

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**$\Gamma_0(N)$ GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARINDAKİ MİNİMAL
UZUNLUKLU İMPRİMİTİF HAREKET**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ümmügölsün AKBABA

**HAZİRAN 2016
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**$\Gamma_0(N)$ GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARINDAKİ MİNİMAL UZUNLUKLU
İMPRİMİTİF HAREKET**

Ümmügülsün AKBABA

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
" YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 09 / 05 / 2016

Tezin Savunma Tarihi : 01 / 06 / 2016

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Matematik Anabilim Dalında
Ümmügülsün AKBABA Tarafından Hazırlanan**

**$\Gamma_0(N)$ GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARINDAKİ MİNİMAL UZUNLUKLU
İMPRİMİTİF HAREKET**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 10 / 05 / 2016 gün ve 1652 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.**

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Üye : Doç. Dr. Serkan KADER

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER

**Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü**

ÖNSÖZ

Bu çalışma Γ Modüler grubunun kongrüans alt grubu olan $\Gamma_0(N)$ grubu kullanılarak genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareket ile meydana gelen alt yörüngesel grafların minimal uzunluklu yollarındaki rasyonel değerli köşelerin incelenmesi amacı ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tez çalışması olarak yapılmıştır.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeğiyle, öneri ve yönlendirmeleriyle önemli katkıda bulunan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Ali Hikmet Değer'e en içten dileklerimle saygı ve şükranlarımı sunuyorum. Aynı zamanda bu tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan Doç. Dr. Bahadır Özgür Güler'e teşekkürü bir borç bilirim. Yine öğrenim sürecinde katkı sağlayan matematik bölümündeki tüm değerli öğretim üyeleri ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Yetişmemizdeki katkısından dolayı Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim dalı başkanı sayın Prof. Dr. Mehmet AKBAS' a, Matematik bölümü bölüm başkanı sayın Prof. Dr. Funda Karaçal'a ve çalışmanı olduğum "Karadeniz Teknik Üniversitesi BAP projesi; $\Gamma_0(N)$ Grubunun Alt Yörüngesel Graflarındaki Minimal Uzunluklu İmplicit Hareket adlı (Proje No: FYL-2015-5230) proje ile destek veren KTÜ BAP birimine ayrıca teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve kardeşlerime, ayrıca Trabzon'daki ailem ev arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Ümmügülsün AKBABA

Trabzon 2016

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “ $T_0(N)$ Grubunun Alt Yörüngesel Graflarındaki Minimal Uzunluklu İmpremitif Hareket” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER’ in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 01/06/2016



Ümmügülsün AKBABA

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
SEMBOLLER DİZİNİ	IX
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Graf Teorisi	2
1.3. Hiperbolik Geometri.....	17
1.4. Sürekli Kesirler [12]	22
1.5. Grup Topolojisi	27
1.6. Γ Modüler Grubu.....	29
1.7. Γ Modüler Grubunun $\mathbb{Q}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları.....	35
1.8. Farey Grafi	38
1.9. $G_{u,N}$ ve $F_{u,N}$ Grafları.....	40
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR	46
2.1. Temel Tanımlar	46
2.2. Temel Hesaplamalar	47
2.3. Alt Yörüngesel Grafların Köşeleri İçin Yinelenme Bağlantıları ile Sürekli Kesirler	55
2.4. Alt Grafların Ölçüsü ve Karmaşıklığı	63
3. İRDELEME.....	72
4. SONUÇLAR	73
5. ÖNERİLER	74
6. KAYNAKLAR.....	75
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

$\Gamma_0(N)$ GRUBUNUN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARINDAKİ MİNİMAL UZUNLUKLU İMPRİMİTİF HAREKET

Ümmügülsün AKBABA
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER
2016, 76 Sayfa

Bu tezde esas amaç köşeleri rasyonel değerli alt yörüngesel grafların minimal uzunluklu yollarını incelemek ve bu yollardaki köşeleri karakterize etmektir. Bu çalışma ile genel amaç ayırık grupların simgelerini bulma problemine, alt yörüngesel graflardaki devre uzunlukları ile çözüm bulmaktır.

Birinci bölümde konu ile ilgili genel bilgilerden bahsedildi ve sırası ile graf teorisi, hiperbolik geometri ve sürekli kesir kavramları ile ilgili temel bilgiler açıklayıcı örnekler ile verilmiştir.

İkinci bölümde $F_{u,N}$ grafindaki bu minimal uzunluklu yollar için sağ ve sol yönlendirme ilişkisi kurulmuş ve daha sonra bu yollardaki köşeler için sürekli kesirlerin yinelenme bağıntıları kullanılarak bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Farey grafi, Farey dizileri, Modüler grup, Hiperbolik geometri, Graf teorisi, Alt yörüngesel graflar, Sürekli kesirler, Minimal uzunluklar

Master Thesis

SUMMARY

IMPRIMITIVE ACTION OF MINIMAL LENGTH ON THE SUBORBITAL GRAPHS
OF THE GROUP $\Gamma_0(N)$

Ümmügülsün AKBABA

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali Hikmet DEĞER
2016, 76 Pages

Major aim of the present thesis is to investigate paths of minimal length of the suborbital graphs which has rational valuable vertices and to characterize the vertices of these paths. General aim with the study is to find solution to finding problem of signatures of discrete groups with circuit lengths on suborbital graphs.

In the first chapter, general informations about the subject were discussed and basic informations about the concepts of graph theory, hyperbolic geometry and continued fractions were given respectively with revealing examples.

In the second chapter, the right and left direction connection were established for these paths of minimal length on the graph $\mathbf{F}_{u,N}$ and then using recurrence relations for continued fractions, some important results were obtained for the vertices of these paths.

Key Words: Farey graphs, Farey sequences, Modular group, Hyperbolic geometry, Graph theory, Suborbital graphs, Continued fractions, Minimal lengths

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Könisberg köprülerinin bir şeması	2
Şekil 2. Könisberg graf modeli	3
Şekil 3. Graf örneği	4
Şekil 4. Graf örneği	4
Şekil 5. Graf örneği	5
Şekil 6. Graf örneği	6
Şekil 7. Tam graflar	8
Şekil 8. Graf örneği	9
Şekil 9. Alt graflar	9
Şekil 10. Alt graf	10
Şekil 11. Alt graf	11
Şekil 12. Graf örneği	12
Şekil 13. Bağlantısız graf	13
Şekil 14. Graf bileşenleri	14
Şekil 15. Hiperbolik üst yarı düzlem modeli	19
Şekil 16. Hiperbolik doğru	20
Şekil 17. $\mathbb{H}$ da paralel doğrular	21
Şekil 18. Hiperbolik üçgen	21
Şekil 19. Köşeleri sonsuzda olan H-üçgen	22
Şekil 20. $m = 4$ 'e karşılık gelen $F = G_{1,1}$ Farey grafi	39
Şekil 21. $G_{1,2}$ Grafi	42
Şekil 22. $F_{1,2}$ grafi	43
Şekil 23. Kendisi ile eşleşmiş graf	69
Şekil 24. Minimal uzunluklu sonsuz yollar.....	69

SEMBOLLER DİZİNİ

G_x	: x in G yörüngesi
S_x	: x noktasının sabitleyeni
Γ	: Modüler grup
$\Gamma_0(n)$	: Modüler grubun $c \equiv 0 \pmod{n}$ olan alt grubu
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	: Üst yarı düzlemi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
∞	: sonsuz
Γ_∞	: ∞ un Γ Modüler grubundaki sabitleyeni
$PSL(2, \mathbb{R})$	: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$SL(2, \mathbb{Z})$	: Katsayıları tamsayı olan lineer matrislerin grubu
$[\alpha]$	: Alfa bloğu
F	: Farey grafi
F_m	: Farey dizisi
$O(\alpha, \beta)$	: (α, β) nın yörüngesi
$\gamma \rightarrow \delta$	: γ dan δ ya (yönlendirilmiş) bir kenar
K	: Sürekli kesirler için toplam sembolü
$b_0 + \mathbf{K}(a_m/b_m)$	: Sürekli kesirin toplamsal sembol ile gösterimi
$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}}$	: Sürekli kesirin klasik gösterimi
f_n	: Sürekli kesir için klasik yaklaşım
F_n	: n . Fibonacci sayısı
$\approx$	: G-invaryant denklik bağıntısı
$[G, X]$	: Topolojik dönüşüm grubu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Jones, Singerman ve Wicks [1] Γ modüler grubunun $\Gamma_0(N)$ kongürüans alt grubu için Sims [2] tarafından tanımlanan sonlu permütasyon gruplarının alt grafları fikrini kullandılar. Alt yörüngesel grafları kullanarak $\hat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ rasyonel projektif doğrusu üzerinde Γ nın hareketini çalıştılar. Bu graflar köşe kümesi $\hat{\mathbb{Q}}$ ve kenar kümesi $\hat{\mathbb{Q}}^2$ kartezyen çarpımı üzerinde olacak şekilde Γ Modüler grubunun yörüngelerini oluşturan, Γ - invariant yönlendirilmiş graflardır. Her $N \geq 1$ tamsayısı ve her bir $\Phi(N)$, $mod(N)$ ye göre u birimi için, $(\infty, u/N)$ çiftini içeren yörünge olan kenar kümesi ile $\mathbf{G}_{u,N}$ alt yörüngesel grafi vardır.

[2] de, $\mathbf{G}_{u,N}$ grafinin bazı özellikleri verilmiştir ve yazarlar $\mathbf{G}_{u,N}$ nin bir orman olabilmesi için gerek ve yeter şartın hiçbir üçgen içermemesi gerektiğini varsaymışlardır. Bir grafin hiçbir üçgen içermemesi için gerek ve yeter şart $u^2 \pm u + 1 \not\equiv mod(N)$ olmasıdır. Bu varsayım [3] de ispatlanmıştır. Alt yörüngesel graflar üzerindeki bağlantılı gruplar [4,5] de yayınlandı. Genel olarak yazarlar bu makalede bulunan bütün alt yörüngesel graflardaki devreleri incelediler. Açıkça grafin devre içerip içermemesi u ve N nin seçimine bağlı değildir. Bazı altgraf aileleri hiperbolik yollara sahiptir. Böyle altgrafları araştırmak faydalıdır, çünkü bazı sayılar teorisi sonuçlarının Fucshian gruplarının hareketinden meydana geldiği çok iyi bilinir. Bu hareketle Γ nın alt yörüngesel graflarını inceleyerek alt yörüngesel grafların hiperbolik yolları ve sürekli kesirler arasındaki bağlantı hakkında bazı sonuçlar elde edilmiştir [6]. Bu tez çalışmasında sürekli kesirler teoreminde kullanılan yinelenme bağıntılarını kullanarak bu sonuçlar genişletildi.

Ayrıca [17-23] çalışmalarında yazarlar Modüler grubun farklı alt gruplarını kullanarak oluşturulan alt yörüngesel graflardaki devre uzunluklarını incelediler.

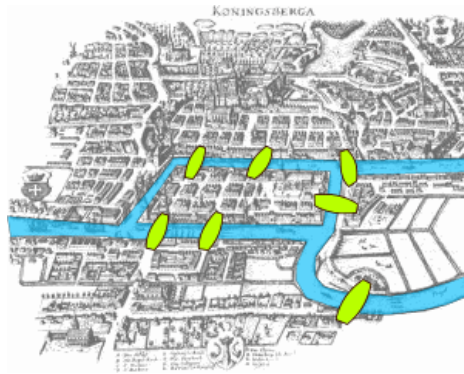
Bu çalışma graf teorisi, hiperbolik geometri, sürekli kesirler, grup teorisi ve sayılar teorisinin sonuçları kullanılarak oluşturulmuştur. Dolayısı ile bu konular hakkında giriş bilgileri verilmesi uygun görülmüştür.

1.2. Graf Teorisi

Graf teorisi, çizge kuramı veya çizit kuramı, grafları inceleyen matematik dalıdır. Graf, düğümler ve bu düğümleri birbirine bağlayan kenarlardan oluşan bir tür ağ yapısıdır. Bir graf, çizge veya çizit, düğümlerden (köşeler) ve bu düğümleri birbirine bağlayan kenarlardan (yaylardan, bağıntılardan) oluşur. Graf teorisinin temeli 1736'da Leonhard Euler tarafından atılmıştır. Leonhard Euler tarafından, 1736 yılında, Königsberg'in yedi köprüsü adında günümüzde hâlâ popülerliğini koruyan bir problem ile ilgili olarak yazılan bir makale, graf teorisinin kesin başlangıç tarihidir.

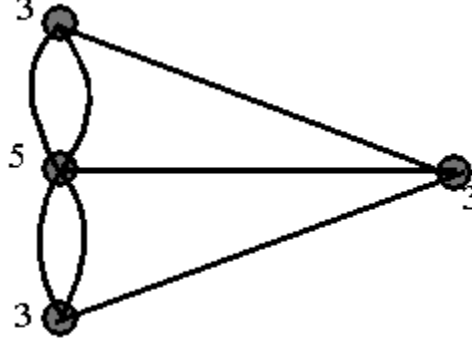
Königsberg şimdi Rusya'da yer alan ve günümüzde batı Rusya'nın büyük bir endüstri ve ticaret merkezi olan şimdiki adı Kalingrad olan bir zamanlar doğu Prusya'nın başkenti olan bir şehirdir. Şehir başka bir nehir ile birleşen Pregel nehrinin etrafında kurulmuştur. Kniephof adındaki ada iki nehrin birleştiği yerin ortasında yer almaktadır. Adayı ve nehirlerin iki tarafındaki şehrin farklı bölgelerini birleştiren yedi tane köprü vardır. 18. yüzyılda Königsberg'in belediye başkanı her gün şehri gezmektedir. Ancak her seferinde bir köprüden iki defa geçmektedir. Her köprüden yalnız bir defa geçmek suretiyle bütün şehri dolaşması mümkün olmamaktadır. Bu problem Euler'in dikkatini çeker.

1736 da Euler "Königsberg köprüleri problemi" olarak bilinen problemi çözer. Matematiksel olarak yedi köprüden her birini yalnız bir kere geçmek kaydıyla yürümenin mümkün olmadığını ispat eder.



Şekil 1. Königsberg köprülerinin bir şeması [7]

Königsberg'deki kara parçalarını noktalarla ve köprüleri eğri parçaları ile gösterirsek aşağıdaki şekli elde ederiz.



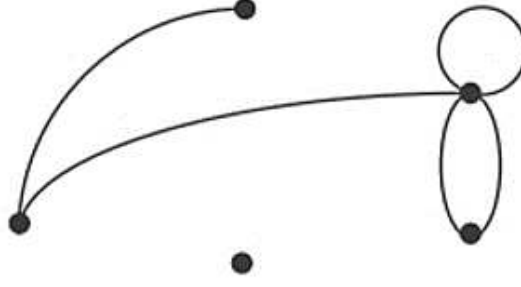
Şekil 2. Königsberg graf modeli [7]

Birbirine bağlı eğriler veya doğrular ile noktalardan oluşan şekle bir grafik denir. Şimdi problem, bir çizgiden bir daha geçmeksizin ve kalemi kağıttan kaldırmaksızın bu şekli çizme problemine dönüşmüş olur. Eğer bir grafikte bir noktaya tek sayıda eğri bağlı ise bu noktaya tek mertebeden bir nokta denir aksi takdirde çift mertebeden nokta denir.

Euler'ın Königsberg köprüleri probleminin çözümünde grafiği çizerken işlemin ortasında bir noktaya gelindiğinde bu noktaya bir tane gelen bir tane de bu noktadan giden eğri olmalı böylece noktanın mertebesi çift olmalıdır. Bu bütün noktalar için doğru olmalı fakat biri çizime başladığımız diğeri de çizimi bitirdiğimiz nokta olmak üzere iki nokta dışında her noktanın mertebesi çift olmalıdır ve böylece ilgili grafiğin çizilebilir olması için gerek ve yeter koşul en fazla iki tane tek mertebeden noktasının olmasıdır. (Başlangıç ve bitiş noktasının aynı olabilir ki bu durumda her noktanın mertebesinin çift olması gerekiyor.) Şimdi yukarıdaki grafiğe baktığımızda ikiden fazla tek mertebeden nokta olduğunu görüyoruz ve böylece grafik çizilemez yani Königsberg deki yürüyüş turu imkansızdır. Burada çizimden kastımız bir çizgi ya da kenardan (veya eğri parçasından) bir daha geçmeksizin çizimin yapılması anlamındadır. Eulerin düşüncesi çözülebilir olan problemlerde başlangıç noktası tek ve bitiş noktasının tek mertebeden olması gerektiğini vermektedir.

Tanım 1.2.1.

Kavramsal olarak; bir graf köşeler ve köşelerle bağlanan kenarlardan oluşur.

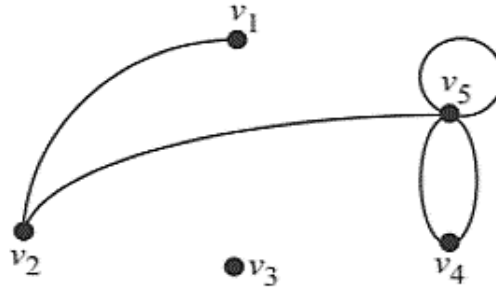
Örnek 1.2.2.

Şekil 3. Graf örneği [8]

Bir graf ; V köşelerin kümesi ve E kenarların kümesi olmak üzere (V, E) kümesinin bir parçasıdır. Burada E bir çoklu kümedir, başka bir deyişle her elemanı ikililerden oluşur. Köşeleri harflerle ($a, b, c, \dots$ yada $v_1, v_2, \dots$) ya da numaralarla ($1, 2, \dots$) ifade ederiz. V nin elemanlarını bu şekilde belirleyeceğiz.

Örnek 1.2.3.

Örnek 1.2.2 teki graftan köşeleri aşağıdaki gibi göstereceğiz.



Şekil 4. Graf örneği [8]

Köşeler için $V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$, kenarlar için

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_5), (v_5, v_5), (v_5, v_4), (v_5, v_4)\}$$

dir.

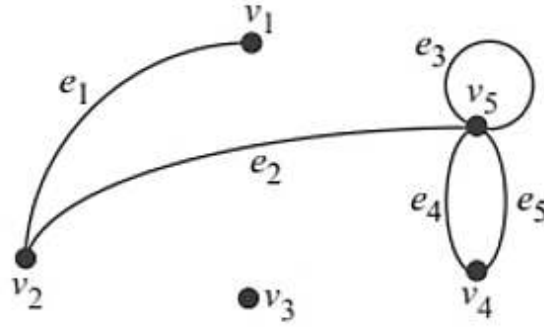
Aynı şekilde kenarları harflerle $(a, b, c, \dots)$ yada $e_1, e_2, \dots$ ya da numaralarla $(1, 2, \dots)$ ifade ederiz.

Not 1.2.4.

$(u, v), (v, u)$ kenarları aynıdır. Yani sıralı değildir.

Örnek 1.2.5.

