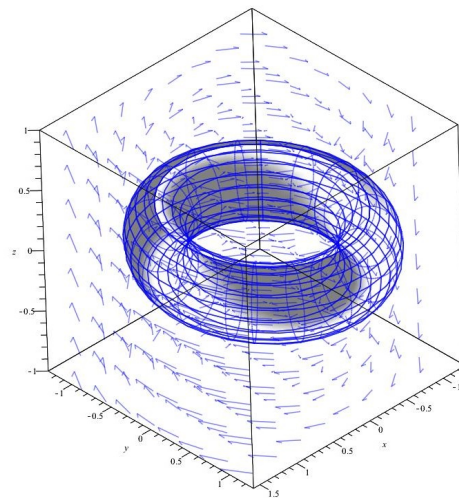
(a) $r = 1, \alpha = 0.3$



(b) $r = 1, \alpha = 0.6$



(c) $r = 1, \alpha = 0.9$



(d) $r = 1, \alpha = 1$

Şekil 5.3. Bazı α değerleri için manyetik alanının null noktaları yakınındaki toroidal manyetik akı tüpleri.

Örnek. Üç boyutlu uzayda, $\mathbf{B} = -x_2 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2}$ dairesel Killing manyetik vektör alanını ele alalım. Bu durumda $\mathbf{B}$ manyetik alanı ile ilgili manyetik alan çizgilerinin denklemini aşağıdaki Caputo kesirli türevi ile verilen denklemin çözümü olarak elde edebiliriz:

$$\frac{\partial_C^\alpha x_1}{\partial t^\alpha} = -x_2, \quad \frac{\partial_C^\alpha x_2}{\partial t^\alpha} = x_1, \quad \frac{\partial_C^\alpha x_3}{\partial t^\alpha} = 0. \quad (5.29)$$

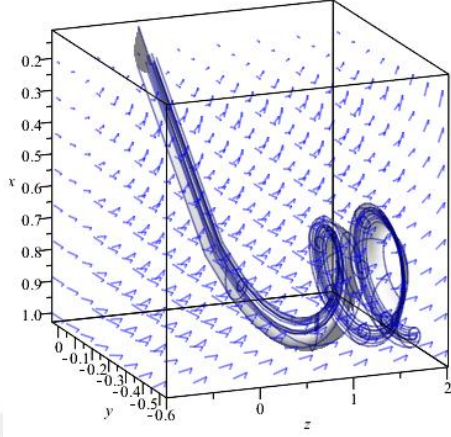
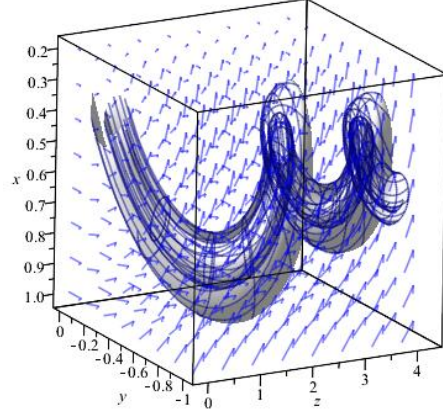
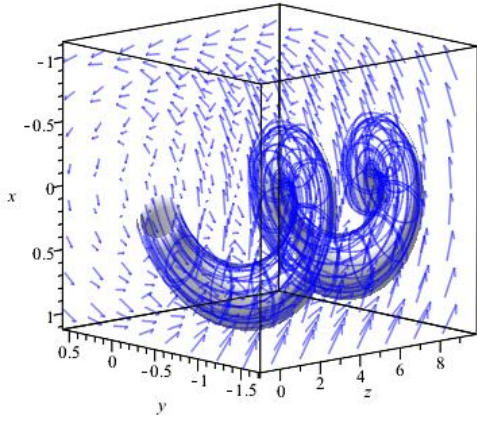
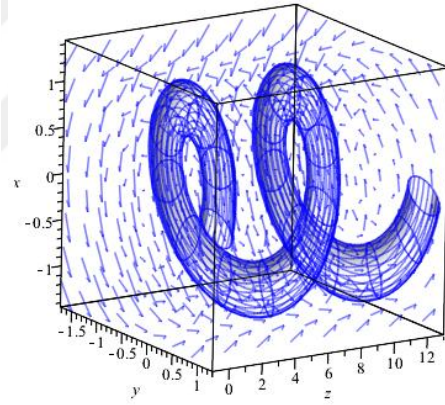
(5.29) denkleminin Caputo kesirli hesaba göre çözümü aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -t^{2\alpha-1} E_{2\alpha, 2\alpha}(-t^{2\alpha}) + t^{\alpha-1} E_{2\alpha, \alpha}(-t^{2\alpha}), \\ x_2(t) &= t^{2\alpha-1} E_{2\alpha, 2\alpha}(-t^{2\alpha}) + t^{\alpha-1} E_{2\alpha, \alpha}(-t^{2\alpha}), \\ x_3(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

burada $0 < \alpha \leq 1$ ve $E_{i,j}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(ik+j)}$, $i, j > 0, x \in \mathbb{C}$ şeklinde tanımlıdır. Dolayısıyla manyetik alan çizgilerinin denklemini $\beta(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$ biçiminde elde edilir. Böylelikle, $F_\alpha(s, t)$ manyetik akı tüpünün denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} F_\alpha(s, t) &= \beta(t) + r_1(s, t) \mathbf{t}_\alpha \\ &+ r_2(s, t) \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \cos u du \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \int_0^s u^{\alpha-1} \sin u du \mathbf{b}_\alpha \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

$\beta(t)$ eğrisini Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre çember eğrisi olarak alırsak elde edilen yüzeyler Şekil 5.3'deki yüzeylerdir. Eğer $\beta(t)$ eğrisini Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre helis eğrisi olarak alırsak, bu durumda da Şekil 5.4'deki yüzeyler elde edilir.

