

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÜRETİCİ
ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE SAYISAL
ÇÖZÜMLERİ

Elif NURAY YILDIRIM

Doktora Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

TEMMUZ 2021

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÜRETİCİ
ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Tez Yazarı

Elif NURAY YILDIRIM

Danışman

Prof. Dr. Mustafa İNÇ

İkinci Danışman

Prof. Dr. Ali AKGÜL

TEMMUZ 2021
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Başlığı:	Bazı Diferansiyel Denklemlerin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu ile Sayısal Çözümleri
Yazarı:	Elif NURAY YILDIRIM
İlk Teslim Tarihi:	26.06.2021
Savunma Tarihi:	28.07.2021

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

	<i>İmza</i>	
Danışman:	Prof. Dr. Mustafa İNÇ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
İkinci Danışman:	Prof. Dr. Ali AKGÜL Siirt Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Ali YEŞİL Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Ebru CAVLAK Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL Siirt Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR Muş Alparslan Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20.... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

Doç. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “ Bazı Diferansiyel Denklemlerin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu ile Sayısal Çözümleri” başlıklı Doktora Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

28/07/2021

Elif NURAY YILDIRIM

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu doktora tezinde doğrusal olmayan bazı adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin üretici çekirdekli Hilbert uzayı metodu ile yaklaşık çözümleri incelenmiştir. Süreç boyunca katkılarından ötürü danışman hocalarım Prof. Dr. Mustafa İnç ve Prof. Dr. Ali Akgül'e teşekkürlerimi sunarım.

Tezin İngilizce özetinin son okumasını yapan ve tezin yazılma aşaması boyunca beni hep pozitif bakış açısına yönlendiren sevgili arkadaşım Dr. Jade Ward'a teşekkür ederim.

Dr. Donna Peach'in kurduğu, son bir yıldır hayatımın bir parçası haline gelmiş olan, beni inanılmaz şekilde destekleyen, bana akademik anlamda da manevi anlamda da çok katkısı olan PhD Forum ailesinin her bir ferdine teşekkür ederim.

Benim için anlamı büyük olan bu doktora sürecinde yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşlarım Dr. Mohamed Khalifa ve Dr. Tuğba Aslan Khalifa özelinde tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Pandemi döneminin zorluklarına denk gelen tezin yazılma aşaması boyunca beraber yol aldığımız, bana olan desteğini hep üstte tutan, kıymetli arkadaşım Dr. Selvi Nazlı Güvenç Uluçlar'a teşekkür ederim.

Ben yılsam da beni her daim motive etmekten yılmayan, bana inanan ve güvenen sevgili dostlarım Büşra Söylemez, Esin Tekin, Rabia Tan ve Kübra Üstündağ'a teşekkür ederim.

Herkesten öte ve her şeyden ziyade, bütün bu doktora sürecinin tamamen ermesindeki olağanüstü yardım ve inançları için, ellerini üzerimden bir an olsun çekmedikleri ve bana güvenmekten bir an olsun vazgeçmedikleri için, bu zamana kadar olan bütün emekleri adına, iki kelimenin asla yeterli olmadığının farkında olarak; canımın parçaları güzel anneciğim Leyla Nuray'a, hem hayata hem matematiğe dair soru sormaya başladığım ilk günden beri beni usanmadan cevaplayan, gölgesinin dahi bana güven verdiği ilk ve daimi hocam babam Prof. Dr. Fatih Nuray'a; başarılarıyla gurur duyduğum sevgili kardeşim Yusuf Nuray'a gönülden teşekkür ederim. İyi ki varsınız.

Bu tezde olan denklemler gibi insan hayatı da doğrusal olmayan bir denklem. Başlangıç ve sınır koşulları da hayli zorlu üstelik. Bu zorlu koşulları göz önüne aldığında, son olarak, doktora sürecimdeki sabırlı yoldaşlığı, hiç esirgemediği desteği, tezin son okumasını yapmış olması bir yana; beni hiç bir koşulda yalnız bırakmayan, daima yanımda olan, düştüğümde kaldıran, yüküme omuz veren, nazıma da kahrıma da razı olan, beni matematikteki şiiri görmeye ve upuzun süren bu şiiri yazmaya devam etmem için ikna eden biricik hayat arkadaşım, cânım Mustafa Yıldırım'a, bütün fedakârlıkları ve varlığı için teşekkür ederim.

Elif NURAY YILDIRIM

ELAZIĞ, 2021

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
TABLolar LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	6
2.1 Fonksiyonel Analiz ile İlgili Bazı Temel Kavramlar	6
2.2 Diferansiyel Denklemler ile İlgili Bazı Temel Kavramlar	13
2.2.1 Adi Diferansiyel Denklemler ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler	13
2.2.2 Kısmi Diferansiyel Denklemler ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler	15
3 ÜRETİCİ ÇEKİRDEKLİ HILBERT UZAYLARI	18
3.1 Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayının Temelleri	18
3.2 Üretici Çekirdek ve Üretici Çekirdekli Hilbert Uzay Teorisi	20
3.3 Üretici Çekirdekli Hilbert Uzay Metodu'nun İnşası	23
3.3.1 $\tilde{V}_2^m[a, b]$ Üretici Çekirdekli Hilbert Uzay	24
3.3.2 $\tilde{V}_2^m[a, b]$ Uzayının Üretici Çekirdeği	26
3.3.3 $W_2^{(m,n)}(\Omega)$ İki Değişkenli Üretici Çekirdekli Hilbert Uzay	28
4 DOĞRUSAL OLMAYAN YÜKSEK MERTEBEDEN ADI TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	31
4.1 Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri İçin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzay Metodu	32
4.2 Homojen Olmayan Sınır Değer Problemi	32
4.2.1 Homojenleştirme	32
4.2.2 Üretici Çekirdekli Hilbert Uzay ve Üretici Çekirdek Fonksiyonu	33
4.2.3 Yaklaşık Çözümün İnşası	37
4.2.4 Metodu'nun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi	38
4.2.5 Nümerik Sonuçlar	41
4.3 Homojen Sınır Değer Problemi	43
4.3.1 Üretici Çekirdekli Hilbert Uzay ve Üretici Çekirdek Fonksiyonu	43
4.3.2 Yaklaşık Çözümün İnşası	48
4.3.3 Metodu'nun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi	49
4.3.4 Nümerik Sonuçlar	52
4.4 Bazı Başlangıç Değer Problemleri İçin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzay Metodu	53
4.4.1 Problem I	54
4.4.2 Metodu'nun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi	58
4.4.3 Problem II	62
4.4.4 Metodu'nun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi	67
4.4.5 Problem III	71
4.4.6 Metodu'nun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi	75
5 DOĞRUSAL OLMAYAN BAZI KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	80

5.1	Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayları ve Üretici Çekirdek Fonksiyonları	81
5.1.1	$\tilde{V}_2^1[0, 1]$, $\tilde{V}_2^2[0, 1]$ ve $V_2^1[0, T]$ Üretici Çekirdekli Uzayları ve Çekirdek Fonksiyonları	82
5.1.2	${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ ve ${}^oV_2^2[0, T]$ Üretici Çekirdekli Uzayları ve Çekirdek Fonksiyonları	83
5.1.3	${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$, ${}^oW_2^{(2,1)}(\Omega)$ ve $W_2^{(1,1)}(\Omega)$ İki Değişkenli Üretici Çekirdekli Uzayları ve Çekirdek Fonksiyonları	86
5.2	Burgers Denklemleri	89
5.2.1	Homojenleştirme	89
5.2.2	Yaklaşık Çözümün İnşası	90
5.2.3	Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi	92
5.2.4	Nümerik Sonuçlar	95
5.3	Fisher Denklemleri	97
5.3.1	Homojenleştirme	97
5.3.2	Yaklaşık Çözümün İnşası	98
5.3.3	Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi	100
5.3.4	Nümerik Sonuçlar	102
5.4	Huxley Denklemleri	103
5.4.1	Homojenleştirme	104
5.4.2	Yaklaşık Çözümün İnşası	105
5.4.3	Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi	106
5.4.4	Nümerik Sonuçlar	108
5.5	Burgers-Fisher Denklemleri	110
5.5.1	Homojenleştirme	110
5.5.2	Yaklaşık Çözümün İnşası	111
5.5.3	Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi	113
5.5.4	Nümerik Sonuçlar	115
5.6	Burgers-Huxley Denklemleri	116
5.6.1	Homojenleştirme	117
5.6.2	Yaklaşık Çözümün İnşası	118
5.6.3	Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi	119
5.6.4	Nümerik Sonuçlar	121
6	SONUÇLAR VE TARTIŞMA	123
	KAYNAKLAR	126
	ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Bazı Diferansiyel Denklemlerin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu ile Sayısal Çözümleri

Elif NURAY YILDIRIM

Doktora Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Temmuz 2021, Sayfa: xii + 132

Altı bölümden oluşan bu doktora tez çalışmasında adi ve kısmi türev içeren, doğrusal olmayan bazı diferansiyel denklemlerin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu (ÜÇHM) ile yaklaşık çözümleri elde edildi.

Öncelikle tezin ana konusunun daha iyi anlaşılabilmesi için bir giriş yapıp, sonraki bölümlere bir altyapı oluşturma adına ikinci bölümde diferansiyel denklemler ile fonksiyonel analize dair bazı temel tanım ve teoremlere yer verildi. Üçüncü bölümde Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu'nun temel özellikleri anlatılıp, üretici çekirdek fonksiyonlarıyla, $V_2^m[a, b]$ ve $W_2^{(m,n)}(\Omega)$ üretici çekirdek uzaylarının teorik yapıları sunuldu.

Adi türevli diferansiyel denklemlerin ÜÇHM ile çözümlerinin araştırıldığı, farklı aralıklarda homojen olmayan başlangıç ve sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerine dördüncü bölümde yer verildi.

Kısmi türevli denklemlerin ÜÇHM ile çözümleri beşinci bölümde incelendi ve Burgers, Fisher, Burgers-Fisher, Burgers-Huxley denklemlerinin yaklaşık çözümleri elde edildi.

Çalışmada yer alan tüm problemler için her bir probleme ait Üretici Çekirdekli Uzayları inşa edilerek bu uzayların çekirdek fonksiyonları bulundu ve çözümlerin yakınsaklık analizleri yapıldı. Sonrasında nümerik sonuçlar sunulurken, kesin çözüm, yaklaşık çözüm, mutlak-görelî hatalara dair tablo ve grafikler verildi.

Son olarak, elde edilen sonuçlar değerlendirilerek, metodun geçerliliği ve güvenilirliği sonuçlar ve tartışma bölümünde yorumlandı.

Anahtar Kelimeler: Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayları, Doğuran Çekirdekli Uzak, Diferansiyel Denklemler, Yaklaşık Çözüm, Üretici Çekirdek Metodu.

ABSTRACT

Numerical Solutions to Differential Equations Using the Reproducing Kernel Hilbert Space Method

Elif NURAY YILDIRIM

Ph.D. Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

June 2021, Page: xii + 132

In this PhD thesis, which consists of six chapters, approximate solutions of nonlinear differential equations containing ordinary and partial derivatives were obtained using the Reproducing Kernel Hilbert Space Method.

Firstly, some basic definitions and theorems about differential equations and functional analysis are given in order to better understand the main subject of the thesis and provide context for this research. The basics of Reproducing Kernel Hilbert Space Method is explained. The theoretical structures of the $V_2^m[a, b]$ and $W_2^{(m,n)}(\Omega)$ reproducing kernel spaces and reproducing kernels are presented in chapter three.

In the fourth chapter, solutions to ordinary differential equations using RKHSM were investigated, and approximate solutions of inhomogeneous initial and boundary value problems in different intervals were obtained.

By using RKHSM, the solutions of partial differential equations were examined in the fifth chapter and approximate solutions of Burgers, Fisher, Burgers-Fisher, Burgers-Huxley equations are obtained.

For all the problems in the study, the reproducing kernel Hilbert spaces were constructed for each problem, the kernel functions of these spaces were calculated, and convergence analyzes were performed. The numerical results are presented in the thesis. Tables and graphs of exact solutions, approximate solutions and absolute-relative errors are given.

Finally, the validity and reliability of the Reproducing Kernel Hilbert Space Method is interpreted by evaluating the results obtained.

Keywords: Reproducing Kernel Hilbert Space, Differential Equations, ODE, PDE, Approximate Solution, RKHS, Reproducing Kernel Method.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1 ÜÇHU ve diğer uzaylar arasındaki ilişki	18
Şekil 4.1 Problem (4.4) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm 2D gösterimi	43
Şekil 4.2 Problem (4.17) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm 2D gösterimi	53
Şekil 4.3 Problem (4.31) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm 2D gösterimi	61
Şekil 4.4 Problem (4.46) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm 2D gösterimi	70
Şekil 4.5 Problem (4.59) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm 2D gösterimi	79
Şekil 5.1 Problem (5.27) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği	96
Şekil 5.2 Problem (5.37) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği	103
Şekil 5.3 Problem (5.47) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği	110
Şekil 5.4 Problem (5.57) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği	116
Şekil 5.5 Problem (5.47) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği	121

TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 4.1 Problem (4.4) için kesin çözüm (KÇ) ve yaklaşık çözüm (YÇ) değerleri	42
Tablo 4.2 Problem (4.4) mutlak hata (MH) ve görelî hata (GH) değerleri	42
Tablo 4.3 Problem (4.17) için kesin çözüm (KÇ) ve yaklaşık çözüm (YÇ) değerleri	52
Tablo 4.4 Problem (4.17) mutlak hata (MH) ve görelî hata (GH) değerleri	53
Tablo 4.5 Problem (4.31) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM) ve yaklaşık çözüm (LS-SVM) değerlerinin karşılaştırılması	61
Tablo 4.6 Problem (4.31) mutlak hata (MH) ve görelî hata (GH) değerleri	62
Tablo 4.7 Problem (4.46) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM) ve yaklaşık çözüm (LS-SVM) değerlerinin karşılaştırılması	70
Tablo 4.8 Problem (4.46) mutlak hata (MH) ve görelî hata (GH) değerleri	71
Tablo 4.9 Problem (4.59) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM) ve yaklaşık çözüm (ADM) değerlerinin karşılaştırılması	78
Tablo 4.10 Problem (4.59) mutlak hata (MH) ve görelî hata (GH) değerleri	78
Tablo 5.1 Problem (5.27) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM)	96
Tablo 5.2 Problem (5.27) görelî hata (GH), mutlak hata (MH) ve mutlak hata [120] değerleri	97
Tablo 5.3 Problem (5.37) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM)	102
Tablo 5.4 Problem (5.37) görelî hata (GH), mutlak hata (MH) ve mutlak hata [120] değerleri	103
Tablo 5.5 Problem (5.47) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM)	109
Tablo 5.6 Problem (5.47) görelî hata (GH), mutlak hata (MH) ve mutlak hata [120] değerleri	109
Tablo 5.7 Problem (5.57) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM)	115
Tablo 5.8 Problem (5.57) görelî hata (GH), mutlak hata (MH) ve mutlak hata [120] değerleri	116
Tablo 5.9 Problem (5.66) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM)	122
Tablo 5.10 Problem (5.66) görelî hata (GH), mutlak hata (MH) ve mutlak hata [120] değerleri	122

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathcal{H}$	: Hilbert Uzayı
$\mathcal{H}_k$	: k çekirdeğinin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı
$\mathcal{X}$	: Boştan farklı herhangi bir küme
$\mathbb{F}$	: Cisim
δ_x	: Hesaplama fonksiyoneli
Ω	: Bölge
$\tilde{V}_2^m[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında tanımlı üretici çekirdekli Hilbert uzayı
$\tilde{k}_y^m(x)$	: V_2^m uzayının üretici çekirdeği
$W_2^{(m, n)}(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı iki değişkenli üretici çekirdekli Hilbert uzayı
$K_{(y, s)}(x, t)$	: İki değişkenli üretici çekirdekli $W_2^{(m, n)}$ uzayının üretici çekirdeği
$\langle, \rangle$	: İç çarpım fonksiyonu
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\ \cdot\ $	: Norm fonksiyonu
V	: Vektör uzayı
$\mathcal{L}, \mathcal{F}$	: Sınırlı lineer operatör
∂_x	: x 'e göre kısmi türev

Kısaltmalar

AC	: Mutlak sürekli
ADD	: Adi diferansiyel denklem
KTD	: Kısmi diferansiyel denklem
ÜÇHU	: Üretici çekirdekli Hilbert uzayı
ÜÇHM	: Üretici çekirdekli Hilbert uzayı metodu
RKHS	: Reproducing kernel Hilbert space

1 Giriş

“ Bir matematikçi şair ruhlu olmadıkça asla tam bir matematikçi olamaz. ”

Sofya Kovalevskya, *Rus Matematikçi ve Yazar*

Doğadaki olayların davranışlarının altında yatan ilkelerin ve yasaların çoğu, olayların meydana gelme hızını içeren ifadelerin, ilişkilerin ve zamana ya da başka bir değişkene göre gerçekleşen değişimlerin bir toplamıdır. Bu sebeple diferansiyel denklemler, içinde bir veya daha fazla değişkenin bilinmeyen bir fonksiyonu ile onun bazı türevlerini içerdiğinden, olaylardaki değişimleri gözlemlemek, yorumlamak ve problemleri yapılandırmak için elverişli bir araç olagelmıştır. Çünkü mühendislikte, fizikte, biyolojide, tıpta, ekonomide, astronomide, sosyal bilimlerde ve başka birçok disiplinde bu değişimleri gözlemlemek ve yorumlamak oldukça önemlidir. Bir yapıyı veya olayı, bunların çevre ve insan üzerindeki etkilerini anlayabilmek önce onları modellemeyi gerektirir. Diferansiyel denklemler, zamanla değişen fiziksel bir sistem modellenmeye çalışıldığında doğal olarak ortaya çıkar. Yüz yıllar süren anlam arayışlarının matematikçileri diferansiyel denklemlere ulaştırması, çeşitli bilim dallarındaki karmaşık sistemlerin davranışlarını modellemeyi mümkün hale getirmiştir. Walter A. Strauss'un [1] deyişiyle "Doğadaki temel süreçler hakkındaki anlayışımız büyük ölçüde kısmi diferansiyel denklemlere dayanmaktadır."

Birçok önemli fikrin, fiziksel süreçlerin, doğa olaylarının formüle edilebilmesi için kısmi türevliler başta olmak üzere diferansiyel denklemler güçlü bir dil sağlamıştır. Bu zamana kadar bu dil yardımıyla günümüzde artık klasikleşmiş olan bir çok önemli model literatüre kazandırılmıştır. Örneğin katı cisimlerdeki ısının yayılması, difüzyon, elektrik devrelerindeki akımın hareketi, akışkanlar dinamiği, popülasyon değişimi, dalgaların davranışları, radyoaktif bozunmalar bunlardan sadece bir kaçıdır. Teknolojinin ilerleyen imkânlarıyla sosyo ekonomik modellerden kanser hücrelerinin büyüme hızına kadar insan hayatına dokunan önemli problemler ortaya konmuştur. Her olay belli şartlar altında gerçekleştiği için bu durum ortaya konan modellere doğal olarak bir takım koşullar da yüklemiştir. Bu sebeple modelin başlangıç ve sınır değerleri dikkate alınmak zorundadır. Karmaşık yapılar birden fazla değişken ve bu değişkenlerin de kendi içinde türevlerini içerdiğinden, doğrusal denklemler bu yapıları formüle etmek için çoğunlukla yeterli gelmemiştir. Bütün bunlar, doğrusal ve homojen olmayan başlangıç ve sınır değer problemlerini ortaya çıkarmıştır.

Fiziksel dünyayı yöneten hemen hemen tüm bilimsel yasalar diferansiyel denklemler olarak ifade edilebilir. Bu yasaların etkilerini ve sonuçlarını açıklığa kavuşturmak ise bu denklemlere çözüm bulmayı gerektirir [2]. Denklemlerin çözümünü elde etmek için bu zamana kadar çeşitli analitik yaklaşımlar kullanılagelmıştır. Çözüm fonksiyonuna ulaşmak

bir analitik yöntemle mümkün ise buradan elde edilecek sonuç kesin çözüm olacağından analitik yöntemler aslında çoğunlukla arzu edilen ve ideal olanlardır. Fakat karmaşık sistemlerin homojen ve lineer olmayan yapıları karşısında analitik metotlar dar bir geometride çalışırlar. Öyle ki bazen çözüme ulaşmak için matematiksel bir komplikasyona sebep olabilecek şartlar göz ardı edilir. Bazı durumlarda ise kesin çözümü elde etmek kimi zaman çok zor ve karmaşık, kimi zaman da imkânsızdır.

Analitik metotların bir anlamda kısıtlı oluşu nümerik yöntemleri doğurmuş ve bu yöntemler yaklaşık çözüm elde etme imkânı sağladığı için elverişli bir araç olmuştur. Böylelikle kompleks yapıdaki modellerin çözümleri şartlar göz ardı edilmeden, daha hızlı bir şekilde bulunabilmektedir. Nümerik yöntemler kullanılarak analitik yöntemlere gerek kalmadan kesin çözüme yakın sonuçlar elde edilmesi mümkündür. Bu noktada, başvuru nümerik yöntemle elde edilen sonucun kesin çözüme ne kadar yakınsadığı ve ne kadar güvenilir sonuçlar verdiği sorusu doğar. Bu soruya olumlu mânâda güçlü bir cevap veren yöntemlerden biri, esası çekirdek teorisine dayanan Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu (ÜÇHM) olarak karşımıza çıkar.

Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu, bir çekirdeğin uzayın her fonksiyonunu iç çarpım aracılığıyla yeniden ürettiği ve bu çekirdekle karakterize edilmiş özel bir Hilbert uzayıdır. $\mathcal{H}$, bir $\mathcal{X}$ kümesindeki fonksiyonların Hilbert uzayını temsil etsin ve $x \in \mathcal{X}$ olsun. Yapısı dolayısıyla "üretici çekirdek" ya da literatürdeki diğer kullanımıyla "doğuran çekirdek" ismini alan çekirdek fonksiyonunun temeli

$$f(y) = \langle f(x), k(x, y) \rangle, \forall f \in \mathcal{H}$$

iç çarpımına dayanır. Burada $k(x, y)$ üretici çekirdek fonksiyonunu temsil etmekle birlikte $\langle, \rangle$ iç çarpımı $\mathcal{H}$ Hilbert uzayına aittir. Sonraki bölümlerde detaylandırılacak olan bu iç çarpım "yeniden üretme özelliği" olarak bilinir. Çekirdeğin yeniden üretme özelliği ve bu özelliği harmonik ve biharmonik fonksiyon sınıfları için sağlayan $k(x, y)$ çekirdek fonksiyonları ilk kez 1907'de Zaremba [3] tarafından ortaya kondu. Bu çekirdek fonksiyonu, özel bir fonksiyon ailesine karşılık gelen ve üretici özelliği ispatlanan ilk çekirdek fonksiyonuydu. Zaremba, yeniden üretme özelliğini harmonik ve biharmonik fonksiyonların sınır değer problemlerini incelemek için kullandı [4]. Fakat elde ettiği sonuçlar uzun süre dikkat çekmedi. Yeniden üretme özelliğinin pozitif tanımlı olduğu ise ilk kez 1909'da Mercer [5] tarafından ispat edildi. Hilbert'in geliştirdiği integral denklemleri teorisine ilgili olan Mercer, yeniden üretme özelliğini sağlayan fonksiyonlar üzerine çalıştı. Onları pozitif tanımlı çekirdekler olarak adlandırarak sürekli çekirdekler arasında daha iyi bir pozisyonda olduklarını gösterdi.

Mercer'in yaptığı çalışmaları ileren Moore [6], 1916'da bu çekirdekleri pozitif hermityen matrisi adı altında çalıştı ve integral denklemlerin genelleştirilmiş bir haline uyguladı. 1920'lere gelindiğinde üretici çekirdek teorisi üç önemli matematikçi olan Szegő [7], Bergman [8] ve Bochner [9]'in doktora tezlerinde görüldü. Bu dönemlerdeki araştırmaların çoğu Bergman tarafından yapılmış olmakla birlikte, 1940'lı yıllarda

üzerinde çalışılan çekirdeklerin büyük bir çoğunluğu Bergman çekirdekleridir [10, 11]. Bergman, çok değişkenli harmonik fonksiyonlara karşılık gelen çekirdekler üzerine yapılan çalışmaları genişleterek "çekirdek fonksiyonları" olarak adlandırdı. İlk kez Zaramba'nın ortaya koyduğu sınır değer problemlerinin çözümleri için çekirdekleri kullanma fikrini geliştirerek bunları eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerine uyguladı [12, 13]. Bergman'ın bu çalışmaları, çekirdeklerin sınır değer problemlerinin çözümünde güçlü bir enstrüman olduğunu ispatlamış ve üretici çekirdek teorisinin diferansiyel denklemlerin çözümündeki ilk basamakları olarak tarihte yerini almıştır.

1950'lerde Aronszajn, Bergman çekirdeklerini de içeren ve Bergman'ın çalışmalarını [14] toparlayan nitelikte sistematik bir üretici çekirdek teorisi ortaya koydu. Her ne kadar çalışmasında Moore'a atfediyor olsa da her pozitif tanımlı çekirdeğin tek bir fonksiyon sınıfının üretici çekirdeği olacağını Aronszajn kanıtladı [15] ve meşhur Moore-Aronszajn Teoremi (3.6) literatürdeki yerini aldı. Bu fonksiyon sınıfı ise Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu olarak adlandırıldı. Aronszajn'ın çalışmalarını Schwartz [16] genişletti.

1959'da Parzen'in [17] çalışmaları olasılık teorisi ve zaman serileri gibi çok çeşitli problemlerde kullanılabilecek teorik bir çerçeve sunarken, Larkin [18] 1970'de, üretici çekirdekli Hilbert uzayında optimal yaklaşım ilkesini ortaya koydu. Üretici çekirdek teorisinin tarihçesi ve ileri okumalar için her biri başlı başına önemli referanslar olan şu kaynaklar rehber alınabilir [19–25].

2000'lere gelindiğinde üretici çekirdeğin avantajları öğrenme teorisinde kullanılmaya başlandı [26–28]. Bergman'ın çalışmalarıyla önü açılan metot, çeşitli matematikçiler tarafından farklı tiplerdeki başlangıç ve sınır değer problemlerine uygulandı [29–33]. Cui ve Lin'in geniş kapsamda yaptıkları çalışmaların [72]'de toplanmasıyla literatüre önemli bir katkı sağlanmış oldu. Geng [34], daha önceki çalışmaları genişletip farklı bir iç çarpım kullanarak metodu doğrusal olmayan yüksek mertebeden sınır değer problemlerinin çözümünde kullandı.

2010'lar da hız kazanan üretici çekirdek metodu uygulamaları, Geng'ten sonra başka matematikçilerin de farklı iç çarpım kullanarak Sturm- Liouville problemleri [35], Dym başlangıç değer problemi [36], lineer olmayan Fredholm-Volterra integro diferansiyel denklemleri [37] gibi önemli modellerin yaklaşık çözümlerini incelemeleri ile genişlemiş oldu. Wang [38] singüler zayıf doğrusal olmayan sınır değer problemlerinin çözümlerini üç farklı yaklaşım metodu ile elde ederek bu genişlemeye katkıda bulundu. İlginç bir şekilde bu üç metodun sonuçları da oldukça iyiydi. Akgül ve Grow [39], iki değişkenli Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu'nda telgraf denkleminin çözümünün varlığını inceledi. Elektrostatik, ışımsal ısı transferi problemleri, potansiyel teori ve Dirichlet problemleri gibi önemli fiziksel uygulamalarda ortaya çıkan integral denklemlerine klasik anlamda üretici çekirdek metodu sıklıkla uygulandı [40–45]. Daha sonra Mei ve Lin [46] yaptıkları çalışmada Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecini ortadan kaldırarak Volterra integral denklemlerinin yaklaşık çözümlerini yakınsaklık durumunu analiz etti. Fizikte ve

astrofizikte önemli bir rolü olan Lane-Emden denklemlerinin katalitik difüzyon reaksiyonlarında ortaya çıkan versiyonuna ÜÇHM uygulandı [47]. Foroutan, [48] farklı bir yaklaşımla Chebyshev üretici çekirdeklerini kullanarak doğrusal ve doğrusal olmayan sınır değer problemlerinin çözümlerini elde etti. Metot, birçok matematikçi tarafından modifiye edilerek fark denklemlerinde [49, 50], kesirli türev [51–54] içeren problemlerde, impulsif denklemlerde [55], gecikmeli ısı iletim denklemlerinde [56] ve çeşitli uygulama alanlarında kullanıldı [57–60].

Günümüzde hâlâ geniş bir çerçevede uygulanmaya devam eden ve güncelliğini koruyan ÜÇHM, yakın zamanda tümör anjiyogenez probleminde iki boyutlu bir kılcal oluşum modelinin sayısal çözümleri için kullanılarak, Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu'nun karmaşık sınır şartlarını elimine etmekteki avantajından yararlanıldı [61]. Kesirli diferansiyel denklemlerin önemli uygulamalarından kanser tümör modellemesinin yaklaşık çözümleri ÜÇHU'da ele edilerek literatüre katkı sağlandı [62]. Xu ve Tohidi [63] tarafından Legendre polinomlarıyla modifiye edilerek intarpolasyon teorisi ile birlikte farklı bir sınır değer problemi sınıfının çözümlerinde ve hata tahminlerinde kullanıldı. Son zamanlarda gecikmeli kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için dikkate değer sıklıkta tercih edilen metot, Allahviranloo ve Sahihi'nin [64] çalışmasında Wang'ın [38] kullanmış olduğu metota ilave olarak Gram- Schmidt ortogonalizasyonu elimine edilerek uygulandı ve oldukça iyi sonuçlara ulaşıldı.

Gittikçe derinleşen ve genişleyen Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu teorisi şimdiye dek makine öğrenmesi, harmonik analiz, operatör teorisi, interpolasyon, integral denklemleri ve olasılık teorisi gibi çeşitli alanlarda yaygın kullanım alanı buldu. Bu yaygın kullanımın başlıca sebepleri arasında metodun karmaşık sınır koşullarıyla başa çıkmak için basit ve elverişli bir yol sunuyor oluşu, yüksek mertebeli türev içeren modellerde dahi işlem hacminin fazla olmaması, yüksek hassasiyetli güvenilir yaklaşık çözümler elde edilebilmesi yer alıyor.

Bu tez çalışmasının esas amacı, oldukça önemli uygulama alanları olan bazı homojen ve doğrusal yapıda olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini üretici çekirdekli Hilbert uzayı'nda elde ederek ve ÜÇHM'nin bu tipteki problemlerde kesin çözüme ne denli yakın sonuçlar verdiğini araştırmaktır.

Tezde ilk olarak

$$\frac{d^m u}{dx^m} = u(x, y), \quad x \in [a, c], \quad m \geq 2$$

formundaki doğrusal olmayan adi türevli diferansiyel denklemler ele alınacaktır. Bu denklemlerin bazı homojen ve homojen olmayan başlangıç ve sınır şartları gözetilerek yaklaşık çözümleri incelenecektir. Bunun için tek değişkenli klasik Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı inşa edilecek, homojen olmayan şartlar özel dönüşümler yardımıyla elimine ederek uzaya entegre edilecektir. Çeşitli yoğun nokta seçimlerinde yaklaşık çözümün nasıl davrandığı araştırılarak farklı nümerik metotlarla kıyası yapılacak ve çözümlerin yakınsaklık analizleri sunulacaktır.

Daha sonra genel yapısı

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \gamma(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(w) + \zeta(w), \quad a < x < b, \quad t > 0$$

şeklinde olan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'nda yaklaşık çözümleri araştırılacaktır. Yöntemin nümerik uygulamaları için kompleks fiziksel yapıların davranışlarını anlamakta önemli rolleri olan Burgers, Fisher, Huxley, Burgers-Fisher ve Burgers-Huxley denklemleri seçilmiştir. Bu denklemlerin yaklaşık çözümleri için adi türevli denklemlerden farklı olarak iki değişkenli Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayları inşa edilerek, özel dönüşüm fonksiyonları eliyle homojenleştirilecek olan başlangıç ve sınır şartları göz önüne alınacaktır. Yaklaşık çözüm uzayı inşa edilirken her bir problem için tek bir şekilde mevcut olan üretici çekirdek fonksiyonları, sınırlı lineer bir operatör, Gram-Schmidt ortogonalizasyon süreci, ortonormalleştirilmiş fonksiyon kümeleri kullanılacaktır.

Yapılan çalışmaya dair genel bir bakış ve okuyucu için yol haritası şu şekildedir: Tez altı bölümden oluşmaktadır. 2. bölümde Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu'nun daha iyi algılanabilmesi için altyapı oluşturacak bazı temel ve gerekli tanım teoremler sunulacaktır. Bu tanım ve teoremler fonksiyonel analiz ve diferansiyel denklemler olmak üzere iki alt başlıkta toplanacaktır. Tezin esas konusu olan ÜÇHM teorisi 3. bölümde detaylıca sunularak, çekirdek uzayları inşa edilecek ve çekirdek fonksiyonlarına dair ispatlar verilecektir. 4. bölümde adi türev içeren sınır değer problemlerinin ÜÇHU'da yaklaşık çözümleri araştırılacak, mutlak ve göreceli hataları tablolar eşliğinde sunulacaktır. Daha kompleks yapıda olan kısmi türev içeren başlangıç ve sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerinin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'ndaki davranışlarına ve detaylı analizlerine 5. bölümde yer verilecek olup elde edilen bulgular ve değerlendirmeler 6. bölümdeki sonuçlar kısmında tartışılacaktır.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezin esas konusu olan üretici çekirdekli Hilbert uzayı teorisini detaylandırmadan evvel, teorinin anlaşılmasında, sonraki kısımlarda ele alınacak problemlerin çözüm aşamalarında ve elde edilecek sonuçların algılanmasında yardımcı olacak bazı temel tanım ve teoremleri sunulacaktır. Bu temel bilgiler ve bazı önemli notasyonlar, konu bütünlüğü sağlaması amacıyla fonksiyonel analiz ve diferansiyel denklemler olarak iki ayrı başlık altında sınıflandırılacaktır.

2.1 Fonksiyonel Analiz ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1. (Metrik Uzay) [65] X boştan farklı bir küme olmak üzere, her $x, y, z \in X$ için $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

- (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartlarını sağlıyorsa d 'ye X üzerinde bir *metrik* ve (X, d) çiftine bir *metrik uzay* denir.

Tanım 2.2. [66] X kümesi olarak, bağımsız reel bir t değişkeninin fonksiyonu olan ve verilen kapalı bir $J = [a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli $x, y, \dots$ fonksiyonlarından oluşan kümeyi alalım. Bu küme üzerinde,

$$d(x, y) = \max_{j \in J} |x(t) - y(t)|$$

ile tanımlanan metriği göz önüne alırsak $C[a, b]$ sembolüyle belirtilen bir metrik uzay elde ederiz. $C[a, b]$ 'nin her bir noktarsı bir fonksiyon olduğundan, bu uzay bir fonksiyon uzayıdır.

Tanım 2.3. (Yakınsak Dizi) [67] (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $x \in X$ olmak üzere her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N$ için

$$d(x, x_n) < \epsilon$$

olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi $x \in X$ 'e yakınsar veya (x_n) yakınsaktır denir.

Tanım 2.4. (Cauchy Dizisi) [67] (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq N$ için

$$d(x_m, x_n) < \epsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.5. (Tam Uzay) [65] Bir (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.6. (Vektör Uzayı) [68] V , toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle donatılmış nesnelerin boştan farklı bir kümesi olsun.

- $u, v \in V$ için $u + v \in V$,
- $\lambda \in \mathbb{F}$ için $\lambda u \in \mathbb{F}$,

şeklinde ifade edilen toplama ve çarpma işlemi tüm $u, v, w \in V$ ve tüm $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ skalerleri için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa V kümesine $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı (doğrusal uzay) denir.

- (a) $u + v = v + u$,
- (b) $(u + v) + w = u + (v + w)$,
- (c) $u + (\theta) = u$ olacak biçimde bir tek $\theta \in V$ vardır,
- (d) Herbir $u \in V$ için $u + (-u) = \theta$ olacak şekilde bir tek $-u \in V$ vardır,
- (e) $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu u)$,
- (f) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$,
- (g) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda u + \mu u$,
- (h) $1 \cdot u = u, \forall u \in V$.

Burada önemli olan toplama ve çarpma işlemlerinin nasıl tanımlandığı değil, yukarıdaki aksiyomları sağlamaları gerektiridir. Bununla birlikte eğer $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise V 'ye reel vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise kompleks vektör uzayı denir. $\mathbb{F}$ 'nin elemanları skaler ve V 'nin elemanları ise vektör olarak adlandırılır.

Tanım 2.7. (Baz) [69] V bir vektör uzayı ve $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V, k \geq 1$ olsun. $\mathbf{v}$ doğrusal bağımsız ise ve $\text{Span } \mathbf{v} = V$ oluyorsa yani $\mathbf{v}$, V 'yi geriyorsa $\mathbf{v}$ kümesine V 'nin bir tabanı(bazı) denir.

Tanım 2.8. (Normlu Uzay) [68] $V, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

şeklinde tanımlı olan $\|\cdot\|$ fonksiyonu

- (N1) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
- (N2) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \forall u \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}$,
- (N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, u, v \in V$,

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna V üzerinde bir norm, $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine ise normlu uzay adı verilir.

Tanım 2.9. (Norm Metriği) [67] $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir vektör uzayı olmak üzere,

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

ile tanımlı $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir metrik tanımlar. Bu metriğe norm metriği denir.

Tanım 2.10. (Sınırlı Dizi) [65] (x_n) , $(X, \|\cdot\|)$ 'de bir dizi olsun. Her n için $\|x_n\| \leq k$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ sayısı varsa (x_n) 'ye sınırlı dizi denir.

Tanım 2.11. (Yakınsak Dizi) [66] Normlu bir X uzayında bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer X uzayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir x elemanını içeriyorsa (x_n) dizisi x 'e yakınsaktır denir. $x_n \rightarrow x$ olarak gösterilir ve x 'e (x_n) dizisinin limiti adı verilir. Bu limit tek türlü belirlidir.

Tanım 2.12. (Cauchy Dizisi) [66] X bir normlu uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\forall \epsilon > 0$ sayısı için, $m, n > N$ olduğunda

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon$$

olacak şekilde bir N sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi adı verilir.

Tanım 2.13. (Banach Uzayı) [65] X bir normlu uzay olmak üzere, eğer X norm metriğine göre tam ise bu durumda X 'e Banach uzayı adı verilir.

Tanım 2.14. (Kompaktlık) [70] (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A 'daki her bir dizi A 'nın bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse A 'ya kompakttır denir.

Tanım 2.15. (Yoğun Küme) [65] S , (X, d) metrik uzayının bir alt kümesi olsun. $\bar{S} = X$ oluyorsa, S 'ye X 'de yoğundur denir.

Tanım 2.16. (Mutlak Süreklilik) [71] $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli f fonksiyonu ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n \subset [a, b]$ için $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir denir.

Tanım 2.17. [72] $\Omega = \{[a, b] \times [c, d]\} \subset \mathbb{R}^2$ bir bölge, $f(x, y)$ Ω bölgesi üzerinde bir fonksiyon ve ikişerli ayrık $I_k \subset \Omega$ bölgelerinin kümesi $\{I_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]\}_{k=1}^n$ olsun. Eğer $f(I_i) = f(b_i, d_i) - f(b_i, c_i) - f(a_i, d_i) + f(a_i, c_i)$ olmak üzere $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ için $\sum_{i=1}^n |I_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |f(I_i)| < \epsilon$ oluyorsa ve $f(x, c), g(a, y)$ fonksiyonları sırasıyla x ve y 'ye göre mutlak sürekli ise bu durumda $f(x, y)$ fonksiyonu Ω bölgesinde tamamen süreklidir denir.

Önerme 2.1. [72] $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli ise Ω bölgesinin tamamında süreklidir.

Tanım 2.18. (Doğrusal Operatör) [73] E ve F , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki doğrusal uzay olsun. $T : E \rightarrow F$ operatörü, $\forall x, y \in E$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

şartını sağlıyorsa T 'ye doğrusal operatör denir.

Özellik 2.1. [65] L ve L' uzayları $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki doğrusal uzay ve $T : L \rightarrow L'$ doğrusal bir operatör olsun. Bu takdirde

- $T(\theta) = \theta'$
- $T(-x) = -T(x)$
- $T(x - y) = T(x) - T(y)$
- $T(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(x_i)$.

özellikleri sağlanır.

Tanım 2.19. (Operatörün Çekirdeği) [65] T , L' 'den L' ye tanımlı doğrusal bir operatör olsun. T altında L' nün özdeş elemanına dönüşen elemanların kümesine T 'nin çekirdeği veya sıfır uzayı denir. Çekirdek

$$\text{Çek}T = \{x \in L : T(x) = \theta'\} = T^{-1}(\theta')$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.20. (Sınırlı Operatör) [70] E ve E' normlu uzaylar olmak üzere, $T : E \rightarrow E'$ şeklindeki doğrusal operatör için

$$\|T(x)\| \leq K\|x\|, \forall x \in E$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı varsa T 'ye sınırlı doğrusal operatör denir.

Tanım 2.21. (Süreklili Operatör) [73] $(E, |||)$ ve $(F, |||)$ iki normlu uzay ve $T : E \rightarrow F$ bir operatör olsun. $x_0 \in E$ için, $\epsilon > 0$ verdiğinde $\|x - x_0\|_E < \delta$ için $\|T(x) - T(x_0)\|_F < \epsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ reel sayısı varsa T 'ye x_0 'da süreklidir denir.

Teorem 2.1. [66] E ve F normlu uzaylar, $T : E \rightarrow F$ doğrusal bir operatör olsun. Bu durumda T 'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T 'nin sınırlı olmasıdır.

Tanım 2.22. (Fonksiyonel) [66] L , $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f : L \rightarrow \mathbb{F}$ operatörüne fonksiyonel denir. Eğer L doğrusal ise doğrusal fonksiyonel adı verilir. Aslında fonksiyoneller değer kümesi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olan özel operatörlerdir. Fonksiyoneller için bir bakıma değişkenleri de fonksiyon olan özel fonksiyonlardır denebilir.

Tanım 2.23. (Sınırlı Doğrusal Fonksiyonel) [73] E bir normlu uzay olsun. E üzerindeki bir doğrusal fonksiyonel için,

$$|f(x)| \leq K\|x\|$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa bu durumda f 'ye sınırlı doğrusal fonksiyonel denir.

Tanım 2.24. (Dual Uzay) [68] X ve Y normlu uzaylar olmak üzere, $f: X \rightarrow Y$ şeklindeki tüm sınırlı doğrusal operatörlerin kümesi $\mathcal{B}(X, Y)$ ile ifade edilir. $Y = \mathbb{F}$ ($= \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) ise $\mathcal{B}(X, Y)$ 'in elemanları X normlu uzayı üzerinde tanımlı fonksiyoneller olarak adlandırılır. X üzerindeki tüm sınırlı doğrusal fonksiyonellerin kümesine ise X 'in dual uzayı denir ve notasyon olarak $\mathcal{B}(X, Y)$ yerine X^* ile gösterilir. X ve X^* uzayları birbirine izomorftur.

Tanım 2.25. (Riesz-Frechet Temsil Teoremi) [69] $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $f \in \mathcal{H}^* = \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{F})$ ise o zaman her $x \in \mathcal{H}$ için

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

olacak şekilde bir tek $y \in \mathcal{H}$ vardır. Ayrıca $\|f\| = \|y\|$ dir.

