



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

ÖĞRETİM ELEMANLARININ MATEMATİK DERSLERİNDE
İSPAT ANLATIM YAPILARININ İNCELENMESİ

ESRA AKSOY

İzmir
2020

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

ÖĞRETİM ELEMANLARININ MATEMATİK DERSLERİNDE
İSPAT ANLATIM YAPILARININ İNCELENMESİ

ESRA AKSOY

DANIŞMAN
Prof. Dr. Serkan Narlı

İzmir
2020

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum “*Öğretim Elemanlarının Matematik Derslerinde İspat Anlatım Yapılarının İncelenmesi*” adlı çalışmanın içerdđđı fikri izinsiz başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında ve bölümlerinin yazımında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve *intihal içermediğini* beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

30/11/2020



Esra AKSOY



DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



Tarih: 07/12/2020

Tez Başlığı:

Öğretim Elemanlarının Matematik Derslerinde İspat Anlatım Yapılarının İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 312 sayfalık kısmına ilişkin, 01/11/2020 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (Turnitin-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezin **benzerlik oranı % 10** dur.

- <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz Programı Kullanım Kılavuzunu okudum ☒

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) ☐

Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30) ☒

☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça hariç, ☐ Alıntılar dâhil, ☐ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☒ Kaynakça dâhil, ☒ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ☒	
EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde. ☒	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Esra Aksoy
Öğrenci No : 2014950002
Anabilim Dalı : İlköğretim
Programı : İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Statüsü : Yüksek Lisans ☐ Doktora ☒

ÖĞRENCİ

DANIŞMAN

07/12/2020

Esra Aksoy

07/12/2020

Prof. Dr. Serkan Narlı

Açıklamalar

- 1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (☐) işaretleyerek doldurunuz. Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel: +90 (232) 3018026 veya ali.tas@deu.edu.tr) başvurunuz.
- 2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu formu tezin ciltlenmiş ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.
- 3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.
- 4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.

TEŞEKKÜR

Ardı ardına edeceğim teşekkürlerime,

‘*Şükrün Sahibi*’ne olan teşekkürümle başlamak isterim.

Ardından;

Bir ferdi olmaktan gurur duyduğum fedakâr Aileme,

yoldaşım ve inşirahım Eşime,

her aşamada bilgisi, tecrübesi ve samimiyeti ile destek veren ve bir yandan danışman

olma ruhunu yaşatırken diğer yandan aileden biri olan

danışmanım Prof. Dr. Serkan NARLI’ya,

çalışmamda katılımcı olmayı kabul eden değerli Öğretim Üyelerine,

Destek veren tüm arkadaşlarıma ve yakınlarıma,

Teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	x
ABSTRACT.....	xii
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu.....	1
1.2. Amaç ve Önem	8
1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri.....	9
1.4. Sınırlılıklar.....	9
1.5. Varsayımlar.....	9
1.6. Tanımlar.....	9
BÖLÜM II.....	10
KURAMSAL ÇERÇEVE / KAVRAMSAL ÇERÇEVE / İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	10
2.1. İspat Tanımı	11
2.2. İspatın Önemi ve Faydaları	12
2.3. İspatın İşlevleri/Roller.....	13
2.4. İspat ve Öğretim Programları.....	15
2.4.1. İspat ve NCTM.....	15
2.4.2. İspat ve Ortaokul Matematik Öğretim Programı	16
2.4.3. İspat ve Ortaöğretim Matematik Öğretim Programı	19
2.4.4. İspat ve Matematik Öğretmenliği Lisans Programları	22
2.5. İspat ve Öğrenciler	23
2.5.1. Öğrencilerin İspata İlişkin Yaşadıkları Güçlükler	24
2.5.2. Öğrencilerin İspata İlişkin Yaşadıkları Güçlüklerin Nedenleri	26

2.5.3. Öğrencilerin İspata İlişkin Yaşadıkları Güçlüklerin Giderilmesi ve İspatlama Becerilerinin Geliştirilmesi İçin Öneriler	31
2.6. İspat ve Öğretmenler	38
2.6.1. Öğretmenlerin İspat Yapma / Okuma / Değerlendirme / Puanlama Davranışları	39
2.6.2. Öğretmenlerin Mülakatlarda İspat Öğretimine Yönelik Beyanları.....	44
2.6.3. Öğretmenlerin İspata Yönelik Gözlemlenen Öğretim Uygulamaları	51
2.6.4. İspat Öğretiminde Öğretmenlere İlişkin Teorik Çalışmalar.....	65
BÖLÜM III	67
YÖNTEM.....	67
3.1. Araştırmanın Modeli / Deseni	68
3.2. Katılımcılar	70
3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları	74
3.4. Verilerin Analizi.....	79
3.5. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği.....	84
3.6. Araştırmacının Rolü	87
BÖLÜM IV	88
BULGULAR.....	88
4.1. Birinci Alt Probleme İlişkin Bulgular (İspatın Önemine Bakış).....	89
4.2. İkinci Alt Probleme İlişkin Bulgular (İspatın derste sunumuna bakış).....	103
4.2.1. Teoremin sunumuna ilişkin bulgular	103
4.2.2. İspatın sunumuna ilişkin bulgular	122
4.2.3. “Derste ispat yaparken kesinlikle yapılmalı dediğiniz bir şey var mı?” sorusuna ilişkin bulgular	155
4.2.4. “Derste ispat yaparken kullandığınız ispat yönteminden bahseder misiniz? Neden?” sorusuna ilişkin bulgular	163

4.2.5. İspatta hangi özelliklerin bulunması gerektiğine ve kendilerinin bu özellikleri elde etmek için ispatta değişiklik yapıp yapmadıklarına ilişkin bulgular	167
4.2.6. Sunulmayan ispatlara ilişkin bulgular	175
4.3. Üçüncü Alt Probleme İlişkin Bulgular (Öğrenciye bakış).....	191
4.3.1. “Sizce öğrencilerin ispatı anlaması demek ne demektir?” sorusuna ilişkin bulgular	191
4.3.2. “Bir öğrencinin yaptığınız bir ispatı anlayıp anlamadığını nasıl anlarsınız?” sorusuna ilişkin bulgular	195
4.3.3. “Öğrencilerin ispatı anlamalarına yardımcı olmak için neler yaptığınızı belirtiniz.” sorusuna ilişkin bulgular	198
4.3.4. Öğrenci güçlükleriyle ilgili görüşlere ilişkin bulgular	201
4.3.5. “Öğrencilerden yayımlanmış ispatları incelemelerini istemeli miyiz? Neden?” sorusuna ilişkin bulgular	219
4.3.6. “İspat yaparken öğrencilerin derse katılımını beklemek gerekir mi? Katılım bekliyorsanız bunun için neler yaparsınız? sorularına ilişkin bulgular.....	226
4.3.7. “Öğrencilerden ispat yapmalarını istemeli miyiz? Neden?” sorusuna ilişkin bulgular	231
4.4. Dördüncü Alt Probleme İlişkin Bulgular (Ders kitabına bakış).....	236
BÖLÜM V	240
TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	240
5.1. Tartışma.....	240
5.1.1. Birinci alt probleme ilişkin tartışma (İspatın önemine bakış).....	240
5.1.2. İkinci alt probleme ilişkin tartışma (Derste ispat sunumuna bakış).....	242
5.1.3. Üçüncü alt probleme yönelik tartışma (Öğrenciye bakış).....	249
5.1.4. Dördüncü alt probleme ilişkin tartışma (Ders kitabına bakış)	254
5.2. Sonuç ve Öneriler.....	256
5.2.1. İdeal ispat anlatım yapısı.....	257

5.2.2. Odak ispat anlatım yapısı	260
KAYNAKÇA.....	270
EK 1. Akademik özgeçmiş.....	289
EK 2. Uygulama İzinleri	291
EK 3. Birinci Görüşme Soruları.....	292
EK 4. Üçüncü Görüşme Seçme Sıralama Formundan Örnek Sorular	293



TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1 <i>İspatın işlevleri</i>	14
Tablo 2 <i>Öğretim Elemanlarının Anabilim dalları, Pozisyonları, Öğretim Deneyimleri</i>	71
Tablo 3 <i>Ders video kaydı yapılan ders içeriği, bölümü verildiği dönem ve öğrenci sayısı</i> ...	72
Tablo 4 <i>Araştırma kapsamında ihtiyaç duyulan bilgiler ve veri toplama yöntemleri</i>	74
Tablo 5 <i>Gözlem yapılan ders sayısı, süre ve gözlemlenen ispat sayısı</i>	78
Tablo 6 <i>Matematik derslerinde ispatın önemine yönelik görüşler</i>	91
Tablo 7 <i>Teoremin anlaşılmasına yönelik beyan edilen uygulamalar</i>	104
Tablo 8 <i>Teoremin sunulması esnasında gözlemlenen uygulamalar ve bu uygulamaların ders gözlemlerinde görülme yüzdeleri</i>	109
Tablo 9 <i>Öğretim elemanlarının teoremleri sunarken sordukları soru çeşitlerine göre yüzdelik dağılımları</i>	120
Tablo 10 <i>İspatlamayı nasıl yaptıkları sorusuna verdikleri yanıtlarda vurgulanan uygulamalar</i>	122
Tablo 11 <i>İspat sunumu esnasında öğretim elemanlarının gözlemlenen uygulamaları ve bu uygulamaların görülme yüzdeleri</i>	125
Tablo 12 <i>Öğretim elemanlarının öğrencilerden ispat yapmalarını istedikleri ispat yüzdeleri ve öğrencilere verdikleri ortalama süre</i>	143
Tablo 13 <i>Öğretim elemanlarının ispat sunumlarında sordukları soruların bilgi türlerine göre dağılımları</i>	147
Tablo 14 <i>İspat sunumlarında sordukları soru türleri ve yüzdeleri</i>	149
Tablo 15 <i>İspat anlatımı esnasında yapılması gerekli görülen uygulamalar ve 3. mülakat (seçme-sıralama formu) sonuçları</i>	155
Tablo 16 <i>Öğretim elemanlarının, derste ispat yaparken ispatlama yöntemlerini vurgulama nedenleri</i>	164
Tablo 17 <i>İspatlarda yapılan değişikliklere yönelik görüşler</i>	168
Tablo 18 <i>Derste yapılacak ispatın özelliklerine yönelik görüşler</i>	171
Tablo 19 <i>Ders video gözlemlerinde ispatı yapılmayan teorem sayıları</i>	175
Tablo 20 <i>Öğretim elemanlarının derste bazı ispatları sunmamalarına yönelik görüşleri</i>	176
Tablo 21 <i>Derste ispatın sunulmadığı durumlarda öğretim elemanlarının yaptıkları açıklamalar</i>	183
Tablo 22 <i>Bir öğrencinin ispatı anlamasının göstergelerinin neler olduğuna yönelik görüşler</i>	192

Tablo 23 Öğretim elemanlarının, öğrencilerin derste sunulan bir ispatı anlayıp anlamadığını nasıl belirlediklerine yönelik görüşleri	196
Tablo 24 Öğrencilerin ispatı anlamalarına yardımcı olmanın amaçlandığı uygulamalar .	198
Tablo 25 Öğretim elemanlarının öğrencilerin ispatlamada yaşadığı güçlüklerle yönelik fikirleri	202
Tablo 26 Öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin nedenlerine ilişkin görüşler..	204
Tablo 27 Öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin giderilmesi için öğretim elemanları tarafından sunulan öneriler	214
Tablo 28 Öğrencilerin ispat incelemelerinin istenmesinin gerekçeleri	220
Tablo 29 Öğretim elemanlarının ispat anlatımı esnasında öğrencilerin katılımını sağlamak için yaptıkları uygulamalar.....	228
Tablo 30 Öğretim elemanlarının öğrencilerinden ispat yapmaya çalışmalarını isteme amaçları	232
Tablo 31 Öğretim elemanlarının ders kitaplarında ispatlara ilişkin görüşleri	237

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. İspat anlatım yapısı.....	7
Şekil 2. İlgili yayın ve araştırmalar bölümü başlık ve alt başlıkları özet tablosu.....	10
Şekil 3. Tez süreci genel akışı	67
Şekil 4. Veri toplama ve analiz süreci	80
Şekil 5. Bulgular bölümünde yer alan başlıklar	88
Şekil 6. Öğretim elemanlarının ispatın önemine yönelik temaları önem düzeyine göre sıralamaları.....	90
Şekil 7. Dr. Türev'in teoremi açıklarken çizdiği şekil	113
Şekil 8. Dr. Uzak'ın ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1	127
Şekil 9. Dr. Uzak'ın ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 2	127
Şekil 10. Dr. Uzak'ın ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 3	127
Şekil 11. Dr. Soyut'un ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1.....	128
Şekil 12. Dr. Soyut'un ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 2.....	128
Şekil 13. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1	129
Şekil 14. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 2	129
Şekil 15. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 3	130
Şekil 16. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 4	130
Şekil 17. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 5	130
Şekil 18. Dr. Uzak'ın ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 4	131
Şekil 19. Dr. Uzak'ın ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 5	132
Şekil 20. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 6	132
Şekil 21. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 7	133
Şekil 22. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 8	133
Şekil 23. Dr. Vektör'ün ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1	134
Şekil 24. Dr. Kompleks'in ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1	135
Şekil 25. Dr. Vektör'ün ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 2.....	136
Şekil 26. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 9	138
Şekil 27. Dr. Türev'in ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1	140
Şekil 28. Dr. Türev'in ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 2	140
Şekil 29. Dr. Türev'in ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 3	140

<i>Şekil 30.</i> Dr. Uzay'ın ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1	141
<i>Şekil 31.</i> Öğretim elemanlarının öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin nedenlerine yönelik temaları önem düzeyine göre sıralamaları.....	205
<i>Şekil 32.</i> İdeal ispat anlatım yapısı	258
<i>Şekil 33.</i> Odak noktalarına göre ispat anlatım yapıları ve öğretim elemanları	265



ÖZET

ÖĞRETİM ELEMANLARININ MATEMATİK DERSLERİNDE İSPAT ANLATIM YAPILARININ İNCELENMESİ

İspat yapma, matematiksel düşünmenin hem bir süreç hem de “ürün” (Tall, 1991) olarak sergilenmesine olanak tanıyan bir eylem olduğundan matematikçiler, matematik eğitimcileri ve matematik eğitimi araştırmacıları ispatın matematik derslerinde önemli bir role sahip olması gereken çok temel bir etkinlik olduğu konusunda hemfikirdirler (Weber, 2010). Bunun yanı sıra matematik öğretmenlerinin matematiksel ispat algıları yalnızca öğrencileri için sağladıkları deneyimleri değil aynı zamanda öğrencilerinin ispatı öğrenmesine yönelik beklentilerini de etkilediğinden öğretmenler için ispatlamayı kavramsal olarak anlamış olmak önemlidir (Ko, 2010). Öğretmen adayları hem gelecekteki öğrencilerinin ispat anlayışını şekillendirecek bu tür aktivitelere hem de ileri düzey matematiksel düşünmeye üniversitedeki ispat temelli matematik derslerinde hazırlanmaktadır. NCTM standartları, öğretim programları ve öğretmen yeterlikleri çerçevesinde, öğretmen adaylarının bir ortaokul/lise matematik öğretmeninden ispat öğretimi bağlamında beklenen yeterliklere sahip olacak şekilde lisans eğitimi alması gerektiğinden üniversitede ispata yönelik uygulamaların/eylemlerin ve söylemlerin önemli olduğu söylenebilir. Bu bağlamda, öğrencilerin gözünde matematik disiplininin temsilcileri olan öğretim elemanlarının uygulamalarını anlamak, öğrencilerin matematiksel düşünme ve aktivitelerinde daha başarılı ve üretken olmak için neler yapabileceklerini anlamamızı sağlaması açısından faydalıdır (Lynch ve Lockwood, 2018). Yani, ispat temelli derslerde öğretim elemanının bir ispatı anlatırken öğrencilerine sağladığı fırsatların neler olduğunu ve bu tür uygulamaların ne tür öğretimsel araçlar içerdiğini anlamak önemlidir. Bu gereklilikler göz önünde bulundurularak bu çalışmada, öğretim elemanlarının derste ispat anlatımının önemine, derste anlatacağı ispatların seçimine, öğrencilerden ispat ile ilgili beklentilerine ve onların ispatlamada yaşadığı güçlüklerle yönelik görüşlerinin yanı sıra derste bir ispatı nasıl anlattıklarının incelenmesi amaçlanmıştır.

Bu çalışmada “ispat anlatım yapısı” ifadesi ile öğretim elemanlarının derste ispatları nasıl anlattıkları ve ispat anlatımına yönelik görüşleri kastedilmektedir. İspat anlatımı ise ispatlanacak ifadeyi, ispatın kendisini ve ispat süresince verilen tüm tanımları, yorumları, örnekleri, soruları vb. uygulamaları içermektedir. Sonuç olarak bu çalışmada, öğretim

elemanlarının ispat anlatım yapıları; ispatın önemine, ders kitabına, derste ispat sunumuna ve öğrencilere dair beyan ettikleri görüşlerinin ve uygulamalarının analiz edilmesiyle incelenmiştir. Matematik eğitimi bölümünde görev yapmakta olan öğretim elemanlarının ispat anlatım yapılarının belirlenmesi amacıyla nitel araştırma yöntemlerinden gömülü teori kullanılmıştır. Bu çalışmanın katılımcıları, bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesinde ilköğretim veya ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümlerinde matematik alan dersleri veren 7 öğretim elemanından oluşmaktadır. Araştırmaya ilişkin yapılacaklara karar verilmesinin ve gerekli izinlerin alınmasının ardından öğretim elemanlarının dersleri video kaydı yapılarak gözlemlenmiştir. Bu sırada, ispat anlatım yapılarına ilişkin sorulacak sorular belirlenmiş ve birinci görüşme soruları hazırlanmıştır. Ders video gözlemleri devam ederken birinci görüşme gerçekleştirilmiş ve bu görüşmenin analizleri yapılmıştır. Bu analizler ve ders video analizleri sonucunda öncelikle öğretim elemanlarının hem açıklamasına hem de teyidine ihtiyaç duyulan sorular veya gözlemler için ikinci görüşme planlanmış ve gerçekleştirilmiştir. Aynı zamanda birinci görüşme sorularından seçilen soruların analizleri sonucunda ortaya çıkan kategorilerin ve temaların önem düzeylerinin belirlenmesi amacıyla seçme ve sıralama sorularından oluşan bir görüşme formu oluşturulmuş ve üçüncü görüşme gerçekleştirilmiştir. Ardından, tüm görüşmeler ve ders video analizleri birlikte tekrar analiz edilmiş ve yorumlanmıştır.

Sonuç olarak, dersten derse değişmemesi gerektiği düşünülen önemli uygulamaların varlığı veya görülme sıklıkları, derste veya mülakatta bariz olarak farklılık içeren söylemler ve görüşlerdeki fikir birlikleri veya ayrılıkları sonucunda iki önemli teoriye ulaşılmıştır. Teorilerden biri, öğretim elemanlarının görüşleriyle oluşturdukları “*ideal ispat anlatım yapısı*”dır. Bu ideal ispat anlatım yapısı, mülakatta ispat anlatımına yönelik *olması gerekene* (*ideal olana*) işaret eden sorulara öğretim elemanlarından gelen yanıtlar ve bu yanıtların seçiliş ve sıralanışları sonucunda şekillenmiştir. İkinci teori ise öğretim elemanlarının ispat anlatımlarında veya görüşlerinde baskın bir farklılık gösteren ve bir örüntü oluşturan (dersten derse değişmemesi beklenen ve pedagojik açıdan önemli kabul edilebilecek) özelliklerini içeren “*odak ispat anlatım yapısı*”dır. Bu anlatım yapılarının belirlenmesi ise öğretim elemanlarının ispat sunumları süresince tespit edilen uygulamalarındaki örüntüler ve farklılıkların analizi ile sağlanmıştır. Çalışmanın önemli sayılabilecek diğer sonuçları ve bu sonuçların literatürde nasıl yer bulduğu da tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Öğretim elemanı, ispat, ispat anlatımı, ideal ispat anlatım yapısı, odak ispat anlatım yapısı.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF INSTRUCTORS' PROOF PRESENTATION STRUCTURES IN MATHEMATICS LECTURES

Since proving is an act that allows mathematical thinking to be displayed both as a process and as a “product” (Tall, 1991), mathematicians, mathematics educators, and mathematics education researchers agree that proof is a very fundamental activity that should have an important role in mathematics lessons (Weber, 2010). In addition, mathematics teachers' perceptions of mathematical proof affect not only the experiences they provide for their students but also their students' expectations for proof learning, so it is important for teachers to have a conceptual understanding of proof (Ko, 2010). Pre-service teachers are prepared both for such activities that will shape the understanding of proof of their future students and for advanced mathematical thinking in proof-based mathematics courses at the university. Within the framework of NCTM standards, curricula and teacher competencies, it can be said that the practices/actions and discourses towards proof are important in the university, since the pre-service teachers must have the competencies expected from a middle school/high school mathematics teacher in the context of proof teaching. In this context, understanding the practices of lecturers, who are the representatives of the mathematics discipline in the eyes of students, is beneficial in terms of helping us understand what students can do to be more successful and productive in their mathematical thinking and activities (Lynch & Lockwood, 2018). In other words, it is important to understand the opportunities that the lecturer provides to her/his students while explaining a proof in proof-based lessons and what kind of instructional tools such applications include. Considering these requirements, this study aimed to examine how the lecturers presented a proof in the course, as well as their views on the importance of proof in the course, the choice of proofs they will present in the course, their expectations from students about proof and their difficulties in proving.

In this study, the term "proof presentation structure" refers to how the lecturers explain the proofs and their opinions about the proof presentation. The presentation of the proof includes the statement to be proved, the proof itself and all the definitions, comments, examples, questions etc. given during the proof. As a result, in this study, the proof presentation structures of the lecturers were explored by analyzing their practices and views about the importance of the proof, the textbook, the presentation of the proof in the lesson and students. In order to determine the proof presentation structures of the lecturers working in the department of mathematics education, grounded theory, one of the qualitative research

methods, was used. Participants of this study consist of 7 lecturers who teach mathematics courses in primary or secondary mathematics teaching departments at the education faculty of a state university. After deciding what to do with the research and obtaining the necessary permissions, the courses of the lecturers were observed by video recording. Meanwhile, the questions to be asked about the proof expression structures were determined and the first interview questions were prepared. While the video observations of the lesson were continuing, the first interview was conducted, and this interview was analyzed. As a result of these analyzes and course video analysis, the second interview was planned and conducted for questions or observations that needed both explanation and confirmation of the instructors. At the same time, an interview form consisting of selection and ranking questions was created in order to determine the importance levels of the categories and themes that emerged as a result of the analysis of the questions selected from the first interview questions, and the third interview was held. Then, all interviews and course video observations were re-analyzed and interpreted together.

As a result, two important theories have been reached as a result of the existence or frequency of important practices that are thought to not change from course to course, discourses that contain obvious differences in the course or interview, and the consensus or disagreement in opinions. One of the theories is the "*ideal proof presentation structure*" formed by the opinions of the instructors. This ideal proof presentation structure was formed as a result of the responses from the instructors to the questions pointing to what should be (ideal) for the statement of proof in the interview and the selection and ordering of these answers. The second theory, on the other hand, is the "*focus proof presentation structure*", which includes the characteristics that predominantly differ in the proof presentations or opinions of the lecturers and form a pattern (which is expected not to change from course to course and can be considered pedagogically important). The determination of these presentation structures was achieved by analyzing the patterns and differences in the practices of the instructors during the proof presentations. Other results of the study, which may be considered important, and how these results find their place in the literature are also discussed.

Keywords: Instructor, proof, proof presentation, ideal proof presentation structure, focus proof presentation structure.

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Prensipler ve Standartlar (National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 2000) adlı dokümanda ispatlama kavramı, akıl yürütmenin ve gerekçenin kurallara uygun biçimde ifade edilmesi olarak tanımlanmıştır. Griffiths (2000) ise matematiksel bir ispatın aksiyomlar kümesiyle başlayan ve mantıksal adımlarla sonuca doğru giden muhakemenin formel ve mantıksal bir dizisi olduğunu belirtmiştir. Stylianides'in (2007) tanımlamasına göre ise ispat, matematiksel bir iddiayı doğrulamak ya da yanlışlamak üzerinden ortaya konan, birbiriyle ilişkili savlar dizisidir. Literatürde yer alan bu tür tanımlamalardan yola çıkarak, ispatlamanın genel anlamda 'bir iddianın doğruluğunun veya yanlışlığının belirli matematiksel kurallara dayanılarak gösterilmesi' olarak tanımlanması yönünde ortak bir kanının varlığından söz edilebilir.

Schoenfeld (2009) eğer problem çözme matematiğin kalbiyse ispat da onun ruhudur diyerek ispatın matematikteki yerine vurgu yapmıştır. Benzer şekilde ispatı matematiğin kalbi olarak nitelendiren araştırmacılar (örn., Mingus ve Grassl, 1999) bulunmaktadır. Matematikçilerin ispatın önemi konusunda hemfikir olduğu (Coe ve Ruthven, 1994; Hanna, 2000; Martin ve Harel, 1989) hatta bazılarının matematiği ispatlama bilimi olarak kabul ettiği görülmektedir. Peki ispatı bu kadar önemli yapan şey nedir? Bu sorunun cevabını ispatın matematik disiplinindeki ve matematik eğitimindeki işlevlerini/rollerini inceleyerek görebiliriz.

İspatın rolleri üzerine yapılan birçok araştırma bazen benzer bazen de farklı rollere vurgu yapıyor olsa da ispatın matematik eğitiminde önemi konusunda bu çalışmaların hemfikir olduğu söylenebilir. Cilli-Turner (2017) ispatın işlevlerinin/amaçlarının bağlama, içeriğe ve sunuma bağlı olarak çeşitlilik gösterebildiğini belirtmiştir. Matematikçiler için ispat, doğrulama (de Villiers, 1999; Hersh, 1993), açıklama (Hanna, 1995; Hersh, 1993), keşfetme (de Villiers, 1999), zihinsel meydan okuma/zorlama (de Villiers, 1999), sistematikleştirme (Bell, 1976; de Villiers, 1999) ve iletişim (de Villiers, 1999; Hanna, 1995; Harel ve Sowder, 2007) sağlayabilir.

Hanna ve Jahnke'ye (1996) göre matematiğin temel özelliği olan ispatın matematik eğitiminde de anahtar bileşen olması gerekmektedir. Örneğin bir öğretmen ispatı öğrencilerini ikna etmek (Weber, 2002; Yopp, 2011), onlara ispatlamadaki fikirleri ve teknikleri öğretmek

(Hanna ve Barbeau, 2008; Cilli-Turner, 2018; Weber, 2002; Weber, 2012; Yopp, 2011); diğer teoremleri ispatlamada faydalı olabilecek yaklaşımları (ispat yöntemlerini) örneklemek (Lew, Fukawa-Connelly, Mejía-Ramos ve Weber, 2016); matematiğin yapısını göstermek (Cilli-Turner, 2018; Yopp, 2011); öğrencinin anlamasını arttırmak (Hanna, 1990; Hersh, 1993; Weber, 2012; Yopp, 2011); bazı önemli (tarihsel veya kültürel) ispatları tanıtmak (Weber, 2012); bazı matematiksel düşünme becerilerini onlara kazandırmak (Hemmi, 2010; Knuth, 2002b; Yopp, 2011); ispatlama sürecinin nasıl olduğunu ve ispatın nasıl oluşturulabileceğini göstermek (Weber, 2010; Yopp, 2011); aksiyomatik bir yapının veya bir tanımın kullanımını göstermek (Weber, 2002) ve bazı önemli teoremleri vurgulamak için (Weber, 2012) sunabilir.

Uluslararası matematik eğitimi toplulukları da düzenledikleri organizasyonlarla ispatın matematik eğitimindeki önemini altını çizmektedir. Günümüzde matematik eğitimi alanında sadece ispat ve ispatlamayı konu edinen uluslararası bilimsel organizasyonların düzenlenmesi (2009 yılında Uluslararası Matematik Eğitimi Komisyonu (International Commission on Mathematical Instruction [ICMI] tarafından düzenlenen “Matematik eğitiminde ispat ve ispatlama” konulu ICMI 19 konferansı), veya uluslararası matematik eğitimi sempozyumlarında (International Group for the Psychology of Mathematics Education [IGPME], Congress of European Research in Mathematics Education [CERME], International Congress on Mathematical Education [ICME]) ispat ve ispatlama ile ilgili özel çalışma gruplarının ve oturumların oluşturulması matematik eğitiminde ispatın önemine vurgu yapan göstergelerdendir.

NCTM (2000) de ispatın okul öncesinden üniversite düzeyine kadar her seviyede işlevine vurgu yapmaktadır. Yani, okul öncesinden üniversite düzeyine kadar her seviyede öğretmenlerden beklenen öğrencilerini seviyelerine uygun ispatlama aktiviteleri (ispat okuma, ispat doğrulama, ispat oluşturma, gerekçelendirme, ispat sunma vb.) içine çekmektir. Stylianides (2007) öğrencilerin ispatla uğraşmak için fırsatlara ve bir modele ihtiyaç duyduklarını tartışmıştır ve bu nedenle öğretmenlere öğrencilerine ispatla uğraşmaları için fırsatlar sağlamalarını tavsiye etmiştir. Matematikçiler, matematik eğitimcileri ve matematik eğitimi araştırmacıları ispatın matematik derslerinde önemli bir role sahip olması gereken çok temel bir etkinlik olduğu konusunda hemfikirdir (Weber, 2010). Öğretmen adayları hem gelecekteki öğrencilerinin ispat anlayışını şekillendirecek bu tür bu aktivitelere hem de ileri düzey matematiksel düşünmeye üniversitedeki ispat temelli matematik derslerinde hazırlanmaktadır.

Matematiksel alanlarda ispat yapabilme yeteneği bir matematikçi için çok önemli bir beceridir. Gerçekten, bu yetenek ispat temelli matematik derslerinin de sıklıkla öncelikli

amacıdır (Weber, 2001). Bu derslerde öğrencilerin ispat okuma, anlama ve yazmada yetkin hale gelmeleri ve ayrıca ispatın değerini anlamaları önemli görülmektedir. (Harel and Sowder 1998; Millera, Infante ve Weber, 2017; Zazkis, Weber ve Mejia-Ramos, 2016). Bununla birlikte, matematiksel ispatlama bu kadar önemli olmasına ve derslerde üzerinde durulmasına rağmen literatürde birçok çalışmada öğrencilerin ispatlamada güçlük çektiği bilinmektedir (örn., Almeida, 2000; Harel ve Sowder, 1998; Weber, 2004). Yalnızca öğrencilerin değil öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin de benzer güçlükler yaşadığı da aktarılmaktadır.

Öğretmen adaylarının gelecekte öğretim yapacakları derslerinde matematiksel ispatları ve gerekçelendirmeleri kullanmaları beklenmekteyken çalışmalar öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik konu alan bilgisinin eksik olduğunu göstermektedir (örn., Stylianides ve Stylianides, 2009a). Benzer şekilde öğretmenler ispat oluşturmada (Harel and Sowder 2007) ve yapılan ispatları doğrulamada güçlük yaşamaktadırlar (Knuth 2002a; Martin and Harel 1989; Selden and Selden 2003). Stylianides, Stylianides ve Shilling-Traina (2013) da çoğu ilköğretim öğretmenin muhakeme etme ve ispatlama hakkında zayıf matematiksel alan bilgisine sahip olduğunu aktarmıştır.

Prensip ve standartlar'da, NCTM (2000) 'öğretmenin rehberliğinde öğrenciler verilen ifadeleri/açıklamaları kabul ederken yüksek standartlar geliştirmeli' (sf. 346) önerisi bulunmaktadır. Weber (2010) ispatı düzgün anlamamış olan lise matematik öğretmen adaylarının bu hedefi başaramayacağını belirtmiştir. Matematik öğretmenleri yaptıkları ve gösterdikleri ile öğrencilerin gözünde matematik disiplininin temsilcileridir ve neyin geçerli bir matematiksel ispat olarak kabul edilebileceği konusunda öğrencilere rehberlik ederler (Herbst, 2002). Matematik öğretmenlerinin matematiksel ispat algıları yalnızca öğrencileri için sağladıkları deneyimleri değil aynı zamanda öğrencilerinin ispatı öğrenmesine yönelik beklentilerini de etkilediğinden öğretmenler için ispatlamayı kavramsal olarak anlamış olmak önemlidir (Ko, 2010). Eğer geleceğin matematik öğretmenleri ispatla ilgili yeterli kavramlara sahip değilse ve ispatlamaya yönelik kavramsal bilgileri eksikse öğrencilerin literatürde görülenlere benzer güçlükler ve kavram yanılgıları yaşaması sürpriz olmaz (Ko ve Knuth, 2013; Stylianides ve Stylianides, 2009a). Ko (2010) öğrencilere ispatı anlama ve deneyimleme fırsatları sağlayabilmeleri için öğretmenlerin ispatla ilgili kendilerinin somut bir anlamaya sahip olmaları gerektiğini belirtmiştir. Ortaokul seviyesinde her ne kadar formel ispattan pek söz edilmiyor olsa da ortaokul matematik öğretmenleri de bu anlamda önemli bir role sahiptir çünkü onların mevcut ispat oluşturma yeteneği, öğrencilerin muhakeme etme becerilerini, ispata ilişkin fikirlerini, bilgilerini ve tutumlarını etkileyebilir (Demiray ve Işıksal Bostan, 2017).

Lise ve üniversite öğrencileri genellikle öğretmenlerinin düzenlenmiş bir ispat sunuşunu izlerler ve onlardan benzer problemler üzerinde aynı veya benzer stratejiler uygulamaları istenir (Stylianou, Blanton ve Knuth, 2009). Hemmi (2006) öğrencilerin matematiksel ispat ile ilgili algılarının büyük ölçüde matematik derslerinde gözlemledikleri ispatlarla şekillendiğini belirtmiştir. Dolayısıyla matematik öğretmenlerinin ispatla ilgili algıları da genellikle lisans düzeyinde matematiksel ispatla ilgili içerikleri öğrendikleri derslerden etkilenir (Knuth, 2002b). Bills ve Tall (1998) da öğrencilerin kavram imajlarını derste ispat anlatımları yoluyla geliştirme fırsatlarının olabileceğini belirtmiştir. Öğrencilerin ispatla yakın ilişki kurması öğretmenin öğretimsel kararlarına göre farklılık göstermektedir. (Sears ve Chavez, 2014). Ayrıca şu unutulmamalıdır ki öğrenciler derste sunulan ispatları ödevlerde ve sınavlarda yazdıkları ispatlar için model olarak kullanmaktadırlar (Fukawa-Connelly, 2014). Bu bağlamda, öğrencilerin gözünde matematik disiplininin temsilcileri olan öğretim elemanlarının uygulamalarını anlamak öğrencilerin matematiksel düşünme ve aktivitelerinde daha başarılı ve üretken olmak için neler yapabileceklerini anlamamızı sağlaması açısından faydalıdır (Lynch ve Lockwood, 2019).

İspat temelli matematik derslerinde, matematiksel içerik genellikle öğretim elemanının derste öğrencilere ispatları sunmasıyla aktarılır (Fukawa-Connelly, 2012a; Mills, 2014; Weber, 2004). Bu pedagojik uygulamanın arkasında öğrencilerin öğretmenin sunduğu ispatları okuyarak ve çalışarak öğrenebileceği varsayımı vardır. Bu tür derslerde öğrenciler sunulan ispatları izleyerek pasif şekilde not alırlar (Weber, 2004). Yaygın olarak kabul edilmektedir ki matematik dersleri genellikle “tanım-teorem-ispat” formatıyla öğretilir. Dersler genellikle öğretim elemanının kavramların tanımlarını tanıtması, bu kavramlarla ilgili teoremleri belirtmesi ve sonra bu teoremlerin ispatlarını sunmasından oluşur. (Weber, 2004). Bu uygulamalar her ne kadar “anlatım (lecturing)” yöntemi şeklinde tanımlanarak ortak bir çatı altında toplanıyor olsa da bir ispat, öğretmenin sunuma yönelik seçimlerine bağlı olarak farklı akışlara sahip olabilir (Gabel ve Dreyfus, 2017; Speer, Smith ve Horvarth, 2010). Weber (2004) analiz dersinde bir durum çalışmasında “tanım-teorem-ispat” sıralamasının tek bir öğretim dizisi değil, bazı ortak özellikler paylaşan pedagojik tekniklerin bir koleksiyonu olduğunu belirtmiştir. Bu dizi öğretmenin bilgisinden ve inançlarından etkilenmektedir. Pinto (2013) da aynı ders planına dayanan iki Analiz dersinde farklı inançlar, tutumlar ve amaçlara sahip iki öğretmenin ders işleyişinde büyük ölçüde farklılık gözlemlemiştir. Bununla birlikte Lew ve diğerleri (2016) bir ispat (ispatın ana fikirlerini açıklamaya zaman harcayan) mükemmel bir anlatıcı tarafından sunuluyor olsa bile öğrencilerin bu fikirleri anlamayabileceğini aktarmışlar.

Araştırmalar gösteriyor ki öğretmenlerin etkinlik seçerken ve öğretimi planlarken verdikleri kararları onların bilgileri inançları ve amaçlarıyla yakından ilgilidir (Levenson, 2013; Stein, Grover ve Henningsen, 1996). Benzer şekilde matematik öğretmenlerinin ispat hakkındaki bilgisi ve inançları da onların ispatla ilgili etkinlikleri sınıfta nasıl uyguladıklarını ve öğrencilerine ispatlamaya katılımları için sağladığı fırsatları ve öğrencilerin öğrenmesine yönelik beklentilerini etkiler (örn., Bieda, 2010; Stylianides, 2007; Stylianou ve diğerleri, 2009). Fukawa-Connelly (2012a) ispat öğrenimi ve öğretimi üzerine mevcut araştırmaları yorumlamak için geleneksel olarak öğretim yapılan (anlatım yöntemi) ispat temelli matematik derslerindeki mevcut öğretim uygulamalarının çeşitliliğine dair bir bilgi altyapısı gerektiğini belirtmiştir.

Lisans düzeyinde matematik derslerinde ispatın nasıl öğretildiğini anlamak önemli bir ihtiyaçtır (Fukawa-Connelly, 2012a; Speer ve diğerleri, 2010). Speer ve diğerleri (2010) lisans matematik eğitimi ile ilgili hem öğretim elemanının öğretiminin gözlemlendiği hem de öğretim elemanı ile niyetleri ile ilgili açıklamalarda bulundukları mülakat çalışmaların azlığından bahsederek mevcut öğretim uygulamalarına yönelik çalışmalar için çağrı yapmıştır. Benzer şekilde Mejia-Ramos ve Inglis (2009) sınıf gözlemlerinden elde edilen verilerin, görüş geliştirmek ve öğretimi tasarlamak için faydalı olabileceğini önce sürmüştür.

İspat temelli derslerde öğretim elemanının bir ispatı anlatırken öğrencilerine sağladığı fırsatların neler olduğunu ve bu tür uygulamaların ne tür öğretimsel araçlar içerdiğini anlamak önemlidir. Bu tür araştırmalar ispat temelli derslerde öğretmenlerin yaptıklarını daha iyi anlamamızı sağlar ve öğrencilerin ispatlamaya yönelik matematiksel içeriği nasıl öğreneceği ile ilgili ileride yapılacak araştırmalara yardımcı olabilir. Matematiği öğrenenlerin inançları ve uygulamalarını anlamak matematik eğitimi geliştirmeye yönelik reform çabalarını başarmak için de önemlidir (Fukawa-Connelly, 2014).

Üniversitede ispat ve ispatlama çalışmaları çoğunlukla öğrenci perspektifinden ele alınmıştır. Öğrencilerin ispatlama süreçlerinin incelenmesi (örn., Demiray ve Işıksal Bostan, 2017; Stylianou, Blanton ve Rotou, 2015; Zazkis, Weber ve Mejia-Ramos, 2016; Zhen, Weber ve Mejia-Ramos, 2016) literatürde en sık yer bulan konulardan biridir. Bununla birlikte lisans düzeyinde derslerde ispatın öğretmen boyutu ile ilgili çalışmalar henüz büyümekte olan bir araştırma alanıdır. Öğretmenlerin mevcut uygulamaları ve görüşleri onların değer verdikleri ve ihtiyaç duydukları alanların belirlenmesine katkı sağlayacaktır (Lai ve Weber, 2014). Weber (2012) öğretim elemanlarının pedagojik amaçlarını ve uygulamalarını anlamının pedagojik tavsiyelerin yayılması için önemli olduğunu fakat buna rağmen bu alanda yapılan çalışmaların az olduğunu belirtmiştir.

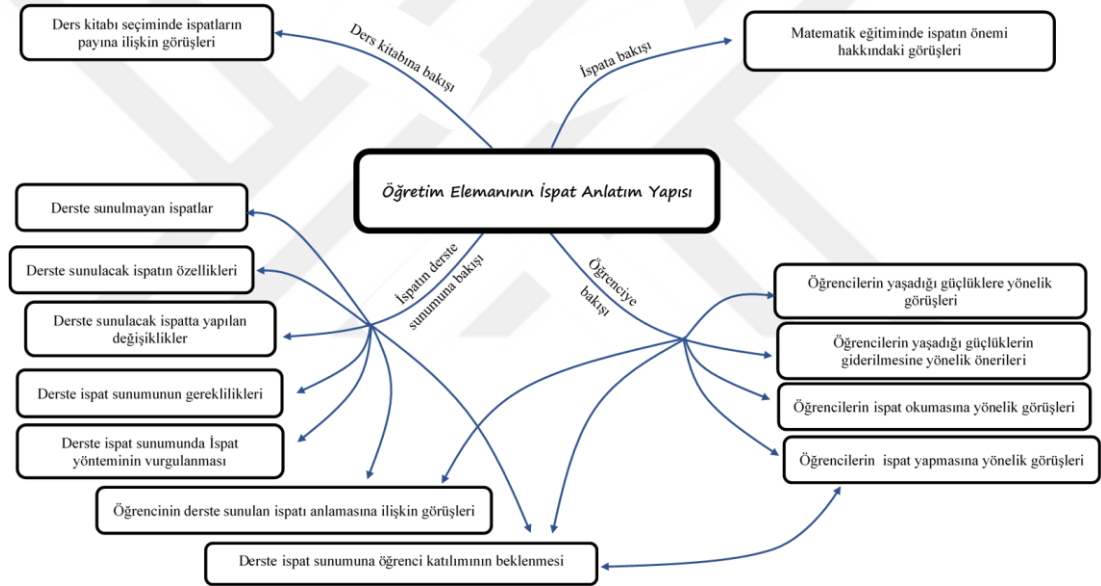
Üniversite düzeyinde ispatlama aktivitelerini öğretmen boyutuyla ele alan çalışmalar çoğunlukla derste ispat anlatımına yönelik öğretim elemanlarının mülakat yoluyla elde edilen görüşlerine odaklanmıştır (örn., Bleiler, Thompson ve Krajčevski, 2014; Hemmi, 2010; Lai ve Weber, 2014; Weber, 2012; Yopp, 2011). Bunun yanı sıra, nispeten daha az olacak şekilde öğretim elemanlarının derslerinde ispatlama etkinliklerindeki uygulamalarını gözlem verileriyle destekleyen çalışmalar da bulunmaktadır. Bu çalışmalar öğretim elemanlarının ispat anlatım stillerini (örn., Weber, 2004), ispat anlatırken örnek kullanımlarını (örn., Mills, 2014), öğrencilerin ispatlama becerisini geliştirmek için kullandıkları yöntemleri (örn., Blanton ve Stylianou, 2003; Pinto ve Karsenty, 2018) ve ispatlama esnasında yansıttıkları argümantasyon yapılarını (örn., Fukawa-Connelly, 2014) içermektedir.

Literatürde ispatlama içeren sınıf etkinlikleri, “*ispat öğretimi*” (teaching proof) (Alcock ve Inglis, 2008; Weber, 2004), “*ispat sunumu/anlatımı*” (proof presentation) (Fukawa-Connelly, 2012a; Lai ve Weber, 2014), “*ispat yapma*” (doing proof) (Dimmel ve Herbst, 2018; Herbst ve Brach, 2006; Yopp, 2011) gibi çeşitli ifadelerle tanımlanmıştır. Dimmel ve Herbst (2018) “*ispat yapma*” ifadesinin matematik disiplindeki ispatlama etkinliği anlamında kullanılmadığını ve bu ifadenin öğrencilere matematiksel ispat kavramının tanıtıldığı öğretimsel bir durum olduğunu belirtmiştir. Ülkemizde de bir öğretmenin derste bir teoremin ispatını anlatması genellikle “ispat yapma” olarak ifade edilmektedir. Bu bağlamda bu çalışmada bu kavram derste öğretimsel bir durum olarak öğretim elemanlarının kullandığı biçimde yer almaktadır.

Yabancı literatürde öğretim elemanları ile yapılmış çalışmalarda öğretim elemanlarının ispat anlatımları veya ispatın anlatımına yönelik görüşleri “ispata pedagojik bakış stilleri”, “ispat anlatım stilleri/stratejileri” vb. isimleri altında değerlendirilmiştir. Türkçe literatürde ise bu doğrultuda bir çalışmaya rastlanmadığından öğretim elemanlarının derste ispatlamaya yönelik görüşleri, ispatlanacak ifadeyi (teoremi, önermeyi), ispatları nasıl anlattıkları ve anlatırken yaptıkları uygulamaları kapsamı bakımından “*ispat anlatım yapısı*” ifadesi kullanılmıştır. Özetle, bu çalışmada “ispat anlatımı” ifadesi ile öğretim elemanlarının derste ispatları nasıl anlattığı, mevcut öğretim uygulamaları ve ispat anlatımına yönelik görüşleri kastedilmektedir. İspat anlatımı ise ispatlanacak ifadeyi, ispatın kendisini, teoremi ve ispat süresince verilen tüm tanımları, yorumları, örnekleri, soruları vb. içermektedir. Bu bağlamda, bu çalışmada öğretim elemanlarının ispat anlatım yapılarının incelenmesi amaçlanmıştır. Öğretim elemanlarının ispat anlatım yapıları ispata, ders kitabına, derste ispat sunumuna ve öğrenciye bakışları bağlamlarında beyan ettikleri görüşleri ve mevcut uygulamalarının analiz edilmesiyle incelenmiştir. Yani, öğretim elemanlarının:

- Ders kitabı seçimlerinde ispatların payına yönelik görüşleri ders kitabına bakışlarını;
- Matematik eğitiminde ispatın önemine yönelik görüşleri ispata bakışlarını;
- Derste sunulacak ispatın özelliklerine, sunmadıkları ispatlara, ispat anlatmanın gerekliliklerine, öğrencinin ispatı anlamasına, derste ispat sunumunda öğrenci katılımına vb. yönelik görüşleri ispatın derste sunumuna bakışları;
- Öğrencilerin ispat okumasına, ispat yapmasına ve ispatlamada yaşadıkları güçlüklerle yönelik görüşleri ise öğrenciye bakışları olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 1, öğretim elemanlarının ispat anlatım yapılarının hangi bağlamlarda ve hangi açılardan ele alınacağını göstermektedir.



Şekil 1. İspat anlatım yapısı

Her ispatın kendisine has bir anlatımı, anlatım yöntemi olabilir ancak burada kastedilen öğretim elemanlarının gözlenen dersleri boyunca anlattıkları ispatlarda sunum biçimlerinde bir benzerlik veya tekrar eden bir yapı olup olmadığıdır. Lai ve Weber (2014) derste ispat anlatımına yönelik öğretim elemanlarının ortak değerlerini fark etmenin zor olduğunu tartışmıştır. Bu bağlamda bu çalışmanın ortak değerlerin belirlenmesine de katkı yapabileceği söylenebilir.

Öğretim elemanlarının derste ispat anlatımının amacına, önemine, derste anlatacağı ispatların seçimine, öğrencilerden ispat ile ilgili beklentilerine ve onların ispatlamada yaşadığı

güçlülere yönelik görüşlerinin yanı sıra derste bir ispatı nasıl anlattığı yani öğretimsel uygulamalarının neler olduğunun incelenmesi amaçlanmıştır.

1.2. Amaç ve Önem

Okul matematiğinde muhakeme ve ispatın önemi artmakta olduğundan öğretmen adaylarına verilen matematik derslerinde bu matematiksel aktiviteyi öğrenmek için sunulan fırsatlarla ilgili meseleler de önem kazanmaktadır (McCrorry ve Stylianides, 2014). Nardi ve Knuth (2017) ispatın öneminin ve gerekliliğinin takdir edilmesi/değerinin bilinmesinin matematik eğitiminde muhakeme ve ispatlama becerisinin gelişimi için değerli bir hızlanma oluşturma kapasitesine sahip olduğunu belirtmiştir.

Roy, Alcock, and Inglis (2010) üç çeşit ispat sunumunun (ders kitabı, derste canlı anlatım, e-ispat) etkililiğini araştırdıkları çalışmada derste canlı anlatımın öğrencilerin anlaması üzerinde büyük bir pozitif etkisi olduğunu bulmuşlardır. Öğrencilerin anlaması üzerinde pozitif etkiye sahip olan derste canlı anlatımın yani öğretim elemanlarının mevcut uygulamalarının incelenmesi öğrencilerin ispatı anlamasına yönelik yapılacak araştırmalara da katkıda bulunacaktır.

Öğretim elemanlarının hem ispat ve ispatlamanın öğretimine yönelik görüşlerinin hem de derslerinde ispata yönelik pedagojik uygulamalarının incelenmesinin ispat ve ispatlama eğitiminde hem öğrenme hem öğretme boyutuna ışık tutacağı söylenebilir.

Bu çalışma üniversite düzeyinde ispat öğretiminin öğretim elemanları boyutuna odaklanmıştır ve bu bağlamda literatürdeki çalışmalardan iki açıdan farklıdır. Bunlardan biri çalışmanın verilerinin hem mülakat hem de gözlem yoluyla elde edilmiş olmasıdır. Öğretim elemanlarının ispata yönelik öğretimsel uygulamaları ile ilgili çalışmalar çoğunlukla onların inançlarını ve değerlerini araştıran mülakat çalışmalarından oluşmaktadır (örn., Hemmi, 2010; Weber, 2012; Yopp, 2011). Sayıca az olmakla birlikte öğretim elemanlarının ispat anlatımına yönelik mevcut öğretimsel uygulamalarını içeren durum çalışmaları da bulunmaktadır (örn., Fukawa-Connelly, 2012a; Mills, 2014; Weber, 2004). Ancak bu çalışmalar hem katılımcı sayısı hem de gözlenen ders sayısı bağlamında bu çalışmadan ayrılmaktadır. Hemmi (2010) ve Lai ve Weber (2014) öğretmenlerin kendi inançları ve değerlerine ters düşecek şekilde öğretim yapabildiklerini belirtmişlerdir. Bu sebeple, olabildiğince çok öğretim elemanının hem görüşleri hem de mevcut öğretim uygulamalarının uzun süreler içerecek şekilde incelenmesi onların beyan edilmiş ve sahnelenmiş inançlarını anlamamıza yardımcı olacaktır. İkinci neden ise bu çalışmada öğretim elemanlarının ispat anlatırken yaptıkları ya da yapmadıkları şeyleri öğrencilerine nasıl açıkladıklarının incelenmesidir. İspatlama,

öğrencilerin sadece katılmasının beklendiği bir aktivite değildir, ispat aynı zamanda öğretim elemanlarının öğrencileri için yaptığı öğretimsel açıklamaların genel bir biçimidir (Lai, Weber ve Mejía-Ramos, 2012). Bu bağlamda öğretmenlerin derste yaptıkları veya yapmadıklarının nedenlerini açıklamaları öğrencileri açısından önemlidir. Özellikle geleceğin öğrencilerinin ispat algılarını şekillendirecek olan öğretmen adayları için bu daha da önemlidir. Fukawa-Connelly (2012a) geleneksel öğretmenlerin genellikle öğrencilerinden bekledikleri davranışları modellediklerini belirtmiştir. Bu açıdan öğretim elemanlarının ispat anlatırken neler yaptıkları, tercihlerinin altında yatan pedagojik gerekçeleri ve görüşlerine yönelik çalışmalar matematik eğitimi literatürüne bu bağlamda da katkıda bulunabilir.

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri

İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Eğitimi Bölümlerinde görev yapmakta olan öğretim elemanlarının matematiksel ispat anlatım yapıları nasıldır?

Alt problemler:

- 1) Öğretim elemanlarının matematik derslerinde ispatın önemine ilişkin görüşleri nelerdir?
- 2) Öğretim elemanlarının derslerinde ispat yapmaya yönelik görüşleri ve mevcut uygulamaları nelerdir?
- 3) Öğretim elemanlarının ispat yapma okuma ve derste ispat sunma çerçevesinde öğrencilere ilişkin görüşleri ve mevcut uygulamaları nelerdir?
- 4) Öğretim elemanlarının kullanacakları ders kitabı seçimlerinde ispatların payı konusundaki görüşleri nelerdir?

1.4. Sınırlılıklar

Bu araştırma, 2016-2018 yılları arasında bir devlet üniversitesinde görev yapan ve matematik derslerine giren öğretim elemanlarının görüşleri ve uygulamaları ile sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

Öğretim elemanlarının mülakatlarda ve video kaydı yapılan derslerde gerçek görüşlerini ve uygulamalarını yansıttıkları varsayılmaktadır.

1.6. Tanımlar

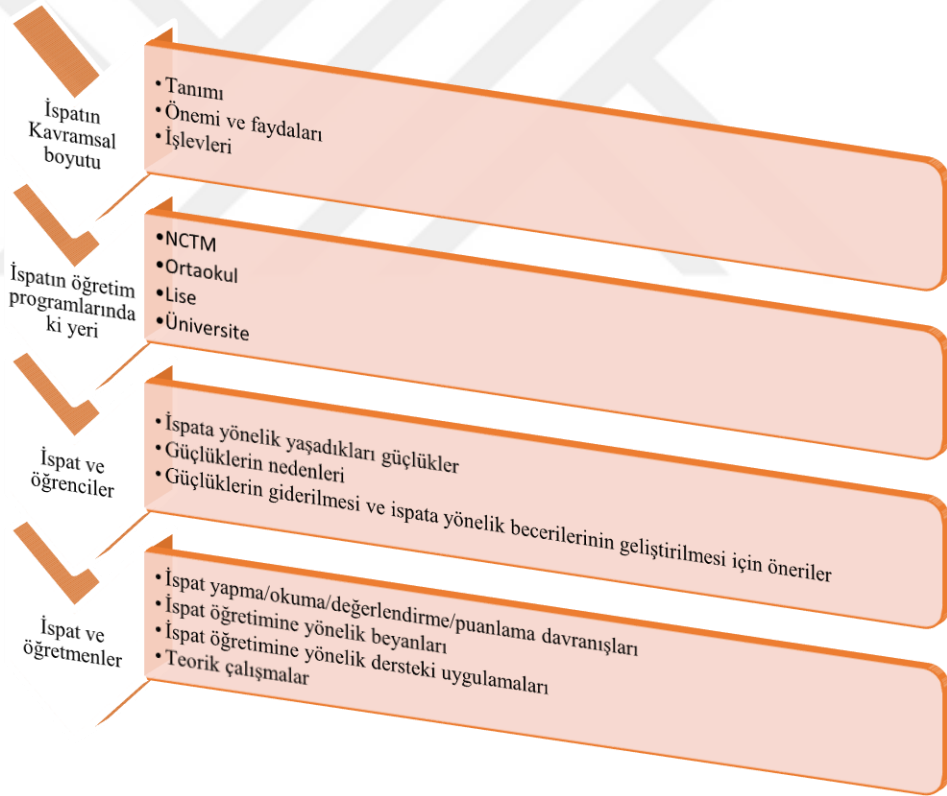
İspat: Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma (TDK, 2020)

İspat anlatımı/sunumu: Teorem/önerme ifadesini, ispatın kendisini ve teoremi veya ispatı içeren/ilgilendiren tüm tanımları, yorumları, örnekleri, soruları vb. içeren sunumdur.

BÖLÜM II

KURAMSAL ÇERÇEVE / KAVRAMSAL ÇERÇEVE / İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Matematiksel düşünmenin öneminin vurgulandığı günümüzde Tall (1991), ispatı, fikirlerin kesinlik kazandığı aktivitelerin son basamağı olarak göreceğimizi belirtir. Ayrıca, yazar aynı çalışmada, öğrencilere matematiksel düşünmenin süreçlerinin öğretilmesi yerine, matematiksel düşünmenin ürününün gösterilmesi gerektiğini söylerken ürün ifadesiyle ispatı kastettiğini aktarmıştır. Bu tür araştırmalar ışığında bu bölüm, ispatın tanımına, işlevlerine ve matematik öğretimindeki yerine yönelik kavramsal çerçeveleri ve ilgili araştırmaları içermektedir. Şekil 2, bu bölümdeki başlıkları ve alt başlıkları özetlemektedir.



Şekil 2. İlgili yayın ve araştırmalar bölümü başlık ve alt başlıkları özet tablosu

2.1. İspat Tanımı

Türk Dil Kurumu (TDK, 2020) sözlüğünde ispat kavramı ‘Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma.’ olarak yer bulurken; Oxford İngilizce sözlüğünde ‘Bir gerçeğin veya bir şeyin doğruluğunun ya da varlığının gösterilmesi, bir iddianın doğruluğunun gösterilmesi, bir iddianın iyi, geçerli veya doğruluğunu test etme süreci’ olarak tanımlanmaktadır (1989). Bununla birlikte, literatürde araştırmacıların ispatın farklı özelliklerini vurgulayarak çeşitli tanımlar yaptıkları görülmektedir. Örneğin, ispatlamayı bir süreç olarak tanımlayan Harel ve Sowder (1998), bu sürecin birey tarafından bir gözlemin doğruluğu hakkında şüpheler oluşturmak veya şüpheleri gidermek için uygulandığını belirtmiştir. Weber (2005) ise bu süreci mantıksal, kavramsal, sosyal ve problem çözme boyutları içeren karmaşık bir matematik aktivitesi olarak tanımlamıştır. Bir ifadenin veya iddianın kabul edilmiş dayanaklara göre geçerliliğinin gösterilmesi de Hanna (1989) tarafından ispat tanımı olarak ele alınmıştır.

NCTM (2000) tarafından yayınlanan *Okul Matematiği için Prensipler ve Standartlar* adlı dokümanda ispatlama aktivitesinin okul öncesinden üniversite düzeyine kadar her seviyede işlevine değinilirken ispat, akıl yürütmenin ve gerekçenin kurallara uygun biçimde ifade edilmesi olarak tanımlanmıştır. Stylianides'in (2007) tanımlamasına göre ise ispat, matematiksel bir iddiayı doğrulamak ya da yanlışlamak üzerinden ortaya konan, birbiriyle ilişkili savlar dizisidir. Bu tanımlara ek olarak literatürde farklı bakış açıları içeren tanımlar da yer almaktadır. Örneğin, Bell (1976) ispatı bir ağaca benzetmiştir. Nihai noktası çıkarım olan, başlangıç noktası bir veri veya genel olarak kabul edilmiş doğrular olan ve birbirine uygulamalarla bağlanan bir ifade ağacı olduğunu belirtmiştir. Bunun yanı sıra Recio ve Godino (2001) ispatın farklı (kurumsal) içeriklere bağlı olarak farklı anlamlara sahip olduğunu söylemiştir. Bu içeriklerden biri günlük yaşamdır; burada ispat informeldir, öznel ve ille de gerçeği üretecek değildir. Bir diğer içerik, deneysel bilimlerdir, yani teoriler deneysel olarak doğrulanır. Üçüncü içerik ise profesyonel matematiktir ki burada ispat, matematiksel oranların doğruluğunu kanıtlamak için matematikçilerin geliştirdiği tartışmaya açık süreç olarak tanımlanır. Benzer şekilde bir ya da birkaç cümle ile ispat tanımlaması yapmak istemeyen Jahnke (2010) ispatı, öğrencilerin sınıf seviyesine göre ayrı ayrı tanımlamıştır. Birincisi, 1-7. sınıf düzeyleri arasındaki öğrenciler için resmi olmayan deneyimlerle desteklenen ispattır. İkincisi, 7-12. sınıf düzeyleri arasındaki öğrenciler için olan tümdengelim ile tanımlanan ispattır. Üçüncüsü ise 12. sınıf, üniversite ve daha üst düzeyler için çeşitli matematik teoremlerine dayandırılarak yapılan ispattır. Bu ise matematikçilerin kullandıkları düzeydir.

Literatürde yer alan bu tanımlamalardan yola çıkarak, ispatlamanın (genellikle farklı biçimlerde ifade edilmiş olmasına rağmen) “bir iddianın doğruluğunun belirli matematiksel kurallara dayanılarak gösterilmesi” olarak tanımlanması yönünde ortak bir kanının varlığından söz edilebilir. İspatlama ile ilgili kavramlardan bazılarının literatürde kimi çalışmalarda birbirlerinin yerine kullanıldıkları gözlenmiştir. Örneğin, Harel ve Sowder (2005), ispat (proof) ve savunma/gerekçelendirme (justification) kavramlarını “bir kişi veya topluluk için gerçekliği oluşturan şey” şeklinde tanımlayarak bu kavramları birlikte ele almıştır. Marrades ve Gutierrez (2000), ise bu iki kavramı farklı değerlendirmiştir. Onlara göre, savunma/gerekçelendirme (justification) insanları bir ifadenin doğruluğuna ikna etmek için gösterilen her bir sebeptir. İspat (formal matematiksel) ise aksiyomatik sistem içinde matematiksel bir ifadenin doğru olarak kabul edilmesi için profesyonel matematikçiler tarafından talep edilen gereklilikleri sağlayan her bir savunmadır. Gerekçelendirme ve ispat arasındaki farka değinen bir başka çalışmada ise Carpenter, Franke ve Levi (2003) ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin ispat düşüncesindeki gelişimini, gerekçelendirme kategorileri olarak ele almışlardır.

2.2. İspatın Önemi ve Faydaları

Manin (1992) aksiyomları, tanımları, teoremleri matematik boşluğunda duran kavşaklar; ispatları ise yollar, patikalar ve otobanlar olarak ifade etmiştir. Hanna’ya (2000) göre ise A noktasından B noktasına gitmekten ziyade, bu noktalar arası güzergahların kalitesi daha önemlidir. Bu analogilerden yola çıkarak matematiksel ispatın amacının A noktasından B noktasına bireyi ulaştırmak veya en kısa hatta en konforlu yoldan ulaştırmak olduğu söylenebilir.

İspatlanmış bazı teoremlerde araştırmacıların farklı ispat arayışları içinde olmaları, ispatın amacının sadece “*teoremin doğruluğunun gösterilmesi*” olmadığına işaret etmektedir. Ancak Hersch’e (1993) göre ispatın tek amacı iknayı sağlamaktır. Tall (1992) ise ispatın amacının sadece bir kavramı veya bir süreci anlamayı içermediğini aynı zamanda kavramın tanımının ve mantıksal sürecinin nasıl ve neden işlediğini anlamayı da içerdiğini ifade etmiştir. Resnik (1992) ispatların matematikçilerce kullanılma amaçlarına iki yenisini daha eklemiştir. İspatın sadece yeni sonuçları göstermeyi değil, kimi zaman önceki gösterimden daha basit ya da daha ekonomik bir gösterimle kimi zaman da matematiğin farklı bir alanından elde edilen bilgiler yardımıyla aynı sonuca ulaşmayı amaçlayabileceğini ifade etmiştir. Yani kısaca A ve B noktaları arasında daha konforlu veya daha kısa yolu bulmak da amaçlanabilmektedir. Resnik’e göre bir diğer amaç ise sistematik olmayan bir biçimde elde edilmiş olan daha önceki

sonuçlar için yeni aksiyomatik gösterimler türetilmesini veya önceki aksiyomatik sistemin yeniden teorize edilmesini sağlamaktır.

İspat, matematik ve matematik eğitiminin merkezinde ve en önemli kavramlardan biri olarak görülmektedir (Knuth, 2002a, 2002b; Coe ve Ruthven, 1994; Hanna, 2000; Martin ve Harel, 1989). Schoenfeld (2009) eğer problem çözme matematiğin kalbiyse ispat da onun ruhudur diyerek ispatın matematikteki yerine vurgu yapmıştır.

Peki ispatı bu kadar önemli yapan şey nedir? Bu sorunun cevabını ispatın matematik bilimindeki ve matematik eğitimindeki faydalarını inceleyerek görebiliriz. Hanna (1990) ispatın sadece sonuçların doğruluğunu göstermek yerine, gerekli matematiksel ilişkileri de ortaya çıkardığını ifade etmiş ve bu özelliğin, ispatı önemli kıldığını belirtmiştir. Almeida'ya (2000) göre ispat matematiksel bilginin garantisini sağlayan, matematik yapma ve anlamada temel olan bir aktivitedir. Hanna ve Barbeau (2010) ise ispatın matematikte yeni yöntemlerin ve tekniklerin gelişmesini sağladığını ve bunun yanında matematiksel bilgiyi de geliştirdiğini ifade etmiştir.

Matematik eğitimi için de ispatın bir o kadar önemli olduğu söylenebilir. Günümüzde matematik eğitimi alanında sadece ispat ve ispatlamayı konu edinen uluslararası bilimsel organizasyonların yapılmaya başlanması veya uluslararası matematik eğitimi sempozyumlarında ispat ve ispatlama ile ilgili ayrı çalışma gruplarının, oturumların oluşturulması matematik eğitiminde ispatın önemine vurgu yapan göstergelerdendir. Hanna ve Jahnke'ye (1996) göre matematiğin temel özelliği olan ispatın matematik eğitiminde de anahtar bileşen olması gerekmektedir. NCTM (2000) standartlarına göre ispat, ana sınıfından 12. sınıfa kadar tüm öğrenciler için biçimlendirici olmaktadır. Bu nedenle ispatın okulda öğretimi önemlidir. Görüldüğü gibi matematik biliminde olduğu gibi matematik eğitiminde de ispatın faydaları ve bu faydalar sayesinde önemi birçok araştırmacı tarafından ifade edilmektedir.

2.3. İspatın İşlevleri/Rolleri

Bell'e (1976) göre ispat, her biri kendi açısından çok önemli olan 3 anlam taşımaktadır: *doğrulama*, *açıklama* ve *sistemleştirme*. Doğrulama, bir önermenin doğru olduğunu savunmaktır. Açıklama, bir önermenin neden doğru veya yanlış olduğuna ilişkin ispatın bir öngörü taşımasıdır. Bu, ispatın geçerliliğinden çok estetik açıdan önemlidir. İspatın üçüncü anlamı ise aksiyomatik bir sistem içerisinde ana kavramların, teoremlerin ve diğer sonuçların tündengimsel bir yaklaşımla sistemleştirilmesidir.

De Villiers (1990), Bell'in (1976) ifade etmiş olduğu ispatın işlevlerini 4 madde olarak ele almıştır. Bell'in (1976) de kabul ettiği *doğrulama*, *açıklama* ve *sistemleştirme*nin yanı sıra *iletişim* işlevinden de bahsederek ispatın, doğrulanan ve açıklanan durumu karşı tarafa da iletme yani *iletişimi* sağlama işlevini de ortaya atmıştır. Bu işlevle ispat, matematikçi-öğretmen-öğrenci üçlüsü arasında matematiksel bilginin taşınmasını sağlar. De Villiers (1999) çalışmasında ispatın işlevlerine, *keşfetme* ve *entelektüel meydan okumayı* da eklemiştir. De Villiers'a göre bir önermenin ispatlanması aşamasında farklı önermelere ulaşmayı sağlayacak yeni sonuçlar ortaya çıkabilir. Bu da ispatın *keşfetme* işlevini veya bir başka deyişle rolünü ifade etmektedir. *Entelektüel meydan okuma* rolüne sahip ispat aynı zamanda onu yapan kişinin kendini kanıtlamasına da olanak sağlar. Bu rol kişinin ispat yaptıktan sonra aldığı hazzı da ifade etmektedir.

Hanna (2000) ispatın fonksiyonlarını 8 maddede sıralamıştır. Doğrulama, açıklama, sistemleştirme, keşfetme, iletişim fonksiyonlarının yanı sıra bir deneysel teoremin inşasını sağlamada, bir tanımın veya bir sonucun sağlam zeminlerle açıklanmasında ve yeni bir bakış açısıyla iyi bilinen gerçeklerin farklı bir çerçevede kaynaştırılmasında da ispatın etkili olduğunu ifade etmiştir. Tablo 1, hangi araştırmacıların ispatın hangi işlevlerini vurguladığını özetlemektedir.

Tablo 1

İspatın İşlevleri

Bell (1976)	DeVilliers (1990)	DeVilliers (1999)	Hanna (2000)
Doğrulama	Doğrulama	Doğrulama	Doğrulama
Açıklama	Açıklama	Açıklama	Açıklama
Sistemleştirme	Sistemleştirme	Sistemleştirme	Sistemleştirme
	İletişim	İletişim	İletişim
		Keşfetme	Keşfetme
		Entelektüel Meydan Okuma	Deneysel Teoremin İnşasını Sağlama
			Tanımı veya Sonucu Sağlama
			Sağlamlaştırma
			Bilinenleri Farklı Bir Çerçevede Kaynaştırma

Hanna ve Jahnke'ye (1996) göre matematiğin temel özelliği olan ispatın matematik eğitiminde de anahtar bileşen olması gerekmektedir. İspatın işlevlerinin araştırılması matematik eğitimi literatüründe, derslerde neden ispat anlatılması gerektiği veya

öğrencilerden ispatlama etkinliklerine neden katılması istendiği soruları ve yanıtlarıyla yer bulmaya devam etmektedir (örn., Cilli ve Turner, 2017; Yopp, 2011). Örneğin, bir öğretmen ispatı öğrencilerini ikna etmek (Knuth, 2002b; Weber, 2002; Yopp, 2011), onlara ispatlamadaki fikirleri ve teknikleri öğretmek (Cilli-Turner, 2017; Hanna ve Barbeau, 2008; Weber, 2002; Weber, 2012; Yopp, 2011); diğer teoremleri ispatlamada faydalı olabilecek yaklaşımları (ispat yöntemlerini) örneklemek (Lew ve diğerleri, 2012); matematiğin yapısını göstermek (Cilli-Turner, 2017; Yopp, 2011); öğrencinin anlamasını arttırmak (Hanna, 1990; Hersh, 1993; Weber, 2012; Yopp, 2011); bazı önemli (tarihsel veya kültürel) ispatları tanıtmak (Weber, 2012); öğrencilerin matematiksel bilgi oluşturmalarını sağlamak (Knuth, 2002b); matematiksel düşünme becerilerini öğrencilere kazandırmak (Knuth, 2002b; Hemmi, 2010; Yopp, 2011); öğrencilerin düşünme süreçlerini açığa çıkarmak (Knuth, 2002b); ispatlama sürecinin nasıl olduğunu ve bir ispatın nasıl oluşturulabileceğini öğretmek (Weber, 2010; Yopp, 2011); aksiyomatik bir yapının veya bir tanımın kullanımını göstermek (Weber, 2002) ve bazı önemli teoremleri vurgulamak için (Weber, 2012) sunabilir. Bunlara ek olarak Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron ve Winicki-Landman (2011) ispat yapmanın, öğrencilere matematikçilerin ispat yaparken deneyimledikleri muhakemeye benzer bir muhakeme deneyimini yaşamalarını sağladığını aktarmışlardır.

2.4. İspat ve Öğretim Programları

2.4.1. İspat ve NCTM

Amerika ve Kanada öncülüğünde 1920’de kurulmuş olan NCTM’nin hem üye sayısı hem de ulusal veya uluslararası ortak olarak çalıştığı matematik eğitimi topluluklarının miktarı dolayısıyla matematik eğitimi araştırmacıları tarafından en çok kabul gören topluluk olduğu söylenebilir. Matematik öğreniminin ve öğretiminin (özellikle ana sınıftan lise sona kadar) geliştirilmesini hedefleyen bu topluluğun 2000 yılında yayınladığı *Prensipler ve Standartlar* adlı belge, anaokulundan 12. sınıfa kadar öğrencilerin matematik eğitimini etkileyecek kararları alma merciinde bulunanlar için bir kaynak ve rehber olmayı hedeflemiştir. Bu hedef doğrultusunda süreç ve içerik standartları olmak üzere toplam 10 standart belirlemiştir. Bu standartlar, matematik eğitiminin, öğrencilerin bilmesini ve yapmasını sağlaması gerekenlerin tanımlarıdır. İçerik standartları, öğrencinin öğrenmesi gereken içeriği tanımlamaktadır. Bunlar sayılar ve işlemler, cebir, geometri, ölçme, veri analizi ve olasılıktır. Süreç standartları ise içerik bilgisini elde etme ve kullanma yollarına dikkat çeken problem çözme, akıl yürütme ve

ispat, iletişim, bağlantılar ve temsildir. Görüldüğü gibi ispat süreç standartlarından biri olarak tanımlanmış ve önemi vurgulanmıştır. NCTM'ye (2000) göre anaokulundan 12. sınıfa kadar standart öğretim programları, ispat ve akıl yürütme bağlamında tüm öğrencilerin:

- Muhakeme ve ispatı matematiğin temel bileşenleri olarak tanımasına,
- Matematiksel varsayımlar oluşturmaya ve bu varsayımlarını araştırmasına,
- Matematiksel argümanla/ispatlar geliştirmesine ve bunları değerlendirmesine,
- Çeşitli ispat ve akıl yürütme yöntemleri seçmesine ve kullanmasına,

olanak sağlamalıdır (s. 56).