(a) $r_1 = r_2 = 1, \alpha = 0.1$ (b) $r_1 = r_2 = 1, \alpha = 0.5$ (c) $r_1 = r_2 = 1, \alpha = 0.9$ (d) $r_1 = r_2 = 1, \alpha = 1$

Şekil 5.4. Null noktalar etrafında $\mathbf{B} = \partial_{x_3}$ manyetik alanına göre bazı α değerleri için helisel manyetik akı tüpleri.

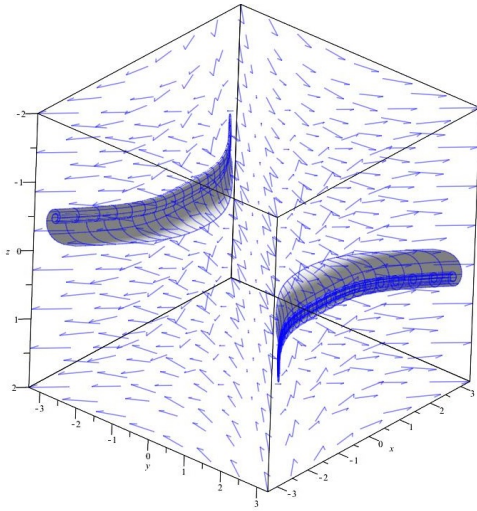
Örnek. $\mathbf{B} = x_3 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_3}$ hiperbolik manyetik alanını ele alalım. ile gösterilen manyetik alan çizgisi aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemin çözümü olarak bulunur:

$$\frac{\partial_C^\alpha x_1}{\partial t^\alpha} = x_3, \quad \frac{\partial_C^\alpha x_2}{\partial t^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial_C^\alpha x_3}{\partial t^\alpha} = x_1. \quad (5.32)$$

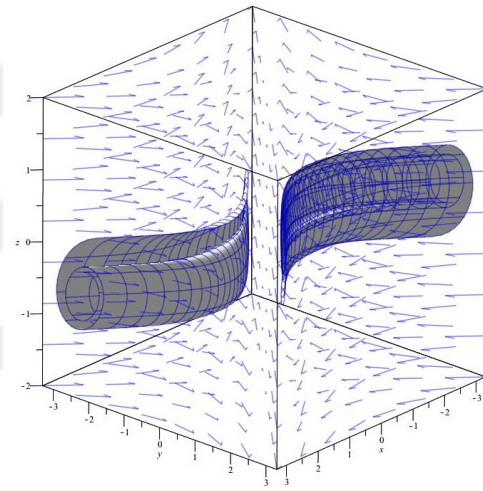
Denklem (5.32)'in kesirli hesaba göre çözümü aşağıdaki denklem ile elde edilir:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha) \\
 x_2(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
 x_3(t) &= t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha)
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

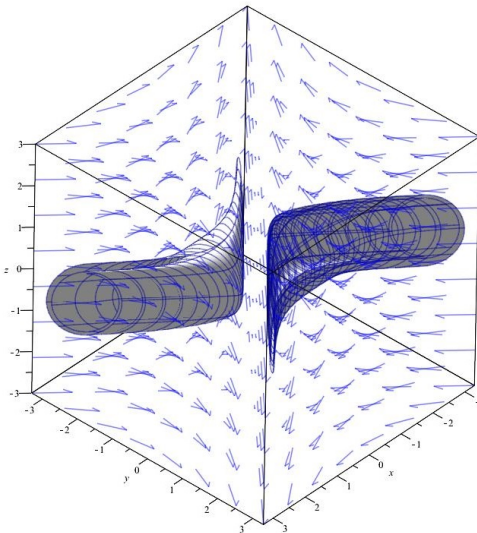
(5.32) denkleminin kesirli hesaba göre çözümünü Şekil 5.5((a)-(c))’de, tamsayı çözümünü ise Şekil 5.5(d)’de gösterilmiştir.



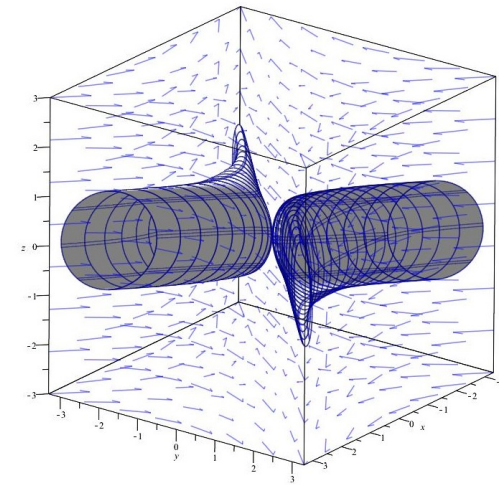
(a) $\alpha = 0.7$



(b) $\alpha = 0.5$



(c) $\alpha = 1$



(d) $\alpha = 0.7$

Şekil 5.5. Null noktalar yakınındaki hiperbolik manyetik alanı ile ilişkili bazı α değerlerine göre hiperbolik manyetik akı tüpleri.

