

**ÖDENEN VE GERÇEKLEŞEN HASAR BİLGİSİNE DAYALI
BAZI REZERV TAHMİN YÖNTEMLERİNİN
KARŞILAŞTIRILMASI**

**COMPARISON OF SOME RESERVE ESTIMATION
METHODS BASED ON PAID AND INCURRED LOSS**

MÜGE YELDAN

Dr. Öğr. Üyesi YASEMİN GENÇTÜRK
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2018

MÜGE YELDAN'nın hazırladığı **Ödenen ve Gerçekleşen Hasar Bilgisine Dayalı Bazı Rezerv Tahmin Yöntemlerinin Karşılaştırılması**" adlı çalışma aşağıdaki jüri tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdem KIRKBEŞOĞLU
Başkan



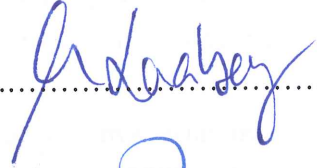
Dr. Öğr. Üyesi Yasemin GENÇTÜRK
Danışman



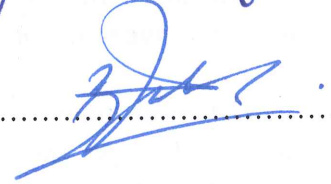
Doç. Dr. Ayten YİĞİTER
Üye



Dr. Öğr. Üyesi Uğur KARABEY
Üye



Dr. Öğr. Üyesi Başak BULUT KARAGEYİK
Üye



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof.Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- ☐ Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.

(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etseniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- ☒ Tezimin/Raporumun 02.07.2018 tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.

(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

- ☐ Tezimin/Raporumun tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.

- ☐ Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi

02 / 07 / 2018



MÜGE YELDAN

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

06/ 06 /2018



MÜGE YELDAN



Annem'e

ve

Babam'a

ÖZET

ÖDENEN VE GERÇEKLEŞEN HASAR BİLGİSİNE DAYALI BAZI REZERV TAHMİN YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Müge YELDAN

Yüksek Lisans, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin GENÇTÜRK

Haziran 2018, 43 sayfa

Sigorta şirketlerinin portföyünde raporlanmış ancak henüz çözüme ulaşmamış ya da gerçekleşmiş ancak henüz şirkete rapor edilmemiş hasarlar mevcut olabilir. Sigorta şirketlerinin en önemli görevi, bu muhtemel gelecek hasar ödemelerini doğru tahmin edebilmek ve bu ödemeler için yeterli büyüklükte rezerv ayırabilmektir.

Sigorta şirketleri ödenen ve gerçekleşen hasar bilgisi gibi farklı kaynaklardan gelen hasar bilgisine sahiptir. Ama çoğu klasik rezerv yöntemi, bu bilgilerden sadece birini kullanarak rezerv tahmininde bulunur. Sadece ödenen ya da sadece gerçekleşen hasar verisi kullanılarak tahmin yapıldığında, nihai hasarlar birbirinden farklı hesaplanır. Ancak her kaza yılı için gelişim yılı sonunda gerçekleşen hasarın tamamının ödenmesi beklendiğinden, ödenen hasar verisi kullanılarak tahmin edilen nihai hasar tahminlerinin gerçekleşen hasar verisi kullanılarak tahmin edilen nihai hasar eşit olması beklenir. Tahminlerin birbirine eşit ya da yakın olması için her iki bilginin birlikte kullanıldığı rezerv yöntemleri geliştirilmiştir.

Bu çalışmada, Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası'nda 2010-2016 yılları arasında ödenen ve gerçekleşen birikimli hasar tutarlarından oluşturulan hasar

üçgenlerinden faydalanarak, ödenen ve gerçekleşen hasar bilgisinin birlikte kullanıldığı yöntemlerle rezerv tahmini yapılmış, yöntemler hata kareler ortalaması dikkate alınarak karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hasar Rezervi, Zincir Merdiven Yöntemi, Münih Zincir Merdiven Yöntemi, Genişletilmiş Tamamlayıcı Hasar Oranı Yöntemi, Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar Yöntemi, Hata Kareler Ortalaması



ABSTRACT

COMPARISON OF SOME RESERVE ESTIMATION METHODS BASED ON PAID AND INCURRED LOSS

Müge YELDAN

Master of Science, Department of Actuarial Sciences

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Yasemin GENÇTÜRK

Haziran 2018, 43 sayfa

In the insurance company's portfolio there may be claims reported but not yet settled or incurred but not yet reported. The most important task of the insurance companies is to accurately estimate these possible future claim payments and to allocate sufficient reserves for these payments.

Insurance companies may have information from different sources such as paid and incurred claims. However, only one source of information is used in order to estimate reserve in many classical reserve methods. When an estimation is calculated based only on paid or incurred claims, the ultimate claims will be different. As the incurred claims are expected to be paid at the end of the development year for each accident year, the ultimate claim estimates obtained using these two sources of information are also expected to be equal. Therefore, reserve methods based on both paid and incurred claims have been developed in order to obtain equal or almost equal estimations.

In this study, the claim development triangle including cumulative paid and incurred losses between 2010 and 2016 in Turkey for compulsory motor third party liability insurance are

used and reserve is estimated by methods using both source of information and methods considered are compared taking into account the mean squared error.

Keywords: Claim Reserve, Mack's Chain Ladder, Munich Chain Ladder, Extended Complementary Loss Ratio, Paid-Incurred Chain Claims, Mean Square Error.



TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren tüm hoşgörüsüyle bu süreçte beni destekleyen tez danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemin GENÇTÜRK'e

Bu tezin hazırlanma aşamasında göstermiş olduğu anlayış ve destek için bölüm başkanımız sayın Prof. Dr. Meral SUCU'ya

Tez savunma jürisinde yer alan; değerli görüş ve katkıları için Doç. Dr. Erdem KIRKBEŞOĞLU, Doç. Dr. Ayten YİĞİTER, Dr. Öğr. Üyesi Uğur KARBEY, Dr. Öğr. Üyesi Başak BULUT KARAGEYİK'e

Tez çalışmam boyunca öneri ve bilgilerini benden esirgemeyen Betül Zehra KARAGÜL, Çiğdem LAZOĞLU, M. Asım ÖZALP'e

Dostluğu ve desteğiyle bu süreçte yanımda olan Samet GENÇGÖNÜL'e

Tez yazım heyecanını son ana kadar beraber paylaştığım Selin ÇAĞIN'a

Sevgili oda arkadaşım İsmail GÜR'e,

Değerli dostluklarıyla her daim yanımda olan biricik canlarım Melis ERKAN, Pınar ÖZER UYAR, N. Selvi YILDIRIM'a, fedakarlıklar göstererek beni ben yapan hayatım boyunca beni destekleyen yaşam kaynaklarım bir tanecik annem S. Oya YELDAN ve bir tanecik babam Muzaffer Celal YELDAN'a

Sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER	viii
ÇİZELGELER	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. HASAR REZERVİ	3
2.1. Hasar Gelişim Süreci	3
2.2. Hasar Gelişim Üçgeni	4
2.3. Gelişim Üçgeninin Elemanları	5
2.3.1. Ödenen Hasarlar	6
2.3.2. Gerçekleşen Hasarlar	6
2.4. Hasar Rezervi Tahmini İçin Yaklaşımlar	7
2.4.1. Deterministik Yaklaşım ile Rezerv Tahmini	7
2.4.2. Stokastik Yaklaşım ile Rezerv Tahmini	7
2.5. Hasar Gelişim Sonucu	9
3. ÖDENEN VE GERÇEKLEŞEN HASAR BİLGİSİ KULLANILARAK REZERV TAHMINİ YAPILAN YÖNTEMLER	10
3.1. Mack'in Zincir Merdiven Modeli	10
3.2. Münih Zincir Merdiven Yöntemi	12
3.3. Genişletilmiş Tamamlayıcı Hasar Oranı Yöntemi	15
3.4. Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasarlar Yöntemi	17
3.4.1. Ödenen Hasara İlişkin Bilginin Kullanılması	19
3.4.2. Gerçekleşen Hasara İlişkin Bilginin Kullanılması	20
3.4.3. Ödenen-Gerçekleşen Hasara İlişkin Bilginin Birlikte Kullanılması	22
3.5. Bayesci Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar Yöntemi	23
3.5.1. Ödenen Hasara İlişkin Bilginin Kullanılması	24

3.5.2.	Gerçekleşen Hasara İlişkin Bilginin Kullanılması	25
3.5.3.	Ödenen-Gerçekleşen Hasara İlişkin Bilginin Birlikte Kullanılması	26
4.	REZERV TAHMİN BELİRSİZLİĞİ.....	28
4.1.	Mack'in Zincir Merdiven Yöntemi için Hata Kareler Ortalaması.....	29
4.2.	Genişletilmiş Tamamlayıcı Hasar Rezervi Yöntemi için Hata Kareler Ortalaması ...	30
4.3.	Ödenen ve Gerçekleşen Hasar Zincir Merdiven Yöntemi için Hata Kareler Ortalaması	32
5.	YÖNTEMLERİN BENZERLİK VE FARKLILIKLARI	33
6.	UYGULAMA.....	34
7.	SONUÇ VE ÖNERİLER	39
	KAYNAKLAR.....	40
	ÖZGEÇMİŞ.....	43

ŞEKİLLER

Sayfa

Şekil 2. 1: Hasar Gelişim Süreci	3
Şekil 2. 2: Hasar Gelişim Üçgeni	5
Şekil 3. 1: Ödenen-Gerçekleşen Hasar Modeli	18
Şekil 3. 2: Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar Yönteminin İşleyişi	19



ÇİZELGELER

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 5. 1: Yöntemlerin karşılaştırılması.....	33
Çizelge 6. 1: Ödenen Birikimli Hasar Gelişim Üçgeni.....	34
Çizelge 6. 2: Gerçekleşen Birikimli Hasar Gelişim Üçgeni	35
Çizelge 6. 3: Hasar Rezerv Tahmin Değerleri	36
Çizelge 6. 4: Hata Kareler Ortalamalarının Karekökü.....	38



SİMGELER VE KISALTMALAR

ZM	Zincir Merdiven
BF	Bornhuetter-Ferguson
MZM	Münih Zincir Merdiven
GTHO	Genişletilmiş Tamamlayıcı Hasar Oranı
HKO	Hata Kareler Ortalaması

1. GİRİŞ

Sigorta şirketlerinde amaç, teminat verilen riskler için alınan primlerle hasar taleplerini ve maliyetlerini karşılamak ve kar elde etmektir. Faaliyet döneminde meydana gelmesine rağmen henüz ödenmemiş hasarlar, hasar karşılıkları veya hasar rezervi olarak adlandırılmaktadır. Hasar rezervi, sigorta şirketlerinin sigortalıya karşı yükümlülüklerini göstermektedir. Sigorta şirketleri hasar rezervinin yeterli olmaması durumunda sigortalıya karşı yükümlülüklerin karşılanmaması, sermaye kaybı ve hatta iflas ile karşılaşabilir.

Hayat dışı sigortalarında temel problem, nihai hasarın ve muallak hasar yükümlülüklerinin belirlenmesi yani rezervin tahmin edilmesidir. Hasar ödemelerinde pek çok belirsizlik olduğundan, rezervi tahmin etmek zordur. Sadece rezervi tahmin etmek değil, aynı zamanda belirsizliğine ve hasarların gelecekteki olası davranışları hakkında bilgi sahibi olmak için stokastik rezerv modelleri geliştirilmiştir.

Yapılan rezerv tahminleri genellikle farklı bilgi kaynaklarından gelen geçmiş veriye dayanmaktadır. Çoğu yöntemde rezerv tahmini ya ödenen ya da gerçekleşen hasar tutarına yani tek bir bilgi kaynağına bağlı olarak hesaplanmaktadır. Ancak hasara ilişkin ne kadar çok bilgi sahibi olunursa o kadar iyi tahminler yapılabilir. Bu yüzden de her iki bilgiyi de bir arada kullanan rezerv tahmin yöntemleri geliştirilmiştir.

Ödenen ve gerçekleşen hasar verisi birlikte kullanılarak yapılan rezerv tahmini, ilk olarak Halliwell [1][2], tarafından ele alınmıştır. Halliwell [2] ödenen ve gerçekleşen hasar bilgisine dayanarak doğrusal regresyon modeliyle tek bir rezerv hesabı yapmıştır. Quarg-Mack [3] ödenen ve gerçekleşen hasar verilerinden Zincir Merdiven (ZM) yöntemiyle elde edilen rezervler arasındaki farkı azaltmak amacı için Münih Zincir Merdiven yöntemini (MZM) oluşturmuştur. Yöntemde, ödenen-gerçekleşen hasar oranı kullanılarak ZM gelişim faktörü yeniden düzenlenmiştir. Venter [4] ise MZM yöntemindeki temel düşünceyle takvim yılı (köşegen) etkisini de dikkate alarak hem ödenen hem de gerçekleşen hasarı birlikte kullanan yeni bir yaklaşım geliştirmiştir. Jedlicka [5] ödenen ve gerçekleşen hasarlar yerine ödenen ve ödenmemiş hasarları (gerçekleşen ile ödenen hasarlar arasındaki fark) kullanarak MZM yöntemini genişletmiştir. Dahms [6] bir önceki gelişim yılı sonundaki muallak hasar rezervini risk ölçüsü olarak alıp her iki bilgi kaynağını da birlikte kullanarak tamamlayıcı hasar oranı yöntemini genişletmiştir. Posthuma vd. [7] ödenen ve gerçekleşen hasarların çok değişkenli

normal dağılıma uyduğu varsayımı altında, bu iki bilgiyi bir arada kullanan hasar rezerv modelini oluşturmuştur. Nihai gerçekleşen ve ödenen hasar tutarlarının birbirine eşit olduğu varsayımına dayalı bu model, Venter [4]'in genelleştirilmiş doğrusal model yapısındadır. Posthuma vd. [7]'nin çalışmasından farklı olarak Wüthrich ve Merz [8] nihai ve ödenen hasarların birbirine eşit olduğunu varsaymışlar ancak ödenen hasarlar için Hertig [9]'in lognormal ZM, gerçekleşen hasarlar için ise Gogol[10]'un Bayesci yaklaşımını kullanmışlardır.