Riesz-Frechet Temsil Teoremi, bir Hilbert uzayı ile bu uzayın duali arasındaki ilişkiyi belirleyen, teoride ve uygulamada oldukça yüksek öneme haiz bir sonuçtur. Bununla birlikte $\mathcal{H}$ üzerindeki herhangi sınırlı doğrusal bir fonksiyonelin iç çarpımla tanımlanabileceğini söyler. Teorem, üretici çekirdeklerin anlaşılmasında önemli bir yer tutmaktadır.

Tanım 2.26. (İç Çarpım Uzayı) [68] V , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir doğrusal/vektör uzayı olsun. V üzerinde bir iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$f := \langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}, (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = f(u, v)$$

fonksiyonudur. Her $u, v, w \in V$ ve $\lambda \in \mathbb{F}$ için

$$(İ1) \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$(İ2) \quad \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$(İ3) \quad \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$(İ4) \quad \langle u, u \rangle \geq 0, \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Geometrik anlamda iç çarpım, u bir birim vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle$ göz önüne alındığında v vektörünün u vektörü üzerine izdüşümünün boyunu ifade etmektedir. u vektörünün birim olmadığı durumlarda v 'nin izdüşümü değişmeyecektir.

Tanım 2.27. (Hilbert Uzayı) [65] Bir iç çarpım uzayı tam ise bu uzaya Hilbert uzayı adı verilir.

Başka bir deyişle bir Hilbert uzayı, üzerinde tanımlı iç çarpım fonksiyonun belirlediği norma göre tüm Cauchy dizilerinin uzayın içinde yer alan bir elemana yakınsadığı uzaydır. Normlu uzayların tamlaştırılmasıyla Banach uzaylarının elde edildiği gibi, iç çarpım uzayının

tamlaştırılmasıyla da Hilbert uzayı elde edilir. Hilbert uzayları aynı zamanda bir Banach uzayı olmakla beraber, teorileri genel normlu uzaylardan ve Banach uzaylarından oldukça geniştir.

Tanım 2.28. (Kapalı Uzay) [65] $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $M \subset \mathcal{H}$ olsun. Eğer M , $\mathcal{H}$ 'de yakınsak olan tüm dizilerin limitlerini içeriyorsa M uzayı $\mathcal{H}$ 'de kapalıdır denir.

Tanım 2.29. (Ortogonalite) [66] Bir X iç çarpım uzayının, x ve y şeklinde iki elemanı verildiğinde

$$\langle x, y \rangle = 0$$

oluyorsa x , y 'ye diktir denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir.

Diklik, detaylıca inceliyor olacağımız Hilbert uzaylarının ana kavramını oluşturmaktadır.

Tanım 2.30. (Ortonormalite) [66] Her bir elemanın normunun bir eşi olduğu ortogonal bir M kümesine ortonormal küme (birim dik küme) denir.

X bir iç çarpım uzayı olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subset X$ kümesini göz önüne alalım. $1 \leq n \leq k$ ve $1 \leq m \leq k$ olmak üzere her m, n için

$$(e_m, e_n) = \begin{cases} 1, & m = n \text{ ise} \\ 0, & m \neq n \text{ ise} \end{cases}$$

sağlanırsa $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ kümesi ortonormal bir küme olur. Burada $m = n$ olması $\|e_n\| = 1$ olması ile denktir [67].

Tanım 2.31. (Gram-Schmidt Ortogonalizasyon Metodu) [74] V sonlu boyutlu bir vektör uzayı, $\langle u, v \rangle$ bu uzay üzerinde tanımlı iç çarpım ve $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ bir baz olsun.

$$w = w_{r+1} - \sum_{i=1}^r \langle w_{r+1}, u_i \rangle u_i$$

olmak üzere

$$u_{r+1} = \frac{w}{\|w\|}$$

eşitliğini tanımlayalım. Bu durumda $(u_1, \dots, u_{r+1})$, $S(w_1, \dots, w_{r+1})$ için ortonormal bir baz olur.

Gram-Schmidt yönteminin esası, bir iç çarpım uzayında doğrusal bağımsız bir vektör sisteminden evvela birbirine dik olan yani ortogonal bir vektör sistemi, daha sonra da uzunlukları birimleştirilmiş yani ortonormal bir vektör sistemi elde etmeye dayanır. Tanımdaki son aşamada verilen $u_{r+1} = \frac{w}{\|w\|}$ eşitliği, elde edilen ortogonal sistemin birimleştirildiğini ifade etmektedir. Bu yöntem, tezin esas konusu olan üretici çekirdekli Hilbert uzayları içinde önemli bir kavramdır.

Tanım 2.32. (Ortonormal Taban) [67] Herhangi bir X iç çarpım uzayında $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ birim dikey (ortonormal) kümesi doğrusal bağımsızdır. Özellikle eğer iç çarpım uzayı k -boyutlu ise o zaman $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ kümesi X için bir tabandır ve her $x \in X$ vektörü

$$x = \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 'ye bir ortonormal taban denir. $\langle x, e_n \rangle$ sayıları bu tabana göre x 'in bileşenidir.

Tanım 2.33. (İç Çarpım Normu) [66] X bir iç çarpım uzayı olmak üzere

$$\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olarak tanımlanan $\| \cdot \|$ fonksiyonu iç çarpım normu olarak adlandırılır.

Tanım 2.34. (Adjoint Operator) [70] $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ iki Hilbert uzayı ve $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ sınırlı lineer operatör olsun. $T^*: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ operatörü

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

şartını sağlıyorsa T^* operatörüne T 'nin adjointi denir.

Tanım 2.35. [68] $-\infty < a < b < \infty$ ve $f, [a, b]$ üzerinde reel değerli bir fonksiyon olsun. $L^2[a, b]$, $[a, b]$ üzerindeki f fonksiyonlarının

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

şartını sağlayan bir uzayıdır. $L^2[a, b]$ 'ye $[a, b]$ aralığındaki tüm reel değerli karesi integrallenebilir fonksiyonların uzayı denir.

Tanım 2.36. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) [74] V iç çarpım uzayı, u ve v bu uzaydan seçilmiş keyfi vektörler olsun. Bu durumda

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.37. (Üçgen Eşitsizliği) [74] V bir iç çarpım uzayı olmak üzere, $\forall u, v \in V$ için

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

eşitsizliği geçerlidir.

2.2 Diferansiyel Denklemler ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

Anlamlandırılmayı bekleyen bütün fiziksel fenomenlerin, doğa olaylarının; mühendislikte, tıpta, biyolojide ve sosyal bilimlerde karşılaşılan problemlerin öncelikle modellenmeye ihtiyacı vardır. Bunun için bu problemlerin anlaşılabilmesine yardımcı olmak amacıyla yıllardan beri çeşitli matematiksel modeller geliştirilmiştir. Bu modeller genellikle bilinmeyen bir fonksiyonun bazı türevlerini içeren bir denklem ortaya koyar. Böyle bir denkleme diferansiyel denklem adı verilir. Eğer bu denklem sadece bir bağımsız değişkene göre adi türevleri muhteva ediyorsa adi diferansiyel denklem (ADD), birden fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevleri içeriyorsa kısmi diferansiyel denklem (KTD) adını alır.

Bu bölümde, bir ön hazırlık amacıyla tezin esas konusu olan adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlere dair bazı temel tanım ve teoremleri iki ayrı alt başlık altında sunulacaktır.

2.2.1 Adi Diferansiyel Denklemler ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Bu alt bölümde, adi türevli diferansiyele dair temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.38. [75] $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ formundaki herhangi bir denklem adi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Burada en yüksek mertebeli türev $y^{(n)}$ ise bu durumda adi diferansiyel denkleme n . mertebeden bir denklemdir denir.

Tanım 2.39. (Doğrusal ADD) [75] Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve bu değişkene bağlı tüm türevler birinci dereceden ise ve bağımlı değişken ile türevleri çarpım halinde bulunmuyorsa bu denkleme doğrusal diferansiyel denklem denir. Aksi halde doğrusal olmayan diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

Matematik ve fizikte doğrusal genellikle "basit", doğrusal olmayan "karmaşık" anlamını temsil eder. Doğrusal denklemleri çözmek için mevcut teoriler oldukça iyi gelişmiştir çünkü doğrusal denklemler çözümlerine ulaşılabilen denklemlerdir. Doğrusal olmayan denklemler ise genellikle tam olarak çözülemez ve devam eden birçok araştırmanın konusudur. Bu denklemler doğrusalleştirme yöntemi ile doğrusal bir denkleme dönüştürülebilse de doğrusal denklemlerin ifade etmede yetersiz kaldığı birçok fiziksel olay vardır.

Tanım 2.40. (Homojen Olmayan Doğrusal ADD) [75]

$a_1, a_2, \dots, a_n$ ve b bir I aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\mathbb{L}y = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = b(t), \quad t \in I \quad (2.1)$$

denklemini göz önüne alalım. $b(t) \neq 0$ ise bu denklem homojen olmayan doğrusal adi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Aksi halde homojen bir denklemdir denir.

Tanım 2.41. [76] (2.1) ile verilen adi diferansiyel denklemin $\alpha < t < \beta$ aralığındaki çözümünü ϕ fonksiyonu olsun. Bu durumda $\phi', \phi'', \dots, \phi^{(n)}$ türevleri vardır ve $\alpha < t < \beta$ aralığındaki her t için

$$\phi^{(n)}(t) = f[t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)]$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.42. (Başlangıç Değer Problemi) [76] $t_0, y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) &= y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde verilen probleme n . mertebeden başlangıç değer problemi denir.

Tanım 2.43. (Sınır Değer Problemi) [76] Fiziksel uygulamalar genellikle bağımlı değişken olan y 'nin veya y 'nin türevinin değerinin iki farklı nokta için belirtildiği başka bir tür problemi ortaya çıkarır. Bu probleme sınır değer problemi, problemin şartlarına ise sınır şartları adı verilir.

Fiziksel problemleri araştırırken yapılan matematiksel modellemeler nihai olarak bir diferansiyel denklem ortaya koyar. Çözüme ulaşmak için çaba ve zaman harcamadan önce bu diferansiyel denklemin yani mevcut olaya ait problemin bir çözümünün var olduğunu bilmek gelecekteki öngörülebilir durumların bilgisini de içerir. Tersinden yorumlayacak olursak eğer bir çözümün olmadığı bilirse çözüme ulaşmak için harcanacak vaktin kaybı engellenmiş olur. Dahası, bir çözüm bulunduğunda eğer bu çözüm bir tek şekilde var (unique) ise bu teklik belirsizliği ortadan kaldırır. Bu sebeple çözümün varlığı ve tekliği diferansiyel denklem teorisi için çok önemli bir yer işgal eder. Bu da bizi aşağıdaki temel teoreme götürür:

Teorem 2.2. (Çözümün Varlığı ve Tekliği) [76] $a_1, a_2, \dots, a_n$ ve b fonksiyonları açık bir $I : \alpha < t < \beta$ aralığında sürekli ise bu durumda her $t \in I$ için (2.1) denklemini sağlayan tek bir $y = \phi(t)$ çözüm fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon aynı zamanda $y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, in keyfi olarak belirlenmiş başlangıç değerleri olduğu

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

şeklindeki başlangıç şartlarını da sağlar.

Tanım 2.44. (Lipchitz Şartı) [77] Eğer $\forall t \in [a, b]$ ve $\forall y_1, y_2 \in [c, d]$ için

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ varsa $f(t, y)$ fonksiyonu y değişkenine göre $D(a \leq t \leq b, c \leq y \leq d)$ bölgesinde Lipchitz şartını sağlar denir.

Teorem 2.3. [77] $\Omega, \mathbb{R}^2$ 'de açık bağlantılı bir küme, $\forall(t, y) \in \Omega$ için $f(t, y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli bir fonksiyon ve (t_0, Y_0) ikilisi Ω 'de bir iç nokta olsun. $f(t, y)$ fonksiyonunun $K > 0$ için

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \quad \forall(t, y_1), (t, y_2) \in \Omega$$

Lipchitz şartını sağladığını kabul edelim. Bu durumda $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} Y'(t) &= f(t, Y(t)), \quad t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha, \\ Y(t_0) &= Y_0. \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ aralığında bir tek $Y(t)$ çözümü vardır.

Adi diferansiyel denklemler çok sayıda fiziksel olayın anlaşılmasında, modellenenbilmesinde ve çözümlerinin araştırılmasında önemli rol alıyor olsa da belli bir yerden sonra yetersiz kalırlar. Bu noktada kısmi türevli diferansiyel denklemler (KTD) devreye girer. Kısmi türevli denklemlerin teorisi ADD'lere göre oldukça karmaşıktır. Nitekim ADD'ler için geçerli her temel teoremin KTD'ler için geçerli olmayacak olması durumu, kısmi türevli denklemlerin birden fazla değişken içeriyor olmasından daha öte kompleks sebepler taşır. Her iki denklem tipinin çözümleri karşılaştırıldığında, adi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde keyfi sabitleri, kısmi türevli denklemlerin çözümlerinde keyfi fonksiyonların olması ve hatta çoğu kez kısmi türevli denklemlerde bir çözümün varlığından bile söz edilememesi kompleks sebeplerden sadece bir tanesine işaret eder.

2.2.2 Kısmi Diferansiyel Denklemler ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Bu alt bölümde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin temelini oluşturan ve ilerleyen bölümlerde yer alacak üretici çekirdek teorisinin anlaşılmasında yardımcı olacak bir tanım ve teoremler sunulacak.

Tanım 2.45. [78] $u = u(x, t)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. I sınırlı veya sınırsız bir aralık olmak üzere, bir kısmi diferansiyel denklem

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0, \quad x \in I, \quad t > 0$$

şeklinde ile ifade edilir.

İkinci merdebeden bir kısmi diferansiyel denklemin genel formu

$$A(x, t)u_{xx} + B(x, t)u_{xt} + C(x, t)u_{tt} + D(x, t)u_x + E(x, t)u_t + F(x, t)u = G(x, t)$$

şeklinde dir. Bu denklem göz önüne alındığında $\Delta = B^2 - 4AC$ olmak üzere, ikinci

mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklem

$\Delta > 0$ ise, hiperbolik

$\Delta = 0$ ise, parabolik

$\Delta < 0$ ise, eliptik

şeklinde sınıflandırılır.

Tanım 2.46. (Doğrusal KTD) [79] $f(x, t)$ iki bağımsız değişken içeren herhangi bir fonksiyon ve L doğrusal bir operatör olsun. Bir kısmi türevli denklem $L(u) = G(x, t)$ formunda yazılabiliyorsa lineer bir kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

Bir kısmi diferansiyel denklem doğrusal değilse yarı-doğrusal veya doğrusal olmayan formdadır. Uygulamada oldukça önemli yerleri olan bazı doğrusal denklemlerin örnekleri aşağıdaki gibidir:

- Isı Denklemi: $u_t - \Delta u = 0$.
- Dalga Denklemi: $u_{tt} - \Delta u = 0$.
- Telgraf Denklemi: $u_{tt} + du_t - u_{xx} = 0$.
- Schrodinger Denklemi: $iu_t + \Delta u = 0$.
- Airy Denklemi: $u_t + u_{xxx} = 0$.

Doğrusal olmayan denklemler kategorisinde ise şu denklemlerden bahsedilebilir:

- Burgers Denklemi: $u_t + uu_x = 0$.
- Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi: $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$.
- Skaler Reaksiyon-Difüzyon Denklemi: $u_t - \Delta u = f(u)$.
- Hamilton-Jacobi Denklemi: $u_t + H(u_x) = 0$.

Tanım 2.47. (Homojen KTD) [79] Lineer bir $L(u) = G(x, t)$ kısmi türevli denklemde $G(x, t) = 0$ ise bu durumda denklem homojen bir KTD'dir denir. Aksi halde homojen olmayan bir deklemdir.

Tanım 2.48. [80] Verilen bir kısmi türevli denklem

- (i) Problemin çözümü var,
- (ii) Problemin çözümü bir tek şekilde belirli,
- (iii) Çözüm problemde verilen verilere bağlı

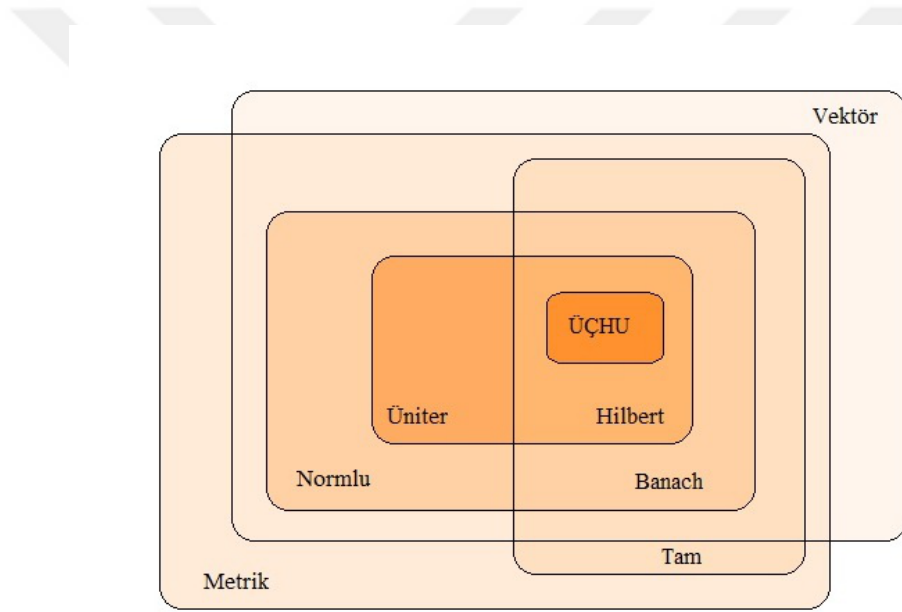
özelliklerine sahipse bu durumda bu denkleme *iyi tanımlıdır* denir.



3 ÜRETİCİ ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYLARI

Bu bölümde Üretici Çekirdekli Hilbert Uzaı teorisinin temel yapısı ve diferansiyel denklemler için üretici çekirdek fonksiyonları kullanılarak elde edilen çözüm metodu tanıtılacaktır.

Üretici Çekirdekli Hilbert Uzaı (ÜÇHU) aslında bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzaı üzerine inşa edilen ve belli özellikleri taşıyan özel yapıda uzaılardır. Önceki bölümde metrik uzaıların, vektör (lineer) uzaıların, normlu uzaıların, Banach ve Hilbert uzaıların temellerinin verilmesinin esas sebebi üretici çekirdekli Hilbert uzaıların tam olarak bu temeller üzerine kurulmuş olmasıdır. Bir ÜÇHU, Hilbert uzaının belli özellikler yüklenerek kısıtlandırılmış hâlidir denebilir. Bu kısıtlandırma ve yüklenen özellikler detaylandırılacak olsa da, ilk etapta uzaılar arasında nasıl bir ilişki olduğu Şekil 3.1 yardımıyla rahatça anlaşılabilir.



Şekil 3.1 ÜÇHU ve diğer uzaılar arasındaki ilişki

3.1 Üretici Çekirdekli Hilbert Uzaının Temelleri

Bu bölümde, tezin asıl amacını oluşturan Üretici Çekirdekli Hilbert Uzaı Metodu'nun temellerini inşa eden bazı tanım ve teoremler sunuluyor olacak.

Tanım 3.1. (Pozitif Tanımlılık) [23] $k: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı k fonksiyonu, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ve $x_1, \dots, x_n$ için

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j k(x_j, x_i) \geq 0$$

eşitsizliğini sağlıyorsa pozitif tanımlıdır denir.

Teorem 3.1. [23] Bir $k: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun çekirdek olması için gerek ve yeter şart simetrik ($\forall x_1, x_2 \in X$ için $k(x_1, x_2) = k(x_2, x_1)$) ve pozitif tanımlı olmasıdır.

Tanım 3.2. (Mercer Çekirdeği) [5] X bir metrik uzay ve $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve simetrik bir fonksiyon olsun. K 'nin pozitif tanımlı olduğunu kabul edelim. Yani herhangi bir $x = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ kümesi için $(K|_x)_{ij} = K(x_i, x_j)$ bileşenlerini içeren $K|_x$ matrisi pozitif tanımlı olsun. Bu durumda K , Mercer Çekirdeği olarak adlandırılır.

Tanım 3.3. (Mercer Teoremi) [5] X kompakt bir metrik uzay ve $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ Mercer çekirdeği olsun. Ayrıca μ , $\text{supp } \mu = X$ olan sonlu bir Borel ölçüsü olsun. $\{\lambda_j\}_{j \geq 1}$ özdeğer ve $\{\phi_j\}_{j \geq 1}$ özfonksiyon olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \phi_j(x) \phi_j(y)$$

olur. Burada serinin yakınsaması mutlak ve düzgündür.

Teoride oldukça önemli yer tutan Mercer Teoremi'nin tarihçesi 1900'lü yıllara kadar uzanmakta olup, ileriki aşamalarda teoremdaki seri gösterimi Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'nı tanımlamak için kullanılacaktır. Teoremda geçen $\text{supp } \mu = X$, sıfırdan farklı μ fonksiyonlarının X kümesi olarak temsil edildiğini ifade etmektedir. Başka bir deyişle $\text{supp } \mu = \{x \in X \mid \mu(x) \neq 0\}$ şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.4. (Hesaplama Fonksiyoneli) [23] $\mathcal{H}$, boştan farklı bir $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde tanımlı olan $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir Hilbert uzayı olsun. Sabit bir $x \in \mathcal{X}$ noktası için, $\delta_x: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta_x: f \mapsto f(x)$ fonksiyonuna (Dirac) hesaplama fonksiyoneli denir.

Hesaplama fonksiyonelinin her zaman lineer olduğu açıktır: $f, g \in \mathcal{H}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\delta_x(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \delta_x(f) + \beta \delta_x(g)$. Burada doğal olarak şöyle bir soru doğar: Hesaplama fonksiyoneli aynı zamanda sürekli midir? (Sürekliliğin sınırlılığa denk olduğu Teorem 2.1'de verilmişti.) İşte bu sorunun cevabı tam olarak Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'nın nasıl tanımlandığıdır.

Tanım 3.5. (Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı) [23] $\mathcal{H}$, boş olmayan bir $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde tanımlı $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir Hilbert uzayı olsun. Eğer $\forall x \in \mathcal{X}$ için δ_x hesaplama fonksiyoneli sürekli ise $\mathcal{H}$ bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı (ÜÇHU)'dır denir.

Teorem 3.2. [22] $\mathcal{X}$ üzerinde tanımlı kompleks fonksiyonlardan oluşan bir Hilbert uzayı ancak ve ancak $\mathcal{X}$ 'deki tüm δ_t , $t \in \mathcal{X}$ hesaplama (evaluation) fonksiyonelleri $\mathcal{H}$ üzerinde sürekli ise bir üretici çekirdeğe sahiptir.

Sonuç 3.3. Bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'nda norm yakınsaması noktasal yakınsaklığı gerektirir. Yani eğer iki fonksiyon birbirine ÜÇHU normu ile yakınsıyorsa bu durumda bu

fonksiyonlar her noktada yakınsaktır. Bunu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_k} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Kanıt. Herhangi $x \in X$ için ,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\delta_x f_n - \delta_x f| \\ &\leq \|\delta_x\| \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_k}. \end{aligned}$$

Burada $\|\delta_x\|$ normu ÜÇHU tanımı gereği sınırlı olan hesaplama fonksiyoneli temsil etmektedir. $\square$

Eğer üretici çekirdekli Hilbert uayında çalışılmıyorsa norm yakınsaklığı her zaman noktasal yakınsaklığı gerektirmeyebilir. Bu durum bir örnekle izah edilebilir. Kabul edelim ki $\mathcal{H} = L_2([0, 1])$ olsun ve bu uzaya ait norm

$$\|f_1 - f_2\|_{L_2([0,1])} = \left(\int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

olarak verilsin. $s_n = x^n$ olmak üzere $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - 0\|_{L_2([0,1])} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 x^{2n} dx \right)^{1/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat $s_n \rightarrow 0 \in \mathcal{H}$ iken $s_n(1) \not\rightarrow 0$ 'dır. Başka bir deyişle 1 noktasındaki hesaplama fonksiyoneli $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ kümesinde sürekli değildir.

3.2 Üretici Çekirdek ve Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Teorisi

Buraya kadar Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'nın hesaplama fonksiyoneli üzerinden tanımı verildi. Peki esas mesele üretici çekirdek olduğuna göre, ÜÇHU tanımı çekirdek kullanılarak nasıl inşa edilir? Bu soru Tanım 3.6'yı ve beraberinde başka soruları da doğurur:

- Çekirdek var mıdır? Varsa tek midir?
- Çekirdek hangi özellikleri ihtiva eder?
- Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı ile çekirdeğin ilişkisi nedir?

Bu bölümde bu soruların cevapları ve bazı temel kavramlar sunulacaktır.

Tanım 3.6. (Üretici Çekirdek Fonksiyonu) [22] $\mathcal{H}$, boş olmayan bir $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde tanımlı reel ya da kompleks değerli fonksiyonların bir Hilbert uzayı olsun. $k : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{H}$ 'nin üretici çekirdeği olarak adlandırılır.

- (a) $k(\cdot, x) \in \mathcal{H}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$
- (b) $\forall f \in \mathcal{H} \text{ ve } \forall x \in \mathcal{X} \text{ için } \langle f, k(\cdot, x) \rangle = f(x).$

$k(\cdot, x) = k_x$ olup, (b) maddesi $k(\cdot, x)$ çekirdeğinin "yeniden üretme özelliği", bir başka deyişle "çekirdeğin üretici özelliği" olarak bilinir. f fonksiyonunun x noktasındaki değeri f ve $k(\cdot, x)$ 'in iç çarpımıyla üretilir. Herhangi bir üretici çekirdek pozitif tanımlı bir fonksiyondur.

k_x fonksiyona y değeri için çekirdeğin yeniden üretme özelliğini uygulayarak

$$k_x(y) = k(y, x) = \langle k_x, k_y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{X}$$

elde edilir. Buradan $x \in \mathcal{X}$ için $\|k_x\| = \langle k_x, k_x \rangle^{1/2} = k(x, x)^{1/2}$ eşitliğine rahatça ulaşılır.

Özellik 3.1. Bir üretici çekirdekli $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı ve bu uzayın $k(x, y)$ çekirdeği için $\forall x, y \in \mathcal{X}$ olmak üzere

- $k(y, y) \geq 0,$
- $k(y, x) = \overline{k(x, y)},$
- $|k(y, x)|^2 \leq k(y, y)k(x, x)$ (Schwarz Eşitsizliği),

şartları sağlanır.

Teorem 3.4. (Üretici Çekirdeğin Varlığı) $\mathcal{H}$ uzayının Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{H}$ 'nin bir üretici çekirdeğe sahip olmasıdır.

Kanıt. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayını k üretici çekirdeği ve çekirdeğin $\langle f, k(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}} = f(x)$ şeklindeki üretme özelliği ile birlikte göz önüne alalım. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} |\delta_x f| &= |f(x)| \\ &= |\langle f, k(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}}| = |f(x)| \\ &\leq \|k(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}} \|f\|_{\mathcal{H}} \text{ (Cauchy-Schwarz eşitsizliği)} \\ &= \langle k(\cdot, x), k(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2} \|f\|_{\mathcal{H}} \\ &= k(x, x)^{1/2} \|f\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, $\delta_x : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir operatördür ve Tanım 3.5 gereğince $\mathcal{H}$ bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır.

Diğer yönün ispatı için kabul edelim ki $\mathcal{H}$ bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı ve dolayısıyla $\delta_x \in \mathcal{H}', \delta_x : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyonel olsun. Riesz Temsil Teoremi,

$$\delta_x f = \langle f, f_{\delta_x} \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

olacak şekilde bir $f_{\delta_x} \in \mathcal{H}$ olduğunu söyler. Bu durumda $\forall x, x' \in \mathcal{X}$ için $k(x', x) = f_{\delta_x}(x')$ tanımını yapacak olursak $k(\cdot, x) = f_{\delta_x} \in \mathcal{H}$ olduğu açıkça görülür. Buradan,

$$\langle f, f_{\delta_x} \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_x f = f(x)$$

elde edilir. Böylece k bir üretici çekirdektir. $\square$

Teorem 3.5. (*Üretici Çekirdeğin Tekliği*) $\mathcal{H}$, X üzerinde bir ÜÇHU olsun. Bu durumda, $k: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{F}$ üretici çekirdeği mevcut ise tektir.

Kanıt. Kabul edelim ki $\mathcal{H}$ uzayı k' ve k'' şeklinde iki üretici çekirdeğe sahip olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle f, k'(\cdot, x) - k''(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle f, k'(\cdot, x) \rangle - \langle f, k''(\cdot, x) \rangle \\ &= f(x) - f(x) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad \forall x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak $f = k'(\cdot, x) - k''(\cdot, x)$ seçersek,

$$\langle k'(\cdot, x) - k''(\cdot, x), k'(\cdot, x) - k''(\cdot, x) \rangle = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

bulunur. Buradan açıkça $k' = k''$ eşitliğine ulaşılır ki bu $\mathcal{H}$ uzayının tek bir çekirdeğe sahip olduğu anlamına gelir. $\square$

Teklik teoremi başka bir deyişle, bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı için çekirdeğin yeniden üretme özelliğini sağlayan iki çekirdek var ise bunların birbirine eşit olduğunu söyler. Yani herhangi bir ÜÇHU için var olan üretici çekirdek tektir.

Lemma 3.1. (*Çekirdeklerin Toplamı*) [23] $\mathcal{X}$ bir küme, $\alpha \geq 0$ ve k, k_1, k_2 $\mathcal{X}$ üzerinde tanımlı çekirdekler olsun. Bu durumda αk ve $k_1 + k_2$ toplamı da $\mathcal{X}$ üzerinde çekirdektir.

Çekirdeklerin toplamının yine bir çekirdek olması durumuna karşılık, çekirdeklerin farkı her zaman çekirdek olmayabilir.

Lemma 3.2. (*Çekirdeklerin Çarpımı*) [23] k_1 ve k_2 , sırasıyla $\mathcal{X}_1$ ve $\mathcal{X}_2$ üzerinde tanımlı çekirdekler olsun. $k_1 \times k_2$ çarpımı da $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ üzerinde tanımlı bir çekirdektir.

Teorem 3.6. (*Moore-Aronszajn*) [15] Bir $X \times X$ kümesi üzerinde tanımlı, simetrik ve aynı zamanda da pozitif yapıda bir $k(x, y)$ çekirdeği için X üzerinde $k(x, y)$ 'nin üretici çekirdeği olduğu tek bir Hilbert uzayı vardır.

Moore-Aronszajn Teoremi, çekirdekler ve Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayları arasında iki taraflı bir ilişki olduğunu belirtir. X kümesindeki fonksiyonların Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'nın k çekirdeği ile karakterize edilebildiğini ve k 'nin üretici çekirdek olma özelliğinin pozitif tanımlı bir fonksiyon olma özelliğine eşdeğer olduğunu iddia eder.

Teorem 3.7. [22] $\mathcal{H}$ uzayı, k üretici çekirdeğine sahip olan ve (X, d) metrik uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir Hilbert uzayı olsun. $\mathcal{H}$ ’nin herhangi bir elemanının sürekli olması için gerek ve yeter şart k çekirdeğinin

- $\forall y \in \mathcal{X}, k(\cdot, y)$ sürekli,
- $\forall x \in \mathcal{X}, \exists r > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ y &\mapsto k(y, y)\end{aligned}$$

fonksiyonu $B(x, r)$ açık yuvarı üzerinde sınırlı bir fonksiyon,

şartlarını sağlamasıdır.

Tanım 3.7. (Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı) [72] $\mathcal{H}, \mathcal{X}$ kümesi üzerindeki fonksiyonların bir Hilbert uzayı olsun. $\mathcal{H}$ uzayına ait 3.6’deki gibi tanımlanan bir k üretici çekirdeği varsa bu durumda $\mathcal{H}$ ’ye Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı (ÜÇHU) denir ve $\mathcal{H}_k$ ile gösterilir.

Teorem 3.8. [19] $\mathcal{H}_k$ ’deki herhangi $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistem ve $l^2(\mathbb{N})$ ’deki herhangi $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizi için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| |e_n(x)| \leq k(x, x)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bununla birlikte $\mathcal{H}_k$ ’daki herhangi tam $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi için $k(x, y)$ çekirdeği

$$k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x) \overline{e_n(y)}, \quad x, y \in X \times X$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.3 Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodunun İnşası

Bu bölümde, Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu’nun (ÜÇHM) teorik yapısı sunulacaktır.

Teorem 3.9. [19] Bir X kümesi üzerindeki $f(x)$ fonksiyonlarından oluşan $\mathcal{H}$ Hilbert uzayının bir $k(x, y)$ üretici çekirdeğinin olması için gerek ve yeter şart her $y \in X$ için $\mathbf{I}(f) = f(y)$ ’nin sınırlı lineer bir fonksiyonel olmasıdır.

Buradan Tanım 3.7 yardımıyla doğrudan bir Hilbert uzayının Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı olması için gerek ve yeter şartın $\mathbf{I}(f)$ fonksiyonelinin sınırlı lineer olması sonucu çıkarılabilir.

Önerme 3.1. [69] $[a, b]$ aralığında verilen bir $f(x)$ fonksiyonu için $x \in [a, b]$ olmak üzere $|f'(x)| \leq M$ sağlanıyorsa bu durumda $f(x)$ mutlak sürekli dir.

Kanıt. Keyfi bir $\epsilon > 0$ için $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ seçelim. $\sum_i = 1^n(b_i - a_i) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ ikili ayrıık açık aralıklarının kümesi $\{(a_k, b_k)\}_k = 1^n$ olsun. Bu durumda

$$|f(b_k) - f(a_k)| = |f'(\gamma_k)|(b_k - a_k) < M(b_k - a_k), \quad \gamma_k \in (b_k - a_k) \subset [a, b].$$

Dolayısıyla,

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < M \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

olup $f(x)$ fonksiyonu mutlak süreklidir. $\square$

Yukarıdaki önermeden hareketle bir $f'(x)$ fonksiyonu kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde sürekli ise bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun aynı aralık üzerinde mutlak sürekli olduğu sonucuna varılır. Mutlak süreklilik, fonksiyonun hemen hemen her yerde türevlenebilmesini sağlar.

Önerme 3.2. [72] *Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirse bu durumda $\int_a^x f(s)ds$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir.*

3.3.1 $\tilde{V}_2^m[a, b]$ Üretici Çekirdekli Uzay

Tek değişkenli üretici çekirdekli uzay řu şekilde tanımlanır:

Tanım 3.8. ($\tilde{V}_2^m[a, b]$ Fonksiyon Uzayı) [72] $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarından oluşan $\tilde{V}_2^m[a, b]$ uzayı

$$\tilde{V}_2^m[a, b] = \{f(x) | f^{(m-1)}(x) \in AC[a, b], \quad f^{(m)}(x) \in L^2[a, b], \quad x \in [a, b]\}$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi $f(x), g(x) \in \tilde{V}_2^m[a, b]$ için bu uzaya ait iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{\tilde{V}_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)dx \quad (3.1)$$

$$\|f\|_{\tilde{V}_2^m} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\tilde{V}_2^m}}. \quad (3.2)$$

biçimindedir. $\tilde{V}_2^m$ uzayının alt indisinde bulunan 2 rakamı L^2 uzayını temsil etmektedir.

Teorem 3.10. [72] $\tilde{V}^m[a, b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Teorem 3.11. [72] $\tilde{V}^m[a, b]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır.

Kanıt. Kabul edelim ki $f(x) \in \tilde{V}_2^m[a, b]$ ve $\mathbf{I}(f) = f(x)$, $x \in [a, b]$ $\tilde{V}_2^m[a, b]$ uzayının bir lineer fonksiyoneli olsun.

$$f^{(m-1)}(x) = f^{(m-1)}(a) + \int_a^x f^{(m)}(x)dx$$

eşitliği yazılabilir ve buradan

$$|f^{(m-1)}(x)| \leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^x |f^{(m)}(x)|dx \leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^x |f^{(m)}(x)|dx.$$

Herhangi bir $i \in [0, m-1]$ için,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f^{(m)}(x)|dx &\leq \left[(b-a) \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx \right]^{1/2} = M_0 \left[\int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\ &\leq M_0 \left[\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 dx + \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx \right]^{1/2} = M_0 \|f\|_{\tilde{V}_2^m} \end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$|f^{(i)}(a)| \leq \left[\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 dx + \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx \right]^{1/2} = \|f\|_{\tilde{V}_2^m} \quad (3.3)$$

elde edilir. Buradan hareketle

$$|f^{(m-1)}(x)| \leq M_1 \|f\|_{\tilde{V}_2^m} \quad (3.4)$$

eşitsizliğine ulaşılır. (3.3) ve (3.4) yardımıyla ve

$$\begin{aligned} |f^{(m-2)}(x)| &\leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^x |f^{(m-1)}(x)|dx \\ &\leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^b |f^{(m-1)}(x)|dx \end{aligned}$$

olduğu dikkate alındığında

$$|f^{(m-2)}(x)| \leq \|f\|_{\tilde{V}_2^m} + (b-a)M_1 \|f\|_{\tilde{V}_2^m} \quad (3.5)$$

bulunur. Burada eş bir ifade ile

$$|\mathbf{I}(f)| = |f(x)| \leq M_m \|f\|_{\tilde{V}_2^m}$$

yazılabilir. Buradan açıktır ki $\mathbf{I}$ fonksiyoneli sınırlı olup Teorem 3.9 gereğince $\tilde{V}_2^m$ uzayı Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. $\square$

Tanım 3.9. (${}^o\tilde{V}_2^m[a, b]$ Fonksiyon Uzayı) [72] ${}^o\tilde{V}_2^m[a, b]$ uzayı

$${}^o\tilde{V}_2^m[a, b] = \{f(x) : f(x) \in \tilde{V}^m[a, b], f'(a) = 0, f(b) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi $f(x), g(x) \in {}^o\tilde{V}^m[a, b]$ için bu uzaya ait iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)dx \\ \|f\|_{{}^o\tilde{V}_2^m} &= \sqrt{\langle f, f \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^m}}. \end{aligned}$$

${}^o\tilde{V}_2^m[a, b]$ fonksiyon uzayı, $\tilde{V}_2^m[a, b]$ uzayının kapalı bir alt uzayı olup, bu uzaya bazı homojen sınır şartlarının eklenmiş hâlidir. ${}^o\tilde{V}_2^m[a, b]$ uzayı da $\tilde{V}_2^m[a, b]$ uzayı gibi bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Bu uzaya karşılık gelen üretici çekirdek fonksiyonu (3.9)'daki genelleştirilmiş diferansiyel denkleme homojen başlangıç şartları ilave edilerek benzer sürecin işletilmesi sonucu elde edilebilir. ${}^o\tilde{V}_2^m[a, b]$ uzayı farklı homojen sınır şartlarını içerebilir. Bu durumda uzayın yapısı farklılaşacağından, ona karşılık gelen üretici çekirdek fonksiyonu da değişecektir.

3.3.2 $\tilde{V}_2^m[a, b]$ Uzayının Üretici Çekirdeği

Önceki bölümde $\tilde{V}_2^m[a, b]$ uzayının bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı olduğu ispatlandı. Bu bölümde ise uzayın üretici çekirdeğinin nasıl elde edildiği sunulacak. Böylelikle metodun inşasının en önemli basamaklarından biri tamamlanmış olacak.

Kabul edelim ki $\tilde{k}_y(x)$ fonksiyonu $\tilde{V}_2^m[a, b]$ uzayının üretici çekirdeği olsun. Bu durumda her sabit $y \in [a, b]$ ve herhangi $f(x) \in \tilde{V}_2^m[a, b]$ için $\tilde{k}_y(x)$ fonksiyonu

$$\langle f(x), \tilde{k}_y(x) \rangle_{\tilde{V}_2^m[a, b]} = f(y)$$

şartını sağlamalıdır. (3.1) ile verilmiş olan iç çarpım tanımından

$$\langle f(x), \tilde{k}_y(x) \rangle_{\tilde{V}_2^m[a, b]} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^i \tilde{k}_y(a)}{\partial x^i} + \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m \tilde{k}_y(x)}{\partial x^m} dx \quad (3.6)$$

eşitliğini yazabiliriz. Son terim olan integrale m tane kısmi integrasyon uygulandığında

$$\int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m \tilde{k}_y(x)}{\partial x^m} dx = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} \tilde{k}_y(x)}{\partial x^{m+i}} \Big|_{x=a}^b + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} \tilde{k}_y(x)}{\partial x^{2m}} dx \quad (3.7)$$

elde edilir. Değişken değiştirmesi yapılarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} \tilde{k}_y(x)}{\partial x^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(x) \frac{\partial^{2m-i-1} \tilde{k}_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}}. \quad (3.8)$$

Buradan hareketle (3.7) ve (3.8) eşitliklerinin (3.6)'da yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}\langle f(x), \tilde{k}_y(x) \rangle &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^i \tilde{k}_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} \tilde{k}_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(b) \frac{\partial^{2m-i-1} \tilde{k}_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} \\ &+ (-1)^m \int_a^b f^m(x) \frac{\partial^m \tilde{k}_y(x)}{\partial x^m} dx\end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzden $\tilde{k}_y(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^{(2m)} \tilde{k}_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y), \\ \frac{\partial^i \tilde{k}_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} \tilde{k}_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \\ \frac{\partial^{2m-i-1} \tilde{k}_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (3.9)$$

genelleştirilmiş diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Ek olarak buradan açıkça anlaşılmaktadır ki $x \neq y$ iken $\tilde{k}_y(x)$ fonksiyonu, sınır şartları

$$\begin{cases} \frac{\partial^i \tilde{k}_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} \tilde{k}_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \\ \frac{\partial^{2m-i-1} \tilde{k}_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (3.10)$$

olan, $2m$. mertebeden

$$(-1)^m \frac{\partial^{(2m)} \tilde{k}_y(x)}{\partial x^{2m}} = 0 \quad (3.11)$$

biçimindeki lineer homojen diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. (3.11) denklemi, mertebesinden dolayı $2m$ katlı kök olan $\lambda = 0$ özdeğerine ve $\lambda^{2m} = 0$ karakteristik denkleminde sahiptir. Bu sebeple (3.9) denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\tilde{k}_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1}, & x < y, \\ \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1}, & x > y. \end{cases} \quad (3.12)$$

Artık burada yapılması gereken işlem $i = 1, 2, \dots, 2m$ için $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ katsayılarını hesaplamaktır.

$$(-1)^m \frac{\partial^{(2m)} \tilde{k}_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y)$$

olduğu için, Dirac-Delta fonksiyonun yapısı gereği

$$\frac{\partial^i \tilde{k}_y(y^-)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i \tilde{k}_y(y^+)}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \dots, 2m-2, \quad (3.13)$$

eşitliği geçerlidir ve buradan

$$(-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} \tilde{k}_y(y^+)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} \tilde{k}_y(y^-)}{\partial x^{2m-1}} \right) = 1 \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.13) ve (3.14)'deki $2m$ tane denklem (3.12)'deki c_i ve d_i katsayılarının çözümünü için $2m$ tane şartı sağlar. Bununla birlikte (3.10) da $2m$ tane sınır şartını sağladığından toplamda $4m$ tane denkleme ulaşılmış olur. Bu denklemlerin lineer denklemler oldukları açıktır. Denklemlerin içindeki c_i ve d_i katsayılarının bulunmasıyla $\tilde{k}_y(x)$ üretici çekirdeği (3.12)'den hesaplanmış olur [72].