2.4.2. İspat ve Ortaokul Matematik Öğretim Programı

NCTM (2000) anaokulundan 12. Sınıfa kadar olan öğrencileri 4 grup (anaokulu-2. sınıf, 3-5. Sınıf, 6-8. Sınıf, 9-12. Sınıf) olarak sınıflamış ve her kademe için standartlar belirlemiştir. Ülkemizde 1-4. sınıflar ilköğretim, 5-8. Sınıflar ortaokul ve 9-12. Sınıflar lise olarak adlandırıldığından NCTM'nin (2000) ortaokul seviyesine karşılık olarak 6-8. Sınıf aralığı için belirlediği akıl yürütme ve ispat standartları göz önünde bulundurulmuştur.

NCTM (2000) akıl yürütmenin, ortaokulda da matematiğin ayrılmaz bir parçası olduğunu vurgulamış ve ortaokul öğrencilerinin, matematiğin örüntüleri inceleme, düzenleri keşfetme, olası genellemelerle ilgili tahminlerde bulunma ve tahminleri değerlendirmeyi içerdiğini bilmeleri gerektiğini belirtmiştir. Öğrencilerin matematiksel argümanlarını yalnızca kendilerine değil öğretmenlerine ve sınıf arkadaşlarına da sunmalarını ve birilerini ikna etmek için yeterli delile sahip zorlayıcı argümanlar geliştirmelerini önermiştir. Dokümanda, ortaokulda akıl yürütme ve ispatın nasıl gerçekleşebileceğine yönelik örnekler de verilmiştir. Ortaokul seviyesindeki matematiksel argümanda, matematiksel ispatla ilişkili olan formalizm ve kesinliğinin olmayacağını ama makul bir tahminin formüle edilmesi, tahminin test edilmesi ve değerlendirme için ilişkili muhakemenin gösterilmesi gibi ispatın önemli birçok özelliğini içerdiği aktarılmıştır (NCTM, 2000). Örneğin, bu öğrenciler sayılar kuramı gibi çeşitli konularda vardıkları sonuçlarını desteklemek için gerekçeler geliştirebilir ve bir öğretmen öğrencilerinden bir rakam ile bölünebilme kuralını formüle etmelerini ve kurallarını savunmak için argümanlar geliştirmelerini isteyebilirler (NCTM, 2000, s.264).

Premsipler ve Standartlar'da ortaokul seviyesinde akıl yürütme ve ispatın gelişmesi için öğretmenin rolüne yönelik önerilerde de bulunulmuştur. Örneğin, ortaokulda öğretmenler derste öğrencilerinin akıl yürütmeye ve düşünmeye düzenli bir şekilde katılmalarını sağlayarak onların matematiksel muhakemenin gücünü kullanmalarına ve değerini bilmelerine yardımcı olabilirler (NCTM, 2000). Ayrıca aynı dokümanda ortaokul öğrencilerinin

matematiksel ilişkileri araştırmak için muhakeme gerektiren (bir tahmini doğrulama veya yürütme gibi), onların yaşına ve ilgisine uygun etkinlikler seçmesi veya oluşturmasıyla öğretmenin önemli bir rol oynayacağı da söylenmiştir. Ortaokulda akıl yürütme ve ispatın nasıl olması gerektiğine yönelik olarak öğrencilerin bu çağlarda matematiksel akıl yürütme içeren çeşitli deneyimler yaşamaları gerektiği belirtilmiş ve bu deneyimler açıklanmıştır. Örneğin (NCTM, 2000, s. 262);

- Düzen belirlemek için örüntüleri ve yapıları inceler
- Gözlemlenen düzenlerle ilgili genellemeleri ve tahminleri formüle eder
- Tahminleri değerlendirir
- Matematiksel argümanlar oluşturur ve değerlendirir.

NCTM standartlarının baz alındığı ülkemizde de Ortaokul Matematik Öğretim Programında (MEB, 2018a, s. 55-80) kazanımlarda açıkça ispatlama kavramına yer verilmezken örtük olarak öğrenciden gerekçelendirme yapması ve argümanlar üretmesinin beklenmekte olduğu söylenebilir. Bu kazanımlardan bazıları aşağıda verilmiştir:

M.5.2.2.4. Üçgen ve dörtgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamını belirler ve verilmeyen açıyı bulur.

İç açıların ölçüleri toplamı bulunurken kâğıt katlama veya uygun modellerle yapılacak etkinliklere yer verilir.

M.6.3.2.1. Üçgenin alan bağıntısını oluşturur, ilgili problemleri çözer.

a) Noktalı veya kareli kâğıtta üçgenlerde yükseklik çizme çalışmalarına yer verilir.

Geniş açılı üçgenlerdeki yükseklikler de ele alınır.

b) Üçgenin alan bağıntısı oluşturulurken dikdörtgenin alan bağıntısından yararlanılabilir.

M.6.3.2.2. Paralelkenarın alan bağıntısını oluşturur, ilgili problemleri çözer.

a) Noktalı veya kareli kâğıtta paralelkenarın bir kenarına ait yüksekliği çizmeye yönelik çalışmalara yer verilir.

b) Paralelkenarın alan bağıntısı oluşturulurken dikdörtgenin alan bağıntısından yararlanılabilir.

M.6.3.4.2. Verilen bir hacim ölçüsüne sahip farklı dikdörtgenler prizmalarını birim küplerle oluşturur, hacmin taban alanı ile yüksekliğin çarpımı olduğunu gerekçesiyle açıklar.

a) Kare prizma ve küpün, dikdörtgenler prizmasının özel bir hâli olduğu dikkate alınır.

b) Hacim bağıntısının oluşturulması modeller yardımıyla yapılır.

M.7.3.2.2. Çokgenlerin köşegenlerini, iç ve dış açılarını belirler; iç açılarının ve dış açılarının ölçüleri toplamını hesaplar.

İç açılar toplamını keşfetmeye yönelik çalışmalara yer verilir.

M.8.3.1.2. Üçgenin iki kenar uzunluğunun toplamı veya farkı ile üçüncü kenarının uzunluğunu ilişkilendirir.

a) Somut modeller kullanılarak yapılacak etkinliklere yer verilebilir.

b) Uygun bilgisayar yazılımları ile üçgen eşitsizliğini anlamaya yönelik çalışmalara yer verilebilir.

M.8.3.1.5. Pisagor bağıntısını oluşturur, ilgili problemleri çözer.

a) Pisagor bağıntısının gerçek hayat uygulamalarına yönelik çalışmalara yer verilir.

M.8.3.4.3. Dik dairesel silindirin yüzey alanı bağıntısını oluşturur, ilgili problemleri çözer.

Literatürde ortaokul ve ilkokul seviyesinde ispat çalışmaları lise ve üniversite düzeylerinde yapılan çalışmalara nazaran çok azdır. Ko (2010), ilköğretim seviyesinde ispat öğretiminin ispatlamada kullanılacak dilin onların seviyesini aşması (onların anlayamayacağını düşündüğünden) nedeniyle zor olduğunu belirtmiştir. Staples, Bartlo ve Thanheiser (2012) çalışmasında, ortaokul öğretmenleri, öğrencilerini ispatlamaya ve gerekçelendirmeye katmak istediklerini fakat nasıl ispat yapılacağını onlara öğretmediklerini söylemişlerdir. Bu nedenledir ki ilkokul ve ortaokul düzeyinde yapılan bazı çalışmalarda gerekçelendirme (justification) kavramının kullanıldığı görülmektedir. Staples ve diğerleri (2012) gerekçelendirmeyi, kabul edilmiş ifadeler ve matematiksel akıl yürütme biçimlerini kullanan, bir iddianın doğruluğunu gösteren veya çürüten bir argüman olarak tanımlamıştır. Benzer şekilde Jahnke (2010) önceki bölümlerde bahsedildiği gibi ilkokul ve 7. Sınıfa kadar olan ortaokulda ispatları, resmi olmayan deneyimlerle desteklenen ispatlar olarak ayrıca ele almıştır. Carpenter ve diğerleri (2003) ise ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin ispatlama faaliyetlerini gerekçelendirme başlığı altında değerlendirmiştir.

Öğretim programlarına ek olarak MEB, ortaokul matematik öğretmenlerinden beklenen yeterlilikleri “Öğretmenlik Mesleği Özel Alan Yeterlikleri (İlköğretim)” (MEB, 2017a) başlığı altında belirlemiştir. Belirlenen altı ana yeterlikten üçüncüsü olan “matematik dersi becerilerini geliştirme” yeterliliğinin alt yeterliklerinden biri de “öğrencilerin akıl yürütme becerilerini geliştirebilme”dir. Bu alt yeterliğin ortaokulda ispat öğretimine yönelik olduğu söylenebilecek performans göstergeleri ise şu şekildedir (MEB, 2017a, s. 144):

- Matematikte akıl yürütebilmenin, düşüncelerini açıklayabilme ve savunabilmenin matematik öğrenmeye katkı sağlayacağını, önemini bilir.
- Akıl yürütme becerisini kazandırmaya yönelik etkinlikler düzenler, uygulamalar yapar.

- Öğrencilerin kendi düşüncelerini açıklarken matematiksel modeller, kurallar ve ilişkileri kullanmalarını sağlar.
- Akıl yürütme becerisini kullanarak öğrencilerin çıkarımlar yapmalarını ve genellemelere ulaşmalarını sağlar.
- Öğrencilerin yaşantısında, diğer derslerde ve matematikte akıl yürütme becerisini kullanabilmelerini sağlar.

NCTM standartları, öğretim programı ve öğretmen yeterlikleri çerçevesinde ve ortaokulda ispat öğretimi bağlamında, öğretmeni adaylarının bir ortaokul matematik öğretmeninden beklenen (yukarıda bahsedilen) yeterliklere sahip olacak şekilde lisans eğitimi alması gerektiği söylenebileceğinden üniversitede ispata yönelik uygulamaların/eylemlerin ve söylemlerin önemli olduğu düşünülebilir.

2.4.3. İspat ve Ortaöğretim Matematik Öğretim Programı

NCTM (2000) lise düzeyinde akıl yürütme ve ispat standartlarını açıklarken lisede öğrencilerin onlara sunulan veya yaptıkları açıklamaları kabul etme standartlarının daha sıkı hale gelmesi gerektiğini belirtmiştir. Akıl yürütme ve ispatın öğretim programlarında özel zaman veya konu ayrılarak sunulan aktiviteler olmadığını fakat hangi konu üzerinde çalışıldığına bakılmaksızın, sınıf tartışmalarının doğal ve devam eden bir parçası olması gerektiğini bildirmiştir. NCTM'ye (2000) göre öğrencilerin anlayıp kullanacağı ispat teknikleri birikimi lise eğitimi boyunca genişlemelidir. Örneğin, öğrenciler bir varsayımın geçerliğini sağlamak için doğrudan argümanlar geliştirebilmelidir. Literatürde lise düzeyinde yapılan çalışmalarda en çok geometri dersinin ele alınmasına paralel olarak, NCTM (2000) de bu tür akıl yürütmenin uzun zamandır Öklid geometrisinin tam merkezinde olduğunu fakat diğer içerik alanlarında da ("sayılar ve işlemler" alanında sayılar kuramı argümanları gibi) kullanılması gerektiğini belirtmiştir.

NCTM'ye (2000, s. 342-346) göre, öğrenciler, bir karşı örneğin bir varsayımın yanlış olduğunu gösterebileceğini ama bir varsayımla birbirine uyan bir sürü örneğin olmasının o varsayımın doğru olduğunu düşündürmesine rağmen onu ispatlamayacağını anlamalıdır; öğrenciler sonuçları elde ederken tümdengelimci ispatların gücünü görmelidir; mantıksal argümanlar üretebilmeli ve muhakemelerini etkili bir şekilde açıklayan formel ispatlar sunmalıdırlar. Çünkü çok çeşitli argüman biçimleri ve muhakeme tipleri kullanabilen öğrenciler günlük yaşam durumlarında daha etkili muhakeme imkanına sahip olacaktır (NCTM, 2000)

NCTM (2000), matematik öğretmenlerinin oluşturdukları sınıf ortamlarında, matematiksel örüntülerin ve sonuçların nedenlerini bilmenin önemini aktarmaları gerektiğine vurgu yapmıştır. Yine bu dokümana göre, öne sürülen açıklamaların geçerliğini değerlendirmek için öğrenciler kendilerinin yanı sıra diğerlerinin matematiksel argümanlarını sorgulamak için muhakeme yeteneklerine yeteri kadar güven duyuyor olmalı; tıpkı diğer seviyelerde olduğu gibi, lise matematik öğretmenleri sınıflarında tartışma ve dinleme iklimi oluşturmaya çalışmalıdırlar ve öğrencilerinin kendi argümanlarının mantıksal yapısını tartışmalarına da yardım etmelidirler. Rehberlikle, öğrenciler açıklamaları kabul etmede yüksek standartlar geliştirmelidir, kendi argümanlarını geliştirme ve savunma konusunda hem hakları hem de sorumlulukları olduğunu anlamalıdırlar (NCTM, 2000).

Ülkemizde ise 2018-2019 eğitim öğretim yılı itibarıyla geçilen yeni Ortaöğretim Matematik Öğretim Programı öğrencilerin hem ulusal hem de uluslararası düzeyde; kişisel, sosyal, akademik ve iş hayatlarında ihtiyaç duyacakları beceri yelpazeleri olan ve *Türkiye Yeterlilikler Çerçevesinde* (TYÇ) belirlenen yetkinlikler içinde matematiksel yetkinlik ve bilim/teknolojide temel yetkinlikler başlığı altında yer alan matematiksel yetkinlik ile, “*günlük hayatta karşılaşılan bir dizi problemi çözmek için matematiksel düşünme tarzını geliştirme ve uygulamadır. Sağlam bir aritmetik becerisi üzerine inşa edilen süreç, faaliyet ve bilgiye vurgu yapılmaktadır. Matematiksel yetkinlik, düşünme (mantıksal ve uzamsal düşünme) ve sunmanın (formüller, modeller, kurgular, grafikler ve tablolar) matematiksel modlarını farklı derecelerde kullanma beceri ve isteğini*” içermektedir. Bilimde yetkinlik ile “*soruları tanımlamak ve kanıta dayalı sonuçlar üretmek amacıyla doğal dünyanın açıklanmasına yönelik bilgi varlığına ve metodolojiden yararlanma beceri ve arzusuna*” atıfta bulunmaktadır. (MEB, 2018b, s. 6)

Matematik Dersi Öğretim Programıyla öğrencilerin kazanması hedeflenen becerilerden biri de “*Matematiksel düşünme ve uygulama becerileri*”dir (MEB, 2018, sf. 11). Programda yayınlanan kazanımlarda öğrenciden açık biçimde ispat yapmasını isteyen kazanımların yanı sıra örtük olarak da ispat gerektiren kazanımların bulunduğu görülmektedir. Örnek kazanımlar şunlardır (MEB, 2018b, s. 18-47):

9.1.1.5. Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar.

Bir teoremin hipotezi ve hükmü belirtilir.

9.4.4.1. Dik üçgende Pisagor teoremini elde ederek problemler çözer.

9.4.4.2. Öklid teoremini elde ederek problemler çözer.

10.2.2.2. Fonksiyonlarda bileşke işlemiyle ilgili işlemler yapar.

b) *Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliğinin olduğu belirtilir, değişme özelliğinin olmadığı örneklerle gösterilir.*

11.1.2.2. Kosinüs teoremiyle ilgili problemler çözer.

a) *Kosinüs teoremi, Pisagor teoreminden yararlanılarak elde edilir.*

11.1.2.3. Sinüs teoremiyle ilgili problemler çözer.

a) *Sinüs teoremi, iki kenarının uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açının ölçüsü verilen üçgenin alanından yararlanılarak elde edilir.*

11.2.1.2. Bir doğru parçasını belli bir oranda (içten veya dıştan) bölen noktanın koordinatlarını hesaplar.

a) *Bir doğru parçasının orta noktasının koordinatları buldurulur.*

b) *Bir üçgenin ağırlık merkezinin koordinatları buldurulur.*

11.5.3.1. Çemberde teğetin özelliklerini göstererek işlemler yapar.

a) *Çemberin dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunluklarının eşit olduğu gösterilir.*

12.2.1.3. Aritmetik ve geometrik dizilerin özelliklerini kullanarak işlemler yapar.

a) *İlk n terim toplamı bulunur.*

12.5.2.2. Bir fonksiyonun bir noktada ve bir aralıkta türevlenebilirliğini değerlendirir.

a) *Bir fonksiyonun bir noktada türevli olması için gerek ve yeter şartları inceler.*

12.5.2.4. İki fonksiyonun bileşkesinin türevine ait kuralı (zincir kuralı) oluşturularak türev hesabı yapar.

12.6.2.1. Bir fonksiyonun grafiği ile x eksenini arasında kalan sınırlı bölgenin alanını Riemann toplamı yardımıyla yaklaşık olarak hesaplar.

Öğretim programlarına ek olarak MEB, lise matematik öğretmenlerinden beklenen yeterlilikleri “Öğretmenlik Mesleği Özel Alan Yeterlikleri (Ortaöğretim)” (MEB, 2017b) başlığı altında belirlemiştir. Belirlenen dört ana yeterlikten birincisi olan “matematik alan bilgisi oluşturma” yeterliğinin alt yeterliliklerinden biri de “matematiksel süreçleri kullanarak matematiksel bilgi oluşturabilme”dir. Bu alt yeterliğin ispat öğretimine yönelik olduğu söylenebilecek performans göstergeleri şu şekildedir (MEB, 2017b, s. 5):

- Matematiksel önermeleri doğrulamak için tümevarım, olmayana ergi, doğrudan ispat gibi uygun ispat yöntemlerini kullanır.
- Sezgisel akıl yürütme ve biçimsel ispatın matematiksel düşünmedeki tamamlayıcı ilişkisini örnekleriyle açıklar.
- Verilen önermelerden tümdengelim yöntemini kullanarak geçerli çıkarımlar yapar.

- Matematiksel ispat sürecinde gerek ve yeter şartları belirler.

Matematik öğretmenlerinden beklenen özel alan yeterliliklerinden ikincisi ise “Alan eğitimi bilgisi” dir. Bu yeterliğin alt yeterliklerinden biri olan “Matematik öğrenmeyi teşvik edici sınıf ortamı oluşturabilme” nin performans göstergelerinden bazıları ise şunlardır (MEB, 2017b, s. 5).:

- Matematiksel düşünmeyi ve akıl yürütmeyi destekleyen sınıf ortamı oluşturur.
- Matematik dersinde formül ve algoritmaların nasıl elde edildiğini gösterir.

Sonuç olarak hem öğretim programında öğrencilere kazandırılması hedeflenen kazanımlar hem de öğretmenlerden beklenen yeterlilikler doğrultusunda, üniversitede matematik öğretmenliği eğitiminde ileride öğretmen olacak kişilerin ispata yönelik istenen yeterliklerle donanmış olarak mezun olmaları beklenmektedir.

2.4.4. İspat ve Matematik Öğretmenliği Lisans Programları

MEB tarafından yayınlanan, ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretim programlarının aksine lisans eğitiminde her üniversitenin kendi eğitimi için belirlediği kazanımlar olduğu söylenebilir. Bu nedenle, ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği lisans programlarının kazanımları, bir devlet üniversitenin resmi internet adresinde yayınladığı bilgiler çerçevesinde ele alınmıştır. İlköğretim matematik öğretmenliği temel program kazanımları içerisinde ispata yönelik şu kazanımlar yer almaktadır (Dokuz Eylül Üniversitesi, t.y.a):

- Matematiksel ispat yöntemlerini kullanarak ispat yapabilme
- Düşüncelerini, mantıklı bir şekilde matematik dilini kullanarak açıklayabilme ve iletişim kurabilme
- Analiz ve sentez yaparak tümevarım ve tümdengelim yaklaşımı ile düşünme becerilerine sahip olma
- Matematik kavram ve genellemeleri anlama, birbiriyle ilişkilendirme ve bunları kullanarak akıl yürütme becerisini kullanabilme

Ortaöğretim matematik öğretmenliği temel program kazanımları içerisinde ispata yönelik şu kazanımlar yer almaktadır (Dokuz Eylül Üniversitesi, t.y.b):

- Matematik ile ilgili kavramları, kavramlara ilişkin düşünceleri ve verileri tartışıp değerlendirebilir. Karşılaşacağı problemleri ve konuları analiz edebilir, kanıtlara ve araştırmalara dayalı çözüm stratejilerini geliştirebilir ve bunları yazılı ve sözlü biçimde sunabilir.

Bu bölümlerde verilen ispat veya uygulama yoğunluklu matematik derslerinin kataloglarında da ispat öğretimi amaçlandığı görülmektedir.

2.5. İspat ve Öğrenciler

Matematik eğitiminde ispata verilen önem dolayısıyla bu alanda yürütülen çalışmalar her geçen gün artmaktadır ve bu çalışmaların çoğunlukla öğrencilere odaklandığı söylenebilir. Çünkü öğrencilerin ispat algıları hakkında iyi bilgiye sahip olmak öğretmenlerin, öğrencilerinin mevcut ispat anlayışlarını değerlendirmelerine yardımcı olur ve böylece onlar, öğrencilerinin ispat algılarını geliştirmelerine yardımcı olacak öğretimi tasarlayabilirler (Stylianides, 2011).

Matematik eğitiminde ispatı öğrenci boyutuyla ele alan makalelerde, öğrencilerin ispata yönelik görüşleri veya inançları (örn., Baştürk, 2010; Raman, 2003; Stylianou ve diğerleri, 2015; Weber ve Mejia-Ramos, 2014), ispat okumalarını geliştirmelerine yönelik önerileri (örn., Weber, 2015; Zazkis ve Zazkis, 2015), ispat oluşturma süreçlerinde yaşadıkları güçlükleri (örn., Demiray ve Işıksal Bostan, 2017; Güler ve Dikici, 2014; Zazkis, Weber ve Mejia-Ramos, 2016), bu güçlüklerin giderilmesine yönelik önerileri (örn., Samkoff ve Weber, 2015), ispatlama yapılarının sınıflandırılmasıyla oluşturulan ispat şemalarını (örn., Harel ve Sowder, 1998) ve verilen bir ispatın doğruluğunu değerlendirme süreçlerini (örn., Komatsu, Jones, Ikeda ve Narazaki, 2017) inceledikleri görülmüştür. İspat doğrulama çalışmalarının birçoğunda öğrencilerin verilen bir ispatı değerlendirmesi istenirken bazılarında öğrencilerin kendi oluşturdukları ispatı değerlendirmeleri istenmiştir. Farklı bir çalışma olarak Williams ve diğerleri (2017) ise öğrencilerin ispatlamada jest kullanımlarını incelemiştir.

Türkiye’de yapılmış olan tezler incelendiğinde ise çalışmaların örneklemini büyük çoğunlukla üniversite düzeyindeki özellikle de eğitim fakültelerinde okuyan öğrencilerin yani öğretmen adaylarının oluşturduğu söylenebilir. Temel olarak bu tezlerin, öğrencilerin ispatlama süreçlerini veya becerilerini incelemeyi (örn., Uğurel, 2010), çeşitli öğretim uygulamalarının veya dinamik yazılımların öğrencilerin ispatlama becerilerine etkilerini araştırmayı (örn., Küçükbulut, 2019), ispata yönelik ders veya öğretim modeli tasarlamayı (örn., Cihan, 2019) ve ispata yönelik görüş veya tutumu belirlenmeyi (örn., Haseki, 2018) amaçladığı söylenebilir.

Bu çalışmada öğretim elemanlarına ispat anlatım yapılarının bir boyutunu teşkil eden “öğrencilere ilişkin görüşlerinin” de soruluyor olmasından dolayı literatürde öğrencilerin

yaşadıkları güçlükleri, bu güçlüklerin nedenlerini ve giderilmesi için önerileri içeren çalışmalara da yer verilmiştir.

2.5.1. Öğrencilerin İspata İlişkin Yaşadıkları Güçlükler

Öğrencilerin ispat yapma, ispatı okuyup anlama ve yapılmış bir ispatın doğruluğunu değerlendirme süreçlerinin izlendiği ilk çalışmalardan günümüzdeki çalışmalara kadar ortak bulgunun öğrencilerin ispatlamada (ispat okuma, yazma ve değerlendirme) güçlük yaşadığı bulgusu olduğu söylenebilir. Özellikle, hangi düzeyde olursa olsun ispat yapmaları istendiğinde, öğrencilerin çoğunun geçerli ispat oluşturamadığı bilinmektedir (Almeida, 2001; Arslan ve Yıldız, 2010; Harel ve Sowder, 2007; Ko ve Knuth, 2009; McCrone ve Martin, 2004; Uzun ve Bülbül, 2013; Weber ve Alcock, 2004; Weber, 2001). Literatürde sıklıkla yer bulan ve ispatlama süreçlerinde karşılaşıldığı aktarılan öğrenci hataları veya güçlükleri şu şekilde özetlenebilir:

Öğrenciler,

- *İspata nereden ve nasıl başlayacaklarını bilmiyorlar* (Güler ve Dikici, 2014; Moore, 1994; Uzun ve Bülbül, 2013; Selden, Selden ve Benkhalti, 2018; Uğurel, Morali, Yiğit Koyunkaya ve Karahan, 2015),
- *Okudukları ispatı anlamıyorlar* (Inglis ve Alcock, 2012; Lin ve Yang, 2007; Weber ve Mejia-Ramos, 2014) *veya açıklayamıyorlar* (Güler ve Dikici, 2014; Uzun ve Bülbül, 2013),
- *İspat yöntemlerini yeterince bilmiyorlar veya bu yöntemleri doğru uygulayamıyorlar* (Baker ve Campbell, 2004; Bleiler ve diğerleri, 2014; Demiray ve Işıksal Bostan, 2017; Güler ve Dikici, 2014; Ko ve Knuth, 2009; Uzun ve Bülbül, 2013; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Wheler ve Champion, 2013),
- *Matematiksel dili ve notasyonları uygun şekilde kullanamıyorlar veya anlamıyorlar* (Baker ve Campbell, 2004; Epp, 2003; Güler ve Dikici, 2014; Moore, 1994; Uğurel ve diğerleri, 2015; Uzun ve Bülbül, 2013),
- *Matematiksel tanımları bilmiyorlar* (Güler ve Dikici, 2014; Ko ve Knuth, 2009; Moore, 1994). *Bildikleri tanımları ispatta nasıl kullanacaklarını bilmiyorlar* (Güler ve Dikici, 2014; Moore, 1994; Pedemonte, 2007; Uzun ve Bülbül, 2013; Weber, 2001) *veya bildikleri tanımları yanlış kullanıyorlar* (Baker ve

- Campbell, 2004; Güler ve Dikici, 2014; Ko ve Knuth, 2009; Pedemonte, 2007; Selden ve diğerleri, 2018; Uzun ve Bülbül, 2013; Uğurel ve diğerleri, 2015),
- *Deneyssel argümanları veya örnekleri ispat kabul ediyorlar* (Coe ve Ruthven, 1994; Demiray ve Işıksal Bostan, 2017; Harel ve Sowder, 1998, 2007; Knuth, 2002b; Martin ve Harel, 1989; Martinez ve Pedemonte, 2014; McCrone ve Martin, 2004; Stylianides, 2011; Stylianou ve diğerleri, 2015; Uzun ve Bülbül, 2013),
 - *İspatta kendi örneklerini oluşturamıyorlar* (Ko ve Knuth, 2009; Moore, 1994) *veya örnekleri düzgün kullanamıyorlar* (Alcock ve Weber, 2010; Uğurel ve diğerleri, 2015),
 - *Bir ispatın doğruluğunu değerlendiremiyorlar.* (Alcock ve Weber, 2005; Alcock, Hodds, Roy ve Inglis, 2015; Harel ve Sowder, 1998, 2007; Inglis ve Alcock, 2012; Ko ve Knuth 2013; Knuth, 2002a; Selden ve Selden 2003; Uzun ve Bülbül, 2013; Weber 2010),
 - *Teoremleri kullanamıyorlar ya da yanlış kullanıyorlar* (Pedemonte, 2007; Weber, 2001). *Teoremdaki ifadelerin mantıksal yapısını belirleyemiyorlar* (Selden ve Selden, 1995). *Verilen ifadenin bazı kısımlarını tekrar yazıyorlar* (Demiray ve Işıksal Bostan, 2017; Moore, 1994)

Zazkis, Weber ve Mejía-Ramos (2015) öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları bu güçlükleri kavramsal, stratejik, epistemolojik ve mantıksal olmak üzere dört kategoride ele almıştır. Kavramsal güçlükler, öğrencilerin kavramları ve tanımları anlamalarına yönelik güçlüklerdir. Bu güçlükler öğrencinin yanlış çıkarımlar yapmasına yol açabilir veya öğrencileri, ispat için gereken eleştirel sonuç çıkarmayı yapamaz hale getirebilir. Stratejik güçlükler, öğrencilerin problem çözme yaklaşımlarına yönelik yaşadıkları sorunlardır. Bu güçlükler bir ispatı yapmak için kullandığı stratejileri, belirli stratejileri ne zaman ve nasıl bırakmayı seçtikleri ve hangi stratejilerin peşinden gitmeye değer olduğuna nasıl karar verdiklerini içerir. Epistemolojik güçlükler, öğrencilerin ikna edici bulduklarıyla matematikçilerin ikna edici bulduklarının uyuşmaması veya öğrencilerin ispatlama sürecinde kendileri için planladıkları amaçların dersin öğretmenin onlardan beklentileriyle uyuşmaması gibi güçlüklerdir. Mantıksal güçlüklerle kastedilen formel mantıktır ki bu hangi türden mantıksal çıkarımlara müsaade edildiğine yönelik öğrencinin anlayışını, öğrencilerin çok katlı nitelikli ifadeleri anlamalarını ve bir kişinin bir ispatı mantıksal olarak nasıl oluşturabileceğini içerir.

2.5.2. Öğrencilerin İspata İlişkin Yaşadıkları Güçlüklerin Nedenleri

Öğrencilerin ispat yaparken, okurken veya bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken hem yaptıkları hataları hem de bu hataların nedenlerini öğretmenlerin bilmesi, ispat sunumlarında veya sınıftaki ispat etkinliklerinde öğrencilerine gereken müdahaleleri yapabilmeleri açısından faydalı olabilir. Eğer matematik eğitimcileri öğrencilerin davranışlarına yönelik anlayışlarını derinleştirebilirlerse bu anlayış onlara daha etkili bir öğretim tasarlamak ve ispat doğrulama ve düzeltmede öğrencilerin daha etkili olmasına yardım etmek için bir temel sağlayabilir (Komatsu, Jones, Ikeda ve Narazaki, 2017). Bu nedenle, öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin ve bu güçlüklerin nedenlerinin belirlenmesine yönelik çalışmaların önemli olduğu söylenebilir. Literatür incelendiğinde, yukarıda bahsi geçen yaygın güçlüklerin oluşmasına sebebiyet veren çok çeşitli faktörlerin öne sürüldüğü görülmüştür. Bu faktörler ispatın kendisinden, öğrencilerden, öğretmenlerden ve öğretim programlarından kaynaklanan nedenleri içerebilmektedir. Yani, ispatın kendi doğasından kaynaklı olarak öğretiminin zorluğundan, öğrencilerin tutumları/inançları/önbilgileri/kavram yanlışları, öğretmenlerin ispata ilişkin alan ve pedagojik alan bilgileri/inançları/öğretim yöntemleri ve öğretim programındaki/kitaplardaki eksiklikler gibi çeşitli faktörlerden söz edilebilir.

Öğrencilerin ispatlamada güçlük yaşamalarının, öncelikle ispat yapmanın kolay bir matematiksel süreç içermiyor olmasından kaynaklandığını düşünen Stylianides ve Stylianides (2017) ispatın eğitimin her seviyesinde öğrenilmesi ve öğretilmesinin güç bir konu olduğunu aktarmıştır. Bunun yanı sıra, bu güçlüklerle öğrencilerin tutumları, inançları, önbilgileri veya kavram yanlışlarının neden olduğunu belirten çalışmalar bulunmaktadır. Özellikle, bu çalışmaların bazıları başarılı öğrencilerin de ispatlamada benzer hatalar yaptıklarını rapor etmişlerdir (örn., Zazkis ve diğerleri, 2015). Weber (2001), öğrencilerin stratejik bilgilerinin yetersiz olduğunu yani tanımları ve teoremleri biliyor olmalarına rağmen ispatta bu bilgileri kullanmak için bunları doğru şekilde seçemediklerini belirtmiştir. Üstüngün (2020) de 12. sınıf öğrencilerinin geometride sözsüz ispat becerilerini incelediği tez çalışmasında, öğrencilerin gerekli matematiksel bilgiye sahip olmalarına rağmen ispatı yapamadıklarını aktarmıştır. Buna ek olarak literatürde, öğrencilerin ispatın doğasına, kurallarına ve yöntemlerine yönelik kavramsal anlamada sıkıntı yaşadıkları ve ispata dair kesin fikirlere sahip olmadıkları (Bleiler ve diğerleri, 2014; Demiray ve Işıksal Bostan, 2017; Güler ve Dikici, 2014; Inglis ve Alcock, 2012; Moore, 1994; Selden ve Selden, 1995; Uzun ve Bülbül, 2013; Weber, 2001); ispatın amacını ve matematikteki önemini bilmedikleri veya anlamadıkları (Stylianides ve Stylianides, 2009a; Uğurel, 2010); ispatları anlamak yerine ezberledikleri (Demiray ve Işıksal

Bostan, 2017; Moore, 1994; Wheler ve Champion, 2013); kompleks mantıksal iddiaları anlamakta sorun yaşadıkları (Selden and Selden, 1995; Zandieh, Roh ve Knapp, 2014) ve ispata karşı önyargılı oldukları (Yılmaz, 2015) aktarılmıştır.

Lew ve diğerleri (2016) geleneksel kalite standartlarını karşılayan bir dersin bile öğrenciler tarafından öğretmenin amaçladığı şekilde anlaşılmayabileceğini belirtmiştir. Bu durumda anlamamanın gerçekleşmemesine, öğrenciden kaynaklı faktörlerin neden olduğunu söylemiştir. Bu faktörlerden biri, öğretmenin ispatı açıklayarak anlatmasına rağmen öğrencilerin defterlerindeki notlarının yalnızca tahtadaki yazılı formel ispattan oluşmasıdır (Lew ve diğerleri, 2016). Yani öğrenciler tahtada yazılanları deftere geçirirken öğretmenin açıklamalarını yazmamaktadırlar. Buna ek olarak, dersin bir bölümüne dikkatini vermeme ve derste notları ders dışında tekrar etmeye yeterli vakit ayırmama gibi nedenlerin de öğrencilerin matematiksel dersleri anlamalarına engel olabildiğini aktarmışlardır. Benzer şekilde Alcock ve diğerleri (2015) derslerde yapılan açıklamaların potansiyel olarak belirsiz ve geçici olduğunu ve bu nedenle genellikle öğrenciler tarafından kaydedilmediğini iddia etmiştir. Moore (1994) ise öğrencilerin ispat yazma becerilerini geliştirmek için birçok üniversitenin formel ispata köprü olacak çeşitli dersler geliştirmelerine rağmen bu dersleri aldıktan sonra bile öğrencilerin ispatla sorun yaşayabildiğini söylemiştir.

Öğrencilerin kendi sorumluluklarına yönelik inançlarının da onların ispat öğrenmelerinde etkili olduğu söylenebilir. Çünkü bir öğrencinin matematik derslerinde yapılan ispatları izleyerek öğrendikleri, öğretim elemanının öğretmeyi niyet ettiği şeyler olmayabilir (Alcock ve Weber, 2005). Örneğin, Weber ve Mejia-Ramos (2014), matematik lisans öğrencileriyle yaptıkları çalışmada, öğrencilerin sunulan ispatlardan çok az şey öğrendiklerini çünkü bu öğrencilerin ve öğretmenlerin bir ispatı okumada öğrencinin sorumluluklarına yönelik farklı inançlara sahip olduklarını belirtmiştir. Bu farklılıklardan biri derste sunulan ispatı anlamak için ne kadar zaman ayrılacağı ile ilgilidir. Yani, öğretim elemanları, matematik lisans öğrencilerinin kendilerine sunulan ispatları incelemek için 15 dakikadan fazla zaman harcaması gerektiğini düşünürken öğrencilerin çoğu bunu yapmaları gerektiğini düşünmemektedir. Buna ek olarak öğrencilerin çoğu ispattaki her adımı doğrulayabilirlerse bir ispatı tamamen anladıklarına inanırken, öğretim elemanları genellikle bir ispatı anlamamanın bundan daha fazlası olduğuna inanmaktadırlar. Ayrıca, öğrenciler, ispat iyi yazılmışsa, alt-ispatlar veya diyagramlar oluşturmak zorunda kalacaklarına inanmadıkları için iyi bir ispat okumanın bir şekilde pasif bir süreç olması gerektiğini düşünmekteyken öğretim elemanları bunun aksini düşünmektedir.

İspatlamada öğrencilerin yaşadığı güçlüklerin bir başka nedeni olarak da öğretmenin ispat alan bilgisinin veya pedagojik alan bilgisinin yetersiz olabileceği gösterilmiştir. Örneğin, Martin ve Harel (1989) ve Knuth (2002a), bazı matematik öğretmenlerinin örnek vermeyi ispat olarak gördüğünü aktarmıştır. Epp (2003)’e göre, bu durum nedeniyle, öğretmenler fark etmeden öğrencilerde, deneysel argümanların matematiksel ifadelerin doğruluğunu göstermeye yettiğine yönelik bir algı oluşturmuş olmaktadır.

Uğurel (2010), lise matematik öğretmenlerinin derste ispat sunumlarında, alan bilgilerindeki bazı eksiklikleri gösteren ve öğrencilerde ispata yönelik kavram yanılgılarına neden olabilecek söylemlerde bulunduklarını aktarmıştır. Stylianides ve diğerleri (2013) ise ispatın derste daha merkezi konuma gelmesinin zor olduğunu çünkü öğretmenlerin çoğunun (özellikle de sınıf öğretmenlerinin) muhakeme ve ispatla ilgili sınırlı matematiksel konu alan bilgisine sahip olduklarını söylemiştir. Buna ek olarak, Knuth (2002b) öğretmenlerin, ispatın matematiksel olarak rolünü anlamakta zorlandıklarını ve birçok öğretmenin, ispatların lise öğrencilerine uygun olmadığına inandıklarını aktarmıştır. Benzer şekilde, Barak (2018) ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini incelediği tez çalışmasında, öğretmen adaylarının ortaokul düzeyinde ispat yapmaya yönelik görüşlerini de almıştır. Sonuç olarak, bazı öğretmen adaylarının ortaokul düzeyinde ispat yapılamayacağını düşündükleri bulunmuştur.

Matematik öğretmenlerinin ispatla ilgili algıları, genellikle lisans düzeyinde matematiksel ispatla ilgili içerikleri öğrendikleri derslerden etkilendiğinden (Blanton ve diğerleri, 2009; Knuth, 2002b) yukarıda bahsi geçen eksikliklerin birçoğunu, lisans eğitim hayatlarından öğretmenliklerine taşıyabilecekleri düşünülebilir.

Öğrencilerin ispatlamaya yönelik başarısızlıklarında, derslerde ispatın öğretimi için seçilen yöntemlerin de payı olduğu söylenebilir. Örneğin, Uzun ve Bülbül (2013) çalışmalarında, lise matematik öğretmen adaylarının basit önermeleri bile ispatlamada güçlük yaşadıklarını aktarmıştır. Bu durumun bir nedeni olarak matematik derslerinde genellikle öğretim elemanının ispatları anlattığını ve öğrencilerin ispatlamaya katılmasına fırsat verilmediğini belirtmiştir. Uğurel (2010)’e göre öğrencilerin bilgileri çoğunlukla öğretmenleri ile etkileşimleri çerçevesinde yapılandırılmaktadır. Sınıf ortamında öğrenci ve öğretmenlerin ispatlama etkinliğindeki söylemlerini analiz ettiği doktora tezinde, Uğurel (2010) ispata yönelik öğrencilerdeki yetersizlik ve yanılgıların temel nedenlerinin, “*öğretmenlerin ispatları ağırlıklı olarak bilgi aktarımı yoluyla sunması, ispatın inşası esnasındaki bilişsel süreçlere öğrencileri yeterince dâhil etmemesi ve ispat yapmanın anlamı ve adımlarını sınırlı bir şekilde ifade ederek aktarması*” (s. 199) olduğunu söylemiştir. Benzer şekilde, Stylianou ve diğerleri

(2015), öğrencilerin, çoğunlukla derste ispat oluşturma bir parçası olmadığını belirtmiştir. Çünkü ileri matematik derslerinin çoğu, öğretim elemanının teoremlerin ispatlarını öğrencilere sunmasından oluşmaktadır (Fukawa-Connelly, 2012b; Mills, 2014; Weber, 2004, 2010). Bu pedagojik uygulamanın arkasında, öğrencilerin, öğretmenin sunduğu ispatları okuyarak ve çalışarak öğrenebileceği varsayımı vardır. Bu tür derslerde öğrenciler sunulan ispatları izleyerek pasif şekilde not alırlar (Weber, 2004). Özetle, öğretim elemanı derste matematiksel argümanları temel sunucu ve değerlendirici olduğundan öğrencilerin kendilerinin nasıl argümanlar oluşturup değerlendireceklerini anlamaları için fırsatları sınırlıdır (Harel ve Rabin, 2010). Bu ispat öğretim şekli, öğrencinin bir ispatın doğruluğunu değerlendirmesi gerektiğinde, öğretmenin tek otorite olduğuna inanmasına sebep olmuştur (Harel ve Sowder, 1998). Ayrıca, bu tür öğrenme ortamlarında öğrenciler öğretim elemanının ispat algısını fark edemeyebilirler. Çünkü onlar sadece tahtada yazan son ürünleri kopyalarlar ve matematiği kavramsal anlamının, ispatlar oluşturmaya, ispatların matematik hakkında daha derin düşünmek için bir araç olduğunu görmeyi gerektirdiğini ve ispatların önemini fark etmezler (Ko ve Knuth, 2013). Geleneksel sınıflarda baskın öğretim, öğrencilerin belirli ispatları başkaları tarafından yazılan ispatlarla öğreneceğini yani okumanın önemli olduğunu varsayar (Lew ve diğerleri, 2016; Selden ve Selden 1995). Daha öğrenci merkezli öğretimlerde ise öğrenciler ispat oluşturmaya ve sunmaya daha fazla zaman ayırır (Panse, Alcock ve Inglis, 2018).

Uzun ve Bülbül (2013) sınavlarda genellikle derste sunulan veya kitaplarda olan ispatların sorulduğunu ve öğrencilerin bu ispatları ezberleyerek dersi geçecek not aldıklarını aktarmışlardır. Bu sebeple de öğrenciler ispatları kavramsal olarak anlamak yerine ezberlemektedirler. Weber ve Mejia-Ramos (2014), üniversitede matematik derslerinde ispatların genellikle daha hızlı anlatıldığını, öğrencilerin ispatları nasıl okuyacaklarını anlatmaya çok az zaman ayrıldığını ve ispatı ne kadar anladıklarının da nadiren değerlendirildiğini belirtmiştir. Sonuç olarak, öğrencilerin, onlara sunulan ispatları çalışmaya vakit ayırmaları gerektiğinin (kendilerinden bunun beklendiğinin) farkında olmadıklarını aktarmıştır.

Derslerde ispat yaparken matematikçilerin ispat yapma süreçlerine benzer bir akışın ispatın öğretiminde uygulanmamasının da sorun teşkil edebileceği söylenebilir. Almeida (2000), profesyonel matematikçilerin ispatlama sürecindeki hareket tarzının “sezgi-deneme ve yanılma-tahmin-varsayım-ispat” şeklinde olmasına rağmen öğretmenlerin lisans öğrencilerine öğretim şekillerinin bu akıştaki son noktaya odaklı olduğunu belirtmiştir. Bu odaklanmanın matematikte ispat yapmanın doğasında olan hissi öğrencilerden gizlediğini ve önemini

kaybettirdiğini de söylemiştir. Benzer şekilde, Stylianides (2007) ise ispatın lise geometri derslerinde matematikle önceki bilgilerin doğal bir genişlemesi olarak değil de çoğunlukla izole edilmiş ayarlamalar içinde tanıtıldığına değinmiştir.

En yaygın kavram yanlışlarından biri olarak kabul edilen öğrencilerin örnek vererek ispat yapmaya çalışmalarının veya ispat yaparken örnekleri kullanamamalarının, örneklerin doğru kullanımının öğretilmemesinden kaynaklandığı da iddia edilmiştir. Örneğin, Knuth, Zaslavsky ve Ellis (2017)'e göre tüm sınıf seviyelerindeki öğrenciler, ispatlama ile ilgili etkinlikler boyunca örneklerin stratejik olarak düşünüleceği ve analiz edileceğine yönelik bir eğitim ya çok az almaktadır ya da hiç almamaktadırlar. Bu nedenle, matematikçilerle öğrencilerin ispat kullanımları arasındaki zıtlıkların bu durum düşünüldüğünde sürpriz olmayacağını da söylemişlerdir.

İspatın farklı işlevlerinin/fonksiyonlarının derslerde vurgulanmasının ve örneklendirilmesinin, öğrencilerin ispat algıları açısından önemli olduğu söylenebilir. Bieda (2010), bazı matematik öğretmenlerinin derste ispat yapmayı yalnızca doğrulama ve açıklama olarak gösterdiklerini söylemiştir. Bu durum, öğrencilerin ispatın işlevlerini bütünsel olarak kavrayamamasına ve ispatın önemini anlamakta sorun yaşamasına neden olabilir.

Öğrencilerin ortaokul ve lisede ispatlamaya yönelik tecrübe kazanmamış olmaları da üniversitede ispatla karşılaştıklarında sorun yaşamalarına neden olabilmektedir. Baştürk (2010) öğretmen adayları ile yaptığı çalışmada ispatlamada yaşadıkları güçlükleri neden olarak üniversite öğrencilerin bir anda ispatla karşılaştıklarını belirtmiştir. Bunun ülkemizde öğrencilerin ilköğretim ve lise seviyesinde ispatla uğraşmamalarından kaynaklandığını belirtmiştir.

İspat öğretiminde öğrencilerin ispat algılarını etkileyebilecek yukarıda bahsi geçen faktörlere ek olarak öğretim programı ve ders kitaplarının da ispat öğretiminde etkisinin olduğu iddia edilmiştir. Örneğin Knuth (2002b), etkinliklerin çoğunun açık uçlu olduğu ve genellikle öğrencilerin çözümleri için gerekçe sağlamalarını gerektiren müfredatları uygulayan öğretmenlerle geleneksel müfredatları kullanan öğretmenlerin fikirlerinin ve görüşlerinin de farklı olacağını belirtmiştir. Turan (2019) ise matematik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin ispatlama becerilerinin istenilen düzeyde olmamasının nedenlerinden birinin de ortaokul matematik öğretim programında ispata ilişkin kavramlara yeterince yer verilmemesi olduğunu söylemiştir.

Matematik ders kitaplarında ispatla ilgili yapılar iki sebeple önemlidir: ispat matematiğin önemli bir bileşeniyken kitaplar da matematik öğretiminin temel bir bileşenidir (Davis, Smith, Roy ve Bilgic, 2014). Matematik ders kitapları öğrenme fırsatları için

potansiyel bir kaynak olarak görülebilir (Bergwall ve Hemmi, 2017). Bununla birlikte, bazı araştırmalar ders kitaplarındaki ispat etkinliklerinin çok az olduğunu aktarmıştır (örn., McCrory ve Stilianides, 2014; Thompson, Senk ve Johnson, 2012; Zeybek, Üstün ve Birol, 2018). Örneğin, ortaokul matematik ders kitaplarındaki ispat etkinliklerini inceleyen Zeybek ve diğerleri (2018), muhakeme ve ispat etkinliklerinin sayısının çok az olduğunu ve bu durumun güncel eğitim reformlarıyla örtüşmediğini belirtmiştir. McCrory ve Stilianides (2014) ise inceledikleri ders kitaplarında akıl yürütme ve ispatlamanın nadiren açık bir şekilde ele alındığını, akıl yürütme ve ispatlama kavramlarına ve yöntemlerine atıfların da nadir olduğunu söylemiştir. Thompson ve diğerleri (2012), 20 güncel lise matematik ders kitabını incelemişlerdir. Kitaplarda bazı özelliklerin gerekçelendirmeden verildiğini ve öğrencilerin alıştırmaları sorularında ispatla ilgili akıl yürütme fırsatlarının az olduğunu bildirmişlerdir. 6. ve 8. sınıflar için tasarlanmış bir ders kitabı örneğinden alınan etkinlikleri inceleyen Stylianides (2009), bu etkinliklerin yarısından daha azının muhakeme ve ispat için fırsat sunduğunu bulmuştur. Sears ve Chavez (2014) ise çalışmalarında katılımcı olan öğretmenlerden birinin ders kitabından bazı eksiklikleri nedeniyle memnun olmadığını aktarmıştır. Öğretmen, kitabın ispatları uygulamak için yeterli problemler sağlamadığını, matematiksel fikirleri bağlama ihtiyacına değinmediğini ve içeriğin sunulduğu sıranın daha mantıklı olması gerektiğini belirtmiştir. Bu bulgulara ek olarak Zazkis ve diğerleri (2016) inceledikleri ders kitabındaki ispatların %10 undan azının resimlerle birlikte sunulduğunu ve ispattaki adımların görsellerle gerekçelendirilmediğini aktarmıştır.

2.5.3. Öğrencilerin İspata İlişkin Yaşadıkları Güçlüklerin Giderilmesi ve İspatlama Becerilerinin Geliştirilmesi İçin Öneriler

Öğrencilerin ispata yönelik yaşadıkları güçlükler ve bu güçlüklerin nedenleri literatürde çok yaygın bir şekilde yer bulurken gerek belirli güçlüklerin giderilmesi gerekse genel olarak öğrencilerin ispatla ilgili yeterliklerinin geliştirilmesi amacıyla çeşitli uygulamaların veya yöntemlerin de denendiği söylenebilir. İlköğretimden üniversite düzeyine kadar her seviyede, öğrencilerin ispatlama becerilerinde ve ispata yönelik tutumlarında olumlu etki oluşturacağı tavsiye edilen öğretim müdahaleleri/deneyleri /modelleri/yöntemleri, dinamik yazılımlar, ders tasarımları ve ispatın sunumu için alternatif formatlar araştırmalarda yer almaktadır. Örneğin, bazı çalışmalar öğrencilerin ispatla ilgili yeterliliklerini geliştirmelerine yardımcı olacak öğretimler önermiştir. Çalışmalarda genellikle “öğretimsel müdahale” ifadesi ile yer bulan bu durum ile kastedilen, belirli öğrenme çıktılarına ulaşmak

için amaca yönelik faaliyetler ve stratejilerin uygulanmasıdır (Stylianides, 2011). Bu öğretim müdahaleleri çeşitli öğretim modelleri, stratejileri, yöntemleri ve tekniklerini içerebilmektedir. Stylianides ve diğerleri (2007) öğrencilerin ispat öğrenmelerine katkı sağlayacak öğretim müdahalelerinin tasarlanması ve uygulanması gerektiğini tavsiye etmiştir. Örneğin, Samkoff ve Weber (2015) üniversite öğrencilerinin okudukları ispatı anlama becerilerini geliştirecek stratejileri içeren bir öğretim yöntemi tasarlamışlar ve bu yöntemin yararlı olduğuna yönelik sonuçları aktarmışlardır.

Cihan (2019) doktora tez çalışmasında, lise matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı yapmış ve bu dersi uygulamıştır. İspatın bileşenleri, ispat yöntemleri, ispat şemaları, ispata yönelik öğrenci güçlükleri, bu güçlüklerin nedenleri ve bu güçlüklerin giderilmesine yönelik stratejileri de içeren bu dersin nicel ve nitel olarak analizi sonucunda öğretmen adaylarının ispata yönelik alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirdiğini aktarmıştır.

Stylianides ve Sytlianides (2009b) matematik öğretmen adaylarının ispatlamada deneysel argümanların sınırlılıklarını anlamalarına yardımcı olmayı amaçlayan bir öğretim dizisinin teorik temelini oluşturarak bu öğretim dizisini öğretmen adaylarına uygulamışlardır. Sonuç olarak bu öğretimin, öğrenme hedeflerini desteklediğini bulmuşlardır. Bu öğretim dizisini temel alan Stylianides (2011), hazırladığı detaylı ders planlarına uyarak ders işleyen bir lise öğretmenin, öğrencilerinin bahsedilen güçlükleri aşmaya başladığını aktarmıştır. Sonuç olarak geliştirilen bu öğretimin hem lisans hem de lise düzeyinde öğrencilerin deneysel argümanları ispat olarak görme yanılığının giderilmesinde etkili olduğu bulunmuş ve bu öğretim dizisinin diğer yanılığa veya alanlara da uyarlanabileceğini önerilmiştir.

Öztürk (2016), grup çalışmaları, sınıf tartışmaları ve dinamik geometri yazılımı kullanmayı içeren ‘Matematiksel İspat (İSMAT)’ adını verdiği öğretim modeline göre tasarlanan öğrenme ortamının, ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakeme yapma ve matematik dilini kullanmada olumlu etkisi olduğunu, ispatın rollerine yönelik bakış açılarının genişlemesini ve ispatı daha geniş açılardan değerlendirebilmelerini sağladığını aktarmıştır. Sarı (2011) da grup tartışmaları ve sosyal etkileşim içerecek şekilde tasarladığı öğretme deneyinin, lise matematik öğretmen adaylarının ispatlama süreçlerine olumlu etkisi olduğu ve ispatla ilgili güçlüklerinin azalmasını sağladığını belirtmiştir.

Mata-Pereira ve Ponte (2017), öğrencilerin genelleme ve gerekçelendirme becerilerinin gelişimini desteklemek amacıyla hem sınıf tartışması başlatacak keşif amaçlı bir etkinliği hem de bu sınıf tartışmasında öğretmenin eylemlerini planlayarak tasarladıkları öğretim deneyinde, tanımladıkları öğretmen eylemlerinin ve seçilen etkinliğin öğrencileri

genellemeye ve gerekçelendirmeye yönlendirdiğini ve bu becerilerini zenginleştirdiğini aktarmışlardır. Aylar (2014), ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve becerilerini geliştirmeyi ve ispat yöntemlerinin öğretimini de içeren bir öğretim deneyi sonucunda öğrencilerin ispat kavramına yönelik algı ve ispat yapma becerilerinde gelişim gözlemlediğini belirtmiştir. İnəm (2014) ise ispat kavramı testlerine dayalı olarak tasarladığı öğretim uygulaması ile bu testlerin belirli bir düzeye kadar öğrencilerin kavramalarında olumlu etkisi olduğunu ve lise öğrencilerinin bu öğretim uygulamasından memnun kaldıklarını aktarmıştır.

Yılmaz (2015), matematiksel modeller kullanılarak teoremlerin ispatlanmasının hem teoremin öğrenciler (ortaokul matematik öğretmen adayları) tarafından anlaşılmasını hem de öğrencilerin ispat becerilerine ve ispata yönelik olumlu tutum geliştirmelerine olumlu etkisi olduğunu bulmuştur. Benzer şekilde, Ünveren (2010) ortaokul matematik öğretmen adaylarının derste matematiksel modelleme ile gerçekleştirilen ispatlarda, geleneksel yollarla yapılan ispatlara göre ispata yönelik tutumlarının daha yüksek olduğunu belirtmiştir.

Uzun ve diğerleri (2013) matematik öğretmen adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik bir öğretme deneyini analiz ettikleri çalışmalarında, sınıf içinde uygulanabilecek şu öğrenme etkinliklerini önermiştir: Öğrencilerin bir teoremin/önermenin doğruluğu veya yanlışlığını argümanlar üreterek ve bu argümanları test ederek tartışmaları, ürettikleri argümanlardan geçerli olarak kabul edileni ispat olarak yazmaları, yazdıkları ispatların geçerliliğini değerlendirerek geçerli ispatın nasıl olması gerektiğini ifade etmeleri, öğrencilerin heterojen gruplar içinde etkileşime girerek çalışmaları sağlanmalı, sınavlarda derste sunulanlardan farklı ispatlar sorulmalı, sınavlardan sonra öğrencilere hataları ile ilgili dönüt verilmeli, sınav kağıtlarından bazı yanıtların seçilerek sınıfta tartışılması sağlanmalı, ispatlama ödevleri verilmeli ve bu ödevler sınıfta birlikte incelenmelidir.

Weber (2015), matematik lisans öğrencilerinin ispatları anlamak için kullanabilecekleri ispat okuma stratejilerini belirlemeyi amaçlamıştır. Bunun için, dört başarılı öğrencinin onlara verilen bir ispatı okurken neler yaptıklarını analiz etmiştir. Bu öğrencilerin, anlamayı geliştirmek için beş ispat okuma stratejisi kullandıklarını tespit etmiştir. Bu stratejiler: (i) ispatını okumadan önce teoremi ispatlamaya çalışmak, (ii) ispatta kullanılan ispat çerçevesini belirlemek, (iii) ispatı parçalara veya alt ispatlara ayırmak, (iv) ispattaki zor iddiaları bir örnekle göstermek ve (v) ispatta kullanılan yöntemi kişinin kendi yaklaşımıyla karşılaştırmak. Bu ispat okuma stratejilerinin anlamayı geliştirebileceklerini aktaran Weber (2015), çalışmanın ikinci aşamasında ise 83 matematik eğitimcisi (öğretim elemanı) ile, öğrencilerinin bu stratejileri kullanmasını isteyip istemedikleri konusunda anket yapmış ve çoğu matematikçinin, bu stratejileri faydalı bulduğunu rapor etmiştir. Bu çalışmada elde edilen

ispat okuma stratejilerinin öğretildiği iki ders tasarımını analiz eden Samkoff ve Weber (2015) ise bu stratejilerin uygulanmasının öğrencilerin okudukları ispatları anlamalarına yardımcı olduğunu, ancak her ders veya konu için çeşitli nedenlerle faydalı olmayabileceğini de belirtmişlerdir.

Hazırlanan çeşitli form ve çalışma kağıtlarının da ispatlama yeterliğine etkisi araştırılmıştır. Örneğin, Yeşilyut Çetin (2017), doktora tez çalışmasında, hazırladığı ispat tamamlama formundaki anahtar fikirlerin lise matematik öğretmen adaylarının sezgisel olarak ispatı anlamalarını, ispata yönelik olumlu tutum geliştirmelerini, ispata başlamalarını ve ispatı tamamlamalarını kolaylaştırdığını aktarmıştır. Benzer şekilde, Karaoğlu (2010), anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları içeren çalışma kağıtları kullanmanın etkililiğini araştırdığı tez çalışmasında, lise matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerden yararlandıklarında ispat yapma performanslarının arttığını bulmuştur. Ülker (2018) gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımının ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik becerilerinin gelişimine olumlu etkisi olduğunu aktarmıştır. Benzer şekilde, Polat (2018) sözsüz ispatların, 9. sınıf öğrencilerinin ispatlama becerisine olumlu etkisi olduğunu belirtmiştir.

Bahsi geçen tüm bu yöntemler gibi faydalı olabileceği düşünülerek ispat öğretimine entegre edilen yöntemlerden bazılarının beklenen etkiyi oluşturmadığı da söylenebilir. Örneğin, Küçükbulut (2019), yapılandırmacı yaklaşım modellerinden biri olan 5E öğrenme modelinin, 7. sınıf öğrencilerinin geometride ispat becerilerinin gelişimine anlamlı etkisinin olmadığını bulmuştur. Beklediği etkiye ulaşamayan bir başka araştırmada ise Roy, Inglis ve Alcock (2017), lisans öğrencilerinin matematiksel ispatları anlamalarına yardımcı olmak için tasarlanmış bir müdahaleye ilişkin iki çalışma sunmuştur. Müdahalede, mantıklı ilişkilere dikkat çekmek için tasarlanmış sesli yorum ve görsel animasyonlarla ispatlar (e-ispat) sunan multimedya kaynakları kullanılmıştır. 1. çalışmada, gruplardan biri bir e-ispat ve diğeri ise standart bir yazılı ispat üzerinde çalışmış ve öğrencilerin anlama başarıları çeşitli testlerle değerlendirilmiştir. Gruplar anlık testte benzer şekilde performans göstermesine rağmen, e-ispat grubunun daha zayıf akılda tutma sergilediği görülmüştür. 2. çalışmada ise bir e-ispat üzerinde çalışan katılımcıların sesli yorumları dinlemediklerinde daha az işlem çabası sergilediklerini göstermek için göz hareketi analizlerini kullanmışlar ve birinci çalışmadaki beklenmedik sonucun nedenini de açıklamışlardır. E-ispatlar tarafından sunulan ekstra desteğin, öğrencilerin bilgileri organize ettikleri süreçleri aksattığını ve böylece yeni anlayışlarının mevcut bilgilerle bütünleşmesini kısıtladığını bulmuşlardır.

Teknoloji destekli öğretimlerin, öğrencilerin ispata yönelik yeterliklerini geliştirmesindeki payının belirlenmesi için de çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, Demir (2011), (Cabri) dinamik geometri yazılımı kullanılarak bilgisayar destekli geometri materyalleri ile gerçekleştirilen öğretimin, 8. sınıf öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirdiğini bulmuştur. Benzer şekilde, Haseki (2018), (Geogebra) dinamik geometri yazılımına dayalı ispat öğretiminin lise öğrencilerinin geometrik ispata karşı tutumlarına olumlu etkisi olduğunu aktarmıştır. Ceylan (2012) (Geogebra) dinamik geometri yazılımının ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yaparken varsayım yapmalarına yardımcı olduğunu ve onları ispat yapmaya teşvik ettiğini belirtmiştir. İpek (2010) ise dinamik geometri yazılımı kullanarak ispat öğretiminin, ortaokul matematik öğretmen adaylarının farklı ispat türlerini kullanabilmelerinde olumlu etkisi olduğunu bulmuştur. Zengin (2017), GeoGebra yazılımının matematik öğretmen adaylarının ispat konusundaki tutumlarına etkisini belirlemek amacıyla 24 matematik öğretmen adayına dokuz hafta tasarlanan öğretim deneyi uygulanmıştır. Verilerin analizi sonucunda, GeoGebra yazılımının, öğretmen adaylarının ispat ve ispatlama konusundaki tutumlarının olumlu yönde arttığı tespit edilmiştir. Öğrencilere teorik düşünmeyi ve özellikle ispat uygulamalarını tanıtmada (Cabri) Dinamik Geometri Sistemi (DGS) kullanımının etkilerini öğretim deneyi ile incelemeyi amaçlayan Mariotti (2012), DGS'nin, öğretmenin gerçekleştirmeye niyetlendiği eğitimsel hedeflerini desteklediğini ve öğrencilerin teorem anlayışlarının gelişimini teşvik ettiğini tespit etmiştir.

Matematik öğrencilerinin ispatı anlamasına yardımcı olmak için bazı matematik eğitimcileri ispatların anlamayı arttıracığına inandıkları alternatif formatlarla sunulmasını önermişlerdir. Örneğin, Almeida (2003) üniversite matematik derslerinin genellikle tanım-teorem-ispat sırasıyla işlendiğini, bununla birlikte özenle seçilecek örnekler yardımıyla ve teoremlerin anlaşılmasına fırsat verecek şekilde derslerin “örnekler-teorem-ispat” veya “örnekler-ispat-teorem” formatında anlatılması gerektiğini belirtmiştir.

Akran değerlendirme sisteminin ispat öğretimine entegre edilerek pedagojik bir araç olarak kullanılmasını öneren Zerr ve Zerr (2011), denedikleri bu yöntemin öğrencilerin eleştirel düşünme gibi düşünme becerilerini geliştirdiğini ve onların, akranları tarafından yazılan ispatları okuma ve değerlendirmelerinin matematiği yalnızca doğru olduğu bilinen kanıtları okurken okuyabileceklerinden daha aktif bir şekilde okumalarını gerektirdiğinden içeriği öğrenmelerinde etkili olabileceğini belirtmişlerdir. Benzer şekilde, bazı araştırmacılar (örn., Ko, Yee, Bleiler-Baxter ve Boyle, 2016; Stylianides ve Stylianides, 2009a) öğretmenlerin sınıfta tek otorite olarak davranması yerine öğrenme sürecinde öğrencilerin ispat oluşturma ve değerlendirme sürecine aktif olarak katılmaları için fırsatlar oluşturulması

gerektiğini önermişlerdir. İspatla ilgili hedeflenen kazanımları elde edebilmek için üniversite öğrencilerinin ispat doğrulamaya katıldığı ve kararlarını diğerleriyle paylaştığı/tartıştığı öğrenme ortamları oluşturmak önemlidir (NCTM, 2000; Ko ve Knuth, 2013; Selden ve Selden, 2003).

Synder (2010), Sudoku bulmacasının ve çözümündeki kuralların ispata dayalı matematiğe girişte kullanılabileceğini önermiş ve öğrencilerin bu şekilde ispat yöntemlerinin çoğunu öğrenebileceğini iddia etmiştir. Hodds, Alcock ve Inglis (2014), öğrencilerin dikkatini matematiksel bir ispat içindeki mantıksal ilişkilere odaklamak için tasarlanmış, kendini açıklama eğitimini içeren basit bir kitapçığın onların ispat anlamalarını önemli ölçüde geliştirebileceğini gösteren deneyler rapor etmişler ve ispata giriş derslerinin kendini açıklama eğitimini içermesi gerektiğini belirtmişlerdir.

İspatlamada örneklerin yanlış kullanımına yönelik öğrenci hatalarına değinen çalışmaların bir kısmı derste ispatlama etkinliklerinde doğru kullanımlarını göstermek adına örneklerin eğitimde sıkça yer alması gerektiğini belirtmişlerdir. Örnek kavramı TDK'ye (2020) göre “Bir düşünceyi, kuralı, gözlemi veya savı desteklemek ve açıklamak amacıyla ileri sürülen söz, yapılan davranış, misal” dir. Alcock ve Weber (2010) örneği “bazı matematiksel kavramların tanımını karşılayan bir matematiksel nesne” (sf. 2) olarak tanımlamışlardır. Örnekler şema, resim, belirli sayısal durum veya daha fazlası gibi her tür gösterim tipinde olabilir (Yopp ve Ely, 2016). Çeşitli matematiksel içeriklerde örnek kullanımına yönelik yürütülen çok sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmalar matematiksel fikirlerin gelişiminde örneklerin önemli bir rol oynadığını göstermektedir. Örneklerin ispatlama aktivitelerindeki kullanımlarına yönelik çalışmalar da (örn., Alcock ve Inglis, 2008; Iannone, Inglis, Mejia-Ramos, Simpson ve Weber, 2011; Lockwood, Ellis, ve Lynch, 2016; Weber, 2010; Weber, Inglis ve Mejia-Ramos, 2014) örnek kullanımının tahmin ve ispatlamada etkili bir araç olduğunu desteklemektedir. Özgür, Ellis, Vinsonhaler, Doğan ve Knuth (2019) örnekleri, matematiksel kavramlar, teoremler ve teknikler ile öğrenenler arasında aracılık eden araçlar olarak gördüklerini belirtmiştir. Bu nedenle örneklerin kişinin kendisiyle veya diğerleriyle iletişimi sağlamasından dolayı matematik öğrenme ve yapmada hayati bir öneme sahip olduğunu belirtmişlerdir.

Bazı çalışmalar (örn., Harel ve Sowder, 1998) örnekleri öğrencilerin deneysel ispat şemasına eğiliminden dolayı öğrencilerin ispatlamalarında bir engel olarak görürken, bazıları ise örneklerin uzmanların ispatlamalarında önemli bir rol oynadığını ve dolayısıyla öğrencilerin ispatlama yaparken ve tahminler oluştururken örneklerden faydalanabileceğini önermiştir. (örn., Knuth ve diğerleri, 2017; Lockwood ve diğerleri, 2012). Knuth ve diğerleri

(2017) örnek temelli muhakemenin, genellikle ispatlamanın öğrenilmesinin önünde bir duvar gibi görülmekte olmasına rağmen ispatlamada önemli bir nesne olduğunu düşündüklerini ve örneklerin varsayımları anlama, varsayım üretme ve geliştirmede (bu varsayımların ispatlarını geliştirmede sonraki girişimlerinde de) önemli bir rol oynadığını düşündüklerini belirtmişlerdir. Örneklerin, matematikçilerin ispatlamaya yönelik etkinliklerinde ciddi bir rol oynadığını ve bir varsayımı daha derin bir şekilde anlamayı sağlamanın yanı sıra bir ispatın gelişiminde de kavrayış sağlayacağını eklemişlerdir. Özetle, araştırmacılar öğretimsel yaklaşımların öğrencilerin örneklerin sınırlılığını ve ispata ihtiyaçları olduğunu anlamalarına yardım edecek şekilde tasarlanması gerektiğini savunmaktadır (örn., Sowder ve Harel, 1998; Stylianides ve Stylianides, 2009b).

Öğrencilerin ispatın önemini ve değerini anlamamasına yönelik bulgular, ispat öğretiminde bu yönde de bazı tavsiyelerin geliştirilmesini sağlamıştır. Örneğin, Nardi ve Knuth (2017) ispatın öneminin ve gerekliliğinin takdir edilmesi/değerinin bilinmesinin, öğrencilerin ispatlama becerilerindeki gelişimi hızlandıracaklarını iddia etmiştir. Ayrıca, ispatın değerinin bilinmesi için yapılacakların planlamasında, ispat ve ispatlamaya ilişkin sınıf kültüründe bir değişim ve öğretmenlerin ispatlama yeterliliklerinin geliştirilmesinin gerektiğini eklemişlerdir. Demiray ve Işıksal Bostan (2017) ise ispatın önemi ve gerekliliğinin derslerde vurgulanmasını önermişlerdir.

Özetle, öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin giderilmesine yönelik çeşitli önerilerin ve uygulamaların mevcut olduğu söylenebilir. Bununla birlikte, Ko (2010), çalışmakta olan öğretmenlerin olduğu kadar öğretmen adaylarının da ispat alanında yeterli bilgiye sahip olmak için nasıl hazırlanabileceğinin tam olarak bilinmediğini iddia etmiştir. Bu açıklamayı destekler şekilde, Stylianides ve Stylianides (2017) araştırmaların öğretmenlere, öğretmen eğitimcilerine ve program geliştiricilere (kitap yazarları da dahil) ispat alanında uygulamalardaki problemleri nasıl belirleyebilecekleri konusunda yeterli desteği sağlamadığını (sf. 252) belirtmiştir.

2.6. İspat ve Öğretmenler

İspat öğretiminin, öğrenciler ve öğretim programları gibi önemli sac ayaklarından bir diğeri de öğretmenlerdir. Hatta bir döngü halinde ilerleyen öğretim zincirinde öğrencilerin ispatlamada veya diğer matematiksel içeriklerde ve becerilerde yaşadıkları güçlüklerin azaltılması için müdahale edilmesi gereken halkanın öğretmen eğitimi olduğu söylenebilir. Dolayısıyla, eğitim fakültelerinde öğretim elemanlarının öğretmen adaylarına verdikleri eğitim önem kazanmaktadır. Weber (2012) öğretim elemanlarının pedagojik amaçlarını ve uygulamalarını anlamının pedagojik tavsiyelerin yayılması için önemli olduğunu fakat buna rağmen bu alanda yapılan çalışmaların az olduğunu belirtmiştir. Benzer şekilde bazı çalışmalar da (örn., Harel ve Sowder, 2007; Speer ve diğerleri, 2010) bu tür araştırmaların üniversitelerde az olduğundan yakınlıkla öğretim üyelerinin öğretim uygulamalarını gösteren çalışmaların yapılması için çağrıda bulunmuştur.