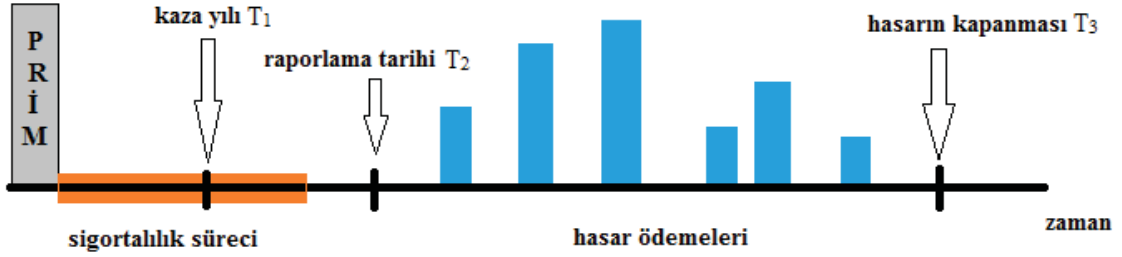
Tek bir hasar gelişim üçgeninin kullanıldığı geleneksel rezerv yaklaşımlarının ek bilgiler kullanılarak genişletildiği çalışmalar da vardır. Verrall vd. [11] ve Martinez vd. [12] geleneksel ZM yöntemini genişleterek, raporlanmış hasar sayısı ve hasar ödemelerinden oluşan iki hasar gelişim üçgeninin kullanıldığı Çift ZM yöntemini geliştirmişlerdir. Martinez vd. [13] bu yöntemde gerçekleşen hasar bilgisini kullanarak Bornhuetter-Ferguson [14] yönteminde olduğu gibi parametre tahminlerini elde etmiştir. Dupin vd. [15] sadece birinci ve ikinci momentlerin elde edildiği, ödenen ve gerçekleşen hasarı bir arada kullanan yarı parametrik bir yöntem geliştirmişlerdir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde hasar rezervi ve hasar rezervi tahmininde kullanılan yaklaşımlar hakkında genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, ödenen ve gerçekleşen hasar bilgisine dayalı rezerv tahmini yapan temel yöntemler ele alınmış, dördüncü bölümde ise bu rezerv yöntemlerinin tahmin belirsizliklerinin nasıl hesaplanacağına değinilmiştir. Beşinci bölümde de yöntemlerin benzerlik ve farklılıkları ele alınmıştır. Çalışmanın altıncı bölümünde, T.C. Başbakanlık Hazine Müsteşarlığı Sigortacılık Genel Müdürlüğü'nden alınan Zorunlu Trafik Sigortası 2010-2016 yıllarına ait çeyrek dönemlik ödenen ve muallak hasar verileri kullanılarak, üçüncü bölümde verilen yöntemlerle hasar rezerv tahminleri ve tahmin belirsizlikleri üzerine uygulama çalışması yapılmıştır. Çalışmanın son bölümünde elde edilen bulgular özetlenmiş ve önerilere yer verilmiştir.

2. HASAR REZERVİ

2.1. Hasar Gelişim Süreci

Hayat dışı sigortalarda, hasarların çözüme ulaşması bir süreç almaktadır. Genellikle hasarın raporlanması ve kapanması arasında gecikme olur. Hasar süreci aşağıdaki grafikte verilmiştir.



Şekil 2. 1: Hasar Gelişim Süreci

Burada T_1 , kazanın gerçekleştiği tarih; T_2 , hasarın sigorta şirketi tarafından kayıt altına alındığı yani raporlandığı tarih; T_3 , hasarın son değerlendirmesinin yapıldığı yani çözümlendiği tarihtir. Hasarın gerçekleşme zamanıyla kayıt altına alınma zamanı arasında geçen süre **raporlama gecikmesidir**. Bu gecikmenin nedeni hasarın gerçekleşir gerçekleşmez sigorta şirketine bildirilmemesidir. Hasarlar genellikle sigorta şirketine bildirildiğinde hemen çözümlenememektedir. Hasarın raporlandığı tarih ile çözümlendiği tarih arasında geçen süre **çözümleme periyodudur**. Bu periyotta sigorta şirketi hasara ilişkin araştırma yapmaya başlar, hasara ilişkin gelişmeleri gözlemler, mahkeme kararı gibi dışsal bilgileri bekler. Bu süreç bazı karmaşık hasarlarda yıllarca sürebilmektedir. Sigorta şirketi ödeme yapmak için hasarın tamamen çözüme ulaşmasını beklemeyiz. Raporlama tarihinden sonra hasarın çözümlenen kısımları için bir dizi ödeme yapar.

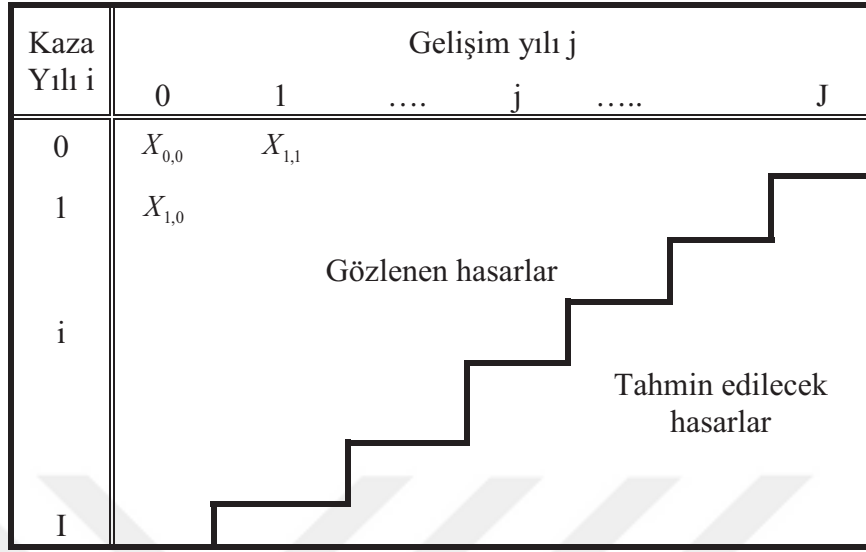
U_1 , sigortanın başlangıç tarihini; U_2 , sigortanın bitiş tarihini göstermek üzere $[U_1, U_2]$ sigortalılık periyodudur. $t \geq U_1$ herhangi bir anı göstermek üzere aşağıdaki durumlar ortaya çıkabilmektedir:

1. Eğer $t \geq T_1$ ise hasar gerçekleşmemiştir. Sigorta şirketi poliçede bir hasar meydana gelirse buna karşı sorumlu olabileceğinin bilgisi dışında bir bilgiye sahip değildir.

2. Eğer $T_1 \leq t < T_2$ ve $T_1 \in [U_1, U_2]$ ise hasar gerçekleşmiş ancak sigorta şirketine henüz bildirilmemiştir. Bu hasar, gerçekleşmiş ancak henüz bildirilmemiş (Incurred But Not Yet Reported) olarak adlandırılır. Sigorta şirketi bu hasara ilişkin bilgiye değil, ekonomik çevre (işsizlik oranı, enflasyon oranı, vb.), hava koşulları ve doğal afetler (fırtına, sel, deprem vb.), nükleer enerji kazaları, grip salgını gibi dışsal bilgilere sahiptir. Hasar büyüklüğüne ilişkin bir beklentisi oluşmaktadır.
3. Eğer $T_2 \leq t < T_3$ ve $T_1 \in [U_1, U_2]$ ise gerçekleşen hasar sigorta şirketine bildirilmiştir ancak nihai çözüme henüz ulaştırılmamıştır. Bu durumdaki hasarlar bildirilmiş ancak henüz çözümlenmemiş (Reported But Not Settled) hasarlar olarak adlandırılır. Hasar hakkında giderek daha fazla bilginin elde edildiği ve nihai değerlendirmede öngörülen belirsizliğin azaldığı durumdur.
4. Eğer $t > T_3$ ve $T_1 \in [U_1, U_2]$ ise hasar çözüme ulaşmış, dosya kapatılmış ve kaydedilmiştir. Söz konusu hasar için daha fazla ödeme beklenmemektedir. Ancak bazı durumlarda beklenmeyen hasar gelişiminden dolayı hasar dosyası tekrar açılabilir.

2.2. Hasar Gelişim Üçgeni

Sigorta şirketleri, sigorta sözleşmeleri ve hasar davranışları hakkında daha detaylı istatistiksel bilgi elde etmek için homojen gruplar ve alt portföyler oluşturmaktadır. Hayat dışı sigortalar iş kollarına göre; yangın ve doğal afet sigortaları, sağlık sigortaları, genel sorumluluk sigortaları, kara araçları ve kaza sigortaları gibi alt gruplara ayrılır. Eğer daha homojen gruplar elde edilmek istenirse, risk gruplarına göre de sınıflandırma yapılabilir. Bu sınıflandırmalardan sonra aynı alt grup içindeki hasarlar incelenebilir. Aynı alt gruptaki bu hasarlar kaza yıllarına göre de sınıflandırılır. Aynı kaza döneminde ortaya çıkan hasarlar; hava koşulları, ekonomik çevre gibi benzer dış faktörlerden etkilendiğinden böyle bir sınıflandırma yapmak mantıklıdır [16]. Aynı kaza yılındaki hasarlar hasar ödemelerindeki gecikmeler dikkate alınarak da sınıflandırılır. Kaza yılı ve ödeme gecikmeleri dikkate alınarak sınıflandırılan hasarlar, Şekil 2.2’de verilen hasar gelişim üçgenleri ile tablolaştırılmaktadır.



Şekil 2. 2: Hasar Gelişim Üçgeni

Kaza yılı $T_1 \in [1/1/i, 31/12/i]$ olan hasarlar i 'inci kaza yılındaki hasarlar olarak adlandırılırken, hasar ödemelerindeki gecikmeler j 'inci gelişim yılındaki hasarlar olarak adlandırılır. $0 \leq i \leq I$ ve $0 \leq j \leq J$ olmak üzere I nihai kaza yılını, J nihai gelişim yılını göstermektedir. $0 \leq t \leq I+J$ olmak üzere, $i+j \leq t$ ise hasar ödenmiştir ve bu ödeme üst üçgende yer alır. $i+j > t$ ise hasar henüz ödenmemiştir ve bu ödemeler alt üçgende yer alır. Amaç; muallak hasar yükümlülüğü olarak adlandırılan alt üçgeni tahmin etmektir. Muallak hasar yükümlülükleri için ayrılacak karşılıklara hasar rezervi denir.

2.3. Gelişim Üçgeninin Elemanları

Hasar gelişim üçgeni, hem ödenen hem de gerçekleşen hasarlardan oluşabilmektedir. Tüm değişkenlerin $L^2(\Omega, F, P)$ Hilbert uzayının elemanı olduğu varsayılır. Yani birikimli ödenen ve gerçekleşen hasarlar sırasıyla $C_{i,j}^P \in L^2(\Omega, F, P)$ ve $C_{i,j}^I \in L^2(\Omega, F, P)$ olan raslantı değişkenleridir [17]. Her iki üçgen için tüm gelişim yıllarına ilişkin bilgi ödenen hasar, gerçekleşen hasar ve her iki hasarın birlikte olması durumunda sırasıyla,

$$D_j^P = \sigma \{C_{i,j}^P; i+j \leq J\}$$

$$D_j^I = \sigma \{C_{i,j}^I; i+j \leq J\}$$

$$D_j = \sigma \{C_{i,j}^P, C_{i,j}^I; i+j \leq J\}$$

olarak gösterilir. Herhangi bir j gelişim yılına kadar olan bilgi ise ödenen hasar, gerçekleşen hasar ve her iki hasarın birlikte olması durumunda sırasıyla,

$$B_j^P = \sigma \{C_{i,l}^P; l \leq j\}$$

$$B_j^I = \sigma \{C_{i,l}^I; l \leq j\}$$

$$B_j = \sigma \{C_{i,l}^P, C_{i,l}^I; l \leq j\}$$

biçiminde ifade edilir.

2.3.1. Ödenen Hasarlar

Ödenen hasarlar, sigorta şirketinin gerçekleşen hasara ilişkin olası gelecek ödemelerin dikkate alınmadığı sadece yapılan ödemelerin temsil edildiği hasarlardır ve tamamen objektiftir.

$X_{i,j}^P$, aşamalı ödenen hasar tutarını göstermek üzere birikimli ödenen hasar tutarı $C_{i,j}^P$,

$$C_{i,j}^P = \sum_{l=0}^j X_{i,l}^P$$

olarak elde edilir.

2.3.2. Gerçekleşen Hasarlar

Gerçekleşen hasar, portföyün tamamı ya da portföy içindeki bir sınıfa ilişkin bilgiden yararlanılarak belirlenebilir. Bu durumda,

Gerçekleşen Hasar = Yıl boyunca yapılan hasar ödemesi – Yılın başındaki (1 Ocak) hasar

rezervi + Yılın sonundaki (31 Aralık) hasar rezervi

biçiminde elde edilir.

Gerçekleşen hasar, aynı poliçe yılı ya da aynı kaza yılındaki hasarlar dikkate alınarak da belirlenebilir. Bu durumda,

Gerçekleşen Hasar = Tamamen ya da kısmen çözülmüş hasarlar için yapılan ödemeler

+ Henüz çözüme ulaşmamış hasarlar için rezerv

biçiminde elde edilir.

Gerçekleşen hasarlar, ödenen hasarların yanı sıra rezerv tahminini de içerir. Bu yüzden subjektiftir [18]. Her zaman ödenen hasara eşit veya daha büyüktür. Gerçekleşen hasarda en temel sorun muallak hasar tahminlerinin yıllar içinde değişebilir olmasıdır. İlk hasar gelişim yıllarında ödenen hasarlar nihai hasarın küçük bir kısmını oluştururken, ödenen hasarlara muallak hasarlar eklenerek elde edilen gerçekleşen hasarlar nihai hasarı daha iyi temsil etmektedir.[19].

$X_{i,j}^I$ aşamalı gerçekleşen hasar tutarını göstermek üzere birikimli gerçekleşen hasar tutarı $C_{i,j}^I$,

$$C_{i,j}^I = \sum_{l=0}^j X_{i,l}^I$$

olarak elde edilir.

2.4. Hasar Rezervi Tahmini İçin Yaklaşımlar

2.4.1. Deterministik Yaklaşım ile Rezerv Tahmini

Deterministik rezerv tahmini, sigorta şirketleri tarafından hasar yükümlülüklerini değerlendirmek için uzun zamandır kullanılmaktadır. Yaygın olarak kullanılan deterministik yöntemler, Zincir Merdiven ve Bornhuetter-Ferguson yöntemleridir. Bu iki yöntem bazı stokastik yöntemlerin de temelini oluşturmuştur.

Deterministik yöntemlerin avantajlarından biri anlaşılması ve yönetime anlatılması kolay bir sonuç ürettiği olmasıdır. Bir diğer avantajı ise stokastik bir varsayıma gerek duyulmadığı için dışsal bilginin rezerve uygun bir biçimde eklenebilmesidir. Deterministik yöntemlerin dezavantajı ise rezervdeki belirsizlik seviyesine ilişkin neredeyse hiç bilgi vermemesidir. Senaryo analizleri ve duyarlılık testleri yardımıyla rezerv değişkenliğine ilişkin bazı ipuçları elde edilebilir. Ancak bu değişkenliğin tam bir karşılığı olamaz [20]. Değişkenliğin belirlenmesi için stokastik modellere gerek duyulur.