Kenarları aşağıdaki gibi alalım:



Şekil 5. Graf örneği [8]

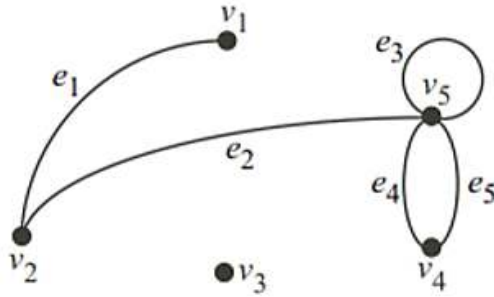
Böylece $E = \{e_1, \dots, e_5\}$ olur.

Aşağıdaki terimlere bakalım;

1. u ve v köşeleri (u, v) kenarının son köşeleridir.
2. Aynı son köşelere sahip kenarlar paraleldir.
3. (v, v) şeklindeki bir kenara düğüm adı verilir.
4. Paralel kenarları ya da düğümleri olmayan graflara basit graf denir.
5. Hiçbir kenarı olmayan graf boş graftır.
6. Hiçbir köşesi olmayan graf sıfır graftır.
7. Sadece bir köşesi olan grafa aşık graf denir.
8. Ortak bir son köşesi olan kenarlar komşudur.
9. Eğer u ve v köşeleri bir kenarla bağlanıyorsa; diğer bir değişle (u, v) bir kenarsa bu köşeler komşudur.
10. v köşesinin derecesi $d(v)$ ile gösterilir ve v nin son köşe olduğu kenarlarının sayısıdır.
11. Derecesi 1 olan köşe asılı köşedir.
12. Son köşesi asılı köşe olan kenara asılı kenar denir.
13. Derecesi sıfır olan köşe tekil köşedir.

Örnek 1.2.6.

Kenarları aşağıdaki gibi gösterelim;



Şekil 6. Graf örneği [8]

- ❖ v_4 ve v_5 ; e_5 in son köşeleridir.
- ❖ e_5 ve e_4 paraleldir.
- ❖ e_3 bir düğümdür.
- ❖ Graf basit değildir.
- ❖ e_1 ve e_2 komşudur.
- ❖ v_1 ve v_2 komşudur.
- ❖ v_1 in derecesi 1 dir; böylece asılı köşedir.
- ❖ e_1 asılı kenardır.
- ❖ v_5 in derecesi 5 tir.
- ❖ v_4 ün derecesi 2 dir.
- ❖ v_3 ün derecesi sıfırdır; böylece tekil köşedir.

Grafları $G = (V, E)$ ile göstereceğiz.

Bir G grubunda köşelerin minimum derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir.(Eğer G de tekil bir köşe varsa $\delta(G) = 0$ dir.). Aynı şekilde G de köşelerin maksimum derecesi $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.7.

Örnek 1.2.6 daki graf için; $\delta(G) = 0$ ve $\Delta(G) = 5$ dir.

Not 1.2.8.

Biz burada sonlu grafları ele alıyoruz. Yani V ve E sonlu kümelerdir.

Her kenar iki son köşeye sahip olduğundan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 1.2.9. [8]

$G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ grafi için

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

dir. ■

Sonuç 1.2.10. [8]

Her grafta tek dereceli köşe sayısı çifttir.

İspat. Eğer $v_1, v_2, \dots, v_k$ köşeleri tek dereceye, $v_{k+1}, \dots, v_n$ köşeleri çift dereceye sahipse, o zaman (Teorem 1.2.9)

$$d(v_1) + \dots + d(v_k) = 2m - d(v_{k+1}) - \dots - d(v_n)$$

çifttir. Böylece k çifttir. ■

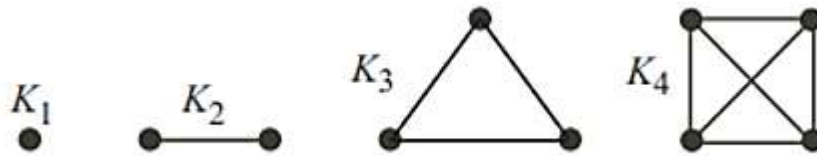
Örnek 1.2.11.

Örnek 1.2.6 daki graf için dereceleri toplayalım;

$$1 + 2 + 0 + 2 + 5 = 10 = 2 \cdot 5$$

bulunur. v_1 ve v_5 tek dereceye sahip iki köşedir.

Bütün köşeleri arasında mümkün bir kenar olan bir basit graf tam graf olarak adlandırılır. n köşeye sahip bir tam graf K_n ile gösterilir. Aşağıda dört tam graf vardır.

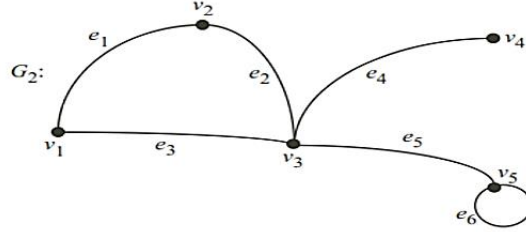


Şekil 7. Tam graflar [8]

Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $G_1 = (V_1, E_1)$ grafi ; $G_2 = (V_2, E_2)$ grafının alt grafıdır.

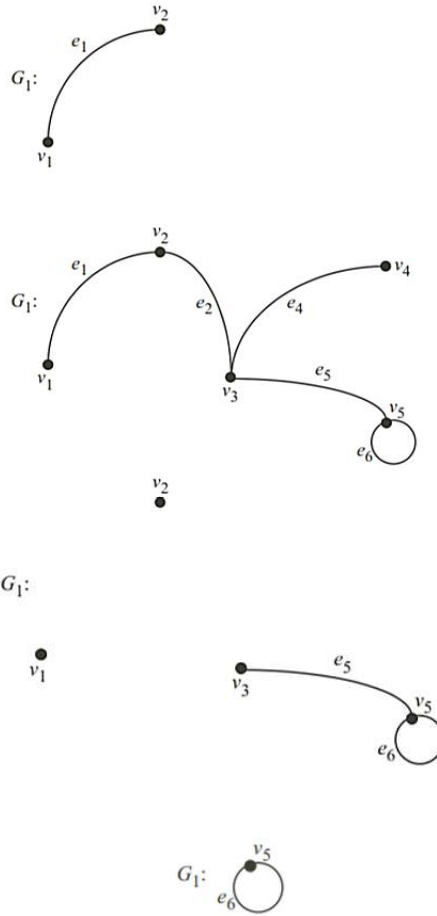
- i. $V_1 \subseteq V_2$
- ii. G_1 in her kenarı aynı zamanda G_2 nin de kenarıdır.

Örnek 1.2.12.



Şekil 8. Graf örneği [8]

Bu grafın bazı alt grafları;



Şekil 9. Alt graflar [8]

dir.

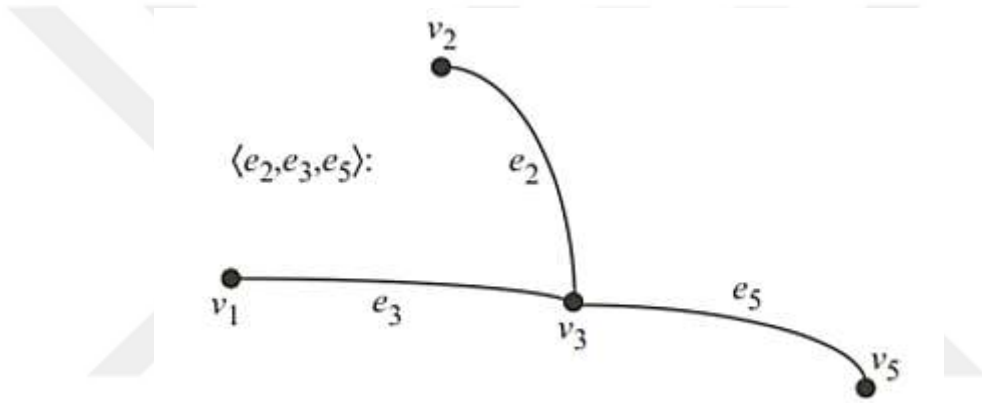
$E_1 \subseteq E$ kenar kümesi tarafından oluşturulan $G = (V, E)$ nin altgrafı

$$G_1 = (V_1, E_1) = \text{def}\langle E_1 \rangle$$

dır. Burada V_1 ; E_1 deki her kenarın son köşelerini içerir.

Örnek 1.2.13.

Örnek 1.2.12 teki G orijinal grafından e_2, e_3 ve e_5 kenarları aşağıdaki altgrafı oluşturur.



Şekil 10. Alt graf [8]

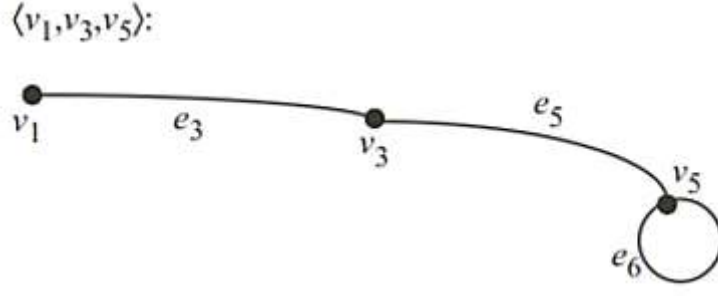
$V_1 \subseteq V$ köşe kümesi tarafından oluşturulan $G = (V, E)$ nin altgrafı

$$G_1 = (V_1, E_1) = \text{def}\langle V_1 \rangle$$

dır. Burada E_1 ; V_1 deki her köşe arasındaki kenarları içerir.

Örnek 1.2.14.

Örnek 1.2.12 teki G orijinal grafından v_1, v_3 ve v_5 köşeleri aşağıdaki altgrafı oluşturur.



Şekil 11. Alt graf [8]

G nin bir tam altgrafı G nin bir takımı olarak adlandırılır.

Not 1.2.15.

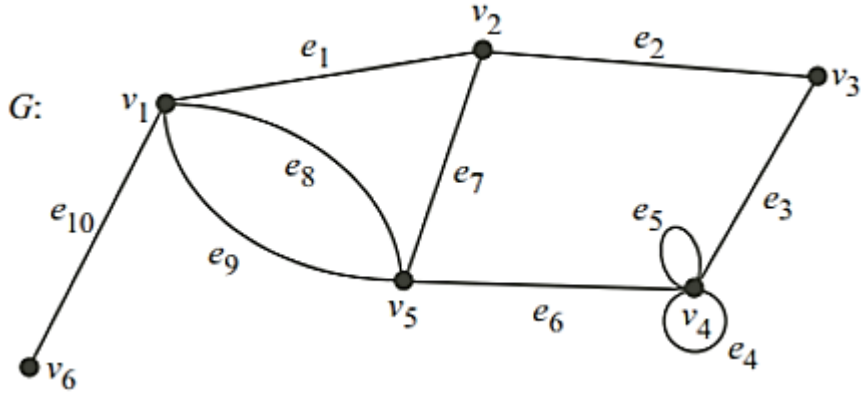
Aşağıda verilen terimlerin birçok farklı çeşidi vardır. Biz burada verilen tanımlara bağlı kalacağız.

Tanım 1.2.16.

$G = (V, E)$ de bir yürüyüş G nin kenar ve köşelerini içeren

$$v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k}$$

şeklindeki sonlu bir dizidir. Yürüyüş bir köşede başlar. $v_{i_{t-1}}$ ve v_{i_t} köşeleri e_{j_t} ($t = 1, \dots, k$) nin son köşeleridir. v_{i_0} ilk köşe ve v_{i_k} son köşedir. k yürüyüşün uzunluğudur. Sıfır uzunluğundaki bir yürüyüş yalnız bir v_{i_0} köşesidir. Bu yürüyüşte bir köşeye gitmeye yada birden fazla bir kenar boyunca gitmeye izin verilir. $v_{i_0} \neq v_{i_k}$ ise bu açık yürüyüştür. Aksi takdirde kapalıdır.

Örnek 1.2.17.

Şekil 12. Graf örneği [8]

Yukarıdaki grafta

$$v_2, e_7, v_5, e_8, v_1, e_8, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_5, v_4$$

yürüyüşü açıktır. Diğer taraftan

$$v_4, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4$$

yürüyüşü kapalıdır.

Eğer her kenar en fazla bir kere geçilirse bu yürüyüş bir yoldur. O zaman bir yolda u, v köşe çiftinin ardışık köşe olarak en çok görünebilme sayısı u ve v yi bağlayan paralel kenarların sayısıdır.

Örnek 1.2.18.

Örnek 1.2.17 deki graftan

$$v_1, e_8, v_5, e_9, v_1, e_1, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_4, v_4$$

yürüyüşü bir yoldur.

Eğer ilk ve son köşelerin aynı olma ihtimali haricinde her köşe en fazla bir kere ziyaret edilirse o zaman bir yol izdir. Kapalı bir ize tur denir. İleride bir turun boş olmadığını başka bir değişle uzunluğunun birden büyük olduğunu farzedeceğiz. İzleri ve turları onların kenarlarıyla oluşturulan alt graflarla gösteririz.

Örnek 1.2.19.

Örnek 1.2.17 deki graftan

$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3$

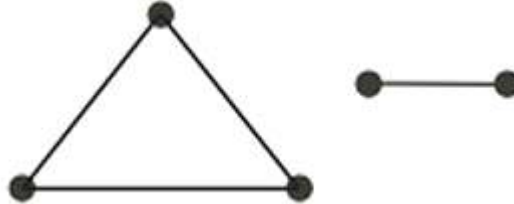
yürüyüşü bir izdir.

$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2$

yürüyüşü bir turdur.

u da başlayıp v de biten bir yürüyüş $u - v$ yürüyüşü olarak adlandırılır. Eğer grafta bir $u - v$ yürüyüşü varsa u ve v bağlantılıdır. (O zaman hem de bir $u - v$ izi vardır.) Eğer u ve v , v ve w bağlantılı ise o zaman u ve w da bağlantılıdır, başka bir değişle orada $u - w$ yürüyüşü ve $v - w$ yürüyüşü varsa o zaman $u - w$ yürüyüşü de vardır. Eğer bütün köşeler birbirleriyle bağlantılı ise o zaman bu graf bağlantılıdır.

Örnek 1.2.20.



Şekil 13. Bağlantısız graf [8]

Grafı bağlantılı değildir.

Eğer

1. G_1 bağlantılıdır,
2. G_1 ne aşık ne de aşık değil ve G_1 , G_1 de bir son köşeye sahip G nin kenarları tarafından üretilen altgraftır,

şartları sağlanırsa G nin G_1 (sıfır olmayan) altgrafı G nin bir bileşenidir.

Aynı grafın farklı bileşenleri aşağıdaki teoremden ortak köşeye sahip değildir.

Teorem 1.2.21. [8]

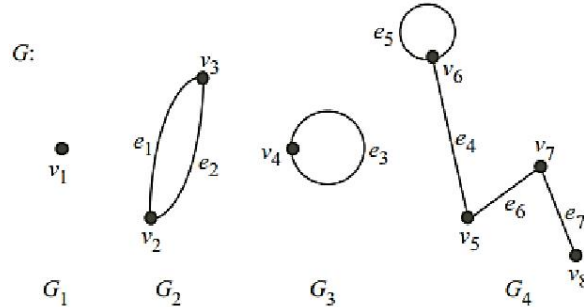
Eğer G grafı G nin G_1 bileşeninin bir köşesi ile bağlantılı bir v köşesine sahipse o zaman v , G_1 in de bir köşesidir.

İspat. Eğer v , G_1 in v' köşesi ile bağlantılı ise o zaman G de bir yürüyüş vardır

$$v = v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, v_{i_{k-1}}, e_{j_k}, v_{i_k} = v'.$$

v' , G_1 in bir köşesi olduğundan (yukarıdaki 2 şartından) e_{j_k} , G_1 in bir kenarı ve $v_{i_{k-1}}$ G_1 in bir köşesidir. Bu işleme devam ederek v nin G_1 in bir köşesi olduğunu görürüz. ■

Örnek 1.2.22.



Şekil 14. Graf bileşenleri [8]

G_1, G_2, G_3 ve G_4 G nin bileşenleridir.

Teorem 1.2.23. [8]

G nin her köşesi G nin bir bileşenine aittir. Benzer şekilde G nin her kenarı da G nin bir bileşenine aittir.

İspat. G de bir v köşesi seçelim. $V_1 = \{v\}$ ile başlayarak mümkün olduğu kadar çok kez aşağıdakini yazalım:

❖ v', V_1 in bazı köşeleri ile bağlantılı ve $v' \notin V_1$ olacak şekilde G nin bir köşesi ise, o zaman $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{v'\}$ olur.

G de köşelerin sayısı sonlu olduğundan, işlem en sonunda durur. Son V_1 , G nin G_1 altgrafını oluşturur, öyle ki G_1 v yi içeren G nin bileşenidir. G_1 in kenarları v ye bağlantılı, böylece birbirleriyle bağlantılıdır. Bu yüzden G_1 bağlantılıdır. (*) tekrar edilemediğinden 2 şartı sağlanır. Teorem 1.2.21 den v herhangi bir bileşene ait değildir. ■

Grafın kenarları bileşenlerin son köşelerine bağlıdır.

Teorem 1.2.23 grafi farklı bileşenlere böler. Teoremin ispatı bunu yapmak için bir algoritma verir. Herhangi bir bileşene ait olmayan köşelere sahip olmamız durumunda ispatta yaptığımızı tekrar etmek zorundayız. Her asılı köşe kendi bileşenini oluşturur. Bir bağlantılı graf sadece bir bileşene sahiptir ki bu da kendisidir.

n köşeli, m kenarlı, k bileşenli bir G grafi

$$\rho(G) = n - k$$

rankına sahiptir. Grafın sıfırlılığı

$$\mu(G) = m - n + k$$

dır. $\rho(G) \geq 0$ ve $\rho(G) + \mu(G) = m$ olduğu görülür. Ayrıca aşağıdaki teoremden $\mu(G) \geq 0$ dır.

Teorem 1.2.24. [8]

$$\rho(G) \leq m \text{ dir.}$$

Bu tip kombinasyonel sonuçlar birçok sonuç doğurur. Örneğin;

Teorem 1.2.25. [8]

Eğer G bir bağlantılı bir graf ve $k \geq 2$ maksimum iz uzunluğu ise, o zaman G de k uzunluğa sahip her iki iz en az bir ortak köşe paylaşır.