Lai ve Weber (2014) öğretmenlerin mevcut ispat uygulamaları ve görüşlerinin, onların ispat öğretiminde değer verdikleri ve ihtiyaç duydukları alanların belirlenmesine katkı sağlayacağını söylemiştir. Roy ve diğerleri (2010), matematik lisans öğrencilerinin ispat kavrayışı üzerinde üç farklı ispat sunumunun (kitapta yazılı ispat, bir öğretim görevlisi tarafından derste sunulan ispat, bilgisayar temelli e-ispat) etkililiğini araştırdıkları çalışmada canlı dersin yani bir öğretim görevlisinin ispatı anlatmasının, öğrencilerin ispat kavrayışı üzerinde diğer sunumlara göre anlamlı derecede büyük etkisi olduğunu ve en az etkili sunumun ise e-ispat olduğunu aktarmışlardır. Bu bağlamda, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat becerilerinin geliştirilmesini sağlayacak öneriler için öğretmenlerin uygulamalarının ve uygulamalarına yön veren görüşlerinin incelenmesinin önemli olduğu söylenebilir.

İspatın öğrenci boyutuna odaklanan çalışmalarda üniversite düzeyinde örneklemin yoğunluğuna paralel olarak öğretmen boyutuna odaklanan çalışmalarda da öğretim üyeleriyle ve lise matematik öğretmenleriyle olan araştırmaların daha yoğunlukta olduğu söylenebilir. Bununla birlikte bu çalışmalara kıyasla çok daha az olarak ortaokul öğretmenleriyle yapılmış çalışmalar da mevcuttur.

İspat ve ispatlama içeren çalışmalarda öğretmenlerin incelenmesi farklı açılardan ele alınmıştır. Bu çalışmalar kesin bir ayırım olmamak kaydıyla bu tezde şu şekilde gruplandırılarak ele alınmıştır:

1. Öğretmenlerin/matematikçilerin ispat yapma/okuma/değerlendirme/puanlama davranışlarını inceleyen çalışmalar

- a. Öğretmenlerin/matematikçilerin ve öğrencilerin ispat yapma/okuma/değerlendirme davranışlarının karşılaştıran çalışmalar
- b. Öğretmenlerin ispat yapma/okuma/değerlendirme bilgilerinin ölçen çalışmalar
2. Öğretmenlerin ispat öğretimine yönelik beyanlarını aktaran mülakat çalışmaları
3. Derste ispatın öğretimine yönelik öğretmenlerin uygulamalarını aktaran gözlem çalışmaları
 - a. Öğretmenlerin derste ispat sunma şekillerinin, pedagojik değerine veya öğrencilerin ispatlama becerilerindeki yansımalarına odaklanan gözlem çalışmaları
 - b. Öğretmenlerin derste bazı teoremleri ispatlamama durumlarına yönelik bulgular içeren çalışmalar
4. İspat öğretimine yönelik teorik çalışmalar

Bu bölüm yukarıdaki başlıklar dikkate alınarak oluşturulmuştur. Her bir bölümde literatürden ilgili çalışmalar ve sonuçlar sunulmuştur.

2.6.1. Öğretmenlerin İspat Yapma / Okuma / Değerlendirme / Puanlama Davranışları

Moore (2016), matematikçilerin iyi matematik yazmada önemli gördükleri özellikleri anlamının bir yolunun onların kendi ispat yazmalarını ve ispat sunumlarını incelemek olduğunu belirtmiştir. Matematikçilerin/matematik eğitimcilerinin ispat yaparken (bireysel olarak bir teoremi ispatlamaya çalışırken) neler yaptıklarına odaklanan çalışmaların (örn., Lockwood ve diğerleri, 2016; Mejia-Ramos ve Weber, 2014; Samkoff, Lai ve Weber, 2012; Weber, 2008; Weber ve Mejia-Ramos, 2011; Moore, 2016) öğretmenlere ve öğrencilere, uzmanların ispat yaparken neler yaptıklarını veya nelere dikkat ettiklerini göstermeyi amaçladığı söylenebilir. Bu çalışmalar genellikle etkinlik temelli mülakatlar içermektedir. Örneğin, Moore (2016), ispat değerlendirme uygulamaları ve iyi ispat yazımında değer verdikleri özellikleri araştırmayı amaçladığı çalışmasında 4 öğretim üyesi ile etkinlik temelli mülakatlar yapmıştır. Onlardan, lisans öğrencilerinin soyut matematik veya geometri derslerinde yazdıkları ispatları değerlendirip puanlamaları ve iyi ispat yazımında önemli gördükleri özellikleri, bu özellikleri sınıfta öğrencilerle nasıl konuştuklarını açıklamaları istenmiştir. Sonuç olarak yazar, ispat puanlamanın, hataların ciddiyetine ve hatalara sebebiyet veren öğrenci bilişlerine yönelik zor değerlendirmeler gerektiren kompleks bir öğretim uygulaması olduğunu belirtmiştir. İyi yazılmış bir ispatta bulunması gereken en önemli

özelliklerin mantıksal doğruluk, açıklık, akıcılık ve ispatın anlaşıldığının gösterilmesi olduğu konusunda çalışmadaki öğretim üyelerinin hemfikir olduklarını aktarmıştır.

Moore (2016)'un öğretim elemanlarından istediği eylemin öğrencinin bilgisinin değerlendirilmesi gibi pedagojik amaçlar içerdiği söylenebilirken, yine öğretim elemanlarının öğrencilerin anlayacağı bir ispat yazması gibi pedagojik amaçlarla başka çalışmaların yapıldığı görülmüştür. Örneğin, Samkoff ve diğerleri (2012), 8 öğretim üyesi ile etkinlik temelli mülakatlar yaparak onlardan, sinüs fonksiyonu ile ilgili bir teoreme matematik lisans öğrencilerine uygun bir ders kitabında yer alacak şekilde ispat yazmaları istenmiştir. Burada matematikçilerin ispatlarını ne ölçüde diyagramlara dayandırdıklarını ve diyagramları ispat yazarken hangi amaçlarla kullandıklarını incelemişlerdir. Diyagramları kullanma nedenleri: Matematiksel özellikleri fark etmek, mantıksal çıkarımları doğrulamak, fikirleri veya iddiaları temsil etmek ve ispat yaklaşımları önermektir.

Bahsedilen ilk iki çalışma dışında dolaylı yoldan pedagojik amaçlar içerdiği söylenebilen bazı çalışmalar da mevcuttur. Bu çalışmalarda matematikçilerin veya matematik eğitimcilerin ispat yaparken örnekleri nasıl kullandıkları (Lockwood ve diğerleri, 2016), ispatları neden ve nasıl okudukları (Mejia-Ramos ve Weber, 2014; Weber ve Mejia-Ramos, 2011) ve ispatın geçerliğini değerlendirmeleri (Weber, 2008) ele alınmıştır. Örneğin, Lockwood ve diğerleri (2016), matematikçilerin ispatla ilgili aktivitelerinde örneklerin rollerini incelemeyi amaçlamıştır. 220 matematikçiye ispat yaparken örnek kullanımlarını ve o örnekleri nasıl seçtiklerini sormuşlar ve bazıları ile de etkinlik temelli mülakatlar yaparak matematikçilerin ispatlamada kullandıkları örnek tiplerini ve bu örnekleri nasıl kullandıklarını açıklayan bir çerçeve oluşturmuşlardır. Derste örnek temelli muhakemenin sınırlılıklarının gösterilmeye çalışıldığı ve bu muhakeme türünün aşılması gereken bir güçlük olarak gösterildiği çalışmaların aksine örnek temelli muhakemenin ispatla ilgili düşünmeyi ve aktiviteleri nasıl destekleyebileceğini, matematikçilerin örnek kullanımlarıyla göstermek gerektiğini belirtmişlerdir.

Weber ve Mejia-Ramos (2011), 9 matematikçinin yayınlanmış bir ispatı neden ve nasıl okuduklarını incelemeyi amaçladıkları çalışmada verilen ispatı okurken kullandıkları stratejileri belirlemiştir. Bu araştırmanın bulgularını temel alarak internet tabanlı bir anket tasarlayan Mejia-Ramos ve Weber (2014) ise 118 matematikçinin de önceki bulgulara katıldığını bulmuştur.

Weber (2008), 8 matematik profesöründen, verilen bir argümanın geçerli ispat oluşturup oluşturmadığını değerlendirmelerini istemiştir. Sonuç olarak, Formel muhakeme,

informel tümdengelimci muhakeme ve örnek temelli muhakeme olmak üzere ispat değerlendirmede farklı muhakeme çeşitlerini kullandıklarını bulmuştur.

2.6.1.a. Öğretmenlerin İspat Yapma/Okuma/Değerlendirme Bilgilerinin  l  lmesi

Öğretmenlerin ispata yönelik davranışlarının incelendiği bazı çalışmalarda öğretmenlerin ispata yönelik yeterliklerinin veya ispata yönelik alan ve pedagojik alan bilgilerinin değerlendirildiği söylenebilir. Öğretmen bilgisini ölçmeyi amaçlayan bu çalışmaların ( rn., Arslantaş İlter, 2020; Giannakoulis, Mastorides, Potari, Zachariades, 2010; Steele ve Rogers, 2012; Tabach, Levenson, Barkai, Tirosh, Tsamir ve Dreyfus, 2010; Tabach, Barkai, Tsamir, Tirosh, Dreyfus ve Levenson, 2010; Tsamir, Tirosh, Dreyfus, Barkai ve Tabach, 2009), genellikle lise matematik öğretmenleri ile yapıldığından da söz etmek mümkündür. Örneğin, Tabach, Levenson, Barkai, Tirosh, Tsamir ve Dreyfus (2010), 50 lise matematik öğretmeninin verilen bazı teoremleri ispatlamalarını ve aynı teorem ifadeleri için verilen sayısal doğrulamaları değerlendirmelerini istemiştir. Sonuç olarak, öğretmenlerin, ispatlamada örneklerin ve karşı örneklerin rollerinin farkında oldukları bulunmuştur. Bununla birlikte, öğretmenlerin verdikleri cevapların öğretimsel açıklamalar da içerdiği ve bu açıklamalardan yola çıkararak öğretmenlerin,  ğrencilerinin ispatlamada örnek kullanımlarına yönelik farkındalıklarının daha az olduğu aktarılmıştır. Benzer şekilde, Tabach, Barkai, Tsamir, Tirosh, Dreyfus ve Levenson (2010), yine aynı örneklem üzerinde farklı sorularla yaptıkları araştırmada, öğretmenlerden bazı teoremleri ispatlamaları, bu teoremlere öğrencilerin yapacağı doğru ve yanlış ispatlar yazmaları ve verilen bazı ispatları değerlendirmeleri istenmiştir. Öğretmenlerin,  ğrencilerin sözel gerekçelendirme tercihlerinin farkında olmadıkları bulunmuştur. Tsamir ve diğerleri (2009) ise bir lise matematik öğretmeninin ispata yönelik alan bilgisinin yeterli olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Knuth (2002a), 16 lise matematik öğretmeninin ispat algısını mülakatlar yaparak ve ispatla ilgili yazar tarafından tasarlanmış etkinliklerdeki yazılı cevaplarını kullanarak incelemiştir. Çalışmada sonuç olarak, öğretmenlerin, ispatın matematikteki rollerinin farkında olmalarına rağmen ispatı matematik öğreniminde bir araç olarak görmedikleri, ispatın nelerden oluştuğuna yönelik bilgilerinin yetersiz olduğu ve sonuç olarak ispatla ilgili algılarının da sınırlı olduğu bulunmuştur. Giannakoulis ve diğerleri (2010), 18 lise matematik öğretmenine, öğrencilerin geçersiz cebirsel ispatlarını içeren farazi senaryolar vermiştir. Öğretmenlerden olası hataları belirlemeleri ve öğrencilerin bu geçersiz iddialarını nasıl   r teceklerini açıklamaları istenmiştir. Sonuç olarak, öğretmenlerin çok azının karşı

örnekleri kullandığını ve genel olarak öğretmenlerin ispat yöntemi olarak karşı örnek vermeyi önemsiz gördüklerini aktarmışlardır.

“Öğretim için matematik bilgisi” teorik çerçevesince 2 lise matematik öğretmenin *muhakeme ve ispatlamayı öğretme için matematik bilgisinin* ders gözlemleri ve çeşitli değerlendirmelerle incelendiği çalışmada Steele ve Rogers (2012), her iki öğretmenin de öğrencilerin ispatla ilgili yapabilecekleri ve yapmaları gereken çalışmaların temelini oluşturan belirli fikirlerinin olduğunu, ispatın çeşitli yönleri ve rolleriyle ilgili sağlam ispat bilgisine sahip olduklarını, ancak bu bilgiyi çok farklı şekillerde temsil eden dersler çıkardıklarını aktarmıştır. Öğretmenlerin sınıf etkinlikleri seçimlerinin, bu ispat bilgisinin belirli yönlerinin (teoremin neden doğru olduğunu açıklama ve matematiksel bilgiyi aktarma gibi) öğrencilere sunulması için fırsatlar sağladığını, her öğretmenin etkinliği uygulama yollarının, öğrencilerin etkinliğe göre konumlandırılma yöntemleri de dahil olmak üzere, öğrencilerin öğrenmesi için sağlanan ispatın fonksiyonlarını etkilediğini de eklemişlerdir.

Arslantaş İter (2020), tez çalışmasında ortaokul ve lise matematik öğretmenlerinin sözsüz ispat yapma becerilerini incelemiştir. Pisagor teoreminin (teorem verilmeden) görsel ispatının sunulduğu 20 öğretmenin çoğunun görseli daha önce gördüğünü belirttiğini ancak 8 öğretmenin bu görseli Pisagor teoremi ile ilişkilendirdiğini, bu öğretmenlerden de yalnızca 3 tanesinin bu ilişkiyi doğru açıklayabildiğini belirtmiştir. Teoremdeki eşitlik ve görsel birlikte verildiğinde ise teoremle görseli ilişkilendirebildikleri ve ispatı açıklayabildikleri aktarılmıştır.

2.6.1.b. Öğretmenlerin ve Öğrencilerin İspat Yapma/Okuma/Değerlendirme Davranışlarının Karşılaştırılması

Öğretmenlerin ve matematikçilerin ispat okurken değerlendirirken ve ispat yaparken neler yaptıklarını inceleyen çalışmaların bir kısmının öğrenciler ile öğretmenlerin ispat yapmaya çalışırken neler yaptıklarını karşılaştırdıkları görülmektedir (örn., Inglis ve Alcock, 2012; Knuth ve diğerleri, 2019; Lynch ve Lockwood, 2019; Öztürk ve Kaplan, 2019; Panse ve diğerleri, 2018; Turan, 2019). Örneğin, Öztürk ve Kaplan (2017), lise matematik öğretmenleri ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapma sürecindeki bilişsel becerilerini incelediği araştırmada, matematik öğretmenlerinin ispatlama becerileri ile bilişsel ve üst bilişsel beceri sayılarının öğretmen adaylarından daha yüksek olduğunu aktarmışlardır. Bu çalışmanın aynı zamanda öğretmenlerin ispat bilgisini ölçtüğü de söylenebilir.

Genellikle lise ve üniversite düzeylerinde karşılaştığımız bu tür karşılaştırma çalışmalarından örneklem yönünden ayrılan çalışmalardan da söz etmek mümkündür.

Örneğin, Turan (2019), matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin ve ortaokul matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerini ve argüman tercihlerini incelemiştir. Araştırmaya katılan 4 öğretmenden üçünün, sayılar öğrenme alanında verilen önermelere geçerli ispatlar oluşturabildikleri ve ispat değerlendirme becerilerinin de beklenen düzeyde olduğu bulunmuştur. Bununla birlikte, öğrencilerin ispatlama ve bir ispatı değerlendirme becerilerinin istenilen düzeyde olmadığı aktarılmıştır.

Farklı düzeylerden örneklem ile dikkat çeken Lynch ve Lockwood (2019), ispatlamada 38 öğrencinin (ortaokul, lise ve üniversite) örnek kullanımları ile 6 öğretim elemanının örnek kullanımlarını karşılaştırmak için etkinlik temelli mülakatlar yapmıştır. Sonuç olarak, öğrencilerin ve öğretmenlerin benzer türde örnekler seçmiş olmalarına rağmen matematikçilerin seçtikleri örneklerin istenilen amaçlara daha fazla uyum sağladığını bulmuşlardır. İki grup da örnekleri benzer mantıksal yapılara (hipotezi kontrol etme ve karşıt örnekler bulma) göre kullanmaya meyilli olsa da matematikçilerin, varsayımların yapılarına ve örneklerin bu yapılara nasıl uyacağına daha fazla hâkim oldukları söylenmiştir. Lynch ve Lockwood (2019) matematikçilerin bir iddianın akla uygunluğunu kontrol etmek, bir varsayımı daha iyi anlamak ve bir varsayımın ispatına yönelik iç görü kazanmak gibi amaçlarla örnekleri kullandıklarını belirlemişlerdir. Matematikçilerin örnek seçerken kullandıkları görülen kriter ve stratejiler ise şunlardır (Lynch ve Lockwood, 2019): (a) Karmaşıklık ve / veya genelliği artıracak örnekler, (b) Ekstrem ve sınır durumlar olarak çalışan örnekler, (c) Belirli matematiksel özelliklere sahip örnekler, (d) Belirli bir alana benzerliğe dayanan örneklerdir. Benzer şekilde, ispat öğreniminde örneklerin kullanımı ve rolünü etkinlik temelli mülakatlarla inceleyen Knuth ve diğerleri (2019) ortaokul, lise, üniversite öğrencileri (38 öğrenci) ve 13 matematikçi ile çalışarak ispatta örnek kullanımı ve örneklerin amaçlarına yönelik bir çerçeve sunmuşlardır.

Karşılaştırmayı farklı yöntemler kullanarak yapması nedeniyle yukarıdaki çalışmalardan ayrılan bir araştırmada Panse ve diğerleri (2018), öğrencilerin ve matematikçilerin bu etkinlikler esnasında göz hareketlerini incelemişlerdir. Bir ispatı anlamak için okuma ve bir ispatın doğruluğunu değerlendirmek için okuma davranışlarının birbirinden farklı olup olmadığını incelemeyi amaçlayan Panse ve diğerleri (2018), 16 matematikçi ve 16 üniversite öğrencisinden bir ispatı okuyup anlamalarını ve başka bir ispatın da doğruluğunu değerlendirmelerini istemişlerdir. Onlar okuma yaparken de göz hareketleri izlenmiştir. Okuma ve değerlendirme esnasında göz hareketlerinin hem matematikçilerde hem de öğrencilerde benzer davranışlar gösterdiğini aktarmışlardır. Göz hareketlerine değinen bir başka çalışmada Inglis ve Alcock (2012), 18 üniversite birinci sınıf öğrencisi ve 12

matematikçinin bir ispatın doğruluğunu değerlendirme davranışlarını karşılaştırmayı amaçlamıştır. Sonuç olarak, öğrencilerin geçerli ispatla geçersiz ispatı ayıramadığını ve öğrencilerin matematikçilere kıyasla değerlendirme yaparken formüllere odaklanmak için daha fazla zaman ayırdıklarını bulmuşlardır. Satırlar arasında kısa ve hızlı göz hareketlerinin matematikçilerde öğrencilerden daha fazla olduğunu ve satır arası ipuçları çıkarmak için matematikçilerin daha fazla efor harcadıklarını aktarmışlardır.

2.6.2. Öğretmenlerin Mülakatlarda İspat Öğretimine Yönelik Beyanları

İspat öğretimine ilişkin öğretmen beyanları, onların ispat kavramına, öğrencilerin ispatla ilgili durumlarına ve derste ispat sunumlarına yönelik fikirlerini içermektedir. Yani bu bölümde, öğretmenlerin, ispatın amacına, önemine, neden öğretildiğine yönelik fikirlerini, öğrencilerden ispatla ilgili beklentilerini, öğrencilerin ispatlama becerilerine ilişkin düşüncelerini, ispatın öğretimi uygulamalarına ilişkin önerilerini, ispata yönelik tutumlarını ve derste ispat anlatımlarına yönelik beyanlarını ele alan çalışmalar yer almaktadır.

Cilli-Turner (2017) ispatın işlevlerinin bağlama, içeriğe ve sunuma bağlı olarak çeşitlilik gösterebildiğini belirtmiştir. Matematikçiler için ispat, doğrulama (Hersh, 1993; de Villiers, 1999), açıklama (Hersh, 1993; Hanna, 1995), keşfetme (de Villiers, 1999), zihinsel meydan okuma/zorlama (de Villiers, 1999), sistematikleştirme (Bell, 1976; de Villiers, 1999) ve iletişim (Hanna, 1995; de Villiers, 1999; Harel ve Sowder, 2007) sağlayabilir. Derslerde neden ispat anlatılması gerektiği veya öğrencilerden ispatlama etkinliklerine neden katılması istendiği soruları da matematik eğitime bakan yönüyle ve pek çok yanıtla literatürde yer bulmaya devam etmektedir. Örneğin bir öğretmen ispatı öğrencilerini ikna etmek (Weber, 2002; Yopp, 2011; Knuth, 2002b), onlara ispatlamadaki fikirleri ve teknikleri öğretmek (Weber, 2002; Hanna ve Barbeau, 2008; Yopp, 2011; Weber, 2012; Cilli-Turner, 2017), diğer teoremleri ispatlamada faydalı olabilecek yaklaşımları (ispat yöntemlerini) örneklemek (Lew, Fukawa-Connelly, Mejía-Ramos, ve Weber, 2016), matematiğin yapısını göstermek (Cilli-Turner, 2017; Yopp, 2011), öğrencinin anlamasını arttırmak (Hanna, 1990; Hersh, 1993; Yopp, 2011; Weber, 2012); bazı önemli (tarihsel veya kültürel) ispatları tanıtmak (Weber, 2012), öğrencilerin matematiksel bilgi oluşturmalarını sağlamak (Knuth, 2002b), matematiksel düşünme becerilerini öğrencilere kazandırmak (Knuth, 2002b; Hemmi, 2010; Yopp, 2011), öğrencilerin düşünme süreçlerini açığa çıkarmak (Knuth, 2002b), ispatlama sürecinin nasıl olduğunu ve bir ispatın nasıl oluşturulabileceğini öğretmek (Weber, 2010;

Yopp, 2011), aksiyomatik bir yapının veya bir tanımın kullanımını göstermek (Weber, 2002) ve bazı önemli teoremleri vurgulamak için (Weber, 2012) sunabilir.

Öğretmenler ile gerçekleştirilen mülakatların ispat öğretiminin farklı noktalarına odaklandığı söylenebilir. Çalışmalarda, öğretmenlerin ispatın matematik eğitiminde amacına/önemine ve işlevlerine (örn., Hemmi, 2010; Yopp, 2011; Dickerson ve Doerr, 2014; Kotelawala, 2015), sınıf ortamlarında veya sınav sonuçlarında öğrencilerinde gözlemledikleri durumlara (örn., Polat, 2018; Taştepe, 2012) ve kendilerinin derste potansiyel veya reel ispat anlatımlarına (örn., Ayalon ve Hershkowitz, 2018; Dimmel ve Herbst, 2018; Ericson ve Herbst, 2018; Lai ve diğerleri, 2012; Miller, Infante ve Weber, 2018; Weber, 2012) yönelik görüşleri gibi farklı odak noktalarının varlığından söz edilebilir. Örneğin, Hemmi (2010) 13 matematikçi ile yaptığı mülakatlarda onların ispatı derste nasıl anlattıklarına yönelik pedagojik bakış açılarını ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Bu bakış açılarını yenilikçi stil, tümdengelimli stil ve klasik stil olmak üzere üç kategori altında toplamıştır. Öğretim elemanlarının ifadelerinin sınıflandırılmasında ispata yüklenen anlam, tümevarım/tümdengelim, sezgi/formellik ve görünürlük/görünmezlik bakış açılarını kullanmıştır. Bu stiller ve temel özellikleri şu şekilde özetlenebilir (Hemmi, 2010):

1. *Yenilikçi Stil*: Bu stile göre çok az öğrenci ispatı anlayabilir ve değerini bilebilir. Öğrencileri korkutmamak için ispattan ve hatta ispat kelimesinden kaçınılmalıdır. Öğrencilere matematik dersinde (sunumunda) tümevarımcı yaklaşım ve günlük dil tercih edilir. Öğretmenler belirli örneklerle başlamalıdır ve onlar yardımıyla mantıksal muhakemeler öğretilmelidir. Öğretimde anlamının artırılması en önemli amaçtır. Bu anlamda açıklama ispatın önemli bir fonksiyonudur. Genel sonuçlardan ziyade örneklerle çalışmak aynı zamanda ispatı hesaplamalarda gizlemek ve öğrencileri korkutamamak manasına da gelir. Ve öğrencileri formel matematikle karşı karşıya getirmek gereksiz görülür. Bu sebeptendir ki, uzun, teknik ve formel ispatlardan kaçınılmalıdır. Fakat gerekli/temel bazı şeyleri açıklayan ve öğrencilere bazı önemli deneyimleri yaşatan ispatları vermelidirler.
2. *Tümdengelimli Stil*: Bu stil öğrencilere ispatı öğretme amacındadır. Diğer stilin aksine bu stilde kişi ispat kavramı, soyutlamalar ve ifadelerdeki matematiksel sembollerden kaçınmaz. Öğrencilerin ispatı nasıl öğreneceği sorusu yenilikçi stilde yoktur çünkü öğrencilere ispat öğretme gayesi yoktur. Başından itibaren öğrenciler sembollere ve formel dile alışmalıdır. Öğrenciler başlangıçta ezberleyebilir ve sadece argümanları takip edebilir. Fakat aynı zamanda da oyunun kurallarını öğrenir. İspat öğrencilerin bilmesi gereken bir şeydir ve gerçek matematikle tanışmanın tam vaktidir. Yenilikçi

stilin aksine yani öğrencilerin ispat öğrenme gereksinimlerinin sorgulandığı stilin aksine bu stilde öğrencilerin neden ispat öğrenmesi gerektiği ile ilgili soruların cevabı nettir. İspat öğrenmenin ana sebebi ifadelerin doğruluğunu sorgulamayı öğretmek ve bir şeyin neden doğru olduğu sorusuna cevap alındığında ikna olmaktır. Bu ispatın doğrulama/ikna fonksiyonuna karşılık gelir. Öğrencilere eleştirel düşünmeyi öğretmek ve bir ifadenin doğruluğunu sorgulamayı öğretmek önemlidir. Bu stildeki görüşlere göre ispat çalışmak (teknik olanları bile) problem çözmede faydalı yöntemler öğretir. Bu da “transfer” fonksiyonuna karşılık gelir. Bu stile göre ispat öğrenme fazla zaman ve egzersiz gerektirir. İspata ihtiyaç duyana kadar öğrencilerin deneyimlerinin beklenmesi yerine matematikçiler ona ihtiyaç görüldüğünde onlara anlatmalıdır. Başlangıçta anlamasalar bile öğrencilerin matematiksel dille karşılaştıklarında onlara alışacakları kabul edilmektedir. Bu stile göre doğru anlatım yapılırsa öğrenciler ispatı anlamayı ve soyut düşünmeyi öğrenmeyi becerebilirler.

3. *Klasik Stil:* Bu stilde ispata büyük bir hayranlık vardır. İspat matematiğin temel bir parçası olarak görülür. İspatlar güzel olabilir ve zihinsel meydan okuma sunabilir. Bu stile göre ispat öğrenmenin sadece matematikçiler için değil, herkes için faydası vardır. Çünkü ispat bize mantıksal muhakemeyi öğretir. Tüm bunlara rağmen bu stilde öğrencilere ispat öğretme amacı pek yoktur. Özellikle de temel derslerde dışsal sebeplerden ötürü (örneğin; öğrencinin önceki bilgilerinin eksikliği ve zaman kısıtı). Öğrencilerin ilgileri, önceki bilgileri ve zaman eksikliği sebebiyle onlar kendilerinin takdir ettikleri bazı ispatları verirler. 2. stil ve 3. stil arasında öğrenciye karşı aynı duyarlılık yoktur. Vakit varsa zarif ve güzel olduğu düşünülen ispat verilir. Öğrencinin ispatın zarifliğini anlayıp anlamaması sorun değildir. Yenilikçi stilin aksine klasik stilde ispatı öğrenme birçok dal için önemli görülür ve herkes ispat çalışarak mantıksal muhakemeyi öğrenebilir ve ondan faydalanabilir. Sunum bazen sezgisel fakat çoğunlukla tümdengelimli özelliktedir yani bir ispatı başka bir matematikçiye sunmak gibidir. Öğrencilere ilham vermek için büyük idealleri taşıma arzusu vardır. Tümdengelimli stilin aksine matematiğin sunumu görüldüğü kadar önemli değildir. Öğrencilere ispatın ana noktaları ve adımlarını göstermek yeterlidir ve detayları kendilerinin doldurmalarına izin vermek önemlidir.

Hemmi (2010) gibi derste ispatların nasıl anlatıldığından ziyade neden yapıldığına odaklanan Yopp (2011), 14 öğretim elemanı ile mülakat yaparak matematik derslerinde ispat ve ispatlamanın rolleri ve amaçlarının, dersin tipi, dersi veren kişi ve derste dinleyici/öğrenci

olmak üzere 3 kategoride çeşitlendiğini belirtmiştir. Ayrıca öğretmenin ispatı kullanma amaçlarını da şu şekilde kategorilendirmiştir (Yopp, 2011):

1. İçeriğe yönelik amaçlar: Öğrencilerin matematikle ilgili bilgileri, anlayışları, yetenekleri, tutumları ve inançlarını geliştirmek için ispat ve ispatlamayı içeren planlardır.

2. Değerlendirme amaçları: Öğrencilerin, bilgileri, anlayışları, yetenekleri, tutumları ve inançlarını ölçmek için ispat ve ispatlamayı içeren planlardır.

3. Yardımcı amaçlar: Geleneksel matematiksel kapsamı ve pedagojik çıktıları hedef almayan çıktılar/sonuçlar için ispat ve ispatlama içeren planlardır.

İspat okuma amacına değinen Weber (2010), 9 matematikçi ile mesleki olarak ispat okumaları (diğer matematikçiler tarafından yayınlanan ispatları okuma nedenleri) üzerine mülakat yapmıştır. Matematikçilerin hepsi yayınlanan ispatları okumanın ilgi alanlarındaki matematiksel problemler ile ilgili olarak yeni düşünme yolları sağladığını belirtmiştir. Bu yeni düşünme yolları ise matematiksel alanları yeniden anlama ve yeni ispat teknikleri öğrenme olmak üzere iki kategoriye ayrılmıştır. Weber (2010) matematikçilerin kendilerinin ispat okumalarına ilişkin görüşlerini aktarırken Weber ve Mejia-Ramos (2014) derste sunulan ispatın nasıl okunması gerektiğine ilişkin öğretmenlerin ve öğrencilerin beklentilerini karşılaştırmıştır. Weber ve Mejia-Ramos (2014), matematik lisans öğrencilerinin derslerde sunulan ispatlardan çok az şey öğrendiklerini aktarmış ve bunun sebebinin de öğrencilerin ve eğitimcilerin ispat okumaya ilişkin örtük beklentilerindeki farklılıklardan kaynaklandığı sonucuna varmıştır. Öğretim elemanlarının, öğrencilerin derste sunulan ispatları okumalarına yönelik beklentileri şunlardır: Öğrencilerin derste sunulan ispatları incelemek/anlamak için 15 dakikadan fazla zaman harcamaları gerekmektedir, bir ispatı anlamak ispattaki her adımı doğrulamaktan daha fazlasını içermektedir, iyi bir ispat okuma pasif bir süreç değildir ve alt ispatlar ve diyagramlar oluşturmak gerekmektedir.

Öğretim elemanlarının yanı sıra lise öğretmenlerinin de derste ispatın rolleri, önemi ve ispata yönelik tutumlarına ilişkin görüşleri incelenmiştir. Örneğin, Dickerson ve Doerr (2014), 17 lise matematik öğretmeni ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yaparak öğretmenlerin ispatın matematik derslerindeki amaçlarına yönelik görüşlerini almıştır. Sonuç olarak, öğretmenlerin en önemli gördüğü amaçlardan birinin öğrencilerin matematik anlamasını arttırmak ve ikincisinin ise genellenebilir düşünme becerilerini geliştirmek olduğu görülmüştür. Ayrıca öğretmenlerin ispatla ilgili görüşlerinin çok farklılaştığını aktarmışlardır. Kotelawala (2015) ise lise matematik öğretmenlerinin öğretimlerinde ispata yönelik bakış açıları, tutumları, ispatlamayı öncelikli görüp görmedikleri ve önceliklerini nelerin etkilediğini araştırmak üzere çeşitli çalışmalardan aldığı soruları derleyerek oluşturduğu likert tipi anketi

78 lise matematik öğretmenine uygulamıştır. Sonuç olarak öğretmenlerin tutumlarının genel olarak kaygılı olduğunu, çoğunun ispatlamayı matematikte önemli gördüğünü ancak %30'unun derste ispatlamaya öncelik verdiğini bulmuştur. Knuth (2002b), mülakat yaptığı 17 deneyimli lise matematik öğretmenin okul bağlamında hem ispatın doğası ve rolü hakkındaki görüşlerine hem de matematik ve öğrenciler için ispat beklentilerine odaklanmıştır. Öğretmenler ispatın okul matematiğinde öğrencilerin mantıksal düşünme becerilerini geliştirmek, bir ifadenin neden doğru olduğunu göstermek, matematiksel bilgi oluşturmak ve öğrencilerin düşünme süreçlerini açığa çıkarmak gibi rolleri olduğunu ifade etmişlerdir (Knuth, 2002b). Bununla birlikte, ispatın okul matematiğinde, çoğu disiplindeki işlevlerini yansıtan birkaç önemli işlevi olduğunu düşünme eğiliminde olsalar da öğretmenlerin, ispatı çok az öğrencinin matematik eğitimi için uygun gördükleri ve pedagojik olarak sınırlı bir şekilde, yani matematiği iletmek ve çalışmak için bir araçtan ziyade bir çalışma konusu olarak görme eğiliminde oldukları bulunmuştur. Mülakatlar esnasında öğretmenlere ayrıca çeşitli önermeler için farklı araştırmacılar tarafından oluşturulmuş argümanlar sunulmuş, ardından argümanları öğretimsel uygunluğu açısından değerlendirmeleri ve bu değerlendirmelerinin gerekçelerini belirtmeleri de istenmiştir. Sonuç olarak, öğretmenlerin çoğunun neyin ispat olduğuna ilişkin görüşlerinin çok sınırlı olduğu da aktarılmıştır.

Öğretmenlerin reel uygulamalarının gözlenmediği durumlarda derste yaptıklarını veya potansiyel olarak yapabileceklerini açıklamalarının incelendiği çalışmaların da yaygın olduğu söylenebilir. Örneğin, Weber (2012), matematik bölümünden 9 öğretim elemanı ile yaptığı mülakatta, onlardan ispatları derste neden ve nasıl sunduklarını anlatmalarını istemiştir. Öğretim elemanlarının, öğrencilerin ispatları anlamada yaşadığı güçlüklerle yönelik görüşlerini, derste ispat anlatmalarının nedenlerini, ispat anlatırken kullandıkları pedagojik teknikleri ve öğrencilerin ispatı anlayıp anlamadığını nasıl değerlendirdiklerini sormuştur. Öğretim elemanlarının derste ispatları yalnızca ikna etme işleviyle değil aynı zamanda anlamayı arttırma, ispatlama süreçlerini ve tekniklerini gösterme, akıl yürütmeyi öğretme, öğrencileri tarihsel veya kültürel açıdan önemli ispatlarla tanıştırma amaçlarıyla ispatları sunduklarını aktarmıştır. Bununla birlikte Weber (2012), matematikçilerin hedeflerine ulaşmak için pedagojik stratejilerden yoksun göründüklerini de belirtmiştir. Öğretim elemanlarının öğrencilerin bağımsız ispat okumalarına önemli miktarda zaman harcamalarını beklediklerini ve dahası, öğrencilere bunu yaparken yardımcı olabilecek çeşitli aktiviteler önerdikleri ama genellikle öğrencileri bu önerilen faaliyetlere katılmaya teşvik edecek pedagojik eylemler gerçekleştirmediklerini de eklemiştir. Öğretim elemanlarının, öğrencilerin bir ispatı okumadaki kompleks sürecin değerini anlamadığını düşündüklerini, bununla birlikte

öğrencilere bu süreçleri öğretmediklerini, öğrencilerin ispatı anlayıp anlamadığını değerlendirmek için yüzeysel yöntemler kullandıklarını ve tüm öğrencilere matematiği öğretmede en iyi yolun ispat olup olmadığını bazı öğretim elemanlarının sorguladıklarını aktarmıştır. Weber (2012), görüştüğü matematikçilerin "dahil oldukları belirli stratejileri adlandırebildiklerini ancak bu stratejileri gerçekte nasıl uyguladıklarına ilişkin bilgilerinin büyük ölçüde örtük olduğunu" ve sonuç olarak "öğrencilere çok az rehberlik sağladıklarını" belirtmiştir (s. 479). Ek olarak, öğretmenlerin, öğrencilerin bir ispatı anlamalarını değerlendirmek için yeterli yöntemlerden yoksun olduklarını kendilerinin kabul ettiklerini söylemiştir.

Lai ve Weber (2014) 10 matematikçi ile etkinlik temelli mülakatlar yapmış ve bu etkinliklerde onlardan verilen bir teoreme 2. veya 3. sınıf öğrencilerine uygun olacak şekilde ispat yapmaları ve verilen başka bir ispatı da yine aynı amaçla düzenlemeleri istemişlerdir. Sonuç olarak, hedef kitlenin ve ortamın (ders veya ders kitabı) ispat sunumunu etkilediğini ve matematikçilerin genel olarak diyagramlar içeren ve ana fikirleri vurgulayan pedagojik ispatlara değer vermelerine rağmen, bu matematikçilerin oluşturdukları veya düzenledikleri ispatlara her zaman bu yönleri dahil etmediklerini de aktarmışlardır.

Çalışmalar ayrıca öğretmenlerin pedagojik kalitelerini geliştirmek için ders sunumları sırasında ispatları derse uyarlamalarının çeşitli yollarını da tanımlamıştır. Örneğin, matematikçilerin pedagojik olarak iyi ispatın özelliklerine yönelik bakış açıları üzerine iki aşamalı bir çalışma yürüten Lai ve diğerleri (2012), pedagojik ispat ifadesi ile öğrencilere pedagojik amaçlarla öğretilebilecek /sunulabilecek ispatı kastettiklerini belirtmişlerdir. Birinci aşamada, 8 matematikçiden, onlara verilen iki ispat üzerinde pedagojik olarak iyi bir ispat haline gelmesi için değişiklik yapmaları istenmiş ve sonra bu değişiklikler kategorilendirilmiştir. Öğretmenlerin ispatların örtük mantıksal yapısını ortaya çıkarmak için varsayım ve sonuçlarının altını çizerek ispatları düzenledikleri ve ayrıca, öğrencilerin zorlayıcı bulabileceği mantıksal boşlukları doldurmak için gerekçeler ekleyerek veya öğrencilerin daha aşına ve rahat oldukları ispat tekniklerini kullanarak, ispatları belirli hedef kitlelere göre ayarladıkları aktarılmıştır. İkinci aşamada ise internet üzerinde 110 matematikçiden bu değişiklikleri değerlendirmesi istenmiştir. Bu nicel çalışma, matematikçiler arasında pedagojik amaçlar için ispatları nasıl revize edeceklerine ilişkin bir fikir birliği olduğunu göstererek birinci aşamanın bulgularını doğrulamıştır.

Miller ve diğerleri (2018) çalışmalarında ispata giriş dersini veren 9 öğretim elemanı ile etkinlik temelli mülakatlar gerçekleştirmiştir. Bu mülakatlarda bir öğretim elemanının derste anlattığı söylenen ispatın doğruluğunu ve pedagojik olarak kalitesini değerlendirmeleri

ve öğrencilerin ödev olarak yaptığı söylenen ispatların doğruluğunu değerlendirip puanlaması istenmiştir. Ayrıca her bir katılımcıya derste ispat uygulamaları ile ilgili sorular sorulmuştur. Sonuç olarak, doğru olarak kabul edilen ispata verilen puanların farklılık gösterebildiği ve öğrencilerin anlayış şekillerine göre puanlar verildiği bulunmuştur.

Öğretmenlerin derslerindeki potansiyel uygulamalarını keşfetmek için gözlem yapılmadan mülakatlarda “hazırlanmış öğretim senaryoları” üzerinden sorular sorulduğu da söylenebilir. Örneğin, Ericson ve Herbst (2018), 42 lise matematik öğretmenin geometri dersinde öğrencilerin ispata katılımlarını sağlarken onlara tartışma/konuşma fırsatı oluşturup oluşturmadıklarını araştırmışlardır. Bu araştırmada, öğretim senaryoları kullanılarak öğretmenlerle görüşmeler yapılmış ve bu senaryolara göre neler yapacakları ve nedenleri sorulmuştur. Sonuç olarak öğretmenlerin çoğunun küçük grup veya tüm sınıf tartışmalarını teşvik eden uygulamaları onayladıkları yani genellikle derslerinde tartışmayı destekledikleri görülmüştür. Ayalon ve Hershkowitz (2018) ise reform temelli müfredatla bilgi ve uygulamalarını zenginleştirmeye yönelik bir yıldır hizmet içi eğitim almakta olan 17 ortaokul matematik öğretmenin, derste gerekçelendirmeyi destekleyen potansiyel öğretim uygulamalarını incelemişlerdir. Bu öğretmenlerden hepsinin kullandığı bir ders kitabından onlara göre öğrencileri gerekçelendirmeye yönlendiren, bunun için onları cesaretlendiren ve gerekçelerini değerlendirmelerini sağlayan üç etkinlik seçmeleri istenmiştir. Bir anket ile hangi etkinliği neden seçtikleri de sorulmuştur. Sonuç olarak öğretmenlerin etkinliğin içerdiği matematiksel gerekçeler, gerekçelendirmenin sosyal yönü (sınıf tartışması veya öğretmen öğrenci etkileşimi gerektirmesi) ve öğrencilere sağlayacağı düşünme yolları açılarından etkinlikleri değerlendirdikleri aktarılmıştır.

Taştepe (2012) öğretim elemanlarının ve öğrencilerin ispata ve ders kitaplarına ilişkin görüş ve düşüncelerini incelediği tez çalışmasında, Soyut Matematik dersine giren veya ispata ilişkin çalışmalarda bulunan 5 öğretim elemanı ile görüşme yapmıştır. Ayrıca Soyut Matematik dersinde kullanılan 5 ders kitabındaki ispatları da Balacheff (1988)’in taksonomisi ile analiz etmiştir. Sonuç olarak, mülakat yapılan öğretim üyeleri, derslerinde ispat yapmaya önem verdiklerini, öğrencilerin ispat yapma yeterliğine sahip olması gerektiğini ama yetersiz olduklarını, ispatı genel olarak ezberlemeye çalıştıklarını ve ispat yapmaya yönelik tedirginlik yaşadıklarını belirtmişlerdir. Öneri olarak da ispat öğretiminin üniversiteden önce başlaması gerektiğini söylemişlerdir (Taştepe, 2012).

2.6.3. Öğretmenlerin İspata Yönelik Gözlemlenen Öğretim Uygulamaları

Önceki iki bölümde öğretmenlerle yapılan görüşme veya etkinlik temelli mülakatların sonuçları aktarılmıştır. Bu bölümde ise öğretmenlerin ispat öğretimlerine yönelik sınıf uygulamalarının analizlerini içeren deneysel çalışmalara ve bu çalışmaların sonuçlarına odaklanılmıştır. "Öğretim", öğretmenlerin öğrencileriyle ve müfredat materyalleriyle yaptığı her şeyi ifade edebilen geniş bir terimdir (Speer ve diğerleri, 2010). Öğretim uygulamaları ifadesi, öğretmenlerin öğrenci öğrenimini organize etmek için kullandıkları etkinlik yapılarından (örn., küçük grup tartışması, problem çözme vb.) ziyade öğretmenlerin bu yapıları kullanırken yaptıkları belirli işleri (örn., etkinlikleri seçme, öğrencilere sorular sorma vb.) ifade etmek için kullanılmıştır (Speer ve diğerleri, 2010).

Öğretmenlerin dersteki uygulamalarına yönelik çalışmalarda ders gözlemlerinin genellikle lise ve üniversite matematik derslerinde yoğunlaştığı söylenebilir. Bununla birlikte nispeten çok az da olsa ortaokul öğretmenleriyle yapılan (örn., Bieda, 2010; Mata-Pereira ve Ponte, 2017) araştırmalar da bulunmaktadır. Öğretmenlerin ispat öğretim uygulamalarına ilişkin çalışmalar araştırma konularını baz alarak şu şekilde başlıklar halinde incelenmiştir:

- a. Öğretmenlerin derste ispat sunma şekillerinin pedagojik değerine veya öğrencilerin ispatlama becerilerindeki yansımalarına odaklanan gözlem çalışmaları (örn., Bieda, 2010; Fukawa-Connelly, 2012a, 2014, 2016; Gabel ve Dreyfus, 2017; Harel ve Rabin, 2010; Herbst, 2002; Lew ve diğerleri, 2016; Martin ve McCrone, 2003; Martin, McCrone, Wallace Bower ve Dindyal, 2005; Mata-Pereira ve Ponte, 2017; Mills, 2014; Otten, Bleiler-Baxter ve Engledowl, 2017; Pinto ve Karsenty, 2018; Stylianides, 2011; Uğurel, 2010; Weber, 2004),
- b. Öğretmenlerin derste bazı teoremleri ispatlamama durumlarına yönelik bulgular içeren çalışmalar (örn., Herbst ve Miyakawa, 2008; Hersh, 1993; Knuth, 2002b; Lai ve Weber, 2014)

Bu kategoriler, çalışmalar ve sonuçlarıyla birlikte alt başlıklar halinde aşağıda açıklanmıştır.

2.6.3.a. Öğretmenlerin Derste İspat Anlatımlarının Pedagojik Değerine veya Öğrencilerin İspatlama Becerilerindeki Yansımalarına Odaklanan Çalışmalar

Öğretmenlerin derste ispat sunma şekillerinin veya kullandıkları yöntemlerin pedagojik değeri, bazı çalışmalarda öğrencilerin belirli becerileri üzerindeki etkileri araştırılarak bazı çalışmalarda ise mevcut veya yeni geliştirilen çeşitli teorik çerçevelerle değerlendirilmiştir. Örneğin, Stylianides (2011), Gabel ve Dreyfus (2017), Pinto ve Karsenty (2018) ve Lew ve diğerleri (2016) dersin öğretmeni veya araştırmacı tarafından tasarlanan öğretim uygulamalarını incelemişlerdir. Stylianides (2011), deneysel argümanların ispat olduğu şeklindeki yaygın ve köklü öğrenci yanılgılarının giderilmesine odaklanmış ve ispatı öğretmek için daha önce tasarladıkları bir bilgi paketinin (Stylianides ve Stylianides, 2009b) geliştirilmesine katkıda bulunmayı amaçlamıştır. Planladığı öğretim deneyinde etkinliklerin seçiminin ve sıralamasının önemli olduğu, bu seçimlerle ve sıralamalarla ispat alanında öğrenciler için önemli karşı örnekler aracılığıyla bilişsel çatışmalar oluşturulabileceğine dair deneysel olarak test edilmiş teorik bir çerçeve kullanmıştır. Bununla birlikte etkinliklerin seçiminin ve sırasının tek başına yeterli olmadığını ve bunların başarıyla uygulanmasında öğretmenlerin etkinlikleri uygulama şekillerinin de önemli olduğunu belirtmiştir. Özellikle, öğrencilerin müdahale sırasında farklı aşamalarındaki ispat kavramlarının daha fazla farkına varmalarına yardımcı olmak için, öğretmen (ders planlarını takiben) "kavramsal farkındalık sütunları" (öğrencilerin dikkatini belirli bir matematiksel konu hakkındaki kavramlara yöneltmeyi amaçlayan öğretim etkinlikleri) kullanmıştır. Bahsi geçen öğretmen eylemlerini, etkinlik seçimlerini ve sıralamasını da içerecek şekilde tasarladığı bilgi paketi kavramını genel olarak öğretmenlerin etkili bir şekilde öğretmek için önemli olan ilgili bilgi türleri (matematik, öğrenciler ve pedagoji hakkında) olarak tanımlamıştır. Tanımlanan pedagojik bilgilerin temelini oluşturan *temel karşı örnekler* ve *kavramsal farkındalık sütunları* kavramlarının kalıcı kavram yanılgılarının olduğu diğer alanlarda da uygulanabileceğini ve bu çerçeveyi temel alarak hazırlanan detaylı ders planlarına uyarak ders işleyen bir lise öğretmenin öğrencilerinin bahsedilen güçlükleri aşmaya başlamasında etkili olduğunu aktarmıştır.

Stlianides'in (2011) ispat öğretimini daha verimli kılmak için geliştirdikleri teorik çerçeveyi bir öğretim uygulaması ile daha kapsamlı hale getirdiği söylenebilir. Benzer şekilde Gabel ve Dreyfus (2017), bir öğretim elemanının ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına arka arkaya iki yıl verdiği bir Sayılar Kuramı dersinde "ispat akışına" yapılan müdahalelerin etkilerini göstermeyi amaçlamıştır. "İspat akışı" kavramını, ispatın mantıksal yapısının nasıl sunulduğunu, örnekler, sezgiler ve diyagramlar gibi gayri resmi özelliklerin ispat sunumuna nasıl dahil edildiğini ve ispatta matematiksel ve pedagojik faktörlerin seçimlerini içerecek

şekilde tanımlayan Gabel ve Dreyfus (2017), bir ispatın, öğretmenin sunumuyla ilgili tercihlerine bağlı olarak farklı akışlara sahip olabileceğini de eklemiştir. Amaçları, bir ispat sunumunu neyin açık ve etkili kıldığını ve ardından istenen etkiyi elde etmek için hangi müdahalenin gerekli olabileceğini değerlendirmektir. Ders gözlemi ve mülakatlarla tespit ettikleri ispat akışını Perelman'ın Yeni Retoriğini (PNR) teorik çerçevesini kullanarak hem küresel bir perspektiften (bir ispatı ayrı modüllere ayırarak) hem de yerel bir perspektiften (ispattaki resmi veya gayri resmi tekil argümanları inceleyerek) analiz etmişlerdir. Özellikle, PNR'nin *kapsam*, (örn., bir öğretim elemanının hitap edilen kitleye göre bir ispatın sunumundaki yoğunluğu nasıl düzenleyebileceği) ve *mevcudiyet*, (örn., öğretim elemanının ne derece vurgu veya tekrar sıklığı yaptığı) özelliklerini kullanarak ispatın akışını değerlendirmişlerdir. Gözlemlenen öğretim elemanından elde edilen 1. yıldaki bulgulara dayanarak 2. yıl dersten önce ders akışında gerekli görülen değişiklikleri yapmışlardır. Bu değişiklikler: İspatın modülleri arasında daha yumuşak geçişler yapılması, ispat adımlarında hangi seçimin neden yapıldığının aydınlatılması ve seçimlerin belirgin hale getirilmesi, ispat yapısının netleştirilmesi, ispata yol açan soru dizilerinin kullanılması, çok önemli olduğu düşünülen fikirlerin öğrenciler için daha açık hale gelecek şekilde vurgulanmasıdır. Analizler sonucunda, yapılan müdahalenin ispat akışında yerel ve bütünsel değişikliklere neden olduğu ve ispatı daha açıklayıcı hale getirdiği bulgusuna ulaşmışlardır. Burada bu ders akışına yapılan müdahalenin öğrencilerin ispat anlayışına olumlu etkileri olacağını varsaymalarına rağmen bunu araştırmamışlardır.

İspat akışı kavramı gibi ama biraz daha geniş bir perspektif ile dersin geneli için bu tür bir şema çıkarmaya çalışan Pinto ve Karsenty (2018), mülakatlar ve sınıf gözlemleri temelinde, bir öğretim elemanının *ders imajını* (ders boyunca sınıf içinde ve dışında, öğretme ve öğrenme etkinliklerine yönelik planlarını) inceledikleri çalışmalarında, öğrencilerinin kendi kendilerine ispat öğrenmelerini desteklemek isteyen bu öğretim elemanının derste ispat sunumuna yönelik açık ve örtük eylem planlarının pedagojik gerekçelerini aydınlatmayı amaçlamışlardır. Öğretim elemanı, ispat öğretme eylem planları ve amaçlarını şu şekilde deklare etmiştir: Sınıftaki ispatların sunumu, öğrenciler için teorinin temellerini oluşturur; ödevler, öğrencilerin ispat öğrenmeleri için bir yol haritası sağlar ve öğrenci çalışmalarıyla ilgili geri bildirim, öğrencilerin doğru yolda gitmesine yardımcı olur. Burada öğretim elemanının ispat sunmanın asıl amacının öğrencileri iddiaların doğru olduğuna ikna etmek değil, daha çok öğrencilerin teoriyi anlamalarına yardımcı olmak olduğu belirlenmiştir. Öğretim elemanının, genellikle öğrencilerin dersler sırasında ispatları anlamalarını beklemediği, bunun yerine, öğrencilerin, ispat okuma/yapma ve problem çözme konusundaki

kendi katılımlarıyla, zaman içinde sınıf dışında anlayışlarını geliştirmelerini beklediği aktarılmıştır. Sonuç olarak, öğretim elemanının derslerde ispat sunumları, haftalık ev ödevleri ve öğrencilere çalışmaları hakkında sağladığı geri bildirimlerin, öğrencilerin bağımsız öğrenmelerine engel olabilecek yönlerden kurtulacak şekilde planlandığı belirtilmiştir. Bununla birlikte, Gabel ve Dreyfus (2017) gibi Pinto ve Karsenty (2018) de öğrencilere yönelik bir analiz yapmamışlardır.

Öğrencilerin ispatları sunduğu ve sınıfın bu ispatların değerlendirilmesini tartıştığı öğretim ortamını gösteren bir durum çalışmasını inceleyen Fukawa-Connelly (2012b), sosyomatematiksel normlar olarak adlandırılan matematik disiplinine has ders uygulamalarının (örn., “bir ispat veya iyi bir açıklama nelerden oluşur?” gibi) neler olduğunu betimlemeyi amaçlamıştır. Matematik ve eğitim alanlarında görev yapan bir öğretim elemanının Soyut Cebir dersinde video kaydı ile ders gözlemi yapılmıştır. Ayrıca dersin yapısı ve amaçlarıyla ilgili görüşlerini almak amacıyla 7 öğrenci ile görüşme de yapmıştır. Sonuç olarak matematik sınıf normları: Problemlerde sorumluluk alma, kendi çalışmasını açıklama ve savunma, sorulara cevap verme, dikkatlice okuma, sorular sorma, birlikte çalışma, kendini ikna etme, yalnızca akran tarafından değerlendirilmiş bilgiyi kullanma, yüksek seviyeli fikirleri tartışmanın odak noktası yapma, eski çıkarımlara dayanan yeni çıkarımları doğrulama olarak tespit edilmiştir. Bu normların öğrencileri yönelttiği davranışların, literatürdeki çalışmaların ispatların anlaşılmasını arttıracaklarını önerdiği davranışlar olduğunu dolayısıyla normların, öğrencilerin ispat yazmada yetenekli hale gelme ve ispatı anlama amaçlarını desteklediğini aktarmıştır.

Her ne kadar birçok öğretim uygulamasının başarılı sonuç verdiğine /verebileceğine yönelik sonuçlar veya varsayımlar paylaşılsa da bazı durumlarda öğretmenin yanlış uygulamalarına (örn. Bieda, 2010; Fukawa-Connelly, 2014, Uğurel, 2010) veya öğretim çok iyi planlansa ve uygulansa da sonucunun verimli olmadığına (örn., Lew ve diğerleri, 2016) örnekler de vardır. Bieda (2010), NCTM standartlarına uymak için geliştirilmiş bir müfredata dayalı derste, bu müfredatı uygulamaya yönelik eğitim almış 6 deneyimli öğretmenin (6,7 ve 8. sınıf) sınıfında ispata ilişkin etkinliklerde öğretmen ve öğrencilerin katılımını incelemeyi amaçlamıştır. Sonuçlar, öğrencilerin ispatlama ile ilgili görevlere ispatlama fırsatları oluşturan varsayımlar sunarak düzenli olarak yanıt verdiklerini, öğrencilerin varsayımların neredeyse yarısı için gerekçeler sunduklarını ve bunların da ispatlamayla sonuçlandığını göstermektedir. Öğrenciler düzenli olarak ispata ilgili etkinliklere dahil olsalar da gözlemlenen sınıftaki öğretmenler, öğrencilerin varsayımları ve/veya gerekçeleri hakkındaki tartışmaları sürdürmek için yeterli geri bildirim sağlamamışlardır. Ayrıca, ders uygulamaları için birincil hedefleri

hakkındaki ifadeleri, öğrencilerin gerekçelendirme ve ispat üretme yeteneklerine şüpheyile yaklaştıklarını ve matematiği kavramsal olarak anlayıp anlayamayacaklarına dair bazı tereddütlerinin olduğunu göstermiştir. Ayrıca, öğretmenler, 39 gözlemden sadece 6'sında ispata ilişkin etkinlikleri önemli olarak belirlemişlerdir. Bu çalışma, en iyi koşullarda bile (yeterli deneyime sahip ve profesyonel gelişimi olan öğretmenler, gerekçelendirme ve ispat için çok sayıda fırsat sunan bir müfredat kullanarak) öğrencilerin ortaokul düzeyinde gerekçelendirme ve ispat anlayışını destekleyen öğretimin oldukça yüzeysel olduğunu göstermektedir. Bieda (2010), bu sonuçların, iyi bir müfredat ve eğitim almış deneyimli öğretmenlerin gözlemlerinden elde edilen verilere dayandığı ve NCTM Standartlara uymak için geliştirilmemiş müfredatı kullanan sınıflarda veya bunun için eğitim almamış ve deneyimsiz öğretmenlerin muhakeme ve ispatlamada daha yüzeysel deneyimler beklenebileceğini öngörmüştür.

Bir öğretim elemanının Soyut Cebir dersinde ispat anlatımını inceleyip Toulmin'in argümantasyon şemasını kullanarak analiz yapan Fukawa-Connelly (2014), öğretim elemanının veri ile iddia arasındaki gerekçeleri (haklı nedenleri) nadiren yazmasının, sunduğu ispatların olası pedagojik değerinin düşmesine neden olduğunu belirtmiştir. Öğretim elemanının ispatı sunarken sesli şekilde söylediği detayların, yazdıklarından farklı olduğunu aktarmış ve sonuç olarak, öğretim elemanının sözlü yorumu (örneğin ispat yazmayı destekleyen düşünceyi modellemesi gibi) ek ayrıntılar sağlasa ve pedagojik değere sahip gibi görünse de bu değer bahsedilen öğretim uygulamalarını değiştirmesi halinde daha iyi anlaşılabilceğini söylemiştir.

Uğurel (2010) öğrencilerin ispata yönelik bilgilerini sınıfta öğretmenleriyle olan iletişim süreci içinde nasıl düzenlediklerini incelemeyi amaçladığı doktora tezinde, fen lisesinden öğrencilerin matematik ve geometri öğretmenleriyle dersteki iletişim süreçlerini söylem analizi yoluyla araştırmıştır. Sonuç olarak, öğrencilerin ispata yönelik öğrenmelerinde, öğretmenleri ile aralarında var olan sınıf içi söylemlerin önemli etkisi olduğunu aktarmıştır. Uğurel (2010) ispata yönelik öğrencilerdeki yetersizlik ve yanlışların temel nedenlerinin, *“öğretmenlerin ispatları ağırlıklı olarak bilgi aktarımı yoluyla sunması, ispatın inşası esnasındaki bilişsel süreçlere öğrencileri yeterince dâhil etmemesi, ispat ve ispatlamaya yönelik öğrencilere yönlendirici yardımı yeterli düzeyde sağlamaması, uygun öğrenme ortamları oluşturmaması ve ispat yapmanın anlamı ve adımlarını sınırlı bir şekilde ifade ederek aktarması”* (sf. 199-200) olduğunu söylemiştir.

Yukarıdaki üç çalışmada pedagojik seçimlerin kalitelerinin istenen düzeyde olmadığı aktarılırken yeterli kalitedeki öğretimin bile bazen beklenen sonucu vermeyebileceğine

örnekler de vardır. Lew ve diğerleri (2016) bir Reel Analiz dersinde, ders gözleminin ardından hem öğretim elemanı hem de öğrenciler ile mülakat yapmışlardır. Öğretim elemanına dersi izletilerek aktarmayı amaçladığı fikirler ve bunları nasıl aktarmaya çalıştığı, öğrencilere de dersten neler anladıkları sorulmuştur. Sonuç olarak, öğretim elemanının öğrencilerin kabul edilebilir bir ispatın ne olduğunu anlamalarına yardımcı olacak şekilde bir ispatı sunduğunu buna rağmen öğrencilerin, öğretmenin aktarmaya çalıştıklarını anlamadıkları görülmüştür. Çünkü öğrencilerin bir ispatı anlamının ne anlama geldiğine ilişkin bakış açılarının, öğretmenlerin ispatları sunarken iletmeye çalıştıkları ana fikirleri fark etmelerine engel olabileceğini bulmuştur. Bu durumda anlamının gerçekleşmemesine, öğrenciden kaynaklı faktörlerin neden olduğunu söylemişlerdir. Bu faktörler öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin nedenlerine ilişkin bölümde yer almaktadır.

Geleneksel veya öğrenci merkezli öğretim modellerinin kendi içlerinde heterojen öğretimler sergileyebildiği ve farklı öğretim stillerini barındırabildikleri söylenebilir. Geleneksel öğretim yöntemlerini kullanan bir öğretmenin farklı içeriklerde farklı öğretimler sergileyebileceğini gösteren bir çalışmada Weber (2004), “tanım-teorem-ispat” formatında geleneksel öğretim yapan bir öğretim elemanının Reel Analiz dersinde sınıf gözlemleri ve mülakatların analizi sonucunda üç farklı “ispat öğretme stili” kullandığını göstermiştir. Tanımladığı bu stillere derslerinden ispat sunumları örnekleri de sunmuştur. İçeriğin sunumuna yönelik farklı bir yaklaşımları temsil eden bu stiller şu şekilde özetlenebilir:

1. Mantıksal-yapısal öğretim Stili: Bu stilde öğretmen bir şeyi ispatlamadan önce öğrencilerin ilk olarak ispatın mantığını anlamalarını ve ispatlamada kendilerini rahat hissetmelerini istemektedir. İspatlamada temel olan şeyleri yapmak için gereken söz dizimsel becerilere odaklanmaktadır. Bununla birlikte, kavramlar ve ispat anlamsal olarak tartışılmamakta, kavramlar, tanımlarının ötesinde ele alınmamakta ve tamamlanmış ispatlar için verdiği özetler yalnızca ispatların mantıksal doğruluğunu belirlemek için kullanılmaktadır.
2. Prosedürel öğretim stili: Bu stilde öğretmenin amacı, öğrencilerin kanıtlar oluşturmak için becerilerini kullanmalarını sağlayacak "stratejik bilgi" geliştirmelerine yardımcı olmaktır. Öğretim elemanı işlemlerde de açık olmayı, öğrencilerin matematiksel bir araç kutusuna sahip olmalarını ve bu şekilde öğrencilerin adımları kendi başlarına uygulayabilmesini istediğini belirtmiştir. Öğretmen bu stilde ispatın mantıksal geçerliğini tartışmayı ispatın bitiminde gerçekleştirirken ispatı anlamsal olarak tartışmamaktadır.

3. Anlamsal öğretim stili: Bu stilde öğretmenin amacı, öğrencilerin prosedürel bir yaklaşım yetersiz olduğunda ihtiyaç duyacakları fikirlerin kavramsal anlayışını geliştirmelerine yardımcı olmaktır. Öğretmen, öğrencilerinin öğretilen kavramlar arasında ilişki kurabilecekleri zengin imgelere sahip olmasını istemektedir. Tanımlar ve teoremler (öğrenciler onlara sözlükten bakabileceği için) burada çok önemli görülmemektedir. Öğrenciler bir kavramı duyduklarında zihinlerinde bir şeyler canlanması önemsenmektedir. Bu stilde öğretmen bir ispatı sunmadan önce tamamlanmış ispatın bir kopyasını vererek öğrencilerden not almamalarını, bunun yerine çalışmasını anlamalarını istemektedir. İspatları sunduğunda, önce ispatlanacak ifadenin akla yatkınlığını gösteren bir resim çizmektedir.

Bir öğretim elemanının ispat anlatımını pedagojik açıdan analiz etmeyi amaçlayan Fukawa-Connelly (2012a), geleneksel öğretim yapılan bir soyut cebir dersini veren bir öğretim elemanının ispat anlatımını analiz etmiştir. Bu analizde, ispat yazma teorik çerçevesini, ispat yapmayı destekleyen düşünme tarzlarını ve söylem kalıplarını kullanmıştır. Sonuç olarak, öğretim elemanının, ispatlanacak iddiayı açıklayarak başlayıp gereken kavramların tanımlarını sorduğu, öğrencilere bazı sorularla sorumluluk veriyor olsa da ispat için anlamlı bir sorumluluk vermediği ve ispatlama stratejisine yönelik üst düzey düşünme gerektiren sorular sormasına rağmen öğrencilerin cevap vermesini beklemeden soruları kendisinin yanıtladığı görülmüştür. Ek olarak, öğretim elemanını öğrencilere sorduğu sorulardaki bilişsel talebi, kavramsal bir hatırlama ve bazen de sadece yeniden ifade etme düzeyine indirmiştir. Bunun nedeni, bu olgusal soruların genellikle bir huni modeline benzer şekilde üst düzey bir soruyla başlayan bir dizi sorudan sonra gelmesidir. İspat bağlamında, ilk sorular öğrencilerin teoremin matematiksel içeriğini anlamalarını gerektirmekteyken son sorular öğrencilerin yanıtlarını doğru cevaba yönlendiren sorular olmuştur. Fukawa-Connelly (2012a), geleneksel dersler verdiğini iddia eden bu eğitmenin, aslında tahmin edebileceğinden daha öğrenci merkezli dersler verdiğini iddia etmiştir. Ancak, öğretim elemanının sorduğu soruların genellikle ispatın bir yönüyle sınırlı (bir tanımlı hatırlamak veya basit bir işlemi yapmak gibi) olduğunu ve öğrencilerin yanıtlarının da genellikle belirli bir yanıt kümesine yönlendirildiğini belirtmiştir. Ayrıca, öğretim elemanı ispatı yazarken bir matematikçinin sorması gereken soru türlerini (Örneğin, "Bu ne anlama geliyor?", "Sırada ne var?" ve "Hala ne yapacağım?") modellemiştir. Bu gözlemler, çok sayıda öğrenci katılımını içeren bu öğretimin, öğrencilere sorulan ve cevaplanan soruların sayısının yansıttığından daha az sorumluluk sağlayabileceğini göstermiştir. Öğretim elemanının öğrencilere sorular sorarak onları derse dahil etmesi ve sunulan materyal hakkında aktif düşünmeyi gerektirmesi önemli görülürken bu soruların

sınırlı olması nedeniyle öğrencilere ispat yazma için bazı önemli becerileri uygulama fırsatı sağlamamıştır. Bunun yerine, öğretmen ispat yazmayı destekleyen akıl yürütme türlerini kendisi gerçekleştirmiştir. Gözlemlenen 29 ispattan 7 tanesinde öğrenciler kendi başlarına ispat sunmuşlar, 21 ispatta öğretim elemanı ispatı öğrencilerle diyalog halinde yapmış ve yalnızca 1 ispatta öğrenciler sessizce oturup soru ya da yorum olmadan notlar almışlardır. Öğrencilerin yanıtlayacağı olgusal sorular sorarak ispatın hiyerarşik yapısı ve ispat yazmanın biçimsel/söz dizimsel yönleriyle ilgili örnekler üzerinde çalışma sorumluluğu vererek katılımlarını sağlamıştır. Öğrencilerin cevaplarıyla ispatın bir sonraki adımını veya bölümünü oluşturmalarına fırsat vererek öğrencilere yapısal düşünme tarzına yönelik sorumluluk vermiştir. Bununla birlikte, ispat yazma için gereken problem-merkezli becerileri modelleyebilecek herhangi bir yaratıcı düşünme sergilememiştir. Bu nedenle, öğretmenin ispat sunumu sırasında hiçbir noktada öğrencilere ispatlamanın zor olduğu veya tanımların algoritmik olarak belirtilmesinden başka bir şey gerektirebileceği gösterilmemiştir.

Çalışmalarda öğretimde uygulanan yöntemlerin öğrenci merkezli öğretime doğru yöneldiği görülmektedir. Bu bağlamda, sınıfta ispatlama etkinliklerinde öğretmenin öğrencilere sorumluluk verip vermediği, ispata yönelik sınıf tartışmalarında öğrencilere ne derece yetki/sorumluluk verdiği veya sorumluluk vermeye yönelik öğretmen eylemlerinin pedagojik değeri tartışılmıştır. Örneğin, Fukawa-Connelly (2016) kendisinin öğretmeni olduğu araştırma temelli Soyut Cebir dersinde video kaydı ile yaptığı ders gözleminde, öğrencilerin derste ispatlamaya ve tanımlamaya ne ölçüde katıldığı ve öğretmenin de buna ne ölçüde fırsat sağladığını incelenmiştir. İspatlama açısından öğrencilerin ispat oluşturma, sunma ve değerlendirmede önemli ölçüde sorumluluk aldığı, bununla birlikte varsayım oluşturmada ise bu sorumluluğun daha sınırlı kaldığı bulunmuştur. Öğretim elemanının ispatlamada tüm sorumluluğu öğrencilere veriyor olmasına rağmen tanımlamada bu sorumluluğun göreceli olarak daha az olduğu gözlenmiştir.

İspata yönelik sınıf tartışmalarında öğretmen eylemlerinin takdir gördüğü bir başka çalışmada Martin ve diğerleri (2005) tarafından aylarca gözlem yapılan geometri dersinde, öğretmen ve öğrenci eylemlerinin karşılıklı etkileşimine ve bu etkileşimin öğrencinin ispat öğrenmesi üzerindeki potansiyel etkilerine odaklanılmıştır. Martin ve diğerleri (2005) “başkalarının oynamasını izleyerek oyunun kurallarını öğrenmek” yerine öğrencilerin tamamen katılımlarına veya ispatın “oyununu oynayarak öğrenmelerine” yardımcı olan öğretmen eylemleri olduğunu gözlemlemişlerdir (s. 121). Öğretmen tarafından yapılan pedagojik seçimlerin ve oluşturulan sınıf ortamı türünün, öğrencilerin ispat ve akıl yürütme becerilerini geliştirme fırsatlarının anahtarı olduğunu belirtmişlerdir. Daha spesifik olarak,

öğretmenin açık uçlu etkinlikler (belirli bir çözüm veya çözüm stratejisi ile sınırlı olmayan) ortaya koyma seçiminin, akıl yürütme sorumluluğunu öğrencilere yüklemesinin, öğrenci argümanlarını analiz etmesinin, öğrencilere akıl yürütürken koçluk yapmasının, öğrencilerin varsayımlarda bulundukları, gerekçeler sunduğu ve akıl yürütme zincirleri oluşturduğu bir ortam sağladığını aktarmışlardır. Bu eylemlerin hem ispat başlatmada (öğretmenin açık uçlu etkinlikler seçmesi) hem oluşturmada (öğretmenin öğrencileri yönlendirmek yerine koçluk yapması) hem de oluşturulan ispatı doğrulamada (ispatın geçerliliğinin sınıfla belirlenmesi) öğretmen ve öğrenciye ortak yetki sağladığı belirtilmiştir. Böyle bir ortamda, sınıftaki matematiksel uygulamaların müzakeresine ve formel ispatlar oluşturmak için bireysel becerilerin geliştirilmesine katkıda bulunulabileceği iddia edilmiştir.