2.4.2. Stokastik Yaklaşım ile Rezerv Tahmini

Stokastik yöntemler, ya rezerv dağılımı hakkında bilgi verir ya da en azından ilk iki momentin yani ortalamanın ve varyansın hesaplanmasını sağlamaktadır [20]. Bu, sürece ilişkin bazı stokastik varsayımlar altında çıkarsamalar yapılarak ve analitik ya da benzetim yaklaşımı uygulanarak başarılr.

Stokastik yöntemlerin en güçlü yanı deterministik yöntemlerden elde edilemeyecek tahminin güven aralığının ve değişkenliğinin hesaplanabileceği istatistiksel bilgiyi üretmesidir. Deterministik yöntemlerden farklı olarak stokastik yöntemlerden elde edilen bilgiler, yönetime daha fazla bilgi vermek için ve karar verme sürecini iyileştirmek için kullanılabilir. Stokastik yöntemlerin bazı dezavantajları da bulunmaktadır. Bu yöntemlerde parametreler geçmiş veri kullanılarak tahmin edilmektedir. Yeterli veri bulunmadığı ya da koşullar değiştiğinde geçmiş veri geleceği yeterince temsil etmeyebilir. Bir diğer eksik yanı ise stokastik yöntemlerden elde edilen sonuçlar model hatasına maruz kaldığı için sonuçların dikkatli bir şekilde yorumlanması gerekliliğidir.

Herhangi bir deterministik modele hata terimi eklenerek stokastik bir model oluşturulabilir. Eğer bu hata terimlerine herhangi bir dağılım varsayımı yapılmazsa, parametre tahminleri sezgisel olur. Mack'in Zincir Merdiven yöntemi bu duruma bir örnektir [21].

Rezerv tahmininde kullanılan en popüler yöntemlerden biri olan Zincir Merdiven yönteminde sadece geçmiş hasar verisine dayalı rezerv tahmini yapılırken, Bornhuetter-Ferguson (BF) yönteminde geçmiş hasar verisinin yanı sıra prim gibi dışsal bilgiler de dikkate alınarak rezerv tahmini yapılır. Deterministik olan bu yöntemler daha sonra stokastik yapıda da ifade edilmiştir [16].

ZM yönteminin yapısı dikkate alınarak geliştirilen stokastik modellere,

- Mack [22]'in dağılımdan bağımsız ZM modeli,
- Renshaw ve Verall [23]'in aşırı yayımlı Poisson modeli,
- Gisler ve Wüthrich [24]'in Bayesci ZM modeli örnek olarak verilebilir.

BF yönteminin yapısı dikkate alınarak geliştirilen stokastik modellere,

- Mack [25]'in BF modeli,
- England vd. [26]'nin Bayesci BF modeli,
- Saluz vd. [27]'nin BF modeli örnek olarak verilebilir.

Pratikte hem deterministik hem de stokastik yöntemler kullanılarak rezerv tahminleri yapılmaktadır.

2.5. Hasar Gelişim Sonucu

Birbirini takip eden yıllarda muallak hasar yükümlülüklerinin tahminleri arasındaki farkı gösteren hasar gelişim sonucu, hasar rezervinde bir yıldaki değişimi ölçer [28]. Ödenen ya da gerçekleşen hasar bilgisi kullanıldığında hasar gelişim sonucu sırasıyla,

$$CDR_i(J+1) = E(C_{i,J}^P | D_J^P) - E(C_{i,J}^P | D_{J+1}^P)$$

$$CDR_i(J+1) = E(C_{i,J}^I | D_J^I) - E(C_{i,J}^I | D_{J+1}^I)$$

biçiminde hesaplanır. Buradan hasar gelişim sonucunun J anına kadar mevcut bilgi kullanılarak hesaplanan nihai hasar tahmini ile $J+1$ anına kadar mevcut bilgi kullanılarak hesaplanan nihai hasar tahmini arasındaki fark olduğu görülmektedir.

Negatif hasar gelişim sonucu şirketin bilançosunda zarar, pozitif hasar gelişim sonucu ise kar olarak gösterilir. Hasar gelişim sonucu sigorta şirketinin kar/zarar durumu ve mali gücü üzerinde doğrudan etkiye sahip olduğundan, Solvency II'nin ilgilendiği konulardan birisidir. Türkçeye “yükümlülük karşılama yeterliliği” veya “sermaye yeterliliği” olarak çevrilen Solvency, sigorta şirketlerinin sigortalılara karşı yükümlülüklerini karşılamada yeterli olup olmadığına ilişkin hesaplamaları içeren bir uygulamadır [29]. Solvency II ise hem daha “dinamik” hem de daha fazla “riske dayalı” olması nedeniyle Solvency I'in geliştirilmiş halidir.

3. ÖDENEN VE GERÇEKLEŞEN HASAR BİLGİSİ KULLANILARAK REZERV TAHMİNİ YAPILAN YÖNTEMLER

Çoğu klasik rezerv tahmin yönteminde ya ödenen hasar bilgisi ya da gerçekleşen hasar bilgisi kullanılarak rezerv tahmini yapılmaktadır. Her kaza yılı için gelişim yılı sonunda gerçekleşen hasarın tamamının ödenmesi beklendiğinden, teoride ödenen ya da gerçekleşen hasar bilgisi kullanılarak yapılan hesaplamalarda nihai gerçekleşen hasar tahmini ile nihai ödenen hasar tahmininin birbirine eşit olması beklenmektedir. Ancak pratikte, bu iki bilgi kaynağından elde edilen nihai tahminler birbirinden oldukça farklıdır. Dolayısıyla rezerv tahminleri de farklı olmaktadır. İki bilgi kaynağını bir arada kullanarak yapılan rezerv tahminlerinde amaç, bu farkı azaltmak ya da tamamen ortadan kaldırmaktır.

3.1. Mack'in Zincir Merdiven Modeli

Hasar rezervi tahmininde kullanılan en eski yöntemlerden biri olan ZM yöntemi deterministik bir yapıdadır. Mack [22] dağılım varsayımı olmaksızın ZM yöntemini stokastik olarak ifade ederek, hasar rezervinin varyansını ve dolayısıyla güven aralığını elde etmiştir. Bu yöntem, kolay uygulanabildiği ve herhangi bir dağılım varsayımı gerektirmediği için yaygın olarak kullanılmaktadır [30].

Mack'in ZM yöntemi hem ödenen hem de gerçekleşen hasarları içeren gelişim üçgenlerine uygulanabilir. Yöntemin altında yatan temel varsayım, tüm kaza yılları için j 'inci gelişim yılından $j+1$ 'inci gelişim yılına kadarki gelişim faktörlerinin aynı olmasıdır. Dolayısıyla $0 \leq i \leq J$ ve $0 \leq j \leq J$ olmak üzere, i 'inci kaza ve nihai gelişim yılında beklenen ödenen ve gerçekleşen birikimli hasarlar deterministik ZM'de olduğu gibi

$$E(C_{i,J}^P | D_J^P) = C_{i,J-i}^P \prod_{j=J-i}^{J-1} f_j^P \quad (3.1)$$

$$E(C_{i,J}^I | D_J^I) = C_{i,J-i}^I \prod_{j=J-i}^{J-1} f_j^I \quad (3.2)$$

biçiminde elde edilir [31]. Ancak bu yöntemde deterministik ZM yönteminden farklı olarak rezerv tahmininin varyansı hesaplanabilmektedir. i 'inci kaza ve nihai gelişim yılında ödenen ve gerçekleşen birikimli hasarın varyansı sırasıyla,

$$Var(C_{i,J}^P | D_J^P) = C_{i,J-i}^P \prod_{j=J-i}^{J-1} (\sigma_j^P)^2 \quad (3.3)$$

$$Var(C_{i,J}^I | D_J^I) = C_{i,J-i}^I \prod_{j=J-i}^{J-1} (\sigma_j^I)^2 \quad (3.4)$$

biçiminde hesaplanır.

Gelişim faktörleri; deterministik ZM yönteminde olduğu gibi ödenen veya gerçekleşen birikimli hasarın bir önceki döneme ait ödenen veya gerçekleşen birikimli hasara bölünmesi ile elde edilir. f_j , j gelişim yılından $j+1$ gelişim yılına gelişim faktörünü göstermek üzere ödenen ve gerçekleşen hasarlar için,

$$\hat{f}_j^P = \frac{\sum_{i=0}^{J-j-1} C_{i,j+1}^P}{\sum_{i=0}^{J-j-1} C_{i,j}^P} = \sum_{i=0}^{J-j-1} \frac{C_{i,j}^P}{\sum_{i=0}^{J-j-1} C_{i,j}^P} \frac{C_{i,j+1}^P}{C_{i,j}^P} \quad 0 \leq j \leq J-1 \quad (3.5)$$

$$\hat{f}_j^I = \frac{\sum_{i=0}^{J-j-1} C_{i,j+1}^I}{\sum_{i=0}^{J-j-1} C_{i,j}^I} = \sum_{i=0}^{J-j-1} \frac{C_{i,j}^I}{\sum_{i=0}^{J-j-1} C_{i,j}^I} \frac{C_{i,j+1}^I}{C_{i,j}^I} \quad 0 \leq j \leq J-1 \quad (3.6)$$

olarak tahmin edilir. Eşitlik (3.5) ve (3.6)'dan $\hat{f}_j^P$ ve $\hat{f}_j^I$ 'nin sırasıyla $C_{i,j+1}^P/C_{i,j}^P$ ve $C_{i,j+1}^I/C_{i,j}^I$ 'nin ağırlıklı ortalaması olduğu görülmektedir.

Eşitlik (3.3) ve (3.4)'deki σ_j^2 parametrelerinin tahmini $0 \leq j \leq J-2$ için

$$\sigma_j^{P^2} = \frac{1}{J-j-1} \sum_{i=0}^{J-j-1} C_{i,j}^P \left(\frac{C_{i,j+1}^P}{C_{i,j}^P} - f_j^P \right)^2 \quad (3.7)$$

$$\sigma_j^{I^2} = \frac{1}{J-j-1} \sum_{i=0}^{J-j-1} C_{i,j}^I \left(\frac{C_{i,j+1}^I}{C_{i,j}^I} - f_j^I \right)^2 \quad (3.8)$$

ve $J-1$ için ise

$$\sigma_{J-1}^2 = \min(\sigma_{J-2}^4 / \sigma_{J-3}^2, \sigma_{J-3}^2, \sigma_{J-2}^2)$$

biçimindedir [22].

Dolayısıyla tüm gelişim yıllarına ait bilgi kullanıldığında her kaza yılında ödenen ve gerçekleşen hasar için rezerv tahminleri sırasıyla,

$$R(D_J^P) = E(C_{i,J}^P | D_J^P) - C_{i,J-i}^P$$

$$R(D_J^I) = E(C_{i,J}^I | D_J^I) - C_{i,J-i}^P$$

olarak elde edilmektedir.

3.2. Münih Zincir Merdiven Yöntemi

Hem ödenen hem de gerçekleşen hasar verisi birlikte kullanılarak tutarlı bir nihai hasar tahmini elde etmek amacıyla geliştirilen Münih Zincir Merdiven yönteminde, Mack'in ZM yöntemindeki bir takım eksiklikler giderilmiştir. Bu eksikliklerden ilki, ödenen ve gerçekleşen hasarlar kullanılarak hesaplanan hasar rezerv tahminlerinin aynı olmasının beklenmesine rağmen, Mack'in ZM yönteminde bu iki bilgi kaynağından hesaplanan rezerv tahminleri arasında fark olmasıdır. İkinci eksiklik ise, ödenen-gerçekleşen hasar oranı hesaplandığında ortaya çıkmıştır. i 'inci kaza ve j 'inci gelişim yılı için ödenen-gerçekleşen hasar oranı

$$Q_{i,j} = \frac{C_{i,j}^P}{C_{i,j}^I} \quad (3.9)$$

biçiminde hesaplanır. Gerçekleşen hasar tutarı, ödenen hasar tutarı ile rezerv toplamından oluştuğundan, Eşitlik (3.9)'daki oranın birden küçük olması, aynı zamanda gelişim yılının sonuna yaklaştıkça ayrılan rezerv azalacağından bu oranın bire yakınsaması da beklenir [3]. Ancak bu oran, Mack'in ZM yöntemiyle tahmin edilen ödenen ve gerçekleşen hasar tutarları ile hesaplandığı zaman bu beklentileri karşılamamaktadır. Bunun nedeni Mack'in ZM yönteminde, ödenen ve gerçekleşen hasar tutarları arasındaki bağımlılığın hesaba katılmamasıdır. MZM yönteminde bu eksikliği gidermek için ödenen ve gerçekleşen hasar tutarları arasındaki ilişki de dikkate alınarak rezerv tahmini yapıldığından, verideki ödenen-gerçekleşen oran yapısı hesaplamalara yansıtılmış olmaktadır.

MZM yönteminin temel yapısı, Mack'ın dağılımdan bağımsız ZM modeli ile aynıdır [32]. $0 \leq i \leq J$ ve $0 \leq j \leq J$ olmak üzere i 'inci kaza yılı ve nihai gelişim yılında beklenen ödenen ve gerçekleşen birikimli hasarlar Eşitlik (3.1) ve (3.2)' de olduğu gibi sırasıyla,

$$E(C_{i,J}^P | D_J) = C_{i,J-i}^P \prod_{j=J-i}^{J-1} (f_{i,j}^P)^{MZM}$$

$$E(C_{i,J}^I | D_J) = C_{i,J-i}^I \prod_{j=J-i}^{J-1} (f_{i,j}^I)^{MZM}$$

biçiminde hesaplanır. Burada gelişim faktörünün hesabı ZM yönteminden farklılık gösterir. Korelasyon ile düzeltilmiş ödenen ve gerçekleşen hasarlar için gelişim faktörleri sırasıyla,

$$(f_{i,j}^P)^{MZM} = f_j^P + \underbrace{\lambda^P \frac{\sigma(f_{i,j}^P | B_j^P)}{\sigma(Q_{i,j}^{-1} | B_j^P)} (Q_{i,j}^{-1} - q_j^{-1})}_{\text{düzeltme terimi}}$$

$$(f_{i,j}^I)^{MZM} = f_j^I + \underbrace{\lambda^I \frac{\sigma(f_{i,j}^I | B_j^I)}{\sigma(Q_{i,j} | B_j^I)} (Q_{i,j} - q_j)}_{\text{düzeltme terimi}}$$

biçimindedir. Bu eşitliklerde, q_j ve q_j^{-1} sırasıyla Q_j ve Q_j^{-1} 'nin ortalaması olup, f_j^P ve f_j^I sırasıyla Eşitlik (3.5) ve (3.6)'dan elde edilir. Dolayısıyla MZM yönteminde hasar gelişim faktörü Mack'ın ZM yönteminin hasar gelişim faktörüne düzeltme teriminin eklenmesi ile elde edilir. Burada λ^P ve λ^I korelasyon faktörleridir ve ödenen hasar tutarları üçgeni ile gerçekleşen hasar tutarları üçgeni arasındaki bağlantıyı yansıtmaktadır. Tüm gelişim yıllarını bir arada değerlendirebilmek için bu korelasyon faktörlerinin belirlenmesinde artıklardan yararlanılır ve λ^P ile λ^I sırasıyla

$$\lambda^P = \text{Corr} \left(\text{Res} \left(Q_{i,j}^{-1} | B_j^P \right), \text{Res} \left(\frac{C_{i,j+1}^P}{C_{i,j}^P} | B_j^P \right) \right)$$

$$\lambda^I = \text{Corr} \left(\text{Res} \left(Q_{i,j} \mid B_j^I \right), \text{Res} \left(\frac{C_{i,j+1}^I}{C_{i,j}^I} \mid B_j^I \right) \right)$$

olarak elde edilir [3].