İspat. İzlerin tur olmadığı durumları düşünelim. (Diğer durumlar benzer bir yolla ispat edilebilir.) O zaman G de k uzunluğa sahip iki iz alalım:

$$v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k} \quad (\text{iz } p_1)$$

ve

$$v_{i'_0}, e_{j'_1}, v_{i'_1}, e_{j'_2}, \dots, e_{j'_k}, v_{i'_k} \quad (\text{iz } p_2).$$

sayma hipotezi düşünülürse: p_1 ve p_2 izleri ortak bir köşeye sahip olmaz. G bağlantılı olduğundan, bir $v_{i_0} - v_{i'_k}$ izi vardır. O zaman hem bu izde hem de p_1 izinde bulunan bir son köşe bulunabilir ki bu köşe v_{i_t} ile gösterilsin. Hem p_2 izinin hem de $v_{i_t} - v_{i'_k}$ izinin ilk köşesi bulunabilir ki bu köşe de $v_{i'_s}$ ile gösterilsin. Böylece bir $v_{i_t} - v_{i'_s}$ izi elde edilir :

$$v_{i_t}, e_{j''_1}, \dots, e_{j''_l}, v_{i'_s}. \blacksquare$$

Aşağıdaki durum yazılır:

$$\begin{array}{c}
v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_t}, e_{j_{t+1}}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k} \\
e_{j_1}'' \\
\vdots \\
e_{j_t}'' \\
v_{i'_0}, e_{j'_1}, v_{i'_1}, \dots, v_{i'_s}, e_{j'_{s+1}}, \dots, e_{j'_k}, v_{i'_k}
\end{array}$$

Buradan $v_{i_0} - v_{i'_k}$ ve $v_{i'_0} - v_{i_k}$ izleri elde edilir. İki durum vardır:

- $t \geq s$: $v_{i_0} - v_{i'_k}$ izinin uzunluğu $\geq k + 1$.
- $t < s$: $v_{i'_0} - v_{i_k}$ izinin uzunluğu $\geq k + 1$.

Eğer grafta hiçbir tur yoksa bu graf tursuzdur.

Teorem 1.2.26. [8]

Verilen her iki köşe arasında en fazla bir iz olduğu ve hiçbir düğüm olmadığı zaman graf tursuzdur.

1.3. Hiperbolik Geometri

Geometri Euclidean ve non- Euclidean olmak üzere ikiye ayrılır. Bu iki geometri arasındaki fark ise doğruların paralellik özelliğindendir. Euclid (M.Ö.300) “The Elements” adlı kitabında Euclidean geometrinin kaynağı olan beş aksiyomu verdi.

- (1) İki noktadan bir doğru geçer.
- (2) Doğru parçaları iki ucundan sonsuza doğru bir doğru boyunca uzatılabilir.
- (3) Merkezi ve yarıçapı verilen çember çizilebilir.
- (4) Tüm dik açılar denktir.
- (5) Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir.

Ancak beşinci aksiyom matematikçileri tatmin etmedi ve ilk ciddi çalışmayı 1697'de Girolamo Saccheri yaptı. Bu aksiyomu ispatlamak için dikdörtgenlerin mevcut olduğunu gösteremediğinde, farklı bir hipotez olarak, günümüzde Hiperbolik Paralel Postülatı olarak bilinen çoklu paraleller hipotezini bularak başlamaya karar verdi. Saccheri'nin amacı bulunduğu bu hipotezin ilk dört aksiyomdan veya bunlardan çıkan teoremlerden biri ile çelişkisi olduğunu göstermekti. Ancak bunu gösteremedi. Bir süre sonra Jonas Bolyai, Karl Friedrich Gauss ve Nicolai Lobachevski birbirlerinden bağımsız olarak “ verilen bir doğru üzerinde olmayan bir noktadan geçen ve doğruya paralel olan birden fazla doğrunun bulunduğu yeni bir geometri, hiperbolik geometri” üzerindeki çalışmaları yayımladılar. [9]

Gauss bu kadarla yetinmeyip evrenin hem Euclid geometrisi ile hem de Euclid olmayan bir geometri ile temsil edilebileceğini söyledi. Bunun anlamı şudur: bir geometri, içinde yaşadığımız uzay hakkındaki doğruları değil, kuramsal olarak mümkün uzaylar hakkındaki gerçekleri inceler. Farklı iki geometrinin aynı evreni temsil etmemesi için de hiç bir neden yoktur. Buna örnek olarak Gauss' un öğrencisi olan Riemann tarafından kurulan ve kendi adıyla anılan geometriyi düşünelim:

Riemann, Euclid' in paraleller aksiyomunu şöyle değiştiriyor: " Paralel doğrular yoktur." Böylece Euclid olmayan başka doğrular ortaya çıkıyor. Bu geometri ile içinde yaşadığımız uzayı temsil edebiliriz. Örneğin; dünyayı bir küre olarak düşünürsek, dünya üzerindeki büyük çemberler (yani merkezden geçen düzlemlerin yer yüzeyi ile ara kesitleri) Riemann geometrisinin doğrularını oluşturacaktır. Dolayısıyla bu geometride doğrular sınırlıdır. Oysa Euclid geometrisinde doğrular her iki uçlarından sonsuza uzanırlar. Şimdi yeryüzü üzerinde A, B, C noktalarını alalım. Euclid geometrisinde ABC üçgeni yer küresi içinde kalan düzlemsel ABC üçgenidir. Riemann geometrisindeki ABC üçgeni ise, yer yüzeyi üzerindeki küresel ABC üçgenidir. Euclid geometrisinde ABC üçgeninin iç açıları toplamı 180 derecedir ama Riemann geometrisinde ABC küresel üçgeninin iç açıları toplamı 180 derece ile 540 derece arasında değişebilir. Görüldüğü gibi içinde yaşadığımız uzay bile değişik geometrilerle temsil edilebilir. Bu geometrilerde sonuçlar çelişik olabilir ama böyle olması birisinin ya da her ikisinin uzayı temsil yeteneğini yok etmez.

Euclid olmayan geometrilerin kendi sistemleri içindeki değerleri evrenin değişik amaçlar için temsil etme yetenekleri yanında matematiğe devrimci bir görüş getirmişlerdir.

Gauss ve Riemann dan sonra Euclid olmayan geometrilerin gelişiminde Lobacevski, Ricci, Weyl gibi ünlülerin katkıları büyük olmuştur.

Euclid olmayan geometrilerden birincisi, beşinci postülatı " bir doğruya dışındaki bir noktadan hiç bir paralel çizilemez " şeklinde alan Eliptik geometridir. İkincisi de; " bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel çizilebilir " şeklindeki paralellik versiyonunu kullanan Hiperbolik geometridir.

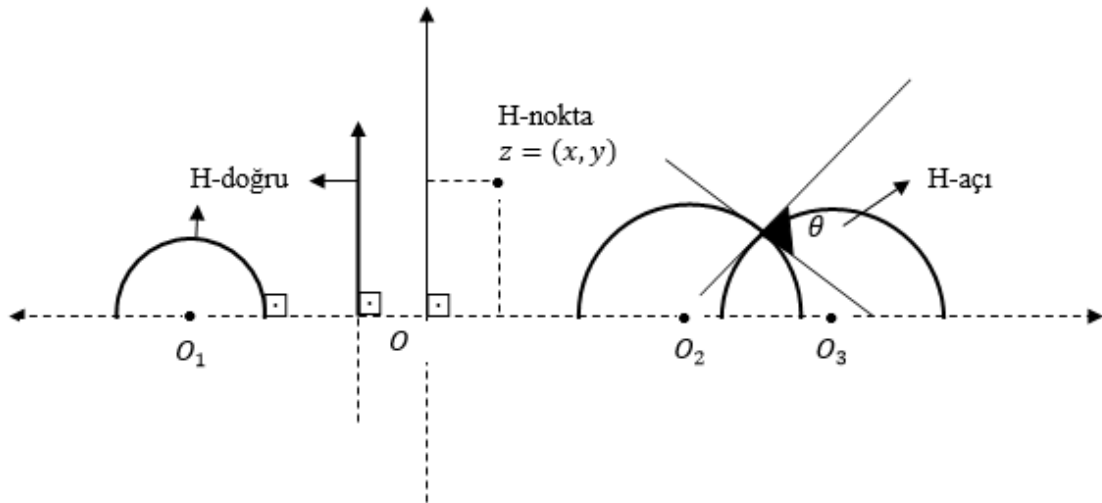
Her geometri kendisine bazı modeller seçer. Hiperbolik geometri de kendisine paralellik versiyonu nedeniyle pek çok model edinmiştir. Burada Hiperbolik geometrinin üst yarı düzlem modelini ele alacağız .

Tanım 1.3.1.

Karmaşık sayılar kümesinin

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$$

olarak tanımlanan alt kümesine üst yarı düzlem denir.

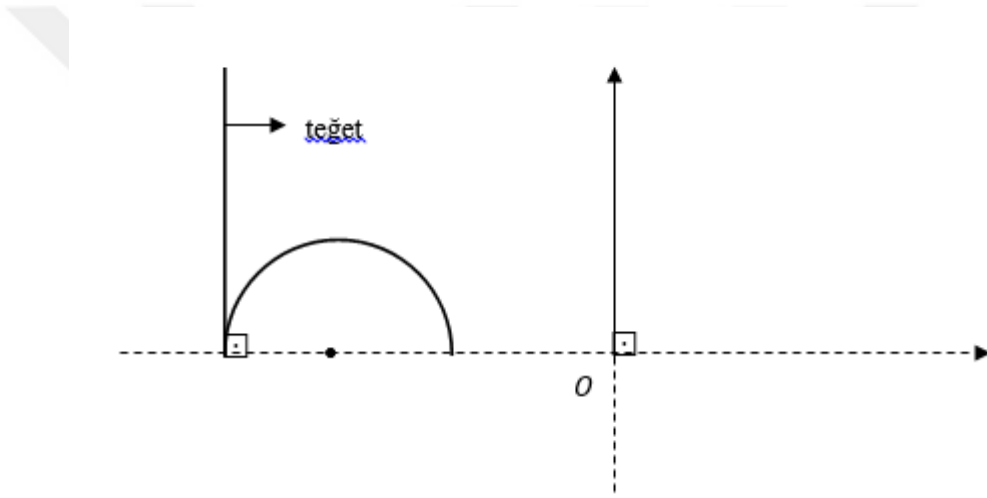


Şekil 15. Hiperbolik üst yarı düzlem modeli [10]

Tanım 1.3.2.

$\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ ye dik Öklid doğrularının $\mathbb{H}$ ile arakesiti olan yarı Öklid doğrularına ve $\mathbb{R}$ ye dik bilinen Öklid çemberlerinin $\mathbb{H}$ ile arakesitlerine hiperbolik doğrular adı verilir. Kısaca $\mathbb{R}$ eksenine dik olan çemberlerin $\mathbb{H}$ da kalan yay parçalarına hiperbolik doğrular denir. Burada reel eksene dik $\mathbb{H}$ da kalan yarı doğruları sonsuz yarıçaplı çemberler veya merkezi sonsuzda olan çemberler olarak alıyoruz.

Dikkat edilirse Hiperbolik çemberler merkezi $\mathbb{R}$ üzerinde bulunan çemberlerdir. Şöyle ki;

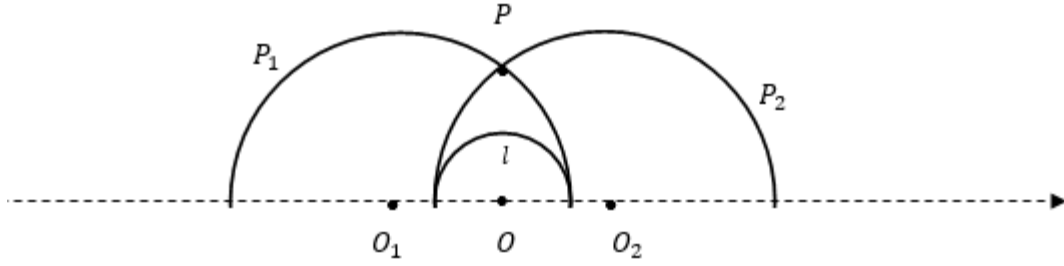


Şekil 16. Hiperbolik doğru [10]

Reel eksene dik herhangi bir çember alalım. Çembere reel ekseni kestiği noktada bir teğet çizelim. Bir merkezden geçen doğrunun teğete değme noktasında dik olduğunu biliyoruz. Çizdiğimiz teğet değme noktasında reel eksene dik olduğundan merkez reel eksen üzerindedir.

Tanım 1.3.3.

Ortak bir uç noktası olan iki hiperbolik doğruya paralel doğrular denir. Buna göre hiperbolik bir doğruya dışındaki bir noktadan şekilde olduğu gibi ℓ doğrusuna bir P noktasından P_1 ve P_2 gibi iki paralel çizilmiştir.



Şekil 17. $\mathbb{H}$ da paralel doğrular [10]

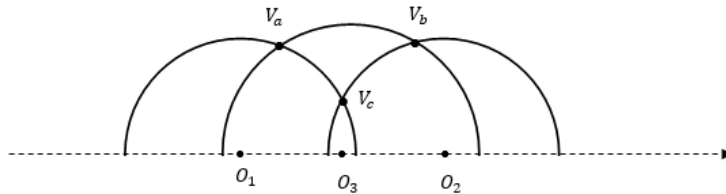
Tanım 1.3.4.

Ortak bir hiperbolik noktası olan (uç noktalar hariç) iki doğruya, kesişen doğrular denir. Uç noktaları da dahil hiç ortak noktası olmayan doğrulara kesişmeyen doğrular denir.

Tanım 1.3.5.

$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere n kenarlı hiperbolik bir poligon, n tane hiperbolik doğru parçası tarafından sınırlanan ve $\mathbb{H}$ nun $\mathbb{C}_\infty$ daki kapanışında bulunan bir kapalı kümeye denir.

Üç kenarlı poligonlara hiperbolik üçgen denir. Eğer herhangi iki hiperbolik doğru parçası kesişiyorsa bu kesim noktasına köşe denir.



Şekil 18. Hiperbolik üçgen [10]

Üçgenin köşeleri V_a, V_b, V_c ile gösterilir.



Şekil 19. Köşeleri sonsuzda olan H-üçgen [10]

Önerme 1.3.6. [11]

$p, q \in \mathbb{H}$ farklı noktalar olsun. Bu takdirde; p ve q yu birleştiren bir tek hiperbolik doğru vardır. ■

Tanım 1.3.7.

$\mathbb{C}$ deki bir Öklid çemberi veya $\mathbb{C}$ deki bir Öklid doğrusu ile $\{\infty\}$ kümesinin birleşimine $\bar{\mathbb{C}}$ de bir çember denir.

1.4. Sürekli Kesirler [12]

Tanım 1.4.1.

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}} \quad (1)$$

ifadesine bir sürekli kesir denir. Burada a_m ve b_m kompleks sayılar ve her m için $a_m \neq 0$ dır. Uygunluk açısından, çok yakın geçmişte aynı sürekli kesiri temsil eden diğer farklı sembollerde kullanıldı. Bu semboller;

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1|} + \frac{a_2|}{|b_2|} + \frac{a_3|}{|b_3|} + \dots \quad (2)$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots \quad (3)$$

ve

$$b_0 + \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_m} \right) \quad (4)$$

veya kısaca

$$b_0 + \mathbf{K} \left(\frac{a_m}{b_m} \right) \quad (5)$$

dir.

(4) ve (5). (sonsuz) kesirlerdeki $\mathbf{K}$ sembolü bir Almanca kelime olan *Kettenbruch* (sürekli kesir) den gelir ve (sonsuz) toplamalar için verilen Σ sembolüne benzerdir. Buna bağlı olarak sürekli kesir için n . yaklaşım, f_n sembolüyle gösterilir ve

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}} \quad (6)$$

$$f_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1|} + \frac{a_2|}{|b_2|} + \frac{a_3|}{|b_3|} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n|} \quad (7)$$

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \quad (8)$$

$$f_n = b_0 + \prod_{m=1}^n \left(\frac{a_m}{b_m} \right) \quad (9)$$

ile ifade edilir.

Tanım 1.4.2.

$\mathbb{C}$ sembolü ile kompleks düzlemi ve $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sembolü ile de genişletilmiş kompleks düzlemi gösterelim. Ayrıca $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ve $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ olsun.

$m \geq 1$ için $a_m \neq 0$ olmak üzere bir $(\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}, \{b_m\}_{m \in \mathbb{N}_0})$ sıralı kompleks dizi çifti;

$$t_0(w) := b_0 + w, \quad t_n(w) := \frac{a_n}{b_n + w}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

$$T_0(w) := t_0(w), \quad T_n(w) := T_{n-1}(t_n(w)), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

$$f_n = T_n(0) \in \hat{\mathbb{C}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

olmak üzere, lineer kesirli dönüşümlerin $\{t_n(w)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ve $\{T_n(w)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dizileri ile bir $\{f_n\}$ dizisini oluşturur.

$$((\{a_m\}, \{b_m\}), \{f_n\}) \quad (13)$$

sıralı çifti (1),(2),(3),(4) ve (5) ile verilen sürekli kesire karşılık gelir.

Tanım 1.4.3.

a_m ve b_m sayılarına sırasıyla sürekli kesirin kısmi payı ve kısmi paydası denir. f_n değerine ise n . *yaklaşım* adı verilir ve (6),(7),(8) ve (9) ile gösterilir. Bazı yazarlar yaklaşım yerine *yakınsak* terimini de kullanırlar. Kısmi pay ve kısmi paydaya ortak isim olarak *eleman* denir.

$T_n(w)$ lineer kesirli dönüşümü

$$T_n(w) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots + \frac{a_n}{b_n + w}}}} \quad (14)$$

ile veya daha uygun bir şekilde

$$T_n(w) = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a_n}{b_n + w} \quad (15)$$

ile gösterilir. Denk olarak "o" ifadesi bileşke işlemini göstermek üzere

$$T_n(w) = t_0 \circ t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n(w), \quad (16)$$

olarak ifade edilir. Burada $t_0 \circ t_1(w) := t_0(t_1(w))$ dir. Özellikle

$$t^n(w) := \underbrace{t \circ t \circ \dots \circ t(w)}_{n \text{ defa}}$$

dir.

Tanım 1.4.4.

Verilen bir $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dizisi için

$$T_n(w_n) \in \hat{\mathbb{C}} \quad (17)$$

sayısına n . *değiştirilmiş yaklaşım* denir.

Tanım 1.4.5.

Bir $b_0 + K(a_m/b_m)$ sürekli kesirine *yakınsaktır* denir : $\Leftrightarrow \{f_n\} = \{T_n(0)\}$ yaklaşımlar dizisi $f \in \hat{\mathbb{C}}$ limitine yakınsaktır. Bu durumda f ye bu sürekli kesirin *değeri* denir. Burada ∞ a yakınsama kabul edilir. Eğer bu sürekli kesir f ye yakınsıyor ise bu durumda (1),(2),(3),(4) ve (5) sembolleri hem (13) sıralı çiftini ve hem de f yi temsil eder. Buradan

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(0) = b_0 + \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_m} \right). \quad (18)$$

yazılabilir. (18) ifadesine klasik yakınsaklık da denir.

Örnek 1.4.6.

$$\frac{3 + \frac{-1}{3 + \frac{-1}{3 + \frac{-1}{3 + \ddots + \frac{-1}{3}}}}}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \ddots - \frac{1}{3}}}}} = \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \ddots - \frac{1}{3}}}}$$

sürekli kesri için

$$\frac{1}{3 - T_{n-1}(0)} = T_n(0)$$

$$\Rightarrow T_n(0)[3 - T_{n-1}(0)] = 1$$

dir. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n-1}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(0) := f$$

olduğundan

$$f(3 - f) = 1 \Rightarrow f^2 - 3f + 1 = 0 \Rightarrow f = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

elde edilir. Buradan ise $|f| \leq 1$ olup bu sürekli kesir için

$$f = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(0)$$

değeri bulunur.