Benzer şekilde öğretmenin eylemlerinin başarılı bulunduğu bir başka çalışma ise Mata-Pereira ve Ponte (2017)'dir. Bu çalışmanın bir başka özelliği ise ortaokul düzeyinde ispatlamaya ilişkin öğretmen uygulamalarına yer veren nadir çalışmalardan biri olmasıdır. Matematiksel muhakeme süreçlerinden genelleme ve gerekçelendirme becerilerinin gelişimini desteklemek amacıyla hem sınıf tartışması başlatacak keşif amaçlı bir etkinliği hem de bu sınıf tartışmasında öğretmenin eylemlerini planlayarak tasarladıkları öğretim deneyinde Mata-Pereira ve Ponte (2017), doğrusal denklemler ve fonksiyonlar hakkında bir 7. sınıf dersindeki tüm sınıf tartışmasına ve tartışmada öğretmen eylemlerine odaklanmışlardır. Bu çalışmada hem öğretmenle hem de öğrencilerle mülakatlar yapılmıştır. Öğretmen mesleki uygulamasının iki temel unsuru olarak öğrencilere önerilen etkinlikler ve öğretmen eylemleriyle geliştirilen iletişim süreçleri bu çalışmada ele alınmıştır. Tüm sınıf tartışmalarında davet etme, bilgilendirme / önerme, destekleme / rehberlik etme ve meydan okuma olarak tanımladıkları öğretmen eylemlerinin ve seçilen etkinliğin öğrencileri genellemeye ve gerekçelendirmeye yönlendirdiğini ve bu becerilerini zenginleştirdiğini aktarmışlardır. Sınıf tartışmasında en çok dikkat çeken uygulamanın söylenenlerin nedeninin açıklanmasının veya alternatif bir gerekçelendirme sunulmasının istenmesi olduğu görülmüştür.

Sınıf tartışmalarındaki uygulamaları ve eylemleri nedeniyle başarılı bulunan yukarıdaki öğretmenlerin yanı sıra öğrencilerin otoriter ispat şemasına (Harel ve Sowder, 1998) sahip olmalarına neden olduğu varsayılan öğretmen eylemlerini aktaran çalışmalar da mevcuttur. Harel ve Sowder'da (1998) ana hatları çizilen otoriter ispat şemasını gösteren öğrenci davranışları şunlardır: Öğrenciler problemleri çözmeye prosedürünü beklerler ve genellikle söylenmesini isterler, önce kendi başlarına çözmek için ciddi bir çaba harcamadan problem için öğretmenden yardım isterler ve sunulan içerikle veya öğretmenlerinin ve sınıf arkadaşlarının iddialarının arkasındaki mantık hakkında soru sorma konusunda isteksizdirler.

Martin ve diğerlerine (2005) benzer şekilde fakat onlar kadar uzun soluklu olmayacak şekilde 3 dersi gözlemledikleri lise geometri sınıfında Otten ve diğerleri (2017), tüm sınıf tartışmasında ispatlama bölümlerinde otoritenin nasıl ortaya çıktığını araştırmışlardır. İspat başlatma, oluşturma ve doğrulama üzerindeki yetkiyi göz önünde bulunduracak şekilde bir kodlama şeması kullanarak tüm sınıf ispatlama etkinliklerindeki yetki paylaşımını incelemişlerdir. Özellikle, öğretmenin ve ders kitabının yetkisi, öğrencilerin sınıfın hep birlikte ispat üretme fırsatlarını sınırladığını ve bazen de geçersiz argümanların kabul edilmesine izin verdiğini aktarmışlardır. İspat başlatma yetkisinin ders kitabına ve ders kitabı görevlerinin yürürlüğe girmesi yoluyla öğretmene) ait olduğu ve ispat oluşturma ve onaylama üzerindeki yetkinin de öğretmende olduğu gözlenmiştir. Yani, Martin ve diğerlerinde (2005) öğretmenin öğrencilere yönlendirdiği yetkinin bu çalışmada tamamen öğretmende olduğu söylenebilir. Bu nedenle, yazarlar tüm sınıfın ispatlama etkileşimlerinin öğrencilerin otoriter ispat şemaları geliştirmesine sebep olabileceğini varsaymışlardır.

Bu çalışmaya benzer sonuçlar paylaşan Harel ve Rabin (2010) da lisede matematik dersinde iki sınıfta yaptıkları gözlemlerde iki öğretmenin ispat etkinliklerindeki eylemlerini araştırmışlardır. Veriler, 1 yıl boyunca videoya kaydedilmiş sınıf gözlemlerinden oluşmaktadır. İspat başlatma, oluşturma ve geçerliğini değerlendirmeye yönelik sınıfta tespit edilen 12 öğretmen eyleminden 9'unun öğrencilerde otoriter ispat şemasının gelişimine sebebiyet verebileceğini öne sürmüşlerdir. Bu öğretim uygulamaları şu şekilde aktarılmıştır (Harel ve Rabin, 2010, sf. 17-18):

1. Öğretmenin öğrencilerin sorularına verdiği cevaplar, esas olarak bir görevin nasıl gerçekleştirileceğini ve bir eylemin doğru mu yanlış mı olduğunu anlatır.
2. Öğrenci fikirlerine yanıt verirken, öğretmen öğrencileri öğretmenin tercih ettiği çözüm yaklaşımlarına yönlendirir.
3. Öğretmen, öğrencinin bir problemi çözme yaklaşımını, öğretmenin yaklaşımıyla örtüşmüyorsa reddeder.
4. Öğretmen, öğrenciler arasındaki anlaşmazlığın tek hakemidir.
5. Öğretmen, öğrenciler arasında etkileşim olmayacak ve öğretmen ile öğrenciler arasındaki etkileşim minimum olacak şekilde öğrencilere ders anlatır.
6. Öğretmenin dersleri genel bir kural ile başlar, onu açıklamak için örneklerle devam eder ve sunulan örneklere benzer etkinliklerle biter.
7. Öğretilen içeriğe duyulan ihtiyacın gerekçesi entelektüel olmaktan çok sosyaldir.

8. Öğretmenin gerekçeleri esasen otoriterdir ve otoriter olmayanlar, tündengelimden ziyade deneyseldir.
9. Öğrencilerle etkileşimde bulunurken, öğretmen soruları ve fikirleri için kavramsal temelleri keşfetmeye çalışmaz.

Öğretmenin pedagojik seçimleri ve bunların geometride öğrencinin ispat oluşturma becerisini nasıl etkileyebileceğine odaklanan Martin ve McCrone (2003), öğrencilerin nadiren bir ispat için mantık oluşturmak zorunda kaldığı iki geometri ders gözlemi sunmuştur. Sonuç olarak, öğretmenin, ispatların yapma ve değerlendirme konusunda sürekli olarak yetkiye sahip olduğu ve ispat başlatmayı da genellikle ders kitabının sağladığı aktarılmıştır. Her ne kadar öğretmenin seçimleri, öğrencilerin diyagramların önemi ve detaylara dikkat etme konusunda bir anlayış geliştirmelerine yardımcı olsa da pedagojik açıdan, öğrencileri kendi başlarına mantıksal argümanlar oluşturmaya hazırlıksız bıraktığı belirtilmiştir. Örneğin, öğrenciler ispat yazma sürecinin nasıl olması gerektiğinin farkındadırlar ama öğretmen tarafından tanımlanan bir formata veya stratejiye uyan ispatlar dışında öğrenciler sorumlu tutulmamıştır. Sonuç olarak, öğrencilerin boş ispatları doldurma konusunda başarılı olmalarına rağmen bağımsız olarak sonuçlar çıkarmakta veya ispat oluşturmakta zorlandıkları bulunmuştur.

Herbst (2002), 9. sınıf geometri dersinde bir öğretmenin, öğrencileri bir ispat yapma sürecine dahil edişini analiz etmek için sınıftaki bir ispatlama etkinliğini gözlemlemiştir. Sınıftaki iletişimi ve sorumluluk paylaşımını analiz ederken didaktik sözleşmenin öğretmenin pedagojik seçimlerinde çelişkili talepler oluşturduğuna dikkat çekmiştir. Hem öğretmenin hem de öğrencilerin sorumluluklarını içeren didaktik sözleşmenin öğretmene yüklediği çelişkili talepler şu şekilde açıklanmıştır (Herbst, 2002): İlk olarak, (a) ispat oluşturmalarını sağlamak için öğrencilere etkinlik organize etmesi ve (b) öğrencilerin gizli bir şekilde ispat fikirlerine erişimini kolaylaştırmasıdır. Yani, bir ispatlama etkinliğinde, öğrenciler bir varsayım ya da argüman için fikir üretmede başarısız olurlarsa, öğretmenin bu başarısızlığa bir miktar müdahale etmesi gerekir ancak bunu yaparken öğrencilerin bağımsız olarak ispat oluşturma becerilerine de müdahale etmiş olur. Bu çalışmada da öğretmen ve öğrencilerinin önce açılar konusuyla ilgili bir iddianın ispatını üstlendikleri ve daha sonra öğretmenin ispat yapmayı öğrencilerden aldığı (ispat için anahtar fikirler öne sürdüğü) görülmüştür. Bunun nedeninin didaktik sözleşmenin öğretmene yüklediği çelişkili taleplerden kaynaklandığını yani öğretmenin hem öğrencilerin ispat oluşturmalarına fırsat vermesi hem de ispat oluşturmalarını kolaylaştırmasının öğretmen açısından iki çelişkili talep olduğuna değinilmiştir.

Bazı çalışmaların sonuçları, öğretmenlerin eylemlerinin, öğrencilerin ispatla etkileşim kapsamını sınırlayabileceğini göstermektedir. Örneğin, Sears ve Chavez (2014), iki lise

geometri ders kitabındaki etkinliklerin özelliklerini ve ispat etkinliklerinin bilişsel taleplerini karşılaştırmakta ve bu tür farklılıkların, geometri öğretmenlerinin derste ispat etkinliğini uygulamasını ve dersler sırasında öğrencilerin ispat görevlerine katılımını nasıl etkilediğini ele almaktadır. Öğretmenlerin ders kitabı kullanıyor olmalarına rağmen ispatların derste nasıl sunulacağına katkı yapabilecek içsel (öğrencilerin eğilimleri/mizaçları) ve dışsal (değerlendirme) faktörlerden etkilendiklerini belirlemişlerdir. Böylece ispat etkinliklerinin doğasının yazılandan (kitaptan) sahnelenen müfredata (derse) nasıl değiştiğine yönelik gözlemlerini aktarmışlardır. Çalışmadaki öğretmenler, öğrencilerin ispatı çok yoğun ve boğucu gördüğünü, bazı durumlarda öğrencilerin ispata katılmadıklarını ve ispata karşı negatif eğilimleri olduğunu gözlemlediklerini belirtmişlerdir. Gözlenen derslerinde bazı durumlarda öğretmenler bu nedenlerle etkinliklerin bilişsel seviyesini düşürmüşlerdir. Ek olarak, öğrencilerin performanslarını ölçmek için seçilen değerlendirme tiplerinin onların nasıl bir ispat öğretimi sağladığını etkilediğini de söylemişlerdir. Özellikle bölüm sınavları ya da dönem sonu sınavlarında ifadeleri eşleştirme ve ispattaki boşlukları tamamlama sorulduğundan derslerinde bu tip etkinlikleri vurguladıklarını söylemişlerdir. Öğretmenlerin öğrencileri şekillerde işaretleme veya çift sütun ispat kullanmaya cesaretlendirerek ispat etkinliklerinin şekiller, farklı ispat temsilleri/gösterimleri gibi farklı özelliklerini vurguladığı görülmüştür. Yazarlar, bu özelliklerin öğrencilerin yaptıkları ispatların derinliğini ve yaratıcılığını etkileyebileceğini öngörmüşlerdir. Sonuç olarak, öğretmenlerin ders kitaplarını kullanma şeklini etkileyebilecek faktörlerin inançlar, öğrencilerin eğilimi ve değerlendirmeyi içerdiğini belirtmişlerdir.

Derste ispat sunumlarına ilişkin gözlem çalışmalarından bazılarında öğretmenin belli eylemlerine/uygulamalarına odaklanıldığı da söylenebilir. Örneğin, mülakat ve ders gözlemleriyle dört öğretim elemanının derslerinde ispat sunumlarında örnekleri nasıl ve ne zaman kullandıklarını inceleyen Mills (2014), öğretim elemanlarının derste ispat yaparken örnek kullanmalarında temel sezgileri veya hipotezleri harekete geçirmek, bir iddianın veya alt iddianın akla yakınlığı için delil sağlamak, öğrencinin iddiayı, ispatı veya altında yatan matematiksel içeriği anlamasını pekiştirmek ve ispat kavrayışı oluşturmak gibi pedagojik gerekçeler sunduklarını belirtmiştir. Mills (2014) öğretim elemanlarının derste ispat anlatırken kullandıkları örneklere yönelik bir teorik çerçeve de sunmuştur. Bu çerçeveye göre: Temel sezgileri veya iddiaları harekete geçirmek ve öğrencilerin zihnini teoreme hazırlamak için kullandıkları *ısınma/başlangıç örnekleri*, öğrencilerin ya hipotezi keşfetmeye ya da hipotezin akla yakınlığının delillerini sağlamaya yönlendirmek için teoremden önce kullandıkları bir örüntüyü gösteren *örüntü keşfetme örnekleri*, öğrencileri hipotezin makullüğüne ikna etmek

veya ispat kavrayışını genişletmek için kullandıkları *hipoteze/hükme yönelik örnekler*, hipotezin veya ispatın altında yatan matematiksel içeriği pekiştirmek için kullandıkları *kavramlara/tanımlara/notasyonlara yönelik örnekler*, öğrencilerin ispatlanmayacak bir alt hipotezi veya özellikle zor mantıksal bir noktayı anlamalarına yardımcı olmak için kullandıkları *alt hipotezlere yönelik örnekler*, hipotezin değişimiyle hükmün nasıl değiştiğini göstermek için kullandıkları *sınır örnekler*, genel ispatı yansıtan ve ispatlarla birlikte sundukları *jenerik örnekler* ve matematiksel bir yapıyı matematiksel başka bir yapı ile karşılaştırmak için kullanıldıkları *metaforik örneklere* ders gözleminden örnekler sunmuştur.

2.6.3.b. Öğretmenlerin Derste Bazı Teoremleri Sunmama Durumları

İspatın matematik derslerindeki rollerine yönelik bulgulara rağmen ders gözlem çalışmalarında bazı öğretim elemanlarının ve lise matematik öğretmenlerinin derste bazı teoremlerin ispatlarını sunmadıkları aktarılmıştır. Bir teoremin ispatının anlatılmaması iki şekilde gerçekleşmektedir: Öğretmen ya tamamen ispatı atlamakta ya da formel ispat yerine informel bir anlatım yapmaktadır. Bazı teoremlerin ispatlarını sunmamaya yönelik öğretmenlerin bu tercihlerinin nedenlerine yönelik bulgulara da rastlanmıştır. Örneğin, Herbst ve Miyakawa (2008) lise geometri derslerinde hangi teoremlerin ispatının sunulmakta olduğu ve sunulması gerektiğini araştırdıkları çalışmalarında, geometri öğretmenlerinin onlara sunulan öğretimsel hikayelere yaptıkları yorumlardan bazı teoremlerin derste ispatlanmadığı bulgusuna ulaşmışlardır. Öğretmenler buna neden olarak:

- Bazen teoremi ifade etmek ve onun hakkında kısa bir tartışma yapmanın yeterli olduğunu ve ispata gerek olmadığını düşündüklerini,
- Bir sonucu doğrularken ispatın tamamının adım adım formel şekilde yazılmasının gerekli olmadığını,
- Bazen teoremi ispatlayacak yeterli zamanın olmadığını,
- Ve öğrencilerin o ispatla ilgili gereken bilgilere sahip olmadığını söylemişlerdir.

Yukarıdaki son maddeye paralel olarak bir ispatın öğrenciler için zorlayıcı olmasının derste yapılmamasının nedenlerinden biri olduğu söylenebilir. Örneğin Knuth (2002b) birçok lise matematik öğretmenin lise öğrencileri için ispatın uygun olmadığını düşündüklerini aktarmıştır. Hersh (1993) de öğretim elemanının eğer ispat öğrenciler için zorsa veya teoremin kendisi yeterince açık değilse o ispatın yapılmayabileceğini belirtmiştir. Ayrıca zaman kısıtını ve sıkıcı veya aydınlatıcı olmayan ispatları da ispatı sunmamaya neden olarak göstermiştir. Ek

olarak Hersh (1993) bir ispatı sunma tercihini ispatın, öğrencilerin kavram, yöntem veya uygulamaları anlamalarını arttırmasının etkilediğini belirtmiştir.

Dinleyiciler de ispatın anlatılıp anlatılmaması tercihinde en çok gösterilen nedenlerden biridir. Öğretim elemanlarının pedagojik ispatlar hazırlarken nelere dikkat ettiklerini araştırdıkları çalışmalarında Lai ve Weber (2014) öğretim elemanlarından sekizinin açıklamalarında dinleyici/okuyucu kitlesinin derste veya bir kitapta bir ifadenin gerekçelendirilip gerekçelendirilmemesini etkilediği bulgusuna ulaşmışlardır. Bu matematikçilerden biri okuyucunun bilmediklerini gerekçelendirdiklerini bildiklerini ise gerekçelendirmeden sadece ifadeyi yazdıklarını belirtmiştir. Dinleyicinin etkisine değinen bir başka çalışmada ise Yopp (2011) matematik derslerinde ispat ve ispatlamanın rolleri ve amaçlarının dersin tipi, dersi veren kişi ve derste dinleyici/öğrenci olmak üzere 3 kategoride çeşitlendiğini belirtmiştir. Analiz dersi ile ilgili olarak katılımcılardan bazıları, mühendislik öğrencilerinin öğretimde ispata ya da en azından formel ispata ihtiyacı olmadıklarını belirtmişlerdir. Hemmi (2010) öğretim elemanlarının ispata pedagojik bakış stillerinden klasik ve yenilikçi stildeki pedagojik yansımaların bazı ispatların verilmemesi ya da ispat yerine örneklerle çalışılması yönünde olduğu bulgusuna ulaşmıştır. İlkinde öğrencinin ön bilgilerinin eksikliği ve zaman kısıtı gibi gerekçelerle ikincisinde ise öğrencileri korkutmamak adına ve çok az öğrencinin ispatı anlayabilecek olması nedeniyle bazı ispatların verilmemesi ya da ispat yerine örneklerle çalışılması yönünde fikir beyan edilmiştir.

İkinci durum informel ispatların sunulmasıdır. Informel ispatlar formel gösterimler haricinde açıklamalar, şemalar ve örnekler içerebilmektedir. Öğretim elemanları örnekleri ispatın anlaşılmasını kolaylaştırmak veya daha iyi anlaşılmasını sağlamak için formel ispatla eş zamanlı olarak veya ispatın yerine kullanabilmektedirler (Weber, 2012). Jenerik örnekler genel ispatı yansıtan belirli, genellikle sayısal örneklerdir (Mills, 2014). Formel ispat yerine örneklerle çalışmak bazen ispatı hesaplamaların arkasına gizlemek ve öğrencileri korkutmamak için bir yoldur (Hemmi, 2010). Pinto ve Karsenty (2017) öğretim elemanının ders imajı açısından temsili bir ispat sunumunu inceleyen araştırmacılar onun bu sunumda ispat anlatım stratejisi olarak bir teoremi örnekle ispatlayıp genel ispatı oluşturmaya öğrencilere bıraktığını gözlemlemişlerdir. Benzer şekilde, Mills (2014) ise bir öğretim elemanının jenerik bir örneği ispatın yerine kullandığı bulgusuna ulaşmıştır. Burada öğretim elemanı jenerik örneği dinleyicinin seviyesine göre ve ispatı öğrenciler için daha kolay hale getirmek amacıyla kullandığını iddia etmiştir. Öğretmenler genellikle deneysel argümanları tümdengelimci ispatlara göre daha ikna edici ve daha kolay takip edilebilir bulurlar ve sınıfta kullanırlar (Stylianides ve Stylianides, 2009a). Bazı öğretim elemanları dersin türü

(uygulamalı matematik dersleri ve alt sınıf dersleri gibi) nedeniyle informel ispatlar sunmayı tercih ederler (Yopp, 2011). Hersh (1993) her teoremi derste formel şekilde ispatlamadığını, bazen de öğrencilerden ispatları kitaplardan okumalarını istediğini belirtmiştir. Ayrıca çok önemli, ilgi çekici ve zor sonuçları olan teoremleri ispatladığını ve ilginç ispatları sunduğunu söylemiştir.

Bazı ispat sunumları daha az formel olarak kabul edilebilir olmasına rağmen informel olarak değerlendirilmemektedir. Örneğin, Weber'in (2004) çalışmasında de bir öğretim elemanı öğrencilere içinde ispatların tam olarak yazılı olduğu bir fasikül dağıtmış ve ispat sunumunda bazı detayları atlamıştır. Benzer şekilde, Nachlieli, Herbst ve Gonzalez (2009), öğretmenlere izletilen videoda bir geometri öğretmeni bir öğrencinin tahtada yapmaya çalıştığı bir ispatın bir aşamasında varsayımda bulunmasına ve bu varsayımı gerekçelendirmeden kabul etmesine izin vererek öğrencinin devam etmesi için onu cesaretlendirmiştir. Öğretmenin bu uygulamasının izletildiği diğer öğretmenlerin çoğu ispatlamanın öğretilmesinde bu hareketi doğru bulmamıştır.

2.6.4. İspat Öğretiminde Öğretmenlere İlişkin Teorik Çalışmalar

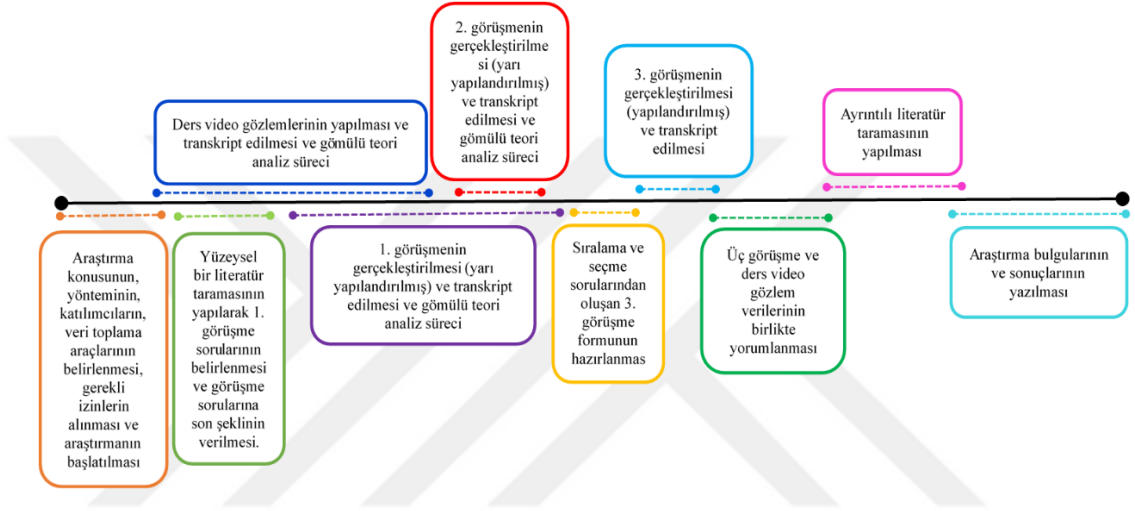
Öğretmenlere ve ispat sunumlarına yönelik teorik çalışmalar da mevcuttur (örn., Dawkins ve Weber, 2017; Ko, 2010; Stylianides ve Ball, 2008; Weber, Inglis ve Mejia-Ramos, 2014). Bu çalışmalardan Dawkins ve Weber (2017), matematiksel değerler ve normlar açısından ispatı kavramsallaştırabilecekleri bir çerçeve sunmuşlardır. Matematikçilerin elde etmek istedikleri değerleri ve bu değerleri korumak için benimsenen normları tanımlayarak ispata ilişkin bu değerlerin ve normların matematik eğitiminde ve sınıfta ispat öğretiminde uygulamalarına da değinmişlerdir. Bu değerleri algılamayan veya kabul etmeyen öğrencilerin, onları destekleyen normlara bağlı kalmakta güçlük çekebileceğini ve bu nedenle ispatı kafa karıştırıcı ve sorunlu bulacaklarını da belirtmişlerdir. Weber ve diğerleri (2014) matematikçilerin okudukları ispatlarda nasıl ikna olduklarına yönelik bir teorik bir çalışma yürütmüş ve bunun matematik eğitiminde öğrencileri nasıl etkilediğini tartışmıştır. Ko (2010), ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenlerinin ispat algılarına odaklanan mevcut deneysel çalışmalara yönelik literatür taraması yapmıştır. "İspat algısı" ifadesi ile öğretmenlerin ispatın nelerden oluştuğuna, matematikte ispatın rolüne ve ispatlama stratejilerine yönelik konu alan bilgisi ve inançlarını kastettiğini söylemiştir. Stylianides ve Ball (2008), matematik öğretiminde öğrencileri ispatlama aktivitesine dahil ederken öğretmenler için ispat hakkında hangi bilgilerin önemli ve kullanışlı olduğunu tanımlamayı

amaçlamıştır. Mevcut araştırmalarda ispatın mantıksal dilsel yönüne yönelik bilgiden bahsedilirken Stylianides ve Ball (2008), bu bilginin kendilerinin *ispatlama durumları bilgisi* olarak tanımladığı bilgi ile tamamlanması gerektiğini belirtmişlerdir. Bu bilgi formunun, öğretmenlerin sınıflarında öğrencileri için ispatlama fırsatları oluşturabilmeleri açısından çok önemli olduğunu söyleyerek ispatlama durumları bilgisi için iki alt bileşen tanımlamışlardır. Bu bileşenler, farklı türlerde ispatlama etkinlikleri bilgisi ve ispatlama etkinlikleriyle ispatlama aktiviteleri arasındaki ilişki bilgisidir. Farklı türde ispatlama etkinlikleri bilgisine yönelik anlayış geliştirmek için belirli matematiksel kriterlere dayalı ispatlama etkinlikleri sınıflaması oluşturmuşlardır. İspatlama etkinlikleriyle ispatlama aktivitelerinin ilişkisi bilgisine yönelik anlayış geliştirmek için de bir teorik çerçeve geliştirmişlerdir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Yöntem bölümünde araştırmanın modeli, katılımcılar, veri toplama süreci ve araçları, verilerin analizi, araştırmanın geçerliği ve güvenilirliği ve araştırmacının rolüne yönelik bilgiler yer almaktadır. Şekil 3, tez sürecinin genel akışını göstermektedir.



Şekil 3. Tez süreci genel akışı

Şekil 3'te genel akışı verilen ve bu bölümde başlıklar halinde detaylandırılan tez süreci bütünsel olarak anlaşılması için şu şekilde özetlenebilir: Araştırmaya ilişkin yapılacaklara karar verilmesinin ve gerekli izinlerin alınmasının ardından öğretim elemanlarının dersleri video kaydı yapılarak gözlemlenmiştir. Bu sırada, ispat anlatım yapılarına ilişkin sorulacak sorular belirlenmiş ve birinci görüşme soruları hazırlanmıştır. Ders video gözlemleri devam ederken birinci görüşme gerçekleştirilmiş ve bu görüşmenin analizleri yapılmıştır. Bu analizler ve ders video analizleri sonucunda öncelikle öğretim elemanlarının hem açıklamasına hem de teyidine ihtiyaç duyulan sorular veya gözlemler için ikinci görüşme planlanmış ve gerçekleştirilmiştir. Aynı zamanda birinci görüşme sorularından seçilen soruların analizleri sonucunda ortaya çıkan kategorilerin ve temaların önem düzeylerinin belirlenmesi amacıyla seçme ve sıralama sorularından oluşan bir görüşme formu oluşturulmuş ve üçüncü görüşme gerçekleştirilmiştir. Sonuç olarak tüm görüşmeler ve ders video analizleri birlikte tekrar analiz edilmiş ve yorumlanmıştır. Bu sürece ilişkin detaylı bilgiler aşağıda başlıklar halinde açıklanmıştır.

3.1. Araştırmanın Modeli / Deseni

Araştırmalar, benimsedikleri felsefe (temel ve uygulamalı), amaçları (keşfedici, tanımlayıcı ve açıklayıcı), yöntemleri (nicel ve nitel), kapsadıkları zaman ve süre (kesitsel ve boylamsal) ve analiz birimi (birey, grup, örgüt ve toplum) açılarından sınıflandırılabilir (Gülbüz ve Şahin, 2017). Bu sınıflamalar bağlamında bu çalışma, “sosyal bir olgu hakkında daha fazla bilgi edinerek bilimsel bilgi birikimine katkıda bulunmayı” (s. 100) planladığı için temel, “bir olguya ilişkin neler olduğunu keşfetmeyi” (s. 101) amaçladığından keşfedici, “olguları doğal oluşumu içerisinde tasvir etmeye” (s. 103) çalıştığından nitel ve kapsadığı süre bakımından “verilerin anlık olarak tek bir zamanda toplanarak incelenen olgunun o andaki durumunu ortaya koyması” (s. 113) nedeniyle kesitsel bir araştırmadır (Gülbüz ve Şahin, 2017). Buna ek olarak, analiz birimi açısından ise birey analizi içermektedir.

Araştırmada bir kuramsal çerçeveden hareket edilmeyerek araştırma verilerinde gömülü olduğu varsayılan bilginin ortaya çıkarılması hedeflenmiştir. Öğretim elemanları gerek açıklamaları gerekse hareketleriyle öğrenciler için rol model konumunda olduklarından bu çalışmada onların bakış açıları ve eylemlerine odaklanılmıştır. Bu açıklamaları ve eylemleri derinlemesine inceleneceğinden yani derslerinde ispat öğretim uygulamalarına ilişkin genel bir açıklama geliştirilmesi için sistematik araştırma yapılacağından gömülü teorinin bu araştırmaya uygun olduğu düşünülmüştür. Gömülü teorinin araştırma desenlerinden ise objektivist (nesnelci-sistematik) yaklaşım tercih edilmiştir. Gömülü teori ve objektivist yaklaşım aşağıda açıklanmıştır.

Gömülü teori, Glaser ve Strauss'un (1967) sağlık bilimleri alanında yaptığı çalışmalardan ortaya çıkan, bir yığın veriden tümevarım ve tümdengelim yöntemleriyle bir teori geliştirmeyi ifade eden nitel araştırma tekniğidir. Glaser ve Strauss (1967) gömülü teorinin, verilerin sürekli karşılaştırılarak, aralarındaki ilişkiler (benzerlikler-farklılıklar) keşfedilerek kategorilerin oluşturulması ve bu kategorilerden de soyut teorinin elde edilmesi olduğunu belirtmiştir. Charmaz (2006) gömülü teorinin, var olan durumun temelini belirlemek ve birbiriyle bağlantılı durumların arasındaki ilişkiyi ortaya koymak şeklinde iki amacı bulunduğunu aktarmıştır. Amacı her ne kadar bir teori geliştirmek olsa da Teppo (2015) gömülü teori yardımıyla elde edilen bilgilerin her zaman kesin bir teori teşkil etmeyebileceğini çünkü bir teorinin oluşmasının kompleks bir durum olduğunu ve bunun için daha uzun bir zaman gerekebileceğini söylemiştir. Bununla birlikte teori olsun veya olmasın gömülü teori ile elde edilen bilgilerin sistematik ve betimleyici bir yapı ortaya koyduğunu da eklemiştir. Gömülü teorinin analiz süreci şu şekilde özetlenebilir (Teppo, 2015): Başlangıçta veri sürekli karşılaştırmalı analiz ile kavramsal olarak kodlanır. Kodlar oluşturuldukça kod grupları

arasındaki benzerlikleri ifade etmek için kategoriler de oluşturulur. Analiz devam ettikçe teorik örneklem (yani nerede daha fazla veri seçileceği kararı) kodların ve kategorilerin sürekli karşılaştırılmasıyla ortaya çıkar ve veri ile ilgili anahtar fikirler yardımıyla yönlendirilir. Yeni verinin kodlara ve kategorilere atılması, sabit alanda katılımcıların çoğunun davranışını gösterebilecek temel kategorilerin belirlenmesi hedefine kadar devam eder. Bu aşamada sabit kategoriler (alt seviyeler arasındaki bağlantıları gösteren daha soyut kategoriler) oluşmaya başlar. Bu üst seviye kategoriler çalışma alanlarının gözlenen özellikleri arasındaki ilişkileri açıklayan gömülü hipotezlerin gelişimini sağlar. Analitik süreç boyunca kodlar ve kategorilerle ilgili fikirler ve düşünceler için sürekli notlar alınır. Verinin kodlanması süreci, kavramları kategorileştirme ve teorik örnekleme süreci veride gelişen gömülü teorinin hedefine doğru tüm bu adımlar boyunca araştırmacı döngüye devam ettikçe gerçekleşir ve interaktiftir. Bu sürecin ayrıntıları bu çalışma kapsamında ele alınarak veri analizi bölümünde açıklanmıştır.

Gömülü teorinin güçlü ve zayıf yönleri şu şekilde özetlenebilir (Gürbüz ve Şahin, 2017, s. 424): Gömülü kuramın güçlü taraflarından biri sistematik bir süreç içermesidir. Yani araştırmacı araştırma sürecinde izlemesi gereken adımları bilmektedir. Ayrıca gereksiz bilgi toplamayı önleyecek şekilde ilk verinin toplanmasından itibaren kodlamaların yapılması ve amaca yönelik bilgilerin eklenmesine olanak tanır. Nitel verinin çözümlenmesinde disiplinli bir yaklaşım sunması da diğer bir güçlü özelliğidir. Bununla birlikte gömülü teorinin zayıf yanlarından biri araştırmacının yoğun veri altında kaybolması ihtimalidir. Ayrıntılı literatür taramasının kodlamalardan sonra yapılıyor olması da hali hazırda aynı alanda benzer bir teori mevcutsa araştırmacının yenisini aramakla vakit kaybedebileceği olasıdır.

Gömülü teorinin ilk keşfinden günümüze kadar iki önemli gömülü teori yaklaşımı ortaya çıkmıştır. Bunlardan biri Strauss ve Corbin'in (1990,1998) süreci, olayları veya ilişkileri sistemli bir şekilde analiz ederek bir teori araştırdığı "sistematik veya objektivist (nesnelci)" desendir. Diğerisi ise Charmaz'ın (2000) yorumlayıcı yaklaşımla esnek çalışmalar içeren ve araştırmacıların gözlemlerine dayanan "yapılandırmacı" desendir. Bu desenler şu şekilde özetlenebilir (Charmaz, 2006, 131-132): Yapılandırmacı gömülü teori, yorum geleneğinin bir parçasıdır, nesnelci gömülü teori ise pozitivistten türemiştir. Yapılandırmacı yaklaşım, çalışma fenomenine öncelik vermekte ve hem verileri hem de analizi, katılımcılarla ve diğer veri kaynakları ile paylaşılan deneyimlerden ve ilişkilerden oluşturulmuş olarak görmektedir. Yapılandırmacılar, katılımcıların belirli durumlarda nasıl ve bazen neden anlamlar ve eylemler inşa ettiklerini incelerler. Teori, araştırmacının görüşüne bağlıdır; onun dışında kalmaz ve durmaz. Objektif yaklaşım ise yapılandırmacı yaklaşımla çelişmektedir.

Objektivist gömülü teori, pozitivist gelenek içinde yer alır ve bu nedenle verilere kendi içlerinde gerçekmiş gibi davranır ve onların üretim süreçlerine katılmaz. Bu duruş, verilerin ortaya çıktığı sosyal bağlamı, araştırmacının etkisini ve genellikle gömülü teorisyenler ile araştırma katılımcıları arasındaki etkileşimleri siler. Objektivist bir teorisyen, verilerin bilinebilir bir dünya hakkındaki nesnel gerçekleri temsil ettiğini varsayar. Veriler dünyada zaten mevcuttur; araştırmacı onları bulur ve onlardan teoriyi 'keşfeder'. Bu görüş, keşfedilmeyi bekleyen bir dış gerçekliği ve onunla ilgili gerçekleri kaydeden tarafsız bir gözlemciyi varsayar. Objektivist teorisyenler, yöntemlerin dikkatli uygulanmasının teorik anlayış ürettiğine inanırlar. Roller, bir oluşturunca ziyade araştırma süreci için bir kanal haline gelir. Nesnel gömülü teorisyenler farklı gözlemcilerin aynı gerçekliği keşfettiklerinde benzer şekilde tanımlayacaklarını varsayarken yapılandırmacı gömülü teorisyenler farklı yorumların gelebileceğini kabul ederler.

Araştırmacının, tarafsız olarak dış gerçeklikte keşfettiği verileri nesnel ve yöntemlere bağlı bir analiz süreciyle sunmayı amaçlamasından dolayı bu çalışmada objektivist gömülü teori yaklaşımı tercih edilmiştir.

3.2. Katılımcılar

Katılımcılar amaçlı (olasılıklı olmayan) örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme, kolay ulaşılabilir örneklem yöntemleri birlikte kullanılarak belirlenmiştir. Patton (2014) bir çalışmada birden fazla örneklem stratejisinin benimsenebileceğini belirtmiştir (s. 247). Dolayısıyla, bu çalışmada araştırmanın amacına uygun olacak şekilde belirlenen ölçüt doğrultusunda araştırmacının kolay ulaşabilmesine de olanak sağlayacak örneklem tercih edilmiştir. Tez, amacı itibarıyla ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümlerinde (ispat anlatımı içeren) matematik alan derslerine giren öğretim elemanlarının incelenmesini gerektirdiğinden bu ölçüt kullanılarak katılımcılar araştırmacının kolay ulaşabileceği bir üniversiteden olacak şekilde belirlenmiştir. Kolay ulaşılabilir örneklemin tercih edilme sebebi, ispat anlatım yapılarının gözlemlenebilmesi için çok sayıda dersin video kaydının yapılmasını ve gerektiğinde öğretim elemanlarına yüz yüze ulaşarak söylemleri ve uygulamalarına yönelik açıklama istenmesini daha mümkün kılmasıdır.

Bu çalışmanın katılımcıları, bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesinde ilköğretim veya ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümlerinde matematik alan dersleri veren 7 öğretim elemanından (3 kadın, 4 erkek) oluşmaktadır. Etik kurallar gereği katılımcıların kimlik bilgilerini gizli tutmak amacıyla, tüm katılımcılar dersleriyle alakalı bir takma ad ile anılmıştır. Öğretim elemanları kullanılan takma ad konusunda bilgilendirilmiş ve onayları

alınmıştır. Tablo 2 öğretim elemanlarına yönelik bilgileri (bölümleri, pozisyonları, öğretim (mesleki) deneyimleri) içermektedir.

Tablo 2

Öğretim Elemanlarının Anabilim dalları, Pozisyonları, Öğretim Deneyimleri

Katılımcılar	Anabilim Dalı	Unvan	Verdikleri dersler
Dr. Kompleks	OMT*	Profesör	Kompleks Analiz (30 yıl), Analiz III-IV (20 yıl), Soyut Matematik (3 yıl), Reel Analiz (10 yıl), Diferansiyel Denklemler (5 yıl), Genel matematik (5 yıl), Fonksiyonel Analiz (15 yıl)
Dr. Vektör	İMT**	Profesör	Analiz I-II (15 yıl), Analitik Geometri (6 yıl), Diferansiyel Denklemler (11 yıl), Diferansiyel Geometri (3 yıl), Genel Matematik (9 yıl)
Dr. Soyut	İMT	Profesör	Soyut Matematik (10 yıl), Mantık (10 yıl), Cebire Giriş (10 yıl), Sayılar Kuramı (8 yıl), Lineer Cebir (4 yıl), Topoloji (2 yıl)
Dr. Türev	OMT	Profesör	Analiz I-II (15 yıl)
Dr. Öklid	OMT	Dr. Öğretim Üyesi	Geometri (2 yıl), Nümerik Analiz (10 yıl),
Dr. Uzak	OMT	Dr. Öğretim Üyesi	Analiz (15 yıl), Soyut Matematik (5 yıl), Mantık (5 yıl), Geometri (14 yıl), Lineer Cebir (4 yıl), Diferansiyel Denklemler (4 yıl), Diferansiyel Geometri (4 yıl), Nümerik Analiz (4 yıl), Analitik Geometri (14 yıl), Genel Matematik (15 yıl)
Dr. Topoloji	OMT	Öğretim Görevlisi	Topoloji (14 yıl), Analiz (14 yıl), Lineer Cebir (2 yıl), Diferansiyel Denklemler (11 yıl), İstatistik (9 yıl), Genel Matematik (14 yıl), Analitik Geometri (3 yıl)

* Ortaöğretim Matematik Eğitimi **İlköğretim Matematik Eğitimi

Bu çalışmadaki katılımcıların hepsi deneyimli öğretim elemanlarıdır. Ve hepsi de uzun süredir matematik eğitimi bölümünde ispat temelli dersler de dahil olmak üzere

matematik dersleri vermektedir. Dr. Kompleks ve Dr. Vektör matematik bölümünde doktora sahiptir. Diğer öğretim elemanlarının doktora ise matematik eğitimi üzerinedir.

Tablo 3, öğretim elemanlarının gözlem yapılan derslerine yönelik bilgileri (dersin adı, hangi dönemde verildiği, sınıf mevcudu ve dersin içeriği) içermektedir. Bu çalışmada ders video kayıtları 2016-2018 yılları arasında yapıldığından dersler ve bu derslerin verildiği dönemler bu tarihler arasındaki öğretim programına göre yazılmıştır.

Tablo 3

Ders video kaydı yapılan ders içeriği, bölümü verildiği dönem ve öğrenci sayısı

Ders (Öğretim Elemanı)	Bölüm/ Dönem	Sınıf mevcudu	Dersin içeriği
Kompleks Analiz (Dr. Kompleks)	OMT/ 5.Dönem	22	Kompleks sayıların aksiyomatik sayısı. Kompleks sayılarla analitik geometri. Kompleks üstel fonksiyon, trigonometrik fonksiyonlar, hipertatik fonksiyon. Logaritma fonksiyonu, ters trigonometrik ve ters hipertatik fonksiyon. Kompleks üst, kompleks terimli dizi. Kompleks fonksiyonlarda limit, süreklilik ve türev. Analitik fonksiyon kavramı. Kompleks eğrisel, integral tanımı, özellikler, Cauchy teoremi. Cauchy integral formülü ve sonuçları. Kompleks sayı serileri, fonksiyon dizileri ve serilerine giriş.
Analiz III (Dr. Kompleks)	OMT/ 3. Dönem	21	n^2 boyutlu öklit uzayları, $\mathbb{R}^n$ nin topoloji. Bağlantısız ve bağlantılı nokta kümeleri, bölge kavramı. n^2 reel değişkenli ve reel değerli fonksiyon kavramı. n^2 reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramı. Kısmi türevler. Zincir kuralı ve uygulamaları. Tam diferansiyel kavramı ve uygulamaları. Kapalı fonksiyon teoremleri, İki reel değişkenli fonksiyonların Taylor açılımı uygulamaları, maksimum-minimum, Ekstremum ve uygulamaları
Cebire Giriş (Dr. Soyut)	İMT/ 5. Dönem	45	İkili işlemler, grup tanımı, alt gruplar, permütasyon grupları, homomorfizma, devirli gruplar, kalan sınıfları, normal alt grupları, bölüm grupları, halka tanımı, alt halkalar, idealler.
Analitik Geometri I (Dr. Vektör)	İMT/ 5. Dönem	45	Düzlemde vektörler, doğru, çember, elips, hiperbol, parabol.

Analiz I (Dr. Vektör)	İMT/ 3. Dönem	43	Tek değişkenli fonksiyonlarda limit süreklilik, süreksizlik çeşitleri; türev kavramı ve türev alma kuralları. Trigonometrik, logaritmik, üstel, hiperbolik fonksiyonlar ve bunların tersleri ile kapalı fonksiyonların türevleri. Yüksek mertebeden türevler. Fonksiyonların ekstremum ve mutlak ekstremum noktaları, ekstremum problemleri. Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri. Sonlu Taylor Teoremi. L'Hospital Kuralı ve limit hesaplamaları. Diferansiyel ve lineer artma. İntegral kavramı, belirli-belirsiz integraller, integral alma teknikleri, belirli integralle alan hacim hesaplamaları
Analiz II (Dr. Türev)	OMT/ 3. Dönem	20	Türev uygulamaları, Tek reel değişkenli reel fonksiyonların ekstremum ve mutlak ekstremum noktaları, Rolle ve Ortalama değer problemleri, sonlu Taylor Teoremi, L' Hospital kuralı ve bu kural ile limit hesaplamaları, Fonksiyonların artanlık-azalanlık ve aşağı-yukarı büyüklüklerinin birinci ve ikinci türev ile ilişkilendirilmesi, Diferansiyel, Fonksiyonların değişimlerinin incelenmesi ve grafiklerinin çizilmesi, Belirsiz integraller, İntegral alma kuralları, Belirli integraller, İntegral uygulamaları, belirli integral ile alan ve hacim hesaplamaları
Geometri (Dr. Öklid)	OMT/ 6. Dönem	22	Geometrinin aksiyomatik yapısı ve Öklid geometrisi. Üçgenlerde eşlik ve benzerlik. Pisagor teoremi, açıortay teoremi, kenarortay teoremi, Menelaus, Ceva ve Stewart teoremleri. Üçgensel bölgenin alanı. Heron formülü, iç ve dış teğet çemberler aracılığıyla üçgensel bölgenin alanının elde edilmesi. Özel dörtgenler. Çember. Üçgenin bazı özel noktaları: Fermat ve Nagel noktaları Bazı modern geometri teoremleri: Euler doğrusu, Simpson doğrusu, Morley teoremi, Napolyon üçgeni. Dönüşümler, öteleme, dönme, simetri ve homoteti. Süslemeler. Uzay geometri Katı cisimler
Lineer Cebir I (Dr. Uzay)	OMT/ 1.Dönem	20	Cebirsel yapılar, grup, halka ve cisim. Vektör uzayı tanımı ve örnekler. Alt vektör uzayları ve örnekler. Lineer bağımlılık ve bağımsızlık. Baz(taban) ve boyut. Kesişim ve toplamsal alt vektör uzayları. Direk toplam ve uygulamaları. Lineer dönüşümler. Lineer dönüşümlerde tanım, değer ve görüntü kümeleri ve çekirdek kavramı.
Topoloji (Dr. Topoloji)	OMT/ 6. Dönem	22	Topolojik Yapı, Topolojik Uzay. Topolojik Uzayda Bir Kümenin İç, Dış, Yığılma Noktası ve Uygulamalar. Topolojik Uzayda Bir Kümenin Kapanış, Sınır Noktası. Topolojik Yapıların Karşılaştırılması. Alt Uzay. Taban ve Alt Taban. Komşuluklar. Sürekli, Açık ve Kapalı Fonksiyonlar. Homeomorfizm. Başlangıç ve Sonuç Topolojisi. Çarpım ve Bölüm Uzayları, Metrik Uzay.

3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları

Nitel bulgular mülakatlar, doğrudan gözlem ve yazılı dokümanlar olmak üzere üç farklı veri toplama yoluyla oluşmaktadır (Patton, 2014, s. 4). Denzin (1978) bir araştırmada farklı veri, araştırmacı, kuram ve yöntemler kullanılmasını göz önünde bulundurarak dört tür üçgenleme olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmada öğretim elemanlarının ispat anlatım yapılarının belirlenmesinde hem görüşlerinin alındığı mülakat verileri hem de dersteki uygulamalarından elde edilen video verileri kullanıldığından bu çalışmanın *veri üçgenlemesi* türünde olduğu söylenebilir.

Öğretim elemanlarının derste ispat yapmaya yönelik görüşleri, ispatlanacak ifadeyi (teoremi, önermeyi) ve ispatları nasıl anlattıkları ve anlatırken yaptıkları uygulamaları kapsamı bakımından “*ispat anlatım yapısı*” ifadesi kullanılmıştır. Yani, bu çalışmada “ispat anlatımı” ifadesi ile öğretim elemanlarının derste ispatları nasıl anlattığı, mevcut öğretim uygulamaları ve ispat anlatımına yönelik görüşleri kastedilmektedir. İspat anlatımı ise ispatlanacak ifadeyi, ispatın kendisini ve ispat süresince verilen tüm tanımları, yorumları, örnekleri, soruları vb. uygulamaları içermektedir. Sonuç olarak bu çalışmada, öğretim elemanlarının ispat anlatım yapıları incelenmiştir. Giriş bölümündeki Şekil 1 öğretim elemanlarının ispat anlatım yapılarının hangi bağlamlarda ele alındığını göstermektedir. Bu bağlamda, Tablo 4, araştırmacının araştırma kapsamına göre ihtiyaç duyduğu bilgileri ve bu bilgileri hangi veri toplama tekniği ile elde ettiğini göstermektedir.

Tablo 4

Araştırma kapsamında ihtiyaç duyulan bilgiler ve veri toplama yöntemleri

Alt problem	Araştırmacının ihtiyaç duyduğu bilgi	Yöntem
1. alt problem	Öğretim elemanlarının ispatın matematik eğitiminde önemine/amacına yönelik görüşleri	Mülakat
2. alt problem	Öğretim elemanlarının derste teorem ve ispat sunumlarındaki uygulamaları, Öğretim elemanlarının derste ispat anlatım esnasında hangi uygulamalara/eylemlere değer verdiklerine ilişkin görüşleri Öğretim elemanlarının derste sunacakları ispatta olmasını istedikleri özelliklere yönelik görüşleri Öğretim elemanlarının derste bazı teoremleri ispatlamamaya ilişkin görüşleri ve dersteki uygulamaları	Mülakat + Gözlem

3. alt problem	İspat sunumuna öğrenci katılımı ve ispatın öğrenci tarafından anlaşılmasına yönelik düşünceleri ve uygulamaları Öğretim elemanlarının öğrencilerin ispat okumasına yönelik görüşleri Öğretim elemanlarının öğrencilerin ispat yapmasına yönelik görüşleri Öğretim elemanlarının öğrencilere ve öğrencilerin ispat açısından durumlarına ilişkin görüşleri	Mülakat + Gözlem
4. alt problem	Öğretim elemanlarının ders kitaplarında ispata yönelik görüşleri	Mülakat

Araştırmada gerçekleştirilen görüşme ve gözlemlerin hazırlanma ve gerçekleştirilme süreçleri aşağıda başlıklar halinde detaylandırılmıştır.

3.3.1. Görüşmeler

Mülakatlar kişilerin deneyimleri, fikirleri, duyguları ve bilgileri ile ilgili doğrudan alıntılar yapılabilmesine olanak sağlamaktadır (Patton, 2014, s. 4). Nitel mülakatların amacı mülakat yapılan kişilerin dünyayı nasıl gördüklerini anlamak, kullandıkları terminolojiyi ve yargıları öğrenmek ve kişisel bakış açılarının ve deneyimlerinin karmaşıklığını yakalayabilmektir (Patton, 2014, s. 348).

Açık uçlu mülakatlarla veri toplama, mülakat yapılmadan önce mülakat sorularının belirlenme ve yapılandırılma derecesine bağlı olarak yapılandırılmamış, yarı yapılandırılmış ve yapılandırılmış olmak üzere üç farklı görüşme yaklaşımı içermektedir. Yarı yapılandırılmış görüşme, araştırmacının hem görüşme kılavuzu doğrultusunda ilerlemesine hem de ihtiyaç duyduğunda derine inebilmesine imkân sağlaması sebebiyle (Gürbüz ve Şahin, 2017) bu çalışmada gerçekleştirilen birinci mülakatta tercih edilmiştir. Görüşme esnasında soruların cevaplarında detaylandırmanın gerekli görüldüğü durumlarda ek sorular yöneltilmiştir. Verdikleri dersin türü ve süresi gibi nesnel bilgi edinmeyi amaçlayan iki giriş sorusunun ardından derste ispat anlatımlarına ve öğrencilerin ispat öğrenmesine yönelik 18 soru sorulmuştur. Görüşme formunun oluşturulmasına yönelik aşamalar aşağıda alt başlık altında açıklanmıştır.

Bu çalışma kapsamında tüm öğretim elemanlarıyla biri ders video kayıtları devam ederken diğer ikisi ders video kayıtlarının ardından olmak üzere toplam üçer görüşme gerçekleştirilmiştir. Birinci görüşmede öğretim elemanlarına ispatın öğretimine yönelik belirlenen görüşme soruları sorulmuştur. Bu görüşme öğretim elemanlarının da izinleri doğrultusunda video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Görüşme de video kaydı yapılmasının

nedeni öğretim elemanlarının jest ve mimiklerinin de söylemlerini derinleştirdiğinin düşünülmesidir. Mülakat ortalama 30-45 dakika arasında sürmüştür.

İlk mülakattan ve ders video kayıtlarından elde edilen verilerin analizi devam ederken ikinci alt problemde ele alınan “sunulan tüm teoremlerin/önergelerin ispatının yapıp yapılmadığına” yönelik dersten elde edilen veriler öğretim elemanlarının görüşlerinin tekrar alınmasını ve hem mülakat hem de video verilerinden oluşturulan kategoriler için de katılımcı doğrulaması yapmalarını gerektirmiştir. Bu nedenle de yine yarı yapılandırılmış ikinci ve ilk mülakata göre daha kısa bir mülakat talep edilmiş ve gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmede öğretim elemanlarına derste ispatını sunmadıkları ve neden sunmadıklarına yönelik açıklama da yapmadıkları teoremler gösterilerek ispatı neden sunmadıkları sorulmuştur. Ayrıca ilk mülakatta “derste verdiğiniz tüm teoremleri/önergeleri ispatlar mısınız? yapmıyorsanız neden?” sorusuna verdikleri yanıtların analizi sonucunda oluşturulan kategoriler gösterilerek katılımcı doğrulaması yapmaları istenmiştir. Tüm katılımcılar oluşturulan kategorileri yerinde bulmuştur.

Yapılandırılmış olarak gerçekleştirilen üçüncü görüşme için birinci görüşmenin analizleri sonucunda oluşturulan ve seçme-sıralama tipi 10 soru içeren bir görüşme formu hazırlanmıştır. Birinci mülakat analizinden elde edilen veriler ile oluşturulan bu soru formu elde edilen ilk görüşlerin önem düzeyini göstermeyi amaçlamıştır. İlk mülakatta elde edilen görüşlerden oluşan kategoriler cümleler anlam kaybına uğramayacak şekilde ikinci sıralamalı-seçmeli soru formuna uyarlanmıştır. Bu form iki amaçla oluşturulmuştur. Birincisi öğretim elemanlarının mülakat esnasında bilerek veya unutarak beyan etmediği ifadelerle katılıp katılmadığını, bu görüşleri de önemli bulup bulmadığını görmektir. İkincisi ise kendisinin veya bir başka öğretim elemanının beyan ettiği ifadelerden hangilerini daha önemli bulduğunu ortaya çıkarmaktır. Bu soru formunun oluşturulmasına yönelik aşamalar aşağıda verilmiştir.

Görüşme Sorularının Belirlenmesi

Araştırmacı tarafından yapılan yüzeysel bir literatür taramasının ardından öğretim elemanlarının ispat öğretimine yönelik görüşlerinin belirlenmesi amacıyla 21 açık uçlu sorudan oluşan taslak bir form oluşturulmuştur. Belirlenen sorulara ilişkin Tez İzleme Toplantısında soruların herkes tarafından aynı biçimde anlaşılması ve kapsam geçerliği için komite üyelerinin görüşleri alınarak soru formunun ilk düzenlemesi yapılmıştır. Bu düzenlemede 1 soru çıkarılmış, 2 soru birleştirilmiş, 3 soru eklenmiş ve 11 soru ise yeniden düzenlenmiştir. Soruların doğru anlaşılması yani anlaşılabilirlik yönünden değerlendirilmesi için bir uzman görüşüne başvurulmuştur. Uzmardan gelen görüşler doğrultusunda görüşme

formunda dil bakımından gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Soru formunun bu hali ile bir pilot görüşme gerçekleştirilmiştir. Tez izleme komitesi toplantısında anlaşılabilirlik, cevapların tatmin edicilik düzeyi, bütünlük ve soruların yönlendiricilik düzeyi pilot görüşmeden de elde edilen bilgiler doğrultusunda tartışılmış ve benzer yanıtlarla sonuçlanan 2 soru formdan çıkarılmıştır. Son düzeltmelerin de ardından tez izleme komitesi üyelerinin onayı ile görüşme sorularının son şekli ortaya çıkmıştır. Görüşme soruları Ek 3’te verilmiştir.

Görüşme formunda yer alan sorular aşağıdaki temaları içermektedir:

- Öğretim elemanlarının mesleki deneyimlerini ortaya çıkarmaya yönelik sorular
- Öğretim elemanlarının ispat öğretiminde öğrencilere yönelik görüşlerini belirlemeye ilişkin sorular
- Öğretim elemanlarının derslerinde ispat anlatımlarındaki uygulamalarını belirlemeye yönelik sorular

Yukarıda bahsedildiği gibi ispat öğretimine yönelik ilk görüşme yanıtlarından bazılarının analizleri sonucunda elde edilen kategoriler ile sıralama ve seçme sorularından oluşan görüşme formu oluşturulmuştur. Bu formda ilk mülakatta sorulan tüm sorular kullanılmamıştır. Bunun nedeni hem her sorunun bu şekilde sıralanacak cevaplar içermemesi hem de anketin fazla uzun olmasına sebebiyet verebilecek olmasıdır. Bu nedenle seçme ve sıralama formu için en uygun olan mülakat soruları (10 soru) Tez İzleme Komitesi üyeleriyle birlikte seçilmiş ve pilot uygulamanın ardından yeniden düzenlenmiştir. Seçme-sıralama sorularından oluşan görüşme formundan örnek sorular Ek 4’te verilmiştir. Bu formda kullanılan sorular öğretim elemanlarının: Matematik eğitiminde ispatın önemine, öğrencilerin ispat okumalarının ve yapmalarının neden istendiğine, derste sunulacak ispatta olması beklenen özelliklere, ders kitabında ispata ilişkin beklentilere, ispat sunumunda yöntemin vurgulanmasının faydalarına, öğrencinin derste sunulan ispatı anladığına ilişkin göstergelere, derste ispat anlatımında olması gerekenlere, öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerle, bu güçlüklerin nedenlerine ve bu güçlüklerin giderilmesi için önerilere yönelik görüşlerini içermektedir.

3.3.2. Ders Video Gözlemleri

Öğretim elemanlarının ispatlara yönelik derste uyguladıklarını doğrudan gözlemleyebilmek, mülakatla elde edilen verinin çeşitlendirilmesini (üçgenlemeyi) sağlamak ve dolayısıyla “daha objektif veri elde edebilmek” (Gürbüz ve Şahin, 2017, s. 183) “insanların

etkileşim kurduğu bağlamı daha iyi yakalayabilmek” ve “keşif odaklı ve tümevarımsal olabilmek” (Patton, 2014, s. 262) amacıyla bu çalışmada gözlem de yapılmıştır.

Gözlemcinin gözlem sürecindeki rolüne bağlı olarak katılımcı gözlem ve doğrudan gözlem olmak üzere iki temel gözlem türü ve araştırmaların gereksinimlerine göre gözlemcinin rolünün bu iki uç arasında çeşitli yerlerde bulunduğu birçok gözlem türü bulunmaktadır (Gülbüz ve Şahin, 2017). Bu çalışmada araştırmacı “incelemek istediği ortamı gözlemleyerek veri toplamayı” (Gülbüz ve Şahin, 2017, s. 182) amaçladığından doğrudan gözlem tercih edilmiştir. Ayrıca, araştırmacı incelenecek ortamın içinde yer almadığından bu gözlem tam gözlemdir.

Bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarına matematik alan dersleri veren 7 öğretim elemanının Tablo 3’te verilen dersleri 3-9 hafta boyunca video kamera ile izlenmiştir. Kamera tahtayı ve öğretim elemanını görecektir şekilde yerleştirilmiştir. Öğrenciler araştırma kapsamında olmadığından kameraya alınmamıştır. Yalnızca tahtaya kalkan öğrenciler kaydedilmiştir. Ders video gözlemlerinin yapılabilmesi için üniversiteden gerekli izinler alınmıştır (bkz. Ek 2).

Tablo 3’te hangi derslerin, ne kadar öğrenciyle hangi sınıf seviyesinde gözlemlendiğine yönelik bilgiler verilmiştir. Gözlenen ders sayıları, süreleri ve ispat sunum sayıları ise Tablo 5’te verilmiştir.

Tablo 5

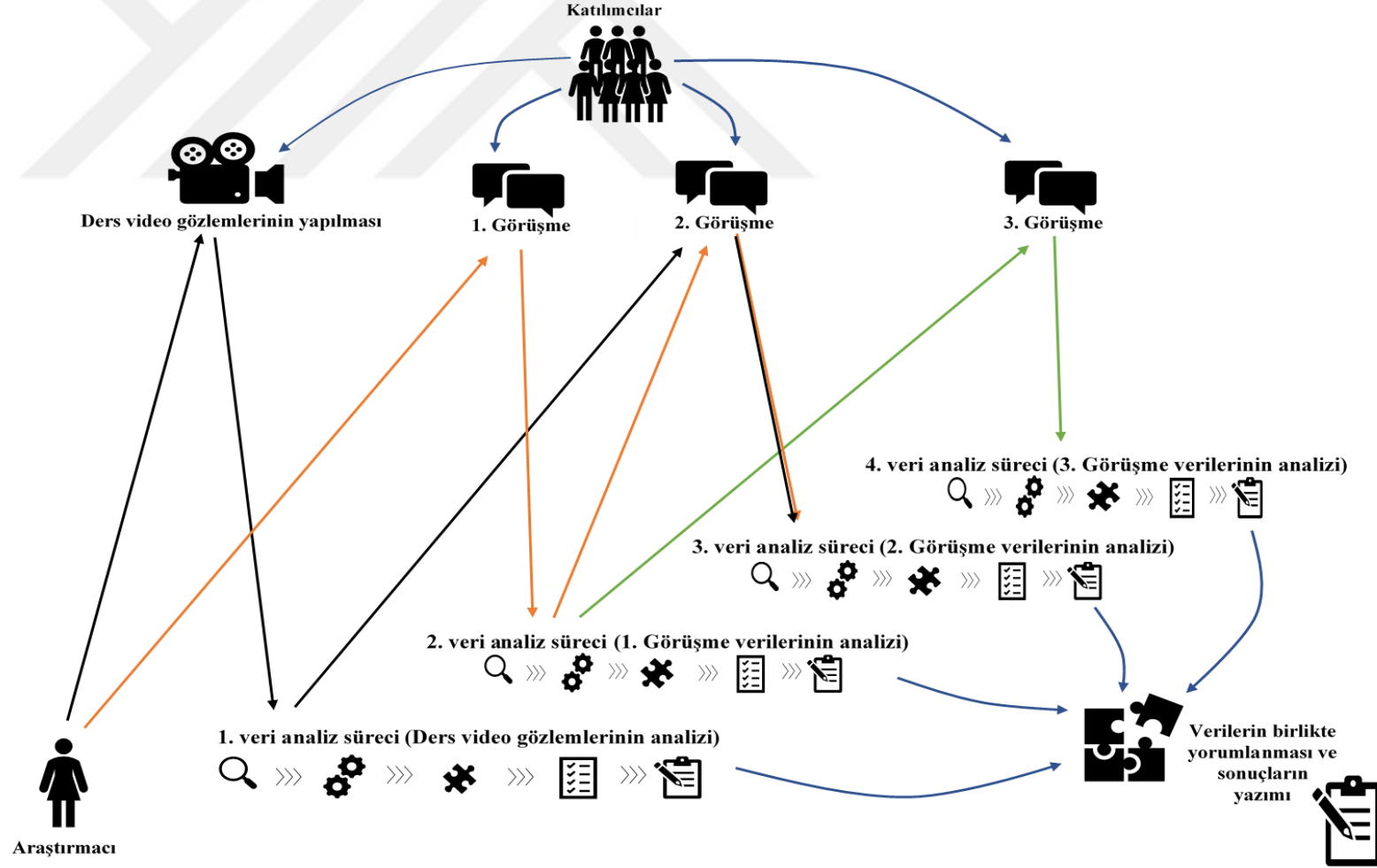
Gözlem yapılan ders sayısı, süre ve gözlemlenen ispat sayısı

Öğretim Elemanı	Ders adı	Video kaydı yapılan ders sayısı	Gözlem yapılan toplam süre (dakika)	Gözlemlenen ispat sayısı
Dr. Kompleks	Kompleks Analiz	3	327	17
	Analiz III	3	414	3
Dr. Vektör	Analiz I	8	479	11
	Analitik Geometri I	3	168	7
Dr. Türev	Analiz II	5	386	17
Dr. Soyut	Cebire Giriş	8	909	33
Dr. Öklid	Geometri	6	584	31
Dr. Uzak	Lineer Cebir I	4	394	18
Dr. Topoloji	Topoloji	9	763	30

3.4. Verilerin Analizi

Bu bölümde bu çalışmanın da veri çözümleme sürecini teşkil eden gömülü teoride veri analizi ve bu çalışmada nasıl gerçekleştirildiği açıklanmıştır. Görüşme verilerinin ve ders gözlem verilerinin toplanmasında ve analizinde izlenen adımlar Şekil 4'te özetlenmiş ve ardından detaylı olarak açıklanmıştır.

İlk mülakat transkript edildikten sonra gömülü teori yönteminin adımları izlenerek kodlar, kategoriler ve temalar oluşturulmuştur. Bu kategori ve temalar yardımıyla üçüncü görüşme soruları belirlenmiştir. 3. görüşmenin de transkript edilmesinin ardından ilk üç mülakat verileri birlikte yorumlanmıştır. Video verilerinin analizleri birkaç aşamada yapılmıştır. Öncelikle derslerdeki ispat anlatım bölümleri belirlenmiş ve transkript edilmiştir. İspat anlatımı teoremi/önermeyi, ispatın kendisini ve teorem-ispat sunumu içinde verilen tüm tanımları, yorumları, örnekleri, soruları vb. içermektedir. Bu bölümler belirlenirken öğretim elemanının ispatını sunduğu tüm teorem, önerme, iddia veya problemler dikkate alınmıştır. Bunun yanı sıra bu çalışma kapsamında öğretim elemanının formel ispatını yapmadığı teoremleri, önermeleri veya iddiaları içeren kısımlar da belirlenmiştir ve bu bölümlerin de transkriptleri yapılmıştır. Ders videolarının içerik analizinde frekans analizi tekniği kullanılmıştır. Yani bazı ifadelerin ve eylemlerin hangi sıklıkta görüldüğü sayılarak betimlenmiştir.



Şekil 4. Veri toplama ve analiz süreci

Mülakat video kayıtları ve ders video kayıtlarından belirlenen ispat anlatım bölümleri araştırmacı tarafından transkript edilmiştir. İspat anlatım bölümlerinin yazımında öğretim elemanının ifadelerinin yanı sıra tahtada yazdıkları da ekran görüntüsü alınarak eklenmiştir.

Gömülü teoride veri toplama ve analiz süreçleri birbirleriyle ilişkili olduğundan ve analiz, verinin en ufak birimi toplandığında başladığından ilk video kayıtlarından itibaren veri analiz süreci başlamıştır. Birçok nitel araştırmada sistematik analize başlanmadan önce verinin çoğu toplanmış olur. Ancak gömülü teoride analiz en baştan gereklidir çünkü bir sonraki mülakatlar ve gözlemleri yönlendirmekte kullanılan memo (hatırlatıcı not) yazımı da başlamalıdır.

Gömülü teoride veri, kodlama ve teori üretme olmak üzere üç temel araştırma ve analiz süreci bulunmaktadır. Bu temel analiz sürecinde kodlama aşaması bazı araştırmacılar tarafından farklı sınıflamalarla ifade edilmiştir. Örneğin Glaser ve Strauss (1967) bu aşamayı sabit, kuramsal ve merkezi kodlama olarak; Strauss ve Corbin (1998) açık, eksensel ve seçici kodlama olarak; Charmaz (2006) ise başlangıç ve seçici kodlama olarak sınıflandırmıştır. Bu çalışmada Strauss ve Corbin (1998) sınıflandırması dikkate alınmış ve yürütülen veri analiz süreci Strauss ve Corbin (1990; 1998), Teppo (2015), Charmaz'dan (2006) yararlanılarak aşağıda başlıklar halinde özetlenmiştir:

Açık kodlama

Charmaz (2006) ortaya çıkması hedeflenen teorinin iskelet olduğunu iddia ederek kodlama aşamasını kemiklere benzetmiştir. İlk veri kümesi oluşturulur oluşturulmaz açık kodlama başlamıştır. Bu kodlama sürecinde veriye sorular sorulup olaylar sürekli karşılaştırılmıştır. Bu sürecin amacı veriyi kodlanmış olayların bir koleksiyonu halinde kavramsallaştırmaktır (Teppo, 2015). Gözlemler veya transkriptler tanımlanabilir küçük parçalara veya olaylara ayrılmıştır. Bir kelimedenden, bir ifadeden, bir cümleden veya bütün bir paragraftan oluşabilen bu ayırık kısımlar belirli olayları temsil eden kavramları tanımlamak için “Burada ne oluyor?” veya “Bu kişiler ne yapıyor?” veya “Bu nedir?” gibi hassaslaştırma soruları sorularak etiketlenmiş veya kodlanmıştır. Çok sayıda küçük parçalardan oluşan ve ortaya çıkacak resmin bilinmediği bir yapbozda parçaları sürekli karşılaştırarak benzerlikler farklılıklar belirlenmeye çalışılmıştır. Veriyi benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflamak için sürekli karşılaştırmayı kullanarak olabildiğince çok olay kodlanmıştır. Yeni tanımlanan her bir küçük parça daha önce kodlanmış olanlarla karşılaştırılmıştır. Kodlar kısa, basit, etkin ve analitik tutulmaya dikkat edilmiştir. Benzer olgulara aynı kod verilmiş ve benzer kodlar kategorileri oluşturmak için gruplanmıştır. Kodlama süreci boyunca hatırlatıcı notlar tutulmuştur. Hatırlatıcı notlar, her bir kodun kurulduğu orijinal veriye işaret etmektedir ve araştırmacının göze çarpan özelliklerle ilgili düşüncelerini kaydetmektedir (Teppo, 2015).

Teorik hatırlatıcı not alma gömülü teori yapmanın ayrılmaz bir parçasıdır (Corbin ve Strauss, 1990). Hatırlatıcı notlar devam eden veri toplama ve analizi boyunca fikirleri ve görüşleri kayıt altına almak için sürekli yazılır. Hatırlatıcı notlar belirli olaylardan ziyade bunlardan elde edilen kavramsal fikirlerle ilgilidirler (Teppo, 2015), işlenmemiş veriyi bulgulara taşıyan ilişkileri ve kavramları gösterirler (Corbin ve Strauss, 2008) ve hatırlatıcı notlar alırken araştırmacı fikirlerini hangi formda rahat hissediyorsa o formda yazmalıdır (Teppo, 2015).

Açık kodlama analizinde veriler kelime kelime, satır satır veya olay bazında kodlanabilir (Charmaz, 2006). Yani kodlanan veriler bazen bir kelime bazen bir cümle bazen de bir paragrafın tamamı olabilmektedir. Charmaz (2006) kelime, satır veya olay bazında yapılan dikkatli kodlamanın araştırmacıyı gömülü teorideki *uygunluk ve alaka düzeyi* kriterlerini yerine getirmeye yönlendirdiğini belirtmiştir. Yani, kodlar oluşturulduğunda ve bu kodlar katılımcıların deneyimlerini kristalleştiren kategoriler haline getirildiğinde çalışma deneysel dünyaya *uymuş* olur ve neler olup bittiğini yorumlayan, örtük süreçler ile yapılar arasındaki ilişkileri görünür kılan keskin bir analitik çerçeve sunulduğunda ise bu çerçeve içeriği ile *alakalı hale gelmiş* olur (Charmaz, 2006).

Boşluk olduğu düşünülen alanlarda tekrar veri toplama sürecine dönülmüştür. Bu aşama gerekli verilerden yoksun olunan alanları görmeyi sağladığından (Charmaz, 2006) beşinci alt probleme yönelik ek bir mülakat ihtiyacı olduğu fark edilmiş ve bir mülakat daha yapılmıştır. Bu sürecin hangi noktada sonlanacağı kararı Charmaz'a (2006) göre araştırmacının yeteneği ile ilgilidir. Araştırmacı kuramsal doyuma ulaşmış ve ulaşmadığına karar vermelidir. Kuramsal doyuma ulaşma hem veri toplama hem de verilerin kodlanmasında söz konusudur. Her iki durumda da araştırmacı ve bir uzmanın görüşü doğrultusunda bu çalışmada hem veri hem de kodlama açısından doyuma ulaşıldığı düşünülmüş ve yapılan işlem sonlandırılmıştır.