Teorem 3.12. [72] $\tilde{V}_2^m[a, b]$ bir üretici çekirdekli uzay ve $f_n(x), f(x) \in \tilde{V}_2^m[a, b]$ olsun. Eğer $f_n(x)$ fonksiyon dizisi $\|\cdot\|_{V_2^m}$ normu ile $f(x)$ fonksiyonuna yakınsıyorsa bu durumda $0 \leq k \leq m-1$ için $f_n^{(k)}(x)$ de $f^{(k)}(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

3.3.3 $W_2^{(m,n)}(\Omega)$ İki Değişkenli Üretici Çekirdekli Uzay

Önceki bölümde bir aralık üzerinde tanımlı tek değişkenli fonksiyonların uzayını vermiştik. Bu bölümde ise bir bölge üzerinde tanımlı iki değişkenli fonksiyonları uzayını tanımlayıp, bu uzayın hangi durumda üretici çekirdekli uzay olduğuna dair tanım ve teoremleri sunacağız. İki değişkenli Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde etkin rol aldığı için yüksek öneme haizdir.

Tanım 3.10. İki değişkenli fonksiyon uzayı

$$W_2^{(m,n)}(\Omega) = \left\{ f(x, y) \mid \frac{\partial^{m+n-2} f(x, y)}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}}, \quad \Omega \text{ bölgesinde tamamen sürekli,} \right. \\ \left. \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanır. Uzaya ait iç çarpım ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \langle f(x, y), g(x, y) \rangle_{W_2^{(m,n)}(\Omega)} &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_c^d \left[\frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(a, y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} g(a, y) \right] dy \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial y^j} f(x, c), \frac{\partial^j}{\partial y^j} g(x, c) \right\rangle_{\tilde{V}_2^m} \\ &+ \iint_{\Omega} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Teorem 3.13. [72] $W_2^{(m,n)}(\Omega)$ fonksiyon uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Teorem 3.14. [72] $f(x, y), g_1(x)g_2(y) \in W_2^{(m,n)}(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$\langle f(x, y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{W_2^{(m,n)}(\Omega)} = \langle \langle f(x, y), g_1(x) \rangle_{\tilde{V}_2^m}, g_2(y) \rangle_{V_2^n} \quad (3.17)$$

olur.

Kanıt. İspat için (3.16) ile verilen iç çarpım tanımını kullanılacak olup [72]'den yararlanılmıştır.

$$\begin{aligned} \langle f(x, y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{W_2^{(m,n)}(\Omega)} &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_c^d \left[\frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(a, y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} g_2(y) \frac{\partial^i}{\partial x^i} g_1(a) \right] dy \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial y^j} f(x, c), g_1(x) \frac{\partial^j}{\partial y^j} g_2(c) \right\rangle_{\tilde{V}_2^m} \\ &\quad + \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) \frac{\partial^m}{\partial x^m} g_1(x) \frac{\partial^n}{\partial y^n} g_2(y) \right] dx dy \\ &= \int_c^d \frac{\partial^n}{\partial y^n} g_2(y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left[\int_a^b \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x, y) \frac{\partial^m}{\partial x^m} g_1(x) dx + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(a, y) \frac{\partial^i}{\partial x^i} g_1(a) \right] dy \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^i}{\partial y^i} f(x, c), g_1(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^m} \frac{\partial^i}{\partial y^i} g_2(c) \\ &= \int_c^d \frac{\partial^n}{\partial y^n} g_2(y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} \langle f(x, y), g_1(x) \rangle_{\tilde{V}_2^m} dy \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^i}{\partial y^i} f(x, c), g_1(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^m} \frac{\partial^i}{\partial y^i} g_2(c) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \langle f(x, c), g_1(x) \rangle_{\tilde{V}_2^m} \frac{\partial^i}{\partial y^i} g_2(c) \\ &= \int_c^d \frac{\partial^n}{\partial y^n} \langle f(x, y), g_1(x) \rangle_{\tilde{V}_2^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} g_2(y) dy \\ &= \langle \langle f(x, y), g_1(x) \rangle_{\tilde{V}_2^m}, g_2(y) \rangle_{V_2^n}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

□

Bu teoremin bir sonucu olarak iki değişkenli $W_2^{(m,n)}$ uzayına ait fonksiyonlar ve uzayı donatan iç çarpım için $f_1(x)f_2(y), g_1(x), g_2(y) \in W_2^{(m,n)}$ olmak üzere

$$\langle f_1(x)f_2(y), g_1(x), g_2(y) \rangle_{W_2^{(m,n)}} = \langle f_1(x), g_1(x) \rangle_{\tilde{V}_2^m} \langle f_2(y), g_2(y) \rangle_{V_2^n}$$

eşitliği kolayca yazılabilir. Ayrıca, tek değişkenli üretici çekirdek uzayı $\tilde{V}_2^m$ 'ye ait fonksiyonların

$$\|f(x)\|_{\tilde{V}_2^m} = \|f(x)\|_{W_2^{(m,n)}}$$

eşitliğini sağlayacağı açıktır.

Yukarıda bulunan teorem ve sonuçlardan hareketle artık Ω bölgesinde tanımlı iki değişkenli fonksiyon uzayının hangi şartta bir üretici çekirdek uzayı olduğu aşağıdaki teorem yardımıyla ifade edilebilir.

Teorem 3.15. [72] $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ ve $\tilde{k}_y^{\{m\}}(x)$, $k_s^{\{n\}}(t)$ fonksiyonları sırasıyla $\tilde{V}_2^m[a, b]$ ve $V_2^n[c, d]$ uzaylarının üretici çekirdekleri olmak üzere, $W_2^{(m,n)}(\Omega)$ uzayı,

$$K_{(y,s)}(x, t) = \tilde{k}_y^{\{m\}}(x) k_s^{\{n\}}(t)$$

ile verilen üretici çekirdeğe sahip bir üretici çekirdekli uzaydır.

Bu teorem kısmi türevli denklemlerde iki değişkenli çekirdek hesabı yaparken oldukça büyük sağlamakla beraber çözüme ulaşmaktaki zaman kaybını büyük ölçüde azaltmaktadır.



4 DOĞRUSAL OLMAYAN YÜKSEK MERTEBEDEN ADI TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Doğadaki çeşitli olaylar matematiksel olarak modellenmeye çalışıldığında, genellikle belirli miktarların değişim oranlarını yöneten fiziksel yasalar veya biyolojik ilkelere başvurulur. Bu nedenle, matematiksel modellerdeki denklemler genellikle türev içerirler. Cain [79] bunu şöyle izah eder: "Sabit bir α ortam sıcaklığına sahip bir odaya sıcak bir fincan kahve konduğunu varsayalım. Newton'un Soğuma Yasası, kahve sıcaklığının $S(t)$ değişim hızının, kahvenin sıcaklığı ile oda sıcaklığı arasındaki farkla orantılı olduğunu belirtir. Matematiksel olarak bu, k bir orantı sabiti olmak üzere $\frac{dS}{dt} = k(S - \alpha)$ olarak ifade edilebilir." Buradaki ısı olayı gibi anlaşılmayı bekleyen sayısız olay, onları modelleyip çözümleyebilmek için diferansiyel denklemleri zorunlu bir araç kılar. Her bir olay birtakım şartlar altında gerçekleştiğinden bu şartlar denklemlere bazı koşullar yükler. Bu da doğal olarak başlangıç değer problemlerini (BDP), sınır değer problemlerini (SDP) ve hem başlangıç hem sınır şartları bir arada gözetiliyorsa başlangıç ve sınır değer problemlerini (BSDP) karşımıza çıkarır. Bu problemler bilindiği üzere mühendislik, biyoloji, astronomi, akışkanlar dinamiği, ekonomi, fizik, elektrik devreleri, kontrol teorisi ve benzeri gibi çeşitli alanların önemli enstrümanlarıdır. Bu nedenle, tezin bu bölümü bir açıdan yüksek mertebeli BDP ve SDP'lere odaklanacaktır.

Tarihsel süreç boyunca [81–83] doğrusal olmayan yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümü için oldukça çaba harcanmış ve farklı nümerik yöntemler kullanılmıştır [75, 77, 84–90]. Bu yöntemler arasında Adomian ayrıştırma metodu [91–93], homotopi pertürbasyon metodu [94, 95], Chebyshev serileri [97, 98], doğrudan blok yöntemi [99], LS-SV metodu [100, 101] lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için sıklıkla uygulanmıştır. Yakınlarda Verma [103] tarafından lineer olmayan sınır değer problemlerine dair geniş ölçekli ve detaylı iyi bir çalışma yayınlanmıştır.

Bu bölümde, yukarıda örnekleri sunulan çalışmalar çerçevesinde hâlâ yeni yaklaşımların üretildiği adi türevli başlangıç ve sınır değer problemleri için Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu ile yaklaşık çözümlerin elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaca binaen metodun ne kadar elverişli olduğunu test etmek için doğrudan bazı başlangıç ve sınır değer problemleri seçilmiştir. Problemler başlangıç değer ve sınır değer problemleri adı altında iki ayrı başlıkta sunulup, her problemin sonunda mutlak ve göreceli hatalar ile yaklaşık çözümden elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır.

4.1 Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri İçin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu

Homojen ve homojen olmayan bazı yüksek mertebeli başlangıç ve sınır değer problemlerinin ele alınacağı bu bölümde, ilk olarak genel yapıları

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dx^2} = u(x, y), & x \in [a, c] \\ w(a) = p_0, & w(c) = q_0 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \frac{d^4 w}{dx^4} = v(x, y), & x \in [b, d] \\ w(b) = 0, w'(b) = 0, w(d) = 0, w'(d) = 0 \end{cases}$$

şeklinde olan sınır değer problemlerinin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu ile yaklaşık çözümleri araştırılacaktır. Bunun için homojen olmayan problem şartları homojenleştirilecek, daha sonra ilgili üretici çekirdek fonksiyonunun elde edilebilmesi için probleme özel üretici çekirdekli Hilbert uzayı inşa edilecektir. Çekirdeğin bulunması ile sonrasında yapılacak bütün nümerik hesaplamalar ve grafikler için Maple 17 paket programı kullanılacaktır.

4.2 Homojen Olmayan Sınır Değer Problemi

$$\begin{aligned} w'' - \frac{1}{x}w' &= \frac{4x^2}{4+x^2}e^w, & x \in [0, 1] \\ w(0) &= \ln\left(\frac{1}{4}\right), & w(1) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklindeki lineer olmayan sınır değer problemini göz önüne alalım. Problemin kesin çözümü $w(x) = \ln\left(\frac{1}{4+x^2}\right)$ 'dir [96].

4.2.1 Homojenleştirme

ÜÇHU metodunun Problem 4.1'e uygulanabilmesi için öncelikle problemin şartlarının homojen hâle getirilmesi gerekmektedir. Bunun için problemin çözümünü $w(x) = u(x) + s_1(x)$ olacak şekilde ayırştıralım. Burada $s_1(x)$, mevcut sınır şartlarını sağlayan dönüşüm fonksiyonunu; $u(x)$ ise homojen sınır değer probleminin çözümünü temsil etmektedir. $w(x)$ fonksiyonu (4.1)'in mevcut çözüm fonksiyonu olduğu için denklemin şartlarını ve denklemdaki türevleri sağlar. İlgili türevler alınarak problemde

yerine konulduğunda, ortaya çıkacak olan $u(x)$ fonksiyonlarından oluşan yeni denklem metodun uygulanabilmesi için hazır hâle gelmiş homojen bir sınır değer problemi olacaktır.

Homojenleştirmenin ilk aşaması olarak

$$s_1(x) = \ln\left(\frac{4}{5}\right)x + \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

dönüşüm fonksiyonunu kullanalım. Bu fonksiyon $s_1(x) = ax + b$ biçiminde bir fonksiyon aramakla yola çıkılarak elde edilebilir. Bu durumda çözüm fonksiyonu

$$w(x) = u(x) + \ln\left(\frac{4}{5}\right)x + \ln\left(\frac{1}{4}\right) \quad (4.2)$$

biçiminde yazılır. Gerekli türevler alınır

$$\begin{aligned} w'(x) &= u'(x) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\ w''(x) &= u''(x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.2) ve (4.3) denklemleri (4.1)'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u''(x) - \frac{1}{x} \left(u'(x) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) \right) &= \frac{4x^2}{4+x^2} e^{u(x) + \ln(\frac{4}{5})x + \ln(\frac{1}{4})} \\ &= \frac{4x^2}{4+x^2} e^{u(x)} \left(\frac{4}{5}\right)^x \frac{1}{4} \end{aligned}$$

bulunur. $s_1(x)$ dönüşüm fonksiyonuna (4.1)'deki sınır şartları uygulandığında $u(0) = u(1) = 0$ homojen şartları elde edilir. ϱ , u 'nun lineer olmayan fonksiyonlarını temsil etmek üzere

$$\varrho(x, u(x)) = e^{u(x)} \frac{x^2}{4+x^2} \left(\frac{4}{5}\right)^x + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece nihai olarak aşağıdaki homojen sınır değer problemine ulaşılmış olur.

$$\begin{cases} u''(x) - \frac{1}{x} u'(x) = \varrho(x, u(x)), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

4.2.2 Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı ve Üretici Çekirdek Fonksiyonu

Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı teorisine göre, problemin çözümünün yapılacağı uzay denklemdeki bağımsız değişkene göre en yüksek mertebeli türeve göre inşa edilmektedir. Söz konusu Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'nı (ÜÇHU) donatan iç çarpım ise verilen problemdeki bağımsız değişkenin tanımlı olduğu aralığa göre belirlenir. Dolayısıyla her bir denklem için inşa edilen ÜÇHU ve üretici çekirdek fonksiyonu bir tek şekilde mevcuttur.

Bu bölümde Problem 4.4'e ait üretici çekirdekli uzaylar ile bu uzaylara ait üretici çekirdek fonksiyonlarına dair tanım ve teoremler sunulacaktır.

Tanım 4.1. $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayı $\tilde{V}_2^1[0, 1] = \{u(x) \mid u \in AC[0, 1], u' \in L^2[0, 1], x \in [0, 1]\}$ şeklinde tanımlanır. Bu uzaya ait iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{V}_2^1[0,1]} = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad u, v \in \tilde{V}_2^1[0, 1],$$

$$\|u\|_{\tilde{V}_2^1[0,1]} = \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle}, \quad u \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$$

biçimindedir.

Teorem 4.1. [72] $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 1]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1[0,1]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$ vardır. Bu durumda $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) = \begin{cases} 1+x, & y \leq x \\ 1+y, & y > x \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 4.2. ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ Hilbert uzayı

$${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1] = \{u : u, u', u'' \in AC[0, 1], u''' \in L^2[0, 1], u(0) = 0 = u(1)\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayı donatan iç çarpım ve iç çarpımdan hareketle elde edilen norm

$$\langle u, v \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0,1]} = \sum_{i=0}^2 u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(3)}(t)v^{(3)}(t)dt, \quad u, v \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$$

$$\|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^3} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3}}, \quad u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$$

şeklinde dir.

Teorem 4.2. ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 1]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0,1]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ vardır. Bu durumda ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{3\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 c_i x^{i-1}, & x \leq y \\ \sum_{i=1}^6 d_i x^{i-1}, & x > y \end{cases} \quad (4.5)$$

biçimindedir. Burada,

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0, c_2 = \frac{3}{13}y - \frac{1}{156}y^5 + \frac{5}{156}y^4 - \frac{5}{78}y^3 - \frac{5}{26}y^2 \\
c_3 &= \frac{21}{104}y^2 - \frac{1}{624}y^5 + \frac{5}{624}y^4 - \frac{5}{312}y^3 - \frac{5}{26}y \\
c_4 &= \frac{7}{104}y^2 - \frac{1}{1872}y^5 + \frac{5}{1872}y^4 - \frac{5}{936}y^3 - \frac{5}{78}y \\
c_5 &= -\frac{1}{104}y + \frac{1}{3744}y^5 - \frac{5}{3744}y^4 + \frac{5}{1872}y^3 + \frac{5}{624}y^2 \\
c_6 &= -\frac{1}{18720}y^5 + \frac{1}{3744}y^4 - \frac{1}{1872}y^3 - \frac{1}{624}y^2 - \frac{1}{156}y + \frac{1}{120}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{120}y^5, \quad d_2 = -\frac{1}{104}y^4 + \frac{3}{13}y - \frac{1}{156}y^5 - \frac{5}{78}y^3 - \frac{5}{26}y^2 \\
d_3 &= \frac{7}{104}y^3 + \frac{21}{104}y^2 - \frac{1}{624}y^5 + \frac{5}{624}y^4 - \frac{5}{26}y \\
d_4 &= -\frac{1}{1872}y^5 + \frac{5}{1872}y^4 - \frac{5}{936}y^3 - \frac{5}{312}y^2 - \frac{5}{78}y \\
d_5 &= \frac{1}{3744}y^5 - \frac{5}{3744}y^4 + \frac{5}{1872}y^3 + \frac{5}{624}y^2 + \frac{5}{156}y \\
d_6 &= -\frac{1}{18720}y^5 + \frac{1}{3744}y^4 - \frac{1}{1872}y^3 - \frac{1}{624}y^2 - \frac{1}{156}y,
\end{aligned}$$

dir.

Kanıt. ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı olduğundan, çekirdeğin yeniden üretme prensibi çekirdek fonksiyonu tarafından sağlanır. Dolayısıyla,

$$\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0,1]} = \sum_{i=0}^2 u^{(i)}(0) \partial_{x_i}^i \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) + \int_0^1 u^{(3)}(x) \partial_{x_3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) dx = u(y).$$

Eşitlikteki integrale üç kez kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned}
\langle u, \tilde{k}_y^{\{3\}} \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} &= u(0) \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) + u'(0) \partial_x \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) + u''(0) \partial_{x^2}^2 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) + u''(1) \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) \\
&\quad - u''(0) \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) - u'(1) \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) + u'(0) \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) + u(1) \partial_{x^5}^5 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) \\
&\quad - u(0) \partial_{x^5}^5 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) - \int_0^1 u(x) \partial_{x^6}^6 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle u, \tilde{k}_y^{\{3\}} \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} &= u(0) [\tilde{k}_y^{\{3\}}(0) - \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0)] + u'(0) [\partial_x \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) + \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0)] \\
&\quad + u''(0) [\partial_{x^2}^2 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) - \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0)] + u''(1) \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) \\
&\quad - u'(1) \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) + u(1) \partial_{x^5}^5 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) \\
&\quad - \int_0^1 u(x) \partial_{x^6}^6 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) dx
\end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur. $u(x), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ olduğundan

$$u(0) = u(1) = 0$$

$$\tilde{k}_y^{\{3\}}(0) = \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) = 0$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu fonksiyonlar dikkate alınarak (4.6) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} \langle u, \tilde{k}_y^{\{3\}} \rangle_{\circ \tilde{V}_2^3} &= u'(0) [\partial_x \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) + \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0)] + u''(0) [\partial_{x^2}^2 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) - \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0)] \\ &+ u''(1) \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) - u'(1) \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) - \int_0^1 u(x) \partial_{x^6}^6 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) dx \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği

$$\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{3\}} \rangle_{\circ \tilde{V}_2^3} = u(y)$$

olduğundan bu durum, δ Dirac-delta fonksiyonu olmak üzere

$$-\partial_{x^6}^6 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = \delta(x - y)$$

eşitliğini ve

$$\begin{cases} \partial_x \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) + \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) = 0 \\ \partial_{x^2}^2 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) - \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) = 0 \\ \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) = 0 \\ \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) = 0 \end{cases}$$

denklemlerini gerektirir. Dirac-delta fonksiyonun yapısı gereği $x \neq y$ iken $\delta(x - y) = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, $\tilde{k}_y^{\{3\}}(x)$ üretici çekirdek fonksiyonu sınır şartları

$$\begin{cases} \partial_x \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) + \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) = 0 \\ \partial_{x^2}^2 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) - \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) = 0 \\ \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) = 0 \\ \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) = 0 \\ \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) = 0 \\ \tilde{k}_y^{\{3\}}(1) = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

olan, altıncı mertebeden lineer homojen

$$-\partial_{x^6}^6 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = 0 \quad (4.9)$$

diferansiyel denkleminin genel çözümüdür. (4.9)'un karakteristik denklemi $\lambda^6 = 0$ ve altı katlı köklü özdeğeri $\lambda = 0$ olduğundan, üretici çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 c_i x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^6 d_i x^{i-1}, & x > y \end{cases} \quad (4.10)$$

şeklindedir. $-\partial_{x^6}^6 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = \delta(x - y)$ olması sebebiyle, δ fonksiyonunun özelliğinden dolayı

$$\begin{aligned} \partial_{x^i}^i \tilde{k}_{y+}^{\{3\}} &= \partial_{x^i}^i \tilde{k}_{y-}^{\{3\}}, \quad i = 0, 1, \dots, 4 \\ \partial_{x^5}^5 \tilde{k}_{y+}^{\{3\}} - \partial_{x^5}^5 \tilde{k}_{y-}^{\{3\}} &= -1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

denklemleri elde edilir. (4.8) ve (4.11) diferansiyel denklem sistemi çözüldüğünde $i = 1, \dots, 6$ için c_i ve d_i katsayıları bulunmuş olur. Sonuç olarak üretici çekirdek fonksiyonu $\tilde{k}_y^{\{3\}}(x)$

$$\tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = \begin{cases} \begin{aligned} &\frac{3}{13}xy - \frac{1}{156}xy^5 + \frac{5}{156}xy^4 - \frac{5}{78}xy^3 - \frac{5}{26}xy^2 + \frac{21}{104}x^2y^2 \\ &- \frac{1}{624}x^2y^5 + \frac{5}{624}x^2y^4 - \frac{5}{312}x^2y^3 - \frac{5}{26}x^2y + \frac{7}{104}x^3y^2 \\ &- \frac{1}{1872}x^3y^5 + \frac{5}{1872}x^3y^4 - \frac{5}{936}x^3y^3 - \frac{5}{78}x^3y - \frac{1}{104}x^4y \\ &+ \frac{1}{3744}x^4y^5 - \frac{5}{3744}x^4y^4 + \frac{5}{1872}x^4y^3 + \frac{5}{624}x^4y^2 - \frac{1}{18720}x^5y^5 \\ &+ \frac{1}{3744}x^5y^4 - \frac{1}{1872}x^5y^3 - \frac{1}{624}x^5y^2 - \frac{1}{156}x^5y + \frac{1}{120}x^5 \end{aligned} & x \leq y \\ \begin{aligned} &\frac{3}{13}xy - \frac{1}{156}xy^5 - \frac{1}{104}xy^4 - \frac{5}{78}xy^3 - \frac{5}{26}xy^2 + \frac{21}{104}x^2y^2 \\ &- \frac{1}{624}x^2y^5 + \frac{5}{624}x^2y^4 + \frac{7}{104}x^2y^3 - \frac{5}{26}x^2y - \frac{5}{312}x^3y^2 \\ &- \frac{1}{1872}x^3y^5 + \frac{5}{1872}x^3y^4 - \frac{5}{936}x^3y^3 - \frac{5}{78}x^3y + \frac{5}{156}x^4y \\ &+ \frac{1}{3744}x^4y^5 - \frac{5}{3744}x^4y^4 + \frac{5}{1872}x^4y^3 + \frac{5}{624}x^4y^2 - \frac{1}{18720}x^5y^5 \\ &+ \frac{1}{3744}x^5y^4 - \frac{1}{1872}x^5y^3 - \frac{1}{624}x^5y^2 - \frac{1}{156}x^5y + \frac{1}{120}y^5 \end{aligned} & x > y \end{cases}$$

olarak bulunur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

4.2.3 Yaklaşık Çözümün İnşası

Homojen hâle getirilen ve üretici çekirdek fonksiyonu bulunan Problem 4.4 için

$$\mathcal{F}u(x) := u''(x) - x^{-1}u'(x)$$

olmak üzere

$$\mathcal{F}: {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1] \rightarrow \tilde{V}_2^1[0, 1] \quad (4.12)$$

operatörünü tanımlayalım. Böylelikle problem

$$\begin{cases} \mathcal{F}u(x) = \varrho(x, u(x)), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ ve $\varrho \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$.

Teorem 4.3. *[102] $\mathcal{F} : {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1] \rightarrow \tilde{V}_2^1[0, 1]$ operatörü sınırlı ve lineerdir.*

Şimdi ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ 'nin ortogonal fonksiyon sistemini inşa etmek için $[0, 1]$ aralığında sayılabilir yoğun $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisini seçerek $\varphi_i(x) = \tilde{k}_{x_i}^{\{1\}}(x)$ ve $\psi_i(x) = \mathcal{F}^*\varphi_i(x)$ tanımlamalarını yapalım. Burada $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{F}$ 'nin adjoint operatörünü ve $\tilde{k}$ ise $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayının üretici çekirdek fonksiyonunu temsil etmektedir.

Teorem 4.4. *Kabul edelim ki $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ aralığında yoğun olsun. Bu durumda $\psi_i(x) = \mathcal{F}_y \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \Big|_{y=x_i}$ olmakla birlikte $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ tam bir fonksiyon sistemidir.*

Kanıt. $\mathcal{F}$ operatörünün x 'in fonksiyonlarına uygulanmış hâlini $\mathcal{F}_x$ ile temsil edelim. Çekirdeğin üretme prensibi kullanılarak

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \mathcal{F}^*\varphi_i(x) = \left\langle \mathcal{F}^*\varphi_i(x), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} \\ &= \left\langle \varphi_i(x), \mathcal{F}_x \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^1} \\ &= \mathcal{F}_x \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \Big|_{y=x_i}. \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıkça anlaşılmaktadır ki $\psi_i(x) \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ 'dir. Şimdi kabul edelim ki her bir $u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ için $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]} = 0$, $i = 1, 2, \dots$ olsun. O hâlde, $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]} = \langle u(x), \mathcal{F}^*\varphi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1} = \langle \mathcal{F}u(x), \varphi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1} = \mathcal{F}u(x_i) = 0$. $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ aralığında yoğunken, $\mathcal{F}^{-1}$ 'den dolayı $\mathcal{F}u(x) = 0$ olmalıdır. Bu da $u = 0$ eşitliğini gerektirir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ uzayının ortonormal sitemi olan $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$, $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ için Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x)$$

olarak bulunur. Burada γ_{ik} ortogonalizasyon katsayılarını temsil etmektedir.

4.2.4 Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde problemin çözümüne ve yaklaşık çözümün yakınsaklığına dair teoremler verilecektir.

Teorem 4.5. *Kabul edelim ki $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ 'de yoğun olsun. Eğer ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ uzayının elemanı olan $u(x)$ fonksiyonu (4.13) ile verilen problemin çözümü ise bu çözüm fonksiyonu,*

$\varrho_k := \varrho(x_k, u(x_k))$ olmak üzere

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \varrho_k \bar{\psi}_i(x) \quad (4.14)$$

şeklinde ifade edilir.

Kanıt. $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sisteminin ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ uzayında tam olduğu ve bu uzayın bir Hilbert uzayı olduğu açıktır. $u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} \bar{\psi}_i(x)$ serisi $u(x)$ 'in Fourier seri açılımı olduğundan, bu seri ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ uzayında tanımlı norma yakınsar. Ayrıca çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği her $u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ için $\langle u(x), \varphi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} = u(x_i)$ olması sebebiyle aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür. Böylece

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} \bar{\psi}_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x), \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x), \psi_k(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x), \mathcal{F}^* \varphi_k(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \left\langle \mathcal{F}u(x), \tilde{k}_{x_k}^{\{3\}}(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^1} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \mathcal{F}u(x_k) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \varrho_k \bar{\psi}_i(x) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

$u(x)$ çözümünde serinin n . teriminden sonrakiler ihmal edilirse problemin yaklaşık çözümü şu şekilde ifade edilebilir:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \varrho(x_k, u(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \quad (4.15)$$

$B_i = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \varrho(x_k, u(x_k))$ olmak üzere, (4.14) analitik çözümü

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x)$$

olarak yazılabilir. Nümerik hesaplamalar göz önünde bulundurarak $u_0(x_1) = u(x_1)$ alalım.

$u(x)$ 'in n terim yaklaşımı

$$\begin{aligned} B_1 &= \gamma_{11} \varrho(x_1, u_0(x_1)), \\ B_2 &= \sum_{k=1}^2 \gamma_{2k} \varrho(x_k, u_{k-1}(x_k)), \\ &\vdots \\ B_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{(n-1)k} \varrho(x_k, u_{k-1}(x_k)), \\ B_n &= \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} \varrho(x_k, u_{k-1}(x_k)) \end{aligned}$$

olmak üzere, buradan u 'lar hesaplanacak olursa

$$\begin{aligned} u_1(x) &= B_1 \bar{\psi}_1(x), \\ u_2(x) &= \sum_{i=1}^2 B_i \bar{\psi}_i(x), \\ &\vdots \\ u_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} B_i \bar{\psi}_i(x), \end{aligned}$$

ve nihayetinde yaklaşık çözüm

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(x) \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlanır. Bir sonraki aşama yaklaşım çözümün analitik çözüme yakınsadığını, yani $u_n(x) \rightarrow u(x)$ olduğunu göstermek olacaktır.

Teorem 4.6. *Kabul edelim ki $\|u_n\|$ sınırlı ve denklem (4.13) tek bir çözüme sahip olsun. Eğer $\{x_i\}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ de yoğunsa (4.16)'da elde edilen $u_n(x)$ yaklaşık çözümü, (4.13)'ün analitik çözümü olan $u(x)$ 'e yakınsar.*

Kanıt. Bu teoremin ispatı [30]'da uygulanmış olan teknik kullanılarak yapılacaktır. (4.16)'dan

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + B_{n+1} \bar{\psi}_{n+1}(x)$$

yazılabilir. $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^\infty$ 'nin ortonormalliğinden

$$\|u_{n+1}\|^2 = \|u_n\|^2 + (B_{n+1})^2 = \dots = \sum_{i=1}^{n+1} (B_i)^2.$$

Buradan $\|u_{n+1}\| \geq \|u_n\|$ olacağı açıktır. Verilen şartlardan $\|u_n\|$ sınırlı olduğu için, $\|u_n\|$ aynı zamanda yakınsaktır ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} (B_i)^2 = a$$

olacak şekilde bir a sabiti vardır. Bu da $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$ olmasını gerektirir. Eğer $m > n$ ise bu durumda

$$\|u_k - u_n\|^2 = \|u_k - u_{k-1} + u_{k-1} - u_{k-2} + \cdots + u_{n+1} - u_n\|^2$$

olur. Terimlerin iki ortogonalliğinden $(u_k - u_{k-1}) \perp (u_{k-1} - u_{k-2}) \perp \cdots \perp (u_{n+1} - u_n)$. Böylelikle $\|u_k - u_n\|^2 = \|u_k - u_{k-1}\|^2 + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\|^2$. Ayrıca

$$\|u_k - u_{k-1}\|^2 = (B_k)^2$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$\|u_k - u_n\|^2 = \sum_{i=n+1}^k (B_i)^2 \rightarrow 0 \quad , \quad n \rightarrow \infty.$$

${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ uzayının tamlığı $n \rightarrow \infty$ iken $u_n \rightarrow u$ sonucuna ulaştırır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 4.7. *Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x) \rightarrow u(x)$ ve $(x_n) \rightarrow (x)$, aynı zamanda $\|u_n(x)\|_{{}^o\tilde{V}_2^3}$ sınırlı ve $\varrho(x, u)$ sürekli ise bu durumda*

$$\varrho(x_n, u_{n-1}) \rightarrow \varrho(x, u), \quad n \rightarrow \infty$$

olur.

Kanıt. Bu teoremin ispatı [36]'de uygulanmış olan teknik kullanılarak yapılacaktır.

$$\begin{aligned} |u_{n-1}(x_n) - u(x)| &= |u_{n-1}(x_n) - u_{n-1}(x) + u_{n-1}(x) - u(x)| \\ &\leq |u_{n-1}(x_n) - u_{n-1}(x)| + |u_{n-1}(x) - u(x)| \\ &\leq \left| \frac{d}{dx} u_{n-1}(x_n) \right| |x_n - x| + |u_{n-1}(x) - u(x)| \end{aligned}$$

elde edilir. Verilen $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x) \rightarrow u(x)$ ve $(x_n) \rightarrow (x)$ şartlarından

$$|u_{n-1}(x_n) - u(x)| \rightarrow 0$$

bulunur. $\varrho(x, u)$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\varrho(x_n, u_{n-1}) \rightarrow \varrho(x, u), \quad n \rightarrow \infty$$

yakınsaklığına ulaşılır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

4.2.5 Nümerik Sonuçlar

Homojenleştirme basamağından sonra çözümün yapılacağı uzayın inşa edildiği ve çekirdeğinin bulunduğu (4.4) ile verilen sınır değer problemi yaklaşım çözüm hesabı için artık hazır haldedir. Kesin çözümü $u(x) = \ln \frac{1}{(4+x^2)}$ olan problemin analizi için yoğun nokta sayısı

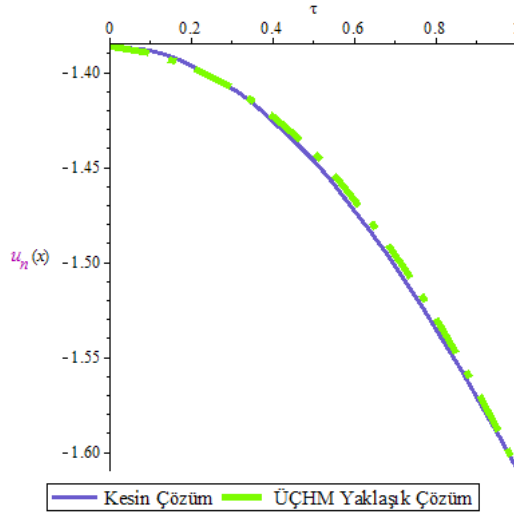
$M = 20$ olmak üzere $x_i = \frac{i}{M}$, $i = 1, \dots, M$ alınmıştır. Yaklaşık çözümle kesin çözümün sayısal sonuçları Tablo 4.1’de, mutlak ve görelî hatalar Tablo 4.2’de sunulmuştur. Kesin çözüm ve yaklaşık çözümün birbirine ne kadar yaklaştığı Şekil 4.1’de gösterilmiştir. Metodun ne kadar etkili olduğu bu sonuçlardan oldukça rahat gözlenmektedir. Bütün hesaplamalar Maple 17 programı kullanılarak yapılmıştır.

Tablo 4.1 Problem (4.4) için kesin çözüm (KÇ) ve yaklaşık çözüm (YÇ) değerleri

x	KÇ	ÜÇHM (YÇ)
0.1	-1.386294361	-1.386294361
0.2	-1.388791241	-1.390267142
0.3	-1.396244692	-1.397490915
0.4	-1.408544970	-1.408302291
0.5	-1.425515074	-1.423110299
0.6	-1.446918983	-1.442642858
0.7	-1.472472057	-1.467050151
0.8	-1.501852702	-1.495914014
0.9	-1.534714366	-1.529191702
1.0	-1.570697084	-1.566973425

Tablo 4.2 Problem (4.4) mutlak hata (MH) ve görelî hata (GH) değerleri

x	MH	GH
0.1	0	-1.386294361
0.2	0.001475899	0.001062721996
0.3	0.001246222	0.0008925527217
0.4	0.000242682	0.0001722926887
0.5	0.002404781	0.001686955855
0.6	0.004276129	0.002955334093
0.7	0.005421910	0.003682181930
0.8	0.005938692	0.003954243976
0.9	0.005522666	0.003598497624
1.0	0.003723660	0.002370705363



Şekil 4.1 Problem (4.4) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm 2D gösterimi

4.3 Homojen Sınır Değer Problemi

Sınır şartları $w(0) = 0, w'(0) = 0, w(1) = 0, w'(1) = 0$ olan

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{x^2}{1+w^2} - 72(1-5x+5x^2) + \frac{x^2}{1+(x-x^2)^6}, \quad x \in [0, 1], \quad (4.17)$$

homojen sınır değer problemini göz önüne alalım. Problemin kesin çözümü $w = x^3(1-x)^3$ şeklindedir. ν, w 'nın lineer olmayan fonksiyonlarını temsil etmek üzere

$$\begin{cases} w^{(4)} = \nu(x, w(x)), & 0 \leq x \leq 1, \\ w(0) = 0, w'(0) = 0, w(1) = 0, w'(1) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

biçiminde ifade edilebilir.

4.3.1 Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı ve Üretici Çekirdek Fonksiyonu

Buna göre Problem 4.17'nin yaklaşık çözümüne dair üretici çekirdekli uzaylar ve bu uzaylara ait iç çarpım fonksiyonları için bazı tanım ve teoremler aşağıda sunulmuştur.

Tanım 4.3. $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayı $\tilde{V}_2^1[0, 1] = \{u(x) \mid u \in AC[0, 1], u' \in L^2[0, 1], x \in [0, 1]\}$ şeklinde tanımlanır. Bu uzaya ait iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{V}_2^1[0,1]} = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad u, v \in \tilde{V}_2^1[0, 1],$$

$$\|u\|_{\tilde{V}_2^1[0,1]} = \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle}, \quad u \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$$

şeklindedir.