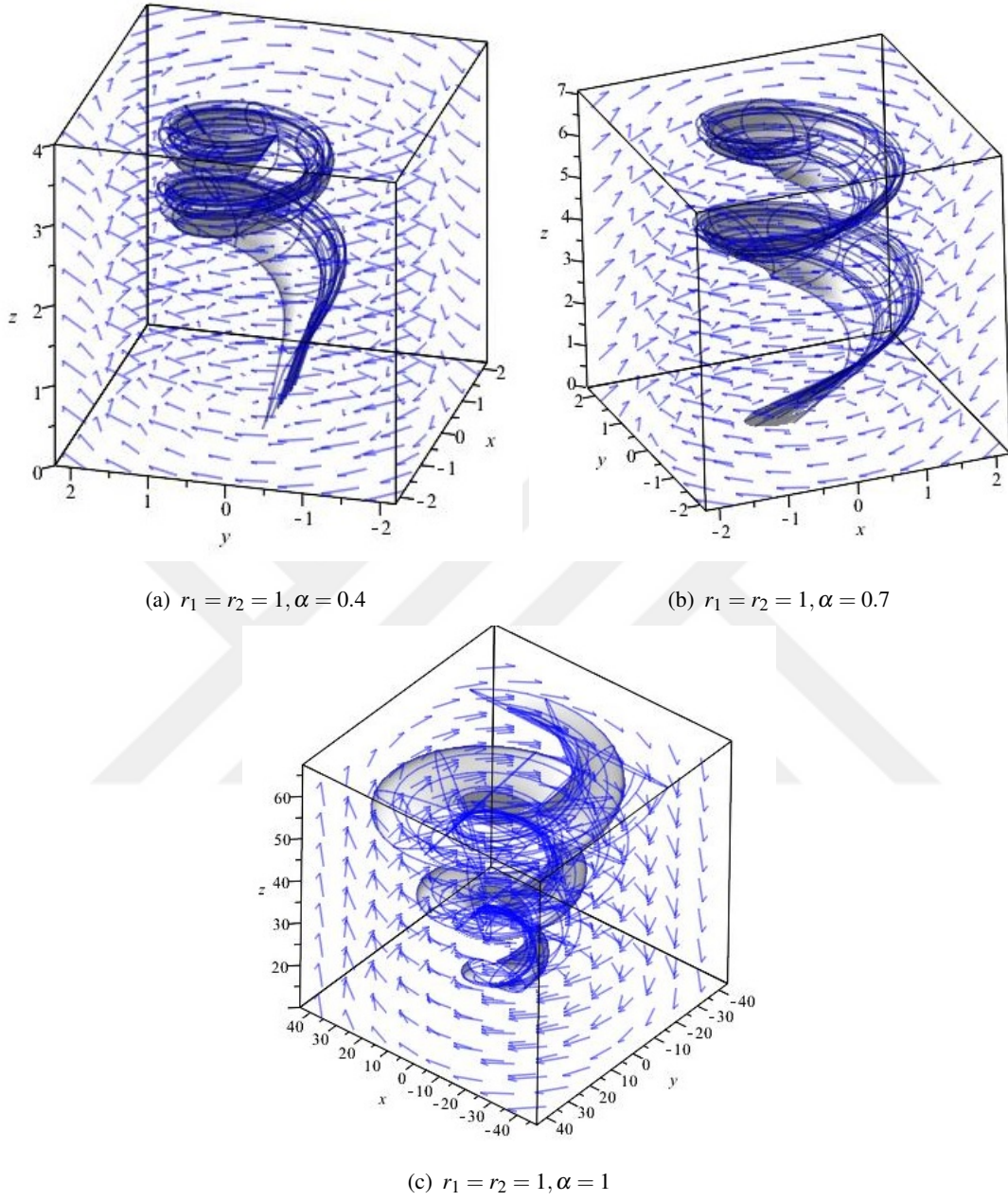
Örnek. $\mathbf{B} = (-x_1 + x_2)\partial_{x_1} + (-x_1 + 2x_2 - 2x_3)\partial_{x_2} + (2x_2 - x_3)\partial_{x_3}$ spiral manyetik alanını ele alalım. $\mathbf{B}$ ile gösterilen manyetik alan çizgisi aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemin çözümü olarak bulunur:

$$\frac{\partial_C^\alpha x_1}{\partial t^\alpha} = -x_1 + x_2, \quad \frac{\partial_C^\alpha x_2}{\partial t^\alpha} = -x_1 + 2x_2 - 2x_3, \quad \frac{\partial_C^\alpha x_3}{\partial t^\alpha} = 2x_2 - x_3. \quad (5.34)$$

Elde edilen son denklemin kesirli hesaplama yöntemi ile elde edilen çözümü aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t^{3\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-2)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(2k\alpha + 3(n+1)\alpha)} t^{\alpha(2k+3n)} \\ &\quad + t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-2)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(2k\alpha + 3(n+1)\alpha - 2\alpha)} t^{\alpha(2k+3n)} \\ x_2(t) &= -2t^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k\alpha + 2(n+1)\alpha - \alpha)} t^{\alpha(k+2n)} \\ &\quad + t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k\alpha + 2(n+1)\alpha - \alpha)} t^{\alpha(k+2n)} \\ x_3(t) &= -t^{3\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-2)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(2k\alpha + 3(n+1)\alpha)} t^{\alpha(2k+3n)} \\ &\quad + t^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-2)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(2k\alpha + 3(n+1)\alpha - \alpha)} t^{\alpha(2k+3n)} \\ &\quad + t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-2)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(2k\alpha + 3(n+1)\alpha - 2\alpha)} t^{\alpha(2k+3n)}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Burada manyetik alanının matris formunun özdeğerlerinden biri reel sayı, diğer ikisi kompleks sayılardır. Bunun sonucu olarak manyetik alan çizgileri spiraldir. Bu manyetik alan çizgilerini kendisine parametre eğrisi kabul eden manyetik akı tüpü Şekil 5.6' de görselleştirilmiştir.