Eksenel kodlama

Eksenel kodlamanın amacı, büyük miktarda veriyi sıralamak, sentezlemek ve düzenlemek ve açık kodlamadan sonra bunları yeni yollarla yeniden birleştirmektir. Eksenel kodlama, kategorileri alt kategorilerle ilişkilendirmeyi amaçlamakta ve nasıl ilişkili olduklarını sormaktadır. Bu aşamada açık kodlamada elde edilen kodlar birbirine bağlanarak kategoriler elde edilmiştir. Bu durumda yapbozun parçaları bir araya gelmeye başlamış yani kategoriler ve alt kategoriler ve bunlar arasındaki ilişkiler belirginleşmiştir. Bu aşamada araştırmacının teorik duyarlılığı arttıkça kategorileri ve kategoriler içinde ve arasındaki ilişkileri belirlemek daha kolay hale gelmektedir (Corbin ve Strauss, 1990). Amaç kategorileri geliştirmek olduğundan sorular sorulmaya devam edilmiştir. Daha önce oluşturulan kodlar arasında karşılaştırmalar yapılarak birbiriyle ilişkili olduğu tespit edilen kodlar

birleştirilmiştir. Bu aşamada, ilk aşamada oluşturulan kodların biraz daha rafine edilmesi söz konusudur. Görülen kodlama hataları düzeltilmiş ve geçici kategoriler oluşturulmuştur. Gerekli görüldüğü takdirde mevcut kategorinin ismi ve tanımı da düzeltilmiştir veya yeni kategoriler oluşturulmuştur. Oluşturulan kategoriler literatürde var olanlar ile karşılaştırılmış ve mevcut bir görüşe benziyorsa o ifade ile yazılmıştır.

Verideki temalar veya kategoriler belirlendikten sonra kodlama şemaları geliştirilmiştir. Bu kodlama şemalarının güvenilirliğini kontrol etmek amacıyla ikinci bir araştırmacı ifadeleri kodlamıştır. Bu araştırmacıya bu kodlama şeması ve rastgele sıralanmış katılımcı ifadeleri verilerek ifadeleri kategorilere ataması istenmiştir. Yazar ve ikinci araştırmacı bu kodlarda %85 mutabık kalmışlardır. Mutabık olunmayan kodlar üzerinde yazar ve araştırmacı birlikte çalışarak sınıflama ve kodlama şeması tamamlanmıştır. Örneğin, matematiği tanıtmaya katkı teması altında ispatın ‘matematiğin formel yönünü gösterdiği’ görüşü öncelikle ayrı bir kategori olarak ele alınmışken yazar ve araştırmacının benzer bir anlam içerdikleri yönünde ortak kararı ile bu kategori ‘matematiğin aksiyomatik yapısını anlamayı sağladığı’ kategorisi ile birleştirilmiştir.

Seçici kodlama

Bu aşamada daha soyutlanmış merkezi kategoriler tanımlanmıştır. Amaç daha büyük ve genel bir şema oluşturmaktır. Bu aşama analizdeki son aşamadır. Burada çekirdek teoremin temel hatlarının belirlenmesi söz konusudur. Çekirdek kategori çalışmanın merkez olgusunu temsil eder. Bu kategori şu tür sorular sorularak belirlenir: “Bu araştırmada sunulan ana analitik fikir nedir? Eğer bulgularım birkaç cümlede kavramsallaştırılsa/özetlense ne söylerim? Ve kategoriler arasında gördüğüm değişimi nasıl açıklarım?” (Corbin ve Strauss, 1990). Literatürden de faydalanarak oluşturulan kategorilerin sağlamlaştırılması sağlanmıştır. Kategoriler ve temalar belirlenerek nihai kategoriler oluşturulmuştur. Seçici kodlama tüm kategorilerin bir çekirdek kategori etrafında birleşmesi ve kategorilerin betimleyici detaylarla doldurulması sürecidir.

Corbin ve Strauss (1990) bazı gömülü teori çalışmalarında araştırmacıların bir çekirdek kategori oluşturmakta zorlandıklarını, bunun bazen deneyimli araştırmacılar da bile ortaya çıkmadığını ve araştırmacının kategoriler içerisinde meseleyi en iyi yakalayanı seçmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Ek olarak, yeterli kodlamanın eninde sonunda hangi kategorinin veya kavramsal etiketinin tüm analizi entegre ettiğinin net görüntüsüne ulaştıracağını eklemişlerdir (Corbin ve Strauss, 1990).

Merriam (2009) gömülü teoremin hem tümevarımsal hem de tündengelimsel analiz süreci içerdiğini söylemiştir. Çünkü çalışmanın başında analiz stratejisinin tamamen tümevarımcı olduğunu yani veri parçalarına bakıp, bunlardan geçici kategoriler türetildiğini

ancak daha fazla veri toplanıp analiz edildikçe, önceki verilerden türetilen kategorilerin tutup tutmadığının kontrol edildiğini, çalışmanın sonuna doğru ilerledikçe de son kategori kümesini desteklemek için daha fazla kanıt arandığını ve büyük ölçüde tımdengelimci bir duruşla hareket edildiğini aktarmıştır.

3.5. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Araştırmanın bilimselliğinin sağlanması amacıyla bu çalışmada geçerlik ve güvenirlilik kriterlerinin tesis edilmesine yönelik önlemler alınmıştır. En genel anlamıyla araştırma sonuçlarının doğruluk derecesi araştırmanın geçerliğini, araştırma sonuçlarının tekrar edilebilirliği ise araştırmanın güvenirliliğini ifade etmektedir (Creswell, 2003). Nitel çalışmalarda geçerlik ve güvenirlilik kavramları anlamları itibariyle nicel çalışmalarda olduğu gibi değerlendirilemediğinden (Creswell, 2003; Merriam, 2009) bu kavramların yerine bu çalışmada inandırıcılık (iç geçerlik), aktarılabirlik (dış geçerlik) ve tutarlılık (güvenirlilik) boyutları değerlendirilmiştir. Araştırmanın bilimselliğini sağlamaya yönelik bu boyutların içeriği ve bu çalışmada nasıl sağlandığı aşağıda açıklanmıştır.

İç geçerlik (İnandırıcılık)

Merriam (2009), iç geçerlik kavramının bulguların gerçekte var olanı yakalayıp yakalamadığını sorguladığını ancak nesnel doğrunun ve gerçekliğin hiçbir zaman tam olarak yakalanamayacağını belirtmiştir. Bu yüzden nitel bir çalışmada bulguların *inandırıcılığını* artırılması için bazı stratejiler önermiştir. Aşağıda bu stratejilerin neler olduğu ve bu çalışmada bu stratejilerin nasıl uygulandığı açıklanmıştır:

- Nitel bir çalışmada inandırıcılığı arttıran stratejilerden en temel olanı ve ilki veri üçgenlemesidir (Merriam, 2009; Creswell, 2003). Bu çalışmada veri üçgenlemesi (mülakat ve gözlem) yapılarak bulguların inandırıcılığı sağlanmaya çalışılmıştır. Bu konuda ayrıntılı bilgi veri toplama süreci ve araçları bölümünde yer almaktadır.
- İnandırıcılığı sağlayacak ikinci ve bir başka yaygın strateji de “katılımcı doğrulaması” yani mülakat yaptığımız kişilerden ortaya çıkan bulgularla ilgili dönüt vermelerini istemektir (Merriam, 2009; Creswell, 2003). Nihai raporu veya belirli açıklamaları veya temaları katılımcılara geri götürerek ve bu katılımcıların bunların doğru olup olmadığına ilişkin fikirlerini belirlemektir (Creswell, 2003). Bu süreç ön (ilk) analizleri katılımcılardan bazılarına götürüp yorumların doğru olup olmadığını sormaktır. Bu çalışmada, alt problemlerden birinin analizleri için tüm katılımcılardan ve tüm alt problemlerin analizleri için ise katılımcılardan üç tanesinden katılımcı

doğrulaması istenmiştir. Öğretim elemanları, analizler sonucunda elde edilen kategorileri teyit etmişlerdir.

- İç geçerliği (inandırıcılığı) arttıran üçüncü strateji ise “araştırmacının pozisyonu açıklaması” yani “düşünümsellik”tir (Merriam, 2009; Creswell, 2003). Yani araştırmacının kendisini “insan aracı” olarak eleştirel şekilde yansıtmasıdır. Araştırmacılar kendi önyargılarını, eğilimlerini(tavırlarını) ve varsayımlarını ele alınan çalışma bağlamında açıklamalıdır. Bu tür açıklamalar okuyucunun araştırmacının veriyi nasıl o şekilde yorumladığına yönelik bir anlayış geliştirmesine yardımcı olmaktadır (Merriam, 2009). Bu çalışmada araştırmacının rolü bir sonraki başlıkta açıklanmıştır.
- Dördüncü strateji meslektaş değerlendirmesi/hakemliği yani bir meslektaştan ham verinin bir kısmını incelemesini ve bulguların veriye uygun olup olmadığını değerlendirmesini istemektir (Merriam, 2009; Creswell, 2003). Bu çalışmada ayrıca üç araştırmacı tarafından bulguların veriye uygun olduğu teyit edilmiştir.
- İç geçerliği (inandırıcılığı) arttırmak için kullanılacak stratejilerden beşincisi ise veri toplamada yeterli katılımdır (Merriam, 2009). Yani kaç kişiyle mülakat veya ne kadar süre gözlem gerektiği gibi sorulardır. Cevapları, çalışmanın kendisine bağlıdır. En önemli kural veri ve ortaya çıkan bulguların doyma noktasına eriştiğinin hissedilmesidir. Yani aynı şeyleri tekrar tekrar duymaya veya görmeye başlamak ve toplanan verilerde yeni bilginin ortaya çıkmamasıdır (Merrriam, 2009). Bu çalışmada araştırmacı ve Tez İzleme Komitesi tarafından verinin yeterli olduğu kanaatine varılmıştır.

Dış Geçerlik (Aktarılabilirlik)

Dış geçerlik bir çalışmanın bulgularının diğer durumlarla ne ölçüde ilgili olduğu yani çalışmanın sonuçlarının ne ölçüde genellenebileceği ile ilgilidir (Merriam, 2009). Lincoln ve Guba (1985) nitel çalışmalarda genellenebilirlik yerine *aktarılabilirlik* kavramını önermiştir. Çünkü nitel araştırmada tek bir durum veya küçük, rastgele olmayan, amaçlı örneklem seçildiğini, araştırmacının belirli bir durumu derinlemesine anlamaya çalıştığını ve çoğunluk için neyin genel olarak doğru olduğunu bulmaya çalışmadığını aktarmıştır. Nitel bir çalışmada aktarılabilirliği arttıran stratejilerin neler olduğu ve bu çalışmada bu stratejilerin nasıl uygulandığı aşağıda açıklanmıştır:

- Aktarılabilirliği sağlamak için araştırmacının bulgularda yeterli (zengin ve yoğun) betimleyici veri sağlaması gerekir. (Merriam, 2009; Creswell, 2003). Bu, okuyucuları ortama taşıyabilir ve tartışmaya paylaşılan deneyimler sağlayabilir. (Creswell, 2003). Alan

notları ve dokümanlarla katılımcıların mülakatlarından alıntılar şeklinde sunulan yeterli kanıtlarla bulguların detaylı tasvirinin yanı sıra çalışmanın ortamı ve katılımcıların tasvir edilmesidir (Merriam, 2009). Bu çalışmada veri analizinde öğretim elemanlarının mülakatlarda veya derslerde kendi ifadelerini yansıtan doğrudan alıntılara sıklıkla yer verilmiştir. Ayrıca sınıf ortamı ve katılımcılar da detaylı olarak açıklanmıştır.

- Diğer strateji amaçlı örnekleme yapmaya özen gösterilmesidir (Merriam, 2009). Bu çalışmada amaçlı örnekleme yöntemleri kullanılmış, amaçlı örnekleme ölçütleri ve katılımcılara yönelik bilgiler ayrıntılı olarak (başka bir örneklem ile karşılaştırma yapabilecek düzeyde) açıklanmıştır. Araştırmanın sonuçlarının matematik öğretmenliği bölümünde matematik dersleri veren öğretim elemanlarının ispat anlatım yapılarını açıklama olasılığının (benzer durumlara aktarılabilmesinin) yüksek olduğu söylenebilir.

Güvenirlilik

Merriam (2009) güvenirliğin bir çalışmanın bulgularının ne kadar tekrarlanabilir olduğu yani çalışma tekrarlandığında aynı sonuçları verip vermeyeceği ile ilgili olduğunu belirtmiştir. Aynı zamanda insan davranışları durağan olmadığından ve nitel çalışmanın tekrarlanmasının aynı sonuçları vermeyebileceğinden sosyal bilimlerde güvenirliğin problemli olduğunu ve bu nedenle nitel araştırmalarda en önemli sorunun sonuçların toplanan veri ile tutarlılık göstermesi olduğunu aktarmıştır. Lincoln ve Guba (1985) nitel araştırmalarda güvenirliği *tutarlılık* olarak kavramsallaştırmış ve bir yabancıнын aynı sonuçlara ulaşmasından ziyade toplanan ve sunulan verinin ve sonuçların bir anlam ifade etmesi ve tutarlı olduğuna kanaat getirmesi olduğunu belirtmişlerdir. Bu yüzden bir nitel çalışmanın bulguları sunulan veri ile tutarlıysa çalışma güvenilir kabul edilebilir. Nitel bir çalışmada tutarlılığını arttıran stratejilerin neler olduğu ve bu çalışmada bu stratejilerin nasıl uygulandığı aşağıda açıklanmıştır:

Nitel araştırmanın güvenirliğini sağlamak için kullanılacak stratejiler: Meslektaş değerlendirmesi, araştırmacının rolünü açıklaması, üçgenleme ve denetim izidir. İlk iki strateji araştırmanın iç geçerliği bölümünde açıklanmıştır. Üçüncü strateji olan üçgenlemede ise yöntem çeşitlemesinin güvenirliği, veri çeşitlemesinin ise iç geçerliği arttıracakı söylenebilir (Merriam, 2009). Yani yöntem çeşitlemesi stratejisinin kullanılması tutarlı ve güvenilir veri toplamada kullanılabilir. Veri çeşitlemesi ise katılımcılar tarafından anlaşılan gerçekliğe daha uygundur. Bu çalışmada veri çeşitlemesi stratejisi kullanılmış ancak yöntem çeşitlemesi yapılmamıştır. Bu nedenle çalışmanın güvenirliğinin (tutarlılık ve teyit edilebildiğinin) sağlanmasında diğer üç strateji kullanılmıştır.

Güvenirliğin sağlanması için Lincoln ve Guba (1985) tarafından önerilmiş olan denetim izi yöntemi ile bağımsız bir okuyucu araştırmanın izini takip ederek çalışmanın

bulgularını doğrulayabilir. Bu izi oluşturmak için araştırmacı araştırma süreci ile ilgili bir araştırma ajandası veya notlar tutmalıdır. Nitel çalışmalarda denetim yolu verinin nasıl toplandığı, kategorilerin nasıl oluşturulduğu ve araştırma boyunca kararların nasıl alındığı ile ilgili detaylı açıklamalardır (Merriam, 2009). Örneklemin hangi kriterlere göre belirlendiği, araştırmacının hangi rolü üstlendiği ve araştırma süreci ilgili bölümlerde detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Benzer çalışma yapmak isteyen araştırmacılara bu açıklamalardan yararlanabilirler. Veri toplama araçları, ham veriler, veri analizine yönelik dokümanlar ve notlar vb. tekrar ulaşılabilir olması gerekir ve hepsi araştırmacı tarafından saklanmıştır.

Sonuçların teyidi için analiz sürecinde veriler bir başka araştırmacı tarafından da ayrıca kodlanmış, iki araştırmacının kodları karşılaştırılmış ve tutarlılık Miles ve Huberman'ın (1994) formülü (Araştırmanın güvenilirliği=görüş birliği / (görüş ayrılığı + görüş birliği) x100) kullanılarak hesaplanmıştır. Sonuç olarak bu çalışmada bu sonuç %85 çıkmış ve sonuçlar teyit edilmiştir.

Ayrıca tez sürecinde tez izleme komitesi ile yapılan toplantılarda araştırmanın geçerli ve güvenilir olması için her aşamasında izlenmesi gereken yol ve ilkeler tartışılarak komite tarafından bu süreç detaylı olarak takip edilmiştir.

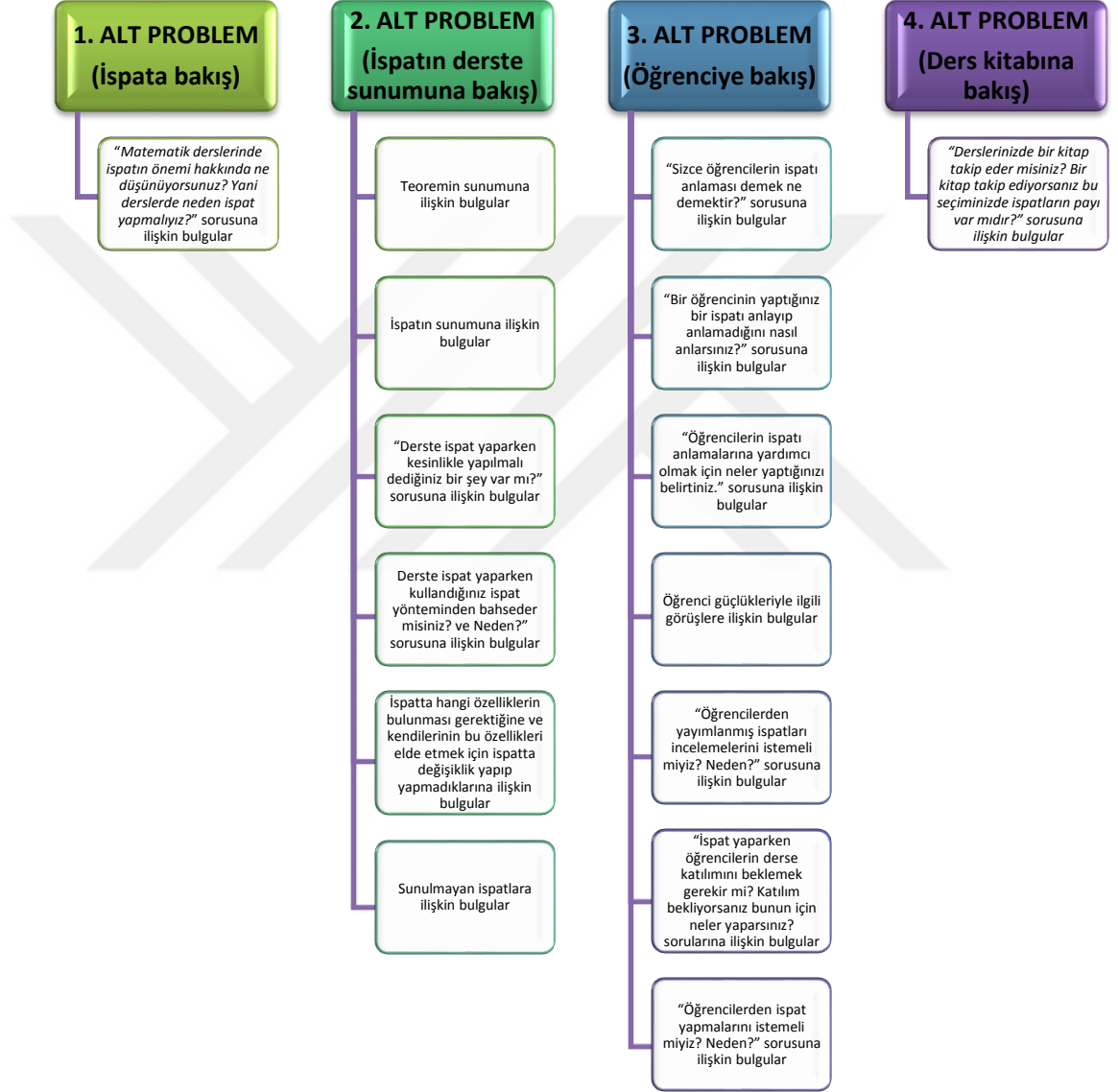
3.6. Araştırmacının Rolü

Bu çalışmada araştırmacının rolü tercih edilen araştırma metodolojisi doğrultusunda şekillenmiştir. Araştırma modelinde de belirtildiği gibi objektivist gömülü teori dış gerçekliği kaydeden tarafsız bir gözlemciyi ve bu gözlemcinin bir oluşturucudan ziyade araştırma süreci için bir kanal olmasını gerektirmektedir. Bu bağlamda, araştırmacı bu çalışmada araştırma sürecindeki nesnel/objektivist teorinin sistematik prosedürlerine uyarak tarafsızlığını korumaya ve araştırma sürecinde kanal olma işlevini yerine getirmeye çalışmıştır. Bu çalışmada araştırmacı hem gözlemci hem de teorisyen olarak aktif bir rol üstlenmiştir. Araştırma sürecinde nesnelliği sağlayabilmek için alınan önlemlere araştırmanın geçerliği ve güvenilirliği bölümünde yer verilmiştir.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu bölümde, araştırmanın alt problemlerine ilişkin bulgular ve yorumlar yer almaktadır. Şekil 5, Bulgular bölümünde yer alan başlıkları göstermektedir.



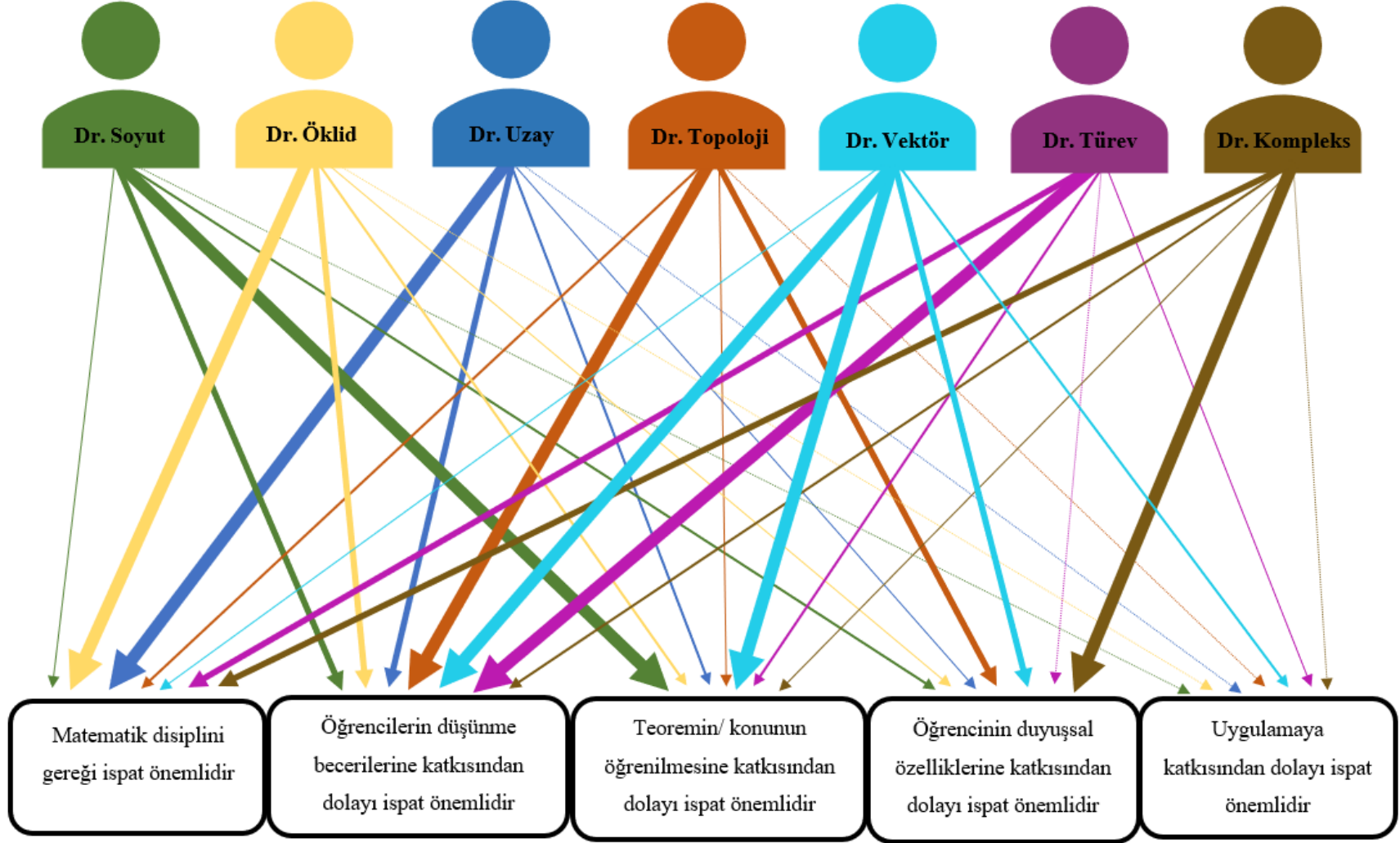
Şekil 5. Bulgular bölümünde yer alan başlıklar

4.1. Birinci Alt Probleme İlişkin Bulgular (İspatın Önemine Bakış)

“Öğretim elemanlarının matematik derslerinde ispatın önemine ilişkin görüşleri nelerdir?” sorusu birinci alt problem olarak ele alınmıştır. Bu alt problemde, öğretim elemanlarının “*Matematik derslerinde ispatın önemi hakkında ne düşünüyorsunuz? Yani derslerde neden ispat yapmalıyız?*” sorusuna verdikleri yanıtlar ve bu yanıtları nasıl sıraladıkları incelenmiştir.

Mülakatta ispatın önemine yönelik görüşlerin analizi sonucunda toplam 25 kategori oluşmuştur. Bu yanıtlar 5 tema altında toplanmıştır. Öğretim elemanlarının ifadeleri ve temalar Tablo 6’da verilmiştir. Yöntem bölümünde bahsedildiği gibi 1. mülakat analizinden elde edilen verilerin analizi sonucunda oluşturulan seçme-sıralama formunu içeren 3. mülakat verileri bu görüşlerin önem düzeyini göstermektedir. Hatırlatmak gerekirse, 3. mülakat iki amaçla yapılmıştır. Birincisi öğretim elemanlarının mülakat esnasında (unutarak veya kasıtlı olarak) beyan etmediği ifadelere katılıp katılmadığını, bu görüşleri de önemli bulup bulmadığını görmektir. İkincisi ise kendisinin veya bir başka öğretim elemanının beyan ettiği ifadelerden hangilerini daha önemli bulduğunu ortaya çıkarmaktır.

3. görüşmede, öğretim elemanlarından Tablo 6’da verilen temaları kendilerine göre önem sırasına göre sıralamaları ve her temadan kategorileri seçmeleri istenmiştir. Temalar altında bulunan görüşlerin sayısının fazla olması nedeniyle bu görüşlerin sıralanması talep edilmemiştir. Şekil 6, öğretim elemanlarının temaları önem sırasına göre nasıl sıraladıklarını göstermektedir. Şekildeki okların kalınlığı belirtilen önem düzeyine göre artmaktadır. Bu temalardaki görüşlerden hangilerinin seçildiği yine Tablo 6’da verilmiştir. Öğretim elemanları sıralama yaparken, aynı önem düzeyinde gördükleri temalara aynı numaraları verme konusunda özgür bırakılmıştır. Sonuç olarak, yalnızca Dr. Vektör’ün iki temayı aynı anda birinci sırada seçtiği gözlenmiştir. Bunun haricinde onun diğer seçimlerinde ve diğer öğretim elemanlarının sıralamalarında aynı önem düzeyinde görülen temaların olmadığı görülmüştür.



Şekil 6. Öğretim elemanlarının ispatın önemine yönelik temaları önem düzeyine göre sıralamaları

Tablo 6

Matematik derslerinde ispatın önemine yönelik görüşler

Tema	İfadeler	Dr. Kompleks	Dr. Vektör	Dr. Türev	Dr. Soyut	Dr. Öklid	Dr. Topoloji	Dr. Uzak
Matematiği tanıtmaya katkısı	Matematiğin aksiyomatik yapısını anlamayı sağlar.	X	X	X*	X	X*	X	X
	Matematiğin bir disiplin olarak farkına varılmasını sağlar.	X*	X	X	X	X*	X	X*
	Analitik düşünme becerisi sağlar.	X	X	X			X*	X
Düşünme becerilerine katkısı	Problem çözme becerisini geliştirir.		X		X	X	X*	X
	Sorgulayıcı düşünmeyi sağlar.	X					X*	X
	Düşünme yolunu öğretir.		X	X		X	*	X
	Günlük yaşama dair matematiksel düşünmeyi sağlar.		X				*	X
	Öğrenciye farklı bakış açısı sağlar.	X				X*	X*	
	Soyut düşünmeyi artırır.		X*		X			X
	Uzamsal düşünmeyi artırır.		*					
	Matematikçilerinkine benzer şekilde muhakeme deneyimi yaşamalarını sağlar		*	X	X		*	
	Teoremi daha iyi anlamayı sağlar		X*		*		X	
	Konuya hakimiyeti artırır.	X	X*	X	*			
Teoremin/ konunun öğrenilmesine katkısı	Daha kalıcı öğrenme sağlar.	X	X*		X*	X	X	X
	Neyin nereden geldiğini bilmeyi sağlar	X*		X*	X*	*	X	X
	Bir sonraki konunun temelini oluşturur.			X*		X		X
	Tanımları, teoremleri, aksiyomları tımdengelimli bir sistem içinde organize etmeyi sağlar.	X			X*	X	X	X
	İspat tekniklerinin gösterilmesini/ öğrenilmesini sağlar.		*					
	Öğrenciye güven verir.		X*	X	X	X	X	X
Duyuşsal özelliklere katkısı	Duyuşsal olarak matematiksel haz sağlar	X		X	X	X	X*	X
	Bir şeyin nedenini bilmek heyecan vericidir.	X*		X	X	X	X	X
	İspat olmazsa ezber olur, o da sıkıcıdır.	X*	X					
Uygulamaya katkısı	Bir problem durumunda koşulları doğru değerlendirmeyi sağlar.	X	X	X	X	X	X*	X
	Uygulama yapabilmelerini sağlar.	X	X	*		*		X
	Uygulama sorularının temelini gösterir.			X*	X	X	X	X

(*→ ilk mülakatta verilen yanıtlar, X→3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) seçilenler)

Tablo 6’da (*) işareti öğretim elemanlarından hangilerinin ilk mülakatta bu kategorideki görüşleri ifade ettiğini, (X) işareti ise üçüncü mülakatta (sıralama-seçme formunda) hangi öğretim elemanının hangi görüşleri seçtiğini göstermektedir. Örneğin, ispatın “*matematiğin aksiyomatik yapısını anlamayı sağladığı*” görüşü ilk mülakatta yalnızca Dr. Öklid ve Dr. Türev tarafından söylenmiştir. Seçme-sıralama formunda ise tüm öğretim elemanlarının bu ifadeyi seçtiği görülmektedir. Yine örnek olarak “*Teoremi daha iyi anlamayı sağladığı*” görüşü ilk mülakatta Dr. Vektör ve Dr. Soyut tarafından söylenmiştir. Bununla birlikte, seçme-sıralama formunda Dr. Soyut’un bu ifadeyi seçmediği, Dr. Vektör ve Dr. Topoloji’nin seçtiği görülmektedir. Tablo 6’daki tüm görüşler ilk mülakatta öğretim elemanları tarafından ispatın matematik derslerinde önemli olduğuna delil olarak sunulmuş görüşler olduğundan bir kategorinin öğretim elemanları tarafından seçilmemiş olması önemsiz olduğu anlamına gelmemektedir. Öğretim elemanları tüm görüşler içerisinde daha önemli buldukları görüşleri işaretlediklerinden, burada yalnızca, işaretlenen görüşlerin diğer görüşlere göre daha önemli görüldüğünden söz edilebilir.

Tablo 6’daki temalar, başlıklar halinde aşağıda incelenmiş, temalar içindeki kategoriler de seçme-sıralama görüşme formu sonuçlarıyla birlikte bu başlıklar altında ele alınmıştır.

4.1.1. İspatlar, öğrencilere matematiği tanıtmaya katkısından dolayı önemlidir.

Verilen yanıtlar içerisinde, ispat yapma nedenlerini ya da ispatın önemini matematik disiplini ile ilişkilendiren ifadeler “Matematiği tanıtmaya katkı” teması altında gruplandırılmıştır. Bu temadaki yanıtlarda ispatın matematik yapmanın bir gereği olması sebebiyle önemli görüldüğü söylenebilir. Şekil 7’de, 3. mülakat sonuçlarında, “Matematiği tanıtmaya katkısı” temasının Dr. Öklid ve Dr. Uzay tarafından ispatın matematik derslerinde anlatılmasına en önemli neden olarak kabul edildiği görülmüştür. Dr. Türev’in seçimlerinde ise bu tema ikinci sırada yer almaktadır. Dr. Topoloji, Dr. Soyut ve Dr. Vektör’ün ilk mülakatta bu kategoriye yönelik bir açıklaması olmadığı görülmektedir. Bu duruma paralel olarak, Dr. Topoloji bu temayı üçüncü sırada tercih ederken Dr. Soyut ve Dr. Vektör 4. sırada önemli olarak görmüşlerdir (bkz. Şekil 6).

Dr. Öklid, öğrencilerin matematiğin aksiyomatik yapısını anlamakta zorluk çektiklerini ve bunun ispatın gösterilmesiyle aşılabileceğini vurgulayarak ispatın matematiğin doğasında olduğunu belirtmiştir:

“Mesela iç ters açılar denildiğinde iç ters açının hep paralel doğrularda olduğu düşüncesi var. Ama yanlış! Böyle temel şeylerin bilinmediği... Bu konuda da eksikliklerle ilerlendiğini düşündüğüm için burada öğrenciler matematiğin aksiyomatik yapısını anlamada zorluk çekiyor ya da anlayamıyorlar. Anlamaları için bence ispatın gösterilmesi, yapılması gerekiyor. Onun için önemli.”

Dr. Öklid’in aksiyomatik yapı ifadesiyle bir kuramın ispatı için gerekli bulunan aksiyomları kastettiği söylenebilir. Yani öğrencilerin bazı konuların temelini oluşturan bu yapılardan habersiz olmamaları için ispatların yapılması gerektiğini belirtmiştir. Benzer şekilde, ispatların matematiğin formel yönünü temsil etmesi açısından derste yapılması gerektiğini belirten Dr. Türev görüşünü şu şekilde açıklamıştır:

“Bir diğer yön öğrencilere daha formel bir... Matematiğin farklı bir yönünü gösteriyoruz. Onlar için çünkü çok zor bir yön. İntegraller için ortalama değer teoremini ispatlamak onlar için zor olabiliyor ama onunla ilgili soruları çözebiliyorlar.”

Burada Dr. Türev’in yaptığı açıklamayla, matematiğin formel yönü ifadesini bir iddianın/formülün uygulamasından ziyade, o iddianın/formülün temelini gösteren yönü anlamında kullandığı görülmektedir. Bu yönüyle Dr. Öklid’in bahsettiği aksiyomatik yapıyı kastettiği düşünüldüğünden Dr. Türev’in bu ifadesi “matematiğin aksiyomatik yapısını anlamayı sağlar” kategorisi altında değerlendirilmiştir. Tablo 6’da 3. mülakat sonuçlarında temalar altında seçilen ifadelere bakıldığında, tüm öğretim elemanlarının derste ispat yapılmasının, matematiğin aksiyomatik yapısını anlamayı sağladığına inandıkları görülmektedir.

Dr. Uzay ve Dr. Kompleks ise ispatın matematik disiplininin bir parçası olması nedeniyle önemli olduğunu belirtmişlerdir. Dr. Kompleks:

“Aslında ispatsız matematik olmaz diye düşünüyorum. İspat da işin içinde olmalı. Yani bence matematik yapıyorsak ispat olmalı.”

Benzer şekilde, Dr. Öklid “Bir kere matematiğin kendi doğasında bu (ispat) var. Bu olmazsa olmazlardan birisi.” diyerek ispatın bir disiplin olarak matematiğin doğasında olduğundan söz etmiştir. Dr. Uzay da matematiğin ispatlardan oluştuğunu belirtmiş ve matematikte teoremlerin önemine vurgu yaparak ispatın önemine değinmiştir:

“Matematik ispattan oluşuyor yani. Bunun sıralaması çok açıktır. Yani tanımsız kavramlar, tanımlı kavramlar, aksiyomlar, arkasından teoremler gelir yani bütün bu

üçünü teoremleri ispatlamak için yapıyoruz. Matematiği teoremsiz gerçekleştiremiyoruz yani.”

Dr. Kompleks, Dr. Uzak ve Dr. Öklid’in bu ifadeleri ile matematiğin ispat içeren bir disiplin olmasına vurgu yaptıkları görülmektedir. Derste ispat yapma nedenleri arasında gösterdikleri bu yöndeki açıklamalar önce “ispat, matematiğin doğasında var” kategorisi altında ele alınmıştır. Ancak bu açıklamaların literatürde yer alan “ispat, matematiğin bir disiplin olarak farkına varılmasını sağlar” (Yopp, 2011) ifadesiyle benzediği ve öğrencilere matematiğin ispat içeren bir disiplin olduğunu gösterme amacı da içerdiği düşünüldüğünden bu kategori altında değerlendirilmiştir. Tablo 6’da bu kategorinin de tüm öğretim elemanları tarafından 3. mülakatta seçme-sıralama formunda önemli olarak işaretlendiği görülmüştür.

4.1.2. İspatlar, öğrencilerin düşünme becerilerine katkısı nedeniyle önemlidir!

Verilen yanıtlar içerisinde, ispat yapma nedenlerini ya da ispatın önemini öğrencilerin düşünme becerileri ile ilişkilendiren ifadeler “Öğrencilerin düşünme becerilerine katkı” teması altında gruplandırılmıştır. Bu kategorinin Dr. Topoloji, Dr. Vektör ve Dr. Öklid’in yanıtlarıyla oluştuğu söylenebilir. 3. mülakatta (seçme-sıralama görüşme formunda), bu temanın Dr. Topoloji, Dr. Vektör ve Dr. Türev tarafından ispatın matematik derslerinde anlatılmasına en önemli neden olarak kabul edildiği görülmüştür (bkz. Şekil 6). Dr. Kompleks haricinde diğer tüm öğretim elemanlarının seçimlerinde ise bu tema ikinci sırada yer almaktadır. Sonuç olarak, ispatın öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerine katkısı bakımından tüm öğretim elemanlarınca oldukça önemli kabul edildiği söylenebilir.

Dr. Topoloji’nin ispatın önemini, ispatın öğrencilerin düşünme becerilerine katkısı ile ispatın uygulamaya yönelik katkısını harmanlayarak ele aldığı söylenebilir:

“Bana kalırsa ispat düşünme yolunu öğretiyor insanlara. Günlük yaşama dair matematiksel düşünmeyi sağlıyor yani gelecekteki yaşantıları içerisinde günlük yaşam problemleri olsun ya da kendi mesleklerine dair problemleri olsun, bu problemleri çözebilmek için belli bir düşünce mantığına matematiksel düşünme metoduna sahip olmak lazım. Verileri, koşulları doğru değerlendirip bunun üzerine çözüm yollarını kurmak gerekiyor. Bu da ispat yoluyla oldukça edinilebilir diye düşünüyorum. Dolayısıyla, analitik düşünme becerisini sağlıyor yani bu altı çizilir bir şey. Dediğim gibi problem çözme becerisini geliştiriyor. Yani sadece sayılarla işlem yapmak değildir problem çözmek. Dolayısıyla Polya’nın (problem çözme) adımlarını düşünecek olursak ispat yaparken bu adımları kullanıyoruz. Daha geniş düşünme, neden-niçin sorgulama şansı veriyor bize. Sürekli yani biz matematikçiler mesela

herhangi bir yerde bir şey konuşulduğu zaman neden diye sorarız yani bu şeyi bize sağlıyor. Sorgulayıcı düşünmeyi sağlıyor.”

Dr. Topoloji, sebep sonuç ilişkileriyle birbirine bağladığı çeşitli temaları da içeren faydalar içesinden öğrencilerin düşünme süreçlerine yönelik Tablo 6’da bu tema altında verilen ilk beş kategorinin oluşumunu sağladığı görülmektedir. Özetle, ispat yaparken problem çözme adımlarının da kullanıldığını, dolayısıyla bu beceriye katkı sağladığını, veri analizi gerektirdiğini ve bu analizin de analitik düşünmeyi geliştirdiğini, bir durumun nedenlerini incelerken sorgulayıcı düşünmeye de katkı sağladığını, tüm bu süreçlerle düşünme yollarını öğrettiğini ve günlük yaşama dair matematiksel düşünmeyi içerdiğini belirterek ispatın önemli olduğuna değinmiştir. Bu kategoriler içeresinden ilk mülakatta yalnızca Dr. Topoloji tarafından belirtilen “analitik düşünme becerisi sağlama”, “problem çözme becerisini geliştirme” ve “düşünme yolunu öğretme” görüşlerinin 3. mülakatta (seçme-sıralama görüşme formunda) bu tema altında en çok tercih edilen görüşler olduğu da Tablo 6’da görülmektedir.

Dr. Topoloji’nin açıklamalarında bir teörinin öğrenilmesinin yanı sıra yeni teoriler üretmek için gerekli olan farklı düşünme yollarına da vurgu yaptığı söylenebilir.

“Kendini geliştirerek yeni teoriler üretebilmede de önemli yani dediğim gibi sayısal bazı işlemler yapmak demek değildir matematik. Dolayısıyla teorileri doğru analiz edip ispatlar yapıp doğru sonuçlar çıkarabiliyorsak eğer yapılmışların üzerinden yavaş yavaş belli bir alt yapı edindikten sonra ufak tefek de olsa kendi teorilerimizi de üretebilir duruma geliriz veya aynı teoriyi farklı yollarla ispatlar hale geliriz. Bu matematikçiler için önemli. Farklı düşünce yollarını bize sağlar.”

İspatın öğrenciye farklı bakış açısı sağlayabilecek olmasını Dr. Öklid de vurgulamıştır ve açıklaması yine bu kategori altında değerlendirilmiştir:

“Matematiksel düşünmeyi geliştirmek için önemli. Yani sadece ispat yapmış olmak için yapmıyoruz tabi ki. Öğrencinin bakış açısını geliştiriyor, farklı düşünmesine yardımcı oluyor.

Dr. Topoloji lisede ispat yapmaya çalışma deneyimlerinden yola çıkarak ünlü matematikçilere benzer şekilde muhakeme yapma deneyiminden bahsetmiştir:

“Bunun yanında bir de duyuşsal olarak matematiksel bir haz sağlıyor bize. Bu çok önemli bence. Çünkü lisede, ki ben meslek lisesi mezunuyumdur, matematiği bu kadar seviyor olmamın sebebi herhangi bir şekilde ufak tefek de olsa orada yapılan ispatlarda bir Pisagor ile ya da diğer teorisyenler ile aynı düşündüğüm hissini bende uyandırmıştır kendi yapabildiğim ispatlar sonra üniversite de benzer şeyler veya

hocalarımızın yaptığı ispatın aynısını ezberlemek yerine sınavlar için acaba ben bu bilgilerimle bunu nasıl yapabilirim diye düşünüp işin içinden çıkabildiğiniz zaman bu size müthiş bir matematiksel haz verir. Siz de demek ki artık doğru yoldasınız anlamına gelir. Bu önemli bence matematikçiler için.”

Dr. Topoloji'nin bu açıklamasının literatürde yer alan “*Matematikçilerinkine benzer şekilde muhakeme deneyimi yaşamalarını sağlar*” (Zaslavsky ve diğerleri, 2011) ifadesini içerdiği düşünüldüğünden bu kategori altında değerlendirilmiştir. Bu ifadenin, öğretmenin derste ispatı yapmasından ziyade öğrencilerin bu deneyimi yaşamaları bakımından ispat yapmaya çalışmalarını içerdiği de söylenebilir.

Dr. Vektör ise ispat öğretimini hem kendi dersi hem de daha küçük yaş grupları için değerlendirerek iki durumda da ispat yapmanın öğrencilerin muhakeme becerilerini geliştirdiğini belirtmiştir:

“Bir türevin maksimum minimumunu ifade eden bir Fermat teoreminin ispatını ve mantığını öğrencinin anlaması lazım. Çünkü aslında onu verirken yerel maksimum ve minimumu da tekrar etmiş oluyorsun. Süreklilik konusunu tekrar etmiş oluyorsun. Dolayısıyla öğrencilerin ispat yapma yeteneği şu bakımdan önemli. Onların muhakeme gücünü geliştiriyor. Küçük yaşlarda yapılan ispatlar, öğrencilerin kesinlikle muhakeme gücünü geliştiriyor. Soyut düşünmelerini arttırıyor. Uzamsal düşünmelerini arttırıyor. O bakımdan derslerde ispatların yapılması önemli.”

Dr. Vektör'ün bu ifadesi ile öğrencilerden beklediği muhakeme deneyimi için özellikle “matematikçilerinkine benzer” vurgusu yapmadığı görülmektedir. Bununla birlikte hem diğer kategorilere uymaması hem de bu kategorideki amacı de kapsayabileceği düşünüldüğünden bu kategori altında ele alınmıştır. 3. mülakatta ise yalnızca Dr. Türev ve Dr. Soyut'un bu kategoriye öncelikli bulduğu görülmektedir.

Dr. Vektör'ün bu açıklamasındaki “*öğrencilerin ispat yapma yeteneği ...*” ifadesine açıklık getirmek amacıyla araştırmacı tarafından “öğretmenlerin anlatmasını mı öğrencilerin yapmasını mı” kastettiği sorulmuştur. Dr. Vektör'ün cevabı öğretmenin anlatması yönünde olmuştur. Tablo 6'ya göre derste ispat yapmanın soyut düşünmeyi arttırdığı görüşü ise Dr. Vektör'ün yanı sıra Dr. Uzay ve Dr. Soyut tarafından da diğer görüşlere göre daha önemli kabul edilmiştir. İspatın uzamsal düşünme becerisine katkısına yönelik görüşünü ise hiçbir öğretim elemanının işaretlememiği görülmektedir (bkz. Tablo 6).

4.1.3. İspatlar, teoremin veya ilgili konunun öğrenilmesine katkısı nedeniyle önemlidir!

Verilen yanıtlar içerisinde, ispat yapma nedenlerini ya da ispatın önemini ispatı yapılan teoremin veya ispatın bulunduğu ilgili konunun daha iyi öğrenilmesi ile ilişkilendiren ifadeler “Teoremin veya ilgili konunun öğrenilmesine katkı” teması altında gruplandırılmıştır. Bu temanın oluşmasında büyük paya sahip olan Dr. Soyut ve Dr. Vektör tarafından 3. mülakatta (seçme-sıralama görüşme formunda) ispatın matematik derslerinde anlatılmasına en önemli neden olarak kabul edildiği de görülmüştür. Diğer öğretim elemanları ise bu temayı 3. veya 4. sırada tercih etmişlerdir. Dr. Topoloji ve Dr. Uzak’ın bu temaya yönelik bir açıklaması bulunmadığı da söylenebilir.

Hem Dr. Vektör’ün hem de Dr. Soyut’un, ispatın hem teoremi daha iyi anlamayı hem konuya hakimiyeti arttırdığını hem de daha kalıcı öğrenme sağladığını düşündükleri söylenebilir. Dr. Vektör:

“Mesela ben şunu hissettim. Ne kadar fazla ispat yaparsan o kadar konuya hakim oluyor. İspatları anlayınca zaten konuyu yorumlamak da kolay oluyor. Örneğin, bu ortalama değer teoreminin içinde de var. Ortalama değer teoreminin ifadesi ne türevler için? Bir f fonksiyonu veriliyor. $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) türevli ise en az bir $x \in (a,b)$ için $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Şimdi burada ne diyoruz $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ifadesi eğim diyoruz. Kirişin eğimi. $f'(x)$ de türevin geometrik anlamından yine teğetin eğimi. Bunların eşit olması veya bunların paralel olması. Ya da ne diyoruz $[A,B]$ kirişine paralel en az bir teğet vardır. Şimdi soruyu öyle sorduğum zaman ‘Aaa bu soru ortalama değer teoremi!’ diye öğrenci ne yapar hemen anladıysa yapıyor. Ama ifadeyi değiştirdiğin zaman anlayamıyor. Diyor ki ‘bu kirişe paralel teğet var mıdır’ ne demek? O yüzden ispatı ve notasyonları iyi bilirse öğrenci konuya olan hakimiyeti güveni kesinlikle artıyor. Ben kendim de yaşadım bunu çünkü... Ezberleyince şimdi şöyle sıkıntı oluyor belki bu teoremi anlıyor ama birkaç hafta sonra sorduğumuz zaman bilemiyor. Mantığı da oluşmuyor kafasında. Ezberlediğin zaman da zaten kafa da çok fazla dolmuş oluyor. Şimdi bir sürü teorem olduğunu düşünelim. Hepsi ezbere kafanda durduğu zaman onların mantığını da anlamıyorsun. O yüzden ezberlemeden, mantığını anlamak hem öğrenmeyi kolaylaştırıyor hem de öğrencinin kendine olan güvenini arttırıyor. Özetle bir konudaki ispatların öğrenilmesi o konunun daha iyi öğrenilmesine ve pekiştirilmesine sebeptir. Bu yüzden ispatlar matematik derslerinde önemlidir. (...) Bir türevin maksimum minimumunu ifade eden bir Fermat teoreminin ispatını ve mantığını öğrencinin anlaması lazım. Çünkü aslında onu verirken yerel maksimum ve minimumu da tekrar etmiş oluyorsun. Süreklilik konusunu tekrar etmiş oluyorsun.”

Teoremin ve konunun daha iyi anlaşılmasına ve kalıcı öğrenmeye vurgu yapan bir başka öğretim elemanı ise Dr. Soyut'tur. Dr. Soyut verdiği derslerin de ispatları gerektirdiğini belirtmiş ve ispatların neyin nereden geldiğini bilmeyi de sağladığına dikkat çekmiştir:

“İspatı yapmak ilgili teoremi de daha iyi anlamaya neden olabiliyor. Özellikle matematik bölümünde neyin nereden geldiğini bilebilmek amaçlı ispat yapılabilir. İspatı bildiği zaman bir öğrenci belki de o teoremi daha iyi anlamlandırabiliyor. Unutmayabiliyor. Daha uzun süreli öğrenme sağlayabiliyor. Hatta bazen ispatlardan konuyu anladıkları oluyor diyebilirim.”

“Teoremi anlama” ve “konuya hakimiyet” kategorilerinin birbirine benzediği düşünülebilir. Ancak ilki yalnızca teoremin daha iyi anlaşılmasına vurgu yaparken ikincisi o ispatın bulunduğu ilgili konunun anlaşılması anlamına geldiğinden bu iki ifade ayrı kategoriler olarak değerlendirilmiştir. 3. mülakatta (seçme-sıralama görüşme formunda), yalnızca Dr. Vektör ve Dr. Topoloji'nin teoremi daha iyi anlamayı sağladığı görüşünü önemli olarak seçtiği görülmektedir (bkz. Tablo 6). İspatın konuya hakimiyeti arttırdığı görüşü ise Dr. Kompleks, Dr. Vektör ve Dr. Türev tarafından seçilmiştir. İspatın “teoremi daha iyi anlamayı sağlaması ve konuyu yorumlamayı kolaylaştırması” ifadelerinin ispatın “açıklama” (Hanna, 1990) işlevine paralel olduğu da söylenebilir. Ancak teorem ve konu için ayrı ayrı yapılan vurgulamanın ifade edilmesi ve 3. mülakatta (seçme-sıralama görüşme formunda) öğretim elemanları tarafından bu ayrımın seçimle vurgulanıp vurgulanmayacağı (açıklama ile neyin kastedildiğinin anlaşılması amacıyla) merak edildiğinden bu kategoriler yalnızca “açıklama” başlığı altında yazılmamıştır. “Daha kalıcı öğrenme sağlaması” kategorisi ise Dr. Türev haricinde tüm öğretim elemanları tarafından seçilmiştir ve bu tema altında en çok tercih edilen üç görüşten birini teşkil etmektedir.

Dr. Soyut'un yukarıdaki açıklamalarında ispatın teoremi ve konuyu anlamayı sağlamasında neyin nereden geldiğini bilmeyi sağlamasının da payı olduğunu düşündüğü görülmektedir. Dr. Öklid ve Dr. Kompleks de anlatılanların nereden geldiğini ve nasıl oluştuğunu öğrencinin bilmesi gerektiğini, bu nedenle de ispatın önemli olduğunu söylemişlerdir. Dr. Öklid: *“Ayrıca neyin nereden geldiğini nasıl oluştuğunu göstermek benim için önemli bir hal alıyor.”* derken Dr. Kompleks: *“Öğrenci neyin nasıl olduğunu bilmeli. Dolayısıyla ezbere can sıkıcı olur.”* demiştir. “Neyin nereden geldiğini bilmenin” teoremi doğal olarak daha iyi anlamayı sağlayabileceği düşünülebilir. Ancak bu iki ifade ayrı olarak ele alınmıştır. Çünkü hem bu gerekçelerin ikisini birlikte ifade ederek bağlantı kuran sadece Dr. Soyut'tur hem de teoremin daha iyi anlaşılmasının başka yollarının da olabileceği söylenebilir. 3. mülakatta (seçme-sıralama görüşme formunda) bu ifade bu tema altında en çok tercih edilen görüşlerden biri olmuştur. Bu görüşü belirten dört öğretim elemanından üçü

tarafından da seçildiği görülmektedir. Bunun yanı sıra Dr. Topoloji ve Dr. Uzay da bu kategoriyi seçmişlerdir.

Dr. Türev ise ispatların başka konulara temel olabileceğine değinmiştir. Bu ifadenin ispatın “keşfetme” (de Villiers, 1999) işlevi ile paralellik gösterdiği söylenebilir:

“Aynı zamanda ben şunu düşünüyorum bir ispat bir sonraki düşüncenin de temelini atıyor. O yüzden ispatların önemli olduğunu düşünüyorum.”

Dr. Soyut “İspat yaparken öğrenci bildiği tanımları ve teoremleri kullanabiliyor. Bunları mantıklı bir şekilde bir araya getirmesi gerekiyor” diyerek ispatın içinde tanımlar ve teoremler gibi bilgilerin bir araya getirilerek organize edildiğine değinmiştir. Dr. Soyut’un bu açıklamasının ispatın sistemleştirme fonksiyonuna işaret ettiği söylenebilir bu nedenle bu ifade “Tanımları, teoremleri, aksiyomları tündengelimli bir sistem içinde organize etmeyi sağlaması” (Bell, 1976) kategorisi altında değerlendirilmiştir. Bu ifadenin öğretim elemanlarından beşi tarafından seçildiği de Tablo 6’da görülmektedir.

İspat yapmanın “ispat tekniklerinin öğrenilmesine faydasının” ise hiçbir öğretim elemanı tarafından seçilmediği yani derste ispat yapmakla hedeflenen amaçlar içerisinde öncelikli olarak yer almadığı görülmektedir. Dr. Vektör bu görüşünü şu şekilde ifade etmiştir:

“Aynı zamanda ne kadar ispat görürse kendisinin ispat tekniğini de geliştirir. Çünkü bu iş tecrübedir. Mesela diyelim ki verdim şunun ispatı nedir, neye bakacak? Tecrübe yani. Gördüğü ispatları düşünerek ona göre ispat yapacak. Bu mesela ispat yeteneğini de artırır.”

Tablo 6’ya bakıldığında, bu tema altında ispatın matematik derslerinde önemli olduğuna gösterilen en önemli nedenlerin “daha kalıcı öğrenme sağlaması”, “neyin nereden geldiğini bilmeyi sağlaması ve “sistemleştirme yani tanımları teoremleri aksiyomları tündengelimli bir sistem içinde organize etmeyi sağlaması” olduğu söylenebilir.

4.1.4. İspatlar, öğrencinin duyuşsal durumlarına katkısı nedeniyle önemlidir!

Verilen yanıtlar içerisinde, ispat yapma nedenlerini ya da ispatın önemini güven, haz, heyecan, sıkılma vb. gibi duyuşsal durumlar ile ilişkilendiren ifadeler “Duyuşsal alana katkı” teması altında gruplandırılmıştır. Şekil 6’da 3. mülakat sonuçlarına göre, bu tema yalnızca Dr. Kompleks tarafından birinci sırada seçilmiştir. Dr. Vektör ve Dr. Topoloji’nin ise ikinci sırada tercih ettikleri görülmektedir.

Matematiksel düşünme becerilerine katkı teması altında “matematikçilerinkine benzer muhakeme deneyimi yapmalarını sağlaması” kategorisinde değerlendirilen Dr. Topoloji’nin

açıklamaları, aynı zamanda yaşadığı duyuşsal hazza da vurgu yapması nedeniyle bu kategori altında da ele alınmıştır:

“Bunun yanında bir de duyuşsal olarak matematiksel bir haz sağlıyor bize. Bu çok önemli bence. Çünkü lisede...”

Dr. Topoloji bu vurgusuyla aslında girişte de bahsedilen ispatın “*zihinsel meydan okuma*” (de Villiers, 1999) işlevine de değindiği söylenebilir. Bu kategori Dr. Vektör haricinde diğer tüm öğretim elemanları tarafından işaretlenmiştir (bkz. Tablo 6).

Dr. Vektör bir önceki tema başlığı altında ele alınan ispatın konuya hakimiyeti arttırmasının sonucu olarak öğrencinin kendine güveninin de artacağını belirtmiştir. Öğrencinin güveninin nasıl artacağı sorulduğunda ise cevabını ayrıntılandırmıştır:

“Ne kadar fazla ispat yaparsak öğrencinin konuya olan hakimiyeti ve kendine olan güveni artar. Mesela ortalama değer teoreminin mantığını anladı o zaman ‘ben bunu iyi biliyorum, buna hakimim’ havası yaratıyor çünkü ispatını öğrenmişim ben bunun uygulamasını mı yapamayacağım? Öğrencide öyle bir şey oluyor. İspatı ve notasyonları iyi bilirse öğrenci konuya olan hakimiyeti güveni kesinlikle artıyor. Ben kendim de yaşadım bunu çünkü.”

3. mülakat sonuçlarına göre, Dr. Kompleks haricinde diğer tüm öğretim elemanlarının, “ispatın öğrencinin güvenliğini arttıracağına” inandığı söylenebilir. Dr. Kompleks ise yine bir önceki temada ele alınan öğrencilerin neyin nereden geldiğini bilmelerine yönelik gerekçe olarak aynı zamanda konuyu can sıkıcı olmaktan çıkardığını belirtmiştir ve öğrencinin bir ifadenin nedenini bilmesinin heyecan verici olduğuna değinmiştir:

“Ondan sonra öğrenci neyin nasıl olduğunu bilmeli. Dolayısıyla ezbere can sıkıcı olur. Bir şeyin nedenini bilmek heyecan vericidir.”

Bu tema altında öğrencinin güven duyması, haz alması ve heyecan duymasına sebep olması argümanlarının seçme-sıralama formunda en çok tercih edilen görüşler olduğu görülmektedir. Dr. Kompleks’in ispatın konuyu sıkıcı olmaktan kurtarması görüşüne ise yalnızca Dr. Vektör’ün katıldığı söylenebilir (bkz. Tablo 6).

4.1.5. İspatlar, uygulama yapmaya katkısı nedeniyle önemlidir!

Verilen yanıtlar içerisinde, ispat yapma nedenlerini ya da ispatın önemini matematiğin sorulara uygulanması ile ilişkilendiren ifadeler “Uygulamaya katkı” teması altında gruplandırılmıştır. Burada uygulama ile kastedilen bir teoremden verilen bir formülün bir problemi çözme için uygulanmasıdır. Katılımcıların bu ifadeyi açıklamalarında bu anlamda

kullandığı söylenebilir. Bu temanın teoremin/konunun öğrenilmesine katkı teması altında değerlendirilebildiği de düşünülebilir. Ancak bu tema altındaki kategorilerde katılımcıların uygulama yapmaya vurgu yapması ve uygulama yapmanın teoremi anlama veya konunun öğrenilmesine doğrudan bağlanamayacağı görüldüğünden ayrı bir tema olarak ele alınmıştır. Şekil 6’da 3. mülakat (seçme-sıralama görüşme formu) sonuçlarına göre, bu tema (uygulamaya katkı) beş öğretim elemanı tarafından son sırada tercih edilmiştir. Örneğin, Dr. Topoloji ispatın veri analizi uygulamalarına katkısına değinmiştir:

“Veri analizi konusunda bize yardımcı oluyor. Çünkü bir ispat yaparken teoremi doğru anlamamız lazım en başta. Eğer bunu doğru anlayabiliyorsak parçalara ayırabiliyorsak kendi mantığımızla ifade edebiliyorsak ondan sonra ancak ispata geçebiliyoruz. Bu da bir tür veri analizidir yani bakacak olursanız. Bu alışkanlığı edinmek de ispatlar yardımıyla bize doğru veri analizini sağlıyor. Verileri, koşulları doğru değerlendirip bunun üzerine çözüm yollarını kurmak gerekiyor. Bu da ispat yoluyla oldukça edinilebilir diye düşünüyorum.”

3. mülakat (seçme-sıralama görüşme formu) sonuçlarına göre tüm öğretim elemanlarının Dr. Topoloji’nin bu görüşüne katıldığı söylenebilir. Dr. Öklid *“Soru da çözmek önemli, soruları çözerken destek sağladığını düşünüyorum.”* diyerek ispatların soru çözmeye katkı sağladığını düşündüğünü belirtmiştir ve bu ifade “uygulama yapabilmelerini sağlar” kategorisi altında ele alınmıştır. Dr. Türev’in de ispatların soru çözmeye katkı sağladığını düşündüğü söylenebilir bu açıdan bu açıklama Dr. Türev’in ifadesi ile aynı kategori altında değerlendirilmiştir. Dr. Türev aynı zamanda bir teoremin ispatını öğrenmenin o teoremin uygulamalarını çözmekten daha önemli olduğunu, çünkü bunu anarlarsa farklı sorulara da uygulayabileceklerini belirtmiştir:

“(...) İntegraller için ortalama değer teoremini ispatlamak onlar için zor olabiliyor ama onunla ilgili soruları çözebiliyorlar. Orada da hep şunu söylüyorum. Önemli olan o soruları çözmek değil. O sorulara temel oluşturan şey ne, neden öyle? Onu artık uygulama olarak farklı yerlere uygulayabilirler. İspat aslında her şeyin temeli. Oradaki ispatları yaptıklarında onları uygulayabiliyorlar. Farklı durumlara uygulayabiliyorlar.”

Dr. Türev’in ifadeleriyle oluşan ispatın “uygulama sorularının temelini göstermesi” kategorisi, teoremin/konunun öğrenilmesine katkı teması altında “neyin nereden geldiğini bilmeyi sağlaması” kategorisine benzerlik gösterdiği söylenebilir ancak burada Dr. Türev’in bu durumu özellikle uygulama soruları üzerinde de vurgulaması nedeniyle bu tema altında da

değerlendirilmiştir. Ayrıca, bu kategori seçme-sıralama formunda da öğretim elemanlarından beşi tarafından seçilmiştir.

Özetle, öncelikli olarak seçilen temalar çeşitlilik göstermekle birlikte, tercih sıraları dikkate alındığında öğretim elemanlarının ispatları önemli bulmasında en etkili gerekçenin öğrencilerin düşünme becerilerine katkı yapması olduğu söylenebilir. Bu temayı sırasıyla, teoremin/konunun öğrenilmesi, matematiğin tanıtılması, duyuşsal özellikler ve son olarak uygulamalar takip etmektedir. Tema ayırt etmeksizin bakıldığında ise tüm öğretim elemanlarının da seçtiği üç görüş olduğu belirlenmiştir: matematiğin bir disiplin olarak farkına varılmasını sağlaması, aksiyomatik yapısını anlamayı sağlaması ve verileri doğru değerlendirip çözüm üretmeyi öğretmesi öğretim elemanlarının derste ispatın önemli görülmesinde en çok tercih ettikleri argümanlar olmuştur. Bununla birlikte tüm katılımcılar tarafından seçilmemiş olmakla birlikte çoğunlukla tercih edilen görüşler: Analitik düşünme becerisi sağlaması, problem çözme becerisini geliştirmesi, daha kalıcı öğrenme sağlaması, neyin nereden geldiğini bilmeyi sağlaması, tanımları, teoremleri, aksiyomları tündengelimli bir sistem içinde organize etmeyi sağlaması, güven vermesi, matematiksel haz sağlaması, heyecan sağlaması, bir problem durumunda koşulları doğru değerlendirmeyi sağlaması ve uygulama sorularının temelini göstermesidir.

4.2. İkinci Alt Probleme İlişkin Bulgular (İspatın derste sunumuna bakış)

Öğretim elemanlarının derslerinde ispatı nasıl anlattıklarına yönelik görüşleri ve mevcut uygulamaları ikinci alt problemi oluşturmaktadır. Bu alt problem ile teorem ve ispat sunumu esnasında önemli gördükleri uygulamalara yönelik düşünceleri ve uygulamalarının anlaşılması amaçlanmıştır. Bu alt problem, ilk mülakatta sorulan;

- “İspat yapmayı planladığınız teoremi/önermeyi (yani ispatlanacak ifadeyi) öğrencilerin anlamasına yardımcı olmak için neler yaparsınız?”
- “İspatlamayı nasıl yaptığınızı veya ispatı nasıl anlattığınızı tarif ediniz.”,
- “Derste ispat yaparken kesinlikle yapılmalı dediğiniz bir şey var mı?”,
- “Derste ispat yaparken ispatlama yönteminden bahseder misiniz? Neden?”,
- “Derste yaptığınız ispatları literatüre sadık kalarak mı yaparsınız veya ispat üzerinde herhangi bir değişiklik yapar mısınız? Neden?”
- “Matematik öğretiminde derslerde sunacağınız bir ispat hangi özelliklere sahip olmalıdır?”
- “Derste verdiğiniz tüm teoremleri ispatlar mısınız? Yapmıyorsanız buna nasıl karar verirsiniz?” ve “Derste ispat yapmanızı neler etkiler?”

sorularına öğretim elemanlarının verdikleri yanıtların ve ders video gözlemlerinin analizi ile yapılmıştır.

4.2.1. Teoremin sunumuna ilişkin bulgular

“Öğretim elemanları, ispatını yapmayı planladığı teoremi/önermeyi öğrencilerin anlamasına yardımcı olmak için neler yapmaktadır?” sorusu bu alt problemde ele alınmıştır. Teoremin anlaşılması, ispatın anlaşılması için bir önkoşul kapsamında değerlendirilebileceğinden, bu sorunun yanıtı ile, öğretim elemanlarının ispatlanacak ifadeyi öğrencilerin anlaması için neler yaptıkları incelenmiştir. Hem ders videoları ile sınıftaki uygulamalarının görülmesi hem de mülakatlarla bu konudaki görüşlerinin ve vurguladıkları noktaların anlaşılması amaçlanmıştır. Aşağıda öncelikle mülakat verilerine ardından da ders gözlem verilerine ilişkin bulgular sunulmuştur.

4.2.1.1. Teoremin sunumuna ilişkin mülakat analiz bulguları

Bu başlık altında, ilk mülakatta sorulan “İspat yapmayı planladığınız teoremi/önermeyi (yani ispatlanacak ifadeyi) öğrencilerin anlamasına yardımcı olmak için neler yaparsınız?” sorusuna verilen yanıtlara yönelik bulgular paylaşılmıştır. İlk mülakatta bu

soruya verilen cevapların analizi sonucunda, öğrencilerin teoremi/önermeyi anlamasını sağlamak amacıyla yapıldığı söylenen çeşitli uygulamalar Tablo 7’de verilmiştir.

Tablo 7

Teoremin anlaşılmasına yönelik beyan edilen uygulamalar

Uygulamalar	Öğretim Elemanı
Soru sorma (İspatın yöntemi, teoremde verilenler-istenenler, teoremdeki kavramlar)	Dr. Uzey, Dr. Soyut, Dr. Kompleks, Dr. Vektör,
Açıklama yapma (Teoreme uygun örnek verme/oluşturma, ilişkilendirme yapma, şekil/grafik/görsel oluşturma, teoremin önemine yönelik bilgi verme, hipotez ve hükmü vurgulama)	Dr. Uzey, Dr. Topoloji, Dr. Türev, Dr. Vektör, Dr. Öklid, Dr. Dr. Soyut,
Sorumluluk verme (Öğrencileri teoremle baş başa bırakma)	Dr. Topoloji

“İspat yapmayı planladığınız teoremi/önermeyi (yani ispatlanacak ifadeyi) öğrencilerin anlamasına yardımcı olmak için neler yaparsınız?” sorusuna verilen yanıtların analizi sonucunda, soru sorma, açıklama yapma ve sorumluluk verme olmak üzere üç ana uygulamanın tespit edildiği söylenebilir. Bu uygulamalar öğretim elemanlarının yaklaşım çeşitliliğine göre alt uygulamalarla kategorilendirilmiştir. Bu kategoriler ve kategorileri oluşturan görüşler aşağıda açıklanmıştır. Örneğin, Dr. Uzey, Dr. Kompleks ve Dr. Vektör teoremi sunarken, teoremin ispatının yöntemine, verilen- istenene veya teoremdeki kavramlara yönelik sorular sorduklarını belirtmişlerdir. Zamanın yetmeyeceğini düşündüğü durumlarda direkt olarak ispata geçtiğini belirten Dr. Kompleks öğrencilerin o teoremle ilgili neleri bildiğini anlamak için bazen sorular sorduğunu da söylemiştir:

“Soru cevap uygularız. Şimdi bakalım bu konuyla ilgili bildikleri var mı yok mu? Yokluyoruz bazen. Bazen direkt olarak şu ispata yapacağım diyorum. Zamana bağlı olarak, fazla zamanım varsa teorem ve ispata daha çok zaman ayırıyorum ama zaman kısıtlayıcı oluyor. Çünkü her konu üzerine sürekli açıklamalar yapmak, çok örnek çözmek... Bunu yaptığınız zaman yetişmiyor konu.”

Bu açıklama doğrultusunda Dr. Kompleks’in soru sorarak öğrencilerin teoremi anlamasını sağlamaktan ziyade öğrencilerin ön bilgilerini yoklamayı amaçladığı söylenebilir. Bununla birlikte, bu uygulamanın dolaylı da olsa öğrencilerin önbilgilerindeki eksiklikleri tamamlama amacını içerdiği düşünülebileceğinden burada değerlendirilmiştir. Benzer şekilde

sorular sorduğunu belirten Dr. Vektör de öğrencilerin bilgilerini yoklamaktan ziyade teoremi anlamalarını sağlamak ve teoremdeki kavramları vurgulamak için bunu yaptığını aktarmıştır:

“Orada yapılması gereken en iyi şey, öğrencinin teoremi çok iyi anlamasını sağlamak. Mesela f , $[a,b]$ aralığında sürekliyse’ diyoruz. Burada sürekliliğin ne olduğunu öğrenciye sorarım. Yani içindeki kavramların pekiştirilmesi önemli. Mesela (a,b) açık aralığında türevli. Neden açık aralık, neden kapalı aralıkta değil? Onu sorarım. Bu tarz sorular sorarım.”

Dr. Uzay da sorular sorarak başladığını belirtmiştir. Ancak Dr. Uzay’ın Dr. Kompleks ve Dr. Vektör’den farklı olarak ispatın yöntemine, hipotez ve hükmüne yani daha çok ispatın teknik tarafına yönelik sorulardan bahsettiği söylenebilir:

“Biliyorsun, ise bağlacı var bizim teoremde kullandığımız. İse veya ancak ve ancak kullanıyoruz. Verilenler ve istenenler nedir diye muhakkak ayırt ediyorum, yani burada ne isteniyor, nereden başlamalıyız? Bunu nasıl elde edebiliriz? gibi ben soru üzerinden genellikle başlıyorum. Genelde yaptığım şey soru üzerinden.

Teknik açıklamalara değinen bir başka öğretim elemanı olan Dr. Soyut’un bu açıklamasıyla aynı zamanda teoremdeki kavramlara yönelik sorular sorduğunu ve ispatta yapılacakları vurguladığını da aktardığı görülmüştür.

“Sonra mutlaka hipotez ve hüküm kısmını vurgulamaya çalışıyorum. ‘Bakin hipotezimiz bu elimizdeki şey bu, ama göstermemiz gereken de bu! Göstermemiz gereken şeye odaklanmak gerekirse...’ mesela biz buradan kosetlerin eşit olduğunu gösterelim ama bu aslında ne demek? İki kümenin eşitliğini göstermek demek. Kümelerin eşitliğini göstermek için biz ne yapıyorduk, ana fikrimiz ne olmalı? Yani önce parça parça yapılması gereken şeyleri vurguluyoruz. Daha sonra da ispata geçmeye çalışıyoruz.”