Teorem 4.8. [72] $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 1]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1[0, 1]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$ vardır. Bu durumda $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) = \begin{cases} 1 + x, & y \leq x \\ 1 + y, & y > x \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 4.4. ${}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ Hilbert uzayı

$$\begin{aligned} {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1] &= \{w : w^{(n)} \in AC[0, 1], n = 1, \dots, 4, \quad w^{(5)} \in L^2[0, 1], \\ &\quad w(0) = 0, w'(0) = 0, w(1) = 0, w'(1) = 0\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayı donatan iç çarpım ve iç çarpımdan hareketle elde edilen norm

$$\begin{aligned} \langle w, v \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]} &= \sum_{i=0}^4 w^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 w^{(5)}(t)v^{(5)}(t)dt, \quad w, v \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1] \\ \|w\|_{{}^o\tilde{V}_2^5} &= \sqrt{\langle w, w \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5}}, \quad w \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1] \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 4.9. ${}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ uzayın bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 1]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ vardır. Bu durumda ${}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{5\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{5\}}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} c_i x^{i-1}, & x \leq y \\ \sum_{i=1}^{10} d_i x^{i-1}, & x > y \end{cases} \quad (4.19)$$

formunda olup, burada

$$\begin{aligned} (x \leq y) \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) &= \frac{1}{362880} x^9 + \frac{5201}{3029828} x^2 y^2 + \frac{983}{21208796} x^2 y^8 - \frac{2612}{26510995} x^2 y^7 \\ &\quad + \frac{103}{3787285} x^2 y^6 + \frac{997}{3787285} x^2 y^5 + \frac{997}{757457} x^2 y^4 - \frac{2472}{757457} x^2 y^3 \\ &\quad - \frac{401}{53021990} x^2 y^9 + \frac{171665}{27268452} x^3 y^3 - \frac{1474}{79532985} x^3 y^8 - \frac{103}{79532985} x^3 y^7 \\ &\quad + \frac{678}{3787285} x^3 y^6 - \frac{12101}{22723710} x^3 y^5 - \frac{12101}{4544742} x^3 y^4 - \frac{2472}{757457} x^3 y^2 \\ &\quad + \frac{793}{190879164} x^3 y^9 - \frac{608257}{436295232} x^4 y^4 - \frac{40291}{15270333120} x^4 y^8 \\ &\quad + \frac{997}{1908791640} x^4 y^7 + \frac{12101}{545369040} x^4 y^6 - \frac{1865}{27268452} x^4 y^5 \\ &\quad - \frac{12101}{4544742} x^4 y^3 + \frac{997}{757457} x^4 y^2 + \frac{2183}{3817583280} x^4 y^9 + \frac{608257}{2181476160} x^5 y^4 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{40291}{76351665600} x^5 y^8 + \frac{997}{9543958200} x^5 y^7 + \frac{12101}{2726845200} x^5 y^6 - \\
& \frac{373}{27268452} x^5 y^5 - \frac{12101}{22723710} x^5 y^3 + \frac{997}{3787285} x^5 y^2 + \frac{2183}{19087916400} x^5 y^9 - \\
& \frac{34333}{654442848} x^6 y^3 + \frac{737}{4771979100} x^6 y^8 + \frac{103}{9543958200} x^6 y^7 - \\
& \frac{113}{75745700} x^6 y^6 + \frac{12101}{2726845200} x^6 y^5 + \frac{12101}{545369040} x^6 y^4 + \frac{103}{3787285} x^6 y^2 - \\
& \frac{793}{22905499680} x^6 y^9 + \frac{743}{1090738080} x^7 y^2 + \frac{983}{53446165920} x^7 y^8 \\
& - \frac{653}{16701926850} x^7 y^7 + \frac{103}{9543958200} x^7 y^6 + \frac{997}{9543958200} x^7 y^5 + \\
& \frac{997}{1908791640} x^7 y^4 - \frac{103}{79532985} x^7 y^3 - \frac{401}{133615414800} x^7 y^9 - \frac{1}{40320} x^8 y - \\
& \frac{13759}{534461659200} x^8 y^8 + \frac{983}{53446165920} x^8 y^7 + \frac{737}{4771979100} x^8 y^6 - \\
& \frac{40291}{76351665600} x^8 y^5 - \frac{40291}{15270333120} x^8 y^4 - \frac{1474}{79532985} x^8 y^3 + \\
& \frac{983}{21208796} x^8 y^2 + \frac{5569}{1068923318400} x^8 y^9 - \frac{323}{300634683300} x^9 y^9 + \\
& \frac{5569}{1068923318400} x^9 y^8 - \frac{401}{133615414800} x^9 y^7 - \frac{793}{22905499680} x^9 y^6 + \\
& \frac{2183}{19087916400} x^9 y^5 + \frac{2183}{3817583280} x^9 y^4 + \frac{793}{190879164} x^9 y^3 \\
& - \frac{401}{53021990} x^9 y^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x > y) \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) = & \frac{1}{362880} y^9 + \frac{5201}{3029828} x^2 y^2 + \frac{983}{21208796} x^2 y^8 + \frac{743}{1090738080} x^2 y^7 \\
& + \frac{103}{3787285} x^2 y^6 + \frac{997}{3787285} x^2 y^5 + \frac{997}{757457} x^2 y^4 - \frac{2472}{757457} x^2 y^3 \\
& - \frac{401}{53021990} x^2 y^9 + \frac{171665}{27268452} x^3 y^3 - \frac{1474}{79532985} x^3 y^8 - \frac{103}{79532985} x^3 y^7 \\
& - \frac{34333}{654442848} x^3 y^6 - \frac{12101}{22723710} x^3 y^5 - \frac{12101}{4544742} x^3 y^4 - \frac{2472}{757457} x^3 y^2 \\
& + \frac{793}{190879164} x^3 y^9 + \frac{608257}{436295232} x^4 y^4 - \frac{40291}{15270333120} x^4 y^8 \\
& + \frac{997}{1908791640} x^4 y^7 + \frac{12101}{545369040} x^4 y^6 + \frac{608257}{2181476160} x^4 y^5 \\
& - \frac{12101}{4544742} x^4 y^3 + \frac{997}{757457} x^4 y^2 + \frac{2183}{3817583280} x^4 y^9 - \frac{1865}{27268452} x^5 y^4 \\
& - \frac{40291}{76351665600} x^5 y^8 + \frac{997}{9543958200} x^5 y^7 + \frac{12101}{2726845200} x^5 y^6 \\
& - \frac{373}{27268452} x^5 y^5 - \frac{12101}{22723710} x^5 y^3 + \frac{997}{3787285} x^5 y^2 + \frac{2183}{19087916400} x^5 y^9 \\
& + \frac{678}{3787285} x^6 y^3 + \frac{737}{4771979100} x^6 y^8 + \frac{103}{9543958200} x^6 y^7 - \frac{113}{75745700} x^6 y^6 \\
& + \frac{12101}{2726845200} x^6 y^5 + \frac{12101}{545369040} x^6 y^4 + \frac{103}{3787285} x^6 y^2 \\
& - \frac{793}{22905499680} x^6 y^9 - \frac{2612}{26510995} x^7 y^2 + \frac{983}{53446165920} x^7 y^8 \\
& - \frac{653}{16701926850} x^7 y^7 + \frac{103}{9543958200} x^7 y^6 + \frac{997}{9543958200} x^7 y^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{997}{1908791640} x^7 y^4 - \frac{103}{79532985} x^7 y^3 - \frac{401}{133615414800} x^7 y^9 \\
& - \frac{13759}{534461659200} x^8 y^8 + \frac{983}{53446165920} x^8 y^7 + \frac{737}{4771979100} x^8 y^6 \\
& - \frac{40291}{76351665600} x^8 y^5 - \frac{40291}{15270333120} x^8 y^4 - \frac{1474}{79532985} x^8 y^3 \\
& + \frac{983}{21208796} x^8 y^2 + \frac{5569}{1068923318400} x^8 y^9 - \frac{323}{300634683300} x^9 y^9 \\
& + \frac{5569}{1068923318400} x^9 y^8 - \frac{401}{133615414800} x^9 y^7 - \frac{793}{22905499680} x^9 y^6 \\
& + \frac{2183}{19087916400} x^9 y^5 + \frac{2183}{3817583280} x^9 y^4 + \frac{793}{190879164} x^9 y^3 \\
& - \frac{401}{53021990} x^9 y^2 - \frac{1}{40320} y^8 x.
\end{aligned}$$

Kanıt. ${}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı olduğundan, çekirdeğin yeniden üretme prensibi çekirdek fonksiyonu tarafından sağlanır. Dolayısıyla,

$$\langle w(x), \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} = \sum_{i=0}^4 w^{(i)}(0) \partial_{x^i} \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) + \int_0^1 w^{(5)}(x) \partial_{x^5} \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) dx = w(y).$$

Eşitliğin sağ tarafındaki integrale beş kez kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned}
\langle w, \tilde{k}_y^{\{5\}} \rangle_{V_2^5[0,1]} &= w''(0) \partial_{x^2}^2 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) + w^{(3)}(0) \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) + w^{(4)}(0) \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) \\
&+ w^{(4)}(1) \partial_{x^5}^5 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) + w^{(4)}(0) \partial_{x^5}^5 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) - w^{(3)}(1) \partial_{x^6}^6 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) \\
&+ w^{(3)}(0) \partial_{x^6}^6 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) + w''(1) \partial_{x^7}^7 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) - w''(0) \partial_{x^7}^7 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) \\
&- w'(1) \partial_{x^8}^8 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) + w'(0) \partial_{x^8}^8 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) + w(1) \partial_{x^9}^9 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) \\
&- w(0) \partial_{x^9}^9 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) - \int_0^1 w(x) \partial_{x^{10}}^{10} \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Bazı düzenlemelerden sonra denklem aşağıdaki formu alacaktır.

$$\begin{aligned}
\langle w, \tilde{k}_y^{\{5\}} \rangle_{V_2^5[0,1]} &= w(0) [\tilde{k}_y^{\{5\}}(0) - \partial_{x^9}^9 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0)] + w'(0) [\partial_x \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) + \partial_{x^8}^8 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0)] \\
&+ w''(0) [\partial_{x^2}^2 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) - \partial_{x^7}^7 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0)] + w'''(0) [\partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) + \partial_{x^6}^6 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0)] \\
&+ w^{(4)} [\partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) - \partial_{x^5}^5 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0)] + w^{(4)}(1) \partial_{x^5}^5 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) \\
&- w''' \partial_{x^6}^6 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) + w''(1) \partial_{x^7}^7 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) - w'(1) \partial_{x^8}^8 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) \\
&+ w(1) \partial_{x^9}^9 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) - \int_0^1 w(x) \partial_{x^{10}}^{10} \tilde{k}_y^{\{5\}} dx.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$w(x), \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ olduğundan

$$\begin{aligned}
w(0) &= w'(0) = w(1) = w'(1) = 0 \\
\tilde{k}_y^{\{5\}}(0) &= \partial_x \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) = \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) = \partial_x \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) = 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu fonksiyonlar dikkate alınarak (4.20) denklemini yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\langle w, \tilde{k}_y^{\{5\}} \rangle_{V_2^5[0,1]} = & + w''(0)[\partial_{x_2}^2 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) - \partial_{x_7}^7 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0)] + w'''(0)[\partial_{x_3}^3 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) + \partial_{x_6}^6 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0)] \\
& + w^{(4)}[\partial_{x_4}^4 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) - \partial_{x_5}^5 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0)] + w^{(4)}(1)\partial_{x_5}^5 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) \\
& - w''' \partial_{x_6}^6 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) + w''(1)\partial_{x_7}^7 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) - \int_0^1 w(x)\partial_{x_{10}}^{10} \tilde{k}_y^{\{5\}} dx
\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği

$$\langle w(x), \tilde{k}_y^{\{5\}} \rangle_{\circ V_2^5} = w(y)$$

olduğundan bu durum, δ Dirac-delta fonksiyonu olmak üzere

$$-\partial_{x_{10}}^{10} \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) = \delta(x - y)$$

eşitliğini w fonksiyonlarının katsayılarının sıfıra eşit olmasını gerektirir. Dirac-delta fonksiyonun yapısı gereği $x \neq y$ iken $\delta(x - y) = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, $\tilde{k}_y^{\{5\}}(x)$ üretici çekirdek fonksiyonu sınır şartları

$$\begin{cases}
\partial_{x_2}^2 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) - \partial_{x_7}^7 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) = 0 \\
\partial_{x_3}^3 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) + \partial_{x_6}^6 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) = 0 \\
\partial_{x_4}^4 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) - \partial_{x_5}^5 \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) = 0 \\
\partial_{x_5}^5 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) = 0 \\
\partial_{x_6}^6 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) = 0 \\
\partial_{x_7}^7 \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) = 0 \\
\partial_x \tilde{k}_y^{\{5\}}(0) = 0 \\
\partial_x \tilde{k}_y^{\{5\}}(1) = 0 \\
\tilde{k}_y^{\{5\}}(0) = 0 \\
\tilde{k}_y^{\{5\}}(1) = 0
\end{cases} \tag{4.22}$$

olan, onuncu mertebeden lineer homojen

$$-\partial_{x_{10}}^{10} \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) = 0 \tag{4.23}$$

diferansiyel denkleminin genel çözümüdür. (4.23)'ün karakteristik denklemi $\lambda^{10} = 0$ ve on katlı köklü özdeğeri $\lambda = 0$ olduğundan, üretici çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{5\}}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} c_i x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^{10} d_i x^{i-1}, & x > y \end{cases} \tag{4.24}$$

şeklindedir. $-\partial_{x_{10}}^{10} \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) = \delta(x - y)$ olması sebebiyle, δ fonksiyonunun özelliğinden ötürü

$$\begin{aligned} \partial_{x_i}^i \tilde{k}_{y+}^{\{5\}} &= \partial_{x_i}^i \tilde{k}_{y-}^{\{5\}}, \quad i = 0, 1, \dots, 8 \\ \partial_{x_9}^9 \tilde{k}_{y+}^{\{5\}} - \partial_{x_9}^9 \tilde{k}_{y-}^{\{5\}} &= -1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

denklemleri elde edilir. (4.22) ve (4.25) diferansiyel denklem sistemi çözüldüğünde $i = 1, \dots, 10$ için c_i ve d_i katsayıları bulunmuş olur. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

4.3.2 Yaklaşık Çözümün İnşası

Üretici çekirdek fonksiyonu bulunan Problem 4.17 için

$$\mathcal{F}w(x) := w^{(4)}(x)$$

olmak üzere

$$\mathcal{F}: {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1] \rightarrow \tilde{V}_2^1[0, 1] \quad (4.26)$$

operatörünü tanımlayalım. Böylelikle problem

$$\begin{cases} \mathcal{F}w(x) = \nu(x, w(x)), & 0 \leq x \leq 1, \\ w(0) = w'(0) = w(1) = w'(1) = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $w \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ ve $\nu \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$.

Teorem 4.10. $\mathcal{F}: {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1] \rightarrow \tilde{V}_2^1[0, 1]$ operatörü sınırlı ve lineerdir.

Kanıt. Sınırlılığı ispatlamak için $\|\mathcal{F}u\|_{\tilde{V}_2^1} \leq M \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^5}$, $M > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayına ait iç çarpım ve norm tanımından

$$\|\mathcal{F}u\|_{\tilde{V}_2^1}^2 = \langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}u \rangle_{\tilde{V}_2^1} = [(\mathcal{F}u)(0)]^2 + \int_0^1 [(\mathcal{F}u)'(x)]^2 dx$$

elde edilir. Çekirdeğin üretme prensibinden

$$\begin{aligned} u(x) &= \left\langle u(y), \tilde{k}_x^{\{5\}}(y) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \\ (\mathcal{F}u)(x) &= \left\langle u(y), \left(\mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{5\}} \right)(y) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \\ (\mathcal{F}u)'(x) &= \left\langle u(y), \left(\mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{5\}} \right)'(y) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$|(\mathcal{F}u)(x)| = \left| \left\langle u(y), \left(\mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{5\}} \right)(y) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \right| \leq \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^5} \left\| \mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{5\}} \right\|_{{}^o\tilde{V}_2^5} = M_1 \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^5}$$

$$|(\mathcal{F}u)'(x)| = \left| \left\langle u(y), \left(\mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{5\}} \right)'(y) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \right| \leq \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^5} \left\| \left(\mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{5\}} \right)' \right\|_{{}^o\tilde{V}_2^5} = M_2 \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^5}$$

bulunur ki burada $M_1, M_2 > 0$ dır. Böylece

$$\|\mathcal{F}u\|_{\tilde{V}_2^1}^2 = [(\mathcal{F}u)(0)]^2 + \int_0^1 [(\mathcal{F}u)'(x)]^2 dx \leq (M_1^2 + M_2^2) \|u\|_{\tilde{V}_2^5}^2$$

veya basitçe $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$ olmak üzere $\|\mathcal{F}u\|_{\tilde{V}_2^1} \leq M \|u\|_{\tilde{V}_2^5}$ elde edilir. Operatörün lineerliği aşikârdır. İspat tamamlanmış olur. $\square$

Şimdi ${}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ 'nin ortogonal fonksiyon sistemini inşa etmek için $[0, 1]$ aralığında sayılabilir yoğun $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisini seçerek $\varphi_i(x) = \tilde{k}_{x_i}^{\{1\}}(x)$ ve $\psi_i(x) = \mathcal{F}^*\varphi_i(x)$ tanımlamalarını yapalım. Burada $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{F}$ 'nin adjoint operatörünü ve $\tilde{k}$ ise $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayının üretici çekirdek fonksiyonunu temsil eder.

Teorem 4.11. *Kabul edelim ki $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ aralığında yoğun olsun. Bu durumda $\psi_i(x) = \mathcal{F}_y \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \Big|_{y=x_i}$ olmakla birlikte $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ tam bir fonksiyon sistemidir.*

Kanıt. $\mathcal{F}$ operatörünün x 'in fonksiyonlarına uygulanmış hâlini $\mathcal{F}_x$ ile temsil edelim.

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \mathcal{F}^*\varphi_i(x) = \left\langle \mathcal{F}^*\varphi_i(x), \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^3} \\ &= \left\langle \varphi_i(x), \mathcal{F}_x \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^1} \\ &= \mathcal{F}_x \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \Big|_{y=x_i}. \end{aligned}$$

Buradan açıkça anlaşılmaktadır ki $\psi_i(x) \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ 'dir. Şimdi kabul edelim ki her bir $w \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ için $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^5[0, 1]} = 0$, $i = 1, 2, \dots$ olsun. O hâlde, $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^3[0, 1]} = \langle u(x), \mathcal{F}^*\varphi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1} = \langle \mathcal{F}u(x), \varphi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1} = \mathcal{F}u(x_i) = 0$. $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ aralığında yoğunken, $\mathcal{F}^{-1}$ 'den dolayı $\mathcal{F}u(x) = 0$ olmalıdır. Bu da $u = 0$ eşitliğini gerektirir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

${}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ uzayının ortonormal sitemi olan $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$, $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ için Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x)$$

olarak bulunur. Burada γ_{ik} ortogonalizasyon katsayılarını temsil etmektedir.

4.3.3 Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde problemin çözümüne ve yaklaşık çözümün yakınsaklığına dair teoremler verilecektir.

Teorem 4.12. *Kabul edelim ki $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ 'de yoğun olsun. Eğer ${}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ uzayının elemanı olan $w(x)$ fonksiyonu (4.27) ile verilen problemin çözümü ise bu çözüm fonksiyonu, $\nu_k := \nu(x_k, w(x_k))$ olmak üzere*

$$w(x) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \nu_k \bar{\psi}_i(x) \quad (4.28)$$

şeklinde ifade edilir.

Kanıt. $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sisteminin ${}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ uzayında tam olduğu ve bu uzayın bir Hilbert uzayı olduğu açıktır. $w \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} \langle w(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \bar{\psi}_i(x)$ serisi $w(x)$ 'in Fourier seri açılımı olduğundan, bu seri ${}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ uzayında tanımlı norma yakınsar. Ayrıca çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği her $w \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ için $\langle w(x), \varphi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} = u(x_i)$ olması sebebiyle aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür. Böylece

$$\begin{aligned}
w(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle w(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \bar{\psi}_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle w(x), \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle w(x), \psi_k(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle w(x), \mathcal{F}^* \varphi_k(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \left\langle \mathcal{F}w(x), \tilde{k}_{x_k}^{\{5\}}(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^1} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \mathcal{F}u(x_k) \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \nu_k \bar{\psi}_i(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

$w(x)$ çözümünde serinin n . teriminden sonrakiler ihmal edilirse problemin yaklaşık çözümü şu şekilde ifade edilebilir:

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \nu(x_k, w(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \quad (4.29)$$

$B_i = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \nu(x_k, w(x_k))$ olmak üzere, (4.28) analitik çözümü

$$w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x)$$

olarak yazılabilir. Nümerik hesaplamalar göz önünde bulundurularak $w_0(x_1) = w(x_1)$

alındığında $w(x)$ 'in n terim yaklaşımı

$$\begin{aligned} B_1 &= \gamma_{11} \nu(x_1, w_0(x_1)), \\ B_2 &= \sum_{k=1}^2 \gamma_{2k} \nu(x_k, w_{k-1}(x_k)), \\ &\vdots \\ B_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{(n-1)k} \nu(x_k, w_{k-1}(x_k)), \\ B_n &= \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} \nu(x_k, w_{k-1}(x_k)) \end{aligned}$$

olmak üzere, buradan w 'ler hesaplanacak olursa

$$\begin{aligned} w_1(x) &= B_1 \bar{\psi}_1(x), \\ w_2(x) &= \sum_{i=1}^2 B_i \bar{\psi}_i(x), \\ &\vdots \\ w_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} B_i \bar{\psi}_i(x), \end{aligned}$$

ve nihayetinde yaklaşık çözüm

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(x) \quad (4.30)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir sonraki aşama yaklaşım çözümünün analitik çözüme yakınsadığını, yani $w_n(x) \rightarrow w(x)$ olduğunu göstermek olacaktır.

Teorem 4.13. *Kabul edelim ki $\|w_n\|$ sınırlı ve denklem (4.27) tek bir çözüme sahip olsun. Eğer $\{x_i\}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ de yoğunsa (4.30)'da elde edilen $w_n(x)$ yaklaşık çözümü, (4.27)'nin analitik çözümü olan $w(x)$ 'e yakınsar.*

Kanıt. Bu teoremin ispatı Teorem 4.6'ya benzer şekilde kolaylıkla yapılabilir. $\square$

Teorem 4.14. *Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $w_n(x) \rightarrow w(x)$ ve $(x_n) \rightarrow (x)$, aynı zamanda $\|w_n(x)\|_{\circ \tilde{V}_2^5}$ sınırlı ve $\nu(x, w)$ sürekli ise bu durumda*

$$\nu(x_n, w_{n-1}) \rightarrow \nu(x, w), \quad n \rightarrow \infty$$

olur.

Kanıt. Yakınsaklığı ispatlamak için $|w_{n-1}(x_n) - w(x)|$ 'den hareketle

$$\begin{aligned} |w_{n-1}(x_n) - w(x)| &= |w_{n-1}(x_n) - w_{n-1}(x) + w_{n-1}(x) - w(x)| \\ &\leq |w_{n-1}(x_n) - w_{n-1}(x)| + |w_{n-1}(x) - w(x)| \\ &\leq \left| \frac{d}{dx} w_{n-1}(x_n) \right| |x_n - x| + |w_{n-1}(x) - w(x)| \end{aligned}$$

elde edilir. Verilen $n \rightarrow \infty$ iken $w_n(x) \rightarrow w(x)$ ve $(x_n) \rightarrow (x)$ şartlarından

$$|w_{n-1}(x_n) - w(x)| \rightarrow 0$$

bulunur. $\nu(x, w)$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\nu(x_n, w_{n-1}) \rightarrow \nu(x, w), \quad n \rightarrow \infty$$

yakınsaklığına ulaşılır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. □

4.3.4 Nümerik Sonuçlar

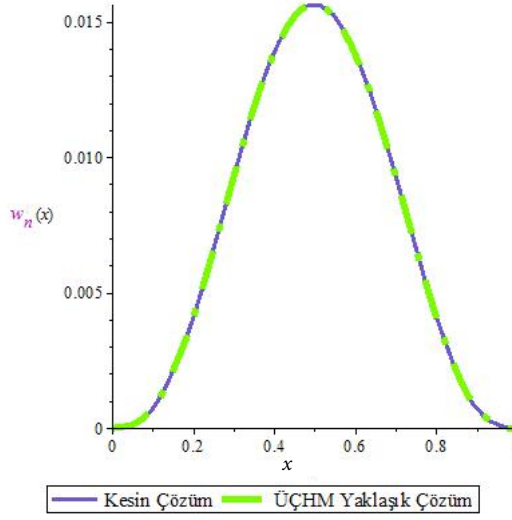
Kesin çözümü $w(x) = x^3(1 - x^3)$ olan problemin analizi için yoğun nokta sayısı $M=100$ olmak üzere $x_i = \frac{i}{M}$, $i = 1, \dots, M$ alınmıştır. Mutlak ve görelî hatalar Tablo 4.4'de sunulmuş, yaklaşık çözüm ile kesin çözüm arasındaki ilişki Tablo 4.3'deki nümerik sonuçların yanı sıra Şekil 4.2 yardımıyla gösterilmiştir. Sonuçlardan açıkça anlaşılmaktadır ki Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu ile elde edilen yaklaşık çözümün hata değerleri oldukça düşük olmakla beraber yaklaşık çözüm kesin çözüme neredeyse eşleşecek kadar yakındır.

Tablo 4.3 Problem (4.17) için kesin çözüm (KÇ) ve yaklaşık çözüm (YÇ) değerleri

x	KÇ	ÜÇHM (YÇ)
0.1	0	0
0.2	0.000729	0.0007287994617
0.3	0.004096	0.004095373943
0.4	0.009261	0.009259930360
0.5	0.013824	0.01382261204
0.6	0.015625	0.01562351462
0.7	0.013824	0.01382264146
0.8	0.009261	0.009259956708
0.9	0.004096	0.004095382581
1.0	0.000729	0.0007288116772

Tablo 4.4 Problem (4.17) mutlak hata (MH) ve görelî hata (GH) değerleri

x	MH	GH
0.1	0	0
0.2	0.000001976916	0.0002750868313
0.3	0.000006265464	0.0001528459473
0.4	0.000001069640	0.0001154994061
0.5	0.00000138796	0.0001004021991
0.6	0.00000148538	0.00009506432000
0.7	0.00000135854	0.00009827401620
0.8	0.000001043292	0.0001126543570
0.9	0.000000617419	0.0001507370605
1.0	0.0000001883228	0.0002583303155



Şekil 4.2 Problem (4.17) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm 2D gösterimi

4.4 Bazı Başlangıç Değer Problemleri İçin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu

Bu bölümde genel yapıları

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dx^2} = u(x, y), & x \in [a, b] \\ w(a) = p_0, & w'(a) = q_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^3 w}{dx^3} = v(x, y), & x \in [c, d] \\ w(c) = p_1, w'(c) = q_1, w''(c) = q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^4 w}{dx^4} = z(x, y), & x \in [e, f] \\ w(e) = p_2, w'(e) = q_3, w'''(e) = q_4, w'(f) = q_5 \end{cases}$$

şeklinde olan üç farklı yüksek mertebeden lineer ve homojen olmayan başlangıç değer probleminin ÜÇHM ile yaklaşık çözümleri incelenecektir. Önce problemlerin başlangıç şartları homojen hâle getirilerek problemlere ait çekirdek uzayları tanımlanacak ve yaklaşık çözümlere dair teori sunulacaktır. Son olarak yaklaşık çözümün sayısal sonuçları tablo ve grafikler yardımıyla verilecektir.

4.4.1 Problem I

İkinci mertebeden doğrusal olmayan

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 2w^3, \quad x \in [0, 0.5] \quad (4.31)$$

başlangıç değer problemini $w(0) = 1, w'(0) = -1$ başlangıç şartları ile birlikte göz önüne alalım. Problemin kesin çözümü $w(x) = \frac{1}{x+1}$ 'dir.

Homojenleştirme

Homojenleştirme için probleme özel bir dönüşüm fonksiyonu kullanılarak, temelde Bölüm 4.2.1'de anlatılan basamaklar takip edilecektir. Problemin çözümünü $w(x) = u(x) + s_2(x)$ olacak şekilde arayalım. Homojenleştirme sürecinin ilk basamağı olarak $s_2(x) = 1 - x$ dönüşüm fonksiyonunu kullanalım. Bu durumda çözüm fonksiyonu

$$w(x) = u(x) + 1 - x \quad (4.32)$$

şeklinde olacaktır. Gerekli türevler alınırsa

$$\begin{aligned} w'(x) &= u'(x) - 1 \\ w''(x) &= u''(x) \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde edilir. (4.32) ve (4.33) denklemleri (4.31)'de yerine yazılıp düzenleme yapıldığında

$$u''(x) - u(x)6(1-x)^2 = 2u^3(x) + 6u^2(x)(1-x) + 2(1-x)^2 \quad (4.34)$$

bulunur. $s_2(x)$ dönüşüm fonksiyonuna problemin başlangıç şartları uygulandığında $u(0) = u'(0) = 0$ homojen başlangıç şartları elde edilmiş olur. α , u 'nun doğrusal olmayan

fonksiyonlarını temsil etmek üzere

$$\alpha(x, u(x)) = 2u^3(x) + 6u^2(x)(1-x) + 2(1-x)^2$$

biçiminde ifade edilebilir. Böylece

$$\begin{cases} u''(x) - u(x)6(1-x)^2 = \alpha(x, u(x)), & 0 \leq x \leq 0.5 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

homogen başlangıç değer problemi elde edilmiş olur.

ÜÇHU ve Yaklaşık Çözümün İnşası

Bu bölümde Problem 4.35'e ait yaklaşık çözümün inşası için gerekli olan üretici çekirdekli uzaylar ile bu uzaylara ait üretici çekirdek fonksiyonlarına dair tanım ve teoremler sunulacaktır.

Tanım 4.5. $\tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ uzayı $\tilde{V}_2^1[0, 0.5] = \{u(x) \mid u \in AC[0, 0.5], u' \in L^2[0, 0.5], x \in [0, 0.5]\}$ şeklinde tanımlanır. Bu uzaya ait iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{\tilde{V}_2^1[0, 0.5]} &= u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad u, v \in \tilde{V}_2^1[0, 0.5], \\ \|u\|_{\tilde{V}_2^1[0, 0.5]} &= \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle}, \quad u \in \tilde{V}_2^1[0, 0.5] \end{aligned}$$

formundadır.

Teorem 4.15. [72] $\tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in \tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 0.5]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1[0, 0.5]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \in \tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ vardır. Bu durumda $\tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) = \begin{cases} 1+x, & y \leq x \\ 1+y, & y > x \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 4.6. ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ Hilbert uzayı

$${}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5] = \{u : u, u', u'' \in AC[0, 0.5], u''' \in L^2[0, 0.5], u(0) = 0 = u'(0)\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayı donatan iç çarpım ve iç çarpımdan hareketle elde edilen norm

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]} &= \sum_{i=0}^2 u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(3)}(t)v^{(3)}(t)dt, \quad u, v \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5] \\ \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^3} &= \sqrt{\langle u, u \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3}}, \quad u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5] \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 4.16. ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 0.5]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ vardır. Bu durumda ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{3\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 c_i x^{i-1}, & x \leq y \\ \sum_{i=1}^6 d_i x^{i-1}, & x > y \end{cases} \quad (4.36)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, & c_2 &= 0, & c_3 &= 0.2500000000 y^2, & c_4 &= 0.0833333333 y^2, \\ c_5 &= -0.04166666667 y, & c_6 &= 0.08333333333. \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_1 &= 0.008333333333 y^5, & d_2 &= 0.08333333333 y^3 + 0.2500000000 y^2, \\ d_3 &= -0.04166666667 y^4, & d_4 &= 0, & d_5 &= 0, & d_6 &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Kanıt. ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı olduğundan, çekirdeğin yeniden üretme prensibi çekirdek fonksiyonu tarafından sağlanır. Dolayısıyla,

$$\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]} = \sum_{i=0}^2 u^{(i)}(0) \partial_{x_i}^i \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) + \int_0^{0.5} u^{(3)}(x) \partial_{x_3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) dx = u(y).$$

Kanıt 4.2'deki benzer basamaklar takip edildiğinde, ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ uzayının $\tilde{k}_y^{\{3\}}(x)$ çekirdek fonksiyonunun, başlangıç şartları

$$\begin{cases} \partial_{x_2}^2 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) - \partial_{x_3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) = 0 \\ \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) = 0 \\ \partial_x \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) = 0 \\ \partial_{x_3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0.5) = 0 \\ \partial_{x_4}^4 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0.5) = 0 \\ \partial_{x_5}^5 \tilde{k}_y^{\{3\}}(0.5) = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

olan, altıncı mertebeden lineer homojen

$$-\partial_{x_6}^6 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = 0 \quad (4.38)$$

diferansiyel denkleminin genel çözümü olduğu açıkça görülür. (4.38)'in karakteristik denklemi $\lambda^6 = 0$ ve altı katlı köklü özdeğeri $\lambda = 0$ olduğundan, üretici çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 c_i x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^6 d_i x^{i-1}, & x > y \end{cases} \quad (4.39)$$

şeklindedir. $-\partial_{x_6}^6 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = \delta(x - y)$ olması sebebiyle, δ fonksiyonunun özelliğinden ötürü

$$\begin{aligned} \partial_{x_i}^i \tilde{k}_{y+}^{\{3\}} &= \partial_{x_i}^i \tilde{k}_{y-}^{\{3\}}, \quad i = 0, 1, \dots, 4 \\ \partial_{x_5}^5 \tilde{k}_{y+}^{\{3\}} - \partial_{x_5}^5 \tilde{k}_{y-}^{\{3\}} &= -1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

denklemleri elde edilir. (4.37) ve (4.40) diferansiyel denklem sistemi çözüldüğünde $i = 1, \dots, 6$ için c_i ve d_i katsayıları bulunmuş olur. Sonuç olarak üretici çekirdek fonksiyonu $\tilde{k}_y^{\{3\}}(x)$

$$\tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = \begin{cases} 0.2500000000 y^2 x^2 + 0.0833333333 y^2 x^3 \\ - 0.0416666667 y x^4 + 0.0083333333 x^5, & x \leq y \\ 0.0083333333 y^5 - 0.0416666667 y^4 x \\ + 0.0833333333 x^2 y^3 + 0.2500000000 y^2 x^2 & x > y \end{cases}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Şimdi Problem 4.35 için

$$\mathcal{F}u(x) := u''(x) - u(x)6(1-x)^2$$

olmak üzere

$$\mathcal{F}: {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5] \rightarrow \tilde{V}_2^1[0, 0.5] \quad (4.41)$$

sınırlı lineer operatörünü tanımlayalım. Böylelikle problem

$$\begin{cases} \mathcal{F}u(x) = \alpha(x, u(x)), & 0 \leq x \leq 0.5, \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ ve $\alpha \in \tilde{V}_2^1[0, 0.5]$.

Teorem 4.17. $\mathcal{F}: {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5] \rightarrow \tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ operatörü sınırlı ve lineerdir.

Kanıt. İspat [102]'ye benzer şekilde olduğundan burada yeniden sunulmamıştır. $\square$

Operatörden sonra artık ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ 'in ortogonal fonksiyon sistemini inşa etmek için $[0, 0.5]$ aralığında sayılabilir yoğun $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi seçilerek $\varphi_i(x) = \tilde{k}_{x_i}^{\{1\}}(x)$ ve $\psi_i(x) = \mathcal{F}^* \varphi_i(x)$ tanımlamaları yapılabilir. Burada $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{F}$ 'nin adjoint operatörünü ve $\tilde{k}$ ise $\tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ uzayının üretici çekirdek fonksiyonunu temsil eder.

Teorem 4.18. *Kabul edelim ki $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0, 0.5]$ aralığında yoğun olsun. Bu durumda $\psi_i(x) = \mathcal{F}_y \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \Big|_{y=x_i}$ olmakla birlikte $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ tam bir fonksiyon sistemidir.*

Kanıt. $\mathcal{F}$ operatörünün x 'in fonksiyonlarına uygulanmış hâlini $\mathcal{F}_x$ ile temsil edelim. Çekirdeğin yeniden üretme prensibi kullanılarak

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \mathcal{F}^* \varphi_i(x) = \left\langle \mathcal{F}^* \varphi_i(x), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} \\ &= \left\langle \varphi_i(x), \mathcal{F}_x \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^1} \\ &= \mathcal{F}_x \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \Big|_{y=x_i} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıkça anlaşılmaktadır ki $\psi_i(x) \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ 'dir. Şimdi kabul edelim ki her bir $u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ için $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]} = 0$, $i = 1, 2, \dots$ olsun. O hâlde, $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]} = \langle u(x), \mathcal{F}^* \varphi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1} = \langle \mathcal{F}u(x), \varphi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1} = \mathcal{F}u(x_i) = 0$. $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0, 0.5]$ aralığında yoğunken, $\mathcal{F}^{-1}$ 'den dolayı $\mathcal{F}u(x) = 0$ olmalıdır. Bu da $u = 0$ eşitliğini gerektirir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

${}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ uzayının ortonormal sitemi olan $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ için Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x)$$

olarak bulunur. Burada γ_{ik} ortogonalizasyon katsayılarını temsil etmektedir.

4.4.2 Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde problemin çözümüne ve yaklaşık çözümün yakınsaklığına dair teoremler verilecektir.

Teorem 4.19. *Kabul edelim ki $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0, 0.5]$ 'de yoğun olsun. Eğer ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ uzayının elemanı olan $u(x)$ fonksiyonu (4.42) ile verilen problemin çözümü ise bu çözüm fonksiyonu, $\alpha_k := \alpha(x_k, u(x_k))$ olmak üzere*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \alpha_k \bar{\psi}_i(x) \quad (4.43)$$

şeklinde ifade edilir.

Kanıt. $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sisteminin ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ uzayında tam olduğu ve bu uzayın bir Hilbert uzayı olduğu açıktır. $u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} \bar{\psi}_i(x)$ serisi $u(x)$ 'in Fourier seri açılımı olduğundan, bu seri ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ uzayında tanımlı norma yakınsar. Ayrıca çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği her $u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 0.5]$ için $\langle u(x), \varphi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} = u(x_i)$

olması sebebiyle aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür. Böylece

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \right\rangle_{o\tilde{V}_2^3} \bar{\psi}_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x), \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x) \right\rangle_{o\tilde{V}_2^3} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x), \psi_k(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x), \mathcal{F}^* \varphi_k(x) \rangle_{o\tilde{V}_2^3} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \left\langle \mathcal{F}u(x), \tilde{k}_{x_k}^{\{3\}}(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^1} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \mathcal{F}u(x_k) \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \alpha_k \bar{\psi}_i(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

$u(x)$ çözümünde serinin n . teriminden sonrakiler ihmal edilirse problemin yaklaşık çözümü şu şekilde ifade edilebilir:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \alpha_k (x_k, u(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \quad (4.44)$$

$B_i = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \alpha_k (x_k, u(x_k))$ olmak üzere, (4.43) analitik çözümü

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x)$$

olarak yazılabilir. Nümerik hesaplamalar göz önünde bulundurarak $u_0(x_1) = u(x_1)$ alalım. $u(x)$ 'in n terim yaklaşımı

$$\begin{aligned}
B_1 &= \gamma_{11} \alpha_1 (x_1, u_0(x_1)), \\
B_2 &= \sum_{k=1}^2 \gamma_{2k} \alpha_k (x_k, u_{k-1}(x_k)), \\
&\vdots \\
B_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{(n-1)k} \alpha_k (x_k, u_{k-1}(x_k)), \\
B_n &= \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} \alpha_k (x_k, u_{k-1}(x_k))
\end{aligned}$$

olmak üzere, buradan u 'lar hesaplanacak olursa

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= B_1 \bar{\psi}_1(x), \\
u_2(x) &= \sum_{i=1}^2 B_i \bar{\psi}_i(x), \\
&\vdots \\
u_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} B_i \bar{\psi}_i(x),
\end{aligned}$$

ve nihayetinde yaklaşık çözüm

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(x) \quad (4.45)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir sonraki aşama yaklaşım çözümün analitik çözüme yakınsadığını, yani $u_n(x) \rightarrow u(x)$ olduğunu göstermek olacaktır.

Teorem 4.20. *Kabul edelim ki $\|u_n\|$ sınırlı ve denklem (4.42) tek bir çözüme sahip olsun. Eğer $\{x_i\}^\infty$ dizisi $[0, 0.5]$ de yoğunsa (4.45) 'de elde edilen $u_n(x)$ yaklaşık çözümü, (4.42) 'nin analitik çözümü olan $u(x)$ 'e yakınsar.*

Kanıt. Bu teoremin ispatı Teorem 4.6'ya benzer şekilde kolaylıkla yapılabilir. $\square$

Teorem 4.21. *Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x) \rightarrow u(x)$ ve $(x_n) \rightarrow (x)$, aynı zamanda $\|u_n(x)\|_{\circ \tilde{V}_2^3}$ sınırlı ve $\alpha(x, u)$ sürekli ise bu durumda*

$$\alpha(x_n, u_{n-1}) \rightarrow \alpha(x, u), \quad n \rightarrow \infty$$

olur.

Kanıt. Yakınsaklığı ispatlamak için $|u_{n-1}(x_n) - u(x)|$ 'den hareketle

$$\begin{aligned}
|u_{n-1}(x_n) - u(x)| &= |u_{n-1}(x_n) - u_{n-1}(x) + u_{n-1}(x) - u(x)| \\
&\leq |u_{n-1}(x_n) - u_{n-1}(x)| + |u_{n-1}(x) - u(x)| \\
&\leq \left| \frac{d}{dx} u_{n-1}(x_n) \right| |x_n - x| + |u_{n-1}(x) - u(x)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Verilen $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x) \rightarrow u(x)$ ve $(x_n) \rightarrow (x)$ şartlarından

$$|u_{n-1}(x_n) - u(x)| \rightarrow 0$$

bulunur. $\alpha(x, u)$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\alpha(x_n, u_{n-1}) \rightarrow \alpha(x, u), \quad n \rightarrow \infty$$

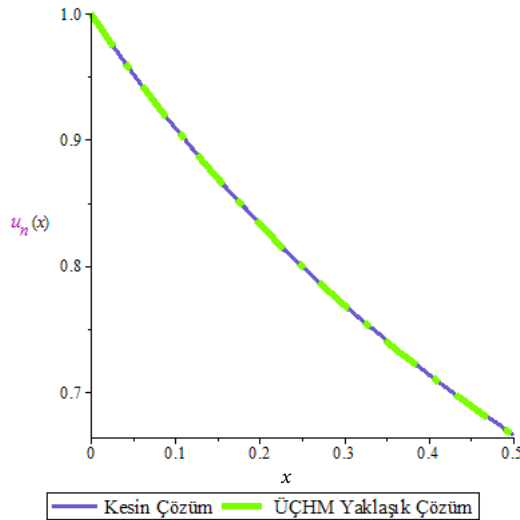
yakınsaklığına ulaşılır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

Nümerik Sonuçlar

Kesin çözümü $w(x) = \frac{1}{x+1}$ olan problemin analizi için yoğun nokta sayısı $M = 100$ ve $x_i = \frac{i}{M}$, $i = 1, \dots, M$ olmak üzere, $[0, 0.5]$ aralığında 11 test noktası kullanılmış ve maksimum mutlak hatanın 0.0002101613 olduğu gözlenmiştir. Aşağıda sayısal sonuçların yer aldığı Tablo 4.5, Tablo 4.6 ve beraberinde Şekil 4.3 Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu'nun bu problem tipi için oldukça iyi ve doğru sonuç verdiğini sunmakla birlikte, en küçük kareler destek vektör makineleri metodu (LS-SVM) ile kıyaslandığında ÜÇHM'nin daha etkili ve kullanışlı olduğunu açıkça ortaya koymaktadır.

Tablo 4.5 Problem (4.31) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM) ve yaklaşık çözüm (LS-SVM) değerlerinin karşılaştırılması

x	KÇ	ÜÇHM (YÇ)	LS-SVM (YÇ) [101]
0	1.000000000	1.000000000	1.000000000
0.05	0.9523809524	0.9523629930	0.952038212
0.10	0.9090909091	0.9090538923	0.908583285
0.15	0.8695652174	0.8695090326	0.869067566
0.20	0.8333333333	0.8332576170	0.832783164
0.25	0.8000000000	0.7999041846	0.799538249
0.30	0.7692307692	0.7691141098	0.768994225
0.35	0.7407407407	0.7406023484	0.740709174
0.40	0.7142857143	0.7141245682	0.714516534
0.45	0.6896551724	0.6894701376	0.690259179
0.50	0.6666666667	0.6664565054	0.667567043



Şekil 4.3 Problem (4.31) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm 2D gösterimi

Tablo 4.6 Problem (4.31) mutlak hata (MH) ve görelî hata (GH) değerleri

x	Mutlak Hata	Görelî Hata
0	0	0
0.05	0.0000179591	0.00001885705500
0.1	0.0000370175	0.00004071925000
0.15	0.0000561853	0.00006461309500
0.20	0.0000757160	0.00009085920000
0.25	0.0000958159	0.0001197698750
0.30	0.0001166589	0.0001516565700
0.35	0.0001383920	0.0001868292000
0.40	0.0001611466	0.0002256052400
0.45	0.0001850380	0.0002683051000
0.50	0.0002101613	0.0003152419500

4.4.3 Problem II

Başlangıç şartları $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$, $w''(0) = 0$ olan

$$\frac{d^3w}{dx^3} = -w^2 - \cos(x) + \sin^2(x), \quad x \in [0, 0.5] \quad (4.46)$$

üçüncü mertebeden doğrusal olmayan başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Problemin kesin çözümü $w(x) = \sin(x)$ 'dir.

Homogenleştirme

(4.46) ile verilen homojen olmayan başlangıç değer problemi için $s_3(x) = x$ dönüşüm fonksiyonunu kullanalım. Bu durumda çözüm fonksiyonu

$$w(x) = u(x) + x \quad (4.47)$$

biçiminde olacaktır. (4.47)'da gerekli türevler alınıp (4.46)'de yerine konulup bazı düzenlemeler yapılırsa

$$u'''(x) + u(x)2x = -u^2(x) - x^2 - \cos x + \sin^2 x$$

elde edilir. $s_3(x)$ dönüşüm fonksiyonuna problemin başlangıç şartları uygulandığında $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$ elde edilir. Ayrıca ς , u 'nun lineer olmayan fonksiyonlarını temsil etmek üzere problem

$$\varsigma(x, u(x)) = u^2(x) - x^2 - \cos x + \sin^2 x$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylelikle,

$$\begin{cases} u'''(x) + u(x)2x = \varsigma(x, u(x)), & 0 \leq x \leq 0.5 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

homogen başlangıç değer problemine ulaşılmış olur.

ÜÇHU ve Yaklaşık Çözümün İnşası

Bu bölümde Problem 4.48 ait yaklaşık çözümün inşası için gerekli olan üretici çekirdekli uzaylar ile bu uzaylara ait üretici çekirdek fonksiyonlarına dair tanım ve teoremler sunulacaktır.

Tanım 4.7. $\tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ uzayı $\tilde{V}_2^1[0, 0.5] = \{u(x) \mid u \in AC[0, 0.5], u' \in L^2[0, 0.5], x \in [0, 0.5]\}$ şeklinde tanımlanır. Bu uzaya ait iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{V}_2^1[0, 0.5]} = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad u, v \in \tilde{V}_2^1[0, 0.5],$$

$$\|u\|_{\tilde{V}_2^1[0, 0.5]} = \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle}, \quad u \in \tilde{V}_2^1[0, 0.5]$$

şeklindedir.

Teorem 4.22. [72] $\tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in \tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 0.5]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1[0, 0.5]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \in \tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ vardır. Bu durumda $\tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) = \begin{cases} 1 + x, & y \leq x \\ 1 + y, & y > x \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 4.8. ${}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ Hilbert uzayı

$${}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5] = \{u : u, u', u'', u''' \in AC[0, 0.5], u^{(4)} \in L^2[0, 0.5], u(0) = u'(0) = u''(0) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayı donatan iç çarpım ve iç çarpımdan hareketle elde edilen norm

$$\langle u, v \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]} = \sum_{i=0}^3 u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^{0.5} u^{(4)}(t)v^{(4)}(t)dt, \quad u, v \in {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$$

$$\|u\|_{\circ\tilde{V}_2^4} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{\circ\tilde{V}_2^4}}, \quad u \in {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5].$$

şeklindedir.

Teorem 4.23. ${}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 0.5]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{4\}}(x) \rangle_{\circ\tilde{V}_2^4[0, 0.5]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{4\}}(x) \in {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ vardır. Bu durumda ${}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{4\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{4\}}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^8 c_i x^{i-1}, & x \leq y \\ \sum_{i=1}^8 d_i x^{i-1}, & x > y \end{cases} \quad (4.49)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0.02777777778 y^3, \\ c_5 &= 0.006944444444 y^3, \quad c_6 = 0.004166666667 y^2, \\ c_7 &= 0.001388888889 y, \quad c_8 = 0.0001984126984 x^7 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_1 &= 0.0001984126984 y^7, \quad d_2 = 0.001388888889 y^6, \\ d_3 &= 0.006944444444 y^4 + 0.02777777778 y^3, \\ d_4 &= 0.004166666667 y^5, \quad d_5 = 0, \quad d_6 = 0, \\ d_7 &= 0, \quad d_8 = 0 \end{aligned}$$

dır.