Ödenen-gerçekleşen hasar oranı ile gerçekleşen-ödenen hasar oranının beklenen değerleri $E(Q_{i,j} \mid B_j^I)$ ve $E(Q_{i,j}^{-1} \mid B_j^P)$ 'dir ve bu oranlar

$$q_j = \frac{\sum_{i=0}^{J-j} C_{i,j}^P}{\sum_{i=0}^{J-j} C_{i,j}^I} \quad \text{ve} \quad q_j^{-1} = \frac{\sum_{i=0}^{J-j} C_{i,j}^I}{\sum_{i=0}^{J-j} C_{i,j}^P}$$

biçiminde tahmin edilir. i 'inci kaza ve j 'inci gelişim yılında ödenen-gerçekleşen hasar oranları ile gerçekleşen-ödenen hasar oranlarının standart sapması sırasıyla

$$\sigma(Q_{i,j} \mid B_j^I) = \frac{\rho_j^I}{\sqrt{C_{i,j}^I}} \quad \text{ve} \quad \sigma(Q_{i,j}^{-1} \mid B_j^P) = \frac{\rho_j^P}{\sqrt{C_{i,j}^P}}$$

olarak hesaplanır. Burada ρ_j^I ve ρ_j^P parametrelerinin tahminleri

$$(\hat{\rho}_j^I)^2 = \frac{1}{J-j} \sum_{i=0}^{J-j} C_{i,j}^I (Q_{i,j} - \hat{q}_j)^2 \quad \text{ve} \quad (\hat{\rho}_j^P)^2 = \frac{1}{J-j} \sum_{i=0}^{J-j} C_{i,j}^P (Q_{i,j}^{-1} - \hat{q}_j^{-1})^2$$

biçiminde elde edilir.

i 'inci kaza ve j 'inci gelişim yılında ödenen ve gerçekleşen hasar için gelişim faktörünün standart sapması sırasıyla

$$\sigma(f_{i,j}^P \mid B_j^P) = \frac{\sigma_j^P}{\sqrt{C_{i,j}^P}} \quad \text{ve} \quad \sigma(f_{i,j}^I \mid B_j^I) = \frac{\sigma_j^I}{\sqrt{C_{i,j}^I}}$$

biçimindedir ve σ_j^P ve σ_j^I parametreleri Eşitlik (3.7) ve (3.8)'de olduğu gibi elde edilir.

Koşullu artık, raslantı değişkeninin ortalamasından farkının standart sapmasına bölünmesiyle hesaplanır. Dolayısıyla korelasyon faktörlerinin hesaplanabilmesi için artıkların hesaplanması gerekir. $Q_{i,j}$ ve $Q_{i,j}^{-1}$ için artık değerleri,

$$\text{Res}(Q_{i,j} | B_j^I) = \frac{Q_{i,j} - \hat{q}_j}{\hat{\rho}_j^I} \sqrt{C_{i,j}^I}$$

$$\text{Res}(Q_{i,j}^{-1} | B_j^P) = \frac{Q_{i,j}^{-1} - \hat{q}_j^{-1}}{\hat{\rho}_j^P} \sqrt{C_{i,j}^P}$$

$f_{i,j}^P$ ve $f_{i,j}^I$ için artık değerleri,

$$\text{Res}(f_{i,j}^P | B_j^P) = \frac{f_{i,j}^P - \hat{f}_j^P}{\hat{\sigma}_j^P} \sqrt{C_{i,j}^P}$$

$$\text{Res}(f_{i,j}^I | B_j^I) = \frac{f_{i,j}^I - \hat{f}_j^I}{\hat{\sigma}_j^I} \sqrt{C_{i,j}^I}$$

olarak elde edilir. Bu tahmin değerlerinden faydalanarak ödenen ve gerçekleşen hasar için korelasyon faktörlerinin tahmini sırasıyla

$$\hat{\lambda}^P = \frac{\sum_A \text{Res}(Q_{i,j}^{-1} | B_j^P) \text{Res}(f_{i,j}^P | B_j^P)}{\sum_A \text{Res}(Q_{i,j}^{-1} | B_j^P)^2}$$

$$\hat{\lambda}^I = \frac{\sum_A \text{Res}(Q_{i,j} | B_j^I) \text{Res}(f_{i,j}^I | B_j^I)}{\sum_A \text{Res}(Q_{i,j} | B_j^I)^2}$$

biçiminde hesaplanır. Burada A kaza ve gelişim yıllarının tümünü göstermektedir.

Dolayısıyla bu yöntemle her kaza yılında ödenen ve gerçekleşen hasar için rezerv tahminleri sırasıyla,

$$R(D_J) = E(C_{i,J}^P | D_J) - C_{i,J-i}^P$$

$$R(D_J) = E(C_{i,J}^I | D_J) - C_{i,J-i}^I$$

biçiminde elde edilir.

3.3. Genişletilmiş Tamamlayıcı Hasar Oranı Yöntemi

Dahms [6] tarafından geliştirilen bu yöntem, ZM ve Bornhuetter-Ferguson gibi sıklıkla tercih edilen rezerv yöntemlerinin de bulunduğu doğrusal stokastik rezerv ailesine aittir [33]. ZM yöntemindeki regresyon modelinden farklı olarak, birikimli hasarlar yerine muallak hasar rezervini kullanan regresyon modelinden oluşmaktadır. Yöntem, ödenen ve gerçekleşen hasarlara ilişkin bilgiyi bir arada kullanarak rezerv hesabı yapması yönüyle de ZM'den ayrılmaktadır.

$R_{i,j} = C_{i,j}^I - C_{i,j}^P$, i 'inci kaza ve j 'inci gelişim yılı sonundaki muallak hasar rezervini gösteren raslantı değişkeni olmak üzere özyineleme tekniği ile

$$R_{i,j} = R_{i,j+1} + X_{i,j}^I - X_{i,j}^P$$

şeklinde ifade edilir.

$0 \leq i \leq J$ ve $0 \leq j \leq J$ olmak üzere i 'inci kaza ve $j+1$ 'inci gelişim yılında ödenen ve gerçekleşen aşamalı hasar tutarlarının beklenen değerleri muallak hasar rezervleri ağırlıklandırılarak hesaplanır:

$$E(X_{i,j+1}^P | B_j) = \alpha_j R_{i,j} \quad (3.10)$$

$$E(X_{i,j+1}^I | B_j) = \beta_j R_{i,j} \quad (3.11)$$

Burada muallak hasarın, ödenen ve gerçekleşen aşamalı hasarlar için bir risk ölçüsü olduğu varsayılmaktadır [6]. Buradan hareketle özyineleme tekniğinden yararlanarak muallak hasar rezervinin beklenen değeri

$$E(R_{i,j+1} | B_j) = (1 - \alpha_j + \beta_j) R_{i,j} = f_j R_{i,j}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik zincir merdiven yapısına uygundur [6].

Eş. (3.10) ve (3.11)'deki α_j ve β_j parametrelerinin tahmini

$$\alpha_j = \frac{\sum_{i=0}^{J-j-1} X_{i,j+1}^P}{\sum_{i=0}^{J-j-1} R_{i,j}} \quad \text{ve} \quad \beta_j = \frac{\sum_{i=0}^{J-j-1} X_{i,j+1}^I}{\sum_{i=0}^{J-j-1} R_{i,j}}$$

biçimindedir. Dolayısıyla muallak hasar gelişimini gösteren f_j parametresinin tahmini

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{J-j-1} R_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{J-j-1} R_{i,j}}$$

olarak hesaplanır.

Yöntemin bir diğer varsayımı ise her kaza yılında nihai hasar gelişim yılı için muallak hasar rezervinin sıfıra eşit yani $R_{i,J} = 0$ olmasıdır. Bu durum nihai gelişim yılı J 'den sonra hasar gelişimi görülmediği, her hasarın çözüme ulaştığı anlamına gelir [16]. Bunun bir sonucu olarak her kaza yılı için $J-i$ gelişim yılından sonraki ödenen aşamalı hasarlar

$$\sum_{j=J-i+1}^J \hat{X}_{i,j}^P = R_{i,J-i} + \sum_{j=J-i+1}^J \hat{X}_{i,j}^I$$

biçiminde ifade edilir. Bir diğer sonucu olarak da ödenen ve gerçekleşen hasar bilgisi kullanılarak elde edilen birikimli nihai hasar tahmini tektir ve

$$C_{i,J} = C_{i,J-1}^I + \sum_{j=J-i+1}^J \hat{X}_{i,j}^I = C_{i,J-i}^P + \sum_{j=J-i+1}^J \hat{X}_{i,j}^P$$

olarak elde edilir. Gerçekleşen ve ödenen hasar tutarları kullanılarak hesaplanan nihai hasar tahminleri birbirine eşit olduğundan, toplam hasar rezervleri de birbirine eşittir. Bu yöntem, Mack'in ZM yöntemi ile MZM yöntemlerinden tek bir rezerv tahmini yapmasıyla da ayrılmaktadır.

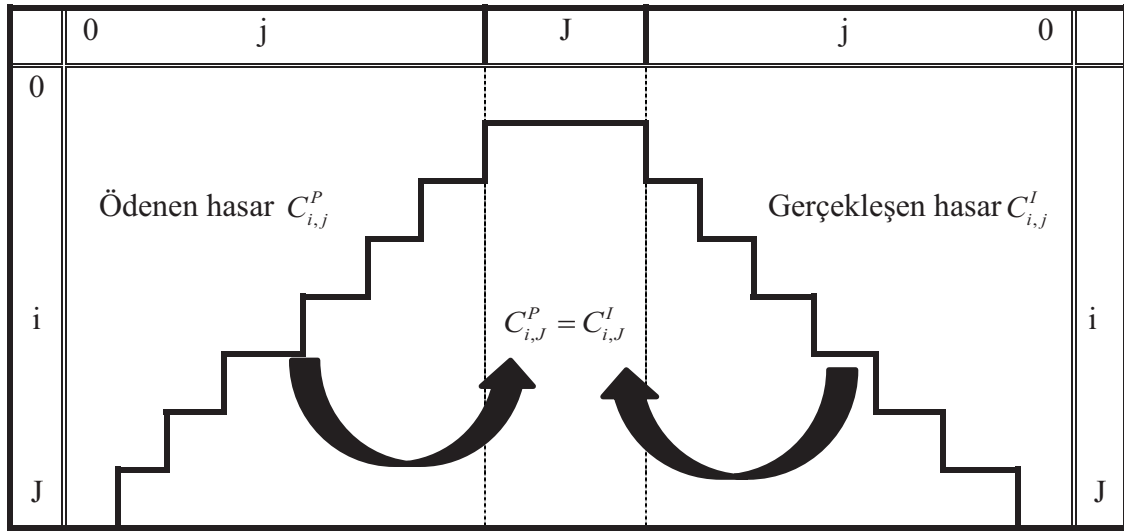
Dolayısıyla, j 'inci gelişim yılına kadar ki bilginin kullanıldığı bu yöntemde her kaza yılında ödenen ve gerçekleşen hasar için rezerv tahmini bir tanedir ve

$$R(B_j)^{GTHO} = \sum_{j=J-i+1}^J \hat{X}_{i,j}^P$$

biçiminde elde edilir.

3.4. Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasarlar Yöntemi

Ödenen ve gerçekleşen hasar bilgisi birlikte kullanılarak rezerv tahmininin yapıldığı bu yöntemde, ödenen hasar için Hertig [9]'in lognormal ZM hasar rezervi modeli, gerçekleşen hasar için ise Gogol [10]'un Bayesci hasar rezervi modeli kullanılmaktadır. Yöntemin temel varsayımı Şekil 3.1'den de görüleceği üzere nihai ödenen hasarlar ile nihai gerçekleşen hasarların birbirine eşit olması yani $C_{i,J}^P = C_{i,J}^I$ 'dir [8]. Bu varsayım aynı zamanda tüm hasarların J gelişim yılı sonunda çözüldüğü yani kuyruk gelişimi olmadığı anlamına da gelmektedir. Bu yönüyle Genişletilmiş Tamamlayıcı Hasar Oranı (GTHO) yöntemiyle benzerlik göstermektedir.



Şekil 3. 1: Ödenen-Gerçekleşen Hasar Modeli [8]

Bir diğer önemli varsayım ise ödenen ve gerçekleşen hasar üçgenlerinden elde edilen gelişim faktörlerinin log-normal dağıldığı varsayımdır. Bu durumda,

$$\xi_{i,j} = \log\left(\frac{C_{i,j}^P}{C_{i,j-1}^P}\right) \quad \text{ve} \quad \zeta_{i,j} = -\log\left(\frac{C_{i,j-1}^I}{C_{i,j}^I}\right)$$

olmak üzere, $\xi_{0,0}, \dots, \xi_{J,J}, \zeta_{0,0}, \dots, \zeta_{J,J-1}$ çok değişkenli normal dağılıma sahiptir ve her bir

$$\xi_{i,j} \sim N(\Phi_j, \sigma_j^2) \quad i \in \{0, 1, \dots, J\} \text{ ve } j \in \{0, 1, \dots, J\}$$

$$\zeta_{k,l} \sim N(\Psi_l, \tau_l^2) \quad k \in \{0, 1, \dots, J\} \text{ ve } l \in \{0, 1, \dots, J-1\}$$

şeklindeir. Modeldeki tüm parametreler $\Theta = (\Phi_0, \dots, \Phi_J, \Psi_0, \dots, \Psi_{J-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_J, \tau_0, \dots, \tau_{J-1})$ vektörü ile ifade edilir.