Tanım 1.4.7. (Yinelenme Bağıntıları)

Bir $b_0 + K(a_m/b_m)$ sürekli kesirinin n . payı A_n ve n . paydası B_n değerleri aşağıdaki yinelenme bağıntıları (ikinci mertebeden lineer fark denklemleri) ile bulunur;

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} := b_n \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} + a_n \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Burada başlangıç koşulları ise

$$A_{-1} := 1, B_{-1} := 0, A_0 := b_0, B_0 := 1 \quad (20)$$

olarak tanımlanır.

(17) ile verilen $T_n(w_n)$ değiştirilmiş yaklaşımı

$$T_n(w_n) = \frac{A_n + A_{n-1} w_n}{B_n + B_{n-1} w_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

olarak yazılabilir ve böylece f_n n . yaklaşımı

$$f_n = T_n(0) = \frac{A_n}{B_n}, \quad f_{n-1} = T_n(\infty) = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} \quad (22)$$

olarak elde edilir.

1.5. Grup Topolojisi

Tanım 1.5.1. [13]

$(G, \cdot)$ bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde her $g, h \in G$ için

- i) $m: G \times G \rightarrow G$
 $(g, h) \rightarrow g \cdot h$
- ii) $i: G \rightarrow G$
 $g \rightarrow g^{-1}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir topolojik grup denir.

Tanım 1.5.2. [13]

G bir topolojik grup ve X bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde

$$\Lambda: G \times X \rightarrow X$$

$$\Lambda(g, x) = g\Lambda x =: gx$$

sürekli bir dönüşüm ve her $g_1, g_2 \in G$ ve her $x \in X$ için

- i) $g_1 g_2 x = g_1 (g_2 x)$
- ii) $ex = x$ (e G 'nin birimi)

şartları sağlanıyorsa $[G, X, \Lambda]$ üçlüsüne veya $[G, X]$ ikilisine bir topolojik dönüşüm grubu adı verilir. Bu durumda G ye X üzerinde bir hareket grubu denir.

Tanım 1.5.3.

$[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$ olsun. Bu takdirde

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G: y = gx$$

olarak tanımlanırsa $\sim$ bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı X topolojik uzayını denklik sınıflarına parçalar. Her bir denklik sınıfına bir G – yörünge veya kısaca yörünge adı verilir. $x \in X$ noktasını içeren yörünge $Gx := \{gx | g \in G\}$ dir. Eğer X in bütün noktaları bir denklik sınıfına ait ise, yani bir tek yörünge ($\exists x_0 \in X$ öyle ki $X = Gx_0$) varsa, $[G, X]$ topolojik dönüşüm grubuna transitiftir ya da geçişlidir diyeceğiz.

Tanım 1.5.4.

$[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x \in X$ olsun. Bu takdirde

$$S_x := \{g \in G | gx = x\}$$

kümesine x noktasının sabitleyeni denir.

Tanım 1.5.5.

$[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $gh = hg$ olsun. Bu takdirde g, h nın sabit nokta kümesini kendi üzerine resmeder.

1.6. Γ Modüler Grubu

$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ kümesi ile $\mathbb{C}$ kompleks uzayının üst yarı düzlemini temsil edelim. Determinantı 1 olan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrislerinin grubunu da $SL(2, \mathbb{R})$ ile gösterelim.

Buradan $SL(2, \mathbb{R})$ grubunda bir $g := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanı ve $z \in \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere, $SL(2, \mathbb{R})$ grubu $\hat{\mathbb{C}}$ genişletilmiş karmaşık düzlemi üzerinde

$$gz = \frac{az + b}{cz + d} \quad (23)$$

şeklinde hareket eder. $PSL(2, \mathbb{R})$ ile $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ bölüm grubunu göz önüne alalım. Buradan $SL(2, \mathbb{Z})$ grubu, katsayıları tamsayı olan matrislerden oluşan $SL(2, \mathbb{R})$ nin ayrık bir alt grubudur. Böylece Γ modüler grubu, $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemindeki

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \quad (24)$$

elemanları tarafından

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (25)$$

dönüşümü ile hareket eden Möbiüs dönüşümlerinin bir grubudur. Burada $\pm$ sembolü gözardı edilip her bir matris negatifi ile eş alınacaktır. Dolayısıyla

$$SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm I\} := \{(\pm I)A : A \in SL(2, \mathbb{Z})\} \quad (26)$$

bölüm grubu olmak üzere

$$\Gamma := PSL(2, \mathbb{Z}) \cong SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I\} \quad (27)$$

dır. Ayrıca

$$\Gamma = \langle X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

dir [14]. Yani, Γ modüler grubu X ve Y matrisleri tarafından üretilir. Burada $X^2 = Y^3 = I$ dir. Buradan (25) dönüşümü Γ nın diğer kümelerdeki hareketini tanımlamak için de kullanılabilir. En uygun seçim rasyonel projektif doğrusu olan $\hat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesidir.

Burada $a \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{0}$, ∞ a karşılık getirilecektir. ∞ un (25) dönüşümü altındaki görüntüsünü süreklilik ile tanımlayacağız. Yani, $A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ olmak üzere

$$A(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$$

olarak bulunur. $ad - bc \neq 0$ olduğundan a ve c den en az biri sıfırdan farklıdır. Yani, $A(\infty)$ iyi tanımlıdır. Buradan $A(\infty) = \infty \Leftrightarrow c = 0$ ve $A(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

$PSL(2, \mathbb{Z})$ 'nin elemanları $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ olarak göz önüne alınırsa ve ayrıca $PSL(2, \mathbb{Z})$ üzerinde özdeşleştirme ile (a, b, c, d) ile $(-a, -b, -c, -d)$ özdeşleştirilerek bir topoloji tanımlanabilir. Bu durumda $A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümüne $\pm(a, b, c, d)$ dörtlüsü karşılık gelir. $M := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \mid ad - bc = 1\}$ kümesini tanımlarsak $PSL(2, \mathbb{Z})$ üzerindeki topolojiyi $M/\sim$ üzerindeki topoloji olarak alacağız. Yani, $(a, b, c, d) \in M$ olmak üzere $(a, b, c, d) \sim (-a, -b, -c, -d)$ dir

$$p: \quad M \quad \rightarrow \quad M/\sim \\ (a, b, c, d) \rightarrow [a, b, c, d] := \{\pm(a, b, c, d)\}$$

projeksiyon dönüşümünü göz önüne alalım. Burada

$$U \subset M/\sim \text{ açıktır} \Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset M \text{ açıktır.}$$

Dolayısı ile p dönüşümü süreklidir ve bu topoloji ile $PSL(2, \mathbb{Z})$ bir topolojik gruptur. Böylece de $[PSL(2, \mathbb{Z}), \mathbb{H}]$ bir topolojik dönüşüm grubudur.

$\hat{\mathbb{Q}} := \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{Z}, (x, y) = 1 \right\}$ olarak tanımlansın. Burada $\infty = \frac{1}{0} = -\frac{1}{0}$ dır. $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$

olduğundan $\hat{\mathbb{Q}}$ 'nın elemanlarının gösterimi tek değildir. Böylece Γ $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} :$
 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1$ elemanları tarafından

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \rightarrow \frac{a\frac{x}{y} + b}{c\frac{x}{y} + d} = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

dönüşümü ile hareket eder.

Lemma 1.6.1. [1]

- i. Γ 'nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.
- ii. Bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirlidir. ■

Şimdi Γ 'nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki imprimitif hareketini göz önüne alalım. $[G, \Omega]$ G grubunun Ω kümesi üzerindeki hareketi ile oluşan permütasyon grubu ve " $\approx$ " Ω üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde

$$“\forall g \in G \text{ ve } \forall \alpha, \beta \in \Omega \text{ için } \alpha \approx \beta \Rightarrow g(\alpha) \approx g(\beta)”$$

bağıntısına Ω üzerinde bir G -invariant denklik bağıntısı adı verilir. Bu bağıntının denklik sınıflarına ise *bloklar* denir. Ayrıca, $[G, \Omega]$ ikilisine *imprimitiftir* denir : $\Leftrightarrow \Omega$ üzerinde

- a) $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (özdeşlik bağıntısı)
- b) $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$ (evrensel bağıntı)

bağıntıları dışında bir " $\approx$ " G -invariant denklik bağıntısı vardır.

Aksi halde $[G, \Omega]$ ya *primitiftir* denir.

Lemma 1.6.2. [1]

$[G, \Omega]$ bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde $[G, \Omega]$ primitiftir $\Leftrightarrow$ bir $\alpha \in \Omega$ noktasının sabitleyeni olan $G_\alpha = \{g \in G \mid g(\alpha) = \alpha\}$, $\forall \alpha \in \Omega$ için G nin bir maksimal bir alt grubudur. ■

Burada bir $\alpha \in \Omega$ için $G_\alpha \not\leq H \not\leq G$ ise $[G, \Omega]$ permütasyon grubu primitif değildir. Ayrıca G_α G 'nin bir maksimal alt grubudur $:\Leftrightarrow G_\alpha \leq H \leq G$ olduğunda $H = G_\alpha$ veya $H = G$ dir. $G_\alpha < H < G$ olduğunu farzedelim. G transitif olarak hareket ettiğinden Ω kümesinin her elemanı bir $g \in G$ için $g(\alpha)$ biçimindedir

Lemma 1.6.3.

$[G, \Omega]$ permütasyon grubu verilsin. Bu takdirde, eğer hareket transitif ise tek yörünge vardır. ■

Lemma 1.6.4.

Ω üzerinde

$$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH \quad (28)$$

ile verilen “ $\approx$ ” denklik bağıntısı iyi tanımlı bir G -invariant denklik bağıntısıdır. ■

Lemma 1.6.5.

$G_\alpha \not\leq H$ olduğundan (28) bağıntısı özdeşlik veya evrensel bağıntı değildir. ■

Sonuç 1.6.6.

Lemma 1.6.5 den “ $\approx$ ” bağıntısı G -invariant denklik bağıntısı olup özdeşlik veya evrensel bağıntı değildir. Buradan (G, Ω) imprimitiftir. ■

Sonuç 1.6.7.

Eğer $\beta \in \Omega$ ise $\exists g \in G$ öyleki $\beta = g(\alpha)$ dır. Böylece β yı içeren $[\beta]$ bloğu $M := \{gh(\alpha) \mid h \in H\}$ kümesi ile verilir. ■

Özellikle de $[\alpha]$ bloğu $H(\alpha) := \{h(\alpha) \mid h \in H\}$ H -yörüngesidir. Gerçekten, $\alpha = e(\alpha)$ alınırsa $[\alpha] = [e(\alpha)] = \{eh(\alpha) \mid h \in H\} = \{h(\alpha) \mid h \in H\} = H(\alpha)$.

Eğer $\{l_i \mid i \in I\}$, H 'nın G 'deki sol yan sınıf gösterimlerinin bir kümesi ise, buradan $i \in I$ olmak üzere bloklar, $H(\alpha)$ 'nın $l_i H(\alpha)$ görüntüleridir. Böylece blokların sayısı H 'nın G 'deki $|I| := |G:H|$ indeksine eşittir. Blokların $\Omega/\approx$ kümesi üzerinde, G 'nin apaçık indirgenmiş bir hareketi vardır. $[\alpha]$ bloğunun sabitleyeni H alt grubunu meydana getirir.

Şimdi $G := \Gamma$ ve $\Omega := \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere Lemma 1.6.2'yi kullanalım. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ keyfi alınsın. Buradan $\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olup $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eşitliğinden $a = 1$ ve $c = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $d = 1$ dir ve böylece $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ olur. Sonuç olarak ∞ un Γ Modüler grubundaki Γ_∞ sabitleyeni $\Gamma_\infty = \langle Z := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ olarak elde edilir. Böylece Γ_∞ sabitleyenini içeren (veya denk olarak Z 'yi içeren) Γ nın H alt gruplarını bularak $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ -invariant denklik bağıntıları üretebiliriz. $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olduğundan, H için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

kongrüans alt grupları uygun bir seçimdir. Açıkça $N \in \mathbb{N}$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(N) \leq \Gamma$ ve $N > 1$ ise $\Gamma_\infty < \Gamma_0(N) < \Gamma$ dır. $\approx_n$ (veya basitçe $\approx$) ile $\Gamma_0(N)$ 'nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde indirgenmiş Γ -invariant denklik bağıntısını gösterelim. Bu durumda $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir Γ -invariant denklik bağıntısı aşağıdaki gibi verilebilir:

Γ Modüler grubu $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olduğundan $\frac{r}{s} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere $\frac{r}{s} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir $T \in \Gamma$ vardır. Böylece $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde

$$T(\infty) = \frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} = S(\infty) \Leftrightarrow T^{-1}S \in H := \Gamma_0(N) \quad (29)$$

dir. Dolayısı ile kolayca görülebilir ki

$$\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{N} \quad (30)$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow T^{-1}S \in \Gamma_0(N) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ry - sx & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \Leftrightarrow N|ry - sx \\ &\Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{N} \end{aligned}$$

elde edilir. Bir başka ifade ile $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ denktir $\Leftrightarrow$ aynı $mod n$ kısaltmasına sahiptirler. Yani,

$$\exists u \in U_n := \{u \mid (u, N) = 1, u \leq N\} : x \equiv ur \pmod{N} \text{ ve } y \equiv us \pmod{N} \quad (31)$$

Bunu görmek için, (30) ve (31) ile verilen iki denklemin de $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ -invariant denklik bağıntısı olarak tanımlandığına dikkat ediniz. ∞ 'u içeren, $[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} \mid y \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ ile verilen blok her iki durumda da aynıdır. Böylece bu iki bağıntı eşittir. Dolayısıyla 0 Lemma ve 0 Lemma'dan $[\Gamma, \widehat{\mathbb{Q}}]$ imprimitiftir. Yani, Γ $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde imprimitif olarak hareket eder.

Blokların sayısı ise

$$\psi(N) := |\Gamma : \Gamma_0(N)| = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \quad (32)$$

kadardır.

Özellikle N değeri p asal sayısına eşit ise $\psi(p) = p + 1$ tane blok vardır ve bu bloklar

$$[j] = \{x/y \in \widehat{\mathbb{Q}} \mid x \equiv jy \pmod{p}\}, j \neq \infty$$

$$[\infty] = \{x/y \in \widehat{\mathbb{Q}} \mid y \equiv 0 \pmod{p}\}$$

olmak üzere $[0], [1], \dots, [p-1], [\infty]$ dur. Örneğin, $p = 2$ için bu bloklar

$$[0] = \left\{ \frac{\text{çift}}{\text{tek}} \right\}, [1] = \left\{ \frac{\text{tek}}{\text{tek}} \right\}, [\infty] = \left\{ \frac{\text{tek}}{\text{çift}} \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 1.6.8.

$m \in PSL(2, \mathbb{R}), m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ olsun. Bu taktirde,

- i. $|a+d| < 2$ ise m ye eliptik eleman,
- ii. $|a+d| = 2$ ise m ye parabolik eleman,
- iii. $|a+d| > 2$ ise m ye hiperbolik eleman adı verilir.

1.7. Γ Modüler Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

$[G, \Omega]$ bir transitif permütasyon grubu olsun. Buradan $[G, \Omega]$ bir topolojik dönüşüm grubudur. Bu takdirde $G, \Omega x \Omega$ üzerinde “ $g \in G$ ve $\alpha, \beta \in \Omega$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \wedge: Gx(\Omega x \Omega) &\rightarrow (\Omega x \Omega) \\ (g, (\alpha, \beta)) &\rightarrow \wedge(g, (\alpha, \beta)) := g \wedge (\alpha, \beta) := (g(\alpha), g(\beta)) \end{aligned} \quad (33)$$

şeklinde hareket eder. Bu hareketin yörüngelerine G nin Alt Yörüngeleri denir ve (α, β) yı içeren yörünge $((\alpha, \beta)$ nın yörüngesi) $O(\alpha, \beta)$ ile gösterilir. $(O(\alpha, \beta) := \{g(\alpha, \beta) \mid g \in G\})$. Buradan,

$$(x, y) \in O(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \exists g \in G : (x, y) = g(\alpha, \beta) = (g(\alpha), g(\beta))$$

dır. $O(\alpha, \beta)$ dan hareketle $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafinı oluşturacağız. Burada $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$ nın köşeleri Ω nın elemanları ve $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise γ dan δ ya (yönlendirilmiş) bir kenar vardır denir ve bu durum $\gamma \rightarrow \delta$ ile gösterilir.

Açıkça $O(\beta, \alpha)$ da bir yörüngedir ve ya $O(\alpha, \beta)$ ya eşittir ya da $O(\alpha, \beta)$ dan farklıdır. Bu takdirde; $O(\alpha, \beta) \neq O(\beta, \alpha)$ ise $G(\beta, \alpha)$, $G(\alpha, \beta)$ nın kenarları ters yönlendirilmişinden ibarettir ve bu durumda $G(\alpha, \beta)$ ile $G(\beta, \alpha)$ ya *eşleşmiş alt yörüngesel graflar* denir. Eğer $O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$ ise $G(\beta, \alpha) = G(\alpha, \beta)$ dır ve bu graf karşılıklı yönlendirilmiş kenarlardan oluşur. Bu durumda $G(\alpha, \beta)$ yönlendirilmiş olmayan bir graf olarak düşünülebilir ve $G(\alpha, \beta)$ ya *kendisiyle eşleşmiş alt yörüngesel graf* denir. Yani, $\gamma \rightarrow \delta$ ise $\delta \rightarrow \gamma$ veya bu durum $\gamma \rightleftharpoons \delta \Leftrightarrow \gamma - \delta$ ile gösterilir.

Önerme 1.7.1. [1]

G bir bir (G, Ω) transitif permütasyon grubu için bir alt yörüngesel graf olsun. Bu takdirde;

- (i) G , G 'nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder;
- (ii) G , G 'nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder;
- (iii) Eğer G kendisiyle eşleşmiş ise bu takdirde G , G 'nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder;
- (iv) G kendisiyle eşleşmiş değil ise bu takdirde G , G 'nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder. ■

$O(\alpha, \alpha) = \{(\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \Omega\}$ $\Omega \times \Omega$ nın köşegenidir. Her $\alpha \in \widehat{\mathbb{Q}}$ köşesi için $G(\alpha, \alpha)$ alt yörüngesel grafi sadece bir düğüm içerir. Bu graf kendisiyle eşleşmiştir. Buna *aşıkâr alt yörüngesel graf* denir. Biz genel olarak aşıkâr olmayan alt yörüngesel graflar ile çalışacağız.

Şimdi Γ 'nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi için alt yörüngesel grafları inceleyelim. Γ , $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden, herbir alt yörünge, bir $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ için (∞, v) çiftini içerir; $n \geq 0$ ve $(u, N) = 1$ olmak üzere $v = \frac{u}{N}$ şeklinde yazarsak, bu alt yörüngeyi $O_{u,N}$ ve buna karşılık gelen $G(\infty, v)$ alt yörüngesel grafini da $\mathbf{G}_{u,N}$ ile göstereceğiz. Eğer $v = \infty$ ise bu, $\mathbf{G}_{1,0} = \mathbf{G}_{-1,0}$ aşıkâr alt yörüngesel grafıdır. Böylece $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olduğunu kabul edebiliriz.