Kanıt. ${}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı olduğundan, çekirdeğin yeniden üretme prensibi çekirdek fonksiyonu tarafından sağlanır. Dolayısıyla,

$$\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{4\}}(x) \rangle_{\circ\tilde{V}_2^4[0, 0.5]} = \sum_{i=0}^3 u^{(i)}(0) \partial_{x^i} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) + \int_0^{0.5} u^{(4)}(x) \partial_{x^4} \tilde{k}_y^{\{4\}}(x) dx = u(y).$$

Eşitlikteki integrale dört kez kısmi integrasyon uygulanıp bazı düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \langle u, \tilde{k}_y^{\{4\}} \rangle_{V_2^4[0, 0.5]} &= u(0) \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) + u'(0) \partial_x \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) + u''(0) \partial_x^2 \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) + u^{(3)}(0) \partial_{x^3} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) \\ &\quad + u^{(3)}(0.5) \partial_{x^4} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0.5) - u^{(3)}(0) \partial_{x^4} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) - u''(0.5) \partial_{x^5} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0.5) \\ &\quad + u''(0) \partial_{x^5} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) + u'(0.5) \partial_{x^6} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0.5) - u'(0) \partial_{x^6} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) \\ &\quad - u(0.5) \partial_{x^7} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0.5) + u(0) \partial_{x^7} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) + \int_0^{0.5} u(x) \partial_{x^8} \tilde{k}_y^{\{4\}}(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. $u(x), \tilde{k}_y^{\{4\}}(x) \in {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ olduğundan

$$\begin{aligned} u(0) &= u'(0) = u''(0) = 0 \\ \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) &= \partial_x \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) = \partial_{x^2} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) = 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur. Kanıt 4.2'e benzer şekilde, ${}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ uzayının $\tilde{k}_y^{\{4\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu, başlangıç şartları

$$\begin{cases} \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) = 0 \\ \partial_x \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) = 0 \\ \partial_{x^2}^2 \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) = 0 \\ \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) - \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{4\}}(0) = 0 \\ \partial_{x^4}^4 \tilde{k}_y^{\{4\}}(0.5) = 0 \\ \partial_{x^5}^5 \tilde{k}_y^{\{4\}}(0.5) = 0 \\ \partial_{x^6}^6 \tilde{k}_y^{\{4\}}(0.5) = 0 \\ \partial_{x^7}^7 \tilde{k}_y^{\{4\}}(0.5) = 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

olan, sekizinci mertebeden lineer homojen

$$\partial_{x^8}^8 \tilde{k}_y^{\{4\}}(x) = 0 \quad (4.51)$$

diferansiyel denkleminin genel çözümüdür. (4.51)'un karakteristik denklemi $\lambda^8 = 0$ ve sekiz katlı köklü özdeğeri $\lambda = 0$ olduğundan, üretici çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{4\}}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^8 c_i x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^8 d_i x^{i-1}, & x > y \end{cases} \quad (4.52)$$

şeklindedir. $\partial_{x^8}^8 \tilde{k}_y^{\{8\}}(x) = \delta(x - y)$ olması sebebiyle, δ fonksiyonunun özelliğinden ötürü

$$\begin{aligned} \partial_{x^i}^i \tilde{k}_{y+}^{\{4\}} &= \partial_{x^i}^i \tilde{k}_{y-}^{\{4\}}, \quad i = 0, 1, \dots, 6 \\ \partial_{x^7}^7 \tilde{k}_{y+}^{\{4\}} - \partial_{x^7}^7 \tilde{k}_{y-}^{\{4\}} &= -1 \end{aligned} \quad (4.53)$$

denklemleri elde edilir. (4.50) ve (4.53) diferansiyel denklem sistemi çözüldüğünde $i = 1, \dots, 8$ için c_i ve d_i katsayıları bulunmuş olur. Dolayısıyla $\tilde{k}_y^{\{4\}}(x)$ üretici çekirdeği

$$\tilde{k}_y^{\{4\}}(x) = \begin{cases} 0.02777777778y^3x^3 + 0.006944444444y^3x^4 - 0.004166666667y^2x^5 \\ + 0.001388888889yx^6 - 0.0001984126984x^7, & x \leq y \\ 0.02777777778y^3x^3 + 0.006944444444x^3y^4 - 0.004166666667x^2y^5 \\ + 0.001388888889xy^6 - 0.0001984126984y^7, & x > y \end{cases}$$

biçiminde elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Şimdi Problem 4.48 için

$$\mathcal{F}u(x) := u'''(x) + u(x)2x$$

olmak üzere

$$\mathcal{F}: {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5] \rightarrow \tilde{V}_2^1[0, 0.5] \quad (4.54)$$

sınırlı lineer operatörünü tanımlayalım. Böylelikle problem

$$\begin{cases} \mathcal{F}u(x) = \varsigma(x, u(x)), & 0 \leq x \leq 0.5 \\ u(0) = u'(0) = u''(x) = 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $u \in {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ ve $\varsigma \in \tilde{V}_2^1[0, 0.5]$.

Teorem 4.24. $\mathcal{F}: {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5] \rightarrow \tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ operatörü sınırlı ve lineerdir.

Kanıt. Sınırlılığı ispatlamak için $\|\mathcal{F}u\|_{\tilde{V}_2^1} \leq M \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^4}$, $M > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayına ait iç çarpım ve norm tanımından

$$\|\mathcal{F}u\|_{\tilde{V}_2^1}^2 = \langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}u \rangle_{\tilde{V}_2^1} = [(\mathcal{F}u)(0)]^2 + \int_0^1 [(\mathcal{F}u)'(x)]^2 dx$$

elde edilir. Çekirdeğin üretme prensibinden

$$\begin{aligned} u(x) &= \left\langle u(y), \tilde{k}_x^{\{4\}}(y) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^4} \\ (\mathcal{F}u)(x) &= \left\langle u(y), \left(\mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{4\}} \right)(y) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^4} \\ (\mathcal{F}u)'(x) &= \left\langle u(y), \left(\mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{4\}} \right)'(y) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^4} \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$|(\mathcal{F}u)(x)| = \left| \left\langle u(y), \left(\mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{4\}} \right)(y) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^4} \right| \leq \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^4} \left\| \mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{4\}} \right\|_{{}^o\tilde{V}_2^4} = M_1 \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^4}$$

$$|(\mathcal{F}u)'(x)| = \left| \left\langle u(y), \left(\mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{4\}} \right)'(y) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^4} \right| \leq \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^4} \left\| \left(\mathcal{F}\tilde{k}_x^{\{4\}} \right)' \right\|_{{}^o\tilde{V}_2^4} = M_2 \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^4}$$

bulunur ki burada $M_1, M_2 > 0$ dır. Böylece

$$\|\mathcal{F}u\|_{\tilde{V}_2^1}^2 = [(\mathcal{F}u)(0)]^2 + \int_0^1 [(\mathcal{F}u)'(x)]^2 dx \leq (M_1^2 + M_2^2) \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^4}^2$$

veya basitçe $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$ olmak üzere $\|\mathcal{F}u\|_{\tilde{V}_2^1} \leq M \|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^4}$ elde edilir. Operatörün lineerliği aşikârdır. İspat tamamlanmış olur. $\square$

Operatörden sonra artık ${}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ 'in ortogonal fonksiyon sistemini inşa etmek için $[0, 0.5]$ aralığında sayılabilir yoğun $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi seçilerek $\varphi_i(x) = \tilde{k}_{x_i}^{\{1\}}(x)$ ve $\psi_i(x) = \mathcal{F}^* \varphi_i(x)$ tanımlamaları yapılabilir. Burada $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{F}$ 'nin adjoint operatörünü ve $\tilde{k}$ ise $\tilde{V}_2^1[0, 0.5]$ uzayının üretici çekirdek fonksiyonunu temsil eder.

Teorem 4.25. *Kabul edelim ki $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0, 0.5]$ aralığında yoğun olsun. Bu durumda $\psi_i(x) = \mathcal{F}_y \tilde{k}_y^{\{4\}}(x) \Big|_{y=x_i}$ olmakla birlikte $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \in {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ tam bir fonksiyon sistemidir.*

Kanıt. $\mathcal{F}$ operatörünün x 'in fonksiyonlarına uygulanmış hâlini $\mathcal{F}_x$ ile temsil edelim. Çekirdeğin yeniden üretme özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \mathcal{F}^* \varphi_i(x) = \left\langle \mathcal{F}^* \varphi_i(x), \tilde{k}_y^{\{4\}}(x) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^4} \\ &= \left\langle \varphi_i(x), \mathcal{F}_x \tilde{k}_y^{\{4\}}(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^1} \\ &= \mathcal{F}_x \tilde{k}_y^{\{4\}}(x) \Big|_{y=x_i} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıkça anlaşılmaktadır ki $\psi_i(x) \in {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ 'dir. Şimdi kabul edelim ki her bir $u \in {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ için $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]} = 0$, $i = 1, 2, \dots$ olsun. O hâlde, $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]} = \langle u(x), \mathcal{F}^* \varphi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1} = \langle \mathcal{F}u(x), \varphi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1} = \mathcal{F}u(x_i) = 0$. $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0, 0.5]$ aralığında yoğunken, $\mathcal{F}^{-1}$ 'den dolayı $\mathcal{F}u(x) = 0$ olmalıdır. Bu da $u = 0$ eşitliğini gerektirir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

${}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ uzayının ortonormal sitemi olan $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ için Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x)$$

olarak bulunur. Burada γ_{ik} ortogonalizasyon katsayılarını temsil etmektedir.

4.4.4 Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde problemin çözümüne ve yaklaşık çözümün yakınsaklığına dair teoremler verilecektir.

Teorem 4.26. *Kabul edelim ki $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0, 0.5]$ 'de yoğun olsun. Eğer ${}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ uzayının elemanı olan $u(x)$ fonksiyonu (4.55) ile verilen problemin çözümü ise bu çözüm fonksiyonu, $\varsigma_k := \varsigma(x_k, u(x_k))$ olmak üzere*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \varsigma_k \bar{\psi}_i(x) \quad (4.56)$$

şeklinde ifade edilir.

Kanıt. $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sisteminin ${}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ uzayında tam olduğu ve bu uzayın bir Hilbert uzayı olduğu açıktır. $u \in {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^4} \bar{\psi}_i(x)$ serisi $u(x)$ 'in Fourier seri açılımı olduğundan, bu seri ${}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ uzayında tanımlı norma yakınsar. Ayrıca çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği her $u \in {}^o\tilde{V}_2^4[0, 0.5]$ için $\langle u(x), \varphi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^4} = u(x_i)$

olması sebebiyle aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür. Böylece

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \right\rangle_{o\tilde{V}_2^4} \bar{\psi}_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x), \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x) \right\rangle_{o\tilde{V}_2^4} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x), \psi_k(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x), \mathcal{F}^* \varphi_k(x) \rangle_{o\tilde{V}_2^4} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \left\langle \mathcal{F}u(x), \tilde{k}_{x_k}^{\{4\}}(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^1} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \mathcal{F}u(x_k) \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \varsigma_k \bar{\psi}_i(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

$u(x)$ çözümünde serinin n . teriminden sonrakiler ihmal edilirse problemin yaklaşık çözümü şu şekilde ifade edilebilir:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \varsigma(x_k, u(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \quad (4.57)$$

$B_i = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \varsigma(x_k, u(x_k))$ olmak üzere, (4.56) analitik çözümü

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x)$$

olarak ifade edilebilir. Nümerik hesaplamalar göz önünde bulundurarak $u_0(x_1) = u(x_1)$ alalım. $u(x)$ 'in n terim yaklaşımı

$$\begin{aligned}
B_1 &= \gamma_{11} \varsigma(x_1, u_0(x_1)), \\
B_2 &= \sum_{k=1}^2 \gamma_{2k} \varsigma(x_k, u_{k-1}(x_k)), \\
&\vdots \\
B_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{(n-1)k} \varsigma(x_k, u_{k-1}(x_k)), \\
B_n &= \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} \varsigma(x_k, u_{k-1}(x_k))
\end{aligned}$$

olmak üzere, buradan u 'lar hesaplanacak olursa

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= B_1 \bar{\psi}_1(x), \\
u_2(x) &= \sum_{i=1}^2 B_i \bar{\psi}_i(x), \\
&\vdots \\
u_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} B_i \bar{\psi}_i(x),
\end{aligned}$$

ve nihayetinde yaklaşık çözüm

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(x) \quad (4.58)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir sonraki aşama yaklaşım çözümün analitik çözüme yakınsadığını, yani $u_n(x) \rightarrow u(x)$ olduğunu göstermek olacaktır.

Teorem 4.27. *Kabul edelim ki $\|u_n\|$ sınırlı ve denklem (4.55) tek bir çözüme sahip olsun. Eğer $\{x_i\}^\infty$ dizisi $[0, 0.5]$ aralığında yoğunsa (4.58)'de elde edilen $u_n(x)$ yaklaşık çözümü, (4.55)'in analitik çözümü olan $u(x)$ 'e yakınsar.*

Kanıt. Bu teoremin ispatı Teorem 4.6'ya benzer şekilde kolaylıkla yapılabilir. □

Teorem 4.28. *Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x) \rightarrow u(x)$ ve $(x_n) \rightarrow (x)$, aynı zamanda $\|u_n(x)\|_{\circ V_2^4}$ sınırlı ve $\varsigma(x, u)$ sürekli ise bu durumda*

$$\varsigma(x_n, u_{n-1}) \rightarrow \varsigma(x, u), \quad n \rightarrow \infty$$

olur.

Kanıt. Yakınsaklığı ispatlamak için $|u_{n-1}(x_n) - u(x)|$ 'den hareketle

$$\begin{aligned}
|u_{n-1}(x_n) - u(x)| &= |u_{n-1}(x_n) - u_{n-1}(x) + u_{n-1}(x) - u(x)| \\
&\leq |u_{n-1}(x_n) - u_{n-1}(x)| + |u_{n-1}(x) - u(x)| \\
&\leq \left| \frac{d}{dx} u_{n-1}(x_n) \right| |x_n - x| + |u_{n-1}(x) - u(x)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Verilen $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x) \rightarrow u(x)$ ve $(x_n) \rightarrow (x)$ şartlarından

$$|u_{n-1}(x_n) - u(x)| \rightarrow 0$$

bulunur. $\varsigma(x, u)$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\varsigma(x_n, u_{n-1}) \rightarrow \varsigma(x, u), \quad n \rightarrow \infty$$

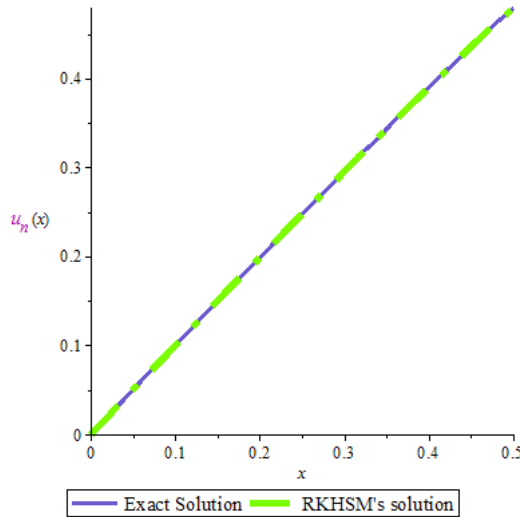
yakınsaklığına ulaşılır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. □

Nümerik Sonuçlar

Kesin çözümü $w(x) = \sin x$ olan problemin analizi için yoğun nokta sayısı $M = 20$ ve $x_i = \frac{i}{M}$, $i = 1, \dots, M$ olmak üzere, $[0, 0.5]$ aralığında 11 test noktası kullanılmıştır. Tablo 4.7 ve Tablo 4.8'e bakıldığında Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu'nun oldukça etkili ve doğru sonuç verdiği açıkça görülmekle birlikte, maksimum mutlak hatanın 0.0000270021 olduğu gözlenmiştir. Şekil 4.4 yaklaşık çözümün kesin çözüme ne kadar iyi yaklaştığını göstermektedir.

Tablo 4.7 Problem (4.46) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM) ve yaklaşık çözüm (LS-SVM) değerlerinin karşılaştırılması

x	KÇ	ÜÇHM (YÇ)	LS-SVM (YÇ) [101]
0	0	0	0.00000000000
0.05	0.04997916927	0.04997928519	0.04997915236
0.1	0.09983341665	0.09983409239	0.09983310498
0.15	0.1494381325	0.1494398890	0.14943658985
0.20	0.1986693308	0.1986727291	0.19866476297
0.25	0.2474039593	0.2474095968	0.24739375649
0.30	0.2955202067	0.2955287183	0.29550123081
0.35	0.3428978075	0.3429098608	0.34286692221
0.40	0.3894183423	0.3894346384	0.38937318159
0.45	0.4349655341	0.4349868039	0.43490549976
0.50	0.4794255386	0.4794525407	0.47935301511



Şekil 4.4 Problem (4.46) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm 2D gösterimi

Tablo 4.8 Problem (4.46) mutlak hata (MH) ve görelî hata (GH) değerleri

x	Mutlak Hata	Görelî Hata
0	0	-
0.05	$1.1592 \cdot 10^{-7}$	0.000002319366282
0.1	$6.7574 \cdot 10^{-7}$	0.000006768675486
0.15	0.0000017565	0.00001175402804
0.20	0.0000033983	0.00001710530753
0.25	0.0000056375	0.00002278661997
0.30	0.0000085116	0.00002880209139
0.35	0.0000120533	0.00003515128921
0.40	0.0000162961	0.00004184728409
0.45	0.0000212698	0.00004889996639
0.50	0.0000270021	0.00005632178060

4.4.5 Problem III

Başlangıç şartları $w(0) = 1$, $w'(0) = 1$, $w'''(0) = 1$, $w'(1) = 2.72$ olan

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = e^{-x} w^2(x), \quad x \in [0, 1] \quad (4.59)$$

dördüncü mertebeden doğrusal olmayan başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Problemin kesin çözümü $w(x) = e^x$ şeklindedir.

Homojenleştirme

$w(x) = u(x) + s_4(x)$ biçiminde aradığımız çözüm fonksiyonu için

$$s_4(x) = \frac{1}{6}x^3 + 0.61x^2 + x + 1$$

dönüşüm fonksiyonunu kullanalım. Bu durumda

$$w(x) = u(x) + \frac{1}{6}x^3 + 0.61x^2 + x + 1 \quad (4.60)$$

yazılabilir. (4.60)'da gerekli türevler alındığında

$$\begin{aligned} w'(x) &= u'(x) + \frac{1}{2}x^2 + 1.22x + 1 \\ w''(x) &= u''(x) + x + 1.22 \\ w'''(x) &= u'''(x) + 1 \\ w^{(4)}(x) &= u^{(4)}(x) \end{aligned} \quad (4.61)$$

elde edilir. (4.60) ve (4.61) denklemleri (4.59)'de ilgili yerlere yazıldığında,

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = \kappa(x, u(x)), \\ u(0) = u'(0) = u'''(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

homojen başlangıç değer problemi elde edilir. Burada

$$\kappa(x, u(x)) = -e^{-x} \left(u(x) + \frac{x^3}{6} + 0.61x^2 + x + 1 \right)^2$$

olup κ , u 'nun lineer olmayan fonksiyonlarını temsil etmektedir.

ÜÇHU ve Yaklaşık Çözümün İnşası

Tanım 4.9. $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayı $\tilde{V}_2^1[0, 1] = \{u(x) \mid u \in AC[0, 1], u' \in L^2[0, 1], x \in [0, 1]\}$ şeklinde tanımlanır. Bu uzaya ait iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{V}_2^1[0,1]} = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad u, v \in \tilde{V}_2^1[0, 1],$$

$$\|u\|_{\tilde{V}_2^1[0,1]} = \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle}, \quad u \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$$

formundadır.

Teorem 4.29. [72] $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 1]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1[0,1]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$ vardır. Bu durumda $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) = \begin{cases} 1 + x, & y \leq x \\ 1 + y, & y > x \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 4.10. ${}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ Hilbert uzayı

$$\begin{aligned} {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1] &= \{u : u^{(n)} \in AC[0, 1], n = 1, \dots, 4, \quad u^{(5)} \in L^2[0, 1], \\ &\quad u(0) = 0, u'(0) = 0, u'''(0) = 0, u'(1) = 0\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayı donatan iç çarpım ve iç çarpımdan hareketle elde edilen norm

$$\langle u, v \rangle_{\circ \tilde{V}_2^5[0,1]} = \sum_{i=0}^4 u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(5)}(t)v^{(5)}(t)dt, \quad u, v \in \circ \tilde{V}_2^5[0,1]$$

$$\|u\|_{\circ \tilde{V}_2^5} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{\circ \tilde{V}_2^5}}, \quad u \in \circ \tilde{V}_2^5[0,1]$$

şeklindedir.

Teorem 4.30. $\circ \tilde{V}_2^5[0,1]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in \circ \tilde{V}_2^5[0,1]$ ve her bir sabit $x, y \in [0,1]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \rangle_{\circ \tilde{V}_2^5[0,1]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \in \circ \tilde{V}_2^5[0,1]$ vardır. Bu durumda $\circ \tilde{V}_2^5[0,1]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{5\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{5\}}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} c_i x^{i-1}, & x \leq y \\ \sum_{i=1}^{10} d_i x^{i-1}, & x > y \end{cases} \quad (4.63)$$

formunda olup, burada

$$\begin{aligned} (x \leq y) \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) = & \frac{1}{362880} x^9 + \frac{1}{130} x^2 y^2 + \frac{1}{83200} x^2 y^8 - \frac{1}{10400} x^2 y^7 + \frac{7}{20800} x^2 y^6 \\ & - \frac{7}{10400} x^2 y^5 - \frac{7}{2080} x^2 y^4 + \frac{253}{149760} x^4 y^4 + \frac{1}{5990400} x^4 y^8 \\ & - \frac{1}{748800} x^4 y^7 + \frac{7}{1497600} x^4 y^6 - \frac{7}{748800} x^4 y^5 - \frac{7}{2080} x^4 y^2 \\ & + \frac{253}{748800} x^5 y^4 + \frac{1}{29952000} x^5 y^8 - \frac{1}{3744000} x^5 y^7 + \frac{7}{7488000} x^5 y^6 \\ & - \frac{7}{3744000} x^5 y^5 - \frac{7}{10400} x^5 y^2 - \frac{1}{4320} x^6 y^3 - \frac{1}{59904000} x^6 y^8 \\ & + \frac{1}{7488000} x^6 y^7 - \frac{7}{14976000} x^6 y^6 + \frac{7}{7488000} x^6 y^5 + \frac{7}{1497600} x^6 y^4 \\ & + \frac{7}{20800} x^6 y^2 + \frac{1}{327600} x^7 y^2 + \frac{1}{209664000} x^7 y^8 - \frac{1}{26208000} x^7 y^7 \\ & + \frac{1}{7488000} x^7 y^6 - \frac{1}{3744000} x^7 y^5 - \frac{1}{748800} x^7 y^4 - \frac{1}{1677312000} x^8 y^8 \\ & + \frac{1}{209664000} x^8 y^7 - \frac{1}{59904000} x^8 y^6 + \frac{1}{29952000} x^8 y^5 + \frac{1}{5990400} x^8 y^4 \\ & + \frac{1}{83200} x^8 y^2 - \frac{1}{40320} x^8 y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x > y) \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) = & \frac{1}{362880} y^9 - \frac{1}{40320} y^8 x - \frac{1}{4320} y^6 x^3 + \frac{1}{130} x^2 y^2 + \frac{1}{83200} x^2 y^8 \\ & + \frac{1}{327600} x^2 y^7 + \frac{7}{20800} x^2 y^6 - \frac{7}{10400} x^2 y^5 - \frac{7}{2080} x^2 y^4 + \frac{253}{149760} x^4 y^4 \\ & + \frac{1}{5990400} x^4 y^8 - \frac{1}{748800} x^4 y^7 + \frac{7}{1497600} x^4 y^6 + \frac{253}{748800} x^4 y^5 - \frac{7}{2080} x^4 y^2 \\ & - \frac{7}{748800} x^5 y^4 + \frac{1}{29952000} x^5 y^8 - \frac{1}{3744000} x^5 y^7 + \frac{7}{7488000} x^5 y^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{7}{3744000}x^5y^5 - \frac{7}{10400}x^5y^2 - \frac{1}{59904000}x^6y^8 + \frac{1}{7488000}x^6y^7, \\
& -\frac{7}{14976000}x^6y^6 + \frac{7}{7488000}x^6y^5 + \frac{7}{1497600}x^6y^4 + \frac{7}{20800}x^6y^2 \\
& -\frac{1}{10400}x^7y^2 + \frac{1}{209664000}x^7y^8 - \frac{1}{26208000}x^7y^7 + \frac{1}{7488000}x^7y^6 \\
& -\frac{1}{3744000}x^7y^5 - \frac{1}{748800}x^7y^4 - \frac{1}{1677312000}x^8y^8 + \frac{1}{209664000}x^8y^7 \\
& -\frac{1}{59904000}x^8y^6 + \frac{1}{29952000}x^8y^5 + \frac{1}{5990400}x^8y^4 + \frac{1}{83200}x^8y^2.
\end{aligned}$$

Kanıt. 4.9'a benzer şekilde yapılabilir. □

Üretici çekirdek fonksiyonu bulunan Problem 4.59 için

$$\mathcal{F}u(x) := u^{(4)}(x)$$

olmak üzere

$$\mathcal{F}: {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1] \rightarrow \tilde{V}_2^1[0, 1] \quad (4.64)$$

operatörünü tanımlayalım. Böylelikle problem

$$\begin{cases} \mathcal{F}u(x) = \kappa(x, u(x)), \\ u(0) = u'(0) = u'''(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.65)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $u \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ ve $\kappa \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$.

Teorem 4.31. $\mathcal{F}: {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1] \rightarrow \tilde{V}_2^1[0, 1]$ operatörü sınırlı ve lineerdir.

Kanıt. İspat 4.10'da verilmiştir. □

Şimdi ${}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ 'nin ortogonal fonksiyon sistemini inşa etmek için $[0, 1]$ aralığında sayılabilir yoğun $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisini seçerek $\varphi_i(x) = \tilde{k}_{x_i}^{\{1\}}(x)$ ve $\psi_i(x) = \mathcal{L}^*\varphi_i(x)$ tanımlamalarını yapalım. Burada $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}$ 'nin adjoint operatörünü ve $\tilde{k}$ ise $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayının üretici çekirdek fonksiyonunu temsil eder.

Teorem 4.32. Kabul edelim ki $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ aralığında yoğun olsun. Bu durumda $\psi_i(x) = \mathcal{L}_y \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \Big|_{y=x_i}$ olmakla birlikte $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty \in {}^o\tilde{V}_2^5[0, 1]$ tam bir fonksiyon sistemidir.

Kanıt. $\mathcal{L}$ operatörünün x 'in fonksiyonlarına uygulanmış hâlini $\mathcal{L}_x$ ile temsil edelim. Çekirdeğin yeniden üretme prensibi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\psi_i(x) &= \mathcal{L}^*\varphi_i(x) = \left\langle \mathcal{L}^*\varphi_i(x), \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} \\
&= \left\langle \varphi_i(x), \mathcal{L}_x \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^1} \\
&= \mathcal{L}_x \tilde{k}_y^{\{5\}}(x) \Big|_{y=x_i}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan açıkça anlaşılmaktadır ki $\psi_i(x) \in {}^o\tilde{V}_2^5[0,1]$ 'dir. Şimdi kabul edelim ki her bir $u \in {}^o\tilde{V}_2^5[0,1]$ için $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5[0,1]} = 0, i = 1, 2, \dots$ olsun. O hâlde, $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0,1]} = \langle u(x), \mathcal{L}^* \varphi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1} = \langle \mathcal{L}u(x), \varphi_i(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1} = \mathcal{L}u(x_i) = 0$. $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0,1]$ aralığında yoğunken, $\mathcal{L}^{-1}$ 'den dolayı $\mathcal{L}u(x) = 0$ olmalıdır. Bu da $u = 0$ eşitliğini gerektirir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

${}^o\tilde{V}_2^5[0,1]$ uzayının ortonormal sistemi olan $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty, \{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ için Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x)$$

olarak bulunur. Burada γ_{ik} ortogonalizasyon katsayılarını temsil etmektedir.

4.4.6 Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde problemin çözümüne ve yaklaşık çözümün yakınsaklığına dair teoremler verilecektir.

Teorem 4.33. *Kabul edelim ki $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0,1]$ 'de yoğun olsun. Eğer ${}^o\tilde{V}_2^5[0,1]$ uzayının elemanı olan $u(x)$ fonksiyonu (4.65) ile verilen problemin çözümü ise bu çözüm fonksiyonu, $\kappa_k := \kappa(x_k, u(x_k))$ olmak üzere*

$$u(x) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \kappa_k \bar{\psi}_i(x) \quad (4.66)$$

şeklinde ifade edilir.

Kanıt. $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$ ortonormal sisteminin ${}^o\tilde{V}_2^5[0,1]$ uzayında tam olduğu ve bu uzayın bir Hilbert uzayı olduğu açıktır. $u \in {}^o\tilde{V}_2^5[0,1]$ ve $\sum_{i=1}^\infty \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3} \bar{\psi}_i(x)$ serisi $u(x)$ 'in Fourier seri açılımı olduğundan, bu seri ${}^o\tilde{V}_2^5[0,1]$ uzayında tanımlı norma yakınsar. Ayrıca çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği her $u \in {}^o\tilde{V}_2^5[0,1]$ için $\langle u(x), \varphi_i(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} = u(x_i)$ olması sebebiyle aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür. Böylece

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^\infty \left\langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \bar{\psi}_i(x) = \sum_{i=1}^\infty \left\langle u(x), \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x) \right\rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x), \psi_k(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x), \mathcal{L}^* \varphi_k(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^5} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \left\langle \mathcal{L}u(x), \tilde{k}_{x_k}^{\{5\}}(x) \right\rangle_{\tilde{V}_2^1} \bar{\psi}_i(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \mathcal{L} u(x_k) \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \kappa_k \bar{\psi}_i(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

$u(x)$ çözümünde serinin n . teriminden sonrakiler ihmal edilirse problemin yaklaşık çözümü şu şekilde yazılabilir:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \kappa(x_k, u(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \quad (4.67)$$

$B_i = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \kappa(x_k, u(x_k))$ olmak üzere, (4.66) analitik çözümü

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x)$$

olarak ifade edilebilir. Nümerik hesaplamalar göz önünde bulundurarak $u_0(x_1) = u(x_1)$ alalım. $u(x)$ 'in n terim yaklaşımı

$$\begin{aligned}
B_1 &= \gamma_{11} \kappa(x_1, u_0(x_1)), \\
B_2 &= \sum_{k=1}^2 \gamma_{2k} \kappa(x_k, u_{k-1}(x_k)), \\
&\vdots \\
B_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{(n-1)k} \kappa(x_k, u_{k-1}(x_k)), \\
B_n &= \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} \kappa(x_k, u_{k-1}(x_k))
\end{aligned}$$

olmak üzere, buradan u 'lar hesaplanacak olursa

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= B_1 \bar{\psi}_1(x), \\
u_2(x) &= \sum_{i=1}^2 B_i \bar{\psi}_i(x), \\
&\vdots \\
u_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} B_i \bar{\psi}_i(x),
\end{aligned}$$

ve nihayetinde yaklaşık çözüm

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(x) \quad (4.68)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir sonraki aşama yaklaşım çözümün analitik çözüme yakınsadığını, yani $u_n(x) \rightarrow u(x)$ olduğunu göstermek olacaktır.

Teorem 4.34. *Kabul edelim ki $\|u_n\|$ sınırlı ve denklem (4.65) tek bir çözüme sahip olsun. Eğer $\{x_i\}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ de yoğunsa (4.68)'de elde edilen $u_n(x)$ yaklaşık çözümü, (4.65)'in analitik çözümü olan $u(x)$ 'e yakınsar.*

Kanıt. Bu teoremin ispatı Teorem 4.6'ya benzer şekilde kolaylıkla yapılabilir. $\square$

Teorem 4.35. *Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x) \rightarrow u(x)$ ve $(x_n) \rightarrow (x)$, aynı zamanda $\|u_n(x)\|_{\tilde{V}_2^5}$ sınırlı ve $\kappa(x, u)$ sürekli ise bu durumda*

$$\kappa(x_n, u_{n-1}) \rightarrow \kappa(x, u), \quad n \rightarrow \infty$$

olur.

Kanıt. Yakınsaklığı göstermek için $|u_{n-1}(x_n) - u(x)|$ 'den hareketle

$$\begin{aligned} |u_{n-1}(x_n) - u(x)| &= |u_{n-1}(x_n) - u_{n-1}(x) + u_{n-1}(x) - u(x)| \\ &\leq |u_{n-1}(x_n) - u_{n-1}(x)| + |u_{n-1}(x) - u(x)| \\ &\leq \left| \frac{d}{dx} u_{n-1}(x_n) \right| |x_n - x| + |u_{n-1}(x) - u(x)| \end{aligned}$$

elde edilir. Verilen $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x) \rightarrow u(x)$ ve $(x_n) \rightarrow (x)$ şartlarından

$$|u_{n-1}(x_n) - u(x)| \rightarrow 0$$

bulunur. $\kappa(x, u)$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\kappa(x_n, u_{n-1}) \rightarrow \kappa(x, u), \quad n \rightarrow \infty$$

yakınsaklığına ulaşılır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

Nümerik Sonuçlar

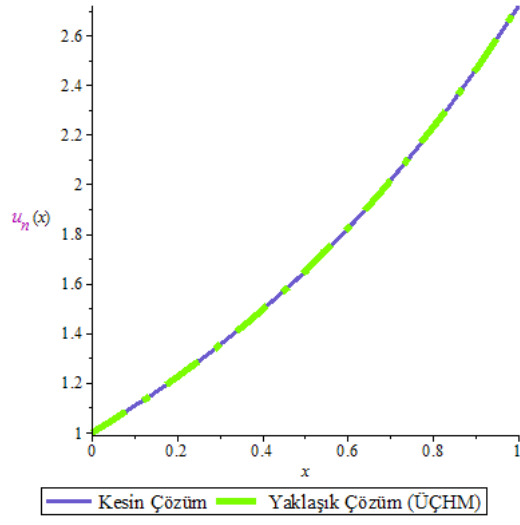
Kesin çözümü $w(x) = e^x$ olan Problem (4.59)'un analizi için yoğun nokta sayısı $M = 100$ ve $x_i = \frac{i}{M}$, $i = 1, \dots, M$ olmak üzere, $[0, 1]$ aralığında 11 test noktası kullanılmıştır. Tablo 4.9'da kesin çözüm, ÜÇHM ile elde edilen yaklaşık çözüm ve Adomian ayrıştırma metodu ile elde edilen yaklaşık çözüm sonuçları sunulmuştur. Tablo 4.10'da ise mutlak hata ve görelî hata değerleri sunulmuş olup kesin çözüm ve yaklaşık çözümün bir arada yer aldığı iki boyutlu grafik Şekil 4.5'de sunulmuştur. Maksimum mutlak hatanın 0.000812311 olduğu gözlenmiştir.

Tablo 4.9 Problem (4.59) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM) ve yaklaşık çözüm (ADM) değerlerinin karşılaştırılması

x	KÇ	ÜÇHM (YÇ)	ADM (YÇ) [101]
0	1	1	0.0000000000
0.1	1.105170918	1.105178679	0.04997915236
0.2	1.221402758	1.221433810	0.09983310498
0.3	1.349858808	1.349928734	0.14943658985
0.4	1.491824698	1.491949243	0.19866476297
0.5	1.648721271	1.648916500	0.24739375649
0.6	1.822118800	1.822401274	0.29550123081
0.7	2.013752707	2.014139647	0.34286692221
0.8	2.225540928	2.226050359	0.38937318159
0.9	2.459603111	2.460253984	0.43490549976
1.0	2.718281828	2.719094139	0.47935301511

Tablo 4.10 Problem (4.59) mutlak hata (MH) ve görelî hata (GH) değerleri

x	Mutlak Hata	Görelî Hata
0	0	0
0.1	0.000007761	0.000007022443202
0.2	0.000031052	0.00002542322735
0.3	0.000069926	0.00005180245488
0.4	0.000124545	0.00008348501011
0.5	0.000195229	0.0001184123741
0.6	0.000282474	0.0001550250181
0.7	0.000386940	0.0001921487175
0.8	0.000509431	0.0002289021036
0.9	0.000650873	0.0002646252142
1.0	0.000812311	0.0002988325168



Şekil 4.5 Problem (4.59) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm 2D gösterimi

5 DOĞRUSAL OLMAYAN BAZI KİSMİ TÜREVİLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü, modern uygulamalı matematiğin zengin ve aktif bir alanıdır. Bu alanın istikrarlı büyümesi; doğa bilimlerinden tıbbı, fizikten öğrenme teorisine, mühendislikten ekonomiye kadar sayısız alanda matematiksel modellere doğru ve güvenilir yaklaşımlar sağlamak için giderek artan çalışmalara bağlıdır.

Ewans'tan [80] mülhem, doğrusal olmayan denklemlerin doğrusal olanlardan daha zor olduğu bilinen bir gerçektir. Doğrusallığı bozan ögeler türevlerin mertebesini ne kadar etkilerse bu durumda denklem de o kadar zorlaşır. Yüksek mertebeli türev içeren kısmi diferansiyel denklemler daha düşük mertebelilere göre, sistemler tekli denklemlere göre, fazla sayıda bağımsız değişken içeren denklemler daha az bağımsız değişken içerenlere göre çözüm için daha zorlu bir yola mecbur bırakır. Kısmi türevli denklemlerin karmaşık yapısı, çözüme ulaşmaktaki güçlüğü ve bazen çözümün hiç varolmaması, bu denklemleri içeren modellerin araştırılması için araştırmacıları daha geçerli daha etkin nümerik metotlar geliştirmeye sevk etmiştir.

Tezin bu bölümünde, genel formu

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \gamma(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(w) + \zeta(w), \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (5.1)$$

şeklinde olan veya

$$w_t = \gamma w_{xx} + (\xi(w))_x + \zeta(w), \quad a < x < b, \quad t > 0,$$

biçiminde de ifade edilebilen başlangıç ve sınır değer problemini,

$$\begin{aligned} w(a, t) &= f(t), \quad t > 0, \\ w(b, t) &= g(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

sınır şartları ve

$$w(x, 0) = h(x), \quad a < x < b \quad (5.3)$$

başlangıç şartı ile göz önüne alınıp üretici çekirdek yönteminin avantajlarını kullanılarak yaklaşık çözümünün elde edilmesi amaçlanmıştır. Burada γ yayılım sabitini (difüzivite), $\xi(u)$ ve $\zeta(u)$ da u 'nun lineer olmayan fonksiyonlarını temsil etmektedir.

Genel formu yukarıda verilmiş olan kısmi diferansiyel denklem özelinde, metodun güvenilirliğini ve geçerliliğini test etmek amacıyla uygulamada oldukça önemli yer tutan Burgers, Fisher, Huxley, Burgers-Fisher ve Burgers-Huxley diferansiyel denklemlerinin

birer başlangıç değeri problemi olarak Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu ile yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Bu denklemlerle ilgili daha önce yapılan çalışmalar ve ileri okuma için [104–118] kaynaklarına bakılabilir. Her bir denklem için başlangıç ve sınır şartları homojenleştirilerek, inşa edilecek olan ilgili üretici çekirdek uzayına ait üretici çekirdek fonksiyonu yardımıyla yaklaşık çözümler hesaplanacak ve en son aşamada yakınsaklık analizleri yapılarak nümerik sonuçlar sunulacaktır. Elde edilecek bütün sayısal sonuçlar ve grafikler için Maple 17 ve Mathematica 10 kullanılmıştır.

5.1 Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayları ve Üretici Çekirdek Fonksiyonları

(5.1) formundaki homojen olmayan başlangıç ve sınır değeri problemlerinin önerilen Üretici Hilbert Uzayı Metodu ile yaklaşık çözümünün yapılabilmesi için öncelikle mevcut şartların uygun dönüşüm fonksiyonları kullanılarak homojenleştirilmesi gerekir. Bu homojenleştirme işlemi, inşa edilecek üretici çekirdekli uzay ve ona karşılık gelen üretici çekirdek fonksiyonları arasında uygun bir bağlantı kurmak ve söz konusu başlangıç ve sınır şartlarını ÜÇHU'ya entegre etmek için gereklidir. (5.2) ve (5.3) ile verilen şartlar uygun bir dönüşüm fonksiyonu yardımıyla homojen hâle getirildiği takdirde, (5.1) başlangıç ve sınır değeri problemi aşağıdaki formu alacaktır:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t + G(x, t)u_x + H(x, t)u = S(x, t, u, u_x), & x \in [a, b], t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(a, t) = u(b, t) = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Burada S fonksiyonu u 'nun doğrusal olmayan fonksiyonlarını temsil etmektedir. Yapısı artık ÜÇHM'yi uygulanabilir kılan homojen başlangıç ve sınır değeri problemi (5.4) için yaklaşık çözümün yapılacağı Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı inşa edilmeye hazırdır. Önceki bölümlerde detaylandırıldığı üzere ÜÇHU problemdeki en yüksek mertebeli türevler baz alınarak inşa edilecektir. Adi türevli diferansiyel denklemlerden farklı olarak çözümler $V_2^m[a, b]$ yerine $W_2^{(m,n)}(\Omega)$ iki değişkenli(binary) çekirdekli Hilbert uzayında yapılacak ve üretici çekirdek fonksiyonları da buna göre belirlenecektir.

(5.1) problemi için bu bölümde aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır:

- $[a, b] = [0, 1]$
- $\Omega = [0, 1] \times [0, T]$
- $(x, t) \in \Omega$
- $u(x, t)$: Homojenleştirilmiş diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonu
- $f(t), g(t), h(x)$: Verilen tanım kümesine ait reel değerli sürekli fonksiyonlar
- $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_{x^2}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots$

5.1.1 $\tilde{V}_2^1[0, 1]$, $\tilde{V}_2^2[0, 1]$ ve $V_2^1[0, T]$ Üretici Çekirdekli Uzayları ve Çekirdek Fonksiyonları

Tanım 5.1. $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayı $\tilde{V}_2^1[0, 1] = \{u(x) \mid u \in AC[0, 1], u' \in L^2[0, 1], x \in [0, 1]\}$ şeklinde tanımlanır. Bu uzaya ait iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{V}_2^1[0,1]} = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad u, v \in \tilde{V}_2^1[0, 1],$$

$$\|u\|_{\tilde{V}_2^1[0,1]} = \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle}, u \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$$

formundadır.

Teorem 5.1. [72] $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 1]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \rangle_{\tilde{V}_2^1[0,1]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) \in \tilde{V}_2^1[0, 1]$ vardır. Bu durumda $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{1\}}(x) = \begin{cases} 1+x, & y \leq x \\ 1+y, & y > x \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 5.2. $\tilde{V}_2^2[0, 1]$ uzayı $\tilde{V}_2^2[0, 1] = \{u(x) : u, u' \in AC[0, 1], u'' \in L^2[0, 1], t \in [0, 1]\}$ şeklinde tanımlanır. Bu uzaya ait iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{V}_2^2[0,1]} = \sum_{i=0}^1 u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u''(x)v''(x)dx, \quad u, v \in \tilde{V}_2^2[0, 1],$$

$$\|u\|_{\tilde{V}_2^2[0,1]} = \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle}, u \in \tilde{V}_2^2[0, 1]$$

şeklinde dir.