Dr. Topoloji de teoremin doğru anlaşılması gerektiğini belirterek bunun sağlanması için öğrencilere teoremde gereken ön bilgileri soru cevaplarla hatırlattığını söylemiştir:

“Bir kere kesinlikle o teoremin doğru anlaşılmasını sağlamak lazım. Bunun için de gerekiyorsa teoremi parçalara bölüp teker teker her parçanın üzerine konuşup bu parçayla ilgili ön bilgilerin çağırılması gerekiyor. Ön bilgilerini yavaş yavaş soru cevaplarla hatırlatmak. Mümkün olduğunca beraber yani dediğim gibi.”

Teoremin anlaşılmasını sağlamaya yönelik yapıldığı söylenen uygulamalardan bir diğeri de teoreme yönelik açıklamalardır. Bu açıklamalar örnek verme, şekil çizme,

ilişkilendirme yapma ve teoremin önemine yönelik bilgiler verme şeklinde alt uygulamalar içermektedir. Örneğin, Dr. Uzay soru sormanın yanı sıra örnek kullandığını söylemiştir. Ancak bunu yalnızca teoremi açıklamak için yaptığını da eklemiştir.

“Örnekle göstermiyorum. Sağladığını göstermenin bir anlamı olmadığını düşünüyorum. Ama teoremi açıklamak babında onu yapıyorum. Çünkü teoreme uygun doğru ve karşı örnek verebiliyorsa o zaman o teoremi anlamış demektir. İspatı unutsa bile doğru ve karşı örnekle teoremi hatırlayacaktır.”

Benzer şekilde Dr. Topoloji de öğrencilerin teoremi anlamasını sağlamak için teoremin koşullarına uygun bir örneği öğrencilerle birlikte üreterek daha somut hale getirmeyi amaçladığını söylemiştir:

“Gerekirse bazı teoremlerde deşifre ederken anlamakta çok zorlanıyorlar. Yani daha okurken anlamakta zorlanıyorlar. Zaten onun ispatına girmek mümkün değil. O zaman bu koşullara uygun bir örneği hadi birlikte üretelim! Mesela, A kümesi üzerinde çalışılıyorsa bunu Reel sayılar ya da Tam sayılar üzerine indirgeyelim, acaba şu koşulu sağlayan böyle bir küme oluşturabilir miyiz? Bunun üzerinden söylenenle nereye gidiliyor gibi öyle biraz daha somut hale getirip gözde bir şeyleri canlandırmak çok sıkıştığımızda yaptığımız şeylerden.”

Dr. Topoloji örnek vermeye ek olarak ilişkilendirme yaparak da öğrencilerin önceki bilgilerini çağrılarını sağladığını eklemiştir:

“Benzer teorilerle ilişkilendirip ifadeleri karşılaştırmasını bekleme... Mesela işte içinden çıkamadıysak yani buna benzer bir teoriyle daha önce karşılaştık mı? Peki o teoriyle bu teoremin ifadesi arasında ne gibi bir fark var ya da benzerlikler neler? Orada nasıl bir yöntemle bu şeyi çözmüştük? Acaba onu buraya öteleyebilir miyiz? vs. gibi ipuçları yapılabilir.”

Dr. Öklid de teoremin anlaşılmasına yönelik yaptığı bazı uygulamalardan bahsetmekle birlikte, bunun için çok uğraş göstermediğini de eklemiştir. Dr. Öklid'in de teoreme verilenlerle önceden bilinen postulatların ilişkilendirilmesine vurgu yaptığı söylenebilir:

“Teoremi anlamasına yardımcı olmak için bence teoremi... Ne verilmiş, verilenler ne? Bizim bildiğimiz kabul ettiğimiz postulatlar neler? Geometri için söylüyorum. Onları belirleyip üzerine nasıl ispat yapması gerektiğini söylüyorum. Teoremi anlaması için de çok da aşırı bir şey göstermiyorum.”

Dr. Türev öğrencilerden sunduğu teorem ile diğer teoremlerin sonuçları arasında ilişkilendirme yapmalarını istediğini aktarmıştır:

“Mesela bazen diyorum ki ‘Hangisi daha önce yapılmıştır, neden?’ gibi sorularla teoremlerin sonuçlarını ilişkilendirmeye çalışıyorum.”

İlişkilendirme yaptığını belirten bir başka öğretim elemanı olan Dr. Soyut, dersten bir örnekle bu durumu açıklamıştır. Bu açıklamasıyla aynı zamanda teoremin önemine de vurgu yaptığı söylenebilir:

“İspata geçmeden önce anlatmaya çalışıyorum. Bu teorem ne demek istiyor? Ne ile alakalı? Yine bir örnek verelim Sylow teoremlerinden bahsedeceğiz. Örneğin, Alt gruplarla ilgili, p -gruplarla da ilgili. Önce ben mutlaka şunu hatırlatırım: “Arkadaşlar Lagrange teoremi ne diyordu? Sonlu gruplarda, alt grubun mertebesi grubun mertebesini böler. Tamam bunu biliyoruz. Gerekli örneklerimiz de verdik ispatımızı da yaptık. Peki bu ifadenin tersi doğru mudur? Yani tam tersi sayılır mı bilmiyorum ama alt grubun mertebesi grubun mertebesini böler ama peki grubun mertebesini bölecek her mertebeden illa alt grup olmak zorunda mı? Yani bundan sonraki anlatacaklarımız aslında bu soruya cevap verebilmek için yapılmış şeyler” İşte p grup tanımı, işte slow p gruptur. Önce önemini vurguluyoruz. Sonra ne ile alakalı neye hizmet etsin diye türetilmiş? Eğer ilgili kavramın böyle bir tarafı varsa önce bunlardan mutlaka bahsediyoruz.”

Benzer şekilde Dr. Türev de “Bu teoremi nerede uygulayabiliriz şeklinde örnekler veriyorum” açıklamasıyla teoremin önemine yönelik bilgi verdiğini belirtmiştir. Dr. Türev buna ek olarak gösterimler kullandığını ve şekil veya grafik çizdiğini de eklemiştir.

“Öncelikle mutlaka Analiz dersi için grafiksel yorumu dahil ediyorum. Çünkü şekil öğrencilerin daha kolay anlamasını sağlıyor. Ve öncelikle teorem ifadesini okuduklarında anlamadıklarında aslında onlara ne demek istendiğini şekil kullanarak yorumlayabiliyorum Böylelikle hem cebirsel yönden hem de geometrik açıdan desteklenmiş oluyor. O yüzden mutlaka o şekilde bir gösterim yapmaya çalışıyorum.”

Şekil kullanmaya çalıştığını söyleyen bir başka öğretim elemanı ise Dr. Vektör’dür. Dr. Vektör eğer görselleştirmeye uygunsa şekil çizdiğini aktarmıştır.

Teoremin anlaşılmasını sağlamaya yönelik yapıldığı söylenen uygulamalardan sonuncu olarak Dr. Topoloji öğrencilere sorumluluk verdiğini ve onlardan, birlikte bakmadan önce teoremi kendi başlarına da anlamaya çalışmalarını beklediğini belirtmiştir:

“Bir kere süre verip birlikte okuma vs. aşamalarını da geçtikten sonra öğrenci artık ispat yapabilir duruma geldiyse, öğrenciye bir süre verip onu doğru okuyup anlaması için zaman bırakmak lazım. Yani biz okuyup anlıyoruz, belki senelerdir aynı şeyi verdiğimiz için artık bizim için sorun değil. Ama onun oradaki matematik notasyonları anlamlandırması, küçük parçalara ayırması, neyin ne olduğu üzerine biraz düşünmesi vs. için bir süre verilmesi lazım bence. Gerek ders içinde süre gerekse daha büyük bir şeyse gün aşırı süre vermek şeklinde. Bunun üzerine parçalayıp analiz ve farklı biçimlerde yeniden ifade edebilecek mi etmeyecek mi? Mesela ben ona bakmayı tercih ediyorum yani ‘burada ne diyor, peki şu koşul ne, ne anlama geliyor?’ vs. şeklinde. Yani kendi kendine kaldığında da bu soruları kendisine sorabilme alışkanlığını edinmesini sağlamaya çalışmak önemli.”

Sonuç olarak, sorular sorma, teoreme yönelik açıklamalar yapma ve öğrencilere sorumluluk verme, öğrencilerin teoremi anlamalarına yardımcı olma adına öğretim elemanlarının beyan ettikleri uygulamalar olmuştur. Buna ek olarak, öğretim elemanlarının bu konudaki gerçek sınıf ortamındaki uygulamalarını da aktarmak adına ders video analiz sonuçları da bir sonraki bölümde verilmiştir.

4.2.1.2. Teoremin sunumuna ilişkin ders video analiz bulguları

Bu başlık altında yalnızca teoremin nasıl sunulduğu incelendiğinden ders videoları analiz edilirken öncelikle teoremin sunumunun başladığı ve bittiği anlar belirlenmiştir. Belirleme aşamasında, öğretim elemanının ifadeleri veya yazdıkları dikkate alınmıştır. Teorem sunumunun başlangıcı aşağıdaki göstergeler kullanılarak belirlenmiştir:

- Öğretim elemanı tahtaya teorem/önerme başlığı yazar.
- Öğretim elemanı teorem/önerme yazacağını/yazdığını söyler.

Teorem ifadesinin sunumunun bittiği ve ispatın yapılmaya başlandığı anın belirlenmesinin ise eğer öğretim elemanı ‘ispata başlıyorum’ şeklinde bir açıklama yapmadıysa veya tahtaya ispat başlığı yazmadıysa daha zor olduğu söylenebilir. Teoremin anlaşılması ispatın anlaşılması için bir aşama olarak kabul edilebileceğinden, teoremde ispata geçiş şeklinde keskin bir ayrımdan söz etmek bazı durumlarda zor olmaktadır. Çünkü teoremin açıklanmasının bazen ispatın başlamasıyla iç içe geçmiş olduğu gözlemlenmiştir. Bu nedenle, eğer öğretim elemanı ‘ispata başlıyorum’ şeklinde bir açıklama yapmadıysa veya tahtaya ispat başlığı yazmadıysa, ispatın başladığı anın tespit edilmesinde, öğretim elemanının verilen ifadenin ispatına yönelik yaptığı herhangi bir hamlede ispatın başladığı kabul edilmiştir. Bu andan sonra teoreme yönelik atılan her adım, ispat süreci içinde değerlendirilmiştir (bkz.

Bölüm 4.2.2). İspatın başladığı anın da belirlenmesinin ardından teoremin sunumunun başladığı andan ispatın başladığı ana kadar öğretim elemanının yaptıkları ve söyledikleri, ders videoları defalarca kez izlenerek ve transkriptler üzerinde notlar alınarak incelenmiştir. Bu notlar daha sonra tekrar video izlemeleri ile teyit edilerek kategoriler ve bu kategorilerin görülme sıklıklarını gösteren tablolar oluşturulmuştur. Öğretim elemanlarının teoremin anlaşılmasına yönelik yaptıklarını söyledikleri uygulamalardan (bkz. Tablo 7) ders gözleminde karşılaşılanlara da ayrıca değinilmiştir. Aşağıda Tablo 8’de teoremin sunumu esnasında görülen uygulamalardan tespit edilen kategoriler ve bu kategorilerdeki uygulamaların görülme yüzdeleri verilmiştir. Bu kategorilere yönelik ayrıntılı açıklamalar da aşağıda bölümler halinde verilmiştir.

Tablo 8

Teoremin sunulması esnasında gözlemlenen uygulamalar ve bu uygulamaların ders gözlemlerinde görülme yüzdeleri

Teoremin sunulması esnasında yapılanlar	Dr. Kompleks	Dr. Topoloji	Dr. Soyut	Dr. Vektör	Dr. Uzay	Dr. Türev	Dr. Öklid
Teoremi vurgulamalar	%55	%16,7	%48,5	%44,4	%11,1	%58,8	%16,1
yaparak okuma							
Teoremi açıklama	%45	%76,7	%51,5	%44,4	%88,9	%41, 2	%83,9
Örnek verme	-	%6,7	%3	-	%5,6	%17,6	-
İlişkilendirme yapma	%20	%10	%6,1	%16,7	%16,7	%11,8	%3,2
Teknik açıklama yapma	%10	%20	%9,1	%22,2	%5,6	-	-
Şekil/grafik/görsel oluşturma	-	-	-	%22,2	-	%23,5	%74,2
Öğrencilere süre verme	-	%10	-	-	-	-	-
Teoreme dikkat çekme	%30	%10	%12,1	%11,1	%16,7	%5,9	%6,5
Durum analizi yapma	-	%16,7	-	%16,7	-	-	-
Soru sorma*	%10	%36,7	%24,2	%16,7	%66,7	%52,9	%35,5

*Tablodaki sorular yalnızca *sonuç* ve *yorum* sorularıdır.

Tablo 8 teorem sunumunda gözlemlenen uygulamaların sunulan tüm teoremlerin yüzde kaçında gerçekleştiğini göstermektedir. Örneğin, Dr. Kompleks sunduğu teoremlerin %55'inde açıklama yapmadan yalnızca vurgulamalar yaparak teoremi tekrar okumuş ve ispata geçmiştir. Buna ek olarak, Dr. Topoloji sunduğu teoremlerin %10'unda öğrencilere teorem üzerine düşünceleri için süre vermiştir ve bu uygulama yalnızca Dr. Topoloji'nin derslerinde gözlenmiştir. Öğretim elemanları birden fazla uygulamayı bir teorem içinde kullanabildiklerinden her bir öğretim elemanı için tablodaki yüzdelerin toplamı %100'ü aşabilmektedir. Tabloda gösterilen uygulamalara yönelik kategoriler ve derslerde bu kategorilere yönelik gözlemlenen transkript örnekleri aşağıda verilmiştir. Ek olarak, öğretim elemanlarının ders gözlemlerinde tespit edilen soru türleri içerisinde öğrencilerin derse katılımlarını sağlayan ve bilgilerinin açıklanmasına ve ölçülmesine fırsat veren soruların özellikle sonuç ve yorum soruları olduğu söylenebilir (bu soru türlerine ilişkin bilgiler soru sorma başlığı altında detaylandırılmıştır). Bu nedenle, Tablo 8'de soru sorma uygulamasına yönelik verilen yüzdeler yalnızca *sonuç ve yorum* sorularından oluşmaktadır. Sonuç ve yorum sorularına ilişkin bilgiler de soru sorma kategorisi altında açıklanmıştır.

4.2.1.2.1. Teoremi vurgulamalar yaparak okuma

Öğretim elemanlarının bazı teoremlerde herhangi bir açıklama vb. bir uygulama yapmadan yalnızca teoremi vurgulayarak okudukları gözlenmiştir. Bu uygulamada öğretim elemanı, teoremi vurgulu seslendirerek yazar veya yazdıktan sonra vurgulama yaparak okur. Teoremin vurgulama yapılarak okunmasının, öğrencilerin hangi noktalara dikkat etmeleri gerektiğine işaret etmesi açısından, teoremin anlaşılmasına katkı yaptığı söylenebileceğinden bu uygulama bir kategori olarak ele alınmıştır. Bazı teoremlerde ise öğretim elemanlarının tahtaya teoremi yazıp herhangi bir açıklama yapmadan ispata geçtikleri veya çalışma kağıdında yazılı olan teoremi öğrencilerden kendilerinin okumalarını isteyerek ardından da ispata geçtikleri görülmüştür. Bu uygulamaların çoğunlukla benzer teoremlerin art arda sunulması esnasında veya formül teoremlerinin sunumlarında görüldüğü söylenebilir. Örneğin Dr. Vektör sunduğu teoremlerin % 11,2'sinde, Dr. Topoloji ise %6,6'sında açıklama veya vurgulu okuma yapmadan direk ispata geçmiştir. Bunun haricinde diğer öğretim elemanlarının ya vurgulu okuma veya açıklama yaptıkları görülmüştür. Tablo 8'e göre çoğunlukla ispat yoğunluklu olmayan derslerde sadece vurgulu okuma ile sunulan teoremlerin daha çok gözlemlendiği sonucu çıkarılabilir. Buna ek olarak mülakatta öğretim elemanları vurgulama yaparak okuduklarından bahsetmemişlerdir.

4.2.1.2.2. Teoremi açıklama

Teoremi açıklama ifadesi ile kastedilen, teoremin bütünsel olarak veya teorem içindeki tanımların/notasyonların/işlemlerin açıklanmasıdır. Öğretim elemanlarının teoremi yazmadan önce, teoremi yazarken veya yazdıktan sonra, teorem ifadesinin açıklanmasına yönelik en az bir cümle kurmuş olmaları, açıklama olarak kabul edilmiştir. Buna ek olarak öğretim elemanlarının teoremi açıklamak için mülakatta da bahsettikleri gibi çeşitli yöntemler kullandıkları da gözlenmiştir. Bu yöntemler; örnekler verme, ilişkilendirme yapma, şekil/grafik/görsel oluşturma ve teknik açıklamalar yapma başlıkları altında değerlendirilmiştir. Öğretim elemanları, teorem sunumları esnasında bu yöntemlerden birini ya da birkaçını birlikte kullanmışlardır.

a. Örnek verme

Teoreme yönelik verilen örneklerin teoremde verilen bir *küme*yi, *fonksiyonu*, *formülü* veya *notasyonu* daha iyi anlamlandırma ve öğrencilerin sorularına yanıt oluşturma amaçlı kullanıldığı gözlenmiştir. Örneğin, Dr. Uzey bir öğrencinin sorusu üzerine teoremde geçen işlem notasyonlarının farklılıklarını anlatabilmek için örnek kullanmıştır:

Teorem: $(V, +, \cdot)$ ve $(W, \oplus, \cdot)$ vektör uzayları için,

$$L: V \rightarrow W$$

$$\vec{v} \rightarrow L(\vec{v}) = \vec{w}$$

$$\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \text{ için } L(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = L(\vec{v}_1) \oplus L(\vec{v}_2) \text{ dir.}$$

Öğrenci: Hocam artının yuvarlak içinde olması farklılık gösteriyor mu?

Dr. Uzey: Bu vektör uzayının artısı ile diğerinin artısı aynı olmak zorunda değil. Bu neyde fark eder? Mesela, bir sayının 5 katını almakla bir matrisin 5 katını almak farklı işlemdir. Değil mi? Matrisin 5 katı nasıl alınır? Her bir elemanı 5 ile çarpmak lazım. Anladınız mı? Buna dikkat ediyoruz.

Ders gözlemleri analizi sonucunda teorem sunumlarında örnek kullanım yüzdeleri sırasıyla Dr. Türev %17,6, Dr. Topoloji %6,7, Dr. Uzey %5,6 ve Dr. Soyut %3'tür. Diğer öğretim elemanlarının teorem sunumlarında örnek sundukları gözlemlenmemiştir. Buna ek olarak, Dr. Uzey ve Dr. Topoloji mülakatta da örnek kullandıklarını belirtmişlerdir.

b. İlişkilendirme yapma

Öğretim elemanlarının teorem sunumlarında sundukları teoremi ya da teoremdeki bazı bilgileri başka bilgilerle ilişkilendirdikleri gözlemlenmiştir. Kullanılan ilişkilendirmeler ders içi başka bir konuyla, başka bir dersle veya günlük hayatla ilişkilendirme olarak üç başlık altında değerlendirilmiştir. Örneğin, Dr. Türev *ortalama değer teoremini* açıklarken günlük hayatla ilişkilendirme yaparak örnek vermiştir:

Teorem: f , $[a,b]$ 'de sürekli, (a,b) de türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$\exists c \in (a,b) \text{ için } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ dır.}$$

“Şimdi bu teorem ne diyor bize? Mesela şöyle düşünün iki saat boyunca yol yaptım. 180 km yol aldım. Bu durumda ortalama hızım nedir? (öğrenciler de cevap verir) 90’dır. Ortalama hızımın 90 olması bana neyi gösterir? Ben yolculuk boyunca en az bir defa doksanla gitmişim değil mi? Bunu gösteriyor bana. Şimdi bu teoremle bunun bir alakası var mı?...”

Ders içi ilişkilendirmelerde o ders kapsamında daha önce öğrenilen konulara atıf yapılırken başka dersle ilişkilendirmede, teoremin ilişkili olduğu derse veya o dersten bir konuya atıf yapıldığı gözlemlenmiştir. Örneğin, Dr. Kompleks belirsiz integral tanımını verdikten sonra Analiz dersinde öğrendikleri bilgiye atıf yaparak önermeyi yazmıştır:

“Şimdi burada siz aslında Gerçek Analizde bir belirsiz integral sabiti olduğunu biliyorsunuz değil mi? Bu belirsiz integral sabiti nereden geliyor? Şimdi size bir önerme verelim burada.”

Ders gözlemleri analizi sonucunda teorem sunumlarında tüm öğretim elemanlarının ilişkilendirme yaptıkları gözlenmiştir. Kullanılan ilişkilendirmelerin yüzdeleri sırasıyla Dr. Kompleks %20, Dr. Uzay ve Dr. Vektör %16,7, Dr. Türev %11,8, Dr. Topoloji %10, Dr. Soyut %6,1 ve Dr. Öklid %3,2’dir. Buna ek olarak, mülakatta Dr. Öklid, Dr. Topoloji, Dr. Soyut ve Dr. Türev teoremi açıklarken ilişkilendirme yaptıklarını belirtmişlerdir.

c. Teknik açıklama yapma:

Teorem sunumunda teknik açıklamalar, teoremin ne tür yapılar/kalıplar içerdiği (hipotez-hüküm kısımları vb.), ispat yöntemi, teoremde kullanılan notasyona yönelik bilgiler vb. içeren açıklamalar olarak ele alınmıştır. Bu tür açıklamaların öğrencilerin teoreme yönelik

bir anlayış geliştirmesine katkı sağlayacağı söylenebilir. Örneğin, Dr. Soyut teorem cümlesinde geçen ifadelerle yönelik böyle bir açıklama yapmıştır.

“Bir ve yalnız bir çözümü vardır ne manaya gelecek? Bu ifade matematikte kullanıldığında ne manaya geliyordu? Kesinlikle vardır ve bir tanedir arkadaşlar.”

Dr. Uzak teorem cümlesinde geçen notasyona yönelik teknik bir açıklama yapmıştır:

“Bundan sonra dersimizde iç çarpımı böyle göstereceğiz ($\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$) ama kaynaklarda nokta olarak da görebiliyoruz.”

Ders gözlemleri analizi sonucunda teorem sunumlarında yapılan teknik açıklamaların yüzdeleri sırasıyla ve Dr. Vektör %22,2, Dr. Topoloji %20, Dr. Kompleks %10, Dr. Soyut %9,1 ve Dr. Uzak %5,6'dır. Mülakatta Dr. Soyut ve Dr. Öklid hipotez ve hükmü vurguladıklarını ve verilenlerle önceki bilgileri ilişkilendirdiklerini söylemişlerdir. Buna ek olarak, Dr. Uzak ispat yöntemi, hipotez ve hüküm gibi teorem sunumunun teknik yönlerine yönelik sorular sorduğunu belirtmiştir.

d. Şekil/grafik/görsel oluşturma:

Öğretim elemanlarının teoremi veya teoremdeki kavramları açıklamak amacıyla şekil ve grafik çizdikleri veya görsel açıklamalar yaptıkları gözlemlenmiştir. Örneğin, Dr. Türev logaritmik fonksiyonun türev formülünü içeren teoremi yazarken bu formülü ve logaritmik fonksiyonu öğrencilere hatırlatmaya çalışırken grafik çizerek açıklamalar yapmıştır (bkz. Şekil 7):

“Üstel fonksiyonun nasıl bir grafiği var? (Öğrencilerden cevap bekler ancak cevap gelmez) (tahtanın bir kenarına şekli çizerken açıklar) Mesela ‘a’ 1’den büyükken artan bir fonksiyon; a, 0 ile 1 arasındayken neydi? Azalan bir fonksiyon ve hepsinin geçtiği yer buydu değil mi?”



Şekil 7. Dr. Türev'in teoremi açıklarken çizdiği şekil

Ders gözlemleri analizi sonucunda teorem sunumlarında şekil/grafik/görsel oluşturma yüzdeleri sırasıyla Dr. Türev %23,5, ve Dr. Vektör %22,2'dir. Bu sonuçlar mülakat verilerini desteklemektedir. Çünkü Dr. Türev ve Dr. Vektör şekil çizdiklerini söylemişlerdir. Bu verilere ek olarak, Geometri dersinin içeriği gereği şekil gerektirmesiyle birlikte, Dr. Öklid sözel olarak sunabildiği hatta önce sözel olarak verdiği teoremlerin %74,2'sinde teoremi açıklarken şekli çizmiştir.

4.2.1.2.3. Öğrencilere teorem üzerine düşünceleri için süre verme

Bu uygulama öğretim elemanlarından yalnızca Dr. Topoloji'nin teorem sunumlarında gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, öğrencilerin teorem sunumuna dahil edilmesi bağlamında bu uygulamanın faydalı olabileceği düşünüldüğünden bir kategori olarak ele alınmıştır. Dr. Topoloji sunduğu ispatların %10'unda, ispatlanacak ifadeyi öğrencilerin kendileri okuyarak anlamaları için kısa bir süre (ortalama 1-2 dk.) beklemiştir. Dr. Topoloji bu uygulama esnasında öğrencilere teoremi anlamaları için süre verdiğini belirtmiş ve öğrencilerin okuması bittikten sonra teoremi öğrencilerle birlikte açıklamıştır. Örneğin, derste Dr. Topoloji teoremin bulunduğu çalışma kağıdını dağıttıktan sonra bu yönde bir açıklama yapmıştır:

Teorem: $\tau = \{\square, \emptyset, A_n \subset \square; A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}, n \in \square\}$ ailesinin $\square$ üzerinde bir topolojik yapı olduğunu gösteriniz.

“Hemen ilk teoreme bakalım arkadaşlar. Ne demiştik Topoloji dersinde Topolojinin ancak T'sine bakabileceğiz ama bizim genel amaçlarımız içerisinde okuduğumuzu doğru bir şekilde analiz edip anlayabilmek de var demiştik. Bu bizim için önemli. Şimdi burada bir τ ailesi verilmiş. Bu aile için hangi özelliklerin olduğunu bu işin içerisinden ayıklayalım. Siz bir bakın önce okuyun (Bir süre bekler ve ardından öğrencilere sorular sorarak teoremi açıklar).”

Dr. Topoloji mülakatta da bu uygulamayı yaptığını yani öğrencilerin öncelikle okuyup anlamasını beklediğini belirtmiştir (bkz. 4.2.1.1).

4.2.1.2.4. Teoreme dikkat çekme

Teoremin neden önemli olduğu, nerede kullanıldığı, bu teoremi bilmenin ne işe yarayacağı ve teoremin bilinenlerden farklı olanı nasıl açıkladığına yönelik açıklamalar, teoreme dikkat çekme kapsamında değerlendirilmiştir. Bu şekilde öğrencilerin teoreme yönelik ilgilerini arttırmayı amaçladıkları söylenebileceğinden bu durum öğrencilerin teoremi anlamaları için bir adım olarak görülebilir. Örneğin, Dr. Uzay hem teoremi yazmadan önce hem de yazdıktan sonra teoremin önemine dikkat çekmiştir:

“Şimdi önemli bir teorem yapacağız. Bundan sonra iç çarpım uzayı diyeceğiz. İç çarpım uzayı deyince ne anlayacaksınız? bir vektör uzayı üzerinde ne tanımlı artık? İç çarpım tanımlı. Doğal olarak biz ona iç çarpım uzayı diyoruz”.

Bu açıklamadan sonra Dr. Uzay teoremi yazmıştır.

Teorem: (Cauchy-Schwarz eşitsizliği) V bir iç çarpım uzayı olmak üzere $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$ dir.

Teoremi yazdıktan sonra teoremin önemi ile ilgili açıklama yapmaya devam eder:

“Gelelim bu güzel, anlamlı eşitsizliğe. Şimdi Cauchy-Schwarz eşitsizliği çok önemli bir eşitsizlik çocuklar. İşimizi çok kolaylaştıran bir eşitsizlik. Ne diyor? İç çarpımlarının karesi normlarının karelerinin çarpımına eşittir. Çok ünlü bir eşitsizliktir. Bu bize gerçekten hem soru çözümlerinde hem de eşitsizlik çözümlerinde destek olur. Yani farklı farklı özellikler getiriyor bize. O yüzden gerçekten önemli.”

Başka bir teoremde, teoremin bilinenlerden farklı olanı nasıl açıkladığını belirterek teoreme dikkat çeken Dr. Topoloji şu açıklamayı yapmıştır:

“Şimdi beş elemanlı harflerden oluşan bir X kümesi aldık. Bunun üzerindeki topolojik yapı olan ya da olmayan örnekleri inceledik. Ama tabi ki böyle sonlu elemanlı olmak zorunda değil elimizdeki tüm kümeler. Dolayısıyla bakalım diğer tür kümelerde nasıl ifade edeceğiz? (Çalışma kağıdını dağıtır) şimdi şu birinci teoreme bakalım.”

Dr. Kompleks’in de Cauchy-Riemann denklemlerini içeren teoremi anlatırken teoremin adının nereden geldiğini açıklayarak teoreme dikkat çektiği söylenebilir:

“Bakın bu Riemann’ın doktora tezi. Kompleks analizde türev olayı Riemann’ın doktora tezidir. Orada bulmuş bunları. Sonra Cauchy bu denklemlere açıklık getirmiş. Dolayısıyla denklemler Cauchy-Riemann denklemleri olarak anılıyor.”

Ders gözlemleri analizi sonucunda teorem sunumlarında tüm öğretim elemanlarının teoreme dikkat çekecek ifadeler kullandıkları gözlenmiştir. Teoreme dikkat çekme yüzdeleri sırasıyla Dr. Kompleks %30, Dr. Uzay %16,7, Dr. Soyut %12,1, Dr. Vektör %11,1, Dr. Topoloji %10, Dr. Öklid %6,5 ve Dr. Türev %5,9’dur. Buna ek olarak mülakatta yalnızca Dr. Soyut ve Dr. Türev teoremin önemine yönelik bilgi verdiklerini söylemişlerdir (bkz. 4.2.1.1).

4.2.1.2.5. Durum analizi (öğrencilere durumlarıyla alakalı dönüt verme) ve öneride bulunma

Durum analizleri, öğrencilerin kendi durumları hakkında fikir sahibi (bilinçli) olmaları ve öğrenmelerine engel olabilecek bir durumu aşmalarına yönelik bilinçlendirme içerdiğinden bu uygulamanın öğrenmeyi arttırmayı amaçladığı söylenebilir. Yapılan durum analizleri, bazı durumlarda sunulan teoreme özel olurken bazı durumlarda ise sunulan teorem özelinde öğrencilerin genel durumlarını belirtmek şeklinde gerçekleşmiştir. Örneğin, Dr. Topoloji öğrencilerin bir teoremi anlamakta sıkıntı yaşadığını fark ettiği bir derste öğrencilere hem yaşadıkları sorunu hem de bu soruna sunduğu çözümü teknik açıklama kapsamında da sayılabilecek şekilde açıklamıştır:

“Bu ifadeyi anlamakta sıkıntı çektiniz. Eğer soruyu anlamakta sıkıntı çekiyorsanız sizi en rahatlatacak yol minyatür bir örnek oluşturup nasıl bir şey olduğunu görmeniz olur. Matematikçiler çoğunlukla bir teoremi üretip ondan sonra direk onun ispatını çıkaramazlar. Ya örneklerden genelleme yaparlar. Teorem oluştururlar oradan da oluşturdukları örnek üzerinden genelleme ile ispatlarını yaparlar. Çoğu bu şekildedir. Yani örnek oluşturmanız sizi her zaman rahatlatır. Ama bir örnek vermek ispat için yeterli değil. Onu da söylemiş olalım.

Benzer şekilde Dr. Topoloji ödev verdiği ispatları göstermek için yanına gelen öğrencilerde fark ettiği bir soruna derste o teoremi sunarken değinmiştir:

“3. çalışma yaprağındaki teoremimize gelelim. Sizin bana gelip de yaptıklarınızı anlattıklarınızdan veya okuduklarımdan yola çıkarak genel olarak gördüğüm Soyut Matematikteki ve Analizdeki bilgilerinizi kullanamama sorunuz var. Soruları çözerken onlardan da bahsedelim. Ayrıca notasyonla ilgili sorunlarınızdan bahsetmiyorum bile. O genel bir sorun. Bir kısmınız bunu aşmak için çaba gösteriyor bir kısmınız özensiz davranıyor.”

Dr. Vektör derste anlatacağı bir teoreme giriş yaparken öğrencilerde gözlemlediği genel bir durumun analizini yapmıştır:

“Bugünkü dersimizde çok önemli iki tane teorem üzerinde duracağız. Analizin temel teoremleri. İki tane temel teorem var. Bu iki temel teorem de integralle alakalı. Arkadaşlar teoremler öğrenciler tarafından... Bilhassa sınav siteminden dolayı bu sınav sistemi hep teste yönelik olduğu için. Mesela siz ne diyorsunuz? ‘Hocam teorem ispatlarını sormayın’. Sorsak da ezbere çalıştığınız şey oluyor. Aslında teoremi iyi şekilde kafanızda oturtursanız hangi ders olursa olsun o temeli atmış olursunuz. Yani ispatını biliyorsanız. Yorumunu biliyorsanız. Çünkü öbür türlü ezber oluyor. Yalnız

ispat yaparken teknikler var. Bir defa bize ne verilmiş ne isteniyor. Yani hipotez ve hüküm. Şimdi eğer onları iyi kurgularsak ispat kolay. Daha doğrusu teoremin ifadesini anlarsak ispatı kolay. Bakın şimdi bunu yaparken size soracağım teker teker. Hatta adımları size soracağım. Şimdi önce ne yapalım teoremin ifadesini yazalım. Ne yaptığımızı bilirsek ne olursa olsun yaparız arkadaşlar.”

Ders gözlemleri analizi sonucunda teorem sunumlarında yalnızca Dr. Topoloji ve Dr. Vektör’ün durum analizi yaparak öneride bulundukları gözlenmiştir. Bu uygulamanın görülme yüzdesi iki öğretim elemanı için de %16,7’dir. Buna ek olarak, mülakatta öğretim elemanları bu uygulamadan bahsetmemişlerdir.

4.2.1.2.6. Soru sorma

Bu bölümde öğretim elemanlarının soruları, hem hangi bilgiye yönelik sorular sordukları hem de öğrencilerden bekledikleri cevap türü açısından analiz edilmiştir. Mülakatta bazı öğretim elemanları teoremin ispatının yöntemine, verilen- istenene veya teoremdeki kavramlara yönelik sorular sorduklarını belirtmişlerdir. Öğretim elemanları teoremi sunarken o teoremin ispatında kullanılacak yöntemle dair sorular sorduklarını söylemiş olmalarına rağmen ders gözlemlerinde, Dr. Soyut’un kendisinin cevapladığı böyle bir soru haricinde hiçbir öğretim elemanının teoremi sunarken ispat yöntemine yönelik soru sormadığı gözlenmiştir. Bununla birlikte, yöntemle yönelik soruların daha çok ispat sunumu başlangıcında sorulduğu söylenebilir (bkz. 4.2.2.2). Benzer şekilde Dr. Topoloji’nin sunduğu teoremlerin %16,7’sinde teoreme verilen veya istenenlere yönelik sorular sorduğu, bunların çoğunda da soruları kendisinin yanıtladığı gözlenmiştir. Bunun haricinde teorem sunumu esnasında hipotez veya hükme yönelik sorular sormadıkları görülmüştür. Öğretim elemanlarının teorem sunumlarında sordukları soruların çoğunlukla teoremdeki kavram veya notasyonlara yönelik olduğu söylenebilir. Mülakatta yalnızca Dr. Kompleks ve Dr. Vektör teoremdeki kavramlara yönelik sorular sorduklarını belirtmiş olmalarına rağmen, Dr. Kompleks haricinde tüm öğretim elemanlarının bu tür sorular sordukları görülmüştür. Bu bağlamda, ders gözlemleri analizi sonucunda, teorem sunumu esnasında teoremdeki kavramlara veya notasyonlara yönelik sorular sorma yüzdeleri sırasıyla Dr. Uzak %66,7, Dr. Türev %41,2, Dr. Soyut %30,3, Dr. Topoloji %30, Dr. Öklid %25,8 ve Dr. Vektör %16,7’dir. Buna ek olarak, sunulacak teoremleri yazarken Dr. Öklid %9,7’sinde, Dr. Soyut %6,1’inde ve Dr. Uzak ise %5,6’sında, öğrencilere sorular sorarak teorem ifadesinin yazımını öğrencilerle birlikte tamamlamışlardır. Mülakatta bahsedilmemiş olan bu uygulama da teoremdeki kavramlara yönelik soru sorma kategorisi içinde değerlendirilmiştir.

Öğretim elemanlarının soruları, öğrencilerden bekledikleri cevap türlerine göre de analiz edilmiştir. Öğrencilerden cevap bekledikleri soruların bazılarında öğrencileri derse katma veya bilgilerini yoklama gibi nedenlerle hareket ettikleri bir önceki bölümde mülakat verilerinin analizinde de gözlenmiştir. (bkz. 4.2.1.1). Öğretim elemanlarının sordukları sorular rehberlik, seçenek, sonuç, yorum, onay ve kontrol olmak üzere kategorilendirilmiştir. Öğretim elemanlarının ders gözlemlerinde tespit edilen soru türleri içerisinde öğrencilerin derse katılımlarını sağlayan ve bilgilerinin açıklanmasına ve ölçülmesine fırsat veren soruların özellikle sonuç ve yorum soruları olduğu söylenebilir. Bu nedenle, bu bölümün başında Tablo 8’de soru sorma uygulamasına yönelik verilen yüzdeler yalnızca *sonuç ve yorum* sorularından oluşmaktadır. Öğretim elemanlarının hem kendi sordukları tüm soruların hangi soru türlerinden hangi yüzdelerle oluştuğu hem de sundukları teoremlerin yüzde kaçında bu soru türlerini sordukları incelenmiştir. Teorem sunumu esnasında sordukları soruların türlerine göre hem kendi soruları içindeki (KSİ) yüzdeleri hem de sundukları teoremlerde bu soru türlerinin görülme (TG) yüzdeleri Tablo 9’da verilmiştir. Tablo 9’a göre *teorem sunumunda* soru sorma bağlamında dikkat çeken sonuçlar şunlardır:

- Teoremi sunarken Dr. Türev’in kendi sorduğu soruların çoğunluğunu (%36) sonuç soruları yani kısa cevap gerektiren sorular oluşturmaktadır.
- Yorum soruları yani öğrencilerden açıklama beklenen sorular açısından değerlendirdirildiğinde teoremi açıklarken en çok Dr. Türev’in (%23,5) bu tür sorular sorduğu, bununla birlikte kendi soruları içinde de sonuç sorularından sonra en çok sorduğu (%23,5) soru türünün yorum soruları olduğu söylenebilir.
- Dr. Topoloji sunduğu teoremlerin yarısında kendisinin cevapladığı rehberlik soruları sormuştur. Rehberlik soruları aynı zamanda Dr. Topoloji’nin teorem sunumlarında kendi soruları içinde de en çok sorduğu soru türüdür. Yani, Dr. Topoloji teoremi sunarken sorduğu soruların çoğunu kendisi cevaplamaktadır.
- Dr. Uzay ve Dr. Kompleks teoremi sunarken öğrencilere hiç yorum soruları sormamışlar yani öğrencilerin açıklama yapmalarını beklememişlerdir.
- Dr. Öklid’in teoremleri sunarken sorduğu tüm soruların çoğunluğunu seçenek ve sonuç soruları oluşturmaktadır. Yani, çoğunlukla öğrencilerden ya kısa cevap beklemiş ya da sunduğu seçeneklerden birini seçmelerini istemiştir. Dr. Öklid aynı zamanda hem kendi soruları içindeki yüzdesiyle hem de teorem bazında seçenek sorularını en çok kullanan öğretim üyesi olmuştur.
- Dr. Kompleks teoremleri sunarken sorduğu tüm soruların çoğunluğunu (%57,1) kendisi yanıtlamıştır. Ayrıca teorem bazında yüzdeler bağlamında da teorem sunumunda en az soru soran öğretim üyesi olduğu söylenebilir.

- Dr. Uzak'ın hem teorem bazında hem de kendi soruları içerisinde değerlendirildiğinde diğer öğretim elemanlarına göre daha fazla kontrol soruları sorduğu yani öğrencilerin anlayıp anlamadığına yönelik sorular sorduğu söylenebilir. Buna ek olarak sunduğu teoremlerin yarısında açıklama yaparken öğrencilerden onay beklemiştir. Bununla birlikte her öğretim elemanının kendi soruları içinde değerlendirildiğinde onay soruları Dr. Vektör'ün soruları içinde (%40) önemli bir yer tutmaktadır.
- Dr. Vektör teoremi sunarken çoğunlukla ya sorduğu sorunun cevabını kendisi vermektedir ya da söylediği şeyi öğrencilerin onaylamasını beklediği sorular sormaktadır.

Tablo 9'da kendi soruları içindeki yüzdeleri toplamı %100 dür. Ancak bir teoremi sunarken farklı türde sorular sorabildiklerinden bu soruların teoremlerde görülme yüzdeleri toplamı %100'ü aşabilmektedir. Öğretim elemanlarının sorduları soruların türleri ve örnekleri aşağıda açıklanmıştır.

Rehberlik soruları: Bu sorular öğretim elemanının öğrencilerden beklediği düşünme tarzını vurgulamak için kullandıkları sorulardır. Öğretim elemanı, bu sorularda ya sorduktan hemen sonra kendisi cevaplamakta ya da öğrencilerden soruya cevap vermelerini beklememektedir. Örneğin:

“Dolayısıyla biz bu yaklaşımları kullanırken bu yaklaşımların içinden bir tanesi dahi farklı limit sonuçları verirse o limite ne diyeceğiz? Limit yoktur.”

“Bu ifade matematikte kullanıldığında ne manaya geliyordu? Bir ve yalnız bir çözümü vardır ne manaya gelecek? Kesinlikle vardır ve bir tanedir arkadaşlar.”

“Acaba başka uzaylarda başka iç çarpımlar var mı? Tabi ki var. Yani sadece bir iç çarpım yok.”

“Lineer bileşim neydi? Bir vektörü diğer vektörler cinsinden yazabilmektir.”

Tablo 9

Öğretim elemanlarının teoremleri sunarken sordukları soru çeşitlerine göre yüzdelik dağılımları

	Rehberlik Soruları		Seçenek Soruları		Sonuç Soruları		Yorum Soruları		Kontrol Soruları		Onay Soruları	
	Kendi soruları içinde	Teorem bazında görülme	Kendi soruları içinde	Teorem bazında görülme	Kendi soruları içinde	Teorem bazında görülme	Kendi soruları içinde	Teorem bazında görülme	Kendi soruları içinde	Teorem bazında görülme	Kendi soruları içinde	Teorem bazında görülme
Dr. Türev	%13,4	%17,7	%7,4	%11,8	%36	%47,1	%22,4	%23,5	%1,4	-	%19,4	%23,5
Dr. Soyut	%30,5	%12,1	%16,6	%9,1	%30,5	%21,2	%11,1	%9,1	%3	%6,1	%8,3	-
Dr. Vektör	%40	%5,6	-	-	%15	%16,7	%5	%5,6	-	-	%40	%22,2
Dr. Topoloji	%49,1	%50	%7	%10	%31,6	%36,7	%1,8	%3,3	%1,8	%3,3	%9,7	%8,8
Dr. Öklid	%3,2	%6,5	%35,5	%25,8	%35,5	%32,3	%3,2	%9,7	-	-	%22,6	%9,7
Dr. Uzay	%35,6	%61,1	%1,3	%5,6	%27,4	%66,7	-	-	%13,7	%27,8	%22	%50
Dr. Kompleks	%57,1	%10	-	-	%28,6	%10	-	-	-	-	%14,3	%5

Seçenek soruları: Öğretim elemanın öğrencilere seçenek sunduğu yani öğrencilerin iki veya daha fazla seçenekten birini seçmeleri gereken sorulardır. Evet/hayır soruları da bu sorular içinde yer almaktadır. Örneğin,

“Bu küme sayılabilir mi sayılamaz mı?”

“Buradan başlayıp böyle mi gideceğim?”

“Eş midir? değil midir?”

“Şimdi bu postulat mıdır? teorem midir?”

“Eşkenar üçgenin içinde bir noktadan kenarlara dikmeler çizersen bu dikmelerin toplamı bir kenar uzunluğuna mı eşit olur yoksa bir yükseklik uzunluğuna mı?”

Sonuç soruları: Kısa cevap gerektiren ve matematiksel bir kavramı veya işlem sonucunu soran sorulardır. Örneğin,

“Bu açkıortayların kesişimi I ise arada oluşan açı kaçtır?”

“Bu açının ölçüsü hangi açı ile ilişkili?”

“Neydi türevler için ortalama değer teoremi?”

“Neydi formülümüz?”

“Kompleks deyince ne anlayacaktık?”

“Bu küme hangi elemanlardan oluşur?”

Yorum soruları: Kısa bir cevaptan daha fazlasını gerektiren veya açıklama ve yorum beklenen sorulardır. Öğrencilerin verdikleri cevapları açıklamalarını gerektiren “Neden?” soruları da bu kategoride ele alınmıştır. Örneğin,

“Ne demek istiyor sizce bu teoremden?”

“Ortalama hızının 90 olması bana neyi gösterir?”

“Bu koşulu sağladığını nasıl tespit ettin?”

“Bunu aynı şeyi söyleyecek şekilde başka türlü nasıl ifade edebilirsiniz?”

Onay soruları: Öğretim elemanlarının bu soruları çoğunlukla öğrencilerin dikkatini çekmek için sordukları söylenebilir. Onay soruları, öğretim elemanlarının söyledikleri cümlelerin ardından öğrencilerin onay vermesi beklenen sorulardır. Öğretim elemanları bu soruları sorduktan sonra çoğunlukla öğrencilere bakmakta ve öğrenciler de kafalarını sallamaktadırlar. Örneğin, “Doğru mu?”, “Değil mi?”, vb. sorular onay soruları olarak değerlendirilmiştir.

Kontrol soruları: Öğrencilerin anlayıp anlamadıklarını kontrol etmek için kullanılan sorulardır. Bu sorulara bazen cevap gelir, bazen sözlü cevap gelmez ama cevap jest veya mimikler ile gelir yani öğretmen öğrencilere bakar ve cevabı anlar. Bu sorulara örnek: “Anladınız mı?”, “Tamam mı?”, “Sorusu olan var mı?” vb. dir.

4.2.2. İspatın sunumuna ilişkin bulgular

Bu bölümde öğretim elemanlarının derste ispat anlatımlarına yönelik hem kendi açıklamaları hem de sınıftaki uygulamaları ve eylemleri aktarılmıştır. Giriş bölümünde bahsediliği gibi ispat sunumu teoremi/önermeyi, ispatın kendisini ve teorem-ispat sunumu içinde verilen tüm tanımları, yorumları, örnekleri, soruları vb. içermektedir. Bir önceki bölümde (4.2.1) yalnızca teoremin nasıl sunulduğu incelenmiştir. Bu bölümde ise ispat sunumunun yukarıdaki tanımını da içerecek şekilde ispat sunumu bütünüyle değerlendirilmiştir. Derste ispat sunumuna ilişkin öncelikle mülakat analizinin bulguları ardından da ders gözlemlerine ilişkin bulgular paylaşılmıştır.

4.2.2.1. İspatın sunumuna ilişkin mülakat analiz bulguları

Öğretim elemanlarından “*İspatlamayı nasıl yaptığınızı veya ispatı nasıl anlattığınızı tarif ediniz.*” sorusuyla derste ispatlamayı nasıl yaptıklarını tarif etmeleri istenmiştir. Ders video gözlemleri ile derste uygulamaları gözlemlenecek olmasına rağmen bu sorunun sorulmasının nedeni, öğretim elemanlarının *ispat anlatımlarına yönelik neyi vurgulamak istediklerini* anlamaktır. Yani, bu konuda aktarmak istedikleri uygulamaların neler olduğu incelenmiştir. Tablo 10’da öğretim elemanlarının bu soruya verdikleri yanıtlara göre hangi türde uygulamalarını vurguladıklarını göstermektedir. Verilen yanıtlar analiz edildiğinde, vurgu yaptıkları noktalara göre bu yanıtlar ‘bilgi aktarımı’, öğrencileri ispata katma ve sorumluluk paylaşımı’ ve ‘görsellik’ başlıkları altında toplanmıştır. Bu soruya öğretim elemanlarının verdiği yanıtların büyük çoğunluğu ispat sunumuna yönelik diğer başlıklardaki yanıtlarını tekrar ettiğinden ilgili başlıklar altında sunulan yanıtları burada tekrar verilmemiştir.

Tablo 10

İspatlamayı nasıl yaptıkları sorusuna verdikleri yanıtlarda vurgulanan uygulamalar

Vurgu noktası	Öğretim Elemanı
Bilgi aktarımı	Dr. Topoloji, Dr. Vektör, Dr. Soyut, Dr. Kompleks, Dr. Uzay, Dr. Türev, Dr. Öklid
Öğrencileri ispata katma ve sorumluluk paylaşımı	Dr. Topoloji, Dr. Türev, Dr. Vektör, Dr. Kompleks, Dr. Soyut, Dr. Öklid, Dr. Uzay
Görsellik	Dr. Vektör, Dr. Uzay, Dr. Kompleks

Öğretim elemanlarının ispatı anlatırken hangi bilgiyi nasıl aktardıklarına yönelik vurguladıkları ifadeler “bilgi aktarımı” teması altında birleştirilmiştir. Örneğin: Dr. Topoloji ispat yaparken notasyonu ifade edip açıkladığını ve bazı kavramları somutlaştırmak için örnekler verdiğini; Dr. Soyut teoremin hipotez ve hüküm kısmını vurguladığını, ilişkilendirme yaptığını ve gerekli gördüğünde şekil çizdiğini; Dr. Uzay ispat yöntemini vurguladığını, şekil çizdiğini, ispatın sonunda teoremin sağlandığı-sağlanmadığı durumları ve nedenlerine ilişkin örnekler verdiğini; Dr. Kompleks ispatın her adımını açıkladığını; Dr. Vektör ispatın içinde geçen kavramlarla ilgili kısa bilgiler sunduğunu, gerekli gördüğünde şekil çizdiğini, notasyonu ve ispatın her adımını da açıkladığını; Dr. Öklid matematik dilinin doğru kullanımını vurguladığını ve Dr. Türev ise şekil çizdiğini vurgulamışlardır.

Öğretim elemanlarının öğrencilerin ispata katılımına ve öğrencilerden beklentilerine yönelik açıklamaları “öğrencileri ispata katma ve sorumluluk paylaşımı” teması altında değerlendirilmiştir. Örneğin, Dr. Öklid ve Dr. Topoloji öğrencilerin ispatı yapmaya çalışmasını istediklerini belirtmişlerdir. Dr. Öklid buna ek olarak öğrencilerden yapmak isteyen olmazsa ispatı öğrencilerle diyalog halinde yaptığını söylemiştir. Ayrıca, tüm öğretim elemanları ispat yaparken soru sorarak öğrencileri ispata katmaya çalıştıklarını da aktarmışlardır. Örneğin:

- Dr. Topoloji ispatın başında hangi ispat yönteminin kullanılacağına ilişkin ve öğrencilerin ön bilgilerini hatırlatmak amaçlı sorular sorduğunu,
- Dr. Vektör ispatın içinde kullandığı tanımları, kavramları, teoremleri ve ispat yöntemini öğrencilere sorarak onları ispata katmaya çalıştığını ama öğrencilerin ispata katılımlarının az olduğunu, buna ek olarak öğrencileri ispat esnasında anlattığı şeyleri kaçırmalarını diye yazmayıp dinlemeleri hususunda uyardığını,
- Dr. Uzay, ispatın adımlarına ve hipotez-hükme yönelik sorular sorduğunu,
- Dr. Kompleks ispat adımlarına yönelik sorular sorduğunu,
- Dr. Soyut, hipotez-hükme yönelik sorular sorduğunu ve ispatın adımlarını da öğrencilere sorduğunu, hatta bu sorularda öğrencilerin yönlendirdikleri durumlarda yanlış yere gidecek bile olsa yazıp tıkanıp yerinde “Demek ki doğru değilmiş!” sonucuna varmalarını sağladığını,
- Dr. Türev, öğrencilerin ispata başlamalarını sağlayacak hipteze yönelik tetikleyici sorular (elinde ne var?), ispat adımlarına yönelik sorular ve düşünmeyi sağlayacak kafa karıştırıcı sorular sorduğunu söylemişlerdir. Ayrıca Dr. Türev sorularla olabildiğince çok öğrenciyi dahil etmeye çalıştığını da eklemiştir.

Öğretim elemanlarının tahta kullanımı veya ispatın görselliğine yönelik yaptığı açıklamalar “görsellik” teması altında değerlendirilmiştir. Örneğin, Dr. Vektör ispattaki bazı adımlara dikkat çekmek ve akılda kalmasını kolaylaştırmak için kırmızı kalemle işaretlediğini ve renkli kalemle kutu içine aldığını belirtmiştir. Dr. Uzay ve Dr. Kompleks ise tahtayı kullanım biçimlerinden bahsetmişlerdir. Örneğin, Dr. Uzay özellikle çok karışık ispatlarda tahtada önce sağ tarafta ispatı düzensiz bir şekilde anlattığını sonra diğer tarafına daha düzenli yazdığını söylemiştir. Dr. Vektör ise tahta büyükse ikiye böldüğünü ve böylece daha derli toplu yazdığını aktarmıştır. ek olarak Dr. Vektör öğrencilerin yazarak öğreneceğini ve tahta kullanmaya öğretmenin tahta kullanmasını izleyerek alıacağını bu nedenle de tahta kullanmayı önemseydiğini belirtmiştir.

4.2.2.2. İspatın sunumuna ilişkin ders video analiz bulguları

Teorem sunumunun incelendiği bir önceki bölümde teorem sunumunun başladığı ve bittiği anların nasıl belirlendiği açıklanmıştır. Benzer şekilde ispatın başladığı (teoremin başladığı an ispat sunumunun da başladığı kabul edilmiştir) ve bittiği anların belirlenmesinin ardından bu aralıkta öğretim elemanının yaptıkları ve söyledikleri, ders videoları defalarca kez izlenerek ve transkriptler üzerinde notlar alınarak incelenmiştir. Bu notlar daha sonra tekrar video izlemeleri ile teyit edilerek kategoriler ve bu kategorilerin görülme yüzdelerini gösteren tablolar oluşturulmuştur. Bu tablolarda, ispata yönelik tespit edilen uygulamaların kategorileri ve derslerde bu kategorilere yönelik gözlemlenen transkript örnekleri aşağıda verilmiştir. Öğretim elemanlarının ispat sunumu esnasında ek açıklamalar yapma (örn., örnek kullanma), soru sorma, sorumluluk verme, öğrencilerin durumlarına yönelik dönütler ve öneriler sunma, uyarı yapma ve motive etme gibi çeşitli uygulamaları tespit edilmiştir. Öğretim elemanlarının ispat sunumunda yaptıklarını söyledikleri uygulamalardan (bkz. Tablo 10) ders gözleminde karşılaşılanlara da ayrıca değinilmiştir. Aşağıda Tablo 11’de ispatın sunumu esnasında görülen uygulamalardan tespit edilen kategoriler ve bu kategorilerdeki uygulamaların görülme yüzdeleri verilmiştir. Bu kategorilere yönelik ayrıntılı açıklamalar da aşağıda bölümler halinde yer almaktadır.

Tablo 11 derste ispat anlatımı esnasında yapılan uygulamaların, sunulan toplam ispat sayısının içindeki yüzdesini göstermektedir. Örneğin, Dr. Topoloji sunduğu ispatların %43,3’ünde (yani neredeyse yarısında) öğrencilere ispatı yapmaya çalışmaları için süre vermiştir. Dr. Türev ise sunduğu teoremlerin %29,4’ünde örnek kullanmıştır. Dr. Soyut, Dr. Uzay ve Dr. Türev sundukları tüm ispatlarda sonuç veya yorum soruları sorarak öğrencilerin katılımını sağlamışlardır.

Öğretim elemanları bir ispat sunumu içinde birden fazla uygulamayı birlikte kullanabildiklerinden bu yüzdelerin toplamı %100'ü aşabilmektedir. Ek olarak, öğretim elemanlarının ders gözlemlerinde tespit edilen soru türleri içerisinde öğrencilerin derse katılımlarını sağlayan ve bilgilerinin açıklanmasına ve ölçülmesine fırsat veren soruların özellikle sonuç ve yorum soruları olduğu söylenebilir. Bu nedenle, Tablo 11'de soru sorma uygulamasına yönelik verilen yüzdeler yalnızca *sonuç ve yorum* sorularından oluşmaktadır. Öğretim elemanlarının uygulamalarına yönelik kategoriler ve bu uygulamalara ders gözlemlerinden örnekler aşağıda verilmiştir.

Tablo 11

İspat sunumu esnasında öğretim elemanlarının gözlemlenen uygulamaları ve bu uygulamaların görülme yüzdeleri

Gözlemlenen Uygulamalar	Dr. Kompleks	Dr. Topoloji	Dr. Soyut	Dr. Vektör	Dr. Uzak	Dr. Türev	Dr. Öklid
Örnek verme	-	%26,7	%18,2	%5,6	%22,2	%29,4	-
İlişkilendirme yapma	%55	%43,3	%30,3	%38,9	%44,4	%17,7	%100
Teknik açıklama yapma	%45	%53,3	%60,6	%50	%55,5	%5,9	%22,6
Şekil/grafik/görsel oluşturma	%20	%23,3	-	%77,8	%33,3	%41,2	%100
Öğrencilere sorumluluk verme	-	%43,3	%41	-	%11	%71	%94
Durum analizi yapma	%10	%33,3	%15,2	%22,2	%33,3	%17	%9,7
Soru sorma*	%35	%96,7	%100	%88,9	%100	%100	%67,7

* Sonuç ve yorum soruları

4.2.2.2.1. Açıklama yapma

İspatı açıklama ifadesi ile kastedilen, ispatın bütünsel olarak veya ispat içindeki tanımların, notasyonların, işlemlerin vb. açıklanmasıdır. Öğretim elemanlarının ispatı sunmadan önce, ispatı sunarken veya sunduktan sonra, ispatın açıklanmasına yönelik en az bir cümle kurmuş olmaları, açıklama olarak kabul edilmiştir. Buna ek olarak öğretim elemanlarının ispatı açıklamak için mülakatta da bazılarında bahsettikleri gibi ve teorem sunumunda olduğu gibi çeşitli yöntemler/uygulamalar kullandıkları da gözlenmiştir. Bu yöntemler; örnekler verme, ilişkilendirme yapma, şekil/grafik/görsel oluşturma ve teknik açıklamalar yapma başlıkları altında değerlendirilmiştir. Öğretim elemanları, ispat sunumları esnasında bu yöntemlerden birini ya da birkaçını birlikte kullanmışlardır. Bu uygulamalar ve ders gözlemlerinden örnek durumlar aşağıda başlıklar halinde verilmiştir.

a. Örnek verme

Öğretim elemanlarının ispat esnasında örnekler sundukları anlar belirlendikten sonra hangi durumlarda örnek kullandıkları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Örnek kullanılan durumlardan biri aksine örnek vererek ispat yapmalarıdır. Dr. Topoloji 6 kez, Dr. Öklid 2 kez ve Dr. Soyut 4 kez aksine örnek vererek ispat yapmışlardır. Ancak, aksine örnek verme, ispat yöntemlerinden biri olduğu yani ispatın kendisi örnek olduğu için bu durum, ispat içinde açıklamalar dahilinde kabul edilen *örnek kullanmanın* kapsamı dışında tutulmuştur. Bu durum dışında öğretim elemanlarının örnekleri şu amaçlar doğrultusunda kullandıkları tespit edilmiştir:

- Notasyon ve formül kullanımını göstermek veya bir tanımlı açıklamak,
- Öğrencilerin sorularına yanıt oluşturmak veya kavrayışlarındaki yanlışları göstermek,
- İspata yol gösterecek referans örnekler oluşturmak,
- Öğrencilerin anlamadıkları noktaları basitleştirmek.

Yukarıdaki amaçlar doğrultusunda, öğretim elemanlarının ispat sunarken teorem sunumuna göre nispeten daha kapsamlı amaçlarla örnek kullandıkları söylenebilir (bkz. 4.2.1.2.2.a). Sunulan örnekler sayısal, cebirsel ve şekil örnekler şeklinde olabilmektedir. Örneğin, Dr. Uzak üçgen eşitsizliği ispatı içindeki *bir notasyonu açıklamak için* sayısal bir örnek kullanmıştır:

“Evet! İç çarpım negatif olabilir. Kendisiyle çarpımı pozitif olmalı. Anlaşıldı mı? İki vektörün çarpımı negatif olabilir. Peki iki vektörün çarpımı negatif olabileceği için.. (sesli şekilde yazmaya devam eder)

$$= \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \|\vec{w}\|^2$$

Şekil 8. Dr. Uzay’ın ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1

“Peki size sorum şu: Bu ifade negatif olabileceği için ben bunu şöyle yazsam yanlış olur mu?”

$$\leq \|\vec{v}\| + 2|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| + \|\vec{w}\|^2$$

Şekil 9. Dr. Uzay’ın ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 2

“Etrafına mutlak koyunca negatif alacağı pozisyonundan doğal olarak ne olacaktır? (Öğrenciler cevap verir) Ya büyük olur ikisi de pozitifse de bu durumda eşit olur. Neden mutlak değer koyduğumu anladınız mı nasıl geçtiğimi? O mutlak değeri koyduğum anda neyi sağlıyorum? (öğrenciler cevap verir) Büyük eşitliği sağlıyorum. Bu şunun gibi değil mi? Mesela, 3 ile 4 çarpımı 12 dir. -3 ile 4 çarpımı -12 dir. O zaman biz buna şeyi yazabilir miyiz?” (tahtanın kenarına yazar)

$$|-3 \cdot 4| \leq |12|$$

Şekil 10. Dr. Uzay’ın ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 3

“İçerde istediğin varyasyonu yap. Ne demek istediğimi anlıyor musunuz?”

...

Dr. Soyut verilen bir yapının işlem olup olmadığını ispatlarken öğrencinin cevabındaki yanlışı göstermek için örnek kullanmıştır. Burada Dr. Soyut’un metaforik bir örnek verdiği söylenebilir. İşlemin değişme özelliğini, arabadaki ABS sistemi ile ilişkilendirerek metafor kullanmıştır:

Dr. Soyut: *Bir arkadaşımız diyor ki kapalılık da var iyi tanımlık da var dolayısıyla işlem oluyor diyor bakın.*

Öğrenci: *Olmaz*

Dr. Soyut: *Neden olmaz?*

Öğrenci: *Değişme özelliğini sağlamıyor.*

Dr. Soyut: *Ama biz demin onu söyledik ya, işlem mi değil mi diye şu an ilk etapta ilgileniyoruz. Değişme özelliği yoksa işlem değildir diye bir şey var mıydı? Deminki örneğimize geri dönelim arabada ABS yoksa ona araba değil mi diyoruz artık? O arabalıktan bir şey kaybetmez. Değişme bir özelliktir işleme ait. Yoksa onun işlem olup olmamasını engellemez.*

Benzer şekilde başka bir ispatta Dr. Soyut öğrencilerin yaptığı bir işlemdeki hatayı göstermek için örnek kullanmıştır:

“Güzel bakın arkadaşlar ispatın sakıncalı yeri neresi? (Tahtada ispatı göstererek) Buraya kadar sorun yok son eşitliğe kadar olan kısımda sorun yok ama buradan buraya her zaman geçemezsiniz.”

$$0 \times e_1 = 0 \times e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$$

Şekil 11. Dr. Soyut’un ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1

“Buradan buraya geçmek demek bunların sadeleştirilebilir olması demek ya da a’nın tersi olması demek ki daha birim eleman var mı yok mu onu bile bilmiyoruz. Soldan uyguladınız gitti. Bunu yaparken birleşme özelliği olması lazım, en kestirmesi sadeleştirme var mı yok mu bilmiyorsunuz ki bunları gönül rahatlığıyla sadeleştirdiniz, bilmiyorsunuz eşit olduğunu. Olmayabilir bak mesela ben size örnek vereyim.”

$$0.3 = 0.5 \Rightarrow 3 = 5$$

Şekil 12. Dr. Soyut’un ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 2

“Sıfır çarpı üç eşittir sıfır çarpı beşe peki buradan üç beşe eşittir diyebiliyor musunuz arkadaşlar? (Öğrenciler ‘hayır’ der). Buradan buraya geçilmez arkadaşlar tabi hiç

bir şey yapmaktan bu güzel, yani buraya kadar uğraşıp olayı getirmeniz belli bir şeyin farkında olduğunuzu gösterir ama buradan sağa tarafa geçemezsiniz.”

...

Dr. Topoloji yaptığı birçok teknik açıklamada öğrencilere ispata başlarken sorun yaşadıklarında bir örnekle somutlaştırmalarını tavsiye etmiştir. Kendisi de bazı ispatlarda, ispata başlarken önce *teoreme uygun bir örnek (referans örnek)* üzerinde durumu gösterip ardından formel ispat boyunca örneğe ara ara atıflar yaparak ispatı tamamlamıştır:

“Şimdi gelelim alıştırma 7’ye. Ne diyor bir bakalım. Sonlu bir küme üzerinde tanımlı bir topolojik yapımız olsun. Sonlu bir küme n elemanlı bir küme. Bir topolojik yapınız var. Ne isteniyor? Tek öğeli her küme kapalıysa bu topoloji ayrık bir topoloji olur iddiası var doğru mudur diye soruyor. (Bir öğrenci cevap verir). Peki dedi ki arkadaşınız. Evet yani böyle bir ispat yapacağız ama üç elemanlı bir küme üzerinden görsek durumu. Bir görelim. Sonra da acaba genelleme yapabilir miyiz yaparsak acaba nasıl ifade edelim ona bakalım madem. Şimdi hangi kümeyi aldım? a, b, c yi aldım. Peki dedi ki arkadaşınız bu ifadedeki koşulda ne diyor? Tek elemanlı kümeler kapalılar olsun. Yani...”

$$X = \{a, b, c\} \quad \supseteq$$

$$\{a\}, \{b\}, \{c\} \rightarrow \text{hepden küme}$$

Şekil 13. Dr. Topoloji’nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1

“Şimdi bunlar kapalıysa bunlara karşılık gelen açıkları söyleyebilir miyiz?”

(öğrencilerle birlikte sesli olarak yazar)

$$X = \{a, b, c\} \quad \supseteq$$

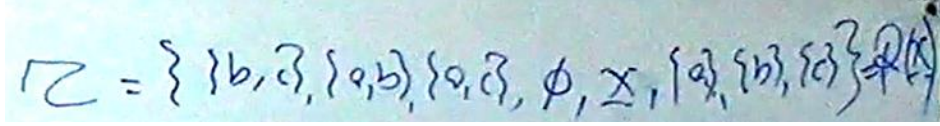
$$\{a\}, \{b\}, \{c\} \rightarrow \text{hepden küme}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\} \rightarrow \text{açık küme}$$

Şekil 14. Dr. Topoloji’nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 2

“Şu anda ispat yapmıyoruz ama minyatür bir modelle bunun varlığını görmeye çalışıyoruz. Peki şimdi mademki bunlar açık kümeler demek ki benim τ ailemin içine girmeye hak kazanmışlar. (Açıklayarak yazar)



$$\tau = \{ \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\} \} \neq P(X)$$

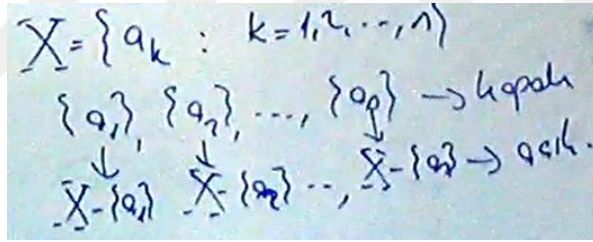
Şekil 15. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 3

“Bu örnek için $P(X)$ oldu. Peki her zaman olur diyebilmemiz için ispatlamamız lazım. Veya düzgün bir şekilde ifade etmemiz lazım. Nasıl ifade edelim? Şimdi sorumuz o.”

Öğrenci: “İndisleyelim.”

Dr. Topoloji: “O zaman şunu (verdiği örneği gösterir) bir kenarda tutuyorum. Dedi ki arkadaşınız biz indisleyelim bu elemanları. Örneğin ne olsun?”

(Örneğe atıflar yaparak yazar)



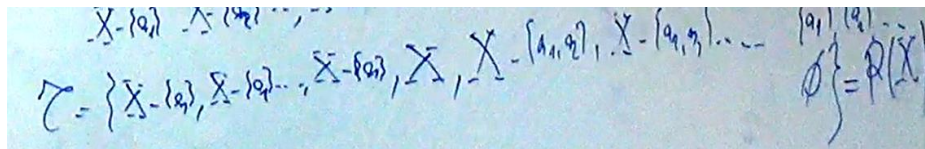
$$X = \{a_k : k=1,2,\dots,n\}$$

$\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\} \rightarrow \text{her biri}$
 $\downarrow$
 $X - \{a_1\}, X - \{a_2\}, \dots, X - \{a_n\} \rightarrow \text{aile}$

Şekil 16. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 4

Öğrenci: Şimdi bunları yazacağız ve birleştirip kesiştireceğiz.

Dr. Topoloji: Hah. Elimizde bir topolojik yapı var. Topolojik yapı olduğu söyleniyor çünkü. Bunlar yardımıyla oluşturulan ailenin. O zaman bu açıkların değişik birleşimleri ve sonlu kesişimlerinin τ 'nin içinde olması gerekiyor. O zaman τ 'yu açıyorum şuraya. (Açıklayarak yazmaya devam eder)



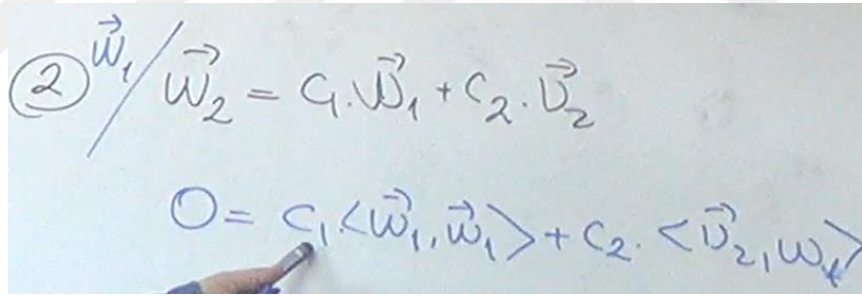
$$\tau = \{ X - \{a_1\}, X - \{a_2\}, \dots, X - \{a_n\}, X, X - \{a_1, a_2\}, X - \{a_1, a_3\}, \dots, \emptyset \} = P(X)$$

Şekil 17. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 5

“Notumuzu alalım ve bir daha üzerinde duralım. Bir yerde sezgisel bir ispat yapmış olduk. Nereden yola çıktık? Arkadaşımızın örneğinden yola çıkarak. Şimdi ispat yapabilmeyi yollarından bir tanesi de budur arkadaşlar, yani direk ispata giremiyorsanız soruyu anladınız yani önermeyi anladınız ama nereden başlayacağım ne yapacağım sıkıntısı varsa en kötü ihtimalle eğer birazcık görsellenebiliyorsa buradaki gibi kendinize minyatür bir örnek seçip bu örneği doğru olduğunu düşünüyorsanız elinizdeki koşullarla önermenize uygun hale getirin orası zaten size gideceğiniz yolu üç aşağı beş yukarı söyler. Yanlış olduğunu düşünüyorsanız zaten önermenin. Bir yanlış örnek bulsanız yine yetiyor. O zaman zaten ispat tamamlanmış olur.”

Dr. Uzey, Gram-Schmidt metoduna yönelik ispat sunumu esnasında öğrencilere sorduğu bir soruya öğrencilerden cılız bir şekilde cevap geldiğini görünce bir an durmuş (öğrencilerin anlamadığını anlamış) ve sorduğu soruyu öğrencilerin anlayabileceği bir örnek sunmuştur.

Dr. Uzey: Şimdi dikkatlice izliyoruz. Arkadaşlar bildiğim ne var? ne biliyorum? Ortogonal. Ne yapar bu az önce bir şey öğrettim ben? (Açıklayarak yazar)



$$(2) \vec{w}_1 / \vec{w}_2 = c_1 \cdot \vec{w}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$0 = c_1 \cdot \langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle + c_2 \cdot \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle$$

Şekil 18. Dr. Uzey’in ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 4

Dr. Uzey: “Bunlar birer sayı mı? istediğim değeri verebilir miyim bunlara?”

(Öğrencilerden cılız bir şekilde ‘evet’ cevabı gelir)

Dr. Uzey: Duyamıyorum!