Şekil 5.6. Null noktalar etrafında bazı α değerine karşılık gelen spiral manyetik alan çizgisi ile ilişkili spiral manyetik akı tüpleri.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, manyetik alan çizgilerinin null noktası etrafındaki davranışı, manyetik yeniden bağlanma ve elde edilen manyetik alan çizgileri ile ilgili manyetik eğriler ve yüzeyler Caputo kesirli analiz yöntemi ile incelenmiştir. Bulunan sonuçlar bilinen analiz yöntemine göre karşılaştırıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçları vermeden önce Caputo kesirli hesaplama yöntemi ile ilgili birkaç önemli bilgidен bahsetmek gereklidir. Caputo kesirli hesaplama yönteminde iç çarpım, norm gibi metrik yapıları değişmezken, integral ve türev operatörleri değişmektedir. Öklid uzayında geometrik yapıların incelenebilmesi için çember ve küre gibi iki önemli yapının tanımlanması çok büyük önem arz eder. Bu yüzden, Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre de bu iki yapının tanımlanması gerekmektedir. Caputo kesirli analiz yöntemine göre çember denklemi (5.2) eşitliği ile belirtildi, burada bu denklemin Caputo kesirli türeve göre normu bir olmalıdır. Bu denklemi incelediğimizde α değeri $0 < \alpha < 1$ aralığında iken eğrinin spiral, $\alpha = 1$ için de bilinen çember eğrisi olduğu gözlemlenmiştir. Aynı şekilde, küre denklemi (5.1) eşitliği ile tanımlandı ve bu denklem görselleştirildiğinde α değeri için, $0 < \alpha < 1$ aralığında spirallerden oluştuğu, $\alpha = 1$ için de bilinen standart küre elde edildiği gösterilmiştir (bknz. Şekil 5.1). Dolayısıyla manyetik alan çizgilerinin karakterizasyonunda Caputo kesirli türevine göre sabitin türevi sıfır olduğundan, paralel manyetik alan çizgilerinin yine paralel manyetik alan çizgisi olduğu söylenebilir. Bölüm 4’de bu sonuçları daha iyi gözlemleyebilmek adına farklı örnekler verildi. Şekil 4.1’de görüldüğü üzere, dönel manyetik alan çizgileri α değeri için, $0 < \alpha < 1$ aralığında eğrinin spiral manyetik alan çizgileri, $\alpha = 1$ için de dairesel manyetik alan çizgileri şeklindedir. Şekil 4.2’de ise hiperbolik manyetik alan çizgileri α değerleri için yine hiperbolik manyetik alan çizgileri olarak belirtilmiştir. Aynı durum şekil 4.3’de spiral manyetik alan çizgileri için de geçerlidir. Bu sonuçlar göz önüne alındığında Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre dairesel manyetik alanları için gözle görülür bir fark olduğu söylenebilir. Ayrıca hiperbol ve spiral manyetik alanları için de değişiklik olmamış gibi görünse de, genişliği ve açısı farklı olan hiperbol ve spiraller elde edilmiştir.

Bölüm 4.1’de Şekil 4.5’de kesirli türev yardımıyla null noktaların etrafındaki manyetik yeniden bağlanma (reconnection) gösterilmiş ve başlangıç durumundaki manyetik alan çizgileri ile karşılaştırılması yapılmıştır. Burada aslında manyetik alan çizgilerinin null noktasına yaklaşırken adım adım değişimi gözlemlenmektedir.

Bölüm 4.2’te yüklü bir parçacığın paralel Killing manyetik alandaki davranışı Caputo kesirli hesaplama yöntemi yardımıyla yorumlanmıştır. Caputo türev hesabına göre Killing manyetik alan vektörlerinin baz vektörleri yeniden hesaplanmıştır. Bu manyetik alan içerisinde bir yüklü parçacığın hareketi incelenmiş ve elde edilen sonuçlara göre $0 < \alpha < 1$ aralığında iken parçacık spiral ve spiral helis eğrisi şeklinde bir yörünge izlerken, $\alpha = 1$ değeri için parçacık

çember ve dairesel helis eğrisi şeklinde bir yörünge izlemektedir (Şekil 4.7). Ayrıca, dairesel ve spiral helislerin eksenleri Killing vektör alanına paraleldir. Sonuç olarak yüklü bir parçacığın kesirli türevinin manyetik alanı içindeki hareketi şu şekilde yorumlanabilir: Yüklü parçacığın teğet vektör alanı manyetik alana dik açı ile girerse, parçacık $\alpha = 1$ olduğunda manyetik alanda dairesel bir yörünge izler, $0 < \alpha < 1$ olduğunda ise spiral şeklinde bir yörünge izler (Şekil 4.6), yüklü parçacığın teğet vektör alanı manyetik alana sabit bir açıyla (dik açı değil) girerse, $\alpha = 1$ iken, parçacık manyetik alanda helis şeklinde bir yörünge izler, $0 < \alpha < 1$ iken de spiral helis şeklinde bir yörünge izler (Şekil 4.7).