Teorem 5.2. $\tilde{V}_2^2[0, 1]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in \tilde{V}_2^2[0, 1]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 1]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{2\}}(x) \rangle_{\tilde{V}_2^2[0,1]} = u(y)$ olacak biçimde bir $\tilde{k}_y^{\{2\}}(x) \in \tilde{V}_2^2[0, 1]$ vardır. $\tilde{V}_2^2[0, 1]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{2\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{2\}}(x) = \begin{cases} 1 + xy + \frac{1}{2}yx^2 - \frac{1}{6}x^3 & y \leq x \\ -\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}xy^2 + yx + 1, & y > x \end{cases}.$$

biçimindedir.

Kanıt. İspat 5.1.2'ye benzer şekilde yapılabilir. □

Tanım 5.3. $V_2^1[0, T]$ uzayı $V_2^1[0, T] = \{u(t) \mid u \in AC[0, T], u' \in L^2[0, T], t \in [0, T]\}$ şeklinde tanımlanır. Bu uzaya ait iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{V_2^1[0,1]} = u(0)v(0) + \int_0^T u'(t)v'(t)dt, \quad u, v \in V_2^1[0, T],$$

$$\|u\|_{V_2^1[0,T]} = \sqrt{\langle u(t), u(t) \rangle}, u \in V_2^1[0, T],$$

şeklindedir.

Teorem 5.3. [72] $V_2^1[0, T]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in V_2^1[0, T]$ ve her bir sabit $s, t \in [0, T]$ için $\langle u(t), k_s^{\{1\}}(t) \rangle_{V_2^1[0,T]} = u(s)$ olacak biçimde bir $k_s^{\{1\}}(t) \in V_2^1[0, T]$ vardır. $V_2^1[0, T]$ uzayına ait $k_s^{\{1\}}(t)$ çekirdek fonksiyonu

$$k_s^{\{1\}}(t) = \begin{cases} 1+t, & s \leq t \\ 1+s, & s > t \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir.

5.1.2 ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ ve ${}^oV_2^2[0, T]$ Üretici Çekirdekli Uzayları ve Çekirdek Fonksiyonları

Tanım 5.4. ${}^oV_2^3[0, 1]$ Hilbert uzayı

$${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1] = \{u : u, u', u'' \in AC[0, 1], u''' \in L^2[0, 1], u(0) = 0 = u(1)\}.$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayı donatan iç çarpım ve iç çarpımdan hareketle elde edilen norm

$$\langle u, v \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0,1]} = \sum_{i=0}^2 u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(3)}(t)v^{(3)}(t)dt, \quad u, v \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$$

$$\|u\|_{{}^o\tilde{V}_2^3} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3}}, \quad u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1],$$

şeklindedir.

Teorem 5.4. ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, 1]$ için $\langle u(x), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \rangle_{{}^o\tilde{V}_2^3[0,1]} = u(y)$ olacak biçimde

bir $\tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \in {}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ vardır. Bu durumda ${}^o\tilde{V}_2^3[0, 1]$ uzayına ait $\tilde{k}_y^{\{3\}}(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$\tilde{k}_y^{\{3\}}(x) = \begin{cases} \begin{aligned} & \frac{3}{13}xy - \frac{1}{156}xy^5 + \frac{5}{156}xy^4 - \frac{5}{78}xy^3 - \frac{5}{26}xy^2 + \frac{21}{104}x^2y^2 \\ & - \frac{1}{624}x^2y^5 + \frac{5}{624}x^2y^4 - \frac{5}{312}x^2y^3 - \frac{5}{26}x^2y + \frac{7}{104}x^3y^2 \\ & - \frac{1}{1872}x^3y^5 + \frac{5}{1872}x^3y^4 - \frac{5}{936}x^3y^3 - \frac{5}{78}x^3y - \frac{1}{104}x^4y \\ & + \frac{1}{3744}x^4y^5 - \frac{5}{3744}x^4y^4 + \frac{5}{1872}x^4y^3 + \frac{5}{624}x^4y^2 - \frac{1}{18720}x^5y^5 \\ & + \frac{1}{3744}x^5y^4 - \frac{1}{1872}x^5y^3 - \frac{1}{624}x^5y^2 - \frac{1}{156}x^5y + \frac{1}{120}x^5 \end{aligned} & x \leq y \\ \begin{aligned} & \frac{3}{13}xy - \frac{1}{156}xy^5 - \frac{1}{104}xy^4 - \frac{5}{78}xy^3 - \frac{5}{26}xy^2 + \frac{21}{104}x^2y^2 \\ & - \frac{1}{624}x^2y^5 + \frac{5}{624}x^2y^4 + \frac{7}{104}x^2y^3 - \frac{5}{26}x^2y - \frac{5}{312}x^3y^2 \\ & - \frac{1}{1872}x^3y^5 + \frac{5}{1872}x^3y^4 - \frac{5}{936}x^3y^3 - \frac{5}{78}x^3y + \frac{5}{156}x^4y \\ & + \frac{1}{3744}x^4y^5 - \frac{5}{3744}x^4y^4 + \frac{5}{1872}x^4y^3 + \frac{5}{624}x^4y^2 - \frac{1}{18720}x^5y^5 \\ & + \frac{1}{3744}x^5y^4 - \frac{1}{1872}x^5y^3 - \frac{1}{624}x^5y^2 - \frac{1}{156}x^5y + \frac{1}{120}y^5 \end{aligned} & x > y \end{cases}$$

biçimindedir.

Kanıt. Bu teoremin ispatı Bölüm 4.2.2'de yapılmıştır. □

Tanım 5.5. ${}^oV_2^2[0, T]$ uzayı ${}^oV_2^2[0, T] = \{u(t) : u, u' \in AC[0, T], u'' \in L^2[0, T], u(0) = 0, t \in [0, T]\}$ şeklinde tanımlanır. Bu uzaya ait iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{V_2^2[0, T]} = \sum_{i=0}^1 u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^T u''(t)v''(t)dt, \quad u, v \in {}^oV_2^2[0, T],$$

$$\|u\|_{{}^oV_2^2[0, T]} = \sqrt{\langle u(t), u(t) \rangle}, \quad u \in V_2^2[0, T]$$

şeklinde dir.

Teorem 5.5. ${}^oV_2^2[0, T]$ uzayı bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Yani herhangi bir $u \in {}^oV_2^2[0, T]$ ve her bir sabit $s, t \in [0, T]$ için $\langle u(t), k_s^{\{2\}}(t) \rangle_{{}^oV_2^2[0, T]} = u(s)$ olacak biçimde bir $k_s^{\{2\}}(t) \in {}^oV_2^2[0, T]$ vardır. ${}^oV_2^2[0, T]$ uzayına ait $k_s^{\{2\}}(t)$ çekirdek fonksiyonu

$$k_s^{\{2\}}(t) = \begin{cases} st + \frac{1}{2}st^2 - \frac{1}{6}t^3 & t \leq s \\ -\frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{2}ts^2 + st, & t > s \end{cases}. \quad (5.5)$$

biçimindedir.

Kanıt. ${}^oV_2^2[0, T]$ Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı olduğundan, çekirdeğin yeniden üretme

prensibi çekirdek fonksiyonu tarafından sağlanır. Dolayısıyla,

$$\langle u(t), k_s^{\{2\}}(t) \rangle_{\circ V_2^2[0,T]} = \sum_{i=0}^1 u^{(i)}(0) \partial_{t^i} k_s^{\{2\}}(0) + \int_0^T u''(t) \partial_{t^2} k_s^{\{2\}}(t) dt = u(s).$$

Eşitlikteki integrale iki kez kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned} \langle u, k_s^{\{2\}} \rangle_{\circ V_2^2[0,T]} &= u(0) k_s^{\{2\}}(0) + u'(0) \partial_x k_s^{\{2\}}(0) + u'(T) \partial_{x^2}^2 k_s^{\{2\}}(T) - u'(0) \partial_{x^2}^2 k_s^{\{2\}}(0) \\ &\quad - u(T) \partial_{x^3}^3 k_s^{\{2\}}(T) + u(0) \partial_{x^3}^3 k_s^{\{2\}}(0) - \int_0^T u(t) \partial_{x^4}^4 k_s^{\{2\}}(t) dt \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle u, k_s^{\{2\}} \rangle_{\circ V_2^2[0,T]} &= u(0) [k_s^{\{2\}}(0) + \partial_{x^3}^3 k_s^{\{2\}}(0)] + u'(0) [\partial_x k_s^{\{2\}}(0) - \partial_{x^2}^2 k_s^{\{2\}}(0)] \\ &\quad + u'(T) \partial_{x^2}^2 k_s^{\{2\}}(T) - u(T) \partial_{x^3}^3 k_s^{\{2\}}(T) \\ &\quad - \int_0^T u(t) \partial_{x^4}^4 k_s^{\{2\}}(t) dt \end{aligned} \quad (5.6)$$

bulunur. $u(t), k_s^{\{2\}}(t) \in \circ V_2^2[0, T]$ olduğundan

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ k_s^{\{2\}}(0) &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu fonksiyonlar dikkate alınarak (5.6) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} \langle u, k_s^{\{2\}} \rangle_{\circ V_2^2[0,T]} &= u'(0) [\partial_x k_s^{\{2\}}(0) - \partial_{x^2}^2 k_s^{\{2\}}(0)] + u'(T) \partial_{x^2}^2 k_s^{\{2\}}(T) \\ &\quad - u(T) \partial_{x^3}^3 k_s^{\{2\}}(T) - \int_0^T u(t) \partial_{x^4}^4 k_s^{\{2\}}(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği

$$\langle u(x), k_s^{\{2\}} \rangle_{\circ V_2^2[0,T]} = u(s) \quad (5.7)$$

olduğundan bu durum, δ Dirac-delta fonksiyonu olmak üzere

$$- \partial_{x^4}^4 k_s^{\{2\}}(t) = \delta(s - t) \quad (5.8)$$

eşitliğini ve

$$\begin{cases} \partial_x k_s^{\{2\}}(0) + \partial_{x^2}^2 k_s^{\{2\}}(0) = 0 \\ \partial_{x^2}^2 k_s^{\{2\}}(T) = 0 \\ \partial_{x^3}^3 k_s^{\{2\}}(T) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

denklemlerini gerektirir. Dirac-delta fonksiyonun yapısı gereği $s \neq t$ iken $\delta(s - t) = 0$ olduğu

açıktır. Dolayısıyla, $k_s^{\{2\}}(t)$ üretici çekirdek fonksiyonu sınır şartları

$$\begin{cases} \partial_x k_s^{\{2\}}(0) + \partial_{x^2}^2 k_s^{\{2\}}(0) = 0 \\ \partial_{x^2}^2 k_s^{\{2\}}(T) = 0 \\ \partial_{x^3}^3 k_s^{\{2\}}(T) = 0 \\ k_s^{\{2\}}(0) = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

olan, dördüncü mertebeden lineer homojen

$$-\partial_{x^4}^4 k_s^{\{2\}}(t) = 0 \quad (5.11)$$

diferansiyel denkleminin genel çözümüdür. (4.9)'un karakteristik denklemi $\lambda^4 = 0$ ve dört katlı köklü özdeğeri $\lambda = 0$ olduğundan, üretici çekirdek fonksiyonu

$$k_s^{\{2\}}(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^4 c_i t^{i-1}, & t \leq s, \\ \sum_{i=1}^4 d_i t^{i-1}, & t > s \end{cases} \quad (5.12)$$

şeklindedir. $-\partial_{x^4}^4 k_s^{\{2\}}(t) = \delta(s - t)$ olduğundan, δ fonksiyonunun özelliğinden dolayı

$$\begin{aligned} \partial_{x^i}^i k_{s+}^{\{2\}} &= \partial_{t^i}^i k_{y-}^{\{2\}}, \quad i = 0, 1, 2 \\ \partial_{x^3}^3 k_{y+}^{\{2\}} - \partial_{x^3}^3 k_{y-}^{\{2\}} &= -1 \end{aligned} \quad (5.13)$$

denklemleri elde edilir. (5.10) ve (5.13) diferansiyel denklem sisteminin çözülmesiyle $i = 1, \dots, 4$ için c_i ve d_i katsayıları

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 & c_2 &= y & c_3 &= \frac{1}{2}y & c_4 &= -\frac{1}{6} \\ d_1 &= -\frac{1}{6}y^3 & d_2 &= \frac{1}{2}y^2 + y & d_3 &= 0 & d_4 &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

5.1.3 ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$, ${}^oW_2^{(2,1)}(\Omega)$ ve $W_2^{(1,1)}(\Omega)$ İki Değişkenli Üretici Çekirdekli Uzayları ve Çekirdek Fonksiyonları

Bölüm 3.3.3'de kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin iki değişkenli (binary) üretici çekirdek uzayında yapılacağından söz edilmiş ve genel tanımları verilmişti. Bu bölümde ise (5.4) ile verilen yapıdaki problemler için $\Omega = [0, 1] \times [0, T]$ olmak üzere ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$, $W_2^{(2,1)}(\Omega)$ ve $W_2^{(1,1)}(\Omega)$ uzayları tanımlanarak bu uzaylara ait çekirdek fonksiyonları sunulacaktır.

Tanım 5.6. ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ iki değişkenli fonksiyon uzayı

$$\begin{aligned} {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega) &= \{u(x, t) : \partial_{x^2}^2 \partial_t u \in CC(\Omega), \partial_{x^3}^3 \partial_{t^2}^2 u \in L^2(\Omega), \\ &\quad u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada CC (completely continuous) Ω bölgesinde tamamen sürekli olan fonksiyonları temsil etmektedir. Uzaya ait iç çarpım aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \langle u(x, t), v(x, t) \rangle_{\circ W_2^{(3,2)}(\Omega)} &= \sum_{i=0}^2 \int_0^T \left[\partial_{t^2}^2 \partial_{x^i} u(0, t) \partial_{t^2}^2 \partial_{x^i} v(0, t) \right] dt \\ &+ \sum_{j=0}^1 \langle \partial_{t^j}^j u(x, 0), \partial_{t^j}^j v(x, 0) \rangle_{\circ \tilde{V}_2^3} \\ &+ \iint_{\Omega} \partial_{x^3}^3 \partial_{t^2}^2 u(x, t) \partial_{x^3}^3 \partial_{t^2}^2 v(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Teorem 5.6. $\circ W_2^{(3,2)}(\Omega)$ fonksiyon uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Teorem 5.7. $\circ W_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayı, çekirdeği

$$K_{(y,s)}(x, t) = \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) k_s^{\{2\}}(t) \quad (5.16)$$

olan bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Burada $\tilde{k}_y^{\{3\}}(x)$ ve $k_s^{\{2\}}(t)$ sırasıyla $\circ \tilde{V}_2^3[0, 1]$ ve $\circ V_2^2[0, T]$ üretici çekirdek uzaylarının üretici çekirdek fonksiyonlarını temsil eder. $\circ W_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'daki her $u(x, t)$ fonksiyonu için $\langle u(x, t), K_{(y,s)}(x, t) \rangle_{W_2^{(3,2)}} = u(y, s)$ sağlanır ve $K_{(y,s)}(x, t) = K_{(x,t)}(y, s)$ 'dir.

Kanıt. $\circ W_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayına ait iç çarpım tanımından aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} \langle u(x, t), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) k_s^{\{2\}}(t) \rangle_{\circ W_2^{(3,2)}(\Omega)} &= \sum_{i=0}^2 \int_0^T \left[\partial_{t^2}^2 \partial_{x^i} u(0, t) \partial_{t^2}^2 \partial_{x^i} \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) k_s^{\{2\}}(t) \right] dt \\ &+ \sum_{j=0}^1 \langle \partial_{t^j}^j u(x, 0), \partial_{t^j}^j \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) k_s^{\{2\}}(0) \rangle_{\tilde{V}_2^3} \\ &+ \int_0^T \int_0^1 \partial_{x^3}^3 \partial_{t^2}^2 u(x, t) \partial_{x^3}^3 \partial_{t^2}^2 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) k_s^{\{2\}}(t) dx dt \\ &= \sum_{i=0}^2 \int_0^T \left[\partial_{t^2}^2 \partial_{x^i} u(0, t) \partial_{x^i} \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) \partial_{t^2}^2 k_s^{\{2\}}(t) \right] dt \\ &+ \sum_{j=0}^1 \langle \partial_{t^j}^j u(x, 0), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \partial_{t^j}^j k_s^{\{2\}}(0) \rangle_{\tilde{V}_2^3} \\ &+ \int_0^T \int_0^1 \partial_{x^3}^3 \partial_{t^2}^2 u(x, t) \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \partial_{t^2}^2 k_s^{\{2\}}(t) dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^1 \partial_{tj}^j \langle u(x, 0), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \rangle_{W_2^3} \partial_{tj}^j k_s^{\{2\}}(0) \\
&\quad + \int_0^T \partial_{t^2}^2 k_s^{\{2\}}(t) \partial_{t^2}^2 \left[\sum_{i=0}^2 \partial_{x^i}^i u(0, t) \partial_{x^i}^i \tilde{k}_y^{\{3\}}(0) + \int_0^1 \partial_{x^3}^3 u(x, t) \partial_{x^3}^3 \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) dx \right] dt \\
&= \sum_{j=0}^1 \partial_{tj}^j u(y, 0) \partial_{tj}^j k_s^{\{2\}}(0) + \int_0^T \partial_{t^2}^2 k_s^{\{2\}}(t) \partial_{t^2}^2 \langle u(x, t), \tilde{k}_y^{\{3\}}(x) \rangle_{V_2^3} dt \\
&= \sum_{j=0}^1 \partial_{tj}^j u(y, 0) \partial_{tj}^j k_s^{\{2\}}(0) + \int_0^T \partial_{t^2}^2 k_s^{\{2\}}(t) \partial_{t^2}^2 u(y, t) dt \\
&= \langle u(y, t), k_s^{\{2\}}(t) \rangle_{V_2^2} = u(y, s).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Böylece $\langle u(x, t), K_{(y,s)}(x, t) \rangle = u(y, s)$ olup, ispat tamamlanmış olur. $\square$

Tanım 5.7. $W_2^{(2,1)}(\Omega)$ iki değişkenli fonksiyon uzayı

$$W_2^{(2,1)}(\Omega) = \{u(x, t) : \partial_x u \in CC(\Omega), \partial_x u \in L^2(\Omega)\} \tag{5.18}$$

şeklinde tanımlanır. Uzaya ait iç çarpım

$$\begin{aligned}
\langle u(x, t), v(x, t) \rangle_{W_2^{(2,1)}(\Omega)} &= \sum_{i=0}^1 \int_0^T \left[\partial_t \partial_{x^i}^i u(0, t) \partial_t \partial_{x^i}^i v(0, t) \right] dt + \langle u(x, 0), v(x, 0) \rangle_{\tilde{V}_2^2} \\
&\quad + \iint_{\Omega} \partial_{x^2}^2 \partial_t u(x, t) \partial_{x^2}^2 \partial_t v(x, t) dx dt
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 5.8. $W_2^{(2,1)}(\Omega)$ fonksiyon uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Teorem 5.9. $W_2^{(2,1)}(\Omega)$ uzayı, çekirdeği

$$\check{r}_{(y,s)}(x, t) = \tilde{k}_y^{\{2\}}(x) k_s^{\{1\}}(t) \tag{5.19}$$

olan bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Burada $\tilde{k}_y^{\{2\}}(x)$ ve $k_s^{\{1\}}(t)$ sırasıyla $\tilde{V}_2^2[0, 1]$ ve $V_2^1[0, T]$ üretici çekirdek uzaylarının üretici çekirdek fonksiyonlarını temsil eder. $W_2^{(2,1)}(\Omega)$ 'daki her $u(x, t)$ fonksiyonu için $\langle u(x, t), \check{r}_{(y,s)}(x, t) \rangle_{W_2^{(2,1)}} = u(y, s)$ sağlanır ve $\check{r}_{(y,s)}(x, t) = \check{r}_{(x,t)}(y, s)$ 'dir.

Tanım 5.8. $W_2^{(1,1)}(\Omega)$ iki değişkenli fonksiyon uzayı

$$W_2^{(1,1)}(\Omega) = \{u(x, t) : u \in CC(\Omega), \partial_x \partial_t u \in L^2(\Omega)\} \tag{5.20}$$

şeklinde tanımlanır. Uzaya ait iç çarpım aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \langle u(x, t), v(x, t) \rangle_{W_2^{(1,1)}(\Omega)} &= \langle u(0, t), v(0, t) \rangle_{\tilde{V}_2^1} + \int_0^T \partial_t u(x, 0) \partial_t v(x, 0) dt \\ &+ \iint_{\Omega} \partial_{xt}^2 u(x, t) \partial_{xt}^2 v(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Teorem 5.10. [72] $W_2^{(1,1)}(\Omega)$ fonksiyon uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Teorem 5.11. $W_2^{(1,1)}(\Omega)$ uzayı, çekirdeği

$$r_{(y,s)}(x, t) = \tilde{k}_y^{\{1\}}(x) k_s^{\{1\}}(t) \quad (5.22)$$

olan bir Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'dır. Burada $\tilde{k}_y^{\{1\}}(x)$ ve $k_s^{\{1\}}(t)$ sırasıyla $\tilde{V}_2^1[0, 1]$ ve $V_2^1[0, T]$ üretici çekirdek uzaylarının üretici çekirdek fonksiyonlarını temsil eder.

Kanıt. 5.7'deki ispata benzer şekilde yapılabilir. □

5.2 Burgers Denklemi

Doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerde önemli bir konuma sahip olan Burgers denklemi ilk kez 1915'te Bateman tarafından tanıtılmış ve daha sonra 1948'de Hollandalı fizikçi J.H. Burgers tarafından analiz edilmiştir. Bu denklem başlangıçta esas olarak türbülans, akustik iletim, trafik akışı vb. özellikleri açıklamak için kullanılmıştır. Daha sonra akışkanlar mekaniği, gaz dinamikleri gibi farklı alanlarda temel bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olarak literatürde yerini almıştır.

$$w_t = w_{xx} - ww_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (5.23)$$

şeklinde verilen Burgers denklemini ,

$$\begin{aligned} w(0, t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(-\frac{1}{8}t\right) \\ w(1, t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}t\right) \end{aligned}, \quad t > 0, \quad (5.24)$$

sınır şartları ve

$$w(x, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{4}\right), \quad 0 < x < 1. \quad (5.25)$$

başlangıç şartı ile birlikte göz önüne alalım. Bu problemin kesin çözümü şu şekildedir: $w(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}t)$ [120].

5.2.1 Homojenleştirme

Kabul edelim ki (5.23) probleminin genel çözümü

$$w(x, t) = u(x, t) - b(x, t) \quad (5.26)$$

formunda olsun. Burada $b(x, t)$, (5.24) ve (5.25) ile verilen başlangıç ve sınır şartlarını sağlayan, tanım kümesindeki bütün basamakları türevli olan düzgün fonksiyonu, $u(x, t)$ ise

homojen hâle gelecek olan başlangıç değer probleminin çözüm fonksiyonunu temsil etmektedir. (5.26) fonksiyonunda gerekli türevler alınarak (5.23)'de yenire konursa

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - b_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) - b_{xx}(x, t) - (u(x, t) - b(x, t)) (u_x(x, t) - b_x(x, t)) \\ u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) + b(x, t)u_x(x, t) + b_x(x, t)u(x, t) &= b_{xx}(x, t)u(x, t)u_x(x, t) + b(x, t)b_x(x, t) \\ &\quad - b_t(x, t) \end{aligned}$$

elde edilir. $b(x, t)$ dönüşüm fonksiyonuna (5.25) ve (5.24) başlangıç ve sınır şartları uygulandığı takdirde $u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0$ bulunur. ζ , u 'nın lineer olmayan fonksiyonlarını temsil etmek üzere

$$\zeta(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) = b_{xx}(x, t)u(x, t)u_x(x, t) + b(x, t)b_x(x, t) - b_t(x, t)$$

olarak ifade edilebilir. Böylelikle homojenleştirme süreci sonucunda

$$\begin{cases} u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) + b(x, t)u_x(x, t) + b_x(x, t)u(x, t) = \zeta(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

homojen başlangıç ve sınır değer problemine ulaşılmış olur. Burada dönüşüm fonksiyonu olarak problemin şartlarından yola çıkılarak bulunmuş olan aşağıdaki fonksiyon kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} b(x, t) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2} (1-x) \tanh\left(\frac{1}{8}t\right) \\ &\quad + x \left(-\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \tanh\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}t\right) \right) + \frac{1}{16}t(1-x) \\ &\quad + \frac{1}{16}xt \left(1 - \left[(x-1) \left(\tanh\left(\frac{1}{4}\right) \right) \right]^2 \right) - \frac{1}{16}t. \end{aligned}$$

5.2.2 Yaklaşık Çözümün İnşası

Homojenleştirilme süreci sonunda ÜÇHM'nin uygulanması için elverişli hâle gelen Problem 5.27 için

$$\mathcal{L}u(x, t) := u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) + b(x, t)u_x(x, t) + b_x(x, t)u(x, t)$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}: {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega) \rightarrow W_2^{(2,1)}(\Omega) \quad (5.28)$$

sınırlı lineer operatörünü tanımlayalım. Böylelikle problem

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, t) = \zeta(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ ve $\zeta \in W_2^{(2,1)}(\Omega)$.

Teorem 5.12. $\mathcal{L}: {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega) \rightarrow W_2^{(2,1)}(\Omega)$ operatörü sınırlı ve lineerdir.

Kanıt. Operatörün lineerliği açıktır. Sınırlılığı için ise $C > 0$ olmak üzere $\|\mathcal{L}u(x, t)\|_{W_2^{(2,1)}} \leq C\|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çekirdeğin yeniden üretme prensibinden

$$u(x, t) = \left\langle u(\circ, \bullet), K_{(x,t)}(\circ, \bullet) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}}$$

$$\partial_{x_i}^i \partial_{t_j}^j \mathcal{L}u(x, t) = \left\langle u(\circ, \bullet), \partial_{x_i}^i \partial_{t_j}^j \mathcal{L}K_{(x,t)}(\circ, \bullet) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}}, i, j = 0, 1$$

yazılabilir. Böylece, $K_{(x,t)}(\circ, \bullet)$ çekirdek fonksiyonu ile $\partial_{x_i}^i \partial_{t_j}^j \mathcal{L}u(x, t)$ 'nin sürekliliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \partial_{x_i}^i \partial_{t_j}^j \mathcal{L}u(x, t) \right| &= \left| \left\langle u(\circ, \bullet), \partial_{x_i}^i \partial_{t_j}^j \mathcal{L}K_{(x,t)}(\circ, \bullet) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \right| \\ &\leq \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}} \left\| \partial_{x_i}^i \partial_{t_j}^j \mathcal{L}K_{(x,t)}(\circ, \bullet) \right\|_{{}^oW_2^{(3,2)}} \\ &\leq C\|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}} \end{aligned}$$

bulunur. ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayını donatan iç çarpım ve normdan

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}u(x, t)\|_H^2 &= \langle \mathcal{L}u(x, t), \mathcal{L}u(x, t) \rangle_{W_2^{(2,1)}} \\ &= \langle \mathcal{L}u(x, 0), \mathcal{L}u(x, 0) \rangle_{\tilde{V}_2^2} + \sum_{i=0}^1 \int_0^T \left[\partial_t \partial_{x_i}^i \mathcal{L}u(0, t) \right]^2 dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^1 \left[\partial_{x^2 t}^2 \mathcal{L}u(x, t) \right]^2 dx dt \\ &= [\mathcal{L}u(x, 0)]^2 + [\partial_x \mathcal{L}u(x, 0)]^2 + \int_0^1 \left[\partial_{x^2}^2 \mathcal{L}u(x, 0) \right]^2 dx + \int_0^T [\partial_t \mathcal{L}u(0, t)]^2 dt \\ &\quad + \int_0^T \left[\partial_{xt}^2 \mathcal{L}u(0, t) \right]^2 dt + \int_0^T \int_0^1 \left[\partial_{x^2 t}^2 \mathcal{L}u(x, t) \right]^2 dx dt \\ &\leq C_1^2 \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}^2 + C_2^2 \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}^2 + \int_0^1 C_3^2 \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}^2 dx + \int_0^T C_4^2 \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}^2 dt \\ &\quad + \int_0^T C_5^2 \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}^2 dt + \int_0^T \int_0^1 C_6^2 \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}^2 dx dt \\ &= (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 T + C_5^2 T + C_6^2 T) \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}^2. \end{aligned}$$

bulunur. $C^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 T + C_5^2 T + C_6^2 T$ olmak üzere $\|\mathcal{L}u(x, t)\|_{W_2^1} \leq C\|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}$ elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

Bu aşamada ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'nin ortogonal fonksiyon sistemini inşa etmek için Ω bölgesinde sayılabilir yoğun $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisini seçerek $\varphi_i(x, t) = \check{r}_{(x_i, t_i)}(x, t)$ ve $\psi_i(x, t) = \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t)$ tanımlamalarını yapalım. Burada $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}$ 'nin adjoint operatörünü ve $\check{r}$ ise $W_2^{(2,1)}(\Omega)$ uzayının üretici çekirdek fonksiyonunu temsil eder.

Teorem 5.13. *Kabul edelim ki $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi Ω bölgesinde yoğun olsun. Bu durumda $\{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty} \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ tam bir fonksiyon sistemi olmakla birlikte*

$$\psi_i(x, t) = \partial_{y^2}^2 K_{(y,s)}(x, t) - \partial_s K_{(y,s)}(x, t) + \partial_y b(x, t) K_{(y,s)}(x, t) + b(x, t) \partial_y K_{(y,s)}(x, t) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)}$$

şeklindedir.

Kanıt. $\mathcal{L}$ operatörünün (y, s) 'nin fonksiyonlarına uygulanmış halini $\mathcal{L}_{(y,s)}$ ile temsil edelim. Çekirdeğin yeniden üretme prensibi kullanılarak

$$\begin{aligned} \psi_i(x, t) &= \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t) = \left\langle \mathcal{L}^* \varphi_i(y, s), K_{(x,t)}(y, s) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \\ &= \left\langle \varphi_i(y, s), \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(x,t)}(y, s) \right\rangle_{W_2^{(2,1)}} \\ &= \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(x,t)}(y, s) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \\ &= \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(y,s)}(x, t) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \\ &= \partial_{y^2}^2 K_{(y,s)}(x, t) - \partial_s K_{(y,s)}(x, t) \\ &\quad + \partial_y b(x, t) K_{(y,s)}(x, t) + b(x, t) \partial_y K_{(y,s)}(x, t) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıkça anlaşılmaktadır ki $\psi_i(x, t) \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'dır. Şimdi kabul edelim ki her bir $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ için $\langle u(x, t), \psi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = 0$, $i = 1, 2, \dots$ olsun. O halde, $\langle u(x, t), \psi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = \langle u(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t) \rangle_{W_2^{(2,1)}} = \langle \mathcal{L}u(x, t), \varphi_i(x, t) \rangle_{W_2^{(2,1)}} = \mathcal{L}u(x_i, t_i) = 0$. $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi Ω bölgesinde yoğunken, $\mathcal{L}^{-1}$ 'den dolayı $\mathcal{L}u(x, t) = 0$ olmalıdır. Bu da $u = 0$ eşitliğini gerektirir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'nın ortonormal sitemi olan $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ için Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden

$$\bar{\psi}_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x, t)$$

bulunur. Burada γ_{ik} ortogonalizasyon katsayılarını temsil etmektedir.

Lemma 5.1. *Eğer $u(x, t) \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ ise bu durumda $\left| \frac{\partial^{r+s} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^s} \right| \leq M \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}$ ($r = 0, 1, 2, s = 0, 1$) olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti vardır.*

5.2.3 Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde çözümün nasıl elde edildiğine ve yakınsaklığa dair teoremler sunulacaktır.

Teorem 5.14. *Kabul edelim ki $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi Ω bölgesinde yoğun olsun. Eğer ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayının elemanı olan $u(x, t)$ fonksiyonu (5.29) ile verilen problemin çözümü ise bu çözüm fonksiyonu, $\zeta_k := \zeta(x_k, t_k, u(x_k, t_k), u_x(x_k, t_k))$ olmak üzere*

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \zeta_k \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.30)$$

şeklinde ifade edilir.

Kanıt. $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sisteminin $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayında tam olması ve çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği her $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ için $\langle u(x, t), \varphi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = u(x_i, t_i)$ olması sebebiyle aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür. Böylece,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x, t), \bar{\psi}_i(x, t) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x, t), \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x, t) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_k(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \left\langle \mathcal{L}u(x, t), K_{(x_k, t_k)}(x, t) \right\rangle_{W_2^{(2,1)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \mathcal{L}u(x_k, t_k) \bar{\psi}_i(x, t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \zeta_k \bar{\psi}_i(x, t)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

$u(x, t)$ çözümünde serinin n . teriminden sonrakiler ihmal edilirse problemin yaklaşık çözümü

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \zeta(x_k, t_k, u(x_k, t_k), u_x(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.31)$$

şeklinde ifade edilir. $A_i = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \zeta(x_k, t_k, u(x_k, t_k), u_x(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t)$ olmak üzere, (5.30) analitik çözümü

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\psi}_i(x, t)$$

şeklinde dir. Nümerik hesaplamalar göz önünde bulundurarak $u_0(x_1, t_1) = u(x_1, t_1)$ alalım. $u(x, t)$ 'nin n terim yaklaşımı

$$\begin{aligned}
A_1 &= \gamma_{11} \zeta(x_1, t_1, u_0(x_1, t_1), \partial_x u_0(x_1, t_1)), \\
A_2 &= \sum_{k=1}^2 \gamma_{2k} \zeta(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k), \partial_x u_{k-1}(x_k, t_k)), \\
&\vdots \\
A_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{(n-1)k} \zeta(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k), \partial_x u_{k-1}(x_k, t_k)), \\
A_n &= \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} \zeta(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k), \partial_x u_{k-1}(x_k, t_k))
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.32)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir sonraki aşama yaklaşık çözümün analitik çözüme yakınsadığını, yani $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ olduğunu göstermek olacaktır.

Teorem 5.15. *Kabul edelim ki $\|u_n(x, t)\|$ sınırlı ve denklem (5.29) tek bir çözüme sahip olsun. Eğer $\{x_i, t_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi Ω 'da yoğunsa (5.32)'de elde edilen $u_n(x, t)$ yaklaşık çözümü, (5.29)'nin analitik çözümü olan $u(x, t)$ 'ye yakınsar.*

Kanıt. Yukarıda verilmiş olan denklem (5.32)'den hareketle

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + A_{n+1} \bar{\psi}_{n+1}(x, t)$$

yazılabilir. $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$ 'nin ortonormalliğinden

$$\|u_{n+1}\|^2 = \|u_n\|^2 + (A_{n+1})^2 = \dots = \sum_{i=1}^{n+1} (A_i)^2.$$

Buradan $\|u_{n+1}\|_{oW_2^{(3,2)}} \geq \|u_n\|_{oW_2^{(3,2)}}$ olacağı açıktır. Verilen şartlardan $\|u_n\|_{oW_2^{(3,2)}}$ sınırlı olduğu için aynı zamanda yakınsaktır ve

$$\sum_{i=1}^\infty (A_i)^2 = c$$

olacak şekilde bir c sabiti vardır. Bu da $\{A_i\}_{i=1}^\infty \in l^2$ olmasını gerektirir. Eğer $k > n$ ise ortogonalite kullanılarak

$$\begin{aligned} \|u_k(x, t) - u_n(x, t)\|_{o\tilde{W}_2^{(3,2)}}^2 &= \|u_k(x, t) - u_{k-1}(x, t) + u_{k-2}(x, t) \\ &\quad + \dots + u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)\|_{o\tilde{W}_2^{(3,2)}}^2 \\ &= \|u_k(x, t) - u_{k-1}(x, t)\|_{o\tilde{W}_2^{(3,2)}}^2 + \dots + \|u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)\|_{o\tilde{W}_2^{(3,2)}}^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^k A_i^2 \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

bulunur. $o\tilde{W}_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayının tamlığı $n \rightarrow \infty$ iken $u_n \rightarrow u$ sonucuna ulaştırır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 5.16. *Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ ve $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$, aynı zamanda $\|u_n(x, t)\|_{oW_2^{(3,2)}}$ sınırlı ve $\zeta(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$ sürekli ise bu durumda*

$$\zeta(x_n, t_n, u_{n-1}(x_n, t_n), \partial_x u_{n-1}(x_n, t_n)) \longrightarrow \zeta(x, t, u(x, t), \partial_x u(x, t)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Kanıt. Bu teoremin ispatı [36]'da uygulanmış olan teknik kullanılarak yapılacaktır.

$$\begin{aligned}
|u_{n-1}(x_n, t_n) - u(x, t)| &= |u_{n-1}(x_n, t_n) - u_{n-1}(x, t) + u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \\
&\leq |u_{n-1}(x_n, t_n) - u_{n-1}(x, t)| + |u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \\
&\leq |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n)| |x_n - x| + |\partial_t u_{n-1}(x_n, t_n)| |t_n - t| \\
&\quad + |u_{n-1}(x, t) - u(x, t)|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n) - \partial_x u(x, t)| &= |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n) - \partial_x u_{n-1}(x, t) + \partial_x u_{n-1}(x, t) - \partial_x u(x, t)| \\
&\leq |\partial_{xx} u_{n-1}(x_n, t_n)| |x_n - x| + |\partial_{xt} u_{n-1}(x_n, t_n)| |t_n - t| \\
&\quad + |\partial_x u_{n-1}(x, t) - \partial_x u(x, t)|.
\end{aligned}$$

Verilen $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ ve $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$ şartlarından

$$|u_{n-1}(x_n, t_n) - u(x, t)| \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n) - \partial_x u(x, t)| \rightarrow 0$$

elde edilir. $\zeta(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\zeta(x_n, t_n, u_{n-1}(x_n, t_n), \partial_x u_{n-1}(x_n, t_n)) \rightarrow \zeta(x, t, u(x, t), \partial_x u(x, t)), \quad n \rightarrow \infty$$

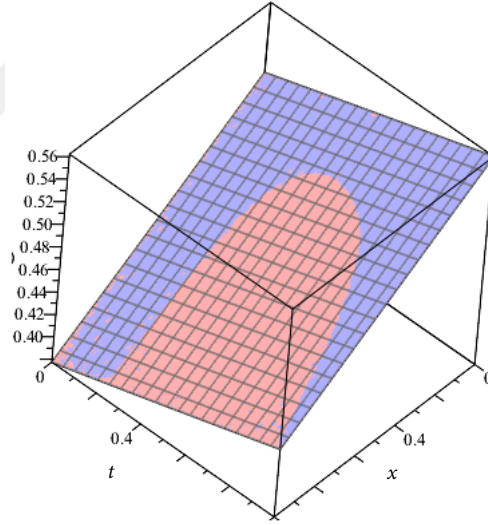
sonucuna ulaşılır. □

5.2.4 Nümerik Sonuçlar

Kesin çözümü $w(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}t)$ olan Problem 5.23'in nümerik analizi için $m = p \times q$ olmak üzere $x_i = \frac{i}{p}$, $i = 1 \dots p$ ve $t_i = \frac{i}{q}$, $i = 1 \dots q$ alınmıştır. Yoğun nokta sayısı $p = 8$ ve $q = 8$ olmak üzere $m = 64$ seçilmiştir. $[0, 1]$ ve $[0, T]$ aralıkları için 11'er test noktası kullanılmıştır. Bu değerler dikkate alınarak elde edilen yaklaşık çözüm ile mutlak hata ve görelî hata sonuçları Tablo 5.1 ve Tablo 5.2'de sunulmuştur. Kesin ve yaklaşık çözüme dair grafik Şekil 5.1'de verilmiştir.

Tablo 5.1 Problem (5.27) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM)

x	KÇ	YÇ
0.0	0.5621765009	0.5621765009
0.1	0.5498339973	0.5498410370
0.2	0.5374298453	0.5374359371
0.3	0.5249791875	0.5249848259
0.4	0.5124973965	0.5125027877
0.5	0.5000000000	0.5000051147
0.6	0.4875026035	0.4875072505
0.7	0.4750208125	0.4750247132
0.8	0.4625701547	0.4625729962
0.9	0.4501660027	0.4501675009
1.0	0.4378234991	0.4378234990



Şekil 5.1 Problem (5.27) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği

Tablo 5.2 Problem (5.27) göreli hata (GH), mutlak hata (MH) ve mutlak hata [120] değerleri

x	GH	MH	[120] (MH)
0.1	0.00001280368263	0.0000070399	0.0007420
0.2	0.00001133282800	0.0000060906	0.0009930
0.3	0.00001073890191	0.0000056377	0.0008750
0.4	0.00001052219979	0.0000053926	0.0005110
0.5	0.00001023060000	0.0000051153	0.0000527
0.6	0.00000953164140	0.0000046467	0.0004670
0.7	0.00000821206123	0.0000039009	0.0008370
0.8	0.00000614371673	0.0000028419	0.0009640
0.9	0.00000332788347	0.0000014981	0.0007250

5.3 Fisher Denklemleri

Bu bölümde ilk olarak İngiliz bir bilimadamı olan Ronald Aylmer Fisher tarafından mutant bir genin yayılım modeli için ortaya atılmış olan Fisher denkleminin ÜÇHM ile çözümü araştırılacaktır. Fisher denklemi kimyasal kinetik, popülasyon dinamiği, otokatalitik kimyasal reaksiyonlarda ortaya çıkmaktadır.

$$w_t = w_{xx} + w(1 - w), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (5.33)$$

şeklindeki Fisher denklemini,

$$\begin{aligned} w(0, t) &= \frac{1}{4} \left[1 - \tanh \left(-\frac{5}{12}t \right) \right]^2, \\ w(1, t) &= \frac{1}{4} \left[1 - \tanh \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} \left(1 - \frac{5}{\sqrt{6}}t \right) \right) \right]^2, \end{aligned} \quad t > 0, \quad (5.34)$$

sınır şartları ve

$$w(x, 0) = \frac{1}{4} \left[1 - \tanh \left(\frac{x}{2\sqrt{6}} \right) \right]^2, \quad 0 < x < 1 \quad (5.35)$$

başlangıç şartı ile birlikte göz önüne alalım. Problemin kesin çözümü $w(x, t) = \frac{1}{4} \left[1 - \tanh \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}(x - \frac{5}{\sqrt{6}}t) \right) \right]^2$ biçimindedir.