Öğrenciler: Evet

Dr. Uzey: Bir şey sorabilir miyim? Neden istediğim değeri verebileceğimi anlatacağım. (Tahtanın başka bir kenarına yazar)

$$2x + y = 6$$

Şekil 19. Dr. Uzay'ın ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 5

Dr. Uzay: x kaçtır?

Öğrenci: İki bilinmeyenli denklem.

Dr. Uzay: Yani?

Öğrenci: Birine değer verebiliriz.

Dr. Uzay: Birine istediğim değeri verebilirim. Burada da onu yapacağım. Birine istediğim değeri verebilirim mesela... (İspata devam eder).

Benzer şekilde Dr. Topoloji de “Reel sayıların alt kümelerinden açık aralıkların birleşimi şeklinde yazılabilenler R üzerinde bir topolojik yapı oluştururlar” iddiasına yönelik ispatı sunarken bir onay sorusunun ardından öğrencilere bakmış ve anlamadıklarını düşündüğünü söyleyerek bir örnek sunmuştur.

Dr. Topoloji: Ne istediğimizi görelim. Ona ulaşmaya çalışalım. Bir kenara yazalım ne istediğimizi. (sesli şekilde tahtanın kenarına yazar)

$$\bigcap A_j \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow \forall x \in \bigcap A_j \text{ i\u00e7in } \exists I_x = \{x\} \text{ (a\u0131k m\u00fclik)}$$

$$x \in I_x \subset \bigcap A_j$$

istemiyoruz!

Şekil 20. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 6

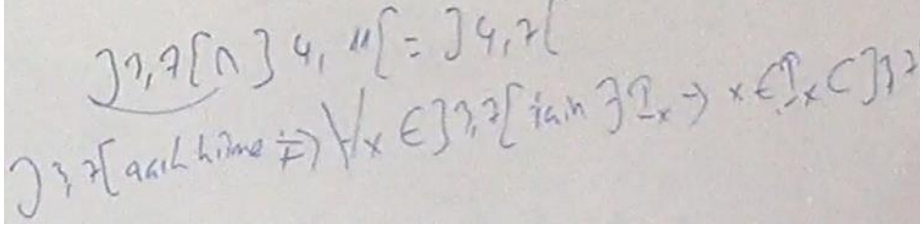
“Biz buraya ulaşacağız. Nereye ulaşmak istediğinizi ne bilerseniz elinizdeki bilgilerden gereksiz yerlere dağılmazsınız. Şimdi elimizde bu bilgiler var. Bunları kullanarak oradaki ifadeye nasıl ulaşırız? Bir kere kesişim A_j nin x elemanları demek ne demektir?”

Öğrenci: Bütün hepsinde var.

Dr. Topoloji: Ortak eleman demektir değil mi? şimdi o zaman hepsinde birden var olan x leri alacağım. Biraz görselleyelim mi?

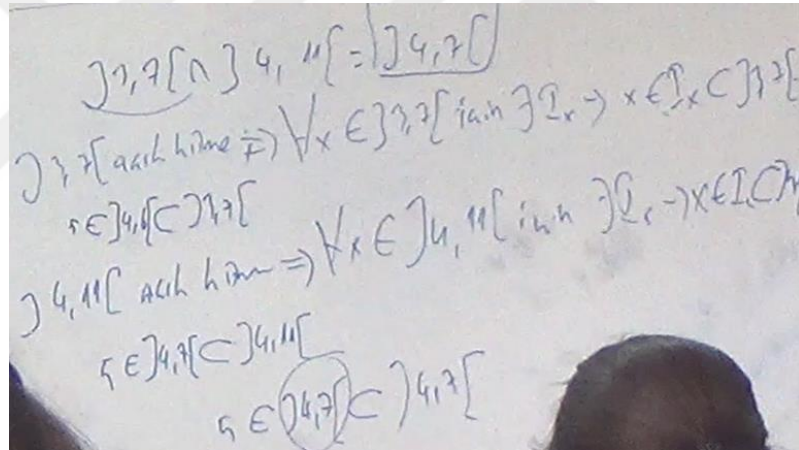
Öğrenciler: Evet

Dr. Topoloji: Daha iyi olacak çünkü sadece bakıyorsunuz, düşünmüyorsunuz!
(Açıklayarak ve sorular sorarak örneği yazar)



Şekil 21. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 7

“Bu ifade şurada A_1, A_2, A_3 için tek tek yazdığımız ifade. Mesela şuradan bir tane eleman seçsem ikisinde de ortak olan.” (açıklayarak ve sorular sorarak yazmaya devam eder)

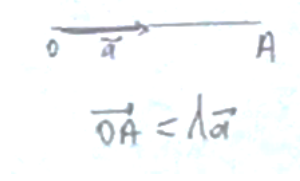


Şekil 22. Dr. Topoloji'nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 8

“Şimdi bunu genel olarak oluşturmak için bir sistematik oluşturalım kendimize. Dolayısıyla şuraya geri dönersek. Nasıl yazalım? (ispata devam eder)

Dr. Vektör, Analitik Geometride ispat sunarken çizdiği şekil üzerinde bir notasyonu soran öğrencinin sorusunu yanıtlamaya çalışmış ancak öğrenci anlamadığını söyleyinde örnek bir şekil çizmiştir:

Dr. Vektör: ...Mesela, şöyle düşünün(Şekil çizer)



Şekil 23. Dr. Vektör'ün ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1

Bunu böyle ifade edebilir miyiz?

Öğrenci: *Evet*

Dr. Vektör: *Onun gibi işte!*

Öğrenci: *Tamam*

Ders gözlemleri analizi sonucunda ispat sunumlarında kullanılan tüm örneklerin %54,8'i bir notasyonu/formülü/tanımı açıklamak, %25,8'i öğrenci sorularını yanıtlamak veya yanılgılarını gidermek, %12,9'u ispata referans oluşturmak ve %6,5'i anlaşılmayan noktaları açıklamak için kullanılmıştır. Referans örneklerin yalnızca Dr. Topoloji tarafından kullanıldığı ve öğrenci soruları veya yanılgılarına yönelik örneklerin ise en çok Dr. Soyut tarafından sunulduğu gözlenmiştir.

Öğretim elemanlarının ispat sunumlarında örnek kullanım yüzdeleri sırasıyla Dr. Türev %29,4, Dr. Topoloji %26,7, Dr. Uzak %22,2, Dr. Soyut %18,2 ve Dr. Vektör %5,6'dır (bkz. Tablo 11). Dr. Kompleks ve Dr. Öklid'in gözlemlenen dersleri boyunca örnek sunduğu görülmemiştir. Buna ek olarak, mülakatta ispatı nasıl sunduklarını açıklarken yalnızca Dr. Uzak ve Dr. Topoloji örnekler verdiklerini söylemişlerdir.

b. İlişkilendirme yapma:

Kullanılan ilişkilendirmeler ders içi başka bir konuyla, başka bir dersle veya günlük hayatla ilişkilendirme olarak üç başlık altında değerlendirilmiştir. Ders içi ilişkilendirmelerde o ders kapsamında daha önce öğrenilen konulara atıf yapılırken başka dersle ilişkilendirmede ispatın veya ispat içindeki bir kavramın/işlemin ilişkili olduğu derse veya o dersten bir konuya atıf yapıldığı gözlenmiştir. Örneğin Dr. Kompleks "*Kompleks fonksiyonlarda türev teoremlerinden birinin ispatını yaparken artma miktarlarına yönelik başka derste öğrendikleri bilgileri hatırlatmıştır:*

Dr. Kompleks: *"Şimdi diğer tarafa doğru ispatlamak istersek yine Analiz III'teki diferansiyel konumuza geçmeden önce artma miktarlarını kısmi türevler aracılığıyla*

vermiştik. Hatırlıyor musunuz? Hani Δu eşittir... (Bu sırada öğrencilere bakar ve onlardan dönüt alamayınca hatırlamadıklarını anlar) *hatırlamıyorsunuz!* “Dolayısıyla Analiz III dersinden Δu artma miktarı şu şekilde yazılabilir (sesli şekilde yazar):

$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \quad \Delta u &= u(x,y) - u(x_0,y_0) = (x-x_0)(u_x + \varepsilon_1) + (y-y_0)(u_y + \varepsilon_2) \\ \Delta v &= v(x,y) - v(x_0,y_0) = (x-x_0)(v_x + \varepsilon_3) + (y-y_0)(v_y + \varepsilon_4) \end{aligned}$$

öyleki $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$ için $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \rightarrow 0$ dır
(Analiz III dersi)

Şekil 24. Dr. Kompleks’in ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1

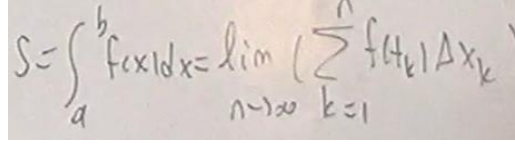
Hatırlattığı formüllerin altına hangi dersten olduğunu da yazan Dr. Kompleks ispata devam etmiştir.

Dr. Vektör “Ortalama değer teoreminin” ispatını sunarken ortalama değer kavramını günlük yaşamla ilişkilendirmiştir:

“Aslında ortalama değer günlük yaşantıda çok kullandığımız bir kavramdır. Mesela ne diyoruz: İlköğretim matematik öğretmenliği 2-A sınıfının Analiz 1. vize ortalaması dediğimiz zaman ne yapcaz? Bütün sınıfların ortalamalarını sınıf sayısına böleceğiz değil mi? Günlük yaşamda aslında çok kullandığımız bir şeydir. Peki geometrik olarak ne anlama geliyor ona bakalım.”

Dr. Vektör “kutupsal koordinatlarda alan formülünün” ispatını sunarken kartezyen koordinat sisteminde alan formüllerine deyinerek ders içi ilişkilendirme yapmıştır:

“Bunların hepsi daire kesmesi değil midir? O zaman bu daire kesmelerinin alanlarının n sonsuza giderken limiti bize neyi verir? Belirli integrale dönüştürürüz değil mi? Çünkü normalde Kartezyen koordinatları verilmiş bir eğrinin altta kalan alanını bulurken ne yapıyorduk? n tane dikdörtgenlere bölüyorduk. Dikdörtgenlerin alanları toplamının limiti eğri altında kalan alanı veriyordu. Şöyle hatırlarsak...”
(sesli şekilde yazar)



$$S = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k \right)$$

Şekil 25. Dr. Vektör'ün ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 2

“Bu $f(t_k)$, Δx_k lar dikdörtgenlerin alanlarıydı. Bu dikdörtgenlerin alanları toplamı işlemini sınırsız şekilde yapmaya devam edersek limitinin a 'dan b 'ye $f(x).dx$ integraline eşit olduğunu, bunu daha önce ispatlamıştık biliyorsunuz. Burada da oluşan daire kesmelerinin alanları toplamının limiti yine belirli integrale dönüşecek değil mi? Yine toplam ifadesi kullandım. O da alanı verecek.”

Ders gözlemleri analizi sonucunda ispat sunumlarında Dr. Öklid, Geometri dersinin içeriğini geometrinin bilimsel olarak ilerleyiş sırasını dikkate alarak belirlediği ve derste bu sırayı takip ettiğinden her yeni teoremden önceki teorem, aksiyom veya tanımlara atıf yapmıştır. Dolayısıyla Dr. Öklid'in sunduğu tüm ispatlarda ders içi ilişkilendirme gözlenmiştir. Diğer öğretim elemanlarının ispat sunumlarında ilişkilendirme yapma yüzdeleri sırasıyla Dr. Kompleks %55, Dr. Uzay %44,4, Dr. Topoloji %43,3, Dr. Vektör %38,9, , Dr. Soyut %30,3 ve Dr. Türev %17,7'dir (bkz. Tablo 11). Buna ek olarak, mülakatta ispatı nasıl sunduklarını açıklarken yalnızca Dr. Soyut ilişkilendirme yaptığını beyan etmiştir.

c. Teknik açıklama yapma:

Teknik açıklamalar, ispatın yöntemine, hipoteze ve hükme veya ispatta kullanılan notasyona yönelik bilgiler veya öneriler içeren açıklamalardır. Bu tür açıklamaların öğrencilerin ispata yönelik bir anlayış geliştirmesine katkı sağlayacağı düşünüldüğünden bu açıklamalar, teknik açıklama başlığı ile bir kategori olarak ele alınmıştır. Aşağıda teknik açıklama kapsamında değerlendirilen örnek ders kesitleri verilmiştir. Örneğin, Dr. Kompleks *“Kompleks fonksiyonlarda limitin tekliğini”* tahtada ispatlarken ispatta geçen notasyona dikkat çekmiştir:

“Her pozitif reel sayıdan küçük olan sayı nedir? Sıfırdır. Her çünkü bakın bir tane değil. Bu “her($\forall$)” burada çok önemli. Bunu buradan kaldırın bu işlemez. Bu hepsinden küçük kalan negatif olmayan sayı. Sıfırdır.”

Benzer şekilde Dr. Topoloji de kullandığı iki notasyon arasındaki farkı vurgulamıştır:

“Bakın burada alt küme burada ise eleman kullanıyorum. Aradaki farkı görüyorsunuz, değil mi? Yani ifade ederken dikkat etmiyorsunuz. Neyin ne olduğuna dikkat edin. Notasyon kullanımı önemli!”

Dr. Öklid tahtada ispat yapan bir öğrencinin notasyonları eksik kullandığını görünce onu uyarır ve öğrencilerin ve bazı öğretmenlerin notasyon kullanımına dikkat etmediğini söyler:

“Şimdi geometride üşenilir. Mesela AOB açısı yazmaya. Sembolik dil çok önemlidir geometrinin. Mesela AOK açısı eşit KOB açısına diye yazdım ama ben ölçüsü diye kullansaydım eşittir koymam lazımdı değil mi? ve öğretmenler buna az dikkat ediyorlar. Mesela şu üçgende şunu yaptım demek bile zor geliyor veya şu üçgenlerde benzerlik vardır. Neden? Onu yazmak zor geliyor. Yazın arkadaşlar!”

Dr. Soyut anlatacağı ispatın yöntemini ve hangi durumlarda bu yöntemi kullanabileceklerini açıklamıştır:

“(…)Güzel iki tane alırız. Bunların birbirine eşit olduğunu gösteririz ve oradan dolayısıyla tek olduğunu söylemiş olacağız zaten. Sadece burada değil bu tipte ‘varsa tektir’ türü ispatlarda bu yöntemi kullanabiliyoruz. Farz edelim ki iki tane olsun diyoruz daha sonra bunların birbirlerine eşit olduğunu ifade ediyoruz.”

Dr. Topoloji derste sunduğu ilk ispatta benzer durumlarda nasıl bir yol izlemeyebileceklerine yönelik öğrencilere açıklamalarda bulunmuştur:

“Şimdi burada zaten sonsuz miktarda alt aile seçme şansımız yok. Burada beş elemanlı bir aile var. Olası tüm kombinasyonları düşüneceğiz yani. Yani ikili, üçlü beşli yapabildiğimiz tüm kombinasyonları alıp birleşimlerini alacağız. Şimdilik teker teker deniyorum ama genelleme yaptığımız zaman veya olumsuz bir şey söylemeniz gerekiyorsa ispatta bir tane olmayan örnek versek zaten yetiyor. Demek ki bir özelliğin olmadığını göstermek istiyorsak veya öyle olmadığını görebiliyorsak bunu yanlış yapan bir tane örnek durumu bulmak yeterli olacaktır.”

Dr. Topoloji *“Reel sayıların alt kümelerinden açık aralıkların birleşimi biçiminde yazılabilenler reel sayılar üzerinde bir topolojik yapı oluştururlar.”* ifadesinin ispatında kullanılacak yöntemle ilgili öğrencilere sorular sorduktan sonra nasıl yapılacağını açıklamış ve sonra ispata devam etmiştir:

Dr. Topoloji: “Bu teoremin ispatı çok temel bir ispat. Biz şimdiye kadar 2-3 hafta oldu hep klasik ispat yöntemini tercih ettik. Yani elimizdekiler neydi onları aldık. eski bilgilerimizi de kullanarak sonuca ulaştık. Ama farklı ispat şekilleri de var. Neler var mesela?”

Öğrenci: “Görsel ispat”

Dr. Topoloji: “Başka?”

Öğrenci: “Çift sütun ispat”

Dr. Topoloji: “Peki başka?”

Öğrenci: “Paragrafla ispat”

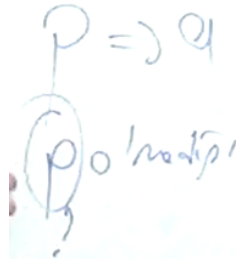
Dr. Topoloji: “Peki. Çelişki diye bir şey duydunuz mu?”

Öğrenci: “Evet”

Dr. Topoloji: “En temel ispat yöntemlerinden değil mi? Peki mantığı neydi?”

Öğrenci: “Başta kabul ettiğimiz çelişki olduğunu...”

Dr. Topoloji: “Yani diyelim mi şöyle. Bu varken bu da vardır. $p \Rightarrow q$ tarzında. Biz şimdiye kadar ne yaptık? Buradaki verilerimizi aldık işlemlerimizi yaparak bunun doğruluğunu ispatladık. Ama çelişkide ne yapıyoruz?” (Tahtanın diğer tarafına not alır)



Şekil 26. Dr. Topoloji’nin ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 9

“Bunun olmadığını... Değili demek doğru olur mu onu bir düşünmek lazım ama p nin doğru olmadığını varsayarak işe başlıyoruz. Bunun doğru olmadığını varsayarak ve elimizdeki diğer bilgilerle işlerimizi yürüttükten sonra çıkan sonuç bir çelişkili durum yaratıyorsa .. Mesela birazdan göreceğiz, yaptınız yaptınız x eleman boş küme gibi bir şey çıktı. Var mı böyle bir şey? Yok. Bu çelişki nereden geldi benim en baştaki şunun

doğru olmadığı kabulümden geldi. Çünkü bunun doğru olmadığını varsayıp bunun üzerinden işlerimi yürütmüştüm. O zaman bu çelişkili durum bunun varlığının reddedilmesiyle oluştuysa o zaman bu reddetmekten geri döneceğim. Yani onun doğruluğunu kabul edeceğim gibi çelişki durumlarında kullanılan ispat. Peki bu kenarda dursun.”

Dr. Soyut’un sunduğu birçok ispatta teoremdaki hipotez ve hükme dikkat çektiği ve özellikle hüküm olarak gösterilmesi gereken ifadenin yazımına defalarca kez vurgu yaptığı gözlenmiştir. Örneğin verilen bir yapının grup olduğunu tahtada ispatlarken hipotez ve hükme yine dikkat çekmiştir:

“Aslında teoremler de ispat yaparken hipotez ve hükme odaklanacağız. Daha çok hüküm kısmına. Göstermemiz gereken şey ne? Bu kısımda neyi göstermeliyiz? H ’nin grup olduğunu göstermeliyiz. Bunun için hangi özellikleri sağlaması gerekiyor söyleyin bakalım?”

Benzer şekilde Dr. Uzay da önce gösterilmesi gereken şeye ardından da verilenlere vurgu yapmıştır:

“Amaç neyi göstermek? Bunu (teoremda bir ifadeye işaret ederek) göstereceğiz değil mi? Peki bildiğimiz ne o zaman? Bak bildiğini yazmazsan çözemezsin!”

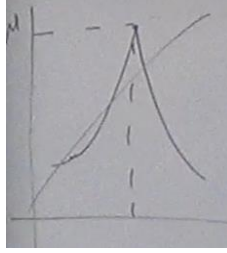
Ders gözlemleri analizi sonucunda ispat sunumlarında yapılan tüm teknik açıklamaların %50’si hipotez ve hükme, %34,2’si ispatın yöntemine ve %15,8’i notasyona yönelik açıklamalardır. Öğretim elemanlarının ispat sunumlarında yaptıkları teknik açıklamaların yüzdeleri sırasıyla Dr. Soyut %60,6, Dr. Uzay %55,5, Dr. Topoloji 53,3, Dr. Vektör %50, Dr. Kompleks %45, Dr. Öklid %22,6 ve Dr. Türev %5,9’dur (bkz. Tablo 11). Buna ek olarak, mülakatta ispatı nasıl sunduklarını açıklarken Dr. Soyut hipotezi, hükmü ve ispatın yöntemini vurguladığını, Dr. Vektör yöntemi vurguladığını ve sorduğunu, Dr. Topoloji ispatın başında hangi ispat yöntemiyle yapılacağını sorduğunu, Dr. Kompleks hangi ispat yöntemi kullanacağını söylediğini, hipotez ve hükme vurgu yaptığını, Dr. Uzay hükme vurgu yaptığını ve Dr. Öklid notasyonlara dikkat etmeleri konusunda öğrencileri uyardığını belirtmiştir.

d. Şekil/grafik/görsel oluşturma:

Öğretim elemanlarının ispatı veya ispattaki bazı kavramları açıklamak amacıyla şekil ve grafik çizdikleri veya görsel açıklamalar yaptıkları gözlemlenmiştir. Dr. Türev, Rolle

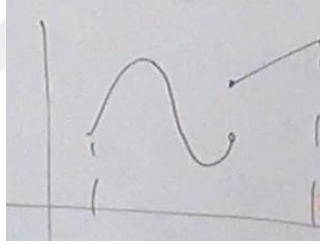
teoreminin ispatında teoremden verilen ‘türevlenebilir fonksiyon’ tanımına uygun örnek olan ve olmayan şekiller çizmiştir:

“Sürekli olduğunu biliyorum. Başka ne biliyorum? Bütün bu aralık boyunca da türevlenebildiğini biliyorum. Yani türevlenebilirin anlamı şu: Fonksiyonun grafiği şöyle bir şey olabilir mi? (tahtanın kenarına çizer)



Şekil 27. Dr. Türev’in ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1

“Böyle bir şey olmaz neden? Burada çünkü türevlenemez. Peki şöyle bir şey olabilir mi bu aralıkta?” (öğrenciler ‘hayır’ der) (Yeni bir şekil çizer)



Şekil 28. Dr. Türev’in ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 2

“Böyle bir şey olabilir mi? Hayır. Bu da niye? Çünkü burada da sürekli değil türevlenemez. Peki bu aralıkta hem sürekli hem de türevlenebilir ise grafik nasıl bir şey olabilir?” (Yeni bir şekil çizer)



Şekil 29. Dr. Türev’in ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 3

“Böyle bir şey olabilir doğru mu?” (öğrenciler ‘evet’ der)

Dr. Uzak sürekli fonksiyonlarda iç çarpımın ispatını yaparken fonksiyonun işaretine dikkat çekmek için şekil çizmiştir:

“İçerideki fonksiyon pozitifse integrali de nedir? Pozitifdir. O zaman bunun integrali ne olur? Pozitif olur. Ne zaman 0 olur? Fonksiyon ne alırsa? 0 fonksiyonu alırsa. Doğru değil mi? Sıfır fonksiyonunun integrali ne çıkar? Sıfır çıkar. Çocuklar buraya bakar mısınız! (tahtanın kenarına şekli çizer, çizerken sorular sorar)



Şekil 30. Dr. Uzey’in ispat sunumunda tahtaya yazdıkları 1

“Bu fonksiyon şu eğri x ekseninin üstünde mi? Bunun anlamı fonksiyonun ne olduğu? Pozitif olduğu değil mi? Değerlerinin pozitif olduğu. Alan da şurası yapmaz mı? O zaman integral değeri ne olmuş oluyor? Pozitif olmuş oluyor değil mi? Bu özelliği hatırlıyor musunuz? Gördüğünüz gibi neyi sağladı? Pozitif tanımlılık sağlandı.”

Dr. Uzey’in bunun haricinde de elindeki tahta kalemleriyle de ara sıra görselleştirme yaptığı gözlenmiştir. Bir lineer dönüşümün örten olduğunu ispatladıktan sonra öğrencinin sorduğu soruya cevap olarak kalemlerle görselleştirme yapmıştır:

Dr. Uzey: “O zaman ne diyeceğiz L örtenmiş. Anladınız mı?”

Öğrenci: “Hocam nasıl bir işlem olabilir bu?”

Dr. Uzey: “Çok güzel soru bu. Bu nasıl bir fonksiyon? Bu çok basit bir şey, bir düşünün.”

Öğrenci: “İzdüşüm”

Dr. Uzey: “Bitti bu kadar. (Elindeki kalemi gösterir). Şunun ucunu görüyor musun? Kaç boyutlu uzay burası?”

Öğrenci: “Üç boyutlu.”

Dr. Uzey: “Bunu koordinatları ne?”

Öğrenci: “ (x,y,z) ”

Dr. Uzey: (elindeki kalemi yere bırakır) “Şimdi koordinatı ne oldu?”

Öğrenci: “ (x,y) ”

Dr. Uzey: “Nereye izdüşüm? R^2 ’ye izdüşüm. R^3 ’teki her noktayı R^2 ’ye indirebilir misin?”

Öğrenci: “Evet”

Dr. Uzey: “ R^2 ’de açıkta eleman kalır mı?”

Öğrenci: “Kalmaz”

Dr. Uzey: “Örten işte.”

Ders gözlemleri analizi sonucunda ispat sunumlarında şekil/grafik/görsel oluşturma yüzdeleri sırasıyla Dr. Vektör %77,8, Dr. Türev %41,2, Dr. Uzey %33,3, Dr. Topoloji %23,3 ve Dr. Kompleks %20’dir (bkz. Tablo 11). Dr. Soyut’un ispat sunumlarında şekil/grafik veya görsel kullandığı durumlara rastlanmamıştır. Bu verilere ek olarak, Geometri dersinin içeriği gereği şekil gerektirmesi dolayısıyla kendisinin sunduğu ispatların hepsinde şekli ya teoremi açıklarken veya ispatı yaparken çizmiştir. Mülakatta ispatları nasıl sunduklarını açıklarken Dr. Türev, Dr. Uzey, Dr. Topoloji, Dr. Vektör, ve Dr. Soyut gerektiğinde şekil çizdiklerini ve görsel kullandıklarını söylemişlerdir. Öğretim elemanlarının şekil/görsel oluştururken öğrencilere sorumluluk verip vermediği de gözlemlenmiştir. Dr. Vektör şekilleri sessizce kendisi çizmekte ve ardından açıklamaktadır. Dr. Kompleks ise şekli çizerken açıklama yapmaktadır. Dr. Türev, Dr. Uzey, Dr. Topoloji şekli öğrencilerle birlikte soru cevap yoluyla oluşturmaktadırlar. Dr. Öklid teoremi sunarken şekli sessizce çizmekteyken ispat yaparken öğrencilerle birlikte şekli oluşturmaktadır.

4.2.2.2.2. Öğrencilere ispatlamaya çalışmaları için süre verme/sorumluluk verme

Bazı öğretim elemanlarının öğrencilerin ispat yapmaya çalışmaları için öğrencilerden uğraşmalarını isteyerek bir süre (ortalama 3 dakika) bekledikleri gözlemlenmiştir. Öğrencilere verilen süreler ders içinde en az 30 saniye en fazla ise 15 dakika olarak gözlenmiştir. Bununla birlikte Dr. Topoloji ve Dr. Türev’in birer hafta süre verdikleri ve ispatını derste yaptıkları ödevleri de mevcuttur. Bazı ispatlarda, ispatın başında ispatın tamamı için tek süre verildiği, bazı özellik doğrulama ispatlarında ise her bir özellik için ayrı ayrı süre verildiği gözlenmiştir.

Öğretim elemanlarının öğrencilere ispat üzerinde uğraşmaları için verdikleri ortalama süreler yaklaşık değerleriyle Tablo 12’de verilmiştir.

Tablo 12

Öğretim elemanlarının öğrencilerden ispat yapmalarını istedikleri ispat yüzdeleri ve öğrencilere verdikleri ortalama süre

Öğretim Elemanı	Öğrencilerin uğraşmaları için süre verilen veya tahtada öğrencilerin yaptıkları ispat yüzdesi	Ders içinde verilen ortalama süre (yaklaşık)
Dr. Öklid	%94	4 dakika
Dr. Türev	%71	4 dakika
Dr. Topoloji	%43	2 dakika
Dr. Soyut	%41	5 dakika
Dr. Uzay	%11	1 dakika

Dr. Kompleks ve Dr. Vektör ispat açısından öğrencilerden böyle bir talepte bulunmamışlardır. Dr. Öklid 31 ispattan 29 tanesinde öğrencilere ispatı yapmaya çalışmaları için süre vermiştir. Bu ispatlardan 21 tanesinde ise ispatı tahtada öğrenciler yapmıştır. Dr. Topoloji, 30 ispattan 13 tanesinde öğrencilere süre vermiştir. Bu ispatlardan iki tanesinde öğrenciler ispatı tahtada yapmışlardır. Süre verdiği ispatlardan 8 tanesi bir hafta süre verdiği ödevlerdir. Bu ödev verdiği ispatları hem ders haricinde üniversitedeki odasında öğrenciler kendisine anlatmaktadır hem de kendisi daha sonraki derste bu ispatları yapmaktadır veya öğrencilere yaptırmaktadır. Dr. Uzay süre verdiği iki ispattan birini öğrencilere yaptırmıştır. Dr. Türev, süre verdiği 12 ispattan 8 tanesini öğrencilere tahtada yaptırmıştır. Dr. Soyut, süre verdiği 14 ispatı da tahtada kendisi anlatmıştır.

Öğrencilere ispat yapmaları için sorumluluk verirken Dr. Öklid ve Dr. Topoloji'nin bazen küçük gruplar halinde çalışmalarını sağladıkları da görülmüştür.

4.2.2.2.3. Durum analizi (öğrencilere durumlarıyla alakalı dönüt verme) ve öneride bulunma

Yapılan durum analizleri, öğrencilerin kendi durumları hakkında fikir sahibi (bilinçli) olmaları ve öğrenmelerine engel olabilecek bir durumu aşmalarına yönelik bilinçlendirme içerdiğinden bu uygulamanın öğrenmeyi arttırmayı amaçladığı söylenebilir. Yapılan durum analizleri, bazı durumlarda o andaki ispata özel olurken bazı durumlarda ise o ispat özelinde öğrencilerin genel durumlarını belirtmek şeklinde gerçekleşmiştir. Örneğin, Dr. Topoloji öğrencilerden verilen matematiksel bir yapının topolojik yapı olduğunu ispatlamaya çalışmalarını istemiş ve onlar uğraşırken de sınıf içinde dolaşarak yaptıklarına bakmıştır. Ardından gördüğü bir sorun durumunu öğrencilerle paylaşmıştır:

“Buradan ortaya çıkıyor ki yani şöyle bire dolaştığım kadarıyla birinci aksiyomu sağladığınızı yazdınız. Ama ondan sonrasında takıldınız genel olarak. Sezgisel olarak var olduğunu düşündüğünüz şeyi ifade etmede sorun var. Yani bu ciddi bir sorun. Bu size ait bir sorun değil. Genel bir sorun.”

Burada Dr. Topoloji öğrencilerin düşündüklerini matematik diliyle ifade etmede sorun yaşadıklarını düşündüğü söylenebilir. Benzer şekilde ödev verdiği başka bir ispatın kontrolünü yaparken karşılaştığı aynı sorunu daha sonra derste ispatı yaparken açıklamıştır:

“Bunu bu şekilde anlatmaya çalışan arkadaşlarınız oldu ama yazma konusunda ciddi sıkıntılarınız var. Dolayısıyla ben tek tek yazarak götürelim istiyorum.”

Dr. Topoloji gibi Dr. Soyut da tahtada ispat yaparken öğrencilerin düşündüklerini ifade edemediklerini ve bu nedenle ispatın zorlaştığını söylemiştir:

“Burada genelde gördüğüm sıkıntı bir yerde böyle hissediyorsunuz ama tam ifade edemediğiniz için olay sarpa sarıyor yani genel olarak söyledikleriniz doğru değil!”

Dr. Topoloji bir ispatı tahtada yaparken öğrencilere bakar ve onların anlamadıklarını anlayarak ispat anlatımına örnek vererek devam eder:

“Ortak eleman demektir değil mi? Şimdi o zaman hepsinde birden var olan x leri alacağım. (konuşurken öğrencilere bakar ve onların anlamadıklarını anlar bir yüz ifadesi takınır). Biraz görselleyelim mi? Görselleyelim, daha iyi olacak çünkü sadece bakıyorsunuz, düşünmüyorsunuz!”

Öğrencilerine durum analizleriyle bu tür dönütler veren Dr. Topoloji derste bir ispat sunumunda öğrencilere sorduğu bir sorunun cevabını beklerken *“Sesli düşünün! Bu sizi düzeltmemi sağlar”* diyerek onlara bu şekilde yardımcı olmak istediğini vurgulamıştır. Böylece öğrencileri cevaplarını açıklama noktasında teşvik ettiği de söylenebilir.

Dr. Uzay tahtada bir lineer dönüşümün örten olduğunu ispatlarken öğrencilerin örtenlik tanımını ispatta kullanamadığını fark ederek şu açıklamayı yapmıştır:

“Bakın tanım eksikliği... Bak bu tanımlı bilmezsen nereden başlayacağını bilemezsin. Şimdi sizin en büyük sorunuz ne? ‘İspata nereden başlayacağımızı bilmiyoruz hocam!’ değil mi? Nereden başlıyorsun aslında tanım söylüyor bak. Nereden seçeceksin elemanları diyor? B’den.”

İspatın sonunda da bu soruna tekrar değinmiş ve önerilerde bulunmuştur:

“Tanım bilmiyorsunuz! Nereden başlayacağınızı bilmiyorsunuz! Sonra ispat zaten yapamıyorsunuz. O zaman sizin yapmanız gereken ne? Neyi öğreneceğiz? Tanım! Tanımları bilmeden ispat yapamayız. En başta tanımı bilmiyoruz nasıl ispat yapacağız? Şimdi örtenlik tanımını bilmeden örten olduğunu nasıl göstereceğiz? Eleman mı deneyeceksin sonsuza kadar? Yaşın yetmez! Doğal olarak ne yapacağız? Önce tanımları öğreneceğiz. Sonra neyi öğrenin demiştim soyut matematik dersinde? İspat yöntemlerini öğrenin. Mesela biraz önce ispat yaptım kullandığım ispat yönteminin ne olduğunu biliyor musunuz? (Öğrencilerden cevap bekler ama gelmez). Bak bilmiyorsunuz! Olmaz işte. Anladın mı?”

Dr. Türev bir ispatı tahtada öğrencilerle diyalog halinde sunarken öğrencilere yazılanları doğru bulup bulmadıklarını sormuş ve bu soruya bir öğrencinin verdiği yanıtın ardından onu otoritenin her söylediğini doğru kabul etmemesi için uyarmıştır:

Dr. Türev: *“Şimdi ne yapacağım? Buraya kadar kabul ediyor musunuz?”*

Öğrenci: *“Siz kabul ediyorsanız...”*

Dr. Türev: *“Ben ya yanlış söylüyorsam? Niye kabul ediyorsunuz?”*

Dr. Öklid de tahtaya kalkan öğrencilerin tahtada sunum yaparken sıralarında yaptıklarından daha fazla hata yapmalarını eleştirirken onları neden tahtaya kaldırdığını da açıklamıştır:

Dr. Öklid: *“Tahtaya çıkınca mı görmüyorsunuz, nedir yani?”*

Öğrenci: *“Çok yakın ya hocam karışıyor”* (Diğer öğrenciler de bu ifadeyi onaylıyorlar)

Dr. Öklid: *“Ama neden? Öğretmen olacaksınız, tahtada olacaksınız! Aslında tüm derslerde tahtaya kaldırarak size bu kazandırılmaya çalışılıyor. O gözle yapın!”*

Ders gözlemleri analizi sonucunda ispat sunumlarında öğretim elemanlarının yaptıkları durum analizlerinin yüzdeleri sırasıyla Dr. Topoloji ve Dr. Uzay %33,3, Dr. Vektör %22,2, Dr. Türev %17,7, Dr. Soyut %15,2, Dr. Kompleks %10, Dr. Öklid %9,7’dir (bkz. Tablo 11). Buna ek olarak, mülakatta öğretim elemanları ispatları nasıl sunduklarını açıklarken bu açıklamalarından bahsetmemişlerdir.

4.2.2.2.4. Soru sorma

Bu bölümde öğretim elemanlarının soruları, hem hangi bilgiye yönelik sorular sordukları hem de öğrencilerden bekledikleri cevap türü açısından analiz edilmiştir. Öğretim elemanlarının ders gözlemlerinde tespit edilen soru türleri içerisinde öğrencilerin derse katılımlarını sağlayan, bilgilerinin açıklanmasına ve ölçülmesine fırsat veren soruların özellikle sonuç ve yorum soruları olduğu söylenebileceğinden bu sorular özellikle incelenmiştir. Öğretim elemanlarının sonuç ve süreç soruları bağlamında genellikle sorduğu bilgi türleri ve örnekleri şu şekilde tespit edilmiştir:

- İspatın adımları (örn., “*Şimdiki hamlemiz ne olacak?*”, “*Nasıl başlayalım?*”, “*Bunun ispatını nasıl yaparsınız?*”)
- Tanım/teorem/özellik/notasyon (örn., “*Neydi alt vektör uzayı?*”, “*üçgenin tanımı nedir?*”, “*Neydi integraller için ortalama değer teoremi?*”, “*Bir kümenin bir topolojik yapının açığı olması için en temel koşul neydi?*”, “*Geçişme özelliği neydi?*”)
- İspat yöntemi (örn., “*Ne tür ispat bu? Ne dersiniz?*”)
- Teoremden verilenler istenenler (hipotez-hüküm) (örn., “*Göstermemiz gereken şey ne?*”, “*Sermayemiz ne?*”, “*Ne verilmiş?*”)
- İşlem/formül ve işlem prosedürleri (örn., “*Bunun formülü neydi?*”, “*Kaç farklı durum var?*”)

Tablo 13, öğretim elemanlarının sordukları sonuç ve süreç sorularının yukarıda tespit edilen bilgi türlerine göre dağılımlarını yüzdelik olarak göstermektedir.

Tablo 13

Öğretim elemanlarının ispat sunumlarında sordukları soruların bilgi türlerine göre dağılımları

Öğretim elemanı	İspat adımları	İşlem/formül veya işlem prosedürleri	Tanım/teorem/özellik /notasyon	Hipotez ve hüküm	İspat yöntemi
Dr. Türev	%15,7	%53	%25,9	%5,4	-
Dr. Soyut	%40,8	%28,4	%17,5	%8,1	%5,2
Dr. Vektör	%6,7	%77,8	%14,4	%1,1	-
Dr. Topoloji	%22,2	%44,4	%20,2	%12,1	%3
Dr. Öklid	%49,2	%20	%26,2	-	%4,6
Dr. Uzak	%7,6	%64,6	%20,9	%5,7	%1,1
Dr. Kompleks	%8,3	%50	%41,7	-	-

Tablo 13'e göre tüm öğretim elemanlarının mülakattaki beyanlarına paralel olarak ispatın adımlarına yönelik sorular sorduğu görülmektedir. Bununla birlikte, bu tür soruların en çok Dr. Öklid ve Dr. Soyut tarafından sorulduğu söylenebilir. Buna ek olarak Dr. Öklid, öğrenciler tahtada ispat yaparken ispatın her adımı için öğrencilerin gerekçelerini sormakta ve bu gerekçelerin matematik diliyle yazılması için öğrencileri uyarmaktadır. Mülakatta özel olarak belirtilmemiş olmasıyla birlikte işlem/formül ve işlem prosedürlerine yönelik soruların da tüm öğretim elemanları tarafından yoğun bir şekilde sorulduğu gözlemlenmiştir. Bu tür soruların ispat yoğunluklu derslerden ziyade işlem ağırlıklı derslerde (örn., Analiz) yoğunluğunun daha da fazla olduğu söylenebilir. Mülakatta bazı öğretim elemanları (Dr. Vektör ve Dr. Topoloji) tarafından tanım/teorem/özellik veya notasyonlara yönelik soruların sorulduğu özellikle beyan edilmiştir. Bununla birlikte yine tüm öğretim elemanlarının birbirlerine yakın yoğunluklarda bu tür sorular sordukları söylenebilir. Hipotez ve hükme yönelik soruların bazı öğretim elemanları tarafından sorulduğu gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, burada bir hatırlatma yapmak gerekirse ders gözlemlerinde hipotez veya hüküm ile ilgili açıklamalar görülmekle birlikte bu bölümde bu açıklamaların öğrencilerden beklenmesi yani onlara sorulmuş olması incelenmektedir. Hipotez, hüküm ve yönteme yönelik yapılan açıklamalar "teknik açıklamalar" kapsamında değerlendirildiğinden ilgili yüzdeler o başlık

altında yer almaktadır. Mülakat analiz sonuçlarına göre Dr. Soyut, Dr. Türev ve Dr. Uzey'in hipotez ve hükme yönelik sorular sorduklarını söylemişlerdir. Benzer şekilde ispat yöntemine yönelik soruların oldukça düşük yüzdelerle ve bazı öğretim elemanları tarafından sorulduğu söylenebilir. Mülakatta ise Dr. Vektör ve Dr. Topoloji yönteme yönelik sorular sorduklarını beyan etmişlerdir.

Öğretim elemanlarının soruları, öğrencilerden bekledikleri cevap türlerine göre de analiz edilmiştir. Öğrencilerden cevap bekledikleri soruların bazılarında öğrencileri derse katma veya bilgilerini yoklama gibi nedenlerle hareket ettikleri bir önceki bölümde mülakat verilerinin analizinde de gözlenmiştir. (bkz. 4.2.1.1). Öğretim elemanlarının sordukları sorular Bölüm 4.2.1.2.6'da olduğu gibi rehberlik, seçenek, sonuç, yorum, onay ve kontrol olmak üzere kategorilendirilmiştir ve Tablo 14'te yüzdeleri verilmiştir. O bölümde bu soru türlerinin açıklamaları verildiğinden burada tekrar açıklama yapılmamıştır. Yalnızca ispat sunumlarından o soru türlerine örnekler sunulmuştur.

Öğretim elemanlarının ders gözlemlerinde tespit edilen soru türleri içerisinde öğrencilerin derse katılımlarını sağlayan ve bilgilerinin açıklanmasına ve ölçülmesine fırsat veren soruların özellikle sonuç ve yorum soruları olduğu söylenebilir. Bu nedenle, bu bölümün başında Tablo 10'da soru sorma uygulamasına yönelik verilen yüzdeler yalnızca *sonuç ve yorum* sorularından oluşmaktadır. Öğretim elemanlarının hem kendi sordukları tüm soruların hangi soru türlerinden hangi yüzdelerle oluştuğu hem de sundukları ispatların yüzde kaçında bu soru türlerini sordukları incelenmiştir. Teorem sunumu esnasında sordukları soruların türlerine göre hem kendi soruları içindeki yüzdeleri hem de sundukları ispatlarda bu soru türlerinin görülme yüzdeleri Tablo 14'te verilmiştir. Tablo 14'e göre *ispat sunumunda* soru sorma bağlamında dikkat çeken sonuçlar şunlardır:

Tablo 14

İspat sunumlarında sordukları soru türleri ve yüzdeleri

	Rehberlik Soruları		Seçenek Soruları		Sonuç Soruları		Yorum Soruları		Kontrol Soruları		Onay Soruları	
	Kendi soruları içinde	İspat bazında görülme	Kendi soruları içinde	İspat bazında görülme	Kendi soruları içinde	İspat bazında görülme	Kendi soruları içinde	İspat bazında görülme	Kendi soruları içinde	İspat bazında görülme	Kendi soruları içinde	İspat bazında görülme
Dr. Türev	%20,7	%88,2	%13,7	%70,6	%27,4	%100	%17,9	%64,7	%5,3	%64,7	%15	%76,5
Dr. Soyut	%21,7	%66,7	%18,5	%87,9	%28,7	%97	%20,8	%75,8	%4,9	%39,4	%5,4	%42,4
Dr. Vektör	%30,2	%88,9	%7	%61,1	%21,8	%88,9	%4,1	%33,3	%2	%22,2	%34,9	%100
Dr. Topoloji	%51,3	%90	%14,1	%76,7	%16,3	%83,3	%6,3	%50	%0,6	%6,7	%11,4	%70
Dr. Öklid	%15,9	%45,2	%29	%74,2	%16,7	%41,9	%10,9	%41,9	%5,8	%22,6	%21,7	%48,4
Dr. Uzay	%16	%94,4	%13,8	%88,9	%33,9	%100	%5,9	%66,7	%11,3	%94,4	%19,1	%100
Dr. Kompleks	%42,5	%85	%15	%50	%6,2	%30	%3,5	%15	%1,8	%10	%31	%75

Öğretim elemanının sorduğu soruların kategorileri ve örnekleri aşağıda verilmiştir. Soru türlerinin açıklamaları Bölüm 4.2.1.2.6’da teoremin sunulmasına yönelik yapılan analizlerde verildiğinden burada tekrar yer verilmemiştir. Yalnızca bu soru türlerine ispat sunumlarından da örnekler sunulmuştur.

Rehberlik sorularına ispat sunumlarından örnekler:

“Ne istiyorum? Birinde bir eksiklik olsun ki türeve gideyim.”

“ x eksenine paraleldi. Bunun anlamı ne? Eğimi sıfır.”

“İntegrallenebilir olduğunu biliyoruz. Bu bana neyi gösterir? Demek ki f sonluymuş, bu aralıkta sınırlıymış, alan ölçülebiliyormuş.”

“Çünkü burada diyoruz ya görüntü birden fazla olabilir mi? Olamaz çünkü teorem var diyeceksiniz.”

“Bunu epsilon bölü iki değil de epsilon bölü bin alsam ne olur? Alabilirim fakat şu anda yaptığımız ispat yolu bunun böyle olmasını gerektiriyor.”

Ders gözlemleri analizi sonucunda Dr. Öklid haricinde tüm öğretim elemanlarının sundukları ispatların yarısından çoğunda rehberlik soruları sordukları gözlemlenmiştir (bkz. Tablo 14). Kendi soruları içinde değerlendirildiğinde ise Dr. Topoloji’nin sorduğu soruların %51,3’ünde soruyu kendisinin yanıtladığı görülmüştür. Yani kendi sorduğu soruların yarısından fazlasını kendisi cevaplamıştır.

Seçenek sorularına ispat sunumlarından örnekler:

“Şu haliyle bu eleman mıdır? Alt küme midir?”

“ G ’leri mi $f^1(G)$ ’leri mi?”

“Maksimum, minimum, hangisi olacak?”

“Ölçüleri eşit midir?”

“Klein grubu devirli midir?”

“Bunlar aynı düzlemde değil mi?”

Ders gözlemleri analizi sonucunda Dr. Öklid’in teorem sunumlarında olduğu gibi kendi soruları içinde öğrencilere seçenek sunduğu soruların çoğunlukta olduğu söylenebilir. İspat bazında bakıldığında ise en çok Dr. Uzay ve Dr. Soyut’un anlattıkları ispatların %85’inden çoğunda seçenек soruları kullandıkları gözlenmiştir (bkz. Tablo 14).

Sonuç sorularına ispat sunumlarından örnekler:

“ OP vektörünü nasıl ifade ederiz arkadaşlar?”

“Hangi iki üçgen eş diyeceksiniz?”

“Bunların katsayıları ne olmalıdır?”

“ Z_1 ’in normu kaçtır?”

“Bu çemberin üstünü temsil eden fonksiyon neydi?”

Ders gözlemleri analizi sonucunda derste ispat sunumlarında Dr. Öklid ve Dr. Kompleks haricinde tüm öğretim elemanlarının sundukları ispatların büyük çoğunluğunda öğrencilere kısa cevap gerektiren sorular sorarak onları ispata dahil ettikleri söylenebilir (bkz. Tablo 14). Kendi soruları içinde değerlendirildiğinde ise Dr. Kompleks’in sorularının %6’sında öğrencilere bu tür sorular yönelttiği gözlenmiştir.

Yorum sorularına ispat sunumlarından örnekler:

“Niye böyle yazma gereği duydum sizce?”

“Şimdi bu benim ne işime yarayacak?”

“Neden böyle düşünüyorsun?”

“Boş kümeyi zaten söylemiştik, peki kendisi nasıl var?”

“Evrensel kümenin bunun elemanı olduğunu nasıl ifade edelim?”

“Bu varken bu doğruysa, bu yokken ifadede nasıl bir değişiklik yaparsınız?”

“Çelişkiyle ispat en temel ispat yöntemlerinden değil mi? Peki mantığı neydi?”

“Mesela örnek verir misin şöyle olsaydı böyle olmazdı diye?”

“İspata nasıl başlayalım, öneriniz nedir?”

“Şimdi mesela ben bunu neden büyük eşit sıfır yazdım?”

Ders gözlemleri analizi sonucunda ispat sunumlarında en çok Dr. Soyut, Dr. Uzak ve Dr. Türev’in öğrencilerden açıklama yapmalarını bekledikleri sorular sordukları görülmüştür (bkz. Tablo 14). Bununla birlikte kendi soruları içinde değerlendirildiğinde Dr. Soyut kendi sorularının %20,8’inde, Dr. Türev %17,9’unda ve Dr. Uzak ise %5,9’unda yorum soruları sormuşlardır. Yani Dr. Uzak neredeyse her 3 ispattan ikisinde yorum soruları soruyor olmasına rağmen sorduğu tüm sorular içinde yorum sorularının oldukça az olduğu söylenebilir.

Kontrol soruları: Öğrencilerin anlayıp anlamadıklarını kontrol etmek için kullanılan sorulardır. Bu sorulara bazen cevap gelir, bazen sözlü cevap gelmez ama cevap jest ile gelir yani öğretmen öğrencilere bakar ve cevabı anlar. Bu sorulara örnek: “Anladınız mı?”, “Tamam mı?”, “Sorusu olan var mı?” vb. dir. Ders gözlemleri analizi sonucunda ispat sunumlarında Dr. Uzak’ın neredeyse her soruda ve Dr. Türev’in de yarısında çoğunda kontrol soruları sorduğu gözlemlenmiştir (bkz. Tablo 14). Dr. Uzak’ın aynı zamanda diğer

öğretim elemanlarına nazaran kendi soruları içinde de bu tür soruları sorma yüzdesinin daha fazla olduğu söylenebilir.

Onay soruları: Öğrencilerin onay vermesi beklenen sorulardır. Öğretim elemanlarının bu soruları çoğunlukla öğrencilerin dikkatini çekmek için sordukları söylenebilir. Öğretim elemanları bu soruları sorduktan sonra çoğunlukla öğrencilere bakmakta ve öğrenciler de kafalarını sallamaktadırlar. Örneğin, “Doğru mu?”, “Değil mi?”, vb. sorulardır. Ders gözlemleri analizi sonucunda ispat sunumlarında Dr. Uzay ve Dr. Vektör’ün sundukları her ispatta onay soruları sordukları gözlemlenmiştir (bkz. Tablo 14). Bununla birlikte kendi soruları içinde değerlendirildiğinde de Dr. Vektör’ün sorduğu sorularının yaklaşık olarak üçte birinde öğrencilerden onay beklediği söylenebilir.

4.2.2.2.5. Diğer uygulamalar

Yukarıda bahsedilen kategorilere ek olarak öğretim elemanlarının derste ispat sunumlarında öğrencilerin dikkatini kendilerine çekmek için *uyarılar* yaptıkları, öğrencileri ispata katmak için onları *motive etmeye* yönelik ifadeler kullandıkları, ispatın tamamını ya da bir kısmını tekrar anlatırları, ispatın önemine vurgu yaparak ispata veya teoreme dikkat çektikleri ve öğrencilerin yanıtlarına olumlu geri bildirim yaptıkları da gözlenmiştir. Uyarı ifadelerine örnek olarak şu söylemlere rastlanmıştır:

“Bu dediğime dikkat edin!”

“Tepki ver!”

“Buraya bakar mısınız!”

“Yazmayın izleyin! Yazdıkça bir şey olmuyor çünkü!”

“Beni izle, yazma!”

“Herkes tahtaya baksın!”

“Dinleyelim burayı!”

“Soruma dikkat et, hemen atlama!”

Öğrencilerin bu tarz uyarı ifadelerinden sonra başka bir şeyle meşgul olsalar bile öğretim elemanına baktıkları söylenebilir. Bu bağlamda, bu uyarı ifadelerinin öğrencilerin dikkatini ispata çektiği düşünülebilir. Gözlem verilerinde, Dr. Topoloji’nin 1 kere, Dr. Soyut’un 2 kere, Dr. Uzay’ın 24 kere, Dr. Türev’in 1 kere, Dr. Vektör’ün 7 kere uyarı

cümleleri kurduğu gözlenmiştir. Bununla birlikte, Dr. Kompleks ve Dr. Öklid'in bu tarz uyarı cümleleri kullanmadıkları gözlenmiştir.

Öğrencilerin ispat öğrenmeye veya ispat yapmaya yönelik fikirlerini olumlu yönde etkilemeye çalışan ifadeler de tespit edilmiştir. Gözlem verilerinde ispat sunumları esnasında karşılaşılan motive etmeye yönelik ifadeler şunlar örnek verilebilir:

Örneğin Dr. Öklid öğrencileri ispat yapmaya şevklendirmek için *“İspat yapın arkadaşlar, yapmaktan çekinmeyin, deneyin!”* demiştir. Bir öğrenciyi ispatı yapması için tahtaya çağırdığında, öğrenci *“Yanlış yapmış olabilirim”* demiştir. Dr. Öklid öğrenciyi cevap olarak yanlış da olsa korkmaması gerektiğini şu şekilde belirtmiştir:

“Tamam yanlış olsun. ne yapıyoruz burada tek ayak üstünde bekletmeyeceğiz. Tartışıyoruz.”

Dr. Uzey da *matrislerde verilen bir dönüşümün lineer olduğunu* ispatlarken yazdığı bir adımdan sonra öğrencilere *“Ne yaptığımı anladınız mı?”* diye sormuş ve aşağıdaki ifadelerle onları motive etmeye çalışmıştır: *“Bir bakın bakalım. Sadece yapılışı uzun çocuklar. Bildiğiniz özellikler aslında.”*

Öğrencilerin bu tarz motive edici cümlelerle biraz da olsa ispat yapmayı istemeye yönelik cesaret kazanması dolayısıyla bu cümlelerin faydalı olacağı düşünülebilir. Gözlem verilerinde, Dr. Uzey'in 1 kere, Dr. Türev'in 4 kere, Dr. Vektör'ün 2 kere, Dr. Kompleks'in 2 kere, Dr. Öklid'in 2 kere bu tür ifadeler kullandıkları gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, Dr. Soyut ve Dr. Topoloji'nin ispat sunumlarında bu tür ifadeler görülmemiştir.

Öğretim elemanlarının bazen öğrencilerin talebiyle bazen de kendilerinin öğrencilerin anlamadığına yönelik kanaatleri neticesinde ispatın bir kısmını veya tamamını tekrar anlattıkları tespit edilmiştir. Ders gözlemleri analizi sonucunda ispat sunumlarında öğretim elemanlarının tekrar anlatım yaptıkları ispat yüzdeleri sırasıyla Dr. Topoloji %26,7, Dr. Vektör %22,2, Dr. Türev %11,8, Dr. Uzey %11,1, Dr. Öklid %3,2 ve Dr. Soyut %3'tür. Dr. Kompleks'in ispat sunumlarında tekrar anlatım yaptığı gözlemlenmemiştir.

Öğrencilerin sorularına veya sorulara verdikleri yanıtlara ilişkin öğretim elemanlarının geri bildirimleri de incelenmiştir. Bu geri bildirimlerin genellikle benzer şekilde gerçekleştiği söylenebilir. Örneğin, Dr. Uzey, Dr. Türev, Dr. Kompleks, Dr. Öklid ve Dr. Vektör öğrencilere yönelttikleri sorularda öğrencilerin cevapları doğruysa genellikle cevabı tekrar etmekte ve “değil mi? veya “doğru mu” vb. sorularla da öğrencilerden onay beklemektedirler. Dr. Soyut ve Dr. Topoloji ise genellikle onay beklemeden yalnızca

cevabı tekrarlamaktadır. Dr. Uzay, Dr. Vektör, Dr. Türev, Dr. Öklid, Dr. Soyut ve Dr. Topoloji eğer öğrencilerin cevabı doğru değilse başka bir soru sormakta ya da cevabı kendisi vermektedir. Dr. Kompleks ise öğrencilerden cevap gelmediğinde soruyu genellikle kendisi cevaplamaktadır. Bunlara ek olarak:

- Dr. Uzay öğrencilerden cevap gelmediği durumlarda öğrencilerden tepki vermelerini uyarı cümleleriyle açıkça istemekte ve açıklayıcı hamlelerle tekrar anlatımlar yapmaktadır.
- Dr. Türev çoğunlukla öğrencilerin doğru yanıtlarının ardından hemen yeni sorularla devam etmektedir.
- Dr. Türev ve Dr. Soyut öğrencilerin yanıtları yanlış da olsa yanlışlığını öğrenciye göstermek için söylediklerini çoğunlukla uygulamaktadır.
- Dr. Soyut ve Dr. Uzay “Güzel!”, “Bravo!”, “İyi fikir!” vb. olumlu geri bildirim ifadelerini diğer öğretim elemanlarına nazaran daha fazla kullanmaktadır. Bununla birlikte sordukları sorulara nispeten bu geri bildirimlerin oranı tüm öğretim elemanlarında oldukça düşüktür.

4.2.3. “Derste ispat yaparken kesinlikle yapılmalı dediğiniz bir şey var mı?” sorusuna ilişkin bulgular

Öğretim elemanlarının derste ispat yaparken nelere dikkat ettiklerinin ve hangi eylemleri önemli bulduklarının incelenmesi amacıyla sorulan “*Derste ispat yaparken kesinlikle yapılmalı dediğiniz bir şey var mı?*” sorusuna verdikleri yanıtlarından oluşan kategorileri ve bu kategorileri hangi sırada tercih ettikleri Tablo 15’te verilmiştir.

Tablo 15

İspat anlatımı esnasında yapılması gerekli görülen uygulamalar ve 3. mülakat (seçme-sıralama formu) sonuçları

İspat anlatımı esnasında yapılması gerekli görülen uygulamalar	Dr. Kompleks	Dr. Vektör	Dr. Türev	Dr. Soyut	Dr. Öklid	Dr. Topoloji	Dr. Uzay
Teoremin doğru anlaşılması sağlanmalıdır.	1	1*		1*	1*	1*	1*
Ön bilgiler hatırlatılmalıdır.	2	1*				2*	
Matematik dili doğru kullanılmalıdır.	2	2	5	2	*	4*	
İspatın değerlendirmesi yapılmalıdır.	5					*	
Mantık sırası izlenmelidir.	3		4			5*	
Her adım nedenleriyle açıklanmalıdır.	4*	1*	3		3	3*	3*
Öğrencilerle soru cevap şeklinde olmalıdır.	4		2*	3*	4*	*	2*
İspatı öğrencilerin yapmaya çalışmaları için öncelikle onlara zaman tanınmalıdır.	1		1	5	2*	2	5
Yöntem belirtilmelidir.	5	2		4*			4

Tablo 15’te (*) işareti öğretim elemanlarından hangilerinin ilk mülakatta bu kategorideki görüşleri ifade ettiğini göstermektedir. Numaralar ise 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) öğretim elemanlarının bu görüşlerden hangilerini seçtiklerini ve bu görüşleri kendilerince hangi sırada önemli gördüklerini göstermektedir (en önemli görüşlerin belirlenmesi amacıyla ilk beş tercihleri istenmiştir). Renklendirme görsellik açısından numaralara göre yapılmıştır. Örneğin, ispat yaparken “*ön bilgilerin hatırlatılması gerektiği*” görüşü ilk mülakatta Dr. Vektör ve Dr. Topoloji tarafından dile getirilmiştir.

Bununla birlikte, 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) bu görüş, Dr. Vektör'ün derste ispat yaparken yapılması gerekenler içinde ilk sırada tercih ettiği görüş olmuştur. Dr. Kompleks ve Dr. Topoloji ise bu görüşü ikinci sırada tercih etmişlerdir.

“Derste ispat yaparken kesinlikle yapılmalı dediğiniz bir şey var mı?” sorusuna verilen yanıtların analizi sonucunda, öğretim elemanlarının önemli buldukları 9 farklı uygulamanın belirlendiği söylenebilir. Bu uygulamalar ve onları içeren mülakat ifadeleri aşağıda sunulmuştur.

Teoremin doğru şekilde anlaşılmasının sağlanması hem ilk mülakatta üç öğretim elemanı tarafından dile getirilen hem de altı öğretim elemanı tarafından da birinci sırada tercih edilen bir gereklilik olarak görülmüştür. Örneğin, Dr. Vektör ispat yaparken teoremin adım adım kullanılıyor olduğunu belirterek öncelikle teoremin anlaşılması gerektiğine vurgu yapmıştır:

“Bir defa kesinlikle teoremin ifadesi anlaşılmalı. Teoremin ifadesi anlaşılmıyorsa ispatı yapmanın bir anlamı yok. Ezberedir. Çünkü adım adım kullanıyoruz onu (teoremi).”

Dr. Topoloji de teoremin doğru anlaşılması gerektiğini belirterek bunun sağlanması için neler yaptığından bahsetmiştir:

“Bir kere kesinlikle o teoremin doğru anlaşılmasını sağlamak lazım. Bunun için gerekiyorsa teoremi parçalara bölüp teker teker her parçanın üzerine konuşup bu parçayla ilgili ön bilgilerin çağırılması gerekiyor.”

Dr. Uzay ise teoremin anlaşılmasının önemine değinirken teorem ve ispatı, problem çözme bakımından ele almıştır:

“Bir kere ispatlanacak şeyi çocuğun çok iyi anlaması lazım. Teoremi anlamalarını sağlamak %50'si. Problemi anlamak her zaman %50'sidir. Öncelikle teoremi anlamalı ve neyi bulması gerektiğini bilmeli. Yani öyle körü körüne gittiği zaman hiçbir anlamı olmuyor.”

Dr. Kompleks, Dr. Soyut, Dr. Öklid ve Dr. Uzay teoremin doğru anlaşılması ifadesini kullanmadan derste ispat yaparken verilenlerin ve istenenlerin yani hipotez ve hükmün vurgulanması gerektiğine yönelik görüş belirtmişlerdir. Hipotez ve hükmün vurgulanması teoremin anlaşılmasına yönelik adımlar olduğundan onlar da bu kategori altında değerlendirilmiştir. Örneğin, Dr. Soyut öğrencilerin neyi göstermesi gerektiğini ve bunu gösterirken neleri kullanabileceğinin vurgulanması gerektiğini belirtmiştir:

“Bence en önemli şey neyi göstermeye çalıştığımızı vurgulamaya çalışıyorum. Göstermemiz gereken şeyi vurguluyoruz ya da neyi gösterirsek biz bu ispatı tamamlamış oluruz önce onu vurgulamaya çalışıyorum. Hipotez hüküm olayı yani ne var elde, neyi göstermeliyiz o kesinlikle vurgulanmalı. Öğrenci ne ile muhatap, o an onu görebilmesi için hipotez hüküm bağlantısının verilmesi lazım diye düşünüyorum. Ayrıca öğrencilerle de neyi göstermeliyiz diye konuşulabilir, tartışılabilir. Ama kesinlikle yapılması gereken, neye odaklanmamız lazım yani hüküm, özellikle öğrencilerin bunu anlaması lazım. Hüküm, yani ne göstereceğiz ve bunu gösterirken sermayemiz ne? Sermaye derken hipotezde ne vermiş, neyi kullanabiliriz, o bağlantı olayını söylemek lazım bence.”

Dr. Soyut gibi Dr. Uzay da özellikle hükmün tespit edilmesi gerektiğine değinmiştir:

“Ve yapısal açıklamalarda muhakkak bulunuyorum yani ‘Neden şimdi buna ihtiyacımız var. Bu ispat ne zaman biter?’ Onu da söylüyorum yani ispat ne zaman biter. Neyi gösterdiğimizde biter? Şunu gösterdiğimizde biter.”

Benzer şekilde Dr. Öklid de önce verilenlere sonra da istenene odaklanılması gerektiğini belirtmiştir:

“Öncelikle verilenlerin ne olduğu net bir şekilde belli edilmeli. Elimde neler var? Ben bunları kullanarak, bildiğim aksiyomlar ne? Onları da kullanarak acaba neye ulaşırım? Mutlaka yazılmalı yani verilenler şunlar. Bundan sonra da gitmek istenilen ya da ispatı istenilen hüküm nedir yani onun yazılması. Bunlar olmalı.”

3. mülakatta (seçme-sıralama formunda), derste ispat sunumunda kesinlikle yapılması gerekir diye belirtilen uygulamalar içerisinde *“Teoremin doğru anlaşılmasının sağlanması”* ifadesi Dr. Türev haricinde diğer tüm öğretim elemanları tarafından birinci sırada tercih edilmiştir. Yapılması gerektiği belirtilen bir diğer uygulama ise *önbilgilerin hatırlatılmasıdır*. Ön bilgilerin hatırlatılması da Dr. Vektör ve Dr. Topoloji tarafından ilk mülakatta dile getirilmiştir. Dr. Vektör ispat içinde geçen kavramları öğrencilere sorarak o kavramları/konuları da pekiştirmeye çalıştığını aktarmıştır:

“Eğer mesela türev tanımı kullanacaksak ‘Bu türevin tanımı neydi arkadaşlar?’ gibi öğrencileri soru cevap şeklinde katıyorum. Analizin temel teoremi 1 işlerken, ‘Bakın burada integraller için ortalama değer teoremi geçti, neydi bu ifade?’ deyip böyle kısa bilgiler sunarım. Mesela, Fermat teoremini ispatlarken ‘arkadaşlar birinci türevin sıfıra eşit olduğunu bulmaya çalışacağız. Şimdi yerel maksimum

için ispatı yapıyorum neydi yerel maksimum ifadesi?’ deyip... Çünkü birbirine yakın konular olduğu için hem onu pekiştirmiş oluyorsun.”

Dr. Topoloji ise hem ispatı yaparken ön bilgilerin hatırlatılmasından hem de yukarıda aktarıldığı gibi teoremin anlaşılmasının sağlanması esnasında teoremden gereken ön bilgilerin hatırlatılmasına değinerek “Ön bilgilerini soru cevaplarla yavaş yavaş hatırlatmak önemli.” demiş ve eklemiştir:

“Bir kere ön bilgilerin hatırlatılması gerekiyor. Yeri geliyor bir ders önceki şeyi unutmuş oluyorlar ki hele seneler önceki ya da başka bir ders bizim alt yapımız soyut matematik topolojide ya da analitik geometride analiz kullanıyoruz. Olasılık istatistikte dışarıdan bakan farkında olmaz ama analizdeki double-triple integrallere kadar kullanmamız gerekebiliyor. Ya da sigma notasyonları toplam notasyonları bunların özellikleri vs. bunları kullanarak bazı ispatları yapmamız gerekiyor. Eğer bunların olmadığını düşünüyorsak o zaten ispatı yapmadan önce öğrencinin genel durumundan belli oluyor onun için önce onları hatırlatıp onları kullanabilir miyiz diye bakmak onları geri çağırmak lazım.”

Ön bilgilerin hatırlatılması görüşünü, 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) Dr. Vektör birinci sırada, Dr. Kompleks ve Dr. Topoloji ikinci sırada tercih etmişlerdir (bkz. Tablo 15). İspat sunumunda gerekli olduğu söylenen bir diğer uygulama da *matematik dilinin doğru kullanılması*dır. Dr. Öklid ve Dr. Topoloji matematik dilinin doğru kullanılması gerektiğini belirtmişlerdir. Dr. Öklid ispatı yaparken notasyon kullanımına özen gösterdiğini söylemiştir:

“Notasyonlara dikkat etmelerini istiyorum, neyi neden yazdıklarını yazmalarını istiyorum. Yazmıyorsa ben yazdırıyorum. Biraz geometride üşeniyorlar. Harflendirmeyi kullanmaya, notasyon kullanmaya falan onların yazılmasına özen gösteriyorum.”

Dr. Topoloji ise özellikle öğrencilerin birer matematik öğretmeni adayı olduğuna dikkat çekerek matematik dilinin doğru kullanmasına vurgu yapmıştır:

“Matematik dilini olmazsa olmaz doğru kullanmamız lazım. Biz doğru kullanmazsak öğrencimiz de doğru kullanmaz. Gittiği okulda da doğru kullanmaz. Çocuklar stajda da soruları çözüyorlar ama bir konuyu anlatırken çok zorlanıyorlar.”

3. mülakatta (seçme-sıralama formunda), Dr. Kompleks, Dr. Vektör ve Dr. Soyut’un “matematik dilinin doğru kullanılması” gerekliliğini ikinci sırada tercih ettikleri

görülmüştür (bkz. Tablo 15). Dr. Topoloji devam ettiği açıklamasında bir kategorinin daha oluşumuna yol açarak ispat sunumunda *ispatın değerlendirilmesinin yapılması* gerekliliğinden bahsetmiştir. Dr. Uzey gibi ispat yapma sürecini problem çözmeye benzeterek problem çözümünün ardından yapılması gereken çözümün değerlendirilmesi aşamasının ispatlamada da olması gerektiğini belirtmiştir:

“Sonuç ifade edilmeli yani yaptık ispatladık da biz ne yaptık mutlaka onun değerlendirilmesi nihayete erdirilmesi gerekir. Problem çözmeye de aynı şey üzerinde duruyoruz. Tamam anladık stratejimizi geliştirdik problemi çözdük, orada bırakmıyoruz, bir değerlendirme yapıyoruz, biz bu problemi gerçekten çözdük mü yoksa başka bir şey mi bulduk başka yolla yapabilir miydik ne bulduk ne ifade ediyor bu bize. Aynı şey bunun için de geçerli. Dolayısıyla sonucun toparlanması gerekir.”

Dr. Topoloji'nin 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) bu ifadeyi öncelikli olarak görmediği söylenebilir. Bununla birlikte bu ifadenin yalnızca Dr. Kompleks tarafından ve beşinci sırada tercih edildiği görülmektedir (bkz. Tablo 15). Problem çözme sürecinde değerlendirmenin yapılmasının, en önemli adımlardan biri olduğu söylenebilir. Bununla birlikte yalnızca bir öğretim elemanı tarafından ve sonuncu sırada tercih edilmiş olması, ispat sunumunda diğer gereklilikler içerisinde o kadar önemli görülmediğini göstermektedir.

İspat anlatımında bir başka gereklilik olarak söylendiği tespit edilen *mantık sırası izlenmelidir* görüşü yine yalnızca Dr. Topoloji tarafından dile getirilmiştir. Dr. Topoloji *“Mantık silsilesi yani zincir kesinlikle izlenmelidir”* diyerek mantık sırasına da değinmiştir. *“ispatı mantık sırasına uygun yapma”* ifadesinin 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) Dr. Kompleks, Dr. Türev ve Dr. Topoloji tarafından sırasıyla üçüncü, dördüncü ve beşinci sırada tercih edildiği görülmektedir (bkz. Tablo 15).

“İspatta her adımın nedenleriyle açıklanması” öğretim elemanlarının beşi tarafından ilk mülakatta dile getirilen bir başka gereklilik olmuştur. Bu bağlamda öğretim elemanlarının ispatta adım adım ilerlenmesi gerektiğini düşündükleri söylenebilir. Örneğin, Dr. Kompleks ispatın her aşamasında açıklama yaptığını ya da soru sorduğunu vurgulamıştır:

“Mesela analizdeki ortalama değer teoremini örneğin kullanacaksın şimdi ‘Bunu kullanacaksan orada birtakım bir şeyler yaptığın zaman bakın bunu ortalama değer teoremi gereğince yazıyoruz ona göre uyarladığın zaman zaten arkası geliyor’ gibi açıklamalarım oluyor. Yani yaptığımız adımları açıklayacağız ya da

soracağız. Diyelim yazdık ‘Hadi söyleyin bakalım neye dayanarak yazdım ben bu adımı? Şimdi buradan da devam ediyoruz’ gibi.”

Benzer şekilde, Dr. Vektör de ispatın her adımında açıklama yaptığını belirtmiştir:

“Tahtayı kullanırken her aşamada öğrenciye şundan dolayı şudur diye notasyonları ifade ederim çünkü ispatlar birbiriyle bağlantılıdır. Her adımın birbiriyle bağlantısı var. Her adımı öğrenciye ifade ediyorum.”

3. mülakatta (seçme-sıralama formunda), Dr. Vektör, ispatta “her adım nedenleriyle açıklanmalıdır” ifadesini ispat sunumu esnasında yapılması gerekenler içinde birinci sırada tercih etmiştir. Bununla birlikte, Dr. Türev, Dr. Öklid, Dr. Topoloji ve Dr. Uzak bu görüşü üçüncü sırada tercih etmişlerdir.