Bölüm 5’de manyetik alanın null noktalarına yakın manyetik akı tüp yüzeylerini incelemek için Caputo kesirli analiz yaklaşımını kullanmıştır. Manyetik akı tüp yüzeylerinin denklemlerini üretmek için Caputo kesirli analiz yaklaşımı kullanılarak manyetik alan çizgilerinin elde edilmesi gerekir. Bu şekilde, manyetik alan bileşenleri tarafından oluşturulan akı yüzeyi, Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre elde edilmiş manyetik alan bileşenleri denklemlerinin çözümü olarak elde edilebilir. Böylece bilinen tüm manyetik alan çizgilerinin oluşturduğu akı tüp yüzeylerinin modellenmesi hesaplanmıştır. Yüzey denkleminin matrisinin özdeğerlerine dayanarak, bu yüzeylerin üç farklı sınıflandırmaya ayrılabilceği gösterilmiştir. Bu sınıflandırmanın oluşturulmasının nedeni özdeğerlerin gerçel veya karmaşık sayılar olmasıdır. Toroidal akı tüp yüzeyi, spiral akı tüp yüzeyi ve hiperbolik akı tüp yüzeyleri bu üç sınıfa oluşturmaktadır. Eş zamanlı olarak bu yüzeylerin görselleştirilmesi için matematik programlarında Caputo kesirli analiz yönteminden yararlanılmıştır. Şekil 5.2’de, $0 < \alpha < 1$ değerleri için spiral manyetik alan çizgileri ve $\alpha = 1$ değerleri için dairesel manyetik alan çizgileri ile oluşan silindirik manyetik akı yüzeyi verilmiştir. Şekil 5.3’de manyetik akı tüp yüzeyi, dairesel sarmalın etrafına sarılmış bir tor yüzeyi olarak görülmektedir. Burada gözlemlenen önemli fark kesit eğrilerinin $0 < \alpha < 1$ değerleri için spirallerden oluşmasıdır. Ayrıca, Şekil 5.4 de görüldüğü üzere, helisel manyetik akı tüp yüzeyi, $0 < \alpha < 1$ değerleri için Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre spiral helis boyunca oluşturulan akı tüp yüzeyi, $\alpha = 1$ için ise dik dairesel helis boyunca oluşturulan akı tüp yüzeyleridir. Burada yüzeyi oluşturan helislerin genişliği ve açısının α değerine göre değiştiği gözlemlenebilmektedir. Şekil 5.5’de de null nokta yakınındaki hiperbolik akı tüp yüzeylerine örnek verilmiştir. Hiperbolik akı tüp yüzeyi, Caputo kesirli hesaplama yöntemine göre yine hiperbolik akı tüp yüzeyi olarak belirtilmiştir. Burada gözlemlenen en dikkat çekici durum, hiperbolik akı tüp yüzeyinin null noktaya yaklaştıkça uğradığı deformasyondur. Caputo kesirli hesaplama yöntemi kullanıldığı için bu deformasyon görselleştirilebilmiştir. Son olarak Şekil 5.6’da null nokta etrafındaki spiral manyetik alanları ile ilişkili spiral manyetik akı tüp yüzeyleri verilmiştir. Burada da Caputo kesirli hesapmalama yöntemine göre de spiral manyetik akı tüp yüzeylerinin, yine spiral manyetik akı tüp yüzeyleri olduğu görülmüştür. Yine elde edilen değişiklik, spirallerin genişliği ve açısı olarak belirtilmiştir. Ayrıca bu bölümde akı tüp yüzeyleri iki farklı teknikle oluşturulmuştur. İlk olarak, manyetik alanın bileşenlerini Frenet vektör alan-

ları cinsinden hesaplamak için Caputo kesirli analiz yaklaşımı kullanılmıştır. Bu manyetik alan çizgisi bileşenleri daha sonra bir diferansiyel sistem oluşturmak için kullanılmış ve Caputo kesirli analiz yöntemi kullanılarak sistemin çözümünden akı tüpleri elde edilmiştir. Alternatif bir yaklaşım olarak da, küresel yüzeylerin karakteristik çemberleri kullanılarak (2.21 Tanımındaki gibi) oluşturulan kanal yüzeyinin tanımlanmasıdır. Dahası, burada verilen akı tüplerindeki yüklü parçacık hareketinin yorumlanması, Caputo kesirli hesaplama yönteminin uygulanması yoluyla genişleme katsayısının karakterizasyonuna bağlı olarak yorumlanmıştır.