Lemma 1.7.2.

Eğer $v' \in \mathbb{Q}$ ise bu takdirde $O(\infty, v) = O(\infty, v') \Leftrightarrow v$ ve $v' \in \Gamma_\infty$ un aynı yörüngesindedir; Γ_∞ , $Z : v \rightarrow v + 1$ ile üretildiğinden, bu durum $u \equiv u' \pmod{N}$ olmak üzere $v' = \frac{u'}{N}$ ifadesine denktir. ■

Böylece,

$$\mathbf{G}_{u,N} = \mathbf{G}_{u',N'} \Leftrightarrow N \equiv N' \text{ ve } u \equiv u' \pmod{N}$$

dir. Dolayısıyla $\forall N \geq 1$ tamsayısı için $\Phi(N) = |U_N| = N \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ (Euler fonksiyonu) tane farklı $\mathbf{G}_{u,N}$ alt yörüngesel grafi vardır. Bunlardan biri her $u \in U_N$ birimi içindir.

Eğer $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O(u, N)$ yani, $\mathbf{G}_{u,N}$ 'de $\frac{r}{s}$ den $\frac{x}{y}$ ye yönlendirilmiş (veya eğer $\mathbf{G}_{u,N}$ kendisiyle eşleşmiş ise yönlendirilmemiş) bir kenar varsa, $\mathbf{G}_{u,N}$ de $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ yazılır.

Teorem 1.7.3. [1]

$$\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbf{G}_{u,N} \text{ 'de bir kenardır} \Leftrightarrow$$

- a) $x \equiv ur \pmod{N}, y \equiv us \pmod{N}$ ve $ry - sx = N$ veya,
- b) $x \equiv -ur \pmod{N}, y \equiv -us \pmod{N}$ ve $ry - sx = -N$. ■

Sonuç 1.7.4. [1]

$\bar{u}, u\bar{u} \equiv 1 \pmod{N}$ kongrüans denklemini sağlamak üzere, $\mathbf{G}_{u,N}$ ile eşleşmiş alt yörüngesel graf $\mathbf{G}_{-\bar{u},N}$ ' dir. ■

Sonuç 1.7.5.

$$\mathbf{G}_{u,N} \text{ kendisiyle eşleşmiştir} \Leftrightarrow u^2 \equiv -1 \pmod{N} \quad \blacksquare$$

Sonuç 1.7.6.

$G_{u,N}$ en az $\psi(N)$ tane bağlantılı bileşene sahiptir; özellikle eğer $N > 1$ ise $G_{u,N}$ bağlantılı değildir. ■

1.8. Farey Grafi

$G_{1,1}$ grafinin köşelerinin kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}$ dır. Sonuç 1.7.5 ten kendisiyle eşleşmiştir, böylece $G_{1,1}$ i yönlendirilmemiş bir graf olarak kabul edebiliriz. Teorem 1.7.3 ten $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ köşeleri komşudur $\Leftrightarrow ry - sx = \mp 1$ dir. Örneğin ∞ 'a komşu olan köşeler tamsayılardır. Önerme 1.7.1 den Γ , köşeler ve kenarlar üzerinde transitif olarak hareket eden $G_{1,1}$ 'in otomorfizmalarının bir grubudur. Aslında gösterebiliriz ki $Aut_{G_{1,1}}(24)$ 'deki $ad - bc = \pm 1$ koşulunu sağlayan elemanların oluşturduğu $PGL(2, \mathbb{Z})$ genişletilmiş modüler grubudur.

$G_{1,1}$ i Farey dizileriyle olan ilişkisinden dolayı *Farey grafi* olarak adlandıracağız ve F ile göstereceğiz. Her $m \geq 1$ tamsayısı için m mertebeli F_m -Farey dizisi, $|y| \leq m$ olmak üzere kesin artan bir şekilde sıralanan bütün $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ rasyonel sayılarından oluşur. Örneğin,

$$F_4 : \dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \dots$$

dir. Burada kolaylık açısından F_m -Farey dizisinin elemanları $[0,1]$ veya $[-m,m] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralıklarına kısıtlanabilir. Açıkça, $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \dots$ ve $\bigcup_{m \geq 1} F_m = \widehat{\mathbb{Q}}$ 'dur.

Lemma 1.8.1. [1]

$\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ indirgenmiş rasyoneller olsun. Bu takdirde aşağıdaki üç koşul denktir;

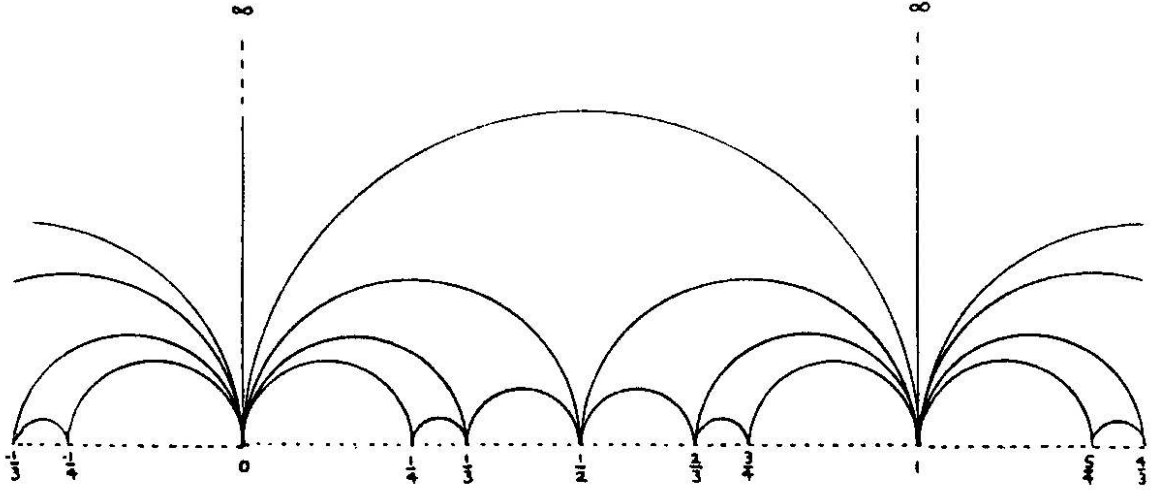
- a) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F 'de komşu köşelerdir;
- b) $ry - sx = \pm 1$;
- c) Bir $m \in \mathbb{N}$ için $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F_m de komşu terimlerdir

İspat. $u = n = 1$ olduğundan ve Teorem 1.7.3 ten a) ve b) denktir. b) ve c) nin denkliği sayılar teorisinin standart bir neticesidir. m nin uygun değerleri

$$\max(|s|, |y|) \leq m < |s| + |y|$$

ile verilir. ■

Buradan artık F nin basit bir yapısını oluşturmak mümkündür. Herbir terime hemen öncesindeki ve sonrasındaki terimleri ekleyerek, herbir F_m , 2 değerli bir ağaç olur; yukarıdaki Lemma'dan bu ağaçların birleşimi F nin $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenmiş alt grafıdır. Böylece ∞ ile işaretlenmiş bir köşe ekleyerek ve bunu tamsayılar ile birleştirerek F yi oluşturabiliriz.



Şekil 20. $m = 4$ 'e karşılık gelen $F = G_{1,1}$ Farey grafi

Bu yapı Şekil 20 de gösterilmiştir. Şekil, kenarların ∞ ile ortak olduğunu veya F_4 ün elemanlarının birleşmesiyle meydana geldiğini gösterir. Bu örnek 1 periyotlu olup periyodiktir. Yani, $x \rightarrow y$ $[0,1]$ aralığında ise $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $x + k \rightarrow y + k$ $[k, k + 1]$ aralığındadır. Görsel uygunluk açısından F nin kenarlarını $\mathbb{H} = \{z \in X \mid \text{Im}(z) > 0\}$ üst yarı düzlemindeki Öklid yarı-çemberleri veya $\mathbb{R}$ 'ye dik olan Öklid yarı-doğruları şeklindeki hiperbolik geodezikler olarak gösterebiliriz. Alışıldığı üzere, yarı-doğruları " ∞ ile

birleşmiş” olarak kabul edeceğiz. (25) ü $\mathbb{H}$ nin hiperbolik izometrilere bir grubu olarak, Γ ile bir hareketi tanımlamak için kullanabiliriz. Bu hareket altında geodezikler geodeziklere resmedilir. Böylece $\mathbb{H}$ daki F gösterimimiz Γ altında invaryanttır.

Sonuç 1.8.2.

F nin kenarları $\mathbb{H}$ da kesişmez.

İspat. Farzedelim ki iki kenar $\mathbb{H}$ da kesişsin. Önerme 1.7.1 iii. den bunlardan bir tanesinin 0 ve ∞ ’u birleştiren $Re(z) = 0$ kenarı ve böylece diğerinin

$$v := \frac{r}{s} < 0 < w := \frac{x}{y}$$

olacak şekilde v ve w rasyonellerini birleştiren kenar olduğunu kabul edebiliriz. Lemma 1.8.1 den herhangi bir F_m de v ve w ardışıktır. Fakat, 0 arada bulunacağı için bu imkansızdır. Çünkü, $ry - sx = \mp 1$ ve $x < 0, r, y, s > 0$ olduğundan $1 = ry - sx \geq 2$ çelişkisi elde edilir. ■

1.9. $G_{u,N}$ ve $F_{u,N}$ Grafları

Şimdi $F = G_{1,1}$ in özelliklerinin diğer $G_{u,N}$ alt yörüngesel graflarına nasıl genişletilebileceğine bakalım. Her bir $G_{u,N}$ en az $\psi(N)$ tane alt grafin ayrık birleşimi olduğundan; her bir alt grafin köşeleri $ry - sx \equiv 0 \pmod{N}$ ile tanımlanan $\approx_N$ Γ -invariant denklik bağıntısına göre tek blok oluşturur. Γ $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olduğundan, bu blokları transitif olarak permüte eder. Böylece alt grafların hepsi izomorfiktir.

$F_{u,N}$, köşeleri ∞ u içeren

$$[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : y \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

bloğundan oluşan $G_{u,n}$ nin bir alt grafi olsun. Böylece $G_{u,N}$, $F_{u,N}$ nin $\psi(N)$ tane ayrık kopyasından oluşur. Teorem 1.7.3 ten aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 1.9.1.

$\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbf{F}_{u,N}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

- a) $x \equiv ur \pmod{N}$ ve $ry - sx = N$ veya,
- b) $x \equiv -ur \pmod{N}$ ve $ry - sx = -N$. ■

Yukarıda incelenen Γ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde imprimitif hareketinin genel olarak irdelenmesinden, Γ nin $\mathbf{F}_{u,N}$ yi invaryant bırakan alt grubu, $\approx_N$ için $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde sonuç veren $\Gamma_0(N)$ kongrüans alt grubudur. Böylece, $\Gamma_0(N) \leq \text{Aut} \mathbf{F}_{u,N}$ dir.

Teorem 1.9.2. [1]

$\Gamma_0(N)$, $\mathbf{F}_{u,N}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder. ■

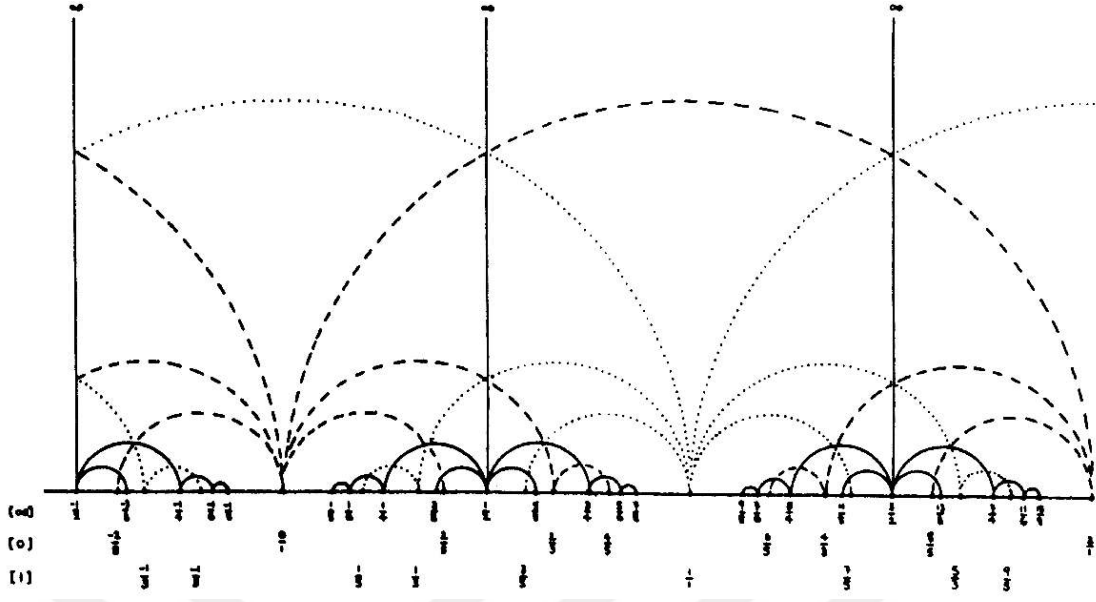
Lemma 1.9.3. [1]

- (i) $\mathbf{F}_{u,N}$ nin bütün v köşeleri için $v \rightarrow -v$ ile verilen $\mathbf{F}_{u,N} \rightarrow \mathbf{F}_{-u,N}$ izomorfizmi vardır;
- (ii) Eğer $m|N$ ise buradan, $\mathbf{F}_{u,N}$ nin bütün v köşeleri için $\mathbf{F}_{u,N}$ den bir $\mathbf{F}_{u,M}$ alt grafına, $v \rightarrow \frac{Nv}{M}$ ile verilen $\mathbf{F}_{u,N} \rightarrow \mathbf{F}_{u,M}$ izomorfizmi vardır. ■

ii. 'de $M = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 1.9.4. [1]

$\mathbf{F}_{u,N}$ nin bütün v köşeleri için $f: v \rightarrow Nv$ ile verilen, $\mathbf{F}_{u,N}$ den bir $\mathbf{F}$ alt grafına, $\mathbf{F}_{u,N} \rightarrow \mathbf{F}_{-u,N}$ izomorfizmi vardır. ■



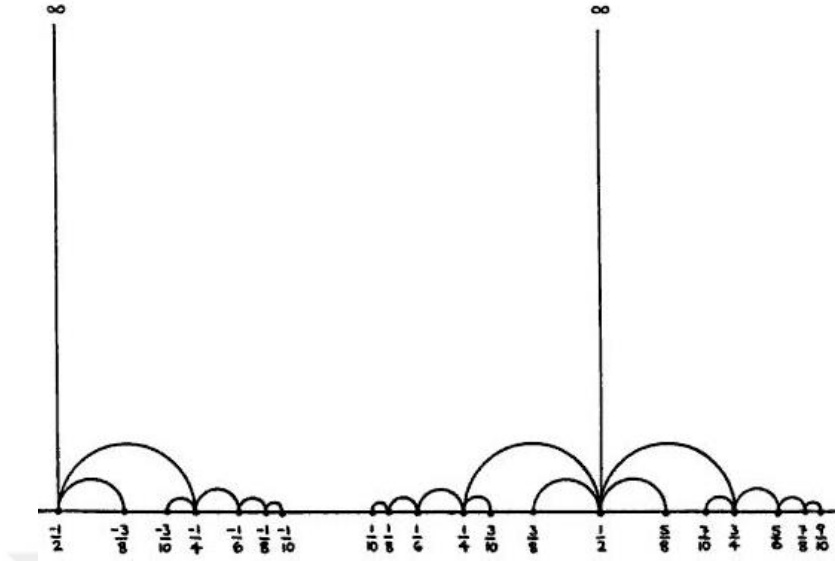
Şekil 21. $G_{1,2}$ Grafı [1]

Şimdi Şekil 21 de gösterilen $G_{1,2}$ grafına bakalım. s çift, r çift veya her ikisi tek olmak üzere, $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ elemanlarını içeren, $[\infty]$, $[0]$ ve $[1]$ bloklarını gösteren sırasıyla kesik olmayan, kesik ve noktalı ($\mathbb{H}$ daki hiperbolik geodezikler ile gösterilen) biçimindeki kenarlar ile $F_{1,2}$ nin $\psi(2) = 3$ tane izomorfik kopyasından oluşur. Sonuç 1.7.5 den $G_{1,2}$ ve böylece de $F_{1,2}$ yönlendirilmemiştir.

Şekil 22’te gösterilen bu graf, s çift olmak üzere r/s köşelerine sahiptir:

$$r/s \text{ ve } x/y \text{ arasında bir kenar vardır} \Leftrightarrow ry - sx = \pm 2'$$

dir.



Şekil 22. $F_{1,2}$ grafi [1]

Şimdi $F_{u,N}$ grafindaki devreleri düşünelim. $F = F_{1,1}$ Farey grafi üçgenler içerirken (bkz. Şekil 20), $F_{1,3}$ yönlendirilmiş grafi

$$\infty \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \infty$$

şeklinde yönlendirilmiş üçgenler içerir.

Teorem 1.9.5.

- (i) $F_{u,N}$ yönlendirilmemiş üçgen içerir $\Leftrightarrow u^2 \pm u + 1 \equiv 0 \pmod{N}$;
- (ii) Eğer $N > 1$ ise bu takdirde $F_{u,N}$ ters yönlendirilmiş üçgen içermez. ■

Kendisiyle eşleşmiş bir $G_{u,N}$ alt yörüngesel grafi $u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ 'yi sağladığından Teorem 1.9.5 e göre $N > 1$ için üçgen içermez.

Teorem 1.9.6.

$N > 1$ ise bu durumda tüm kendisiyle eşleşmiş $G_{u,N}$ alt yörüngesel grafları birer ormandır. ■

Sonuç 1.9.7.

$\mathbf{G}_{1,2}$ bir ormandır. ■

Sonuç 1.9.8.

Eğer N çift ise $\mathbf{G}_{u,N}$ bir ormandır

Teorem 1.9.9. [1]

$N > 1$ herhangi bir tamsayı olsun. Bu takdirde $\mathbf{G}_{u,N}$ bir ormandır $\Leftrightarrow \mathbf{G}_{u,N}$ üçgen içermez; yani, $u^2 \pm u + 1 \not\equiv 0 \pmod{N}$. ■

Sonuç 1.9.10. [15]

$(u, N) = 1$ ise $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olan bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. ■

Teorem 1.9.11. [15]

$\mathbf{F}_{u,N}$ grafi için $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $1 \leq k \leq N$ olsun. Buradan;

- i. $\frac{u}{N}$ köşesinin gideceği en uzak köşe $\frac{u+\frac{1}{k}}{N} = \frac{ku+1}{kN}$ ve $\frac{u}{N}$ köşesinin gittiği en yakın köşe yoktur;
- ii. $\frac{u+\frac{1}{k}}{N}$ köşesinin gideceği en uzak köşe $\frac{u+\frac{1}{k-\frac{1}{k}}}{N} = \frac{(k^2-1)u+k}{(k^2-1)N}$ ve $\frac{u+\frac{1}{k}}{N}$ köşesinin gittiği en yakın köşe yoktur. ■

Teorem 1.9.12. [15]

Aşağıdaki sonuçlar birbirine denktir:

- (i) $\mathbf{F}_{u,N}$ grafında bir K kapalı eğrisi vardır
- (ii) K kapalı eğrisi bir üçgendir
- (iii) $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{N}$. ■

Teorem 1.9.13. [15]

$k \in \mathbb{N}$ ve $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olsun. Bu takdirde;

- i. $1 < k < N$ için $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki her yol minimal uzunluktur;
- ii. $k = 1$ için $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki herhangi bir yolun minimal uzunluklu olması gerekmez. ■



2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1.