5.3.1 Homojenleştirme

Kabul edelim ki (5.33) probleminin genel çözümü

$$w(x, t) = u(x, t) - f(x, t) \quad (5.36)$$

formunda olsun. (5.36) fonksiyonunun gerekli türevleri alınarak (5.33)'de yerine konursa

$$u_t(x, t) - f_t(x, t) = u_{xx}(x, t) - f_{xx}(x, t) + u(x, t)(1 + 2f(x, t)) - u^2(x, t) - f^2(x, t) - f(x, t)$$

elde edilir. Denklemin doğrusal kısmı eşitliğin solunda, doğrusal olmayan kısmı eşitliğin sağ tarafında kalacak şekilde bir düzenleme yapılırsa

$$u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) + u(x, t)(1 + 2f(x, t)) = u^2(x, t) - f_t(x, t) + f^2(x, t) + f_{xx}(x, t) + f(x, t)$$

denklemine ulaşılır. Dönüşüm fonksiyonu olarak seçilen $f(x, t)$ 'ye (5.35) ve (5.34) ile verilen başlangıç ve sınır şartları uygulandığı takdirde homojenleştirilmiş olan $u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0$ şartlarına ulaşılmış olur. ξ , u 'nun lineer olmayan fonksiyonlarını temsil etmek üzere

$$\xi(x, t, u(x, t)) = u^2(x, t) - f_t(x, t) + f^2(x, t) + f_{xx}(x, t) + f(x, t)$$

yazılabilir. Böylelikle homojenleştirme süreci sonucunda

$$\begin{cases} u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) + u(x, t)(1 + 2f(x, t)) = \xi(x, t, u(x, t)) \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

homojen başlangıç ve sınır değer problemine ulaşılmış olur. Burada dönüşüm fonksiyonu olarak aşağıdaki fonksiyon kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} f(x, t) = & -\frac{1}{4} \left(1 - \tanh\left(\frac{1}{12} x \sqrt{6}\right) \right)^2 + (1 - x) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 + \tanh\left(\frac{5}{12} t\right) \right)^2 \right) \\ & + x \left(\frac{1}{4} \left(1 - \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{6}\right) \right)^2 - \frac{1}{4} \left(1 - \tanh\left(\frac{1}{12} (1 - \frac{5}{6} t \sqrt{6}) \sqrt{6}\right) \right)^2 \right) \\ & + \frac{5}{12} t(1 - x) + \frac{1}{2} xt \left(1 - \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{6}\right) \right) \left(\frac{5}{12} - \frac{5}{12} (\tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{6}\right))^2 \right) \\ & - \frac{5}{12} t - \frac{1}{2} t \left(1 - \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{6}\right) \right) \left(\frac{5}{12} - \frac{5}{12} (\tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{6}\right))^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} (1 - x)t \left(1 - \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{6}\right) \right) \left(\frac{5}{12} - \frac{5}{12} (\tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{6}\right))^2 \right) + \frac{5}{12} xt. \end{aligned}$$

5.3.2 Yaklaşık Çözümün İnşası

Homojenleştirilme süreci sonunda ÜÇHM'nin uygulanması için elverişli hâle gelen Problem 5.37 için

$$\mathcal{L}u(x, t) := u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) + u(x, t)(1 + 2f(x, t))$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}: {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega) \rightarrow {}^oW_2^{(1,1)}(\Omega) \quad (5.38)$$

sınırlı lineer operatörünü tanımlayalım. Böylelikle problem

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, t) = \xi(x, t, u(x, t)) \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ ve $\xi \in {}^oW_2^{(1,1)}(\Omega)$.

Teorem 5.17. *[119] $\mathcal{L}: {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega) \rightarrow W_2^{(1,1)}(\Omega)$ operatörü sınırlı ve lineerdir.*

Bu aşamada ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'nın ortogonal fonksiyon sistemini inşa etmek için Ω bölgesinde sayılabilir yoğun $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisini seçerek $\varphi_i(x, t) = r_{(x_i, t_i)}(x, t)$ ve $\psi_i(x, t) = \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t)$ tanımlamalarını yapalım. Burada $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}$ 'nin adjoint operatörünü ve k ise ${}^oW_2^{(1,1)}(\Omega)$ uzayının üretici çekirdek fonksiyonunu temsil eder.

Teorem 5.18. *Kabul edelim ki $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi Ω bölgesinde yoğun olsun. Bu durumda $\{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^\infty \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ tam bir fonksiyon sistemi olmakla birlikte*

$$\psi_i(x, t) = \partial_{y^2}^2 K_{(y,s)}(x, t) - \partial_s K_{(y,s)}(x, t) - (1 + 2f(x, t))K_{(y,s)}(x, t)|_{(y,s)=(x_i, t_i)}$$

şeklindedir.

Kanıt. $\mathcal{L}$ operatörünün (y, s) 'nin fonksiyonlarına uygulanmış halini $\mathcal{L}_{(y,s)}$ ile temsil edelim. Çekirdeğin yeniden üretme prensibi kullanılarak

$$\begin{aligned} \psi_i(x, t) &= \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t) = \left\langle \mathcal{L}^* \varphi_i(y, s), K_{(x,t)}(y, s) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \\ &= \left\langle \varphi_i(y, s), \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(x,t)}(y, s) \right\rangle_{{}^oW_2^{(1,1)}} \\ &= \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(x,t)}(y, s) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \\ &= \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(y,s)}(x, t) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \\ &= \partial_{y^2}^2 K_{(y,s)}(x, t) - \partial_s K_{(y,s)}(x, t) - (1 + 2f(x, t))K_{(y,s)}(x, t) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıkça anlaşılmaktadır ki $\psi_i(x, t) \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'dır. Şimdi kabul edelim ki her bir $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ için $\langle u(x, t), \psi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = 0$, $i = 1, 2, \dots$ olsun. O halde, $\langle u(x, t), \psi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = \langle u(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = \langle \mathcal{L}u(x, t), \varphi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(1,1)}} = \mathcal{L}u(x_i, t_i) = 0$. $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi Ω bölgesinde yoğunken, $\mathcal{L}^{-1}$ 'den dolayı $\mathcal{L}u(x, t) = 0$ olmalıdır. Bu da $u = 0$ eşitliğini gerektirir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'nın ortonormal sitemi olan $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$, $\{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$ için Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden

$$\bar{\psi}_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x, t)$$

şeklinde bulunur. Burada γ_{ik} ortogonalizasyon katsayılarını temsil etmektedir.

Lemma 5.2. *Eğer $u(x, t) \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ ise bu durumda $\left| \frac{\partial^{r+s} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^s} \right| \leq M \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}$ ($r = 0, 1, 2, s = 0, 1$) olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti vardır.*

5.3.3 Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde çözümün nasıl elde edildiğine ve yakınsaklığa dair teoremler sunulacaktır.

Teorem 5.19. *Kabul edelim ki $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi Ω bölgesinde yoğun olsun. Eğer ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayının elemanı olan $u(x, t)$ fonksiyonu (5.39) ile verilen problemin çözümü ise bu çözüm fonksiyonu, $\xi_k := \xi(x_k, t_k, u(x_k, t_k))$ olmak üzere*

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \xi_k \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.40)$$

şeklinde ifade edilir.

Kanıt. $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sisteminin $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayında tam olması ve çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği her $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ için $\langle u(x, t), \varphi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = u(x_i, t_i)$ olması sebebiyle aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür. Böylece,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x, t), \bar{\psi}_i(x, t) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x, t), \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x, t) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_k(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \left\langle \mathcal{L}u(x, t), r_{(x_h, t_k)}(x, t) \right\rangle_{{}^oW_2^{(1,1)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \mathcal{L}u(x_k, t_k) \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \xi_k \bar{\psi}_i(x, t) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

$u(x, t)$ çözümünde serinin n . teriminden sonrakiler ihmal edilirse problemin yaklaşık çözümü

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \xi(x_k, t_k, u(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.41)$$

biçiminde yazılabilir. $A_i = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \xi(x_k, t_k, u(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t)$ olmak üzere, (5.40) analitik çözümü

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\psi}_i(x, t)$$

şeklindedir. Nümerik hesaplamalar göz önünde bulundurarak $u_0(x_1, t_1) = u(x_1, t_1)$ alalım. $u(x, t)$ 'nin n terim yaklaşımı

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma_{11} \xi(x_1, t_1, u_0(x_1, t_1)), \\ A_2 &= \sum_{k=1}^2 \gamma_{2k} \xi(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k)), \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{(n-1)k} \xi(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k)), \\ A_n &= \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} \xi(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k)) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.42)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir sonraki aşama yaklaşık çözümün analitik çözüme yakınsadığını, yani $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ olduğunu göstermek olacaktır.

Teorem 5.20. *Kabul edelim ki $\|u_n(x, t)\|$ sınırlı ve denklem (5.39) tek bir çözüme sahip olsun. Eğer $\{x_i, t_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi Ω 'da yoğunsa (5.42)'de elde edilen $u_n(x, t)$ yaklaşık çözümü, (5.39)'in analitik çözümü olan $u(x, t)$ 'ye yakınsar.*

Kanıt. Teorem 5.15'in ispatına benzer şekilde kolaylıkla yapılabileceğinden detaylandırılmamıştır. $\square$

Teorem 5.21. *Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ ve $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$, aynı zamanda $\|u_n(x, t)\|_{W_2^{(3,2)}}$ sınırlı ve $\xi(x, t, u(x, t))$ sürekli ise bu durumda*

$$\xi(x_n, t_n, u_{n-1}(x_n, t_n)) \rightarrow \xi(x, t, u(x, t)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Kanıt.

$$\begin{aligned} |u_{n-1}(x_n, t_n) - u(x, t)| &= |u_{n-1}(x_n, t_n) - u_{n-1}(x, t) + u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \\ &\leq |u_{n-1}(x_n, t_n) - u_{n-1}(x, t)| + |u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \\ &\leq |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n)| |x_n - x| + |\partial_t u_{n-1}(x_n, t_n)| |t_n - t| \\ &\quad + |u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \end{aligned}$$

yazılabilir. Verilen $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ ve $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$ şartlarından

$$|u_{n-1}(x_n, t_n) - u(x, t)| \rightarrow 0$$

elde edilir. Netice itibariyle $\xi(x, t, u(x, t))$ fonksiyonunun sürekliliğinden $n \rightarrow \infty$ iken

$$\xi(x_n, t_n, u_{n-1}(x_n, t_n)) \rightarrow \xi(x, t, u(x, t))$$

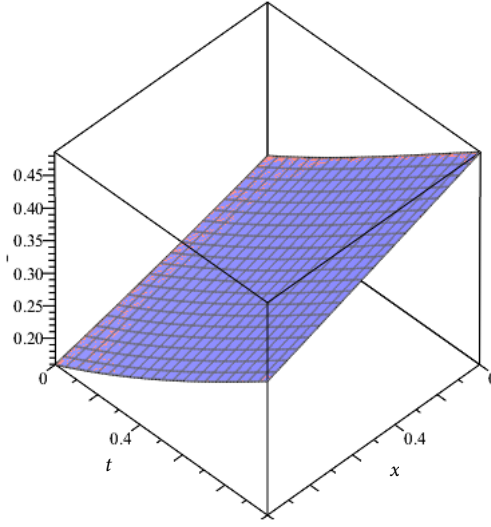
sonucuna ulaşılır ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

5.3.4 Nümerik Sonuçlar

Kesin çözümü $w(x, t) = \frac{1}{4} \left[1 - \tanh \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} \left(x - \frac{5}{\sqrt{6}} t \right) \right) \right]^2$ olan Problem 5.33'ün nümerik analizi için $m = p \times q$ olmak üzere $x_i = \frac{i}{p}$, $i = 1 \dots p$ ve $t_i = \frac{i}{q}$, $i = 1 \dots q$ alınmıştır. Yoğun nokta sayısı $p = 10$ ve $q = 10$ olmak üzere $m = 100$ seçilmiştir. $[0, 1]$ ve $[0, T]$ aralıkları için 10'ar test noktası kullanılmıştır. Bu değerler dikkate alınarak elde edilen yaklaşık çözüm ile mutlak hata ve göreceli hata sonuçları Tablo 5.3 ve Tablo 5.4'de sunulmuştur. Kesin ve yaklaşık çözümün bir arada yer aldığı grafik Şekil 5.2'de verilmiştir.

Tablo 5.3 Problem (5.37) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM)

x	KÇ	YÇ
0.0	0.4858916455	0.4858916455
0.1	0.4738528452	0.4738650793
0.2	0.4617820228	0.4618093886
0.3	0.4496921625	0.4497317606
0.4	0.4375965068	0.4376442031
0.5	0.4255085012	0.4255592819
0.6	0.4134417432	0.4134903250
0.7	0.4014099292	0.4014516462
0.8	0.3894267965	0.3894573363
0.9	0.3775060650	0.3894573363
1.0	0.3656613808	0.3775222543



Şekil 5.2 Problem (5.37) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği

Tablo 5.4 Problem (5.37) göreli hata (GH), mutlak hata (MH) ve mutlak hata [120] değerleri

x	GH	MH	[120] (MH)
0.1	0.00002590656598	0.0000122759	0.000893000
0.2	0.00005934011860	0.0000274022	0.001170000
0.3	0.00008820767473	0.0000396663	0.001020000
0.4	0.00010945859770	0.0000478987	0.000581000
0.5	0.00011950619050	0.0000508509	0.000000650
0.6	0.00011795494960	0.0000487675	0.000593000
0.7	0.00010431231750	0.0000418720	0.001030000
0.8	0.00007874111457	0.0000306639	0.001180000
0.9	0.00004298553455	0.0000162273	0.000891000

5.4 Huxley Denklemleri

Bu bölümde birçok alanda çeşitli uygulamaları olan, özellikle biyolojideki sinir yayılımı modelinde ortaya çıkan Huxley denkleminin ÜÇHM ile çözümü araştırılacaktır. Huxley denklemleri, lineer olmayan bir reaksiyon-difüzyon denklemi olmakla birlikte biyolojinin yanı sıra akışkanlar mekaniğinde de ortaya çıkan önemli denklemlerdendir.

$$w_t = w_{xx} + w(1-w)(w-1), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (5.43)$$

şeklindeki Huxley denklemini [120],

$$\begin{aligned}
w(0, t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(-\frac{1}{4}t\right), \\
w(1, t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\right),
\end{aligned} \quad t > 0, \tag{5.44}$$

ile verilen sınır şartları ve

$$w(x, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right), \quad 0 < x < 1. \tag{5.45}$$

başlangıç şartı ile birlikte göz önüne alalım. Problemin kesin çözümü

$$w(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\right)$$

şeklindedir.

5.4.1 Homojenleştirme

Kabul edelim ki (5.43) probleminin genel çözümü

$$w(x, t) = u(x, t) - h(x, t) \tag{5.46}$$

formunda olsun. (5.46) fonksiyonunun gerekli türevleri alınarak (5.43)'de yerine konursa

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) - h_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) - h_{xx}(x, t) - u(x, t) + h(x, t) + 2u^2(x, t) + 2h^2(x, t) \\
&\quad - 4u(x, t)h(x, t) - u^3(x, t) + 3u^2(x, t)h(x, t) - 3u(x, t)h^2(x, t) + h^3(x, t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklemin doğrusal kısmı eşitliğin solunda, doğrusal olmayan kısmı eşitliğin sağ tarafında kalacak şekilde bir düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
&u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) - 3u(x, t)h^2(x, t) - 4u(x, t)h(x, t) - u(x, t) \\
&= -3u^2(x, t)h(x, t) - h_t(x, t) + u^3(x, t) - h^3(x, t) - 2u^2(x, t) - 2h^2(x, t) - h(x, t)
\end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. Dönüşüm fonksiyonu olarak seçilen $h(x, t)$ 'ye (5.45) ve (5.44) ile verilen başlangıç ve sınır şartları uygulandığı takdirde homojenleştirilmiş olan $u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0$ şartlarına ulaşılmış olur. β , u 'nun lineer olmayan fonksiyonlarını temsil etmek üzere

$$\begin{aligned}
\beta(x, t, u(x, t)) &= -3u^2(x, t)h(x, t) - h_t(x, t) + u^3(x, t) - h^3(x, t) - 2u^2(x, t) \\
&\quad - 2h^2(x, t) - h(x, t)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Böylelikle homojenleştirme süreci sonucunda

$$\begin{cases} u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) - 3u(x, t)h^2(x, t) - 4u(x, t)h(x, t) - u(x, t) = \beta(x, t, u(x, t)) \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \tag{5.47}$$

homojen başlangıç ve sınır değer problemine ulaşılmış olur. Burada dönüşüm fonksiyonu olarak

$$h(x, t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4}x\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}(1-x) \tanh\left(\frac{1}{4}t\right) \\ + x\left(\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}t\sqrt{2}\right)\right)\right)$$

kullanılmıştır.

5.4.2 Yaklaşık Çözümün İnşası

Homojenleştirilme süreci sonunda ÜÇHM'nin uygulanması için elverişli hâle gelen Problem 5.47 için

$$\mathcal{L}u(x, t) := u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) - 3u(x, t)h^2(x, t) - 4u(x, t)h(x, t) - u(x, t)$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}: {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega) \rightarrow {}^oW_2^{(1,1)}(\Omega) \quad (5.48)$$

sınırlı lineer operatörünü tanımlayalım. Böylelikle problem

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, t) = \beta(x, t, u(x, t)) \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.49)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ ve $\beta \in {}^oW_2^{(1,1)}(\Omega)$.

Teorem 5.22. [119] $\mathcal{L}: {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega) \rightarrow {}^oW_2^{(1,1)}(\Omega)$ operatörü sınırlı ve lineerdir.

Bu aşamada ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'nin ortogonal fonksiyon sistemini inşa etmek için Ω bölgesinde sayılabilir yoğun $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisini seçerek $\varphi_i(x, t) = r_{(x_i, t_i)}(x, t)$ ve $\psi_i(x, t) = \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t)$ tanımlamalarını yapalım. Burada $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}$ 'nin adjoint operatörünü ve r ise ${}^oW_2^{(1,1)}(\Omega)$ uzayının üretici çekirdek fonksiyonunu temsil eder.

Teorem 5.23. Kabul edelim ki $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi Ω bölgesinde yoğun olsun. Bu durumda $\{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^\infty \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ tam bir fonksiyon sistemi olmakla birlikte

$$\psi_i(x, t) = \partial_{y^2}^2 K_{(y,s)}(x, t) - \partial_s K_{(y,s)}(x, t) - 3K_{(y,s)}(x, t)h^2(x, t) \\ - 4K_{(y,s)}(x, t)h(x, t) - K_{(y,s)}(x, t)|_{(y,s)=(x_i, t_i)}$$

şeklindedir.

Kanıt. $\mathcal{L}$ operatörünün (y, s) 'nin fonksiyonlarına uygulanmış halini $\mathcal{L}_{(y,s)}$ ile temsil edelim.

Çekirdeğin yeniden üretme prensibi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\psi_i(x, t) &= \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t) = \left\langle \mathcal{L}^* \varphi_i(y, s), K_{(x,t)}(y, s) \right\rangle_{oW_2^{(3,2)}} \\
&= \left\langle \varphi_i(y, s), \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(x,t)}(y, s) \right\rangle_{oW_2^{(1,1)}} \\
&= \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(x,t)}(y, s) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \\
&= \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(y,s)}(x, t) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \\
&= \partial_{y^2}^2 K_{(y,s)}(x, t) - \partial_s K_{(y,s)}(x, t) - 3K_{(y,s)}(x, t) h^2(x, t) \\
&\quad - 4K_{(y,s)}(x, t) h(x, t) - K_{(y,s)}(x, t) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıkça anlaşılmaktadır ki $\psi_i(x, t) \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'dır. Şimdi kabul edelim ki her bir $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ için $\langle u(x, t), \psi_i(x, t) \rangle_{oW_2^{(3,2)}} = 0$, $i = 1, 2, \dots$ olsun. O halde, $\langle u(x, t), \psi_i(x, t) \rangle_{oW_2^{(3,2)}} = \langle u(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t) \rangle_{oW_2^{(3,2)}} = \langle \mathcal{L}u(x, t), \varphi_i(x, t) \rangle_{oW_2^{(1,1)}} = \mathcal{L}u(x_i, t_i) = 0$. $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi Ω bölgesinde yoğunken, $\mathcal{L}^{-1}$ 'den dolayı $\mathcal{L}u(x, t) = 0$ olmalıdır. Bu da $u = 0$ eşitliğini gerektirir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'nın ortonormal sitemi olan $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^\infty, \{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$ için Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden

$$\bar{\psi}_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x, t)$$

şeklinde bulunur. Burada γ_{ik} ortogonalizasyon katsayılarını temsil etmektedir.

Lemma 5.3. *Eğer $u(x, t) \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ ise bu durumda $\left| \frac{\partial^{r+s} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^s} \right| \leq M \|u\|_{oW_2^{(3,2)}}$ ($r = 0, 1, 2, s = 0, 1$) olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti vardır.*

5.4.3 Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde çözümün nasıl elde edildiğine ve yakınsaklığa dair teoremler sunulacaktır.

Teorem 5.24. *Kabul edelim ki $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi Ω bölgesinde yoğun olsun. Eğer ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayının elemanı olan $u(x, t)$ fonksiyonu (5.39) ile verilen problemin çözümü ise bu çözüm fonksiyonu, $\beta_k := \beta(x_k, t_k, u(x_k, t_k))$ olmak üzere*

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \beta_k \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.50)$$

şeklinde ifade edilir.

Kanıt. $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$ ortonormal sisteminin $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayında tam olması ve çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği her $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ için $\langle u(x, t), \varphi_i(x, t) \rangle_{oW_2^{(3,2)}} = u(x_i, t_i)$ olması sebebiyle aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür.

Böylece,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x, t), \bar{\psi}_i(x, t) \right\rangle_{oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x, t), \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x, t) \right\rangle_{oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \left\langle u(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_k(x, t) \right\rangle_{oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \left\langle \mathcal{L} u(x, t), r_{(x_k, t_k)}(x, t) \right\rangle_{oW_2^{(1,1)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \mathcal{L} u(x_k, t_k) \bar{\psi}_i(x, t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \beta_k \bar{\psi}_i(x, t)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

$u(x, t)$ çözümünde serinin n . teriminden sonrakiler ihmal edilirse problemin yaklaşık çözümü

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \beta(x_k, t_k, u(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.51)$$

şeklinde yazılabilir. $A_i = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \beta(x_k, t_k, u(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t)$ olmak üzere, (5.50) analitik çözümü

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\psi}_i(x, t)$$

olarak ifade edilebilir. Nümerik hesaplamalar göz önünde bulundurarak $u_0(x_1, t_1) = u(x_1, t_1)$ alınırsa $u(x, t)$ 'nin n terim yaklaşımı

$$\begin{aligned}
A_1 &= \gamma_{11} \beta(x_1, t_1, u_0(x_1, t_1)), \\
A_2 &= \sum_{k=1}^2 \gamma_{2k} \beta(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k)), \\
&\vdots \\
A_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{(n-1)k} \beta(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k)), \\
A_n &= \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} \beta(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k))
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.52)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir sonraki aşama yaklaşık çözümün analitik çözüme yakınsadığını, yani $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ olduğunu göstermek olacaktır.

Teorem 5.25. *Kabul edelim ki $\|u_n(x, t)\|$ sınırlı ve denklem (5.49) tek bir çözüme sahip olsun. Eğer $\{x_i, t_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi Ω 'da yoğunsa (5.52)'de elde edilen $u_n(x, t)$ yaklaşık çözümü, (5.49)'un analitik çözümü olan $u(x, t)$ 'ye yakınsar.*

Kanıt. Teorem 5.15'in ispatına benzer şekilde kolaylıkla yapılabileceğinden detaylandırılmamıştır. $\square$

Teorem 5.26. *Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ ve $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$, aynı zamanda $\|u_n(x, t)\|_{W_2^{(3,2)}}$ sınırlı ve $\beta(x, t, u(x, t))$ sürekli ise bu durumda*

$$\beta(x_n, t_n, u_{n-1}(x_n, t_n)) \rightarrow \beta(x, t, u(x, t)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Kanıt.

$$\begin{aligned} |u_{n-1}(x_n, t_n) - u(x, t)| &= |u_{n-1}(x_n, t_n) - u_{n-1}(x, t) + u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \\ &\leq |u_{n-1}(x_n, t_n) - u_{n-1}(x, t)| + |u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \\ &\leq |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n)| |x_n - x| + |\partial_t u_{n-1}(x_n, t_n)| |t_n - t| \\ &\quad + |u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \end{aligned}$$

yazılabilir. Verilen $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ ve $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$ şartlarından

$$|u_{n-1}(x_n, t_n) - u(x, t)| \rightarrow 0$$

elde edilir. Netice itibariyle $\beta(x, t, u(x, t))$ fonksiyonunun sürekliliğinden $n \rightarrow \infty$ iken

$$\beta(x_n, t_n, u_{n-1}(x_n, t_n)) \rightarrow \beta(x, t, u(x, t))$$

sonucuna ulaşılır ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

5.4.4 Nümerik Sonuçlar

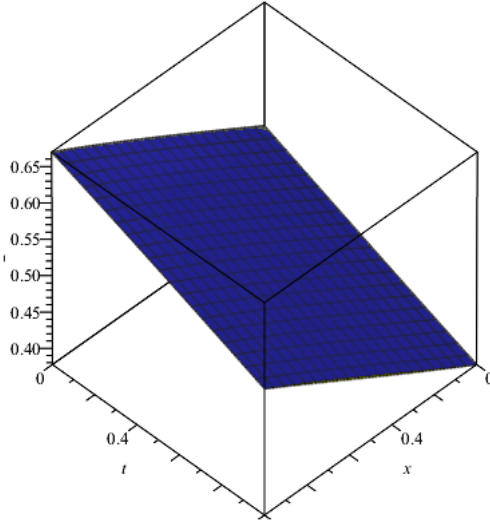
Kesin çözümü $w(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{1}{\sqrt{2}}t)\right)$ olan Problem 5.43'ün nümerik analizi için $m = p \times q$ olmak üzere $x_i = \frac{i}{p}$, $i = 1 \dots p$ ve $t_i = \frac{i}{q}$, $i = 1 \dots q$ alınmıştır. Yoğun nokta sayısı $p = 5$ ve $q = 5$ olmak üzere $m = 25$ seçilmiştir. $[0, 1]$ ve $[0, T]$ aralıkları için 10'ar test noktası kullanılmıştır. Bu değerler dikkate alınarak elde edilen yaklaşık çözüm ile mutlak hata ve göreceli hata sonuçları Tablo 5.5 ve Tablo 5.6'da sunulmuştur. Kesin çözüm ve yaklaşık çözüme dair grafik Şekil 5.3'de verilmiştir

Tablo 5.5 Problem (5.47) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM)

x	KÇ	YÇ
0.0	0.3775406688	0.3775406688
0.1	0.3942960478	0.394987414
0.2	0.4113036798	0.4126233061
0.3	0.4285259044	0.4303887019
0.4	0.4459230216	0.4482159505
0.5	0.4634536406	0.4660095224
0.6	0.4810750624	0.4836854154
0.7	0.4987436894	0.5011590502
0.8	0.5164154545	0.5183537188
0.9	0.5340462594	0.535188135
1.0	0.5515924133	0.5515924135

Tablo 5.6 Problem (5.47) görelî hata (GH), mutlak hata (MH) ve mutlak hata [120] değeri

x	GH	MH	[120] (MH)
0.1	0.001753419046	0.0006913662	0.001160000
0.2	0.003208398964	0.0013196263	0.001570000
0.3	0.004346989251	0.0018627975	0.001410000
0.4	0.005141983681	0.0022929289	0.000879000
0.5	0.005514859688	0.0025558818	0.000146000
0.6	0.005426082547	0.0026103530	0.000598000
0.7	0.004842889948	0.0024153608	0.001160000
0.8	0.003753304211	0.0019382643	0.001380000
0.9	0.002138158596	0.0011418756	0.001050000



Şekil 5.3 Problem (5.47) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği

5.5 Burgers-Fisher Denklemini

Bu bölümde Burgers ve Fisher denklemlerinin bir kombinasyonu olan Burgers-Fisher denkleminin ÜÇHM ile çözümü araştırılacaktır.

$$w_t = w_{xx} + ww_x + w(1 - w), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (5.53)$$

şeklindeki Burgers-Fisher denklemini ,

$$\begin{aligned} w(0, t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{5}{8}t\right) \\ w(1, t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left\{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{5}{2}t\right)\right\} \end{aligned} \quad t > 0 \quad (5.54)$$

ile verilen sınır şartları ve

$$w(x, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{4}\right), \quad 0 < x < 1 \quad (5.55)$$

başlangıç şartı ile birlikte göz önüne alalım. Problemin kesin çözümü

$$w(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left\{\frac{1}{4}\left(x + \frac{5}{2}t\right)\right\}$$

şeklindedir.

5.5.1 Homojenleştirme

Kabul edelim ki (5.53) probleminin genel çözümü

$$w(x, t) = u(x, t) - F(x, t) \quad (5.56)$$

formunda olsun. (5.56) fonksiyonunun gerekli türevleri alınarak (5.53)'de yerine konup bazı düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) + u(x, t)(1 - F_x(x, t) + 2F(x, t)) - F(x, t)u_x(x, t) \\ = F_{xx}(x, t) - F_t(x, t) - u(x, t)u_x(x, t) + u^2(x, t) + F(x, t)(1 + F(x, t) - F_x(x, t)) \end{aligned}$$

denkleme ulaşılır. Dönüşüm fonksiyonu olarak seçilen $F(x, t)$ 'ye (5.55) ve (5.54) ile verilen başlangıç ve sınır şartları uygulandığı takdirde homojenleştirilmiş olan $u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0$ şartlarına ulaşılmış olur. ρ , u 'nun lineer olmayan fonksiyonlarını temsil etmek üzere

$$\begin{aligned} \rho(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) = & F_{xx}(x, t) - F_t(x, t) - u(x, t)u_x(x, t) + u^2(x, t) \\ & + F(x, t)(1 + F(x, t) - F_x(x, t)) \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Böylelikle homojenleştirme süreci sonucunda

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t + u(1 - F_x + 2F) - Fu_x = \rho(x, t, u, u_x) \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.57)$$

homojen başlangıç ve sınır değer problemine ulaşılmış olur. Notasyon kalabalıklığını önlemek adına, u ve F fonksiyonlarının bağlı olduğu (x, t) değişkenleri elimine edilmiştir. Burada

$$\begin{aligned} F(x, t) = & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{2}(1-x) \tanh\left(\frac{5}{8}t\right) \\ & + x\left(\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{8}t\right)\right) \end{aligned}$$

dönüşüm fonksiyonu kullanılmıştır.

5.5.2 Yaklaşık Çözümün İnşası

Homojenleştirilme süreci sonunda ÜÇHM'nin uygulanması için elverişli hâle gelen Problem 5.57 için

$$\mathcal{L}u(x, t) := u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) + u(x, t)(1 - F_x(x, t) + 2F(x, t)) - F(x, t)u_x(x, t)$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}: {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega) \rightarrow W_2^{(2,1)}(\Omega) \quad (5.58)$$

sınırlı lineer operatörünü tanımlayalım. Böylelikle problem

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, t) = \rho(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.59)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ ve $\rho \in W_2^{(2,1)}(\Omega)$.

Teorem 5.27. $\mathcal{L}: {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega) \rightarrow W_2^{(2,1)}(\Omega)$ operatörü sınırlı ve lineerdir.

Kanıt. İspat 5.2.2'ye benzer şekilde yapılabileceğinden detaylandırılmamıştır. $\square$

Bu aşamada ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'nın ortogonal fonksiyon sistemini inşa etmek için Ω bölgesinde sayılabilir yoğun $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisini seçerek $\varphi_i(x, t) = \check{r}_{(x_i, t_i)}(x, t)$ ve $\psi_i(x, t) = \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t)$ tanımlamalarını yapalım. Burada $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}$ 'nin adjoint operatörünü ve $\check{r}$ ise $W_2^{(2,1)}(\Omega)$ uzayının üretici çekirdek fonksiyonunu temsil eder.

Teorem 5.28. *Kabul edelim ki $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi Ω bölgesinde yoğun olsun. Bu durumda $\{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^\infty \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ tam bir fonksiyon sistemi olmakla birlikte*

$$\begin{aligned} \psi_i(x, t) = & \partial_{y^2}^2 K_{(y,s)}(x, t) - \partial_s K_{(y,s)}(x, t) - K_{(y,s)}(x, t)(1 - \partial_y F(x, t) + 2F(x, t)) \\ & - F(x, t) \partial_y K_{(y,s)}(x, t)|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Kanıt. $\mathcal{L}$ operatörünün (y, s) 'nin fonksiyonlarına uygulanmış halini $\mathcal{L}_{(y,s)}$ ile temsil edelim. Çekirdeğin yeniden üretme prensibi kullanılarak

$$\begin{aligned} \psi_i(x, t) = & \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t) = \left\langle \mathcal{L}^* \varphi_i(y, s), K_{(x,t)}(y, s) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \\ = & \left\langle \varphi_i(y, s), \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(x,t)}(y, s) \right\rangle_{W_2^{(2,1)}} \\ = & \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(x,t)}(y, s) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \\ = & \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(y,s)}(x, t) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \\ = & \partial_{y^2}^2 K_{(y,s)}(x, t) - \partial_s K_{(y,s)}(x, t) - K_{(y,s)}(x, t)(1 - \partial_y F(x, t) + 2F(x, t)) \\ & - F(x, t) \partial_y K_{(y,s)}(x, t) \Big|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıkça anlaşılmaktadır ki $\psi_i(x, t) \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'dır. Şimdi kabul edelim ki her bir $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ için $\langle u(x, t), \psi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = 0$, $i = 1, 2, \dots$ olsun. O halde, $\langle u(x, t), \psi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = \langle u(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = \langle \mathcal{L}u(x, t), \varphi_i(x, t) \rangle_{W_2^{(2,1)}} = \mathcal{L}u(x_i, t_i) = 0$. $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi Ω bölgesinde yoğunken, $\mathcal{L}^{-1}$ 'den dolayı $\mathcal{L}u(x, t) = 0$ olmalıdır. Bu da $u = 0$ eşitliğini gerektirir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'nın ortonormal sitemi olan $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$, $\{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$ için Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden

$$\bar{\psi}_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x, t)$$

şeklinde bulunur. Burada γ_{ik} ortogonalizasyon katsayılarını temsil etmektedir.

Lemma 5.4. *Eğer $u(x, t) \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ ise bu durumda $\left| \frac{\partial^{r+s} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^s} \right| \leq M \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}$ ($r = 0, 1, 2, s = 0, 1$) olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti vardır.*

5.5.3 Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde çözümün nasıl elde edildiğine ve yakınsaklığa dair teoremler sunulacaktır.

Teorem 5.29. *Kabul edelim ki $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi Ω bölgesinde yoğun olsun. Eğer ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayının elemanı olan $u(x, t)$ fonksiyonu (5.59) ile verilen problemin çözümü ise bu çözüm fonksiyonu, $\rho_k := \rho(x_k, t_k, u(x_k, t_k), u_x(x_k, t_k))$ olmak üzere*

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \rho_k \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.60)$$

şeklinde ifade edilir.

Kanıt. $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sisteminin $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayında tam olması ve çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği her $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ için $\langle u(x, t), \varphi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = u(x_i, t_i)$ olması sebebiyle aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür. Böylece,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x, t), \bar{\psi}_i(x, t) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x, t), \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x, t) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_k(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \left\langle \mathcal{L}u(x, t), \check{r}_{(x_k, t_k)}(x, t) \right\rangle_{{}^oW_2^{(2,1)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \mathcal{L}u(x_k, t_k) \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \rho_k \bar{\psi}_i(x, t) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

$u(x, t)$ çözümünde serinin n . teriminden sonrakiler ihmal edilirse problemin yaklaşık çözümü

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \rho(x_k, t_k, u(x_k, t_k), u_x(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.61)$$

şeklindedir. $A_i = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \rho(x_k, t_k, u(x_k, t_k), u_x(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t)$ olmak üzere, (5.60) analitik çözümü

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\psi}_i(x, t)$$

olarak ifade edilebilir. Nümerik hesaplamalar göz önünde bulundurarak

$u_0(x_1, t_1) = u(x_1, t_1)$ alınırsa $u(x, t)$ 'nin n terim yaklaşımı

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma_{11} \rho(x_1, t_1, u_0(x_1, t_1)), \partial_x u_0(x_1, t_1), \\ A_2 &= \sum_{k=1}^2 \gamma_{2k} \rho(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k), \partial_x u_{k-1}(x_k, t_k)), \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{(n-1)k} \rho(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k), \partial_x u_{k-1}(x_k, t_k)), \\ A_n &= \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} \rho(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k), \partial_x u_{k-1}(x_k, t_k)) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i \bar{\psi}_i(x, t)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir sonraki aşama yaklaşık çözümün analitik çözüme yakınsadığını, yani $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ olduğunu göstermek olacaktır.

Teorem 5.30. *Kabul edelim ki $\|u_n(x, t)\|$ sınırlı ve denklem (5.59) tek bir çözüme sahip olsun. Eğer $\{x_i, t_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi Ω 'da yoğunsa (5.51)'de elde edilen $u_n(x, t)$ yaklaşık çözümü, (5.59)'un analitik çözümü olan $u(x, t)$ 'ye yakınsar.*

Kanıt. Teorem 5.15'in ispatına benzer şekilde kolaylıkla yapılabileceğinden detaylandırılmamıştır. $\square$

Teorem 5.31. *Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ ve $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$, aynı zamanda $\|u_n(x, t)\|_{o_{W_2^{(3,2)}}}$ sınırlı ve $\rho(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$ sürekli ise bu durumda*

$$\rho(x_n, t_n, u_{n-1}(x_n, t_n), \partial_x u_{n-1}(x_n, t_n)) \rightarrow \rho(x, t, u(x, t), \partial_x u(x, t)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Kanıt.

$$\begin{aligned} |u_{n-1}(x_n, t_n) - u(x, t)| &= |u_{n-1}(x_n, t_n) - u_{n-1}(x, t) + u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \\ &\leq |u_{n-1}(x_n, t_n) - u_{n-1}(x, t)| + |u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \\ &\leq |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n)| |x_n - x| + |\partial_t u_{n-1}(x_n, t_n)| |t_n - t| \\ &\quad + |u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n) - \partial_x u(x, t)| &= |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n) - \partial_x u_{n-1}(x, t) + \partial_x u_{n-1}(x, t) - \partial_x u(x, t)| \\ &\leq |\partial_{xx} u_{n-1}(x_n, t_n)| |x_n - x| + |\partial_{xt} u_{n-1}(x_n, t_n)| |t_n - t| \\ &\quad + |\partial_x u_{n-1}(x, t) - \partial_x u(x, t)|. \end{aligned}$$

Verilen $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ ve $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$ şartlarından

$$|u_{n-1}(x_n, t_n) - u(x, t)| \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n) - \partial_x u(x, t)| \rightarrow 0$$

elde edilir. $\rho(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\rho(x_n, t_n, u_{n-1}(x_n, t_n), \partial_x u_{n-1}(x_n, t_n)) \rightarrow \rho(x, t, u(x, t), \partial_x u(x, t)), \quad n \rightarrow \infty$$

sonucuna ulaşılır. □

5.5.4 Nümerik Sonuçlar

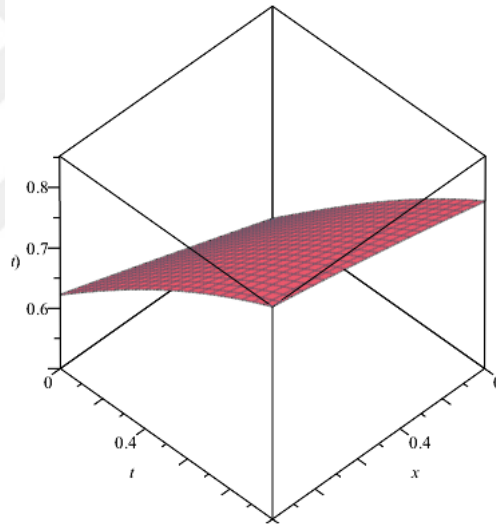
Kesin çözümü $w(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left\{ \frac{1}{4} \left(x + \frac{5}{2}t \right) \right\}$ olan Problem 5.53'ün nümerik analizi için $m = p \times q$ olmak üzere $x_i = \frac{i}{p}$, $i = 1 \dots p$ ve $t_i = \frac{i}{q}$, $i = 1 \dots q$ alınmıştır. Yoğun nokta sayısı $p = 13$ ve $q = 13$ olmak üzere $m = 169$ seçilmiştir. $[0, 1]$ ve $[0, T]$ aralıkları için 10'ar test noktası kullanılmıştır. Bu değerler dikkate alınarak elde edilen yaklaşık çözüm ile mutlak hata ve göreceli hata sonuçları Tablo 5.7 ve Tablo 5.8'de sunulmuştur. Kesin ve yaklaşık çözüme dair grafik Şekil 5.4'de verilmiştir

Tablo 5.7 Problem (5.57) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM)

x	KÇ	YÇ
0.0	0.7772998612	0.7772998612
0.1	0.7858349830	0.7859015980
0.2	0.7941296282	0.7942595858
0.3	0.8021838886	0.8023649427
0.4	0.8099984340	0.8102124286
0.5	0.8175744762	0.817800359
0.6	0.8249137318	0.8251291432
0.7	0.8320183852	0.8322015908
0.8	0.8388910504	0.8390235444
0.9	0.8455347349	0.8456033441
1.0	0.8519528020	0.8519528018

Tablo 5.8 Problem (5.57) göreli hata (GH), mutlak hata (MH) ve mutlak hata [120] değerleri

x	GH	MH	[120] (MH)
0.1	0.00008476970540	0.0000666150	0.000143000
0.2	0.0001636478421	0.0001299576	0.000194000
0.3	0.0002257014914	0.0001810541	0.000088500
0.4	0.0002641913750	0.0002139946	0.000021300
0.5	0.0002762840653	0.0002258828	0.000012100
0.6	0.0002611320332	0.0002154114	0.000573000
0.7	0.0002201941727	0.0001832056	0.000712000
0.8	0.0001579394606	0.0001324940	0.000813000
0.9	0.00008114297044	0.0000686092	0.000051500



Şekil 5.4 Problem (5.57) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği

5.6 Burgers-Huxley Denklemi

Bu bölümde Burgers ve Huxley denklemlerinin bir kombinasyonu olan

$$w_t = w_{xx} + ww_x + w(1-w)(w-1), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (5.62)$$

şeklindeki Burgers-Fisher denkleminin,

$$\begin{aligned} w(0, t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{3}{8}t\right), \\ w(1, t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left\{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{2}t\right)\right\}, \end{aligned} \quad t > 0 \quad (5.63)$$

ile verilen sınır şartları ve

$$w(x, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{4}\right), \quad 0 < x < 1 \quad (5.64)$$

başlangıç şartı ile birlikte ÜÇHM kullanılarak yaklaşık çözümü araştırılacaktır. Problemin kesin çözümü

$$w(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left\{\frac{1}{4}\left(x + \frac{3}{2}t\right)\right\}$$

şeklindedir.

5.6.1 Homojenleştirme

Kabul edelim ki (5.62) probleminin genel çözümü

$$w(x, t) = u(x, t) - H(x, t) \quad (5.65)$$

formunda olsun. (5.65) fonksiyonunun gerekli türevleri alınarak (5.62)'de yerine konup bazı düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$u_{xx} - u_t + u(-H_x - 1 - 4H - 3H^2) - u_x H = H_{xx} - H_x - uu_x - Hh_x - H - 2u^2 - 2H^2 + u^3 - 3u^2 H - H^3$$

denkleminde ulaşılır. Burada notasyon kalabalıklığını önlemek adına u ve H fonksiyonlarının bağlı oldukları (x, t) değişkenleri elimine edilmiştir. Dönüşüm fonksiyonu olarak seçilen $H(x, t)$ 'ye (5.64) ve (5.63) ile verilen başlangıç ve sınır şartları uygulandığında homojenleştirilmiş olan $u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0$ şartlarına ulaşılmış olur. σ , u 'nun lineer olmayan fonksiyonlarını temsil etmek üzere

$$\sigma(x, t, u, u_x) = H_{xx} - H_x - uu_x - Hh_x - H - 2u^2$$

olarak ifade edilebilir. Böylelikle homojenleştirme süreci sonucunda

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t + u(-H_x - 1 - 4H - 3H^2) - u_x H = \sigma(x, t, u, u_x) \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.66)$$

homojen başlangıç ve sınır değer problemine ulaşılmış olur. Burada kullanılan dönüşüm fonksiyonu $H(x, t)$

$$\begin{aligned} H(x, t) = & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{2}(1-x) \tanh\left(\frac{3}{8}t\right) \\ & + x\left(-\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}t\right)\right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

5.6.2 Yaklaşık Çözümün İnşası

Homojenleştirilme süreci sonunda ÜÇHM'nin uygulanması için elverişli hâle gelen Problem 5.66 için

$$\mathcal{L}u(x, t) := u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) + u(x, t)(-H_x(x, t) - 1 - 4H(x, t) - 3H^2(x, t)) - u_x(x, t)H(x, t)$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}: {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega) \rightarrow W_2^{(2,1)}(\Omega) \quad (5.67)$$

sınırlı lineer operatörünü tanımlayalım. Böylelikle problem

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, t) = \sigma(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.68)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ ve $\sigma \in W_2^{(2,1)}(\Omega)$.