KAYNAKLAR

- A. Atangana, D. Baleanu, (2016) New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20, No. 2, (s. 757-763).
- A. Comtet, (1987) On the Landau Hall levels on the hyperbolic plane, *Annals of Physics*, 173, (s. 185-209).
- A. Dokoumetzidis, P. Macheras, (2009) Fractional kinetics in drug absorption and disposition processes. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 36 No. 2, (s. 165-178).
- A. Gray, (1998) Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. second ed. *CrcPress*, (s.1053), USA.
- A. Gross, (1994) Analyzing Generalized Tubes. *Spie*, (s.422-433).
- A. Has, B. Yılmaz, (2022) Effect of Fractional Analysis on Magnetic Curves. *Revista Mexicana de Fisica*, 68, (s. 1–15).
- A. Has, B. Yılmaz, (2023) Effect of fractional analysis on some special curves. *Turkish Journal of Mathematics*, 47, (s. 1423–1436).
- A. Has, B. Yılmaz, A. Akkurt, H. Yıldırım, (2022) Conformable Special Curves in Euclidean 3-Space. *Filomat*, 36, No. 14, (s. 4687–4698).
- A. Has, B. Yılmaz, (2022) Special Fractional Curve Pairs with Fractional Calculus. *International Electronic Journal of Geometry*, 15, No. 1, (s. 132–144).
- A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo, (2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equations. *Mathematical Studies*. North-Holland, New York.
- A. Loverro, (2004) Fractional Calculus, History, Definition and Applications for the Engineer. *USA*.
- B. Dumitru, D. Kai, S. Enrico, (1988) Fractional calculus: models and numerical methods. *World Scientific*, 3.
- B. Şahin, (2021) Diferansiyel Geometri, *Palme Yayınevi*, İzmir.

- B. Yılmaz, (2021) A new type electromagnetic curves in optical fiber and rotation of the polarization plane using fractional calculus. *Optik*, 247, 168026.
- B. Yılmaz, A. Has, (2021) Obtaining fractional electromagnetic curves in optical fiber using fractional alternative moving frame. *Optik*, 260, 169067.
- C. Ionescu, A. Lopes, D. Copot, J. T. Machado, J. H. T. & Bates, (2017) The role of fractional calculus in modeling biological phenomena: A review. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 51, (s. 141-159).
- C. Milici, J. T. Machado, G. Drăgănescu, (2019) On the fractional Cornu spirals. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 67, (s. 100-107).
- D. Baleanu, O. Defterli, O. P. Agrawal, (2009) A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems. *Journal of Vibration and Control*, 15 No. 4, (s. 583-597).
- D. Baleanu D, R. L. Magin, S. Bhalekar, V. Daftardar-Gejji, (2015) Chaos in the fractional order nonlinear Bloch equation with delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 25, No. 1-3, (s. 41-49).
- D. I. Efimov, (2005) The magnetic geodesic flows on a homogeneous symplectic manifold, *Siberian Mathematical Journal*, 46, (s. 83-93).
- D.I. Pontin, E.R. Priest, (2022) Magnetic reconnection: MHD theory and modeling. *Living Reviews in Solar Physics*, 19 1, <https://doi.org/10.1007/s41116-022-00032-9>.
- D. J. Struik, (1988) Lectures on Classical Differential Geometry. *Dover*, New-York.
- D. P. Kostomarov, E. Y. Echkina, I. N. Inovenkov, S. V. Bulanov, (2010) Simulation of magnetic reconnection in 3D geometry. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2, (s. 293–303).
- E. Bas, B. Acay, R. Ozarslan, (2019) Fractional models with singular and non-singular kernels for energy efficient buildings. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29 No. 2, 023110.
- E. Bas, R. Ozarslan, (2018) Real world applications of fractional models by Atangana Baleanu fractional derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, 116, (s. 121-125).
- E. M. Frins, W. Dultz, (1997) Rotation of the polarization plane in optical fibers, *Journal of*

Lightwave Technology, 15(1), (s. 144-147).

E. Parker, (1957) Acceleration of cosmic rays in solar flares. *Physical Review*, 107 No. 3, 830.

E. R. Priest, T. G. Forbes, (2000) Magnetic Reconnection. *Cambridge University Press*.

E. R. Priest, V. S. Titov, (1996) Magnetic reconnection at three-dimensional null points. *Philosophical Transactions of the Royal Society A-Journals* 355, (s.2951–2992), <https://doi.org/10.1098/rsta.1996.0136>.

F. Jarad, T. Abdeljawad, D. Baleanu, (2010) Fractional variational optimal control problems with delayed arguments. *Nonlinear Dynamics*, 62, No. 3, (s. 609-614).

F. Jarad, T. Abdeljawad, D. Baleanu, (2012) Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives. *Advances in Difference Equations*, No. 1, 142.

G. Calvaruso, M. I. Munteanu, A. Perrone, (2015) Killing magnetic curves in three dimensional almost para-contact manifolds, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 426, (s. 423-439).

H. Ceyhan, Z. Özdemir, İ. Gök, F. N. Ekmekci, (2020) Electromagnetic curves and rotation of the polarization plane through Alternative Moving Frame, *The European Physical Journal Plus* ,135(867), (s. 1-16).

H. Durmaz, Z. Özdemir, Y. Sekerci Fırat, (2024). Fractional approach to evolution of the magnetic field lines near the magnetic null points. *IOP Publishing*, 99(25239), <https://dx.doi.org/10.1088/1402-4896/ad1c7e>.

H. E. Petschek, (1964) Magnetic field annihilation, in *Physics of Solar Flares*, edited by W. N. Ness, NASA, SP-50, (s. 425-439).

H. H. Hacısalihoğlu, (1983) Diferansiyel Geometri. *İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları*, 340, Ankara.