$v_0, v_1, v_2, \dots, v_m$ $F_{u,N}$ grafinin farklı köşelerinin bir dizisi olsun. $m \geq 2$ olduğunda $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ biçimi yönlendirilmiş devre (kapalı yol) olarak adlandırılır. Eğer bu biçimde en az bir ok (hepsi değil) geri dönüyorsa, bu yönlendirilmemiş (ters yönlendirilmiş) devre olarak adlandırılır. $m = 2$ durumunda devre yönlendirilmiş olsun yada olmasın üçgen olarak adlandırılır. $m = 1$ durumunda ise $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_0$ biçimleri kendine eşleşmiş bir kenar olur. $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ ve $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots$ biçimleri $F_{u,N}$ de sırasıyla bir yol ve bir sonsuz yol olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2.

Eğer

$$\frac{r}{s} \xrightarrow{\leq} \frac{x}{y} \in \mathbf{F}_{u,N} \text{ (ya da } \frac{x}{y} \xleftarrow{\leq} \frac{r}{s} \in F_{u,N})$$

ise, en uzak köşe Teorem1.9.1 deki şartları sağlayan $F_{u,N}$ alt grafında $\frac{r}{s}$ köşesinin gittiği $\frac{x}{y}$ den daha büyük değere sahip hiçbir köşe olmadığı anlamına gelir.

Tanım 2.1.3.

$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ yolunun minimal uzunluklu olarak adlandırılması için gerek ve yeter şart $i < j - 1, i \in \{0,1,2,3, \dots, m - 2\}, j \in \{2,3, \dots, m\}$ olacak şekilde $v_i \leftrightarrow v_j$ ve $v_{i+1}, F_{u,N}$ de v_i köşesinin gittiği en uzak köşe olmasıdır.

Tanım 2.1.4.

Eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ hiçbir devre içermezse orman olarak adlandırılır. Eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ bağlantılı, boş olmayan, devre içermeyen bir grafsa ağaç olarak adlandırılır.

2.2. Temel Hesaplamalar

$u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $\varphi = \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2+ku+1}{N} \\ -N & u+k \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ olmak üzere, $\varphi(\infty) = v_0$, $\varphi(v_0) = v_1$, $\varphi(v_1) = v_2$ ve bu şekilde devam edilirse φ dönüşümü $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindeki sağ yönlendirme için minimal uzunluklu yoldaki köşeleri

$$\infty \rightarrow \frac{u}{N} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k}}{N} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}{N} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}}{N} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}}}{N} \rightarrow \dots \quad (34)$$

şeklinde verir.

Sonuç 2.2.1.

Eğer $\frac{u+\frac{x}{y}}{N}$, $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindeki minimal uzunluklu yolda bir köşe ise, onun gittiği en uzak köşe, q pozitif tamsayıları ve $v_0 = \frac{u}{N}$ için $v_q = \varphi^q(v_0)$ olmak üzere

$$\varphi\left(\frac{u + \frac{x}{y}}{N}\right) = \frac{u + \frac{y}{ky - x}}{N}$$

dir. Burada $\frac{u+\frac{x}{y}}{N}$ köşesinin gittiği sonsuz sayıda köşe vardır, fakat $\frac{u+\frac{y}{ky-x}}{N}$ köşesi en uzak olanıdır. ■

Sonuç 2.2.2.

$(u, N) = 1$ ise $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olan bir $l \in \mathbb{Z}$ vardır.

İspat. $(u, N) = 1$ olduğundan $ux + Ny = 1$ olan $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $ux \equiv 1 \pmod{N}$ elde edilir. Böylece $ux(-u^2 - 1) \equiv -u^2 - 1 \pmod{N}$ olur. $l := x(u^2 + 1)$ alınırsa $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ bulunur. ■

Teorem 2.2.3.

$1 < k, l \leq N$, $k, l \in \mathbb{Z}$ için $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ kongrüansları verilsin. Bu durumda eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ kendisi ile eşleşmiş ise $k = l = N$, aksi taktirde $l = N - k$ dır.

İspat. $1 < k, l \leq N$ olmak üzere

$$u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N} \text{ ve } u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$$

kongrüans denklemlerinden

$$ku + lu \equiv 0 \pmod{N}$$

elde edilir. $(u, N) = 1$ olduğundan $k \equiv -l \pmod{N}$ dir. Böylece $k = Ny - l$ olacak şekilde bir y tamsayısı vardır. $N > 1$ için $2 < k + l \leq 2N$ eşitsizliğinden $2 < Ny \leq 2N$ buradan da $\frac{2}{N} < y \leq 2$ elde edilir. Böylece $N > 1$ olduğundan, y tamsayısının değeri 1 ya da 2 olabilir. Diğer taraftan, eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ kendisi ile eşleşmiş bir graf ise Sonuç 1.7.5 ten

$$u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{N}$$

olup $ku \equiv 0 \pmod{N}$ ve $-lu \equiv 0 \pmod{N}$ dir. $(u, N) = 1$ olduğundan

$$k \equiv 0 \pmod{N} \text{ ve } -l \equiv 0 \pmod{N}$$

olup $k - l \equiv 0 \pmod{N}$ elde edilir. Böylece

$$k - l = Nt$$

olacak şekilde bir t tamsayısı mevcuttur. Eğer $k = l = N$ ise açık bir şekilde $t = 0$ olur. Gerçekten, eğer $1 < k, l \leq N$ ise $1 - N < k - l < N - 1$ olup $1 - N < Nt < N - 1$ dir. $N > 1$ olduğundan $|t| < 1 - \frac{1}{N}$ ve buradan da $t = 0$ olmalıdır. Böylece $k = l$ olur. Öte yandan eğer graf kendisi ile eşleşmiş bir graf ise $1 < k \leq N$ ve $ku \equiv 0 \pmod{N}$ olduğundan $k = N$ olmalıdır. Böylece $k = l = N$ bulunur. Sonuç olarak eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ grafi

kendisi ile eşleşmiş ise $y = 2$ olup $k = l = N$ ve aksi taktirde ise $y = 1$ dolup $l = N - k$ elde edilir. ■

Teorem 2.2.4.

$\mathbf{F}_{u,N}$ grafında $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $1 < l \leq N$ olsun. Bu halde;

- i. $\frac{u}{N}$ ile köşesinin gideceği en uzak köşe $\frac{u-\frac{1}{l}}{N} = \frac{lu-1}{lN}$ dir ve $\frac{u}{N}$ köşesinin gittiği en yakın köşe yoktur.
- ii. $\frac{u-\frac{1}{l}}{N}$ köşesinin gideceği en uzak köşe $\frac{u-\frac{1}{l}}{N} = \frac{(l^2-1)u-l}{(l^2-1)N}$ dir ve $\frac{u-\frac{1}{l}}{N}$ köşesinin gittiği en yakın köşe yoktur.

İspat.

- i. $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $\frac{u}{N} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ noktası $[\infty] = \left\{ \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} : d \equiv 0 \pmod{N} \right\}$

bloğunda olduğundan, $\frac{u}{N}$ $\mathbf{F}_{u,N}$ grafında bir köşedir. Bu halde;

$$\frac{u}{N} > \frac{u - \frac{a}{b}}{N} = \frac{bu - a}{bN}$$

olsun. Bu taktirde $\mathbf{F}_{u,N}$ grafi için Teorem 1.9.1 deki kenar şartından;

$$bu - a \equiv u^2 \pmod{N} \text{ ve } ubN - (bu - a)N = N$$

yazılır. Buradan $a = 1$ elde edilir. Bu durumda

$$\frac{u}{N} > \frac{bu - a}{bN}$$

kenarı için, Teorem 1.9.1 deki kenar şartından elde edilen $a = 1$ değerini yerine yazarsak, $bu - 1 \equiv u^2 \pmod{N}$ olup $u^2 - bu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ elde edilir. Böylece buradan sonuç olarak $u^2 + 1 \equiv lu \pmod{N}$ kongrüans denklemi ile birlikte $bu - lu \equiv 0 \pmod{N}$ ve

buradan da $(u, N) = 1$ olup $b \equiv l \pmod{N}$ elde edilir. Dolayısı ile $b := l + Nx, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dır. Böylece de

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{l + Nx}$$

dir. Bu taktirde;

$$f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{u - \frac{1}{Nx + l}}{N} = \frac{uNx + lu - 1}{N^2x + lN}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu kesin artan bir fonksiyondur. Gerçekten, bu fonksiyonun türevine bakacak olursak

$$f'(x) = \frac{1}{(Nx + l)^2} > 0$$

dir. Bu yüzden f fonksiyonunun alabileceği en küçük değer $x = 0$ noktasındaki değerdir ki bu değer de

$$\frac{u - \frac{1}{l}}{N}$$

dir. Yani

$$\frac{u}{N} > \frac{u - \frac{1}{l}}{N} = \frac{lu - 1}{lN}$$

dir. Ayrıca burada $(lu - 1, lN) = 1$ dir. Gerçekten, $(lu - 1, l) = 1$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $(u, N) = 1$ olduğundan $(lu - 1, lN) = 1$ elde edilir.

Dolayısı ile $\frac{u - \frac{1}{l}}{N}$ $\mathbf{F}_{u,N}$ grafında bir köşedir ve $\frac{u}{N}$ köşesinin gittiği en uzak köşedir. Ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u - \frac{1}{Nx + l}}{N} = \frac{u}{N}$$

olduğundan $\frac{u}{N}$ köşesinin gittiği en yakın köşe söz konusu olamaz. Çünkü, $\frac{u}{N}$ köşesinin gittiği köşeden daha büyük sonsuz köşe vardır.

ii. $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olduğundan ve i. şikkından $\frac{u-\frac{1}{l}}{N} = \frac{lu-1}{lN}$ $\mathbf{F}_{u,N}$ de bir köşedir. Bu halde;

$$\frac{u-\frac{1}{l}}{N} = \frac{lu-1}{lN} \rightarrow \frac{u-\frac{p}{q}}{N} = \frac{qu-p}{qN}$$

olsun. Bu taktirde $\mathbf{F}_{u,N}$ grafi için Teorem 1.9.1 deki kenar şartından;

$$qu - p \equiv u(lu - 1) \pmod{N} \text{ ve } (lu - 1)qN - lN(qu - p) = N$$

dir. Buradan $q = pl - 1$ elde edilir. Bu durumda

$$\frac{lu - 1}{lN} \rightarrow \frac{qu - p}{qN}$$

kenarı için, Teorem 1.9.1 deki kenar şartından $u(pl - 1) - p \equiv u(lu - 1) \pmod{N}$ elde edilir. Buradan da

$$p(lu - 1) - lu^2 \equiv 0 \pmod{N}$$

olur. Böylece buradan sonuç olarak $lu - 1 \equiv u^2 \pmod{N}$ kongrüans denklemi ile birlikte $pu^2 - lu^2 \equiv 0 \pmod{N}$ ve buradan da $(u^2, N) = 1$ olup $p \equiv l \pmod{N}$ elde edilir. Dolayısı ile $p := l + Nx, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dir. Böylece de

$$\frac{p}{q} = \frac{1 + Nx}{l(l + Nx) - 1}$$

dir. Bu taktirde;

$$f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{u - \frac{l + Nx}{l(l + Nx) - 1}}{N}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu kesin artan bir fonksiyondur. Gerçekten bu fonksiyonun türevine bakacak olursak

$$f'(x) = \frac{1}{[l(l + Nx) - 1]^2} > 0$$

dır. Bu yüzden f fonksiyonunun alabileceği en küçük değer $x = 0$ noktasındaki değerdir ki bu değer de

$$\frac{u - \frac{l}{l^2 - 1}}{N}$$

dir. Yani

$$\frac{lu - 1}{lN} > \frac{u - \frac{1}{l^2 - 1}}{N} = \frac{(l^2 - 1)u - l}{(l^2 - 1)N}$$

dir. Ayrıca burada

$$((l^2 - 1)u - l, (l^2 - 1)N) = 1$$

dir. Gerçekten ilk önce $((l^2 - 1)u - l, l^2 - 1) = 1$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $((l^2 - 1)u - l, l^2 - 1) = m$ olsun. Buradan $m | l^2 - 1$ olduğundan $m | (l^2 - 1)u$ ve $m | (l^2 - 1) - l$ olduğundan $m | -l$ elde edilir. $m | l^2 - 1$ olduğundan $m | -1$ olup $m = \pm 1$ dir.

Şimdi $((l^2 - 1)u - l, N) = 1$ olup olmadığını kontrol edelim. $N_0 \neq 0$ olmak üzere $((l^2 - 1)u - l, N) = N_0$ olsun. Buradan

$$(l^2 - 1)u - l = l(lu - 1) - u \equiv 0 \pmod{N_0}; N \equiv 0 \pmod{N_0} \quad (35)$$

ve $lu - 1 \equiv u^2 \pmod{N}$ olduğundan

$$lu - 1 \equiv u^2 + Nt \equiv u^2 \pmod{N_0} \quad (36)$$

olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}$ mevcut olup (35) den elde edilen $l(u^2) - u \equiv 0 \pmod{N_0}$ kongrüans denklemi kullanılarak $lu - 1 \equiv 0 \pmod{N_0}$ bulunur ve bu bir çelişkidir çünkü, (35) ve (36) den $u^2 \equiv 0 \pmod{N_0}$ denklemi elde edilir. Bu durumda $N_0 | u^2$ ve $(u, N) = 1$ olduğundan $N_0 = 1$ dir. Böylece

$$((l^2 - 1)u - l, (l^2 - 1)N) = 1$$

olup $\frac{u - \frac{l}{(l^2-1)}}{N}$ $\mathbf{F}_{u,N}$ grafında bir köşedir ve aynı zamanda $\frac{lu-1}{lN}$ köşesinin gittiği en uzak köşedir. Ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u - \frac{l + Nx}{l(l + Nx) - 1}}{N} = \frac{u - \frac{1}{l}}{N}$$

olduğundan $\frac{lu-1}{lN}$ köşesinin gittiği en yakın köşe söz konusu olamaz. Çünkü, böyle bir en yakın köşe yoktur. Çünkü $\frac{lu-1}{lN}$ köşesinin gittiği köşeden daha büyük sonsuz çoklukta köşe vardır. ■

$$w(\infty) = v_0, w(v_0) = v_1 \text{ ve bu şekilde devam edilerek } w := \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2 - lu + 1}{N} \\ -N & u - l \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

dönüşümü tanımlansın. Bu halde bu dönüşüm $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindeki sol yönlendirme için minimal uzunluklu yoldaki köşeleri verir.

Sonuç 2.2.5.

Eğer $\frac{u - \frac{x}{y}}{N}$ $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindeki minimal uzunluklu yolda bir köşe ise bu köşenin gittiği en uzak köşe, q pozitif tamsayıları ve $v_0 = \frac{u}{N}$ için $v_q = w^q(v_0)$ olmak üzere

$$w\left(\frac{u - \frac{x}{y}}{N}\right) = \frac{u - \frac{y}{ly - x}}{N}$$

dir. Burada $\frac{u-x}{N}$ köşesinin gittiği sonsuz sayıda köşe vardır, fakat $\frac{u-y}{N}$ köşesi en uzak olanıdır. ■

Sonuç 2.2.6.

$w := \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2-lu+1}{N} \\ -N & u-l \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ dönüşümü, $l = 1$ ise 3. mertebeden eliptik, $l = 0$ ise 2.

mertebeden eliptik ve $l = 2$ ise paraboliktir. Gerçekten $0 \leq iz^2w < 4$ olup w dönüşümü eliptik ve $iz^2w = 4$ olup w paraboliktir. ■

Sonuç 2.2.7.

Eğer $u^2 - u + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ise $F_{u,N}$ grafında $\frac{1}{0} \leftarrow \frac{u-1}{N} \leftarrow \frac{u}{N} \leftarrow \frac{1}{0}$ şeklinde bir üçgen vardır. ■

Sonuç 2.2.8.

Eğer $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $1 < l \leq N$ ise $F_{u,N}$ grafında köşeleri

$$M := \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{u - T_n(0)}{N} : T_n = t_0 t_1 t_2 \dots t_n, \quad t_0(z) = z, \quad t_n(z) := t(z) = \frac{-1}{-l + z} \right\} \cup \left\{ \infty = \frac{1}{0} \right\}$$

kümesinde olan

$$\dots \leftarrow \frac{u - \frac{1}{l - \frac{1}{l - \frac{1}{l}}}}{N} \leftarrow \frac{u - \frac{1}{l - \frac{1}{l}}}{N} \leftarrow \frac{u - \frac{1}{l}}{N} \leftarrow \frac{u}{N} \leftarrow \frac{1}{0} \quad (37)$$

minimal uzunluklu sonsuz hiperbolik yolu vardır. ■

2.3. Alt Yörüngesel Grafların Köşeleri İçin Yinelenme Bağlılıları ile Sürekli Kesirler

Bir sürekli kesirin Möbiüs dönüşümlerinin bir dizisi ile ifade edilebileceği bilinir. M kümesindeki köşelerin Möbiüs dönüşümlerinin böyle bir dizisi tarafından üretildiği görülür. Böylece burada bu köşeler ile bu diziler arasında doğal olarak bir bağlantı vardır. Bu bölümün amacı bu bağlantıyı kullanarak alt yörüngesel grafların köşelerini daha pratik bir şekilde veren bazı formüller sağlamaktır.