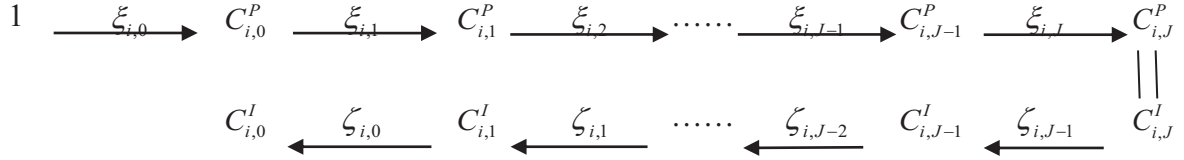
Başlangıç değeri $C_{i,-1}^P = 1$ olmak üzere, $\xi_{i,j}$ 'den yararlanarak özyinelemeli olarak birikimli ödenen hasarlar

$$C_{i,j}^P = C_{i,j-1}^P \exp(\xi_{i,j})$$

biçiminde elde edilir. Gelişim yılı sonunda $C_{i,J}^P = C_{i,J}^I$ olacağından $\zeta_{i,j}$ değerlerinden yararlanarak geriye doğru özyineleme ile birikimli gerçekleşen hasarlar

$$C_{i,j-1}^I = C_{i,j}^I \exp(\zeta_{i,j-1})$$

olarak elde edilir. Yöntemin işleyişi Şekil 3.2’de verilmiştir:



Şekil 3. 2: Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar Yönteminin İşleyişi

MZM yönteminde hem ödenen hem de gerçekleşen hasar bilgisi kullanıldığında hesaplanan rezervler arasındaki fark azalırken, bu yöntem kullanıldığında bu iki tahmin arasında fark ortadan kalktığından tek bir rezerv tahmini elde edilir. Aynı zamanda MZM yönteminden farklı olarak bu yöntem kullanıldığında hata kareler ortalaması ve hasar gelişim sonucu hesaplanabilir [34]. Yöntem, tek bir rezerv tahmini yapılması, koşullu hata kareler ortalaması ve hasar gelişim sonucunun hesaplanması ile GTHO yöntemiyle benzerlik göstermektedir. Dağılımdan bağımsız bir yaklaşım olan GTHO yönteminden farkı ise hasar gelişim sonucunun ve muallak hasarın dağılımlarının tahmin edilmesidir [34]. Dolayısıyla nihai hasar için riske maruz değer ve beklenen kuyruk kaybı gibi bazı risk ölçümlerinin de hesaplanmasına olanak sağlamaktadır.

3.4.1. Ödenen Hasara İlişkin Bilginin Kullanılması

Sadece birikimli ödenen hasarlar bilindiğinde, ödenen hasarın tahmininde Hertig’in lognormal ZM hasar rezervi yaklaşımı kullanılmaktadır.

Tanım 2.1: Hertig’in lognormal ZM yöntemine göre $f_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$ bireysel gelişim faktörü λ_j

ve ω_j^2 parametreleri ile lognormal dağılıma sahip olduğundan

- i ’inci kaza ve j ’inci gelişim yılı için beklenen değer,

$$E(C_{i,j} | C_{i,j-1}) = C_{i,j-1} E(f_{i,j} | C_{i,j-1}) = C_{i,j-1} \exp(\lambda_j + \frac{1}{2} \omega_j^2)$$

- i ’inci kaza ve j ’inci gelişim yılı için varyans,

$$Var(C_{i,j} | C_{i,j-1}) = C_{i,j-1} Var(f_{i,j} | C_{i,j-1}) = C_{i,j-1} \exp(2\lambda_j + \omega_j^2)(\exp(\omega_j^2) - 1)$$

olarak elde edilir.

Parametre vektörü Θ ve B_{j-1}^P birikimli ödenen hasarlar bilindiğinde, $\zeta_{i,j}$ 'nin dağılımı

$$\log \frac{C_{i,j}^P}{C_{i,j-1}^P} |_{\{B_{j-1}^P, \Theta\}} \sim N(\Phi_j, \sigma_j^2)$$

biçimindedir. Tanım 2.1'den yararlanarak i 'inci kaza ve nihai gelişim yılında beklenen ödenen birikimli hasar

$$E(C_{i,j}^P | B_{j-1}^P, \Theta) = C_{i,j}^P \exp \left\{ \sum_{l=j+1}^J (\Phi_l + \sigma_l^2 / 2) \right\} \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. Buradan tahminlerin ZM yapısına uygun olduğu görülmektedir [8].

3.4.2. Gerçekleşen Hasara İlişkin Bilginin Kullanılması

Sadece birikimli gerçekleşen hasarlar bilindiğinde, gerçekleşen hasarın tahmininde Gogol'un bayesci hasar rezervi yaklaşımı kullanılmaktadır.

Tanım 2.2: Eğer $C_{i,j}$ 'nin dağılımı biliniyorsa Bayes teoremi yardımıyla $C_{i,j} | C_{i,j}$ 'nin dağılımı belirlenebilir. Birbirinden bağımsız farklı kaza yılları için

- Nihai hasarlar $C_{i,j} \sim \text{Lognormal}(\lambda, \omega^2)$ ve
- $C_{i,j} | C_{i,j} \sim \text{Lognormal}(\log C_{i,j} - \delta^2 / 2, \delta^2)$

olmak üzere Bayes teoreminden $C_{i,j} | C_{i,j} \sim \text{Lognormal}(\lambda^{post}, (\omega^2)^{post})$ olur [10].

Burada

$$\lambda^{post} = (1-z)\lambda + z(\log C_{i,j} + \delta^2 / 2)$$

$$(\omega^2)^{post} = z\delta^2$$

$$z = \omega^2 / (\delta^2 + \omega^2)$$

şeklindedir.

Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yöntemindeki $C_{i,j}^I = C_{i,j}^P$ varsayımından dolayı Θ parametre vektörü bilindiğinde gerçekleşen nihai birikimli hasar tutarı $(C_{i,j}^I)$ lognormal dağılıma sahiptir. Yani ödenen birikimli hasarlar için Hertig'in lognormal ZM yönteminden

elde edilen $C_{i,j}^P$, gerçekleşen birikimli hasarlar için Gogol'un Bayesci yönteminde önsel bilgiyi oluşturur [35]. Aynı zamanda gerçekleşen nihai hasarı tutarı ve Θ parametre vektörü bilindiğinde $C_{i,j}^I$ lognormal dağılıma sahiptir. Tanım 2.2'deki Gogol'un Bayesci yaklaşımından yola çıkarak B_j^I bilindiğinde $C_{i,j}^I$ 'nin de lognormal dağılıma sahip olduğu söylenir [8]. Bu nedenle aynı kaza yılı için $(\log C_{i,j+l}^I, \log C_{i,j}^I, \log C_{i,j-1}^I, \dots, \log C_{i,0}^I)$ ' vektörü çok değişkenli normal dağılımlıdır.

Tanım 2.3: $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ raslantı değişkeni vektörü $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ ortalama ve pozitif tanımlı Σ kovaryans matrisine sahip çok değişkenli normal dağılıma sahip olsun. Bu durumda

$$X_1 |_{X_2, \dots, X_n} \sim N\left(m_1 + \Sigma_{1,2} \Sigma_{2,2}^{-1} (X^{(2)} - m^{(2)}), \Sigma_{1,1} - \Sigma_{1,2} \Sigma_{2,2}^{-1} \Sigma_{2,1}\right)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $X^{(2)} = (X_2, \dots, X_n)'$ raslantı değişkeni vektörü $m^{(2)} = (m_2, \dots, m_n)'$ ortalama ve $\Sigma_{2,2}$ kovaryans matrisi ile çok değişkenli normal dağılıma sahiptir [7].

Çok değişkenli normal dağılımın Tanım 2.3'de verilen koşullu dağılım özelliğinden faydalananak gerçekleşen birikimli hasar tutarı

$$\log C_{i,j+l}^I |_{\{B_j^I, \Theta\}} \sim N\left(\mu_{j+l} + \frac{v_{j+l}^2}{v_j^2} (\log C_{i,j}^I - \mu_j), v_{j+l}^2 \left(1 - \frac{v_{j+l}^2}{v_j^2}\right)\right)$$

elde edilir [8]. Burada i 'inci kaza ve $j+l$ 'inci gelişim yılı için gerçekleşen hasar tutarının

$$\text{ortalaması } \mu_{j+l} = \sum_{m=0}^J \Phi_m - \sum_{n=j+l}^{J-1} \Psi_n, \text{ varyansı ise } v_{j+l}^2 = \sum_{m=0}^J \sigma_m^2 + \sum_{n=j+l}^{J-1} \tau_n^2 \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla, gerçekleşen nihai birikimli hasar tutarının tahmini

$$\begin{aligned} E[C_{i,j}^I | B_j^I, \Theta] &= \exp\left\{\mu_j + \frac{v_j^2}{v_j^2} (\log C_{i,j}^I - \mu_j) + \frac{v_j^2}{2} \left(1 - \frac{v_j^2}{v_j^2}\right)\right\} \\ &= (C_{i,j}^I)^{1-\alpha_j} \exp\left\{(1-\alpha_j) \sum_{l=j}^{J-1} \Psi_l + \alpha_j \left(\mu_j + \frac{v_j^2}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$= C_{i,j}^I \exp \left\{ \underbrace{\sum_{l=j}^{J-1} \Psi_l + \tau_j^2 / 2}_{E(-\zeta_{i,j})} \right\} \exp \left\{ \underbrace{\alpha_j \left(\mu_j + \log C_{i,j}^I - \sum_{l=0}^{J-1} \tau_l^2 \right)}_{Düzeltilme\,terimi} \right\} \quad (3.13)$$

biçimindedir. Buradan klasik ZM faktörünün, güvenirlilik ağırlıklı bir terimle düzeltildiği görülmektedir. Dolayısıyla bu tahmininin ZM yapısında olmadığı söylenebilir [23]. MZM yönteminde hem ödenen hem de gerçekleşen hasarlardan elde edilen nihai hasar tahminleri ZM yapısına uygun iken, Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yönteminde sadece ödenen hasarlardan elde edilen tahmin ZM yapısına uygundur. Eşitlik (3.13)'teki güvenirlilik ağırlığı

$$\alpha_j = \frac{1}{v_j^2} \sum_{l=j}^{J-1} \tau_l^2$$

biçimindedir.

3.4.3. Ödenen-Gerçekleşen Hasara İlişkin Bilginin Birlikte Kullanılması

Hem ödenen hem de gerçekleşen hasarlar bilindiğinde, hem Hertig'in lognormal ZM hem de Gogol'un bayesci hasar rezervi yaklaşımı ile rezerv tahmini yapılır. Bölüm 3.4.2'de olduğu gibi aynı kaza yılı için $(\log C_{i,j}^I, \log C_{i,j}^P, \log C_{i,j}^I, \dots, \log C_{i,0}^I)$ ' vektörü çok değişkenli normal dağılıma sahiptir. Çok değişkenli normal dağılımın Tanım 2.3'de verilen koşullu dağılım özelliğinden faydalananarak $C_{i,j}^I = C_{i,j}^P$ olmak üzere nihai ödenen birikimli hasar tutarı

$$\log C_{i,j}^P |_{\{B_j, \Theta\}} \sim N \left(\mu_j + (1 - \beta_j) (\log C_{i,j}^P - \eta_j) + \beta_j (\log C_{i,j}^I - \mu_j), (1 - \beta_j) (v_j^2 - w_j^2) \right),$$

biçiminde elde edilir. Burada i 'inci kaza ve j 'inci gelişim yılında ödenen hasar tutarının

$$\text{ortalaması } \eta_j = \sum_{m=0}^j \Phi_m \text{ ve varyansı } \omega_j = \sum_{m=0}^j \sigma_m^2 \text{ 'dir.}$$

Güvenirlilik ağırlığı olan β_j ise

$$\beta_j = \frac{v_j^2 - \omega_j^2}{v_j^2 - \omega_j^2} > 0$$

biçimindedir. Dolayısıyla, ödenen nihai birikimli hasar tutarının tahmini

$$E[C_{i,j}^P | B_j, \Theta] = \exp \left\{ \mu_j + (1 - \beta_j) (\log C_{i,j}^P - \eta_j) + \beta_j (\log C_{i,j}^I - \mu_j) + (1 - \beta_j) (v_j^2 - w_j^2) / 2 \right\}$$

$$= C_{i,j}^P \exp \left\{ \sum_{l=j+1}^J \Phi_l + \frac{\sigma_j^2}{2} \right\} \underbrace{\exp \left\{ \beta_j \left(\log \frac{C_{i,j}^P}{C_{i,j}^I} - (\mu_j - \eta_j) - \sum_{l=j+1}^J \frac{\sigma_j^2}{2} \right) \right\}}_{\text{Düzeltilme Terimi}}$$

olarak elde edilir. Burada düzeltme terimi ödenen-gerçekleşen hasar oranını içerdiğinden MZM yöntemi ile benzerlik göstermektedir [8].

3.5. Bayesci Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar Yöntemi

Bölüm 3.4'te bahsedilen ödenen ve gerçekleşen hasar bilgisine dayalı yöntemde $\Theta = (\Phi_0, \dots, \Phi_J, \Psi_0, \dots, \Psi_{J-1}, \dots, \sigma_0, \dots, \sigma_J, \tau_0, \dots, \tau_{J-1})$ parametre vektörü bilindiği koşulu altında rezerv tahmini yapılır. Ancak genelde parametreler bilinmez ve veriden tahmin edilmesi gerekir. Parametre vektöründeki varyans parametreleri olan σ_j^2 ve τ_j^2 'lerin bilindiği varsayımı altında, ortalama parametrelerinin tahmininde bayesci yaklaşım kullanıldığında bu yöntem bayesci Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yöntemi olarak adlandırılır [8].

Ortalama parametrelerinin normal dağıldığı varsayımı altında

$$\Phi_m \sim N(\phi_m, s_m^2) \quad m \in \{0, \dots, J\} \quad (3.14)$$

$$\Psi \sim N(\psi_n, t_n^2) \quad n \in \{0, \dots, J-1\} \quad (3.15)$$

olarak ifade edilir [36].

Ödenen ve gerçekleşen hasar için gelişim faktörleri sırasıyla $\xi_{k,l} \sim N(\Psi_l, \tau_l^2)$ ve $\zeta_{i,j} \sim N(\Phi_j, \sigma_j^2)$ olduğundan ortalama parametreleri

$$\hat{\Phi}_j = \frac{1}{J-j+1} \sum_{j=j+1}^J \log \left(\frac{C_{i,j}^P}{C_{i,j-1}^P} \right) \text{ ve}$$

$$\hat{\Psi}_j = \frac{1}{I-j+1} \sum_{i=0}^{I-j} \log \left(\frac{C_{i,j-1}^I}{C_{i,j}^I} \right)$$

olarak elde edilir. Varyans parametreleri ise

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{J-j} \sum_{i=0}^{J-j} \left(\log \left(\frac{C_{i,j}^P}{C_{i,j-1}^P} \right) - \hat{\Phi}_j \right)^2 \quad (3.16)$$

$$\hat{\tau}_j^2 = \frac{1}{J-j} \sum_{i=0}^{J-j} \left(\log \left(\frac{C_{i,j-1}^P}{C_{i,j}^P} \right) - \hat{\Psi}_j \right)^2 \quad (3.17)$$

biçimindedir. Bu parametrelerin biliniyor olması varsayımı sonsal dağılımların analitik olarak hesaplanabilmesi anlamına gelir [8].