I. I. Satija, R. Balakrishnan, (2009) Geometric phases in twisted strips, *Physics Letters A* , 373(39) (s. 3582-3585).

I. Petrás, R. L. Magin, (2011) Simulation of drug uptake in a two compartmental fractional model for a biological system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16 No. 12 (s. 4588-4595).

- I. Podlubny, (1998) Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *Elsevier*, 198.
- J. De Espindola, C. Bavastri, E. De Oliveira Lopes, (2008) Design of optimum systems of viscoelastic vibration absorbers for a given material based on the fractional calculus model. *Journal of Vibration and Control*, 14 (9-10), (s.1607-1630), doi.org/10.1177/1077546308087400.
- J. L. Cabrerizo, (2013) Magnetic fields in 2D and 3D sphere. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 20, (s. 440-450).
- J. L. Cabrerizo, M. Fernandez, J. S. Gomez, (2009) On the existence of almost contact structure and the contact magnetic field, *Acta Mathematica Hungarica*, 125, (s. 191-199).
- J. K. Popović, M. T. Atanacković, A. S. Pilipović, M. R. Rapaić, S. Pilipović, T. M. & Atanacković, (2010) A new approach to the compartmental analysis in pharmacokinetics: fractional time evolution of diclofenac. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 37 No. 2, (s. 119-134).
- J. N. Ross, (1984) The rotation of the polarization in low birefringence monomode optical fibres due to geometric effects, *Optical and Quantum Electronics*, 16,(5) (s. 455-461).
- J. T. Machado, V. Kiryakova, F. Mainardi, (2011) Recent history of fractional calculus. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 16, No. 3, (s. 1140-1153).
- K. Diethelm, (2010) The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. *Springer Science & Business Media*.
- L. Bolton, A. H. Cloot, S. W. Schoombie, J. P. Slabbert, (2014) A proposed fractional-order Gompertz model and its application to tumour growth data. *Mathematical medicine and biology: a journal of the IMA* , 32, No. 2, (s. 187-209).
- M. Barros, J. L. Cabrerizo, M. Fernández, A. Romero, (2007) Magnetic vortex filament flows. *Journal of Mathematical Physics*, 48, (s. 1-27).
- M. Barros, A. Romero, J. L. Cabrerizo, M. Fernández, (2005) The Gauss-Landau–Hall problem on Riemannian surfaces. *Journal of Mathematical Physics*, 46.
- M. Barros, (1997) Magnetic helices and a theorem of Lancret, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(5), 1503-1509.

- M. Caputo, (1966) Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, *Annali Geofis*, 19, (s. 383–393).
- M. E. Aydın, (2016) Magnetic curves associated to Killing vector fields in a Galilean space, *Mathematical Sciences and applications E-notes*, 4 (1), (S.144-150)
- M. E. Aydın, A. Mihai, A. Yokuş, (2021) Applications of fractional calculus in equiaffine geometry: plane curves with fractional order, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 44(17), (s. 13659-13669).
- M. I. Munteanu, A. I. Nistor, (2012) The classification of killing magnetic curves in $S \times \mathbb{R}^2$, *Journal of Geometry and Physics*, 62, (s. 170-182).
- M. Kugler, S. Shtrikman, (1988) Berry's phase, locally inertial frames, and classical analogues, *Physical Review D*, 37(4), (s. 934-937).
- M. S. Asl, M. Javidi, Y. Yan, (2018) A novel high-order algorithm for the numerical estimation of fractional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 342, (s. 180-201).
- M. V. Berry, (1984) Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 392, (s. 45-57).
- O. Yamashita, (2012) Effect of the geometrical phase shift on the spin and orbital angular momenta of light traveling in a coiled optical fiber with optical activity, *Optics Communications*, 285, (s. 3740-3747).
- O. Yamashita, (2012) Geometrical phase shift of the extrinsic orbital angular momentum density of light propagating in a helically wound optical fiber, *Optics Communications*, 285, (s.3061-3065).
- P. A. Sweet, (1958) The Neutral Point Theory of Solar Flares, *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*. Proceedings from IAU Symposium no. 6. Edited by Bo Lehnert. International Astronomical Union. Symposium *Cambridge University Press*, No. 6, (s. 123-134).
- R. Almeida, S. A. Qureshi, (2019) Fractional Measles Model Having Monotonic Real Statistical Data for Constant Transmission Rate of the Disease. *Fractal and Fractional*, 3, No. 4, 53.
- R. Ameen, F. Jarad, T. Abdeljawad, (2018) Ulam stability for delay fractional differential equations with a generalized Caputo derivative. *Filomat*, 32, No. 15, (s. 5265-5274).