$F_{u,N}$ grafindaki minimal uzunluklu yoldaki köşelerin sol yönlendirmesi için, $n \geq 1$ olmak üzere $a_n := -1 \neq 0$ ve $b_n := -l \leq -2$ alınırsa $B_n = -A_{n+1}$ elde edilir. Gerçekten M kümesinden, $T_n(z) = t^n(z)$ olmak üzere

$$T_1(z) = \frac{-1}{-l+z}, T_2(z) = \frac{-1}{-l+\frac{-1}{-l+z}}, T_3(z) = \frac{-1}{-l+\frac{-1}{-l+\frac{-1}{-l+z}}}, \dots$$

dir. Dolayısı ile (19) ve (20) yinelenme bağlantılarından

$$A_1 = b_1 A_0 + a_1 A_{-1} = (-l).0 + (-1).1 = -1$$

$$B_1 = b_1 B_0 + a_1 B_{-1} = (-l).1 + (-1).0 = -l$$

$$A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0 = (-l).(-1) + (-1).0 = l$$

$$B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0 = (-l).(-l) + (-1).1 = l^2 - 1$$

$$A_3 = b_3 A_2 + a_3 A_1 = (-l).l + (-1).(-1) = -l^2 + 1$$

$$B_3 = b_3 B_2 + a_3 B_1 = (-l).(l^2 - 1) + (-1).(-l) = -l^3 + 2l$$

$$A_4 = b_4 A_3 + a_4 A_2 = (-l).(-l^2 + 1) + (-1).(l^2 - 1) = l^3 - 2l$$

$$B_4 = b_4 B_3 + a_4 B_2 = (-l).(-l^3 + 2l) + (-1).(l^2 - 1) = l^4 + 3l^2 - 1$$

⋮

olarak bulunur. Buradan her $n \geq 1$ için

$$B_n = -A_{n+1}$$

olur. Böylece $\forall n \geq 1$ için $f_n = T_n(0) = \frac{A_n}{B_n}$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindeki minimal uzunluklu yoldaki sol yönlendirme için bir köşe $\frac{u-T_n(0)}{N}$ şeklindedir. Dolayısı ile (37) hiperbolik yolu için n . köşe

$$\frac{u - T_n(0)}{N} = \frac{A_{n+1}u + A_n}{A_{n+1}N} \quad (38)$$

olur. Benzer şekilde sağ yönlendirme için (19) ve (20) yinelenme bağıntılarından yola çıkılarak $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindeki minimal uzunluklu hiperbolik yoldaki n . köşe ise, $\forall n \geq 1$ için $a_n := -1$ ve $b_n := -k$ olmak üzere

$$\frac{u + T_n(0)}{N} = \frac{A_{n+1}u - A_n}{A_{n+1}N} \quad (39)$$

ile verilir.

$\mathbf{F}_{u,N}$ grafindeki sol yönlendirmeye göre minimal uzunluklu yoldaki n . köşe

$$\frac{u - \frac{A_n}{B_n}}{N} = \frac{u + \frac{A_n}{A_{n+1}}}{N}$$

ile verildiğinden ve $\omega\left(\frac{u-\frac{x}{y}}{N}\right) = \frac{u-\frac{y}{ly-x}}{N}$ bağıntısı kullanılarak $x = A_n$ ve $y = B_n = -A_{n+1}$

olmak üzere bu köşenin gittiği en uzak köşe olan $(n+1)$. köşe

$$\omega\left(\frac{u + \frac{A_n}{A_{n+1}}}{N}\right) = \frac{u - \frac{A_{n+1}}{lA_{n+1} + A_n}}{N} = \frac{ulA_{n+1} + uA_n - A_{n+1}}{NlA_{n+1} + NA_n}$$

ile verilir. Diğer bir taraftan (38) eşitliğinden bu köşe

$$\frac{A_{n+2}u + A_{n+1}}{A_{n+2}N}$$

ile verilebilir. Böylece yukarıdaki her iki ifadeden ve $\forall n \geq 0$ için $A_{n+1} \neq 0, l \geq 2$ olduğundan

$$\frac{ulA_{n+1} + uA_n - A_{n+1}}{NlA_{n+1} + NA_n} = \frac{A_{n+2}u + A_{n+1}}{A_{n+2}N}$$

olur. Bu eşitlikten ise

$$\begin{aligned} ulNA_{n+1}A_{n+2} + uNA_nA_{n+2} - NA_{n+1}A_{n+2} \\ = ulNA_{n+1}A_{n+2} + uNA_nA_{n+2} + Nl(A_{n+1})^2 + NA_nA_{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise

$$lA_{n+1} + A_{n+2} + A_n = 0 \quad (40)$$

bulunur. Bu elde edilen eşitlik (19) ve (20) yinelenme bağıntılarını sağlar.

Sonuç 2.3.1.

$\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki minimal uzunluklu yoldaki sağ yönlendirme için $k \geq 2$ olmak üzere

$$kA_{n+1} + A_{n+2} + A_n = 0$$

şeklindedir. ■

Teorem 2.3.2.

Eğer $k = 2$ ise $A_n = (-1)^n n$ ve eğer $k > 2$ ise

$$A_n = (-1)^n 2^{1-n} \sum_{t=1}^n \left(k + \sqrt{k^2 - 4}\right)^{n-t} \left(k + \sqrt{k^2 - 4}\right)^{t-1} \quad (41)$$

dir.

İspat. Sonuçtan 2.3.1 den

$$A_n = -kA_{n-1} - A_{n-2} \quad (42)$$

yinelenme bağıntısını elde edilir. Eğer $k = 2$ ise (20) başlangıç şartları kullanılarak

$$A_n + 2A_{n-1} + A_{n-2} = 0$$

yinelenme bağıntısı çözümlenmelidir. Bu bağıntı için karakteristik denklem $s = -1$ şeklinde tek bir köke sahip $s^2 + 2s + 1 = 0$ denklemdir. O zaman (42) denkleminin herhangi bir çözümü

$$A_n = \alpha(-1)^n + \beta n(-1)^n \quad (43)$$

şeklindedir. Böylece

$$A_0 = \alpha = 0$$

$$A_1 = -\alpha - \beta = -1$$

dir. Bu sistemi çözerek $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ bulunur. Böylece (43) eşitliğinden $A_n = (-1)^n n$ elde edilir.

Şimdi eğer $k > 2$ ise (20) başlangıç şartları kullanılarak

$$A_n + kA_{n-1} - A_{n-2} = 0$$

yinelenme bağıntısı çözümlenmelidir. Bu eşitlik için karakteristik denklem

$$s = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4}}{2} \text{ ve } s = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

olacak şekilde iki farklı gerçel köke sahip $s^2 + ks - 1 = 0$ denklemdir. Bu halde (42) eşitliğini herhangi bir çözümü

$$A_n = \alpha \left(\frac{-k + \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{-k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right)^n \quad (44)$$

şeklindedir. Böylece

$$A_0 = \alpha + \beta = 0$$

$$A_1 = \alpha \left(-k + \sqrt{k^2 - 4} \right) + \beta \left(-k - \sqrt{k^2 - 4} \right) = -2$$

dir. Bu sistemi çözerek $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{k^2 - 4}}$ ve $\beta = \frac{1}{\sqrt{k^2 - 4}}$ bulunur. Böylece (44) eşitliğinden

$$A_n = \left(-\frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{\sqrt{k^2 - 4}} \left[\left(k + \sqrt{k^2 - 4} \right)^n - \left(k - \sqrt{k^2 - 4} \right)^n \right] \quad (45)$$

elde edilir. Öte yandan $\left(k + \sqrt{k^2 - 4} \right)^n - \left(k - \sqrt{k^2 - 4} \right)^n$ yerine

$$2\sqrt{k^2 - 4} \sum_{t=1}^n \left(k + \sqrt{k^2 - 4} \right)^{n-t} \left(k - \sqrt{k^2 - 4} \right)^{t-1} \quad (46)$$

alınırsa (45) ve (46) den

$$A_n = (-1)^n 2^{1-n} \sum_{t=1}^n \left(k + \sqrt{k^2 - 4} \right)^{n-t} \left(k - \sqrt{k^2 - 4} \right)^{t-1}$$

elde edilir. ■

Sonuç 2.2.8 ve (40) eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuç benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 2.3.3.

Eğer $l = 2$ ise, $A_n = (-1)^n n$ ve eğer $l > 2$ ise

$$A_n = \left(-\frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{\sqrt{l^2 - 4}} \left[\left(l + \sqrt{l^2 - 4} \right)^n - \left(l - \sqrt{l^2 - 4} \right)^n \right] \quad (47)$$

olup

$$A_n = (-1)^n 2^{1-n} \sum_{t=1}^n \left(l + \sqrt{l^2 - 4} \right)^{n-t} \left(l - \sqrt{l^2 - 4} \right)^{t-1} \quad (48)$$

dır. ■

Lemma 2.3.4.

$N = u + 1$ ve $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u+bN, (b+1)N}$ grafi için sağ yönlendirmeye göre minimal uzunluklu sonsuz yol

$$\frac{1}{0} \rightarrow \frac{u + bN}{N(b+1)} \rightarrow \frac{u + N(2b+1)}{2N(b+1)} \rightarrow \frac{u + N(3b+2)}{3N(b+1)} \rightarrow \frac{u + N(4b+3)}{4N(b+1)} \rightarrow \dots$$

olarak verilir.

İspat. Eğer $N = u + 1$ ise, $\mathbf{F}_{u+bN, (b+1)N}$ grafi $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $\alpha = u(1+b) + b$ olmak üzere

$$F_{\alpha, \alpha+1}$$

olarak verilir. Böylece

$$\alpha^2 + k\alpha + 1 \equiv 0 \pmod{(\alpha + 1)}$$

kongrüans denklemini sağlayan en küçük pozitif tamsayı $k = 2$ dir. Böylece $F_{u+bN, (b+1)N}$ alt yörüngesel grafinin minimal uzunluklu sonsuz yolu

$$\frac{1}{0} \rightarrow \frac{u + bN}{N(b+1)} \rightarrow \frac{u + bN + \frac{1}{2}}{N(b+1)} \rightarrow \frac{u + bN + \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}{N(b+1)} \rightarrow \frac{u + bN + \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}{N(b+1)} \rightarrow \dots$$

olur. Buradan bu yoldaki rasyonel değerli köşeler için her bir paydaki bir tek u değeri sabit bırakılır ve diğer kalan u değeri yerine de $u = N - 1$ yazılırsa

$$\frac{1}{0} \rightarrow \frac{u + bN}{N(b + 1)} \rightarrow \frac{2u + 2bN + 1}{2N(b + 1)} \rightarrow \frac{3u + 3bN + 2}{3N(b + 1)} \rightarrow \frac{4u + 4bN + 3}{4N(b + 1)} \rightarrow \dots$$

elde edilir. ■

Sonuç 2.3.5.

Eğer $l = 2$ veya $k = 2$ ise $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindeki $\frac{u}{N}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluklu yoldaki n . köşe sol ve sağ yönlendirme için sırası ile $\frac{(n+1)u-n}{(n+1)N}$ ve $\frac{(n+1)u+n}{(n+1)N}$ dir.

İspat. $\forall n \geq 0$ için $b_n = -l = -2$ ve $a_n = -1$ olduğundan Sonuç 2.3.3 den

$$A_n = (-1)^n n$$

dir. Böylece (38) den sol yönlendirme için $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindeki minimal uzunluklu yolun n . köşesi

$$\frac{(-1)^{n+1}(n+1)u + (-1)^n n}{(-1)^{n+1}(n+1)N}$$

dir. Böylece buradan istenen köşe olarak $\frac{(n+1)u-n}{(n+1)N}$ elde edilir.

Sağ yönlendirme için benzer şekilde $\forall n \geq 0$ için $b_n = -k = -2$ ve $a_n = -1$ olduğundan Teorem 2.3.2 den

$$A_n = (-1)^n n$$

dir. Böylece (39) dan sağ yönlendirme için $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindeki minimal uzunluklu yolun n . köşesi

$$\frac{(-1)^{n+1}(n+1)u - (-1)^n n}{(-1)^{n+1}(n+1)N}$$

dir. Böylece buradan istenen köşe olarak $\frac{(n+1)u+n}{(n+1)N}$ elde edilir. ■

Sonuç 2.3.6.

Eğer $l = 3$ veya $k = 3$ ise, m . Fibonacci sayısı

$$F_m = \begin{cases} 0, & m = 0 \\ 1, & m = 1 \\ F_{m-1} + F_{m-2}, & m > 1 \end{cases} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m}{\sqrt{5}} \quad (49)$$

olduğundan, $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki $\frac{u}{N}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluklu yoldaki n . köşe sol ve sağ yönlendirme için sırası ile $\frac{F_{2n}-F_{2n+2}u}{F_{2n+2}N}$ ve $\frac{F_{2n}+F_{2n+2}u}{F_{2n+2}N}$ dir.

İspat. $\forall n \geq 0$ için $b_n = -l = -3$ ve $a_n = -1$ olduğundan Sonuç 2.3.3 den

$$A_n = (-1)^n F_{2n}$$

dir. Gerçekten, (47), (49) eşitliğinden ve $l = 3$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{5}} \left((3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right) &= (-1)^n \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{5}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2^n} \left((3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} &= 0 \\ \Rightarrow 2^n \left((3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right) - \left[(6+2\sqrt{5})^n - (6-2\sqrt{5})^n\right] &= 0 \\ \Rightarrow 2^n \left((3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right) - 2^n \left((3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece (38) den sol yönlendirme için $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki minimal uzunluklu yolun n . köşesi

$$\frac{(-1)^{n+1} F_{2(n+1)} u + (-1)^n F_{2(n+1)-2}}{(-1)^{n+1} F_{2(n+1)} N}$$

dir. Böylece buradan istenen köşe $\frac{F_{2n}-F_{2n+2}u}{F_{2n+2}N}$ elde edilir.

Sağ yönlendirme için benzer şekilde $\forall n \geq 0$ için $b_n = -k = -3$ ve $a_n = -1$ olduğundan Teorem 2.3.2 den

$$A_n = (-1)^n F_{2n}$$

dir. Böylece (39) dan sağ yönlendirme için $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki minimal uzunluklu yolun n . köşesi

$$\frac{(-1)^{n+1}F_{2(n+1)}u - (-1)^n F_{2(n+1)-2}}{(-1)^{n+1}F_{2(n+1)}N}$$

dir. Böylece buradan istenen köşe olarak $\frac{F_{2n}+F_{2n+2}u}{F_{2n+2}N}$ elde edilir. ■

Sağ yönlendirme için yinelenme bağıntılarının matris bağlantısından

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ -A_n & -A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}^n \quad (50)$$

verilebilir. Bu halde $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki minimal uzunluklu yolun n . köşesi $\frac{A_{n+1}u-A_n}{A_{n+1}N}$ olup aynı zamanda bu köşe (50) matris eşitliğinden de bulunabilir.

Benzer şekilde sol yönlendirme için de n . köşe $\frac{A_{n+1}u+A_n}{A_{n+1}N}$ olup bu köşe

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ -A_n & -A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -l \end{pmatrix}^n$$

matris bağlantısı kullanılarak bulunabilir.

2.4. Alt Grafların Ölçüsü ve Karmaşıklığı

$\mathbf{F}_{11}$ ile temsil edilen $\mathcal{F}$ - Farey grafi bağlantılı ve üçgensel devreler içeren yönlendirilmemiş bir graftır. [1] deki bağlantılılık tanımından, $v_1, v_2 \in \hat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere

herhangi iki köşe arasındaki $d(v_1, v_2)$ Farey uzaklığı, v_1 den v_2 ye $\mathcal{F}$ grafında herhangi bir yol üzerindeki kenarların minimum sayısı olarak verilir. Böylece $d, \hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir metriktir. Ayrıca [1] den, $\mathcal{F}$ Farey grafında, ∞ dan herhangi bir v köşesine olan en kısa yol, v yi bir sürekli kesir ile ifade ederek bulunabilir. Bu sürekli kesir $c_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere;

$$v = c_1 - \frac{1}{c_2 - \frac{1}{c_3 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{c_m}}}}$$

dir. Buradan $d(\infty, v) = m$ olarak verilir. Böylece $d(\infty, v)$, v nin karmaşıklığının bir ölçüsü olarak kabul edilebilir. Dolayısıyla $\mathcal{F}$ de $p + q^{-1} (p, q \in \mathbb{Z}, |q| \geq 2)$ kesirlerinin karmaşıklığı 2 olduğunda, tam kısımların ki 1 olur.

[16] çalışmasında yazarlar, $\mathbf{F}_{1,2}$ alt yörüngesel grafi ile ilgili olan $\mathcal{F}_{1,2}$ diye adlandırdıkları yeni bir sürekli kesir tanımladılar. b bir tek tam sayı, $a_1, a_2, \dots$ pozitif tam sayılar ve $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots \in \{\pm 1\}$ olmak üzere;

$$\frac{1}{0 + b + a_1 + a_2 + \dots} \frac{2}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_2}{a_n} \dots \frac{\epsilon_n}{a_n}$$

formunun sonlu sürekli kesiri ya da

$$\frac{1}{0 + b + a_1 + a_2 + \dots} \frac{2}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_2}{a_n} \dots \frac{\epsilon_n}{a_n} \dots$$

formunun sonsuz sürekli kesiri bir $\mathcal{F}_{1,2}$ –sürekli kesiri olarak adlandırılır. $\mathbf{F}_{1,2}$ alt yörüngesel grafi ve bu sürekli kesirler arasında bir bağlantı vardır. Her sonlu $\mathcal{F}_{1,2}$ –sürekli kesiri, $\mathbf{F}_{1,2}$ grafindaki ∞ köşesinden bu sürekli kesir değerine giden bir yola karşılık gelir. Aynı zamanda minimal uzunluklu yoldaki $\mathbf{F}_{1,2}$ alt yörüngesel grafının köşeleri ve $\mathcal{F}_{1,2}$ sürekli kesiri ile $\mathbf{F}_{1,2}$ grafindaki minimal uzunluklu yolların köşeleri arasında da bir bağlantı vardır.

[16] daki Sonuç 2.8. den, eğer $\mathbf{F}_{1,2}$ grafının köşe kümesi

$$X = \left\{ \frac{p}{2q} : p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, (p, 2q) = 1 \right\} \cup \{\infty\}$$

ise, o zaman ∞ dan X kümesindeki her noktaya ($\mathbf{F}_{1,2}$ grafindaki kenarların oluşturduğu) bir tek yol vardır.

Teorem 2.4.1. ([16], Teorem 3.1.)

- A) ∞ dan $x \in X$ e olan $\mathbf{F}_{1,2}$ ($\mathcal{F}$ –Farey grafinın alt grafi) alt yörüngesel grafindaki yol, x in sonlu bir $\mathcal{F}_{1,2}$ sürekli kesirini tanımlar.
- B) X kümesindeki her bir sonlu $\mathcal{F}_{1,2}$ sürekli kesirinin değeri ve bu sürekli kesir $\mathbf{F}_{1,2}$ grafinda ∞ dan bu değere yakınsak olarak köşeler ile bir yol tanımlar.

Teorem 2.4.2. ([16], Teorem 4.1.)

Verilen $\forall x \in X$ için $\mathcal{F}_{1,2}$ sürekli kesirinin açılımı

$$x = \frac{1}{0 + \frac{2}{b + \frac{\epsilon_1}{a_1 + \frac{\epsilon_2}{a_2 + \dots \frac{\epsilon_n}{a_n}}}}}$$

aşağıdaki şekilde elde edilir:

$b = 2[x] + 1$ ve $1 \leq i \leq n$ için, $y_1 = 2x - 1$ olmak üzere,

1. $a_i = 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{|y_i|} \right) \right\rfloor$,
2. $\epsilon_i = \text{sign}(y_i)$,
3. $y_{i+1} = \frac{1}{|y_i|} - a_i$.

Aslında n , her $y_{n+1} = 0$ için negatif olmayan en küçük tamsayıdır.

Örnek 2.4.3.