3.5.1. Ödenen Hasara İlişkin Bilginin Kullanılması

$\Phi = (\Phi_0, \dots, \Phi_J)$ parametresinin koşullu sonsal dağılımı

$$\Phi_j | \{D_j^P\} \sim N \left(\phi_j^{P,post} = \gamma_j^P \bar{\phi} + (1 - \gamma_j^P) \phi_j, (s_j^{P,post})^2 = \left(\frac{1}{s_j^2} + \frac{J-j+1}{\sigma_j^2} \right) \right)$$

biçimindedir [8]. Buradan sonsal ortalama $\phi_j^{P,post}$ 'un, deneysel ortalama ile önsel ortalamanın güvenilirlik ağırlıklı ortalaması olduğu görülmektedir. güvenilirlik ağırlığı

$$\gamma_j^P = \frac{(J-j+1)}{(J-j+1) + (\sigma_j^2 / s_j^2)}$$

deneysel ortalama ise

$$\frac{1}{J-j+1} \sum_{i=0}^{J-j} \log \frac{C_{i,j}^P}{C_{i,j-1}^P}$$

biçimindedir. i 'inci kaza yılı için nihai gelişim yılında beklenen birikimli ödenen hasar

$$E[C_{i,J}^P | D_J^P] = C_{i,J-i}^P \exp \left\{ \sum_{l=J-i+1}^J \phi_l^{P,post} + \sigma_l^2 / 2 + \sigma_l^{P,post} / 2 \right\}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik, $\Phi_j | \{D_j^P\}$ 'nin beklenen değeri Eşitlik (3.12)'de yerine konulduğunda elde edilir.

Tüm gelişim yıllarına ilişkin bilginin kullanıldığı bu yöntemde her kaza yılında hasar rezervi

$$R(D_J^P) = E(C_{i,J}^P | D_J^P) - C_{i,J-i}^P$$

biçiminde elde edilir.

3.5.2. Gerçekleşen Hasara İlişkin Bilginin Kullanılması

Ψ parametresinin D_J^I bilindiğinde sonsal dağılımı, $\psi^{post}(D_J^I)$ sonsal ortalama ve $\Sigma(D_J^I)$ sonsal kovaryans matrisi parametreleri ile çok değişkenli normal dağılıma sahiptir [8]. Sonsal kovaryans matrisinin tersi,

$$a_{n,m}^I = (t_n^{-2} + (J-n)\tau_n^{-2})1_{\{n=m\}} + \sum_{i=0}^n v_i^{-2}$$

biçimindedir. Sonsal ortalama $\psi^{post}(D_J^I) = (\psi_0^{I,post}, \dots, \psi_J^{I,post})'$ olmak üzere

$$\psi^{post}(D_J^I) = \Sigma(D_J^I)(b_0^I, \dots, b_J^I)'$$

olarak elde edilir. $(b_0^I, \dots, b_J^I)$ vektörü ise

$$b_j^I = t_j^{-2}\psi_j - \tau_j^{-2} \sum_{i=0}^{J-j-1} \log \frac{C_{i,j}^I}{C_{i,j+1}^I} - \sum_{i=0}^j v_i^{-2} \log C_{J-i,i}^I$$

şeklindedir.

Bu durumda, i 'inci kaza yılında gerçekleşen hasarlar için nihai birikimli hasar tahmini,

$$E[C_{i,J}^P | D_J^I] = (C_{i,J-i}^I)^{1-\alpha_{J-i}} \exp \left\{ (1-\alpha_{J-i}) \sum_{l=J-i}^{J-1} \psi_l^{I,post} + \alpha_{J-i} \left(-\psi_J^{I,post} + \frac{v_J^2}{2} \right) + (s_j^{I,post})^2 / 2 \right\} \quad (3.18)$$

olarak elde edilir.

i 'inci kaza yılında sonsal varyans $(s_i^{post})^2 = (e_i^I)' \Sigma(D_J^I) e_i^I$ olmak üzere

$e_i^I = (0, \dots, 0, (1-\alpha_{J-i}), \dots, (1-\alpha_{J-i}), -\alpha_{J-i})' \in \mathbb{R}^{J+1}$ şeklindedir. Bu vektörde $1-\alpha_{J-i}$ 'lerin sayısı Eşitlik (3.18)'deki ψ^{post} toplamındaki eleman sayısına eşittir.

Tüm gelişim yıllarına ilişkin bilginin kullanıldığı bu yöntemde her kaza yılında hasar rezervi

$$R(D_J^I) = E(C_{i,J}^P | D_J^I) - C_{i,J-i}^P$$

biçiminde elde edilir.

3.5.3. Ödenen-Gerçekleşen Hasara İlişkin Bilginin Birlikte Kullanılması

Θ parametresinin D_J bilindiğinde sonsal dağılımı, $\theta^{post}(D_J)$ sonsal ortalaması ve $\Sigma(D_J)$ sonsal kovaryans matrisi parametreleri ile çok değişkenli normal dağılıma sahiptir [8]. Sonsal kovaryans matrisinin tersi

$$a_{n,m} = (s_n^{-2} + (J-n+1)\sigma_n^{-2})1_{\{n=m\}} + \sum_{i=0}^{(n-1) \wedge (m-1)} (v_i^2 - \omega_i^2)^{-1}, \quad 0 \leq n, m \leq J$$

$$a_{J+1+n, J+1+m} = (t_n^{-2} + (J-n)\tau_n^{-2})1_{\{n=m\}} + \sum_{i=0}^{n \wedge m} (v_i^2 - \omega_i^2)^{-1}, \quad 0 \leq n, m \leq J-1$$

$$a_{n, J+1+m} = a_{J+1+m, n} = - \sum_{i=0}^{(n-1) \wedge m} (v_i^2 - \omega_i^2)^{-1}, \quad 0 \leq n \leq J, 0 \leq m \leq J-1$$

olmak üzere $(2J+1) \times (2J+1)$ boyutlu bir matristir. Sonsal ortalama vektörü

$$\theta^{post}(D_J) = (\phi_0^{post}, \dots, \phi_J^{post}, \psi_0^{post}, \dots, \psi_J^{post})'$$

$$\theta^{post}(D_J) = \Sigma(D_J)(c_0, \dots, c_J, b_0, \dots, b_{J-1})' \quad (3.19)$$

olarak ifade edilir. Eşitlik (3.19)'daki c_j ve b_j vektörleri sırasıyla

$$c_j = s_j^{-2}\phi_j + \sigma_j^{-2} \sum_{i=0}^{J-j} \log \frac{C_{i,j}^P}{C_{i,j-1}^P} + \sum_{i=J-j+1}^J (v_{J-i}^2 - \omega_{J-i}^2)^{-1} \log \frac{C_{i,J-i}^I}{C_{i,J-i}^P} \quad \text{ve}$$

$$b_j = t_j^{-2}\psi_j - \tau_j^{-2} \sum_{i=0}^{J-j-1} \log \frac{C_{i,j}^I}{C_{i,j-1}^I} - \sum_{i=J-j+1}^J (v_{J-i}^2 - \omega_{J-i}^2)^{-1} \log \frac{C_{i,J-i}^I}{C_{i,J-i}^P}$$

biçimindedir. Buradan c_j 'nin; Φ_j parametresi için önsel dağılım ortalamasının, $\xi_{i,j}$ 'lerin toplamının ve köşegendeki gerçekleşen-ödenen oranların toplamının varyanslarına bölümünün toplamı olduğu görülmektedir. b_j , c_j 'den farklı olarak Ψ_j parametresi için önsel dağılım ortalamasının varyansına bölümünden $\zeta_{i,j}$ 'lerin toplamı ile köşegendeki gerçekleşen-ödenen oranların toplamının varyanslarına bölümünün farkıdır.

Bayesci yaklaşım ile i 'inci kaza yılı için nihai birikimli hasar tahmini

$$\begin{aligned}
E[C_{i,J}^P | D_J] &= (C_{i,J-i}^P)^{1-\beta_{J-i}} (C_{i,J-i}^I)^{1-\beta_{J-i}} \exp \left\{ (1-\beta_{J-i}) \sum_{l=J-i+1}^J \phi_l^{post} + \beta_{J-i} \sum_{l=J-i}^{J-1} \psi_l^{post} \right\} \\
&\times \exp \left\{ (1-\beta_{J-i}) \frac{\nu_J^2 - \omega_{J-i}^2}{2} + \frac{(s_i^{post})^2}{2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

olarak elde edilir.

Burada i 'inci kaza yılı için sonsal varyans $(s_i^{post})^2 = (e_i)' \Sigma(D_J) e_i$ biçiminde olup $e_i = (0, \dots, 0, (1-\beta_{J-i}), \dots, (1-\beta_{J-i}), 0, \dots, 0, \beta_{J-i}, \dots, \beta_{J-i})' \in \mathbb{R}^{2J+1}$ şeklindedir. Bu vektörde $1-\beta_{J-i}$ ve β_{J-i} 'lerin sayısı sırasıyla Eşitlik (3.20)'de ϕ^{post} toplamındaki eleman sayısı ile ψ^{post} toplamındaki eleman sayısına eşittir.

Tüm gelişim yıllarına ilişkin bilginin kullanıldığı bu yöntemde her kaza yılında hasar rezervi

$$R(D_J) = E(C_{i,J}^P | D_J) - C_{i,J-i}^P$$

biçiminde elde edilir.

4. REZERV TAHMİN BELİRSİZLİĞİ

Gerçekleşen hasar yükümlülüklerinin, tahmin edilen rezerv değerlerinden büyük ölçüde sapma riski vardır. Bu sapma aşağıdaki nedenlerden kaynaklanıyor olabilir [34]:

- Modelin yanlış seçilmesi: Seçilen model, hasar yükümlülükleri sürecinin stokastik dinamiklerini yaklaşık olarak açıklamayabilir.
- Parametre belirsizliği: Belirlenen modelin bilinmeyen parametreleri tahmin edildiğinden, bu tahminlerin gerçek değerinden parametre tahminlerindeki rasgelelik nedeniyle sapmalar olabilir.
- Stokastik rezerv sürecinin süreç varyansı: Doğru model ve parametrelerin seçildiği varsayılsa bile hasar yükümlülüklerinin stokastik süreci rasgelelik nedeniyle ortalamadan uzak olabilir.

Uygun bir model belirlendikten sonra gerçek hasar ödemeleri ile tahminler arasındaki muhtemel farkı ölçen tahmin belirsizliğinin de hesaplanması gerekir. Bu nedenle, tahminin ne kadar iyi olduğunu ölçmek için uygun bir risk ölçümü seçilmelidir. Tahmin belirsizliğini ölçmek için kullanılabilecek çok sayıda makul risk ölçümü vardır. Aktüeryada yaygın olarak kullanılan bir risk ölçüsü, koşullu hata kareler ortalamasıdır. Solvency II gibi son yıllardaki düzenleyicilerde koşullu hata kareler ortalaması, riske maruz değer ya da beklenen kuyruk kaybı gibi risk ölçümleriyle desteklenmektedir.

D gözlenen X raslantı değişkenlerinden oluşan bir veri seti; $\hat{X}$, X 'in tahmin edicisi olmak üzere X 'in koşullu hata kareler ortalaması (HKO)

$$mse_{X|D}[\hat{X}] = E\left[(X - \hat{X})^2 | D\right]$$

olarak tanımlanır. Bir başka ifadeyle koşullu HKO

$$mse_{X|D}[\hat{X}] = \underbrace{Var[X | D]}_{\text{süreç varyansı}} + \underbrace{(X - E[X | D])^2}_{\text{tahmin hatası}}$$

şeklinde süreç varyansı ve tahmin hatasının toplamı olarak elde edilir. Burada süreç varyansı, hasar çözüm sürecinin bazı yönlerinin doğası gereği tahmin edilemez olduğunu, tahmin hatası ise belirlenen model doğru olsa bile parametre tahmininin kesin olarak doğru olamayacağı gerçeğini yansıtır. Dolayısıyla, rezerv tahmininin belirsizliği, parametre tahminindeki

belirsizlik ile bu parametre tahmininde kullanılan verinin belirsizliğinin toplamından oluşur [37].

4.1. Mack'in Zincir Merdiven Yöntemi için Hata Kareler Ortalaması

Mack'in zincir merdiven yönteminin hem gerçekleşen hem de ödenen hasar gelişim üçgenine uygulanabildiğini daha önce belirtmiştik. Bu durumda hata kareler ortalaması hem ödenen hem de gerçekleşen hasar verisinden elde edilen rezerv tahminleri için elde edilebilir.

Her kaza yılı için sırasıyla gerçekleşen ve ödenen birikimli hasar bilgisine dayalı elde edilen rezerv tahminlerinin HKO'sı

$$mse(\hat{R}_i^P) = E\left[\left(\hat{R}_i^P - R_i^P\right)^2 \mid D_J^P\right] = E\left[\left(\hat{C}_{i,J}^P - C_{i,J}^P\right)^2 \mid D_J^P\right] = msep\left(\hat{C}_{i,J}^P\right)$$

$$mse(\hat{R}_i^I) = E\left[\left(\hat{R}_i^I - R_i^I\right)^2 \mid D_J^I\right] = E\left[\left(\hat{C}_{i,J}^I - C_{i,J}^I\right)^2 \mid D_J^I\right] = msep\left(\hat{C}_{i,J}^I\right)$$

şeklinde elde edilir. Buradan her iki durumda da rezerv tahmininin HKO'sının, nihai birikimli hasar tahmininin HKO'na eşit olduğu görülmektedir.

Dolayısıyla her bir kaza yılında ödenen ve gerçekleşen birikimli hasarlar için rezerv tahminlerinin HKO'sı tahmini sırasıyla,

$$mse(\hat{R}_i^P) = \left(\hat{C}_{i,J}^P\right)^2 \sum_{k=J-i}^{J-1} \frac{(\hat{\sigma}_k^P)^2}{\hat{f}_k^P} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}^P} + \frac{1}{\sum_{t=0}^{J-k-1} C_{t,k}^P} \right)$$

$$mse(\hat{R}_i^I) = \left(\hat{C}_{i,J}^I\right)^2 \sum_{k=J-i}^{J-1} \frac{(\hat{\sigma}_k^I)^2}{\hat{f}_k^I} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}^I} + \frac{1}{\sum_{t=0}^{J-k-1} C_{t,k}^I} \right)$$

şeklindedir.

Bu yöntem kullanıldığında ödenen ve gerçekleşen birikimli hasar bilgisine dayalı hesaplanan toplam rezerv için de HKO sırasıyla,

$$mse(\hat{R}^P) = \sum_{i=1}^J mse(\hat{R}_i^P) + C_{i,J}^P \left(\sum_{t=i+1}^J \hat{C}_{t,J}^P \right) \sum_{k=J-i}^{J-1} \frac{2(\hat{\sigma}_k^P)^2 / (\hat{f}_k^P)^2}{\sum_{n=1}^{J-k-1} C_{n,k}^P}$$

$$mse(\hat{R}^I) = \sum_{i=1}^J mse(\hat{R}_i^I) + C_{i,J}^I \left(\sum_{t=i+1}^J \hat{C}_{t,J}^I \right) \sum_{k=J-i}^{J-1} \frac{2(\hat{\sigma}_k^I)^2 / (\hat{f}_k^I)^2}{\sum_{n=1}^{J-k-1} C_{n,k}^I}$$

biçiminde elde edilir.