- R. Dandoloff, W. J. Zakrzewski, (1989) Parallel transport along a space curve and related phases, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22(11), L461.
- R. Dandoloff, (1989) Berry's phase and Fermi–Walker parallel transport, *Physics Letters A*, 139(1-2), (s. 19-20).
- R. Garrappa, (2015) Trapezoidal methods for fractional differential equations: Theoretical and computational aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, 110, (s. 96-112).
- R. Ozarslan, A. Ercan, E. Bas, (2019) Novel Fractional Models Compatible with Real World Problems. *Fractal and Fractional*, 3, No. 2, 15.
- S. L. Druță-Romaniuc, J. Inoguchi, M. I. Munteanu, A. I. Nistor, (2015) Magnetic curves in Sasakian manifolds. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 22, (s. 428-447).
- S. L. Druță-Romaniuc, J. Inoguchi, M. I. Munteanu, A. I. Nistor, (2016) Magnetic Curves in Cosymplectic Manifolds. *Reports on Mathematical Physics*, 78(1), (s. 33-48).
- S. L. Druță-Romaniuc, M. I. Munteanu, (2013) Killing magnetic curves in a Minkowski 3-space. *Nonlinear Anal. Real World Applications*, 14, (s. 383-396).
- S. L. Druță-Romaniuc, M. I. Munteanu, (2011) Magnetic curves corresponding to Killing magnetic fields in E^3 . *Journal of Mathematical physics*, 52, 113506.
- S. P. Novikov, (1982) The Hamiltonian formalism and a many valued analogue of Morse theory, *Russian Mathematical Surveys*, 37, (s. 1-56).
- S.M. Rytov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 18, 263 (1938), reprinted in B. Markovski, S.I. Vinitzky (eds) Topological Phases in Quantum Theory, *World Scientific*, Singapore (1989).
- S. Qureshi, A. Yusuf, (2019) Fractional derivatives applied to MSEIR problems: Comparative study with real world data. *The European Physical Journal Plus*, 134, No. 4, 171.
- S. Qureshi, A. Atangana, (2019) Mathematical analysis of dengue fever outbreak by novel fractional operators with field data. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 526, (s. 121-127).
- Ş. Güvenç, (2022) Magnetic Curves in C-manifolds, *International Electronic Journal of Geometry*, 15(1), (s.145–152), <https://doi.org/10.36890/IEJG.948817>
- T. Abdeljawad, (2019) Fractional operators with boundary points dependent kernels and in-

tegration by parts. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, 13, No. 3, (s. 351-375).

T. Adachi, (1995) Kahler magnetic flow for a manifold of constant holomorphic sectional curvature, *Tokyo Journal of Mathematics*, 18, (s. 473-483).

T. Adachi, (1994) Kahler magnetic on a complex projective space, *Proceedings of the Japan Academy, Series A, mathematical sciences*, 70, (s. 12-13).

T. Körpınar, R. C. Demirkol, (2018) Gravitational magnetic curves on 3D Riemannian manifolds, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15(11), 1850184.

T. Körpınar, R. C. Demirkol, (2020) Electromagnetic curves of the linearly polarized wave along an optical fiber in a 3D Riemannian manifold with Bishop equations, *International Journal for Light and Electron Optics*, 200, 163334.

T. Körpınar, R. C. Demirkol, (2019) Electromagnetic curves of the linearly polarized light wave along an optical fiber in a 3D semi-Riemannian manifold. *Journal of Modern Optics*, <https://doi.org/10.1080/09500340.2019.1579930>.

T. Sunada, (1993) Magnetic flows on a Riemann surface, *Proceedings of KAIST Mathematics Workshop*, (s. 93-108).

T. Y. Lau, J. M. Finn, (1990) Three-dimensional Kinematic Reconnection in the Presence of Field Nulls and Closed Field Lines. *The Astrophysical Journal*, 350, (s. 672-691).

U. Gözütok, H. A. Çoban, Y. Sağıroğlu, (2019) Frenet frame with respect to conformable derivative. *Filomat*, 33(6), (s.1541-1550), <https://doi.org/10.2298/FIL1906541G>.

W. M. Boothby, (1975) An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, *Academic Press*, New York.

Y. Adjabi, F. Jarad, T. Abdeljawad, (2017) On generalized fractional operators and a Gronwall type inequality with applications. *Filomat*, 31, No. 17, (s. 5457-5473).

Y. Zhang Y, (2009) A finite difference method for fractional partial differential equation. *Applied Mathematics and Computation*, 215, No. 2, (s. 524-529).

Z. Bozkurt, İ. Gök, Y. Yaylı F. N. Ekmekci, (2014) A new approach for magnetic curves in 3D Riemannian manifolds. *Journal of Mathematical physics*, 55, 053501.

Z. Özdemir, (2020) A New Calculus for the Treatment of Rytov's Law in the Optical Fiber, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 216, 164892.

Z. Özdemir, G. Cansu, Y. Yaylı, (2021) Kinematic modeling of Rytov's law and electromagnetic curves in the optical fiber based on elliptical quaternion algebra, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*.

Z. Özdemir, İ Gök, Y. Yaylı F. N. Ekmekci, (2015) Notes on magnetic curves in 3D semi-Riemannian manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 39, No. 3, (s. 412-426).



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Hasan Durmaz

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Selçuk Üniversitesi/Matematik	2021
Pedagojik formasyon	Amasya Üniversitesi/Eğitim Fakültesi	2022

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Yayınlar

1. H. Durmaz, Z. Özdemir, Y. Şekerci, Fractional approach to evolution of the magnetic field lines near the magnetic null points, Physica Scripta 99 (2), 025239.
2. H. Durmaz, H. Ceyhan, Z. Özdemir, A. Ndiaye, Utilizing the Caputo Fractional derivative for the flux tube close to the neutral points (hakemde).
3. H. Durmaz, T. Şahin, Rectifying Curves in the Lightlike Cone (hakemde).

Bildiriler

1. H Durmaz, H Ceyhan, Z Özdemir. Magnetic Curves Based on Fractional Calculus Latin American International Congress on Natural and Applied Sciences-V, 5-12 (sözlü sunum/tam metin), 1-3 Eylül 2023.