Teorem 5.32. $\mathcal{L}: {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega) \rightarrow W_2^{(2,1)}(\Omega)$ operatörü sınırlı ve lineerdir.

Kanıt. 5.2.2'ye benzer şekilde yapılabileceğinden detaylandırılmamıştır. $\square$

Bu aşamada ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'nin ortogonal fonksiyon sistemini inşa etmek için Ω bölgesinde sayılabilir yoğun $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisini seçerek $\varphi_i(x, t) = \check{r}_{(x_i, t_i)}(x, t)$ ve $\psi_i(x, t) = \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t)$ tanımlamalarını yapalım. Burada $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}$ 'nin adjoint operatörünü ve $\check{r}$ ise $W_2^{(2,1)}(\Omega)$ uzayının üretici çekirdek fonksiyonunu temsil eder.

Teorem 5.33. *Kabul edelim ki $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi Ω bölgesinde yoğun olsun. Bu durumda $\{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^\infty \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ tam bir fonksiyon sistemi olmakla birlikte*

$$\begin{aligned} \psi_i(x, t) = & \partial_{y^2}^2 K_{(y,s)}(x, t) - \partial_y K_{(y,s)}(x, t)H(x, t) - \partial_s K_{(y,s)}(x, t) \\ & - (\partial_y H(x, t) + 4H(x, t) + 3H^2(x, t) + 1)K_{(y,s)}(x, t)|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Kanıt. $\mathcal{L}$ operatörünün (y, s) 'nin fonksiyonlarına uygulanmış halini $\mathcal{L}_{(y,s)}$ ile temsil edelim. Çekirdeğin yeniden üretme prensibi kullanılarak

$$\begin{aligned} \psi_i(x, t) = & \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t) = \langle \mathcal{L}^* \varphi_i(y, s), K_{(x,t)}(y, s) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \\ = & \langle \varphi_i(y, s), \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(x,t)}(y, s) \rangle_{W_2^{(2,1)}} \\ = & \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(x,t)}(y, s)|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \\ = & \mathcal{L}_{(y,s)} K_{(y,s)}(x, t)|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \\ = & \partial_{y^2}^2 K_{(y,s)}(x, t) - \partial_y K_{(y,s)}(x, t)H(x, t) - \partial_s K_{(y,s)}(x, t) \\ & - (\partial_y H(x, t) + 4H(x, t) + 3H^2(x, t) + 1)K_{(y,s)}(x, t)|_{(y,s)=(x_i, t_i)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıkça anlaşılmaktadır ki $\psi_i(x, t) \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'dır. Şimdi kabul edelim ki her bir $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ için $\langle u(x, t), \psi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = 0$, $i = 1, 2, \dots$ olsun. O halde, $\langle u(x, t), \psi_i(x, t) \rangle_W = \langle u(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = \langle \mathcal{L}u(x, t), \varphi_i(x, t) \rangle_{W_2^{(2,1)}} = \mathcal{L}u(x_i, t_i) = 0$. $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi Ω bölgesinde yoğunken, $\mathcal{L}^{-1}$ 'den dolayı $\mathcal{L}u(x, t) = 0$ olmalıdır. Bu da $u = 0$ eşitliğini gerektirir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ 'nın ortonormal sitemi olan $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$, $\{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$ için Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden

$$\bar{\psi}_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x, t)$$

biçiminde bulunur. Burada γ_{ik} ortogonalizasyon katsayılarını temsil etmektedir.

Lemma 5.5. *Eğer $u(x, t) \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ ise bu durumda $\left| \frac{\partial^{r+s} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^s} \right| \leq M \|u\|_{{}^oW_2^{(3,2)}}$ ($r = 0, 1, 2, s = 0, 1$) olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti vardır.*

5.6.3 Metodun Uygulanışı ve Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde çözümün nasıl elde edildiğine ve yakınsaklığa dair teoremler sunulacaktır.

Teorem 5.34. *Kabul edelim ki $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi Ω bölgesinde yoğun olsun. Eğer ${}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayının elemanı olan $u(x, t)$ fonksiyonu (5.68) ile verilen problemin çözümü ise bu çözüm fonksiyonu, $\sigma_k := \sigma(x_k, t_k, u(x_k, t_k), u_x(x_k, t_k))$ olmak üzere*

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \sigma_k \bar{\psi}_i(x, t) \quad (5.69)$$

şeklinde ifade edilir.

Kanıt. $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$ ortonormal sisteminin $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ uzayında tam olması ve çekirdeğin yeniden üretme prensibi gereği her $u \in {}^oW_2^{(3,2)}(\Omega)$ için $\langle u(x, t), \varphi_i(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} = u(x_i, t_i)$ olması sebebiyle aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür. Böylece,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{i=1}^\infty \left\langle u(x, t), \bar{\psi}_i(x, t) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \left\langle u(x, t), \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \psi_k(x, t) \right\rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle u(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_k(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \langle \mathcal{L}u(x, t), \check{r}_{(x_k, t_k)}(x, t) \rangle_{{}^oW_2^{(2,1)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \mathcal{L}u(x_k, t_k) \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \sigma_k \bar{\psi}_i(x, t) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

$u(x, t)$ çözümünde serinin n . teriminden sonrakiler ihmal edilirse problemin yaklaşık çözümü şu şekilde ifade edilebilir:

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \sigma(x_k, t_k, u(x_k, t_k), u_x(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t). \quad (5.70)$$

(5.69) analitik çözümü $A_i = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} \sigma(x_k, t_k, u(x_k, t_k), u_x(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t)$ olmak üzere,

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\psi}_i(x, t)$$

şeklinde yazılabilir. Nümerik hesaplamalar göz önünde bulundurarak $u_0(x_1, t_1) = u(x_1, t_1)$ alınırsa $u(x, t)$ 'nin n terim yaklaşımı

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma_{11} \sigma(x_1, t_1, u_0(x_1, t_1), \partial_x u_0(x_1, t_1)), \\ A_2 &= \sum_{k=1}^2 \gamma_{2k} \sigma(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k), \partial_x u_{k-1}(x_k, t_k)), \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{(n-1)k} \sigma(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k), \partial_x u_{k-1}(x_k, t_k)), \\ A_n &= \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} \sigma(x_k, t_k, u_{k-1}(x_k, t_k), \partial_x u_{k-1}(x_k, t_k)) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i \bar{\psi}_i(x, t)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir sonraki aşama yaklaşık çözümün analitik çözüme yakınsadığını, yani $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ olduğunu göstermek olacaktır.

Teorem 5.35. *Kabul edelim ki $\|u_n(x, t)\|$ sınırlı ve denklem (5.68) tek bir çözüme sahip olsun. Eğer $\{x_i, t_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi Ω 'da yoğunsa (5.70)'de elde edilen $u_n(x, t)$ yaklaşık çözümü, (5.68)'in analitik çözümü olan $u(x, t)$ 'ye yakınsar.*

Kanıt. Teorem 5.15'in ispatına benzer şekilde kolaylıkla yapılabileceğinden detaylandırılmamıştır. $\square$

Teorem 5.36. *Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ ve $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$, aynı zamanda $\|u_n(x, t)\|_{W_2^{(3,2)}}$ sınırlı ve $\sigma(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$ sürekli ise bu durumda*

$$\sigma(x_n, t_n, u_{n-1}(x_n, t_n), \partial_x u_{n-1}(x_n, t_n)) \rightarrow \sigma(x, t, u(x, t), \partial_x u(x, t)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Kanıt.

$$\begin{aligned}
|u_{n-1}(x_n, t_n) - u(x, t)| &= |u_{n-1}(x_n, t_n) - u_{n-1}(x, t) + u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \\
&\leq |u_{n-1}(x_n, t_n) - u_{n-1}(x, t)| + |u_{n-1}(x, t) - u(x, t)| \\
&\leq |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n)| |x_n - x| + |\partial_t u_{n-1}(x_n, t_n)| |t_n - t| \\
&\quad + |u_{n-1}(x, t) - u(x, t)|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n) - \partial_x u(x, t)| &= |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n) - \partial_x u_{n-1}(x, t) + \partial_x u_{n-1}(x, t) - \partial_x u(x, t)| \\
&\leq |\partial_{xx} u_{n-1}(x_n, t_n)| |x_n - x| + |\partial_{xt} u_{n-1}(x_n, t_n)| |t_n - t| \\
&\quad + |\partial_x u_{n-1}(x, t) - \partial_x u(x, t)|.
\end{aligned}$$

Verilen $n \rightarrow \infty$ iken $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ ve $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$ şartlarından

$$|u_{n-1}(x_n, t_n) - u(x, t)| \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad |\partial_x u_{n-1}(x_n, t_n) - \partial_x u(x, t)| \rightarrow 0$$

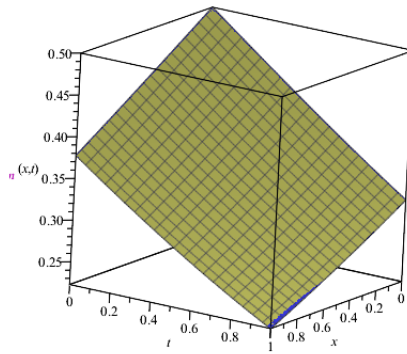
elde edilir. $\sigma(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\sigma(x_n, t_n, u_{n-1}(x_n, t_n), \partial_x u_{n-1}(x_n, t_n)) \rightarrow \sigma(x, t, u(x, t), \partial_x u(x, t)), \quad n \rightarrow \infty$$

sonucuna ulaşılır. □

5.6.4 Nümerik Sonuçlar

Kesin çözümü $w(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left\{ \frac{1}{4} \left(x + \frac{3}{2} t \right) \right\}$ olan Problem 5.62'in nümerik analizi için $m = p \times q$ olmak üzere $x_i = \frac{i}{p}$, $i = 1 \dots p$ ve $t_i = \frac{i}{q}$, $i = 1 \dots q$ alınmıştır. Yoğun nokta sayısı $p = 8$ ve $q = 8$ olmak üzere $m = 64$ seçilmiştir. $[0, 1]$ ve $[0, T]$ aralıkları için 10'ar test noktası kullanılmıştır. Bu değerler dikkate alınarak elde edilen yaklaşık çözüm ile mutlak hata ve göreceli hata sonuçları Tablo 5.9 ve Tablo 5.10'da sunulmuştur. Kesin ve yaklaşık çözüme dair grafik Şekil 5.5'de verilmiştir.



Şekil 5.5 Problem (5.47) için kesin çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği

Tablo 5.9 Problem (5.66) kesin çözüm (KÇ), yaklaşık çözüm (ÜÇHM)

x	KÇ	YÇ
0.0	0.3208213008	0.3208213008
0.1	0.3100255188	0.3099402885
0.2	0.2994328576	0.2993041874
0.3	0.2890504974	0.2889237511
0.4	0.2788848220	0.2787954654
0.5	0.2689414214	0.2689055863
0.6	0.2592251008	0.2592335780
0.7	0.2497398944	0.2497734308
0.8	0.2404890830	0.2405271043
0.9	0.2314752165	0.2314997288
1.0	0.2227001388	0.2227001388

Tablo 5.10 Problem (5.66) görelî hata (GH), mutlak hata (MH) ve mutlak hata [120] değeri

x	GH	MH	[120] (MH)
0.1	0.0002749138211	0.0000852303	0.000383000
0.2	0.0004297130283	0.0001286702	0.000476000
0.3	0.0004384918938	0.0001267463	0.000342000
0.4	0.0003204068237	0.0000893566	0.000063200
0.5	0.0001332450011	0.0000358351	0.000277000
0.6	0.00003270208006	0.0000084772	0.000597000
0.7	0.0001342853134	0.0000335364	0.000813000
0.8	0.0001580999001	0.0000380213	0.000084300
0.9	0.0001580999001	0.0000245123	0.000060500

6 SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Kompleks yapıdaki kısmi türev içerenler başta olmak üzere diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmekteki zorluk ve bazen imkânsızlık nümerik yöntemlere artan ilginin başlıca sebebi olmuştur. Problemler çeşitli ögelerin etkisiyle doğrusal hâlden doğrusal olmayana evrildikçe, türevler düşük mertebeden yüksek mertebeye doğru ilerledikçe, homojen olmayan başlangıç ve sınır şartları gözetilmek durumunda kaldıkça çözüme ulaşmak o denli zorlaşmaktadır. Bu nedenle üzerinde çalışılan modelin davranışını anlamak ve yorumlayabilmek adına geliştirilen yarı analitik veya analitik olmayan yaklaşımların ne denli güvenilir sonuçlar veriyor olduğu hayli önemlidir.

Bu doktora tez çalışmasının esas amacı, bir çok disiplinde önemli rol oynayan hem homojen hem de doğrusal olmayan yüksek mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini üretici çekirdek metodu ile elde ederek, metodun bu yapıdaki problemlerde ne kadar elverişli olduğunu ve yaklaşık çözümlerin kesin çözümlere ne kadar yakınsadığını araştırmaktır.

Araştırmanın hedefine binaen öncelikle yüksek mertebeden adi türevli denklem içeren modeller göz önüne alındı. Metodun bu modellerdeki etkinliğini araştırmak için

- homojen olan fakat doğrusal olmayan
- hem doğrusal hem homojen olmayan

başlangıç ve sınır değer problemleri incelendi. İki farklı sınır değer problemi ve üç farklı başlangıç değer problemi farklı tanım aralıklarıyla değerlendirildi. Homojen olmayan problemlerin başlangıç ve sınır şartları özel dönüşüm fonksiyonları yardımıyla homojen hâle getirildi. Herbir problemin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı, denklemlerin türevleri baz alınarak inşa edildi. Her bir uzay için tek bir şekilde belirli olan üretici çekirdek fonksiyonları uzaylara ait iç çarpım yardımıyla bulunarak; bu çekirdek fonksiyonları, sınırlı lineer operatörler ve ortonormal kümeler yardımıyla çözümün teorik olarak seri hâlinde nasıl ifade edildiği ispatlandı. Yaklaşık çözümün kesin çözüme olan yakınsaklık durumunun teorik olarak incelenmesinin yanında tüm nümerik sonuçlar tablo ve grafikler eşliğinde görsel olarak sunuldu. Metodla elde edilen çözümlerin mevcut kesin çözümlere ciddi oranda yakın sonuç verdiği görüldü. Yaklaşık çözüm hesabı analizlerinde her problem için güvenli adım aralığının değiştiği, $x_i = \frac{i}{M}$, $i = 1, \dots, M$ olmak üzere kimi problemler için $m = 20$ kimi problemler içinse $M = 100$ yoğun nokta seçildiğinde daha iyi sonuç alındığı ve mutlak hataların buna paralel olarak ciddi oranda küçüldüğü gözlemlendi. Bütün bunlar açıkça göstermiştir ki, Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu adi türevli diferansiyel denklemler için oldukça yüksek hassasiyetli ve doğru sonuçlar vermektedir. Referans olarak alınan LS-SVM çözümleri ile kıyaslandığında ortaya çıkan tablo bunu onaylamaktadır. Bu sonuçlar [121]'de yayınlanmıştır.

Tezin ikinci ana hedefi olan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini araştırmak için aşağıdaki denklemler sırasıyla göz önüne alındı:

- Burgers Denklemi: $w_t = w_{xx} - ww_x$, $0 < x < 1$, $t > 0$
- Fisher Denklemi: $w_t = w_{xx} + w(1 - w)$, $0 < x < 1$, $t > 0$
- Huxley Denklemi: $w_t = w_{xx} + w(1 - w)(w - 1)$, $0 < x < 1, t > 0$
- Burgers- Fisher Denklemi: $w_t = w_{xx} + ww_x + w(1 - w)$, $0 < x < 1$, $t > 0$
- Burgers- Huxley Denklemi: $w_t = w_{xx} + ww_x + w(1 - w)(w - 1)$, $0 < x < 1, t > 0$

Bu denklemlerin yaklaşık çözüm teorisini adi diferansiyel denklemlerin çözüm tekniğinden ayıran en bariz öge, çözümün iki değişkenli (binary) Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı'nda elde ediliyor oluşu ve buna bağlı olarak üretici çekirdek fonksiyonlarının yapılarının değişmesidir. Tezde önerilen metodun geçerliliğini araştırmak için yukarıda sözü edilen herbir denklemin yaklaşık çözümleri, denklemlere uygun şekilde inşa edilmiş olan $W_2^{(3,2)}$ üretici çekirdekli uzayında ÜÇHM kullanılarak elde edildi. Başlangıç ve sınır şartları homojen olmadığı için metoda uygun hâle gelmeleri adına her probleme has ayrı dönüşüm fonksiyonları eliyle homojenleştirildi. $m = p \times q$ olmak üzere $x_i = \frac{i}{p}$, $i = 1 \dots p$ ve $t_i = \frac{i}{q}$, $i = 1 \dots q$ alınarak, yoğun nokta sayıları $m = 64$, $m = 100$, $m = 25$ seçildi. $[0, 1]$ ve $[0, T]$ aralıkları için 11 test noktası kullanıldı.

Sonuçlar değerlendirildiğinde Burgers ve Fisher denklemlerinden, bu denklemlerin birbiriyle ve Huxley denklemiyle olan kombinasyonlarına göre çok daha iyi nümerik sonuçlar elde edildiği görüldü. Bunda Huxley, Burgers-Fisher ve Burgers-Huxley denklemlerinde lineerliği bozan fonksiyonların yapısı, bu fonksiyonların derecelerinin artışı rol oynamakla birlikte homojenleştirme için kullanılan dönüşüm fonksiyonu da çözümü etkilemektedir. Buna rağmen herbir denklemin yaklaşık çözümlerinin kesin çözümlere iyi oranda yakınsadığı ispatlandı. Burgers denkleminin maksimum mutlak hatası 7.0399×10^{-6} , Fisher denkleminin 5.08509×10^{-5} , Huxley denkleminin 2.610353×10^{-3} , Burgers- Fisher denkleminin 2.154114×10^{-4} , Burgers-Huxley denkleminin 1.28670210^{-4} olarak gözlemlendi. Huxley denklemindeki mutlak hata Burgers ve Fisher'e kıyasla görece daha fazla olmasına rağmen, yine de yaklaşık çözümün kesin çözüme iyi yakınsadığı sonucuna ulaşıldı. Huxley denklemi için, referans alınan kollokasyon metodunun maksimum mutlak hatanın 1.57×10^{-3} olduğu gözlemlendi. Bu sonuçlar [122]'de yayınlandı.

Netice itibarıyla, adi ve kısmi türevli denklemlerin yaklaşık çözümlerinin Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı Metodu ile bulunmasının amaçlandığı bu çalışmada, ele alınan problemlerin yaklaşık çözümleri başarılı bir şekilde elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, ÜÇHU yönteminin lineer ve homojen olmayan adi ve kısmi türev içeren başlangıç ve sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri için uygulanabilir olduğunu, güvenilir sonuçlar verdiğini doğrulamıştır. Metodun homojen olmayan başlangıç ve sınır şartları ile kolaylıkla uyumlandığı, büyük işlem hacmi gerektirmediği ve buna bağlı olarak bir çok nümerik yöntemle ve özellikle analitik olanlara göre çözüme daha hızlı ulaştırdığı görülmüştür. Metodun, çok yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerde türevin mertebesi yükseldikçe çözüm için işlem hacmi arttığından fazla elverişli olmayabileceği, bu

denklemlerin homojenleştirme süreçlerinin adi diferansiyel denklemlere göre daha çok vakit aldığı dezavantajlar olarak gözlenmiştir.

Bu çalışmayı yapmak, uygulamada mühim rolleri olan adi ve kısmi türevli denklemlerin çözümlerinin alternatif yöntemlere göre daha iyi sonuçlar elde edilecek bir metodla uyumlu olup olmayacağını görme hedefinden dolayı önemliydi. Üretici Çekirdekli Hilbert Uzayı metodu çeşitli problemlere uygulandı ve görüldü ki bu metotla ulaşılan sonuçlar oldukça güvenilir olmakla birlikte literatüre katkı sağlayacak niteliktedir. Metot, uygulamadaki elverişliliği ve çözüme hızlı ulaştırması itibarıyla kompleks problemlerde dahi güvenilir sonuçlar veren kuvvetli bir teknik olarak literatürde yer edinmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] Strauss, W. A. (2007). *Partial Differential Equations*, John Wiley Sons, USA
- [2] Butcher, J. C. (2000). *Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 125, 1-29.
- [3] Zaremba, S. (1907). L'equation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques, *Bull Intern Acad Sci Cracovie*, C.1, 147-196.
- [4] Zaremba, S. (1908). Sur le calcul numerique des fonctions demandees dan le probleme de dirichlet et le probleme hydrodynamique, *Bull Intern Acad Sci Cracovie*, C.1, 125-195.
- [5] Mercer, J. (1909). Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Series A, 209, 415-446.
- [6] Moore, E. H. (1916). On properly positive Hermitian matrices, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 23, 66-67.
- [7] G. Szego. (1921). Ueber orthogonale Polynome, die zu elner gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehoren, *Math. Z.*, 9, 218-270.
- [8] Bergman, S. (1922). Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebeneund des Raumes nach Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.*, 86, 238-271.
- [9] Bochner, S. (1932). *Vorlesungen ueber Fourliersche Integrale*, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.
- [10] Bergman S. (1930). Üeber Kurvenintegale von Funktionen zweier komplexen Veranderlichen, die Differentialgleichungen befriedigen, *Math.Z.* 32, 386-406.
- [11] Bergman S. (1937). Zur theorie der funktion, die eine linear partielle differentialgleichung berriedigen. *Mat. Sb.* 44, 1169-1198.
- [12] Bergman S. (1937). Sur un lien entre lal th ´eorie des equations aux derives partielles elliptiques et celle des fonctions d'une variable complexe, *C.R. Acad. Sci.*, 205, 1198-1200.
- [13] Bergman S. (1940). The approximation of functions satisfying a linear partial differential equation, *Duke Math.J.*, 6, 537-561.
- [14] Bergman, S. (1950). The Kernel Function and Conformal Mapping, *New York: American Mathematical Society*
- [15] Aroszajn, N. (1950). Theory of reproducing kernels, *Transactions of the American Mathematical Society*, 68(3), 337-404.
- [16] Schwartz, L. (1964). Sous-espaces hilbertines d'espaces vectoriels topologiueques etnoyaux associes(noyaux reproduisants), *J. Anal. Math.*, 13, 115-256.
- [17] Parzen, E. (1959). Statistical inference on time series by rkhs methods, *In Proceedings 12th Biennial Seminar (R. Pyke, ed.) Canadian Mathematical Congress*, Montreal, 1-37.
- [18] Larkin F.M. (1992). Optimal approximation in Hilbert space with reproducing kernel function, *Math.Comp.*, 22(4), 911-921.
- [19] Saitoh, S.(1988.) *Theory of Reproducing Kernels and Its Applications*, Longman Scientific and Technical
- [20] Wahba, G. (2003). Reproducing kernel Hilbert spaces - two brief reviews, *Proceedings of the 13th IFAC Symposium on System Identification*, 549-559.
- [21] Alpay, D. (2003). *Reproducing Kernel Spaces and Applications*, Birkhäuser, Basel. <http://public.ebookcentral.proquest.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=3087876>
- [22] Berlinet, A. ve Thomas-Agnan, C. (2004). *Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics*, Kluwer

- [23] Steinwart, I.; Christmann, A. (2008). *Support Vector Machines*, Information Science and Statistics. Springer
- [24] Szafraniec, F. H. (2015). *The Reproducing Kernel Property and Its space: The Basics*, Springer, Basel. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0667-1-65>
- [25] Paulsen, V. I.; Raghupathi, M. (2016). *An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces*, Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781316219232>
- [26] Cucker, F.; Smale, S. (2001). On the mathematical foundations of learning, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(1), 1–49.
- [27] Bach, F. R.; Jordan, M. I. (2002). Kernel independent component analysis, *Journal of Machine Learning Research*, 3, 1–48.
- [28] Hofmann, T.; Schölkopf, B.; Smola, A. J. (2008). Kernel methods in machine learning, *The Annals of Statistics*, 36(3), 1171–1220. <https://doi.org/10.1214/009053607000000677>
- [29] Geng, F.; Cui, M. (2007). Solving a nonlinear system of second order boundary value problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 327(2), 1167–1181. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.05.011>
- [30] Cui, M.; Geng, F. (2007). Solving singular two-point boundary value problem in reproducing kernel space, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205(1), 6–15. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.04.037>
- [31] Geng, F.; Cui, M. (2007). Solving singular nonlinear second-order periodic boundary value problems in the reproducing kernel space, *Applied Mathematics and Computation*, 192(2), 389–398. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.03.016>
- [32] Yang, L.-H.; Lin, Y. (2008). Reproducing kernel methods for solving linear initial-boundary-value problems, *Electronic Journal of Differential Equations*, 29, 1–11.
- [33] Wang, Y.; Chao, L. (2008). Using reproducing kernel for solving a class of partial differential equation with variable-coefficients, *Applied Mathematics and Mechanics*, 29(1), 129–137. <https://doi.org/10.1007/s10483-008-0115-y>
- [34] Geng, F. (2009). A new reproducing kernel Hilbert space method for solving nonlinear fourth-order boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 213(1), 163–169. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.02.053>
- [35] Syam, M. I. (2017). An Efficient Method for Solving Regular Variable, Fractional Sturm-Liouville Problems, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 3(4), 305–321. <https://doi.org/10.18576/pfda/030406>
- [36] Bakhtiari, P., Abbasbandy, S. ve Van Gorder, R. A. (2018). Solving the Dym initial value problem in reproducing kernel space, *Numerical Algorithms*, 78(2), 405–421. <https://doi.org/10.1007/s11075-017-0381-2>
- [37] Abu Arqub, O.; Al-Smadi, M.; Momani, S. (2012). Application of Reproducing Kernel Method for Solving Nonlinear Fredholm-Volterra Integro-differential Equations, *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 1–16. <https://doi.org/10.1155/2012/839836>
- [38] Wang, Y.; Chaolu, T.; Chen, Z. (2010). Using reproducing kernel for solving a class of singular weakly nonlinear boundary value problems, *International Journal of Computer Mathematics*, 87(2), 367–380. <https://doi.org/10.1080/00207160802047640>
- [39] Akgül, A. ve Grow, D. (2019). Existence of unique solutions to the telegraph equation in binary reproducing kernel Hilbert spaces, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 28, 715–744. <https://doi.org/10.1007/s12591-019-00453-3>
- [40] Yang, L.; Cui, M. (2006). New algorithm for a class of nonlinear integro-differential equations in the reproducing kernel space, *Applied Mathematics and Computation*, 174(2), 942–960. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.05.026>

- [41] Yang, L.-H.; Shen, J.-H.; Wang, Y. (2012). The reproducing kernel method for solving the system of the linear Volterra integral equations with variable coefficients, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(9), 2398-2405. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.11.026>
- [42] Jiang W.; Tian T.(2015). Numerical solution of nonlinear Volterra integro-differential equations of fractional order by the reproducing kernel method, *Applied Mathematical Modelling*,39(16), 4871–4876.
- [43] Alvandi, A.; Paripour, M. (2016). The combined reproducing kernel method and Taylor series to solve nonlinear Abel’s integral equations with weakly singular kernel, *Cogent Mathematics*, 3(1), 1-13. <https://doi.org/10.1080/23311835.2016.1250705>
- [44] Farzaneh Javan, S.; Abbasbandy, S.; Fariborzi Araghi, M. A. (2017). Application of reproducing kernel hilbert space method for solving a class of nonlinear integral equations, *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 1-10. <https://doi.org/10.1155/2017/7498136>
- [45] Kashkari B. S. H. and M. I. Syam.(2018). Reproducing kernel method for solving nonlinear fractional Fredholm integrodifferential equation, *Complexity*, 1–7.
- [46] Mei, L. ve Lin, Y. (2019). Simplified reproducing kernel method and convergence order for linear Volterra integral equations with variable coefficients, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 346, 390-398. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.07.027>
- [47] Hao, T.; Song, S. (2015). Solving coupled Lane-Emden equations arising in catalytic diffusion reactions by reproducing kernel Hilbert space method, *International conference on Applied Science and Engineering Innovation*, Zhengzhou, China. <https://doi.org/10.2991/asei-15.2015.105>
- [48] Foroutan, M., Ebadian, A., Asadi, R. (2018). Reproducing kernel method in Hilbert spaces for solving the linear and nonlinear four-point boundary value problems, *International Journal of Computer Mathematics* 95, 2128-2142 .
- [49] Mokhtari, R.; Toutian Isfahani, F.; Mohammadi, M. (2012). Reproducing kernel method for solving nonlinear differential-difference equations *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 1-10. <https://doi.org/10.1155/2012/514103>
- [50] Akgül, A. (2020). A new application of the reproducing kernel method, *Discrete Continuous Dynamical Systems - S*, 14(7), 2041-205. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2020261>
- [51] Xu, M.-Q, Lin, Y.-Z. (2016). Simplified reproducing kernel method for fractional differential equations with delay, *Applied Mathematics Letters*, 52, 156-161. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.09.004>
- [52] Li, X.; Wu, B. (2017). A new reproducing kernel method for variable order fractional boundary value problems for functional differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 311, 387-393. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.08.010>
- [53] Syam M. I., Al-Mdallal Q. M., Al-Refai M.(2017). A Numerical method for solving a class of fractional Sturm-Liouville eigenvalue problems, *Communications in Numerical Analysis*, 2, 217–232 .
- [54] Sakar, M. G.; Akgül, A.; Baleanu, D. (2017). On solutions of fractional Riccati differential equations, *Advances in Difference Equations*, 2017(1), 39. <https://doi.org/10.1186/s13662-017-1091-8>
- [55] Mei, L. (2020). A novel method for nonlinear impulsive differential equations in broken reproducing kernel space, *Acta Mathematica Scientia*, 40(3), 723-733. <https://doi.org/10.1007/s10473-020-0310-7>
- [56] Niu, J., Sun, L., Xu, M. ve Hou, J. (2020). A reproducing kernel method for solving heat conduction equations with delay, *Applied Mathematics Letters*, 100, 106036. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.106036>

- [57] Yao, H. (2011). Reproducing Kernel method for the solution of nonlinear hyperbolic telegraph equation with an integral condition *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(4), 867-886. <https://doi.org/10.1002/num.20558>
- [58] Azarnavid, B.; Parvaneh, F.; Abbasbandy, S. (2015). Picard-reproducing kernel hilbert space method for solving generalized singular nonlinear lane-emden type equations, *Mathematical Modelling and Analysis*, 20(6), 754-767. <https://doi.org/10.3846/13926292.2015.1111953>
- [59] Abdollazadeh, A.; Moradi, F.; Pourbashash, H. (2016). New implementation of reproducing kernel method for solving functional-differential equations, *Applied Mathematics*, 07(10), 1074-1081. <https://doi.org/10.4236/am.2016.710095>
- [60] Foroutan, M., Asadi, R. ve Ebadian, A. (2019). A reproducing kernel Hilbert space method for solving the nonlinear three-point boundary value problems, *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 32(3), 25-73. <https://doi.org/10.1002/jnm.2573>
- [61] Emamjome, M., Azarnavid, B. ve Ghehsareh, H. R. (2019). A reproducing kernel Hilbert space pseudospectral method for numerical investigation of a two-dimensional capillary formation model in tumor angiogenesis problem, *Neural Computing and Applications*, 31(7), 2233-2241. <https://doi.org/10.1007/s00521-017-3184-4>
- [62] Attia, N., Akgül, A., Seba, D. ve Nour, A. (2020). Reproducing kernel Hilbert space method for the numerical solutions of fractional cancer tumor models, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1-22. <https://doi.org/10.1002/mma.6940>
- [63] Xu, M., Tohidi, E. (2021). A Legendre reproducing kernel method with higher convergence order for a class of singular two-point boundary value problems, *Journal of Applied Mathematics and Computing*. <https://doi.org/10.1007/s12190-020-01494-6>
- [64] Allahviranloo, T., Sahihi, H. (2021). Reproducing kernel method to solve fractional delay differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 400, 126095. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126095>
- [65] Maddox, I. J. (1970). *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, New York
- [66] Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, London-Sydney
- [67] Soykan, Y.(2012). *Fonksiyonel Analiz*, Nobel Yay., İstanbul
- [68] Ponnusamy, S. (2002) . *Foundations of Functional Analysis*, Alpha Science International Ltd., England.
- [69] Rynne, B. P., Youngson M. A. (2000). *Linear Functional Analysis*, Springer, London
- [70] Debnath, L., Mikusinski, P. (1990). *Introduction to Hilbert Space with Application*, Academic Press, USA.
- [71] Royden, H. L. (1988). *Real Analysis*, Macmillan Publishing, New York
- [72] Cui M. ve Lin Y. (2009). *Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space*, New York: Nova Science Publishers
- [73] Brown, A. L., Page, A. (1970). *Elements of Functional Analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, London
- [74] Curtis, C. W. (1984). *Linear Algebra an Introductory Approach*, Springer, New York
- [75] Coddington, A. ve Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Companies. <https://books.google.com.tr/books?id=LvNQAAAAAMAAJ>
- [76] Boyce W. E. , DiPrima R. C. (2001), *Elementary differential equations and boundary value problems*, John Wiley and Sons, Inc.
- [77] Atkinson, K., Han W., Stewart D.(2009) *Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc.

- [78] Logan, J. D. (2015) . *Applied Partial Differential Equations*, Springer International Publishing, USA
- [79] Cain, J. W. (2010) *Ordinary and Partial Differential Equations: An Introduction to Dynamical Systems*, Center for Teaching Excellence, Virginia
- [80] Ewans, L.C. (1997). *Partial Differential Equations*, AMS, Berkeley
- [81] Brezinski, C. (2001). *Numerical Analysis: Historical Developments in the 20th Century*, Elsevier. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-10776-6>
- [82] Archibald, T., Fraser, C. ve Grattan-Guinness, I. (2004). *The History of Differential Equations, Oberwolfach Reports*, 2729-2794. <https://doi.org/10.4171/OWR/2004/51>
- [83] Krishnachandran, V. N. (2020). *Differential Equations: A Historical Refresher*, ArXiv:2012.06938 [Math]. <http://arxiv.org/abs/2012.06938>
- [84] Sell, G.R.(1965). On the Fundamental Theory of Ordinary Differential Equations, *Journal of Differential Equations* 1, 370–392.
- [85] Hoppensteadt, F. (1971). Properties of solutions of ordinary differential equations with small parameters. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 24(6), 807–840.
- [86] Shoichiro N. (1981). *Applied Numerical Methods With Software*, Prentice Hall, New Jersey, 303-308.
- [87] Horn, M.K. (1983). Fourth- and fifth-order, scaled Runge-Kutta algorithms for treating dense output, *SI AM J. Numer. Analysis*, 20, 558-568.
- [88] Fox, L. and Mayers, D. F. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Chapman and Hall, 1987.
- [89] Adomian, G. (1986). *Nonlinear Stochastic Operator Equations*, Academic Press, San Diego.
- [90] Menahem F. ve Abraham K. (1994) *Fundamentals of Computer Numerical Analysis*, 409-422.
- [91] Wazwaz, A.M. (2001). The numerical solution of fifth-order boundary value problems by the decomposition method, *J. Comput. Appl. Math.* 136(1–2), 259–270.
- [92] Al-Rabahi, Z. A., Hasan, Y. Q. (2020). New Modified Adomian Decomposition Method for Boundary Value Problems of Higher-order Ordinary Differential Equation, *Asian Research Journal of Mathematics*, 20-37. <https://doi.org/10.9734/arjom/2020/v16i330178>
- [93] Othman, S. G., Hasan, Y. Q. (2020). Solving Ordinary Differential Equation of Higher Order by Adomian Decomposition Method, *Asian Journal of Probability and Statistics*, 44-53. <https://doi.org/10.9734/ajpas/2020/v9i330229>
- [94] Abbasbandy, S. (2006). Homotopy perturbation method for quadratic Riccati differential equation and comparison with Adomian's decomposition method, *Appl. Math. Comput*, 172, 485–490.
- [95] Oluwafemi, W. L., Adedapo, C. L. ve Sowunmi, O. S. (2017). Homotopy perturbation algorithm using laplace transform for linear and nonlinear ordinary delay differential equation, *Journal of the Nigerian Association of Mathematical Physics*, 41, 27-34. <https://www.ajol.info/index.php/jonamp/article/view/206811>
- [96] Hasan, Y. Q., Zhu, L. M. (2009). Solving singular boundary value problems of higher-order ordinary differential equations by modified Adomian decomposition method. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 14(6), 2592–2596. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2008.09.027>
- [97] Daşcıoğlu A., Yaslan, H. (2011). The solution of high-order nonlinear ordinary differential equations by Chebyshev series, *Appl. Math. Comput.* 217, 5658–5666.
- [98] Öztürk, Y., Gülsu, M. (2016). The Approximate Solution of High-Order Nonlinear Ordinary Differential Equations by Improved Collocation Method with Terms of Shifted Chebyshev Polynomials, *Int. J. Appl. Comput. Math* 2, 519–531.

- [99] Waeleh, N., Majid Z.A. , Ismail F., Suleiman M. (2012). Numerical Solution of Higher Order Ordinary Differential Equations by Direct Block Code, *Journal of Mathematics and Statistics*, 8(1), 77–81.
- [100] Mehrkanoon, S., Falck, T., Suykens, J. A. K. (2012). Approximate Solutions to Ordinary Differential Equations Using Least Squares Support Vector Machines. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 23(9), 1356-1367. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2012.2202126>
- [101] Lu Y. vd. (2020). Solving higher order nonlinear ordinary differential equations with least squares support vector machines, *Journal of Industrial and Management Optimization*, 16(3), 1481–1502.
- [102] Abu Arqub, O. (2015). Reproducing kernel algorithm for the analytical-numerical solutions of nonlinear systems of singular periodic boundary value problems, *Mathematical Problems in Engineering*, 1-13. <https://doi.org/10.1155/2015/518406>
- [103] Verma, A. K., Pandit, B., Verma, L. ve Agarwal, R. P. (2020). A Review on a Class of Second Order Nonlinear Singular BVPs, *Mathematics*, 8(7), 1045. <https://doi.org/10.3390/math8071045>
- [104] Benton, E., Platzman, G.W.(1972). A table of the solutions of the one dimensional Burgers' equation, *Quart. Appl. Math.*, 30, 195-212.
- [105] Wang, X., Lu, Y. (1990). Exact solutions of the extended Burgers-Fisher equation, *Chin. Phys. Lett.* 7, 145.
- [106] Mittal, R.C., Singhal, P. (1993). Numerical solution of Burgers' equation, *Commun. Numer. Methods Eng.*, 9, 397-406.
- [107] Kutluay, S., Bahadir, A.R., Ozdes, A. (1999) Numerical solution of one dimensional Burgers' equation: explicit and exact-explicit finite difference methods, *J. Comput. Appl. Math.*, 103, 251-261.
- [108] Ozis, T., Aksan, E.N., Ozdes, A.(2003). A finite element approach for solutions of burgers' equation, *Appl. Math. Comput.*, 139, 417-428.
- [109] Kutluay, S., Esen, A., Dag, I. (2004). Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic b-spline finite element method, *J. Comput. Appl. Math.*, 167, 21-33.
- [110] Kaya, D., El-Sayed, S. M. (2004). A numerical simulation and explicit solutions of the generalized burgers-fisher equation *Appl. Math. Comput.* 152(2), 403-413. doi:10.1016/s0096-3003(03)00565-4
- [111] Ismail, H. N. A., Raslan, K., Abd Rabboh, A. A. (2004). Adomian decomposition method for Burger's–Huxley and Burger's–Fisher equations. *Appl. Math. Comput.*, 159(1), 291–301. doi:10.1016/j.amc.2003.10.050
- [112] Wazwaz, A.M. (2005). Travelling wave solutions of generalized forms of burgers, burgers-kdv and burgers-huxley equations, *Appl. Math. Comput* 169, 639-656.
- [113] Olmos, D., Shizgal, B.D. (2006). A psuedospectral method of solution of fisher's equation, *J. Comput. Appl. Math.*, 193, 219-242.
- [114] Wazwaz, A.M. (2008). Analytic study on Burgers, Fisher, Huxley equations and combined forms of these equations, *Appl. Math. Comput.*, 195(2), 754-761. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.05.020>
- [115] Batiha, B., Noorani, M.S.M., Hashim, I. (2008). Application of variational iteration method to the generalized burgers-huxley equation, *Chaos Solitons Fractals* 36, 660-663.
- [116] Babolian, E., Saeidian, J. (2009). Analytic approximate solutions to Burgers, Fisher, Huxley equations and two combined forms of these equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14(5), 1984–1992. doi:10.1016/j.cnsns.2008.07.019
- [117] Xu, Z., Xian, D.(2010). Application of Exp-function Method to Genralized Burgers-Fisher Equation, *Acta Methamatica Applicatae Sinica, English Series* 26, 669-676.

- [118] Joshi, M. S., Desai, N. B. ve Mehta, M. N. (2012). Solutions of Burgers' equation for longitudinal dispersion phenomena occurring in miscible phase flow through porous media, *ITB J. Eng. Sci.*, 44(1), 61-76. <https://doi.org/10.5614/itbj.eng.sci.2012.44.1.5>
- [119] Abu Arqub, O. (2018). Numerical solutions for the Robin time-fractional partial differential equations of heat and fluid flows based on the reproducing kernel algorithm. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 28(4), 828-856. <https://doi.org/10.1108/HFF-07-2016-0278>
- [120] Jaiswal, S., Chopra, M., Das, S. (2019). Numerical solution of non-linear partial differential equation for porous media using operational matrices, *Mathematics and Computers in Simulation*, 160, 138-154.
- [121] Nuray Yıldırım, E., Akgul, A., Inc, M. (2021). Reproducing kernel functions and homogenizing transforms, *Thermal Science*, 25(1), 9-18. <https://doi.org/10.2298/TSCI200603002Y>
- [122] Nuray Yıldırım, E., Akgül, A., Inc, M. (2021). Reproducing kernel method for the solutions of non-linear partial differential equations, *Arab Journal of Basic and Applied Sciences*, 28(1), 80-86. <https://doi.org/10.1080/25765299.2021.1891678>



ÖZ GEÇMİŞ

Elif NURAY YILDIRIM

[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]

[REDACTED]
 [REDACTED]
 [REDACTED]

[REDACTED]
[REDACTED]

[REDACTED]
[REDACTED]

■■■■■■■■■■

[illegible]

114

11

■■■■■■■■■■

██████████

© 2006 The Authors

10

[illegible]

5

11

[illegible]

5