4.2. Genişletilmiş Tamamlayıcı Hasar Rezervi Yöntemi için Hata Kareler Ortalaması

Bu yöntem kullanıldığında her kaza yılı için ödenen ve gerçekleşen aşamalı hasar bilgisiyle hesaplanan rezerv tahminlerinin hata kareler ortalamasının tahmini sırasıyla

$$mse(\hat{R}_i^P) = \sum_{k_1, k_2=J+1-i}^J \hat{X}_{i,k_1}^P \hat{X}_{i,k_2}^P \sum_{l=J-i+1}^{(k_1 \wedge k_2)-1} \hat{a}_{k_1, k_2, l} \left(\frac{1}{\hat{R}_{i,l}} + \frac{1}{\sum_{t=1}^{J-k-1} R_{t,l}} \right) \quad (4.1)$$

$$mse(\hat{R}_i^I) = \sum_{k_1, k_2=J+1-i}^J \hat{X}_{i,k_1}^I \hat{X}_{i,k_2}^I \sum_{l=J-i+1}^{(k_1 \wedge k_2)-1} \hat{b}_{k_1, k_2, l} \left(\frac{1}{\hat{R}_{i,l}} + \frac{1}{\sum_{t=1}^{J-k-1} R_{t,l}} \right) \quad (4.2)$$

şeklindedir. Eşitlik (4.1) ve (4.2)'deki $\hat{a}_{k_1, k_2, l}$ ve $\hat{b}_{k_1, k_2, l}$ sırasıyla

$$\hat{a}_{k_1, k_2, l} = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_l^2}{\hat{\alpha}_l^2} & k_1 = k_2 = l+1, \\ \frac{\hat{\gamma}_l - \hat{\sigma}_l^2}{\hat{\alpha}_l \hat{f}_l} & k_1 > k_2 = l+1 \text{ ya da } k_2 > k_1 = l+1, \\ \frac{\hat{\sigma}_l^2 - 2\hat{\gamma}_l + \hat{\tau}_l^2}{\hat{f}_l^2} & k_1 \geq k_2 > l+1 \text{ ya da } k_2 \geq k_1 > l+1. \end{cases}$$

$$\hat{b}_{k_1, k_2, l} = \begin{cases} \frac{\hat{\tau}_l^2}{\hat{\beta}_l^2} & k_1 = k_2 = l+1, \\ \frac{\hat{\tau}_l^2 - \hat{\gamma}_l}{\hat{\beta}_l \hat{f}_l} & k_1 > k_2 = l+1 \text{ ya da } k_2 > k_1 = l+1, \\ \frac{\hat{\sigma}_l^2 - 2\hat{\gamma}_l + \hat{\tau}_l^2}{\hat{f}_l^2} & k_1 \geq k_2 > l+1 \text{ ya da } k_2 \geq k_1 > l+1. \end{cases}$$

biçimindedir. Burada $\hat{\sigma}_k^2$, $\hat{\tau}_k^2$ ve $\hat{\gamma}_k^2$ sırasıyla

$$\hat{\sigma}_k^2 = \sum_{i=0}^{J-k+1} R_{i,k} \left(\frac{X_{i,k+1}^P}{R_{i,k}} - \hat{\alpha}_k \right)^2 \quad 1 \leq k < n-1$$

$$\hat{\tau}_k^2 = \sum_{i=0}^{J-k+1} R_{i,k} \left(\frac{X_{i,k+1}^I}{R_{i,k}} - \hat{\beta}_k \right)^2 \quad 1 \leq k < n-1$$

$$\hat{\gamma}_k^2 = \sum_{i=0}^{J-k+1} R_{i,k} \left(\frac{X_{i,k+1}^P}{R_{i,k}} - \hat{\alpha}_k \right) \left(\frac{X_{i,k+1}^I}{R_{i,k}} - \hat{\beta}_k \right) \quad 0 \leq k < J-1$$

olarak elde edilir.

Dolayısıyla ödenen ve gerçekleşen aşamalı hasarlar için toplam rezerv tahminlerinin HKO'sı

$$mse(R^P) = \sum_{i=1}^I mse(\hat{R}_i^P) + 2 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq I} \sum_{k_1, k_2 = I-i+1}^J \hat{X}_{i_1, k_1}^P \hat{X}_{i_2, k_2}^P \left[\sum_{l=J-i_1+1}^{k_1 \wedge k_2 - 1} \frac{\hat{a}_{k_1, k_2, l}}{\sum_{j=0}^{J-k-1} R_{j, l}} \right]$$

$$mse(R^I) = \sum_{i=1}^I mse(\hat{R}_i^I) + 2 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq I} \sum_{k_1, k_2 = J-i+1}^J \hat{X}_{i_1, k_1}^I \hat{X}_{i_2, k_2}^I \left[\sum_{l=J-i_1+1}^{k_1 \wedge k_2 - 1} \frac{\hat{b}_{k_1, k_2, l}}{\sum_{j=0}^{J-k-1} R_{j, l}} \right]$$

biçiminde elde edilir.

4.3. Ödenen ve Gerçekleşen Hasar Zincir Merdiven Yöntemi için Hata Kareler Ortalaması

Yöntemde, nihai hasar tahminleri sadece ödenen hasar üçgenine ilişkin bilgi, sadece gerçekleşen hasar üçgenine ilişkin bilgi ve her iki üçgene ilişkin bilginin mevcut olması durumunda yapılmaktadır. Dolayısıyla bu üç durumda toplam rezervin HKO'ları hesaplanabilir.

D_J^P bilindiğinde toplam hasar rezerv tahmininin HKO'sı

$$mse(R | D_J^P) = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq J} \left(\exp \left((v_J^2 - \omega_{J-k_1}^2) 1_{\{k_1=k_2\}} + (e_{k_1}^P)' \Sigma(D_J^P) e_{k_2}^P \right) - 1 \right) E[P_{k_1, J} | D_J^P] E[P_{k_2, J} | D_J^P]$$

D_J^I bilindiğinde toplam hasar rezerv tahmininin HKO'sı

$$mse(R | D_J^I) = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq J} \left(\exp \left((\alpha_{J-k_1} v_J^2) 1_{\{k_1=k_2\}} + (e_{k_1}^I)' \Sigma(D_J^I) e_{k_2}^I \right) - 1 \right) E[P_{k_1, J} | D_J^I] E[P_{k_2, J} | D_J^I]$$

D_J bilindiğinde toplam hasar rezerv tahmininin HKO'sı,

$$mse(R | D_J) = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq J} \left(\exp \left((1 - \beta_{J-k_1}) (v_J^2 - \omega_{J-k_1}^2) 1_{\{k_1=k_2\}} + (e_{k_1})' \Sigma(D_J) e_{k_2} \right) - 1 \right) E[P_{k_1, J} | D_J] E[P_{k_2, J} | D_J]$$

biçimindedir.

5. YÖNTEMLERİN BENZERLİK VE FARKLILIKLARI

ZM yönteminde sadece ödenen ya da sadece gerçekleşen hasar bilgisine dayalı rezerv hesabı yapılmaktadır. MZM, GTHO ve Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yöntemlerinde hem ödenen hem de gerçekleşen hasar bilgisi bir arada kullanılarak rezerv hesabı yapılmaktadır.

ZM ve MZM yöntemlerinde iki farklı rezerv tahmini elde edilirken, ödenen ve gerçekleşen hasar bilgisini birlikte kullanan GTHO ve Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yöntemlerinde tek bir rezerv tahmini elde edilir.

ZM, MZM ve GTHO yöntemlerinde herhangi bir dağılım varsayımı yokken Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yönteminde bir dağılım varsayımı vardır.

ZM, GTHO ve Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yöntemlerinde rezerv tahminlerindeki belirsizliği ölçmek için hata kareler ortalaması ve hasar rezervinde bir yıldaki değişimi ölçen hasar gelişim sonucu elde edilebilirken MZM yönteminde hata kareler ortalaması ve hasar gelişim sonucu elde edilemiyor. Bu tezde ele alınan yöntemlerin benzerlik ve farklılıkları Çizelge 5.1’de özetlenmiştir:

Yöntem	Kullanılan bilgi	Dağılım varsayımı	Rezarv Tahmini	HKO	Hasar Gelişim Sonucu
Mack’in Zincir Merdiven	Ya ödenen ya da gerçekleşen hasar	Yok	İki farklı	Elde edilebilir	Elde edilebilir
Münih Zincir Merdiven	Ödenen ve gerçekleşen hasar	Yok	İki farklı	Elde edilemez	Elde edilemez
Genişletilmiş Tamamlayıcı Hasar Oranı	Ödenen ve gerçekleşen hasar	Yok	Tektir	Elde edilebilir	Elde edilebilir
Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasarlar	Ödenen ve gerçekleşen hasar	Var	Tektir	Elde edilebilir	Elde edilebilir

Çizelge 5. 1: Yöntemlerin karşılaştırılması

6. UYGULAMA

Bu bölümde, T.C. Başbakanlık Hazine Müsteşarlığı Sigortacılık Genel Müdürlüğü'nden alınan Zorunlu Trafik Sigortası 2010-2016 yıllarına ait çeyrek dönemlik ödenen ve muallak hasar verileri kullanılarak Bölüm 3'de verilen yöntemlerle hasar rezerv tahminleri yapılmıştır.

Hasar rezerv tahminleri yapılmadan önce çeyrek dönemlerden oluşan veri, yıllık olarak yeniden düzenlenmiştir. Tezde, hem ödenen hem de gerçekleşen hasarın birlikte kullanıldığı yöntemler de incelendiğinden, muallak hasar üçgeni ve ödenen hasar üçgenlerinin toplamından gerçekleşen hasar üçgeni elde edilmiştir. Yani i 'inci kaza ve j 'inci gelişim yılında gerçekleşen hasar, i 'inci kaza ve j 'inci gelişim yılındaki ödenen ve muallak hasarların toplamı alınarak elde edilmiştir.

2010-2016 yılları arasında ödenen ve gerçekleşen birikimli hasar tutarlarından oluşan hasar gelişim üçgenleri sırasıyla Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2'de verilmiştir.

	0	1	2	3	4	5	6
0	995.798.171	1.438.259.466	1.559.650.271	1.662.755.354	1.786.917.968	1.897.388.105	1.998.562.668
1	1.189.641.874	1.736.757.582	1.891.777.500	2.064.977.043	2.206.087.115	2.330.766.107	
2	1.353.354.645	1.931.272.233	2.169.789.044	2.368.695.049	2.535.892.270		
3	1.373.141.787	2.073.507.051	2.353.701.930	2.459.316.689			
4	1.645.091.685	2.475.031.357	2.862.810.883				
5	2.043.090.824	3.248.651.746					
6	2.388.117.281						

Çizelge 6. 1: Ödenen Birikimli Hasar Gelişim Üçgeni

	0	1	2	3	4	5	6
0	1.271.513.059	1.590.836.041	1.755.971.819	1.915.034.788	2.046.574.503	2.165.046.051	2.291.753.130
1	1.505.498.005	1.961.676.492	2.212.416.307	2.380.275.450	2.530.016.443	2.636.417.398	
2	1.721.677.567	2.299.078.019	2.572.917.292	2.782.450.708	2.931.756.416		
3	1.813.312.452	2.536.373.441	2.896.405.488	2.969.761.591			
4	2.170.842.459	3.154.454.913	3.556.440.946				
5	2.913.586.967	4.254.558.888					
6	3.483.927.015						

Çizelge 6. 2: Gerçekleşen Birikimli Hasar Gelişim Üçgeni

Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yönteminde, nihai gelişim yılında tüm hasarların çözüme ulaştığı yani gerçekleşen tüm hasarların ödendiği varsayıldığından, nihai gelişim yılında ödenen ve gerçekleşen hasarlar birbirine eşit yani $C_{1,6}^P = C_{1,6}^I = 2.291.753.130$ olarak alınmıştır.

Ödenen ve gerçekleşen hasar gelişim üçgenleri kullanılarak Mack'in dağılımdan bağımsız Zincir Merdiven, Münich Zincir Merdiven, Genişletilmiş Tamamlayıcı Hasar Oranı ve Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yöntemleri ile yapılan rezerv tahminleri Çizelge 5.3'te verilmiştir. Bu tahminler MATLAB r2013 programlamı yardımıyla elde edilmiştir.

Yöntem	Mack'in Zincir Merdiven		Münih Zincir Merdiven		Geniştirilmiş Tamamlayıcı Hasar Oranı	Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar		
Yöntem Bilgisi	Ödenen	Gerçekleşen	Ödenen	Gerçekleşen	Ödenen- gerçekleşen birlikte	Ödenen	Ödenen- gerçekleşen birlikte	Gerçekleşen
0	-	-	-	-	-	-	-	-
1	484.441.022	459.944.890	482.864.462	461.674.782	450.344.108	484.466.328	480.781.869	459.795.474
2	707.454.726	925.051.812	918.483.827	918.661.368	732.500.897	708.357.234	709.497.069	721.288.700
3	909.221.716	1.167.898.222	1.025.124.407	984.254.655	1.167.657.635	910.986.356	926.847.199	104.3008.758
4	1.343.982.937	2.129.785.947	1.886.015.350	1.865.139.755	1.893.557.672	1.349.481.099	1.427.428.700	1.601.141.847
5	2.109.999.716	3.676.524.682	3.267.023.011	3.494.651.313	3.767.517.974	2.095.222.923	2.407.336.360	2.730.007.657
6	3.522.194.320	4.487.882.738	3.954.792.981	4.225.006.565	5.933.270.184	3.463.875.413	3.766.690.833	4.138.669.038
TOPLAM	9.077.294.437	12.847.088.291	11.534.304.038	11.949.388.438	13.944.848.470	9.012.389.353	9.718.582.029	10.693.911.473

Çizelge 6. 3: Hasar Rezerv Tahmin Değerleri

Çizelge 5.3'ten Mack'in ZM yöntemi ödenen ve gerçekleşen hasar gelişim üçgenlerine ayrı ayrı uygulandığında, toplam rezerv tahminlerinin birbirinden oldukça farklı olduğu görülmektedir. Nihai gelişim yılında gerçekleşen hasarların tamamının ödenmesi beklenir. Ancak bu yöntemde ödenen ve gerçekleşen hasar bilgileri kullanılarak hesaplanan iki rezerv tahmininin birbirine eşit olmaması bu beklentiyi karşılamamaktadır. Tahminler arasındaki bu farkı azaltmak için geliştirilen MZM yöntemi kullanıldığında, bu farkın oldukça azaldığı görülmektedir. Bu nedenle, MZM yöntemiyle rezerv taminlerinin daha gerçekçi olduğu ancak beklentiyi hala karşılamadığı söylenebilir. MZM ile yapılan tahminler, ödenen ve gerçekleşen hasarlar için ZM ile hesaplanan tahminlerin arasında yer almaktadır.