$x = \frac{3363}{9512} \in X$ olsun. Teorem 2.4.2 den x in $\mathcal{F}_{1,2}$ –sürekli kesiri

$$x = \frac{3363}{9512} = \frac{1}{0+1} \frac{2}{1+4} \frac{-1}{4+2} \frac{-1}{2+4} \frac{-1}{2+4} \frac{-1}{4+2} \frac{-1}{2+4} \frac{-1}{4+2} \frac{-1}{2+4} \frac{-1}{4} \quad (51)$$

şeklindedir. Gerçekten Teorem 2.4.2 den,

$$b = 2[x] + 1 = b = 2 \left\lfloor \frac{3363}{9512} \right\rfloor + 1 = 1$$

$$y_1 = 2x - 1 = -\frac{1393}{4756}$$

$$a_1 = 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\left| -\frac{1393}{4756} \right|} \right) \right\rfloor = 4$$

$$y_2 = \frac{1}{\left| -\frac{1393}{4756} \right|} - 4 = -\frac{816}{1393}$$

$$a_2 = 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\left| -\frac{816}{1393} \right|} \right) \right\rfloor = 2$$

$$y_3 = \frac{1}{\left| -\frac{816}{1393} \right|} - 2 = -\frac{239}{816}$$

$$a_3 = 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\left| -\frac{239}{816} \right|} \right) \right\rfloor = 4$$

$$y_4 = \frac{1}{\left| -\frac{239}{816} \right|} - 4 = -\frac{140}{235}$$

$$a_4 = 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\left| -\frac{140}{235} \right|} \right) \right\rfloor = 2$$

$$y_5 = \frac{1}{\left|-\frac{140}{235}\right|} - 2 = -\frac{41}{140}$$

$$a_5 = 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\left|-\frac{41}{140}\right|} \right) \right\rfloor = 4$$

$$y_6 = \frac{1}{\left|-\frac{41}{140}\right|} - 4 = -\frac{24}{41}$$

$$a_6 = 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\left|-\frac{24}{41}\right|} \right) \right\rfloor = 2$$

$$y_7 = \frac{1}{\left|-\frac{24}{41}\right|} - 2 = -\frac{7}{24}$$

$$a_7 = 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\left|-\frac{7}{24}\right|} \right) \right\rfloor = 4$$

$$y_8 = \frac{1}{\left|-\frac{7}{24}\right|} - 4 = -\frac{4}{7}$$

$$a_8 = 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\left|-\frac{4}{7}\right|} \right) \right\rfloor = 2$$

$$y_9 = \frac{1}{\left|-\frac{4}{7}\right|} - 2 = -\frac{1}{4}$$

$$a_9 = 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\left|-\frac{1}{4}\right|} \right) \right\rfloor = 4$$

$$y_{10} = \frac{1}{\left| -\frac{1}{4} \right|} - 4 = 0$$

dir. Böylece (51) $\mathcal{F}_{1,2}$ –sürekli kesiri elde edilir. Bu sürekli kesirden $\mathbf{F}_{1,2}$ alt yörüngesel grafında sol yönlendirmeye göre ∞ dan x e bir yol olarak

$$0 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4 - \frac{1}{2 - \frac{1}{4 - \frac{1}{2 - \frac{1}{4 - \frac{1}{2 - \frac{1}{4 - \frac{1}{2 - \frac{1}{4}}}}}}}}} \leftarrow \dots \leftarrow 0 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4 - \frac{1}{2}}} \leftarrow 0 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \leftarrow 0 + \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{0}$$

yani

$$\frac{3363}{9512} \leftarrow \frac{985}{2786} \leftarrow \frac{577}{1632} \leftarrow \frac{169}{478} \leftarrow \frac{99}{280} \leftarrow \frac{29}{82} \leftarrow \frac{17}{48} \leftarrow \frac{5}{14} \leftarrow \frac{3}{8} \leftarrow \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{0}$$

yazılır.

Öte yandan (38) ve (48) den $\mathbf{F}_{3,8}$ grafında sol yönlendirmeye göre minimal uzunluklu yoldaki 4. köşe v_4 , $l = 6$ olmak üzere

$$v_4 = \frac{3A_5 + A_4}{8A_5} = \frac{3 - \frac{1}{6 - \frac{1}{6 - \frac{1}{6 - \frac{1}{6}}}}}{8} = \frac{3363}{9512}$$

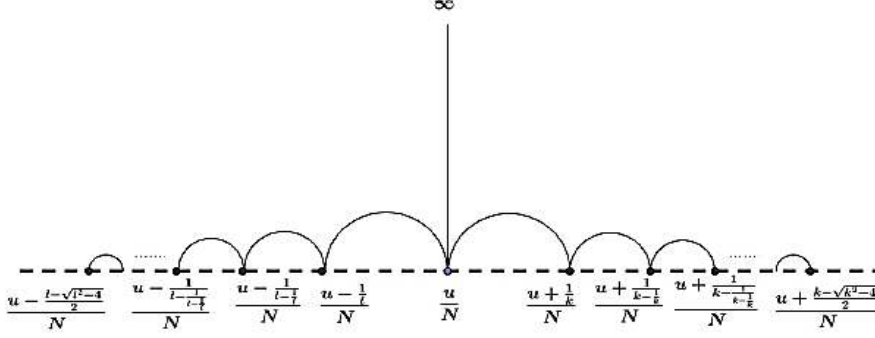
olup buradan $\mathbf{F}_{3,8}$ grafında ∞ dan x e en kısa yol olarak

$$\frac{3 - \frac{1}{6 - \frac{1}{6 - \frac{1}{6 - \frac{1}{6}}}}}{8} \leftarrow \frac{3 - \frac{1}{6 - \frac{1}{6 - \frac{1}{6}}}}{8} \leftarrow \frac{3 - \frac{1}{6 - \frac{1}{6}}}{8} \leftarrow \frac{3 - \frac{1}{6}}{8} \leftarrow \frac{3}{8} \leftarrow \frac{1}{0}$$

yani

$$\frac{3363}{9512} \leftarrow \frac{577}{1632} \leftarrow \frac{99}{280} \leftarrow \frac{17}{48} \leftarrow \frac{3}{8} \leftarrow \infty = \frac{1}{0}$$

yazılır.



Şekil 23. Kendisi ile eşleşmiş graf

Sağ ve sol yönlü sonsuz köşeli minimal uzunluklu yollar $v_0 = \frac{u}{N}$ olmak üzere

$$\begin{array}{c} \infty \\ \downarrow \\ \dots \leftarrow w^2(v_0) \leftarrow w(v_0) \leftarrow v_0 \rightarrow \varphi(v_0) \rightarrow \varphi^2(v_0) \rightarrow \dots \end{array}$$

Şekil 24. Minimal uzunluklu sonsuz yollar

Şekil 24 biçimindedirler. Açıkça görüldüğü üzere, minimal uzunluklu bir yol, öncül ve ardılı ile birleşerek 2 valanslı (buluşma sayısı) köşelerden meydana gelen bir ağaçtır. Her iki yöne doğru olan bu ağaçların birleşimi $\mathbf{F}_{u,N}$ altgrafıdır.

Doğal olarak, $\mathbf{F}_{u,N}$ bağlantılıdır ve $\mathbf{F}_{u,N}$ deki minimal uzunluklu yolların köşeleri

$$K_1 := \left\{ \frac{u + T_n(0)}{N} : n \in \mathbb{N} \right\} \text{ ve } K_2 := \left\{ \frac{u - T_n(0)}{N} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

olmak üzere; $K_1 \cup K_2 \subset \mathbb{Q}$ kümesidir. Böylece v_i ve v_j arasındaki kenar sayısını veren

$$d_*: K_1 \times K_1 \rightarrow \mathbb{N} \text{ (ya da } d_*: K_2 \times K_2 \rightarrow \mathbb{N} \text{)}, d_*(v_i, v_j) = \begin{cases} |j - i|, & i \neq j \\ j + 1, & v_j = \infty \end{cases}$$

aynı zamanda $v_i, v_j \in K_1$ (ya da K_2) , $i, j = 0, 1, 2, \dots$ köşeleri için bir metriktir. Burada her köşenin karmaşıklığı $d_*(\infty, v_i) = i + 1$ sayısına eşittir.

$\mathbf{F}_{u,N}$ kendine eşleşmiş olduğundan alt grafin sağ ve sol yöndeki biçimleri Teorem 2.2.3 den Şekil 23 de görüleceği üzere simetriktir. Biçimler özdeş olduğundan, alt graf yön-bağımsız (scale-free) olarak kabul edilebilir.

Aşağıda özel $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel graflarında sağ ve sol yönlendirme için minimal uzunluklu sonsuz yolları irdelenmiştir.

$\mathbf{F}_{2,9}$ Durumu: $\infty \rightarrow \frac{2}{9} \rightarrow \frac{5}{18} \rightarrow \dots$ yolu $\mathbf{F}_{2,9}$ grafinda asla bir devre olmaz [3]. Aslında bunun aynı zamanda minimal uzunluklu bir yol olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz. $u = 2$ ve $N = 9$ için $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ den $k = 2$ olduğu elde edilir. Bu değer bize minimal uzunluklu yolun sağ yönde olduğunu verir.

$$\infty \rightarrow \frac{2}{9} \rightarrow \frac{2 + \frac{1}{2}}{9} = \frac{5}{18} \rightarrow \frac{2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}{9} = \frac{8}{27} \rightarrow \dots$$

olur. Simetrik şekilde

$$\dots \leftarrow \frac{4}{27} \leftarrow \frac{3}{18} \leftarrow \frac{2}{9} \leftarrow \infty$$

Teorem 1.9.1 e göre sol yönde bir yol değildir. Teorem 2.2.3 ten $l = 7$ için sol yönde minimal uzunluklu yol;

$$\infty$$

$$\downarrow$$

$$\dots \leftarrow \frac{89}{432} = \frac{2 - \frac{1}{7 - \frac{1}{7}}}{9} \leftarrow \frac{13}{63} = \frac{2 - \frac{1}{7}}{9} \leftarrow \frac{2}{9} \rightarrow \frac{5}{18} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{9} \rightarrow \frac{8}{27} = \frac{2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}{9} \rightarrow \dots$$

dir.

F_{1,2} Durumu: $u^2 \equiv -1 \pmod{N}$ olduğundan **F_{1,2}** alt yörüngesel grafi kendisi ile eşleşmiştir. $u = 1$ ve $N = 2$ için $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ den $k = 0 \pmod{2}$ olur. Teorem 2.2.3 den $k = l = 2$ dir. Böylece her iki yönde de minimal uzunluklu yol;

$$\dots \leftarrow \frac{1}{6} = \frac{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}{2} \leftarrow \frac{1}{4} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} \leftarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} \rightarrow \frac{5}{6} = \frac{1 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}{2} \rightarrow \dots$$

olur.

3. İRDELEME

Jones, Singerman ve Wicks modüler grubun genelleştirilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki transitif ve imprimitif hareketi neticesinde oluşan altyörüngesel grafları incelediler [1] :

- $G_{1,1}$ grafinin, literatürde bilinen Farey grafi olduğu gösterildi.
- $F_{u,N}$ altgraflarının hangi koşul altında üçgen devre(circuit) içerdiği gösterildi ve $G_{u,n}$ grafi üçgen devre içermiyorsa orman(forest) olduğu konjektür olarak verildi.
- $F_{u,N}$ altgraflarının köşelerinin sürekli kesir olarak ifade edilebileceği gösterildi.

Akbaş [3], [1] deki aynı imprimitif ve transitif hareket için ilgili konjektürün doğru olduğunu kanıtladı. Alt graflardaki devrelerle, imprimitif harekette çalışılan grubun eliptik elemanları arasındaki ilişkiyi ortaya koydu.

Değer, Beşenk ve Güler [6], [1] deki aynı imprimitif ve transitif hareket için devre içermeyen altgrafları yani ağaçları(trees) incelediler. Ağaçlardaki minimal uzunluklu yolların Pringsheim sürekli kesiri olduğunu gösterip, en uzak köşeyi hesapladılar.

Sarma, Kushwaha ve Krishnan [16], [1] deki ağaçlardan biri olan $F_{1,2}$ alt grafinin yeni bir tür sürekli kesir olarak tanımlanabileceğini ve keyfi irrasyonel sayının da bu sürekli kesir cinsinden tek bir gösterime sahip olduğunu gösterdiler.

Bu tez çalışmasının motivasyonu, literatürde bilinen “sürekli kesirlerin yineleme bağıntıları yardımıyla ele alınabileceği” bilgisi olmuştur. Bu bağlamda;

- [1] deki aynı imprimitif ve transitif hareket için yine ağaç olan alt graflar ele alınmıştır.
- Kendisiyle eşleşmiş graflar dışındaki grafların yönlenmiş-graflar (directed graphs) olduğu bilinmektedir [1]. [6] da seçilen yönün tersi alınarak elde edilen sonuçlar (Yapılan çalışmalar 2.2), [6] daki sonuçlarla kıyaslanmıştır (Yapılan çalışmalar 2.4) .
- Sürekli kesirler için yazılan yineleme bağıntılarıyla, bazı alt graflarda Fibonacci dizisi bulunmuştur (Yapılan çalışmalar 2.3).

4. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen başlıca önemli sonuçlar şu şekilde verilebilir:

1. $l = x(u^2 + 1)$ tamsayısı bulundu (Sonuç 2.2.2).
2. $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ kongrüans bağıntılarından k ile l arasındaki ilişki çıkarıldı (Teorem 2.2.3).
3. $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ve $1 < l \leq N$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki sol yönlendirme için bir köşenin gidebileceği en uzak köşenin belirlenmesi amacı ile önemli bir teorem verildi (Teorem 2.2.4).
4. $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,n}$ grafinda bir üçgenin mevcut olduğu bulundu (Teorem 2.2.3) Yinelenme bağıntıları ve l tamsayısı kullanılarak $lA_p + A_{p+1} + A_{p-1} = 0$ sonucu bulundu.
5. Yinelenme bağıntıları l ve k için çözülerek A_n değerleri için birer formül verildi (Teorem 2.3.2, Sonuç 2.3.3).
6. $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u+bN, (b+1)N}$ grafi için sağ yönlendirmeye göre minimal uzunluklu sonsuz yol verildi (Lemma 2.3.4).
7. Yinelenme bağıntıları kullanılarak $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki minimal uzunluklu yollardaki köşeler belirlendi. Özel olarak $k, l = 2$ ve $k, l = 3$ durumları için köşelerin bulunması ile ilgili formüller verildi ve özel diziler ile bağlantıları çıkarıldı (Sonuç 2.3.5, Sonuç 2.3.6).

5. ÖNERİLER

1. $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki minimal uzunluklu yolların köşelerini tam olarak karakterize etmek amacı ile algoritmalar geliştirilerek bilgisayar yardımı alınabilir.

2. Bu minimal uzunluklu yolların köşeleri ile Fibonacci dizisinin çift numaralı elemanları arasında bir ilişki kurulmuştur ve bu ilişki geliştirilebilir.

3. Eğer $k > 2$ ise $A_n = (-1)^n 2^{1-n} \sum_{t=1}^n (k + \sqrt{k^2 - 4})^{n-t} (k + \sqrt{k^2 - 4})^{t-1}$ elde edilmiştir. Bu bağıntı daha basit bir şekle getirilmek suretiyle bu köşelerin karakterize edilmesi kolaylaştırılabilir.

4. [16] da tanımlanan $\mathcal{F}_{1,2}$ sürekli kesirlerinin özellikleri ile bu tezde çalışılan $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki minimal uzunluklu yollar arasındaki ilişkiler daha detaylı bir şekilde incelenebilir.

5. $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki minimal uzunluklu yolların köşelerini veren $\Gamma_0(N)$ kongrüans alt grubunun elemanlarının Möbiüs dönüşümlerinin özellikleri incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Jones, G.A., Singerman, D. ve Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 160 (1991) 316-338.
2. Sims C.C., Graphs and Finite Permutation Groups, Math. Zeitschr., 95, (1967), 76-86.
3. Akbas M., On Suborbital Graphs For The Modular Group, Bull. London Math. Soc. 33, (2001), 647-652.
4. Kader S., Guler B.O. and Deger A.H., Suborbital Graphs For A Special Subgroup Of The Normalizer Of $\Gamma_0(m)$, Iran. J.Sci. Technol. Trans. A Sci ,34,4 (2010), 305-312.
5. Guler B.O., Besenk M.,Deger A.H. and Kader S., Elliptic Elements And Circuits In Suborbital Graphs, Hacet. J. Math. Stat., 40,2 (2011),203-210.
6. Deger A.H., Besenk M.,and Guler B.O., On Suborbital Graphs And Related Continued Fractions, Applied Mathematics And Computation, 218, 3, (2011), 746-750.
7. Biggs, N., Lloyd, E. and Wilson, R., Graph Theory, 1736-1936, Oxford University Press,1986.
8. Ruohonen,K., Graph Theory, Tampere University of Technology , 2008.
9. Sheets C.L., Hyperbolic Geometry, University of Nebraska-Lincoln , 2007.
10. Yazıcı,N., Modüler Grubun Picard Grubundaki Normalleyeninin Alt Yörüngesel Grafları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2013.
11. Anderson James W., Hyperbolic Geometry, Springer-Verlay, 2000.
12. Cuyt, A., Petersen, V.B., Verdonk, B., Waadeland, H. ve Jones, W.B., Handbook of Continued Fractions for Special Functions, SpringerScience, Netherlands, 2008.
13. Jones, G.A. ve Singerman, D., Complex Functions:an Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
14. Schonenberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer –Verlag, Berlin, 1974.
15. Değer, A.H., $\Gamma_0(n)$ Grubunun Alt Yörüngesel Graflarındaki $\mathbb{Q}$ Köşeli Minimal Uzunluklu Eğriler, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.

16. Sarma R., Kushwaha S., Krishnan R., Continued Fractions Arising From $F_{1,2}$, Journal of Number Theory, 154 (2015) 179-200.
17. Keskin R., Suborbital Graphs for the Normalizer of $\Gamma_0(m)$, European Journal of Combinatorics, 27 (2006) 193-206.
18. Keskin R., On Suborbital Graphs for some Hecke Groups, Discrete Mathematics, 234 (2001) 53-64.
19. Besenk, M., Deger, A.H., Guler, and B.O. An Application on Suborbital Graphs, First International Conference on Analysis and Applied Mathematics, (2012), 187-190.
20. Deger, A.H., Imprimitve Action of The Normalizer of $\Gamma_0(N)$ and Suborbital Graphs, Advancements in Mathematical Sciences (2015).
21. Guler, B.O., Besenk, M., Kesicioglu Y. and Deger, A.H., Suborbital Graphs for The Group Γ^2 , Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44, (2015), 1033-1044.
22. Kader S., and Guler, B.O., On Conjugacy of Elliptic Elements and Circuits in Suborbital Graphs of Congruence Subgroups, Kuwait Journal of Science & Engineering, 38 (2011) 43-53.
23. Kader S., and Guler, B.O., On Suborbital Graphs for the Extended Modular Group $(\Gamma)_{\text{over-cap}}$, Graphs and Combinatorics, 29 (2013) 1813-1825.

ÖZGEÇMİŞ

Ümmügölsün AKBABA 1990 yılında Erzurum’ da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum’ da tamamladı. 2012 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Faköltesi Matematik bölümünden mezun oldu. 2013 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans programında eğitime başladı. 2014 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Faköltesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı Halen bu görevine devam etmektedir. İyi derecede İngilizce bilmektedir.