Her iki bilgi kaynağını birlikte kullanan GTHO yönteminde, MZM yöntemi ile azalan rezerv tahminleri arasındaki fark tamamen ortadan kalkmış ve tek bir rezerv tahmini elde edilmiştir. Tek bir rezerv hesaplanması beklentileri karşılayan bir durumdur. Ancak GTHO yöntemiyle hesaplanan rezerv tahmininin, diğer yöntemlerle hesaplananlardan daha yüksek olduğu görülmektedir.

Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yönteminde; sadece ödenen hasar bilgisine, sadece gerçekleşen hasar bilgisine ve her iki bilgiye sahipken olmak üzere üç farklı durum için rezerv tahmini hesaplanmıştır. Bayesci yaklaşımla Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yönteminin parametreleri tahmin edilirken varyans parametreleri σ_j^2 ve τ_j^2 'lerin bilindiği varsayımı vardır. Bu parametreler Eşitlik (3.16) ve (3.17)'den elde edilmiştir. Bu yöntemle hesaplanan rezervlerin, diğer yöntemlerden elde edilenlerle kıyaslanabilmesi için bilgi içermeyen önseller kullanılmıştır. Yani Eşitlik (3.14) ve (3.15)'te $s_m^2 \rightarrow \infty$ ve $t_m^2 \rightarrow \infty$ olduğu varsayılmıştır.

Bu üç durum için elde edilen rezerv tahminleri karşılaştırıldığında, gerçekleşen hasar verisi ile elde edilen rezerv tahmininin yüksek, ödenen hasar verisi ile elde edilen rezerv tahmininin düşük ve her iki bilgi birlikte kullanıldığında tahminin ise düşük ve yüksek tahminler arasında olduğu görülmektedir.

Tüm yöntemlerde, gerçekleşen hasar verisi kullanılarak yapılan tahminler ödenen hasar verisi kullanılarak yapılan tahminlerden yüksektir. Bunun nedeni gerçekleşen hasarların ödenen hasarın yanı sıra muallak hasarları da içeriyor olmasıdır. Ödenen hasar verisi sadece gerçek ödemeleri içerdiğinden tahminler de sadece yapılan ödemeler doğrultusundadır. Gelecekteki ödemelerde durum mevcut şartlardan farklı olabileceğinden, daha fazla bilgi içeren gerçekleşen hasar verisini kullanmak daha iyi olabilir. Ancak sadece gerçekleşen hasar verisini kullanmak daha fazla rezerv ayrılmasına neden olduğundan, bu sigorta şirketlerince istenmeyen bir durum olabilir. Dolayısıyla şirket açısından her iki bilgi kaynağını bir arada kullanarak elde edilen tahminler daha makul olabilir.

Farklı yöntemlerle hesaplanan rezerv tahminlerinin belirsizliğinin ölçülmesinde aktüeryada yaygın olarak kullanılan bir risk ölçüsü olan hata kareler ortalaması kullanılmıştır. Her yöntemle elde edilen hata kareler ortalamalarının karekökleri Çizelge 5.4'te verilmiştir.

		HKO^{1/2}
Mack'in Zincir Merdiven	Ödenen	445.889.728
	Gerçekleşen	489.678.795
Münih Zincir Merdiven	Ödenen	hesaplanamıyor
	Gerçekleşen	hesaplanamıyor
Genişletilmiş Tamamlayıcı Hasar Oranı	Ödenen	1.559.501.412
	Gerçekleşen	1.183.880.812
Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar	Ödenen	848.150.627
	Gerçekleşen	654.112.337
	Ödenen-Gerçekleşen birlikte	369.177.239

Çizelge 6. 4: Hata Kareler Ortalamalarının Karekökü

MZM yöntemi için HKO'ya ilişkin formüller henüz elde edilmediğinden, bu yöntemin tahmin belirsizliği hakkında bir şey söylenemez. GTHO yöntemiyle hesaplanan tahminin HKO diğer tüm yöntemlerden daha yüksek elde edilmiştir. Bu yöntemle hesaplanan rezerv de diğer yöntemlerden yüksek elde edilmişti. Çizelge 5.4'den en düşük hata kareler ortalamasının her iki bilgi kaynağının birlikte kullanıldığı Bayesci Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yöntemiyle elde edildiği görülmektedir. Dolayısıyla, bu yöntemin mevcut veride rezerv tahmininde en iyi olduğu söylenebilir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hayat dışı sigortalarda, genellikle hasarın raporlanması ve kapanması arasında gecikme olduğu için hasarın çözüme ulaşması bir süreç almaktadır. Bu gecikme, sigorta şirketinin henüz çözüme ulaşmayan hasarlara yapacağı muhtemel hasar ödemeleri için bir rezerv ayırmasını gerektirmektedir. Hasar rezervini doğru belirleyebilmek sigorta şirketlerinin mali yapılarını koruyabilmeleri açısından önemlidir. Hasar rezervini tahmin etmede deterministik ve stokastik olmak üzere iki farklı yaklaşım vardır. Her iki yaklaşımda da rezervin en iyi tahmininin elde edilmesi amaçlanırken, stokastik yaklaşım deterministik yaklaşımdan farklı olarak hasar rezervinin değişkenliği ve dağılımı hakkında bilgi vermektedir.

Yapılan rezerv tahminleri genellikle farklı bilgi kaynaklarından gelen geçmiş veriye dayanmaktadır. Geleneksel rezerv tahmin yöntemleri tek bir bilgi kaynağını kullanırken, son yıllarda farklı kaynaklardan gelen hasar bilgisini birlikte kullanan tahmin yöntemleri ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada, ödenen ve gerçekleşen hasar bilgisinin birlikte kullanıldığı stokastik yöntemlerden Mack'in ZM, MZM, GTHO ve Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yöntemleriyle Türkiye zorunlu trafik sigorta verisi kullanılarak bu branş için rezerv tahminleri hesaplanmıştır. Yöntemleri karşılaştırmak için HKO'ları hesaplanmış ve iki bilgi kaynağını birlikte kullanan Bayesci Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yönteminin kullanılan veri için en uygun yöntem olduğu sonucuna varılmıştır.

MZM yönteminde, ödenen ve gerçekleşen hasarlar arasındaki bağımlılık göz önünde bulundurularak rezerv tahmini yapılırken, GTHO ve Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yöntemlerinde bu bağımlılık dikkate alınmamaktadır. Ancak bu iki hasar bilgisi arasında bir bağımlılık söz konusudur. Literatür incelendiğinde Ödenen-Gerçekleşen Zincir Hasar yönteminin bu bağımlılık yapısı dikkate alınarak geliştirildiği ve rezerv tahminlerinin elde edildiği görülmektedir. Dolayısıyla Türkiye için bu yöntemle bağımlılık yapısı da dikkate alınarak rezerv tahminleri elde edilebilir. Bunun yanısıra eğer J gelişim yılından sonra da hasar gelişimleri bekleniyorsa bu kuyruk gelişimini dikkate alarak rezerv tahmini yapılabilir. Solvency II'deki önemli konulardan olan hasar gelişim sonucu da elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Halliwell, L. J., Conjoint Prediction of Paid and Incurred Losses, *Casualty Actuarial Society E-Forum*, 241–379, **1997**.
- [2] Halliwell, L. J., Modeling Paid and Incurred Losses Together, *Casualty Actuarial Society E-Forum*, 1–40, **2009**.
- [3] Quarg, G. and Mack, T., Munich Chain Ladder : A Reserving Method that Reduces the Gap between IBNR Projections Based on Paid Losses and IBNR Projections Based on Incurred Losses, *Variance Journal*, 2(2) 266-299 , **2004**.
- [4] Venter, G. G., Distribution and Value of Reserves Using Paid and Incurred Triangles, *Casualty Actuarial Society E-Forum*, 348-375, **2008**.
- [5] Jedlicka, P., Various Extensions Based on Munich Chain Ladder Method, *ASTIN Colloquim*, Orlando, Florida, **2007**.
- [6] Dahms, R., A Loss Reserving Method for Incomplete Data, *Bullettin Swiss Association of Actuaries*, 127–148, **2008**..
- [7] Posthuma, B., Cator, E. A., Veerkamp, W., and Zwet, Van E. W., Combined Analysis of Paid and Incurred Losses, *Casualty Actuarial Society E-Forum*, 1–23, **2008**.
- [8] Merz, M. and Wüthrich, M. V., Paid-incurred chain claims reserving method, *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(3), 568–579, **2010**.
- [9] Hertig, J. A Statistical Approach To IBNR-Reserves in Marine Reinsurance, *ASTIN Bulletin*, 15(2), 171–183, **1985**.
- [10] Gogol, D., Using expected loss ratios in reserving, *Insurance: Mathematics and Economics*, 12(3), 297–299, **1993**..
- [11] Verrall, R., Nielsen, J. P., and Jessen, A. H., Prediction of RBNS and IBNR claims using claim amounts and claim counts, *ASTIN Bulletin* 40(2), 871–887, **2010**.
- [12] Martínez, M., Nielsen, J. P., and Verrall, R., Double chain ladder, *ASTIN Bulletin*, 42(1), 59-76, **2012**.
- [13] Martínez, M., Nielsen, J. P., and Verrall, R., Double Chain Ladder and Bornhuetter-Ferguson, *North American Actuarial Journal*, 17(2), 101–113, **2013**.
- [14] Bornhuetter, R. L., Ferguson, R. E., The Actuary and IBNR, *Casualty Actuarial Society*, 181-195, **1972**.
- [15] Dupin, G., Koenig, E., Le Moine, P., Monfort, A., and Ratiarison, E., Coherent Incurred Paid (Cip) Models for Claims Reserving, *ASTIN Bulletin*, 48(2), 749-777, **2017**.
- [16] Wüthrich, M. V. and Merz, M., *Stochastic Claims Reserving Manual Advances in dynamic modeling*, Swiss Finance Institute Research Paper No. 15-34, **2015**.

- [17] Merz, M. and Wüthrich, M. V., A credibility approach to the munich chain-ladder method, *Blätter der DGVFM*, 27(4), 619–628, **2006**.
- [18] Brown, R. L. and Gottlieb, L. R., *Introduction to ratemaking and loss reserving for property and casualty insurance*, Third edition ACTEX Publications, **2007**.
- [19] The Institute of Actuaries, *Claim Reserving Manual Volume1 and Volume 2*, **1989**.
- [20] Carrato, A., Mcguire, G., and Robert, S., A Practitioner's Introduction to Stochastic Reserving, *Institute and Faculty of Actuaries*, **2016**.
- [21] Taylor, G., Mcguire, G., and Greenfield, A., *Loss reserving : past , present and future*, *Casualty Actuarial Society*, Centre for Actuarial Studies, Dept. of Economics, University of Melbourne, **2003**.
- [22] Thomas, M., Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates, *ASTIN Bulletin*, 23(2), **1993**.
- [23] Verrall, R. J., A stochastic model underlying the chain-ladder technique, *British Actuarial Journal* 2, 4(4), 903–923, **1998**.
- [24] Gisler, A. and Wüthrich, M. V., Credibility for the Chain Ladder Reserving Method, *ASTIN Bulletin*, 38(2), 565–600, **2008**.
- [25] Mack, T., The Prediction Error of Bornhuetter/Ferguson, *ASTIN Bulletin*, 38(1), 87–103, **2008**.
- [26] England, P. D., Verrall, R. J. and Wüthrich, M.V., Bayesian overdispersed Poisson model and the Bornhuetter-Ferguson claims reserving method, *Annals of Actuarial Science*, 6(2), 258-283, **2012**.
- [27] Saluz, A., Gisler, A., and Wüthrich, M.V., Development Pattern and Prediction Error for the Stochastic Bornhuetter-Ferguson Claims Reserving Method, *ASTIN Bulletin*, 41(3), 279–313, **2011**.
- [28] Merz, M. and Wüthrich, M.V., Modelling the claims development result for solvency purposes, *Casualty Actuarial Society E-Forum*, 542–568, **2008**.
- [29] Acar, O., Avrupa Birliği Solvency II Projesi, Türkiye Sigorta ve Reasürans Şirketleri Birliği, 2011.
- [30] Carrato, A., Concina, F., Gesmann, M., Murphy, D., and Zhang, W., *Claims reserving with R : Chain Ladder-0.2.4 Package Vignette Alessandro*. **2017**.
- [31] Li, J., Comparison of Stochastic Reserving Methods, *Australian Actuarial Journal* 12(4), 489-497, **2006**.
- [32] Craig, C. and Driscoll, O., Bootstrap Estimation of the Predictive Distributions of Reserves Using Paid and Incurred Claims, *International Journal of Infectious Diseases*, 265–274, **2016**.

- [33] Dahms R., “Linear stochastic reserving methods,” ASTIN Bullettin 42(1), 1–34, **2012**.
- [34] Happ, S., Stochastic Claims Reserving under Consideration of Various Different Sources of Information, the Doctor of Economics, The University of Hamburg, Hamburg **2014**.
- [35] Wüthrich, M.V., “Paid-Incurred Chain Claims Reserving Method,” *Slovensko aktuarsko drustvo*, October 11, Ljubljana, Slovenia **2011**.
- [36] Wüthrich, M.V.. and Merz, M., *Stochastic Claims Reserving Methods in Non-Life Insurance*, Wiley, **2008**.
- [37] Tunç, T., *Hayatdışı Sigortalarda Hasar Rezervinin Genelleştirilmiş Doğrusal Modellerle Tahmini*, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2010**.



ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Müge YELDAN
Doğum Yeri : Samsun
Medeni Hali : Bekar
E-posta : mugeyeldan@hacettepe.edu.tr
Adres : Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Eğitim

Lise : Samsun Yeşilkent Anadolu Lisesi, 2006-2010
Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri, 2010-2014
Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri, 2015-2018

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, İyi

İş Deneyimi

Fırat Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, 2016 Şubat-2016 Haziran
Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, 2016 Haziran-...

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih 02/07/2018

Tez Başlığı : ÖDENEN VE GERÇEKLEŞEN HASAR BİLGİSİNE DAYALI BAZI REZERV TAHMİN YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 40 sayfalık kısmına ilişkin, 22/06/2018 tarihinde tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezin benzerlik oranı %8 'tir.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar hariç
- 3- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: MÜGE YELDAN

Öğrenci No: N14323944

Anabilim Dalı: AKTÜERYA BİLİMLERİ

Programı: AKTÜERYA BİLİMLERİ

Statüsü: ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

02/07/2018
M. Yeldan

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Dr. Öğr. Üyesi Yasemin Gençtürk
(Unvan, Ad Soyad, İmza)