Derste ispat anlatılırken yapılması gerektiği düşünülen bir başka uygulama ise öğrencilerle soru cevap şeklinde bir diyalogun kurulmasıdır. Bu uygulama yani öğrencilerle diyalog kurulması, öğrencilerin ispata katılımına yönelik görüşler başlığı altında ayrıca bir soru ile öğretim elemanlarına sorulmuştur (bkz. Bölüm 4.8.3). Öğretim elemanlarının katılım başlığı altında soru cevap uygulaması ile ilgili ayrıntılı görüşleri o bölümde yer almakla birlikte bu bölümde, “ispat anlatırken yapılması gerekenler” başlığı altında özellikle bir uygulama olarak vurgulandığından öğretim elemanlarının bu konudaki görüşleri, bu soruya verdikleri yanıtlar çerçevesinde burada ele alınmıştır. Öğretim elemanlarından beşi derste ispatın öğrencilerle diyalog halinde yapılması gerektiğini dile getirmiştir. Dr. Türev, ispatı öğrencilerle etkileşim içinde yaptığını söylemiş ve buna yönelik uygulamalarını açıklamıştır:

“Mutlaka soru cevap şeklinde olmalı. Yani biraz kafa karıştırma ve ondan sonra onlara sınıfça yanıt aramak önemli diye düşünüyorum. Dediğim gibi formel bir şekilde tahtaya yazıp ispat yapılmaz. Mutlaka öğrencilerle etkileşim içinde yaparım ve o diyalogu hiç kaybetmem. Mümkün olduğunca çok öğrenciye ulaşmaya çalışırım. Çünkü onun önemli olduğunu düşünüyorum. Bu ne sağlar? Hem öğrencilerin daha aktif olmasını hem de çoğunun düşünmesini sağlar.”

Benzer şekilde Dr. Soyut da ispatları öğrencilerle diyalog halinde yaptığını söylemiştir:

“Mutlaka öğrencilerle konuşuyoruz. Eğer gerek-yeter koşullu bir şeyse dolayısıyla ‘bu ispat nasıl yapılmalı? Peki bunun gerek koşulu neyi ifade ediyor?’ şeklinde tahtada bir o tarafı gösteriyoruz. Öğrencilerle de tartışarak ve onlardan da cevap gelmesini bekleyerek ifade etmeye çalışıyoruz. Her adımda da ilgili bağlantıları

öğrencilerle kurmaya çalışıyorum. Bazen yönlendirdikleri farklı yerler olursa yanlış yere gidecek olsa bile yazdığımız oluyor. Yazdırdıkları şeyler belki bir yerde tikanabiliyor, demek ki götürmüyormuş deyip devam edebiliyoruz.”

Dr. Topoloji de kendi üniversite okuduğu sistemle güncel sistemi karşılaştırarak şimdiki öğrencilerin açıklamalara daha çok ihtiyaç duyduğunu ve bu nedenle ispatları öğrencilerle diyalog kurarak yaptığını belirtmiştir:

“Dolayısıyla tahta bizim için çok önemli. Diyalog oldukça önemli. Beraberce teoremlerin ifadelerini analiz etmek beraber düşünmek , ipuçları ile onları yavaş yavaş iteklemeye çalışmak... Matematik dilini de tahtada doğru bir şekilde ifade edip açıklamak ama tabi diyalogsuz ben sevmiyorum. Şunu da yapabiliriz tahtaya teorem ispat şu şu şu... Ondan sonra bir buçuk saat yazar çizer çıkar gideriz yani. Öyle hocalarımız yok muydu vardı ve çok da faydalandık yani ama o kadar güzel de ifade ederdi ki matematik dilini okumayı biliyorsanız başka bir kitap bakmaya bile gerek kalmazdı. Onların tarzı farklı onları bir kenara koyuyorum. Bizim öğrencilerimizin alt yapısı bize göre... Ben meslek lisesinden gelmiş olmama rağmen bu bölümü okuyabildim ama şu an meslek lisesinden gelen bir öğrenci bu bölümü okuyamaz.”

Dr. Uzak da sorular yardımıyla öğrencilerle diyalog kurduğunu aktarmıştır:

“Öğrencilerle çok sık diyalog kuruyorum ben. Karşılıklı soru sorarak yapıyorum. Soru soruyorum cevap bekliyorum. Öğrencilerle diyalog çok daha önemli yani bunu sadece tahtaya yazmanız önemli değil öğrencinin onun neden orada yazıldığını anlaması lazım.”

Dr. Öklid ise kendisinin yaptığı ispatlarda öğrencilerle diyalog halinde yaptığını aktarmıştır. Bunu aktarırken aynı zamanda öğrencilere zaman tanıdığını ve öncelikle onların yapmasını istediğini de belirtmiştir:

“Önce ben yapmıyorum zaten. Öncelikle onlardan yapmalarını istiyorum. Çünkü bunlar 3. Sınıf. 3. Sınıfa kadar her şeyi alıyorlar. Soyut matematik, Cebir, Topoloji vb. alıyorlar. Onların yapmasını istiyorum. Ve sonra birisi bile yapmış olsa bekliyorum öncelikle ama sonra öğrencilerin tahtaya gelip yapmasını istiyorum. Hiç kimse yapamıyorsa öğrenciyle diyalog halinde soru yanıtla yapmaya çalışıyorum ispatları.”

İspatın öğrencilerle diyalog halinde yapılması görüşü, 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda), Dr. Türev ve Dr. Uzak tarafından ikinci sırada tercih edilirken, Dr.

Soyut tarafından üçüncü sırada, Dr. Kompleks ve Dr. Öklid tarafından 4. sırada tercih edilmiştir. Dr. Topoloji'nin ise mülakatta bu uygulamayı belirtmiş olmasına rağmen 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) bu ifadeyi seçmediği gözlenmiştir.

Öğrencilere zaman tanınması ve onlardan ispat yapmaya çalışmalarının istenmesi, ispat anlatımında yapılması gerekenlerden biri olarak mülakatta yalnızca Dr. Öklid tarafından dile getirilmiş olmasına rağmen 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) Dr. Kompleks ve Dr. Türev tarafından birinci sırada, Dr. Topoloji ve Dr. Öklid tarafından ikinci sırada, Dr. Soyut ve Dr. Uzay tarafından ise beşinci sırada tercih edilmiştir.

İspat yapılırken kesinlikle yapılmalı diye belirtilen bir başka uygulama da ispat yönteminin belirtilmesi olmuştur. Bir sonraki bölümde bizzat ispat yöntemlerinin ispat anlatımı esnasında vurgulanmasına yönelik görüşlerden bahsedilecek olmasına rağmen bu soruda özellikle ispat yaparken yapılması gerekenlere yönelik görüşlerini belirttiklerinden burada da yapılan bir açıklamaya yer verilmiştir. Dr. Soyut tarafından dile getirilen bu uygulamaya yönelik onun açıklaması şu şekildedir:

“Bir de bazı ispatlarda belki yöntem başlangıçta vurgulanabilir... Hangi yöntemle yapacağımızı söylemek öğrencilerin fikir sahibi olmasını da sağlıyor... Özellikle bazı ispatlarda diyelim ki tartışma yaptınız karşılıklı konuştunuz dönütler belli bir yerde kaldı, öğrenciyi işin içine iyice çekebilmek için yöntemi uygulamak çok faydalı olabilir. Mesela burada doğrudan ispat yapacağız dersek öğrenci bilir ki buradan başlayıp devam edeceğiz. Olmayana ergi ile başlayacağız deyince öğrenci hükmün olumsuzundan harekete başlayacağını en azından bilebilir. Ve teoremlerle ispat yöntemleri arasında böyle kuvvetli bir ilişki de oluşmuş oluyor.”

İspat yönteminin belirtilmesi, 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda), Dr. Vektör tarafından ikinci sırada öncelikli olarak değerlendirilirken, Dr. Soyut ve Dr. Uzay tarafından 4. sırada tercih edilmiştir. Dr. Kompleks ise bu uygulamayı 5. sırada tercih etmiştir.

Özetle, derste ispat sunumunda öğrencilerin katılımının sağlanması (örn., soru sorulması ve öğrencilerin yapmaların için zaman verme gibi), bazı bilgilerin (örn., ön bilgiler, adımların açıklamaları ve yöntem) sunulması ve bazı prosedürlerin (örn., matematik dilinin kullanımı, ispatın değerlendirmesi, mantık silsilesi gibi) takip edilmesi gibi çeşitli uygulamaların gerekli görüldüğü söylenebilir. 3. mülakat (seçme-sıralama formu) sonuçlarına göre ise “teoremin doğru anlaşılmasının sağlanması” ve “öğrencilerin yapmaya çalışmaları için öncelikle onlara zaman tanınması” en çok tercih edilen görüşler olmuştur.

4.2.4. “Derste ispat yaparken kullandığınız ispat yönteminden bahseder misiniz? Neden?” sorusuna ilişkin bulgular

Derste ispat yaparken hangi ispat yönteminin kullanılacağına yönelik öğretim elemanlarının bir açıklama yapıp yapmadığı sorulmuştur. Bu sorunun sorulma nedeni, literatürde öğrencilerin ispatlama yöntemlerini ya da hangi yöntemi ne zaman uygulayacaklarını bilmediklerine yönelik bulgulardır. Öğretmenin ispat sunumu sırasında, ispat yöntemlerini vurgulayıp vurgulamamasının öğrencinin ispat yöntemlerine olan hakimiyetini etkileyebileceği düşünüldüğünden bu soru da mülakat sorularına eklenmiştir. Öğretim elemanlarının hem bu konudaki uygulamalarına hem de ispat yöntemlerinin vurgulanmasının faydalarına yönelik fikirlerinin alınması amaçlanmıştır. İspat yöntemini vurgulamak ifadesi ile kastedilen, ispatı yaparken “Şu yöntemle yapıyoruz” veya “Bu yöntemi kullanıyoruz.” şeklinde bir ifadenin kullanıp kullanılmadığı ve bunun yanı sıra yönteme yönelik bir açıklama yapıp yapılmadığıdır. Yani ispat yöntemlerinin anlatılıp anlatılmadığı kastedilmemektedir.

Öğretim elemanlarına öncelikle sunulan ispatın yöntemini söyleyip söylemedikleri sorulmuştur. Dr. Türev, Analiz dersinde genellikle doğrudan ispat kullanıldığını bu nedenle de çoğunlukla ispatı yaparken hangi yöntemi kullandığından bahsetmediğini belirtmiştir:

“Genellikle vurgulamıyorum. Öğrencilerin zaten liseden gelirken bildiği tümevarım ile ispat. Zaten ispatın sadece tümevarım ile olduğunu düşünüyorlar. İlk zamanlar mesela kök ikinin rasyonel olmadığı ispatında söylüyordum mesela. Ya da sınavda Leibniz formülünün çıkarılışında tümevarım yoluyla ispatı. Ama analizde genelde doğrudan ispat kullanıyoruz. O yüzden vurgulamamış olabilirim.”

Dr. Türev haricinde diğer tüm öğretim elemanları ispat yaparken ispat yöntemini vurguladıklarını aktarmışlardır. Hem bu öğretim elemanlarının derste ispat yaparken ispat yöntemlerini vurgulama nedenleri hem de bu soruya yönelik 3. mülakat (seçme-sıralama formu) sonuçları Tablo 16’da verilmiştir.

Tablo 16

Öğretim elemanlarının, derste ispat yaparken ispatlama yöntemlerini vurgulama nedenleri

<i>İspat sunumunda kullanılan ispat yönteminin vurgulanma nedenleri</i>	<i>Dr. Kompleks</i>	<i>Dr. Vektör</i>	<i>Dr. Türev</i>	<i>Dr. Soyut</i>	<i>Dr. Öklid</i>	<i>Dr. Topoloji</i>	<i>Dr. Uzay</i>
<i>Öğrenciye ispat için fikir verir.</i>	1	3*	1	1*	1	3	
<i>Öğrencileri işin (ispatın) içine çekmeyi sağlar.</i>	2		5	4*	2	5	3
<i>Öğretmen olduklarında ispat yöntemleri bilgisi lazım olur.</i>	3	1	4	2*	3	4	1
<i>İspat yöntemlerine dikkat çekmeyi sağlar.</i>	2*		2	5	4	1	
<i>Benzer yöntemler gerektiren teoremleri anlayıp uygulayabilirler.</i>	1	2	3	3	5	2*	2*

Tablo 16’da (*) işareti öğretim elemanlarından hangilerinin ilk mülakatta bu kategorideki görüşleri ifade ettiğini göstermektedir. Numaralar ise 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) öğretim elemanlarının bu görüşlerden hangilerini seçtiklerini ve bu görüşleri kendilerince hangi sırada öncelikli gördüklerini belirtmektedir. Renklendirme, görsellik açısından numaralara göre yapılmıştır. Örneğin, “*hangi yöntemle yapılacağını söylemenin öğrenciye ispata yönelik fikir vereceği*” görüşü ilk mülakatta Dr. Vektör ve Dr. Soyut tarafından dile getirilmiştir. 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) ise bu görüş Dr. Kompleks, Dr. Türev, Dr. Soyut ve Dr. Öklid tarafından birinci sırada; Dr. Vektör ve Dr. Topoloji tarafından üçüncü sırada tercih edilmiştir. Dr. Uzay ise bu görüşü tercih etmemiştir.

Derste ispat yaparken, kullanılan ispat yöntemini söylediğini belirten öğretim elemanları, bu uygulamalarına neden olarak toplam beş farklı görüş belirtmişlerdir. Bu görüşlerden ilki, ispatın nasıl yapılacağına yönelik öğrencide bir görüş oluşturma amaçlanmış olmasıdır. Dr. Vektör ve Dr. Soyut, hangi yöntemle yapılacağını söylemesinin öğrenciye ispata yönelik fikir verdiğini söylemiş ve bu uygulamayı, ispatı kolaylaştırması nedeniyle tercih ettiklerini belirtmişlerdir. Dr. Vektör:

“Genelde yaparım çünkü hangi yöntemle yapıldığını bilirse... Mesela tümevarımla yapılacak bir ispatı, olmayana ergi ile yapmaya çalışırsa bir sonuç alamaz.

Yöntemi bilmesi ispatı kolaylaştırır. Hangi tür ispat yöntemlerinin kullanıldığını bilmesi lazım. Bu işi kolaylaştırır ama bilmese de engel değil.”

Dr. Soyut da benzer şekilde yöntemi söylemenin öğrenciye fikir verdiğine, dersten örnekler vererek değinmiştir. Aynı zamanda yöntemi söylemenin öğrencilerin ispata katılımlarını sağladığını da belirtmiştir. Yani bu uygulama ile öğrencileri ispatın içine çektiğini vurgulamıştır:

“Şöyle diyelim, hangi yöntemle yapacağımızı söylemek öğrencilerin fikir sahibi olmasını da sağlıyor. Mesela, yine eş güçlülük konusunda iki kümenin eş güçlü olduğunu göstermek, olmadığını göstermekten nispeten daha kolay. Çünkü arada birebir ve örten bir eşleme tanımladığınızda öyle olduğunu gösteririz ama reel sayılarla doğal sayılar eş güçlü değil. Bunun ispatını yapabilmek için eşleme olayına girerseniz sonsuz iki küme ve arada sonsuz eşleme var ve dolayısıyla bu eşlemelerden hiçbirinin bijektif olmadığını göstermeniz lazım. Peki şimdi bunu nasıl yapacak? Çelişki bulma yöntemiyle yapabiliriz bunu. İspata nasıl başlayabiliriz o zaman. Yani, bu konuda yöntemi vurgulamak, öğrencileri işin içine çekebilmek için bir vasıta olmuş oluyor. ‘Hocam o zaman denk olduğunu kabul ederek başlamalıyız’ ve öğrenciye bunu dedirtebilmek için yöntemi vurgulamak önemli. Özellikle bazı ispatlarda diyelim ki tartışma yaptınız karşılıklı konuştunuz dönütler belli bir yerde kaldı öğrenciyi işin içine iyice çekebilmek için yöntemi uygulamak çok faydalı olabilir. Mesela burada doğrudan ispat yapacağız dersek öğrenci bilir ki buradan başlayıp devam edeceğiz. Olmayana ergi ile başlayacağız deyince öğrenci hükmün olumsuzundan harekete başlayacağını en azından bilebilir. Ve teoremler ispat yöntemleri arasında böyle kuvvetli bir ilişki de oluşmuş oluyor.”

İspat yöntemini vurgulamanın, “Öğrenciye ispata yönelik fikir vermesi”, 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) Dr. Kompleks, Dr. Türev, Dr. Soyut ve Dr. Öklid tarafından birinci sırada tercih edilirken, Dr. Vektör ve Dr. Topoloji bu görüşü 3. sırada tercih etmişlerdir. Benzer şekilde öğrencilerin ispata katılımlarını sağlama amacı ise Dr. Kompleks ve Dr. Öklid tarafından ikinci sırada, Dr. Uzay tarafından üçüncü sırada, Dr. Soyut tarafından 4. sırada ve Dr. Türev tarafından 5. sırada tercih edilmiştir (bkz. Tablo 16).

Dr. Soyut ilk iki amaca ek olarak öğrencilerin mezun olduklarında da öğretmen olarak ispat yöntemleri bilgisine ihtiyaç duyacaklarına vurgu yapmıştır:

“Şu anda ortaöğretim müfredatında ispat yöntemleri de var. Ve buradan mezun olan bir öğrenci onları da anlatmak da zorunda. Hem ispat yöntemlerini içselleştirmiş oluyor hem ilgili teoremin ispatına öğrenciyi daha iyi çekebiliyor.”

Bu görüşün 3. mülakatta da (seçme-sıralama formunda) oldukça kabul gördüğü söylenebilir. Dr. Vektör ve Dr. Uzay birinci sırada, Dr. Soyut ikinci sırada, Dr. Kompleks ve Dr. Öklid 3. sırada, Dr. Türev ve Dr. Topoloji 4. sırada tercih etmişlerdir.

İspat yöntemlerinin söylemenin bir başka faydası olarak da Dr. Kompleks bu yöntemlerin varlığına dikkat çekmeyi sağladığını ifade etmiştir:

“Genelde vurguluyorum. Çünkü öğrenciler genel olarak ispat yöntemlerini bilmiyor. Dikkatlerini çekmek isterim. ‘Bu yolla yapacağız’ diyorum. Biraz da ispatlama yöntemleri var yani hep düz mantıkla biz bunu ispatlamıyoruz bir bakın şuna bir farkına varın yani. Şunu merak edip araştırın. Bak bununla yapıyoruz bunu.”

Dr. Kompleks’in “düz mantık” ifadesiyle doğrudan ispatı kastettiği ve bu ispat yöntemi dışında da ispat yöntemleri olduğunu göstermeye çalıştığı söylenebilir. Dr. Kompleks’in bu görüşü 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda), Dr. Topoloji tarafından birinci sırada tercih edilirken, kendisi ve Dr. Türev tarafından da ikinci sırada tercih edilmiştir. İspat sunumunda, kullanılan yöntemin vurgulanmasında değinilen bir başka fayda da benzer teoremlerde/ispatlarda bu yöntemlerin işi kolaylaştırmasıdır. Dr. Uzay ve Dr. Topoloji ispat yöntemlerini vurgulamanın benzer teoremlerde faydalı olacağına değinmişlerdir. Dr. Topoloji genellikle ispatın başında hangi yöntemin kullanılacağını sorduğunu söylemiştir:

“İspata başlamadan önce böyle bir teorem ifadesi karşınıza geldiğinde bunu hangi yöntemle ispatlamayı düşünürsünüz diye sormakla başlıyoruz zaten. Çünkü onu ayırt edebilmesi önemli. Böylece benzer teoremlerde uygulayabilir. Kimisi mesela çelişki ile ispatlanabilirken kimisi tanım yardımıyla çok rahat, kimisi teoremler yardımıyla çok rahat.”

Dr. Uzay da ispat yöntemini vurgulamanın başka ispatlar yaparken işe yarayacağından bahsetmiş ve örnek vermiştir:

“Hangi ispat yöntemini neden kullandığımızı bilmemiz gerekiyor. Çünkü yarın öbür gün bir şeyle karşılaştığı zaman, mesela, $\sqrt{2}$ ’nin irrasyonel olduğunu göstermek için farz edelim olmasın diye başlıyoruz. Neden böyle başladığımızı çocuğun anlaması lazım. Çünkü eğer bu şekilde başlarsak kendi kendini

doğrulamaya dönecek iş diye. Yarın öbür gün böyle başka bir şeyle karşılaştığı zaman o zaman tersini düşünerek başlaması çok önemli. O yüzden kesinlikle vurgularım.

“Öğrencilerin benzer teoremleri ispatlayabilmesi” amacı 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) Dr. Kompleks tarafından birinci sırada, Dr. Vektör, Dr. Topoloji ve Dr. Uzay tarafından ikinci sırada, Dr. Türev ve Dr. Soyut tarafından üçüncü sırada tercih edilmiştir.

Özetle, öğretim üyeleri derste ispat yaparken lokal ve genel gerekçelerle ispat yöntemlerine gerek sorularla gerekse açıklamalarla değinmektedir. Lokal gerekçelerin temel olarak ispatı sunarken öğrencilere fikir vermek veya onların ispata katılmalarını sağlamak gibi amaçlar içerdiği söylenebilir. Genel gerekçeler ise öğrencilerin o ispattan sonra da “ispat yöntemleri bilgisini kullanabilmelerini sağlamayı içermektedir. Yani, ispat yöntemlerinden haberdar olmayı”, “benzer teoremlerle karşılaştıklarında bu yöntemleri kullanabilmeleri” ve “öğretmen olduklarında bu bilgilerinden faydalanmaları” amaçlanmaktadır. Öğrenciye ispata yönelik fikir vermesi ise öğretim elemanları tarafından en çok tercih edilen görüş olmuştur.

4.2.5. İspatta hangi özelliklerin bulunması gerektiğine ve kendilerinin bu özellikleri elde etmek için ispatta değişiklik yapıp yapmadıklarına ilişkin bulgular

“Öğretim elemanlarının derste yapılacak ispatın özelliklerine yönelik görüşleri nelerdir?” sorusu “derste ispatın sunumuna bakış” alt problemi altında ele alınmıştır. Bu sorunun yanıtı ile, pedagojik açıdan ispatlara nasıl baktıklarına yönelik öğretim elemanlarının görüşlerinin alınması amaçlanmıştır. Yaptıkları bir ispatta hangi özelliklerin bulunması gerektiğine ve kendilerinin bu özellikleri elde etmek için ispatta değişiklik yapıp yapmadıklarına yönelik görüşleri bu başlık altında değerlendirilmiştir.

Bu alt problemin incelenmesi ilk mülakatta sorulan “*Derste yaptığınız ispatları literatüre sadık kalarak mı yaparsınız veya herhangi bir değişiklik yapar mısınız? Neden?*” sorusu ve “*Matematik öğretiminde derslerde kullanılacak bir ispat hangi özelliklere sahip olmalıdır?*” sorusuna verilen yanıtların analizi ile yapılmıştır. Bu sorulara verilen yanıtlar ayrı başlıklar halinde incelenmiştir.

4.2.5.1. Öğretim elemanlarının derste anlatacakları ispatta yaptıkları değişiklikler

Öğretim elemanları derste sunacakları ispatlarda, öğrencilerin yararına olacak şekilde değişiklikler yaptıklarını belirtmişlerdir. Tablo 17 yapıldığı söylenen değişiklikleri göstermektedir.

Tablo 17

İspatlarda yapılan değişikliklere yönelik görüşler

Yapılan değişiklik	Öğretim elemanı
<i>İspattaki kavramlara yönelik ek bilgi verme ya da açıklama yapma</i>	Dr. Türev, Dr. Kompleks
<i>Farklı yöntemle veya yolla ispatlama</i>	Dr. Uzay, Dr. Soyut, Dr. Öklid, Dr. Kompleks, Dr. Topoloji
<i>İspatta eksik görülen adımları tamamlama</i>	Dr. Soyut
<i>İspatı daha yalın hale getirme</i>	Dr. Vektör, Dr. Topoloji

İspata gerekli gördüğü durumlarda eklemeler yaptığını söyleyen öğretim elemanlarından Dr. Türev ispat içinde verilen kavramlara yönelik öğrencileri aydınlatıcı bilgiler eklediğini belirtmiştir:

“Kendim biraz değişiklik yapıyorum. Mesela $g(x)$ şöyle bir fonksiyon diyor ama orada ilişkiyi öğrencinin kendisinin kurmasını istiyor. Ben orada $g(x)$ ’i açıyorum diyorum ki doğrusal fonksiyondur. ‘Doğrusal fonksiyon nasıldır neden?’ gibi. Kitap öğrencinin kendisinin ilişkilendirmeyi yapmasını sağlıyor. Öğrencinin yararlanacağı şekilde bazı kısımlarda değişiklik yapıyorum.”

Benzer şekilde Dr. Kompleks de ispatın içeriğinde açıklamalar yapmak gerektiğine değinmiş ancak neyi kastettiğini belirtmemiştir. Buna ek olarak literatüre sadık olduğunu ancak farklı yolla da ispatlayabiliyorsa onu da yaptığını belirtmiştir:

“Literatüre genel olarak bağlıyım oradakine ispat şekline. Ama ben kendim orada farklı bir ispat türü yaptıysam ya da farklı bir yolla da ispatladıysam da bunu öğrencilerime yapmak isterim. Onu yaparım derim ki bu aslında şöyle de ispatlanır şeklinde ifade ederim. Eğer farklı bir ispat yaptıysam literatürde farklı bir ispat biçiminin olduğunu söylerim çünkü öğrencileri matematiksel olarak farklı düşüncelere sevk etmek gerekir. Ayrıca ispatın içeriğinde açıklamalar yapılabilir.”

Dr. Kompleks'e ek olarak beş öğretim elemanı da farklı ispat yöntemleri veya yollarını da derste ispat anlatımlarına eklediklerini belirtmişlerdir. Dr. Topoloji farklı yollarla ispat yapmanın neden önemli olduğuna değinmiştir.

“Literatür temel zaten o olmazsa olmaz. Dediğim gibi varsa farklı alternatif ispat mesela bir teorem tanım yardımıyla da ispatlanabilir ya da alt başka teoremler yardımıyla da daha basit bir şekilde de ispatlanabilir. Dolayısıyla alternatifli vermek yani bir şeyin doğrusunun tek olmadığını da gösterimi açısından önemli. Varsa onlardan da alternatif düşünce yöntemleri bana kalırsa önemli.

Dr. Uzay, öğrencinin hem çeşitliliği görmesi hem de daha iyi öğrenebilmesi amacıyla farklı yöntemler kullandığını belirtmiştir:

“Üstünde değişiklik yaptığım oluyor. Farklı ispat yöntemlerini aynı ispat için kullanabiliyorum. Şöyle ispatlanabilir gibi. Özellikle geometrik ispatları mümkünse ona çevirmeyi seviyorum, literatürün dışında geometrik ispatlar da oluyor. Çeşitliliği görsün. Görselliği zihninde daha iyi canlandırıldığını düşünüyorum öğrencilerin.”

Dr. Öklid, literatürdeki ispatlardan daha farklı yollarla yapılanları daha çok önemsedğini söylemiştir:

“Yani literatürde olanı kullanırım. Zaten benim dersimde öyle bir sıra öyle bir takip var. Kullanırım ama mümkünse önce öğrencilere bırakıyorum yapmalarını istiyorum. Mümkünse başka yolla da yapıp değişiklik yaparak farklı yollardan da ispatlar yapılmasını istiyorum. Literatürde olan kitapta olan ispata bağlı kalmak yerine farklı yollarla yapılanlar doğruysa onları da tercih ediyorum.... Öyle çok bire bir almıyorum zaten. O ispatlarda zaten her yerde olmadığı için çoğunlukla kendim akıl yürüterek yapıyorum. Mesela ‘iç ters açılar eşit paralel doğrularda’ bunu bir yerde bulamıyorsunuz yok ki. Mesela yazdığım kitapta var öyle bir şey. Çok eski kitaplarda belki görürsünüz bulursunuz.”

Dr. Soyut farklı yöntemlerle ispat yaptığından bahsederek bu duruma derslerinden bir örnek vermiştir:

“Belki birkaç farklı ispat yöntemi varsa belirtilebilecek şeyleri söylüyoruz. Ya da birini verip şu yöntemle de yapılabilir deyip kabaca tarif edip geçebiliyoruz. Mesela kümelerde alt küme sayısı 2^n ’dir. Daha çok binom açılımı kullanılarak bunun ispatı yapılıyor. Ama saymanın temel ilkesiyle de bu yapılabilir. Mesela ben hiçbir kaynaktan bunu görmedim. Bu ispat benim kendimce ifade ettiğim bir şey.

Belki de yapılmıştır ben görmeden derste anlatıyorum. Buna benzer aklıma gelen, belki öğrencinin daha da iyi anlayabileceğini düşündüğüm şeyler olursa kendim de ispata uyarladığım oluyor.”

Bu açıklamasına ek olarak Dr. Soyut kitaplardaki bazı ispatlarda bazı adımların eksik olduğunu düşündüğünü ve öğrencinin anlayabileceği şekilde bunları tamamladığını aktarmıştır:

“Değiştirdiklerimiz elbette oluyor. Mesela ben normal kitaplarda gördüğüm ve düzelttiğim yerler var. Mesela “birimli bir sistemde bir elemanın tersi varsa tektir”. Kitapları incelediğimizde bazen kitaplar böyle çok zıplayarak hareket edebiliyorlar. Kaldı ki bu söylediğim ifade de doğru değil. Çünkü birleşme özelliği yoksa ispatın bir yerinde devam edemiyorsunuz. İspat bir yerde kalıyor aslında. Ama birkaç kaynak incelemiştim. Hiç birleşme özelliğine bakmadan ispata devam ettirmiş, ispatlar çok kopuk, arada öğrencilerin anlayamayabileceği şeyler var. Belki de okuyucuya bırakılmış bazı yerler. Dolayısıyla o kısımlarda kendimize göre değişiklikler yapmaya çalışıyoruz.”

Dr. Vektör ve Dr. Topoloji öğrencinin daha iyi anlamasını sağlamak için ispatları daha yalın hale getirdiklerini söylemişlerdir. ‘Daha yalın hale getirme’ ifadesi ispattan bir şeylerin çıkarıldığını düşündürmekle birlikte öğretim elemanlarının bu ifadeyi daha anlaşılır hale getirme anlamıyla kullandıkları ve bu nedenle bazen ekleme bazen çıkarma yaptıkları açıklamalarında anlaşılmaktadır. Örneğin Dr. Vektör daha yalın hale getirmek için görseller kullandığını söylemiştir:

“Anlaşılması zorsa değişiklikler yaparım. Ama öyle ispatlar vardır ki değiştirilmesi mümkün değildir. Ama bazen değişiklikler yaparım yani mesela ortalama değer teoremini daha yalın hale getirebilirim. Rolle teoremini daha yalın hale getirebilirim. Öğrencinin anlamasını kolaylaştırmak için yaparım. Mesela geometrik yorumunu katarım. Şekil üzerinde anlatırım. Görselleştiririm. Diğer türlü sadece sayısal olduğu zaman bazen öğrenci ezberle kaçıyor. Bazen çok karmaşık ispatlar da oluyor. Onları daha yalın hale getiririm. Çünkü bakınca anlamıyorsun. Ben kendim anlamadığım bir ispatı öğrenciye neden anlatayım. Kendin hakim olacaksın ki öğrenciye de anlatacısın.”

Benzer şekilde Dr. Topoloji derste yapacağı ispatı hem net ve sade bir hale dönüştürmeye çalıştığını ve bazı notasyonları daha kısa ifade ettiğini belirtmiştir:

“Tabi. Mesela Timur Karaçay’ın kitapları bizdeki eski kitaplar özellikle hem dili çok eskidi şimdi biraz revize oldu ama bu sefer de fazla Türkçe olmuş yani.

Enteresan kelimeler var. Bir kere hem dilinde anlaşılacak şekilde bir dönüşüm hem belki bazı matematik notasyonları vs. daha kısa ifade edebileceksen onların anlayacağı şekle getirip yani işi çorba etmeye ya da karıştırmaya gerek yok en net en sade biçimde ama genel yapısını da bozmadan nasıl ifade edebiliriz ona bakıyoruz. Sonrasında alternatifleri de verebiliriz.”

Özetle, ispatları literatüre sadık kalarak mı yaptıkları veya üzerinde değişiklik yapıp yapmadıklarına yönelik sorunun cevabı çeşitlilik göstermekle birlikte Dr. Soyut ve Dr. Vektör’ün de dile getirdiği gibi burada genel amacın pedagojik olarak öğrencinin daha iyi anlayabileceği hale getirmek olduğu söylenebilir.

4.2.5.2. Öğretim elemanlarının derste yapacakları ispatın özelliklerine ilişkin görüşleri

“Matematik öğretiminde derslerde sunulacak bir ispat hangi özelliklere sahip olmalıdır?” sorusuna verilen yanıtlar Tablo 18’de verilmiştir.

Tablo 18

Derste yapılacak ispatın özelliklerine yönelik görüşler

<i>İspatta olması beklenen özellikler</i>	<i>Dr. Kompleks</i>	<i>Dr. Vektör</i>	<i>Dr. Türev</i>	<i>Dr. Soyut</i>	<i>Dr. Öklid</i>	<i>Dr. Topoloji</i>	<i>Dr. Uzay</i>
<i>İlişkilendirme yapmayı sağlamalı</i>	2*	3	2*		3		1*
<i>Olabildiğince kısa olmalı</i>	4			*		*	2*
<i>Seviyeye uygun olmalı</i>	1	*	4	1*		1	
<i>Açıklayıcı olmalı</i>	3	1*			1*		
<i>İkna edici olmalı</i>	3			4	1*		
<i>Matematik dili bakımından doğru olmalı</i>	1	1*		3	4	4*	
<i>Yalın olmalı</i>	5	*				*	
<i>Dersin kapsamına uygun olmalı</i>	1	2*	3	1		2	
<i>Mantık sırası izlenmiş olmalı</i>	2		1	2	2	3*	
<i>Estetik görünmeli</i>	1					*	3

Tablo 18’de (*) işareti öğretim elemanlarından hangilerinin ilk mülakatta bu kategorideki görüşleri ifade ettiğini göstermektedir. Numaralar ise 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) öğretim elemanlarının bu görüşlerden hangilerini seçtiklerini ve bu görüşleri kendilerince hangi sırada öncelikli gördüklerini göstermektedir. Renklendirme, görsellik açısından numaralara göre yapılmıştır. Örneğin, derste sunulacak ispat “matematik dili bakımından doğru olmalı” görüşü ilk mülakatta Dr. Vektör ve Dr. Topoloji tarafından dile getirilmiştir. 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) ise bu görüş Dr. Kompleks ve Dr. Vektör tarafından birinci sırada, Dr. Soyut tarafından üçüncü sırada, Dr. Öklid ve Dr. Topoloji tarafından ise dördüncü sırada tercih edilmiştir.

Derste sunulacak ispatta olması beklenen özelliklere yönelik on farklı görüş belirlenmiştir. Derste sunulacak bir ispatın matematik dili bakımından doğru olması, yalın olması, dersin kapsamına ve öğrenci seviyesine uygun olması, açıklayıcı ve ikna edici olması, ilişkilendirme içermesi, mantık sırası izlemesi, estetik görünmesi ve olabildiğince kısa olması gerektiğine yönelik görüşler tespit edilmiştir. Örneğin, Dr. Kompleks dersiyle ilişkili diğer derslerde verilen teoremler ve problemleri içeren ispatları daha önemli bulduğunu belirtmiş ve bunun nedenini şu şekilde açıklamıştır:

“Ama bir de şöyle analizin dışında geometri lineer cebir gibi orada geçen bir takım teoremlerin, problemlerin ya da sonuçları ispatın içinde varsa gerçekten benim için daha da önemli oluyor. Hem öğrencilere oradan yönlendirme yapıyoruz hadi bakalım neye dayanarak şunu doğruluyor veya bu sonuca gidiyoruz.”

Dr. Kompleks’e paralel olarak Dr. Uzay da başka teoremlerle bağlantısı olan ispatlara değinmiştir. Dr. Kompleks özellikle dersiyle bağlantılı diğer derslerde görülen teoremlere veya sonuçlara vurgu yaparken Dr. Uzay’ın böyle bir ayırım yapmadığı söylenebilir. Dr. Uzay:

“Öğrencilere de özellikle böyle ispatın mihenk taşları vardır, ispatın önemli bir noktası vardır. Bunu nerede kullanacağımızı bizim lemma dediğimiz kısım onu muhakkak anlatıyorum. İçinde sık kullanılan lemması olan ispatları seviyorum. Genelde o tür ispatlar.. Çünkü şundan bu çıkmıştı deyip öğrenci kendisi de bağlam kurabiliyor. Benim esas yapmak istediğim bu. Bağlantısı yüksek olan ispatları seviyorum.”

Dr. Kompleks ve Dr. Uzay’ın açıklamalarına bakarak ispatın, ilişkilendirme becerisine katkı yapması gerektiğini düşündükleri söylenebilir. Ayrıca daha spesifik olarak farklı teoremlerle bağlantı kurmaya vurgu yapmışlardır. Benzer şekilde, Dr. Türev de ilişkilendirmeden bahsederek “Öğrencilerin ilişkilendirmesini sağlayacak, düşündürecek

şekilde olmalı.” demiştir ancak bu ifadesini açıklamamıştır. Burada ispatın kendi içinde ilişkilendirme yapmaktan mı, ders içi başka bir kavram veya teoremle ilişkilendirmekten mi veya başka derslerle ilişkilendirmekten mi bahsettiğini belirtmemiştir. 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda), Dr. Uzak bu özelliği ispatta olması gereken özellikler içinde ilk sırada tercih etmiştir. Dr. Kompleks ve Dr. Türev ikinci sırada, Dr. Vektör ve Dr. Öklid ise üçüncü sırada tercih etmişlerdir. Dr. Uzak diğer teoremlerle bağlantılı olmaya ek olarak derste yapılacak bir ispatın çok uzun olmaması gerektiğine de değinmiştir:

“Bir kere böyle çok uzun ispatlar yapmamak lazım. Öğrenciler olaydan kopuyor. Özellikle küçük sınıflarda zor oluyor açıkçası. Yani mesela bir sayfalık bir ispat çok uzun bir ispat öğrenciler için. İspatın bir kere akıl yürütme kısmını iyi görmesi gerekiyor.”

Benzer şekilde, Dr. Soyut ve Dr. Topoloji de yapılacak ispatın uzun olmaması gerektiğine vurgu yapmışlardır. Bu özellik 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) yalnızca D. Uzak tarafından üçüncü sırada ve Dr. Kompleks tarafından beşinci sırada tercih edilmiştir. Dr. Soyut da ispatın uzunluğuna değinerek öğrencinin seviyesine de uygun olması gerektiğini belirtmiştir:

“Derste ispatı yapılabilecek uzunlukta olmalı. Mesela Fermat’ın son teoreminin ispatını derste yapalım desek mümkün değil. Öğrencinin seviyesine uygun şeyler içerebilmeli. O konuyla ilgili ana teoremlerse, herkesin bilmesi gereken...Mesela Soyut Cebirde birim eleman adına bir teorem söyleyin desek çoğu kişinin aklına ‘birim eleman varsa tektir’ gelir. Dolayısıyla o kavramın en akla gelen teoremlerindense o kullanılabilir. Öğrencinin anlayabileceği, verilenler isteneler, hangi yöntemleri kullanabiliyoruz net bir şekilde ifade edebileceğimiz türden ispatları ana çatıdaki ispatları özellikle vermeye çalışıyoruz. Çok ayrıntılı olanları ifade edip geçebiliyoruz ya da ödev olarak bırakabiliyoruz.”

Dr. Soyut ayrıca ispatın nerede anlatılacağına göre özelliklerinin değişebileceğini de eklemiştir. Bu açıklama öğrenci seviyesine vurgu yaptığı şeklinde anlaşılmaktadır. İspatın açıklayıcı olmasına değinen öğretim elemanları Dr. Öklid ve Dr. Vektör’dür. 3. mülakatta da (seçme-sıralama formunda) bu özellik hem Dr. Vektör hem de Dr. Öklid tarafından birinci sırada tercih edilmiştir. Dr. Öklid *“İkna edici olması gerekir. İkna edici iken de açıklayıcı tarafının da olması gerekir. İkisi de olmalı.”* diyerek hem ikna edici hem de açıklayıcı olmasına değinirken Dr. Vektör açıklayıcı olmasının yanı sıra notasyon bakımından doğru olması, dersin kapsamına uyması, öğrencinin seviyesine uygun olması ve yalın olması gerektiğini de şu şekilde açıklamıştır:

“Bir kere ispat ifadeyi kapsamlı bir şekilde açıklamalı. Öğrencinin anlayabileceği şekilde yalın olmalı. Notasyonları doğru olmalı. Ve amaç dışı olmamalı. Yani mesela analizle ilgili bir ispat yapıyorum. Topolojiyle ilgili bir ispatın mantığı var mı? ...Yani bir teoremin birkaç ispatı olabilir ama öğrencilere daha uygun olan seçilmeli ki öğrenci anlayabilsin. Bir de ispatı ne amaçla kullandığımız önemli. İspatı veriyoruz ama hiçbir yerde kullanmıyoruz uygulaması da yok. O zaman o da havada kalıyor. Konuyla ilgili, konuyu besleyen, konuya hakimiyetimizi arttıran, konuyu daha iyi anlamamızı sağlayan ispatları seçmemiz lazım. Konuyla ilgili bir sürü ispat bulunabilir ama onları kullanmıyorsan o zaman onları vermenin bir anlamı da yok.”

İspatların matematik dili bakımından doğru olması gerektiği Dr. Kompleks ve Dr. Vektör tarafından 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) birinci sırada tercih edilmiştir. İspatın yalın olması ifadesi ise Dr. Kompleks haricinde tercih edilmemiştir. Derste yapılacak bir ispatın yalın ve matematik dili bakımından doğru olması gerektiğini ilk mülakatta dile getiren bir başka öğretim elemanı da Dr. Topoloji'dir. Dr. Topoloji aynı zamanda ispatta bir mantık sırası olması ve ispatın estetik görünmesi gerektiğini de belirtmiştir:

“Mantık sırasının ispat yaparken izlenmesi çok önemli. Matematik dilinin doğru kullanılması çok önemli. Burada bana kalırsa iş savsaklanıyor yani matematikçiler açısından. Ama biz dilimizi doğru kullanamazsak karşı tarafa nasıl anlatacağız bir de işin o tarafı var. Bizim rol model olmamız gerekiyor öğrencilere. Varsa alternatif yollar ve en estetik ve anlaşılır biçimde ifade edilmesi yani dediğim gibi işi kargacık burgacık anlatıp işte matematik böyle büyük bir şeydir falan demek değil net bir şekilde en basit en kısa en sade ve estetik biçimde nasıl aktarabilirim diye bakmak lazım.”

İspatta mantık sırasının izlenmiş olması 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) ilk sıralarda ve öğretim elemanlarının çoğu tarafından tercih edilen özelliklerden biri olmuştur. Dr. Türev ilk mülakatta buna yönelik bir açıklama yapmamış olmasına rağmen bu özelliği ilk sırada tercih etmiştir. Diğer tercih ise ikinci ve üçüncü sıradaki tercihlerdir. Dr. Topoloji'nin ispatın 'kargacık burgacık' biçimde yazılmaması yani estetik görünmesi gerektiği ifadesi de yalnızca Dr. Kompleks tarafından ilk sırada tercih edilmiştir.

Özetle, Tablo 18'de 3. mülakat (seçme-sıralama formu) sonuçlarına bakıldığında öğretim elemanlarının derste kullanacakları ispatların özelliklerine yönelik öncelikli tercihlerinin farklı özellikler üzerine yoğunlaştığı söylenebilir. Bununla birlikte, en sık tercih edilen özellikler “dersin kapsamına uygun olması”, “mantık sırası izlenmiş olması”,

“ilişkilendirme yapmayı sağlaması”, “öğrenci seviyesine uygun olması” ve matematik dili bakımından doğru olması”dır.

4.2.6. Sunulmayan ispatlara ilişkin bulgular

“Öğretim elemanlarının derste verdikleri tüm teoremleri ispatlayıp ispatlamadıkları ve bazı ispatları yapmama gerekçeleri nelerdir?” sorusu bu alt problem olarak ele alınmıştır. Bu sorunun yanıtı ile öğretim elemanlarının pedagojik açıdan nelere önem verdikleri ve hangi koşullar altında bazı teoremleri derste ispatlamadıkları incelenmiştir. Bu alt problemin incelenmesi ilk mülakatta sorulan “*Derste verdiğiniz tüm teoremleri ispatlar mısınız? Yapmıyorsanız buna nasıl karar verirsiniz?*” ve “*Derste ispat yapmanızı neler etkiler?*” sorularına verdikleri yanıtların ve ders video gözlemlerinin analizleri ile yapılmıştır. Öncelikle ilk mülakatta bu soruya verdikleri cevaplar analizi edilmiştir. Ardından video kayıtlarından derste ispatını yapmadıkları ama verdikleri teoremler belirlenmiş ve bu durumda öğrencilere yaptıkları açıklamalar incelenmiştir. Bu analizlerin ardından derste ispat yapmadıkları bazı durumların izahına ihtiyaç duyulması sebebiyle bu alt probleme özel olarak öğretim elemanları ile tekrar görüşülmüş ve hangi amaçla ve hangi açıklamayla ispatı yapmadıklarına yönelik belirlenen kategoriler onlara sunulmuştur ayrıca belirlenemeyen kategoriler hakkında da fikirleri alınmıştır. Katılımcıların hepsi belirlenen kategorileri onaylamıştır ve belirlenemeyen kategorilerin de belirlenmesine katkı sağlamışlardır. Tablo 19 öğretim elemanlarının gözlenen dersleri boyunca yapmadığı ispat sayılarını göstermektedir.

Tablo 19

Ders video gözlemlerinde ispatı yapılmayan teorem sayıları

Ders ve öğretim elemanı	İspatı yapılmayan teorem/önerme sayısı
Analiz III (Dr. Kompleks)	2
Kompleks Analiz (Dr. Kompleks)	2
Analiz I (Dr. Vektör)	1
Analitik Geometri I (Dr. Vektör)	0
Analiz II (Dr. Türev)	2
Cebire Giriş (Dr. Soyut)	10
Geometri (Dr. Öklid)	7
Lineer Cebir I (Dr. Uzay)	2
Topoloji (Dr. Topoloji)	7

4.2.6.1. Öğretim elemanlarının 1. Mülakattaki yanıtlarının analizi

Analizler sonucunda öğretim elemanlarının bazı teoremlerin ispatlarını neden yapmadıklarına yönelik toplam 14 farklı gerekçe sundukları gözlenmiştir. Bu gerekçeler 4 kategori altında toplanmıştır. Tablo 20 kategorileri ve örnek ifadeleri göstermektedir.

Tablo 20

Öğretim elemanlarının derste bazı ispatları sunmamalarına yönelik görüşleri

Kategori	Öğretim elemanlarının mülakattaki ifadelerinden örnekler
Öğretim elemanının öğrenciler hakkındaki görüşlerinden kaynaklanan nedenler	“İspatta öğrencilerin bilmediği konular varsa o ispatı yapmıyorum.” (Dr. Soyut) “Öğrencileri aşan karışık ispatları yapmıyorum” (Dr. Kompleks)
Ölçme-değerlendirme kaynaklı nedenler	“Öğrenciler ispat yapabilecek hale geldiyseler doğru şekilde yapabilecekler mi diye ödev olarak veriyorum” (Dr. Topoloji)
Pragmatik nedenler	“İspatın bilinmesinin faydası yoksa yapmıyorum.” (Dr. Soyut) “Benzer teoremlerin ispatını öncekileri pekiştirsinler diye bırakıyorum.” (Dr. Vektör)
Diğer Nedenler	“Kitaplarda bulunan ve her yerde olan bazı ispatları yapmıyorum” (Dr. Öklid) “Zaman sıkıntısı varsa ispatı yapmıyorum.” (Dr. Kompleks)

4.2.6.1.1. Ölçme değerlendirme kaynaklı nedenler

Derste ispatı sunmamalarının gerekçesi olarak öğrencilerin bilgilerini ölçme amacını içeren yanıtlar bu kategori altındaki değerlendirilmiştir. Örneğin, Dr. Topoloji ve Dr. Soyut ödev vererek öğrencilerin anlayıp anlamadığını değerlendirdiklerine yönelik açıklamada bulunmuşlardır. Bazı teoremlerin ispatlarını öğrencilere ödev olarak verdiğini belirten Dr. Topoloji bu uygulamasının pedagojik gerekçelerini şu şekilde açıklamıştır:

“Zaman zaman ödevlerde bırakıyorum ve her çalışma yaprağının arkasından da mesela 2-3 tane soru bırakıyorum o soruları da bir hafta içerisinde gruplar halinde yapıyorlar bunlar yine ispata dayalı şeyler oluyor onları da hafta içerisinde getirip burada bire bir çalışarak yani 2 kişi 3 kişi neyse onlar yaptıklarını yazıyorlar hem onların matematik dilini doğru kullanıp kullanmadıklarını.. Bazen alt küme ile elemanıdır işareti bile çok büyük önem arz ediyor. Onların farkında değiller. Onları düzeltmiş oluyoruz. Hem de doğru düşünebilmişler mi birbir bir şeyler anlatmak bazen daha faydalı oluyor.”

Benzer şekilde, Dr. Soyut da öğrencilerde altyapı oluşturulduktan ve benzerleri sınıfta yapıldıktan sonra bazı ispatların ödev olarak verilebileceğini ve bunun onları geliştireceğini belirtmiştir. Bununla birlikte, Dr. Topoloji'nin aksine Dr. Soyut öğrencilere bırakılan ispatın kontrol edileceğinden söz etmemiştir:

“Belki de bu nerede ders anlattığınıza göre de değişebilir. O yüzden de alt yapı oluştuktan sonra belli bazı ispatlar derste yapıldıktan sonra onunla alakalı olacak bazı ispatlar ödev olarak verilebilir bence de yani kendilerine de bırakılabilir. Bunun da onları geliştireceğine inanıyorum tabiki. Mesela benim yine derste ödev verdiğim ispatlardan biri grubun merkezleştiricisi. Soyut cebirde grubun merkezini tanımlıyoruz. Ne olduğunu anlatmaya çalışıyoruz. Ve onun ispatını da derste öğrencilerle birlikte yapıyoruz. Daha sonra bir elemanın merkezleştiricisi geldiği zaman onun ispatını genellikle öğrencilere ödev veriyorum. Çünkü merkez tanımına çok benzer kavramlar var. Ama özünde ondan farklı. Dolayısıyla öğrenci derste yaptığı o ispatı gerçekten anlamış mı? Eğer o elemanın merkezleştiricisi tanımını evde kendisi yaparsa hem diğerini pekiştirebilir hem yeni şeyle diğerinin arasındaki farkı daha iyi kavrayabilir. Dolayısıyla faydalı bir etkinlik olur.”

İkinci mülakatta öğrencilere sorumluluk vermeden bunu nasıl “ödev” olarak adlandırdığı sorulduğunda bu şekilde bıraktığı bazı ispatları sınavda sorabildiğini belirtmiştir. Böylece öğrencilerin ödevleri yapıp yapmadığını sınavda kontrol etmiş olduğunu söylemiştir.

4.2.6.1.2. Pragmatik nedenler

Öğrencilerin faydasına olacak şekilde ispatı sunma sunmamama kararlarının alındığına yönelik açıklamalar, bu kategori altında değerlendirilmiştir. Dr. Uzay haricinde öğretim elemanlarının hepsi ispatı sunmamalarının bir nedeni olarak bu kategorideki gerekçeleri göstermişlerdir. Örneğin, Dr. Soyut tüm ispatları sunmadığını belirtmiş ve bu soruyu cevaplamaya öncelikle hangi ispatların derste yapılması gerektiğini söyleyerek başlamıştır. Dr. Soyut, öğrenciye faydasının olmayacağını düşündüğü ispatları anlatmadığını belirtmiştir.

“Hepsini ispatlamıyoruz. Çok böyle ana arter, o kavram için öğrencilerin fikir sahibi olması gereken o kavramın beylik ispatlarından olan ve herkesçe bilinen veya ispatı sınıfta yapmaya uygun olanlar olabilir. Mesela Soyut Cebirde birim eleman adına bir teorem söyleyin desek çoğu kişinin aklına ‘Birim eleman varsa tektir’ gelir. Dolayısıyla o kavramın en akla gelen teoremlerindense o

kullanılabilir. Bazen öyle bir ifadedir ki belki ispatını yapabilmek için alt yapıda başka şeyleri o an için ispatının bilinmesinin öğrencilere faydasının olmayacağını düşündüğümüz şeyler olabilir. Orada ispat yapılmayabilir.”

Dr. Soyut’a benzer bir açıklamayı Dr. Vektör de yapmış ve bazı ispatların artık derste gösterilmesine gerek olmadığını düşündüğünü söylemiştir:

“Mesela Analiz III’te yakınsaklık kriterleri var. Ben bunların ispatlarını vermem. Direk formül olarak veririm çünkü çok önemli de değil. Uygulamaya yönelik bir şeydir o. Yani öğrencinin şu kriterlere göre yakınsak veya ıraksak olduğunu bilmesi benim için yeterli. İspatını bilmesine gerek yok...Biraz güncellemeyle de alakalı. Mesela diferansiyel denklemlerde bazı ispatlar var. Bakıyorsunuz artık miladı geçmiş. Fen fakültelerinde bile göstermiyorlar. Bırakmışlar. O alanla ilgili bir şey yok. O yüzden yapmıyorum. Ben şöyle bakarım. Konuyu anlatırken hangi şekilde işlersem öğrenciye faydalı olur diye bakarım.”

Mülakatta öğretim elemanlarına diğer bölümlerdeki uygulamaları özel olarak sorulmamasına rağmen katılımcılardan dördü (Dr. Vektör, Dr. Topoloji, Dr. Soyut ve Dr. Türev) çeşitli bölümlerde girdikleri derslerde de bazı ispatları yapmadıklarını söylemişlerdir. Bu öğretim elemanları farklı bölümlerdeki (biyoloji, kimya, bilgisayar öğretmenliği, sınıf öğretmenliği vb.) matematik derslerini de vermektedirler. Bu nedenle, bu kategorideki cevaplar, matematik öğretmenliğini ilköğretim-ortaöğretim olarak ayıranlar ve matematik eğitimi dışındaki diğer bölümleri kastedenler olarak iki kısımda incelenebilir. Örneğin, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünü örnek veren Dr. Vektör gerekçesini şu şekilde açıklamıştır:

“Mesela ben L’Hospital’in ispatını eskiden yapmıyordum. Ama ispatı kafasında oluşsun dedim ve bir ara yaptım. Çünkü ortaöğretime giriyordum. Ama sonra ilköğretime girdim. Burada gerek yok dedim.”

Dr. Vektör, mülakatta bu açıklamasının nedeni sorulduğunda ilköğretim matematik öğretmenlerinin bu ispatla edinecekleri bilgiyi derslerinde öğrencilerine öğretim yaparken kullanmayacaklarını gerekçe olarak göstermiştir. Dr. Vektör’ün bu açıklaması dışındaki açıklamalarında “diğer bölümler” ibaresini biyoloji, kimya, bilgisayar öğretmenliği, sınıf öğretmenliği, fen bilgisi öğretmenliği vb. bölümler için kullandığı görülmüştür:

“Mesela fen bilgisi öğretmenliğinde matematiğe giriyorum. Orada diyelim diferansiyelin ispatı ya da ortalama değer teoreminin ispatı karşıma çıktı. Yan branşlarda ispat çok fazla şey yapılmıyor. Hem akılda kalmıyor hem de birinci

derecede önemli olmuyor. Daha çok fen bilgisine türevin fiziksel uygulamaları... Onlar daha çok ilgilerini çekiyor. Dolayısıyla ben Fen Bilgisi ve Fizik öğretmenliğine girdiğim zaman Analizde onların ispatları yerine bunlara ağırlık vermiştim. Daha faydalı oldu. İspatı unutuyor öğrenci. Ezberlemeye çalışıyor. Her sınıfın şeyi farklı amacı da farklı. Bundan dolayı bazen es geçiyorum.”

Diğer üç öğretim elemanının “diğer bölümler” ibaresini matematik eğitimi dışındaki bölümler için kullandıkları görülmüştür. Örneğin, Dr. Topoloji lise matematik öğretmen adaylarına topoloji dersinde tüm ispatları sunduğunu ama diğer bölümlerde verdiği derslerde bu uygulamasının çeşitlendiğini belirtmiştir. Diğer bölümlerde teoreme yönelik uygulamalar yaparken öğrencinin o teoremin ispatının mantığını kullanması gerekiyorsa yani problemi çözmesine yardımcı olacaksa ispatı yaptığını belirtmiştir. Aynı zamanda diğer bölümlerde verdiği olasılık istatistik dersinde formel şekilde ispatları yapmasalar da ispatla ilgili açıklamalar yaptığını da eklemiştir:

“Topolojide tüm teoremleri ispatlıyoruz. Zaten teorik tabanlı bir ders. Gerek ben gerekse süreç içinde yavaş yavaş öğrenciye doğru ama ispatlanmamış teori kalmıyor. Birkaç belki kabul vs. dışında peki bir şey bırakmıyorum. Ama diğer bölümlerdeki uygulama gerekli olan diyelim ki rehberlikçilerde o teoremin uygulaması onun için önemlidir artık. Neden niçinini anlatmam gerekiyorsa işte hani o uygulamayı yaparken de o ispatın mantığını kullanacaksa o zaman ispatı gösterip problemlerinizi de bu ispat yoluyla çözebilirsiniz şeklinde gösteriyorum. Ama sadece uygulama onun için yeterliyse teoriyi verip uygulamasına geçiyoruz. Olasılık istatistikte genelde ispatlamaya çalışıyoruz. Yazıya dökmek bile en azından sözlü olarak bunun nereden geldiğini... Dış bölümlerde bu işi yapıyorsam ve onlara sadece uygulaması yeterli olacaksa neden niçin detayına girmem çok gerekmiyorsa onu orada bırakıyorum ama neden niçini o problemleri çözmesine yardımcı olacaksa ispat mutlaka yaparım.”

Benzer şekilde öğrencinin okuduğu bölüm farkından bahseden Dr. Soyut diğer bölümlerde çok önemli olduğunu düşündüğü ve ispatını bilmesi faydalı olan teoremleri ispatladığını söylemiştir. Dr. Soyut mühendislik fakültelerindeki öğrencilerin ihtiyaçlarına yönelik olarak ispat sunduğunu da belirtmiştir:

“Bu nerde ders anlattığınıza göre de değişebilir. Çok önemli gördüğümüz, bunun ispatını da bilmesi konuyu hatırlaması açısından çok faydalı olur diye düşündüğümüz şeyleri o bölümlerde de yapıyoruz. Bazen de mühendislik fakültesinde girdiğim oldu. Orada bu tür şeyler anlatmıştık. Programa göre ne

istiyor bizden mühendislikte çok da ispat istemiyorlar onlar kendi alanlarında kullanacakları matematik nedir ona hâkim olmak istiyorlar. Onlara daha çok kavramsal olarak ne olduğunu anlatıyoruz. İspatlarına çok değinmeyebiliyoruz.”

Dr. Türev ise matematik öğretmenliği ve diğer bölümleri ayırarak gerekçelerini söylemiştir. Burada, Dr. Türev’in ispatları bilmesi gerekenler ve gerekmeyenler şeklinde bir ayırım yaptığı söylenebilir:

“Eğer ben ortaöğretim matematik öğretmenliğinde değil de bilgisayar öğretmenliğinde ya da kimya öğretmenliğinde aynı dersi yürütüyor olsaydım belki ispatlardan bir derece taviz verebilirdim ama matematik öğretmeni olacak kişilerin o yolları bilmesi gerektiğini düşünüyorum.”

Dr. Öklid, Dr. Kompleks, Dr. Soyut ve Dr. Vektör daha önce anlattıkları ispatlara benzer ispatlar olduğunda bilgilerini pekiştirmeleri veya öğrenip öğrenmediklerini değerlendirmeleri açısından o ispatları anlatmadıklarını ve öğrencilere bıraktıklarını söylemişlerdir. Dr. Vektör ve Dr. Soyut haricinde diğer katılımcılar ‘benzer ispat’ ifadesi ile ne kastettiklerini yönelik bir örnek vermemişlerdir. Dr. Soyut ve Dr. Vektör’ün açıklamalarından benzer adımlar içeren ispatlardan (örn., özellik doğrulama ispatları) veya benzer teorem ifadelerinden (örn., ‘varsa tektir’) bahsettikleri söylenebilir. Bir önceki bölümde bahsedildiği gibi Dr. Soyut, benzer ispatları öğrencilere ödev olarak bıraktığını belirtmiştir. Dr. Vektör bu konudaki tercihini şu şekilde açıklamıştır:

“İspatlar spesifik olduğu için genelde bırakmıyorum. Ama benzer bir ispat yaptıysam mesela onu siz yapın diyebilirim. Mesela Fermat Teoremini ben maksimum olmasını kabul ederek yaparım minimum olmasını da siz benzer şekilde yapabilirsiniz derim. Zaten aynı notasyonları işleyecek. Bir tek maksimum olma koşulu yerine minimum olma koşulu olacak. Yani benzer olduğu zaman pekiştirsün diye bırakabilirim.”

4.2.6.1.3. Öğretim elemanının öğrenciler hakkındaki görüşlerinden kaynaklanan nedenler

İspatı yapıp yapmama kararının öğrencilerin akademik bilgilerine dayandırıldığı yanıtlar bu kategori altında toplanmıştır. Öğretim elemanlarından beşi ispatı yapmama kararlarının öğrenciye bağlı olarak değiştiği yönünde görüş beyan etmiştir. Dr. Soyut bazı ispatların altyapı gerektirmesi ve öğrencilerin henüz gerekli altyapıya sahip olmaması nedeniyle o ispatları vermediğini söylemiştir. Bunun yanı sıra çok ayrıntılı olan ispatları da formel bir anlatım yapmadan sadece açıklama yaparak geçtiğini de eklemiştir:

“Hepsini ispatlamıyoruz. Bazen öyle bir ifadedir ki belki ispatını yapabilmek için alt yapıda başka şeyleri bilmeye gerek vardır. Orada belki ispat yapılamayabilir. Öğrencinin anlayabileceği, verilenler isteneler, hangi yöntemleri kullanabiliyoruz net bir şekilde ifade edebileceğimiz türden ispatları ana çatıdaki ispatları özellikle vermeye çalışıyoruz. Çok ayrıntılı olanları ifade edip geçebiliyoruz ya da ödev olarak bırakabiliyoruz.”

Dr. Soyut’a benzer şekilde, Dr. Kompleks de öğrencilerin kapasitesini aştığını düşündüğü karmaşık ispatları anlatmadığını belirtmiştir. Bununla birlikte mutlaka anlattığı ispatlardan da bahsetmiştir.

“Hayır hepsini ispatlamıyorum. İspat çok karışık ise öğrencinin boyunu aşar diye düşünüyorum. Çok kullanışlı bir formül veya sonuç çıkıyorsa o teoremi ispatlarım. Tabi öğrencinin seviyesi önemli. Öğrencinin seviyesi yüksekse zaten mecburen kendinizde ispatları yapma gereği duyuyorsunuz. Ama şimdi öğrencinin seviyesi çok düşükse anlatıyorsunuz zaten söylüyorsunuz zaten onların dikkatleri dağılıyor dinlemiyorlar da. Zaten birçok öğrencinin de ispat aslında dikkatini çekmeyebiliyor. Hemen örneğini ne zaman vereceksiniz. Uygulamasını ne zaman yapacaksınız tarzında şeyler gelebiliyor.”

Öğrencinin alt yapısının ispatların sunulmasında önemli bir etken olduğunu belirten bir başka öğretim elemanı da Dr. Topoloji’dir. Dr. Topoloji hem matematik öğretmen adaylarında hem de diğer bölümlerde alt yapı bilgisinin önemine değinmiştir:

“Genel olarak konuşacak olursak bir kere öğrencinin alt yapı bilgilerinin yeterli olup olmamasına bakmak lazım yani alt yapı bilgisi yeterli değilse o teoremi ispatlaması gereken alt teoremleri bilmiyorsa veya tanımları bilmiyorsa notasyonları bilmiyorsa zaten o teoremi ispatlamanın bir anlamı olmaz. Kendi kendimize konuşmak olur. Bölüm önemli dediğim gibi matematikçilere genellikle ispat yolu şeklinde gidiyoruz. İspat metotlarını biliyor olması lazım yani onu bilmeden yine farkında olmadan sadece yapıları geçirir.”

Dr. Soyut, Dr. Türev ve Dr. Vektör diğer bölümlerde ispat sunmama tercihlerine yönelik açıklama yaparken o bölümlerdeki öğrencilerin matematik altyapılarının matematik öğretmenliği öğrencilerine göre daha yetersiz olduğunu da belirtmişlerdir. Bu durumun o bölümlerde ispatların yapılmasını etkilediğini de eklemişlerdir. Örneğin, Dr. Vektör:

“Fen bilgisi, sınıf, bilgisayar öğretmenliklerinin de analiz derslerine girdim. Şimdi matematik öğretmenliğinde yaptığım ispatı onlarda da yapıyorsam bazen verim alınmıyor. Ya da türevin geometrik anlamının fiziksel uygulamalarını da matematik öğretmenliğinde işlersem olmaz. Burada tabi ben sınıf olarak bakarım. Sınıfın seviyesine bakarım. Sınıfı iyi tanımaya bakarım. Eğer ispata yatkınlarsa ben de biraz zorlarım. İspatların dozunu arttırırım. (yani verebileceğim her ispatı veririm) Ama anlama düzeyleri çok iyi değilse mesela yaz okulunda karşılaştığımız gibiyse onlara ispat yapmam. Çok faydalı olacağını düşünmüyorum. Çünkü dersten verim alınmaz. Bu dersi en iyi nasıl verirsem verimli olur diye en azından temelini nasıl veririm ona bakarım.”

Araştırmacı: *“Verimlilik ifadesinden kastınız nedir?”*

Dr. Vektör: *“Öğrencinin öğrenmesidir. Ben öğrenci başarısını verim olarak görmem. Yani öğrencinin ne kadar anladığı ve ona ne kadar katkı yaptığına bakarım.”*

Araştırmacı: *“Yani anlamasının uygulamalarla daha mümkün olduğunu düşünüyorsunuz?”*

Dr. Vektör: *“Kesinlikle. Uygulamalarla pekişmesi gerekiyor. Teorik ne kadar anlatsan uygulama az olduğunda bu sefer öğrencinin kafasında pekişmiyor.”*

4.2.6.1.4. Diğer nedenler

Diğer kategoriler altında değerlendirilemeyen açıklamalar bu kategori altında ele alınmıştır. Örneğin, Dr. Kompleks ders saatlerinin/sürelerinin tüm ispatları anlatmalarına imkan vermediğini zamanı yetiştirebilmek için bazı ispatları sunmadığını belirtmiştir. Dr. Vektör bazı ispatların diğer derslerde anlatıldığını bildiği için sunmadığını belirtmiştir:

“Mesela eskiden genel matematiğe girerken bir fonksiyonun tersi varsa tektir teoremini ispatını yaptım ama sonra soyut matematikte de yapıldığını gördüm o yüzden artık gerek yok dedim.”

Dr. Uzay ispatı anlatmama kararı verirken ilgili teoremin daha önce sunduğu teoremlerle ispatlanıp ispatlanmadığına baktığını belirtmiştir:

“Ben başlangıçtakileri kendim yaparım. Ama arada bazı teoremler bir öncekilerle ispatlanabiliyorsa onları öğrencilere bırakıyorum genellikle. Doğal olarak bir ispatı yapıp yapmayacağıma bu şekilde karar veriyorum.”

Dr. Öklid ise öğrencilerin ispata kolay ulaşabilir olmasına göre karar verdiğini belirtmiştir:

“Menelous teoremini vermedim mesela. Çok sıklıkla kullanılan kitaplarda rahatlıkla bulunabilecek ya da kendilerinin daha kolay ispatlayabilecekleri, etrafta çok bulunan teoremlerin ispatları üzerinde çok durmadım. Nasıl olsa yapamamaları da kaynak olarak çok rahatlıkla ulaşabilecekleri ispatlar.”

4.2.6.2. Öğretim elemanlarının ispat sunmama durumlarına yönelik gözlem ve ikinci mülakat sonuçları

Tablo 19 gözlem yapılan derslerde ispatı formel olarak sunulmayan teorem ya da önerme ifadelerinin sayısını içermektedir. Buna göre bu çalışmadaki tüm öğretim elemanlarının derslerinde bazı ispatları sunmayı erteledikleri ya da formel olarak sunmamayı tercih ettikleri gözlenmiştir. Bu bölümdeki analizler ise öğretim elemanlarının bu tercihlerini öğrencilerine nasıl açıkladıklarını incelemeyi amaçlamaktadır. Tablo 21 öğretim elemanlarının gözlem yapılan dersleri boyunca bu tercihlerini öğrencilerine nasıl açıkladıklarına yönelik kategorileri ve bu ifadeyi kaç kez tekrarladıklarını göstermektedir.

Tablo 21

Derste ispatın sunulmadığı durumlarda öğretim elemanlarının yaptıkları açıklamalar

Kategoriler	Alt kategoriler	Öğretim Elemanı	Sıklık
“Bu ispat size ödev...”	“...kendiniz ispatlamaya çalışın”	Dr. Uzey	1
		Dr. Türev	2
		Dr. Topoloji	4
		Dr. Soyut	6
		Dr. Vektör	1
	“...kitaptan araştırıp bulup okuyun/inceleyn”	Dr. Kompleks	1
		Dr. Soyut	2
“Bu ispatı size bırakıyorum çünkü...”	“...kolay”	Dr. Öklid	4
	“...ben benzerini yaptım bunu da siz yapabilirsiniz”	Dr. Öklid	3
		Dr. Uzey	2
	“... zaman kısıtlı”	Dr. Topoloji	1
Diğer açıklamalar	“İspat sevimli değil”	Dr. Kompleks	1
	“İspatı sonra yapacağım”	Dr. Topoloji	2
Açıklama yok		Dr. Kompleks	2
		Dr. Soyut	3

Teoremin ispatının ödev olarak verildiğinin söylenmesi ve ispatın kolay olması nedeniyle öğrencilere bırakılması gibi nedenler öğretim elemanlarının derste ispatı yapmamalarının nedenlerini öğrencilere açıklarken kullandıkları temel argümanlar olarak ön plana çıkmıştır. Bu bağlamda aşağıda bazı derslerden bu argümanlara örnek olabilecek kesitler ve bu kesitlerle ilgili öğretim elemanlarının ikinci mülakattaki yorumları sunulmuştur.

4.2.6.2.1. İspatın ödev olarak verilmesi

Derste teorem ya da önerme olarak verilen ifadelerin ispatının ödev olarak verildiğinin söylendiği durumlar ispatı sunmama tercihinin açıklanmasında en sık karşılaşılan gerekçeler olmuştur. Bu kategorideki açıklamalar da kendi içinde alt kategorilere ayrılmaktadır. Öğretim elemanları bazı ifadelerin ispatının yapılmasını isterken bazılarının ise sadece incelenmesini istediklerini belirtmişlerdir.

Dr. Türev, türev kurallarını ispatladıkları bir dersin sonunda, kalan iki kuralın ispatını ödev olarak verdiğini söylemiştir. Hatta bu iki kuralın diğer kurallarla açıklanabileceğini o yüzden ispatlamaya bile gerek olmadığını şu şekilde belirtmiştir:

“Son iki özelliği de yazacağım onların da ispatı ödev. Bölümün türevini aslında ispatlamaya bile gerek yok neden? Bölüm ne demektir zaten. $f(x)$ çarpı bir bölü $g(x)$ fonksiyonu. Aslında ispatı otomatikman çıkıyor. Diğerinde de aslında ispatını yapmaya gerek yok ama vereceğim. 1 bölü $f(x)$ mesela. Onu niye vermeye gerek yok?(...) Bunun ispatı ödeviniz. Bunların ikisini de türev tanımından ispatlarını istiyorum. Bu iki ispatı defterinizde göreceğim. Perşembe günü kontrol edeceğim ona göre.”

Dr. Türev, verdiği bu ödevi bir sonraki derste öğrencileri tahtaya kaldırarak onlara yaptırmıştır. İkinci mülakatta bu uygulamasının gerekçesi sorulduğunda şu açıklamayı yapmıştır:

“Türev formülleri artık tabi şöyle çok fazla yaptığımız için bir süre sonra öğrenciler biliyorlar zaten türev tanımından hareketle gidiyorlar dolayısıyla bazılarını ödev vermişimdir. Biraz da evde uğraşınlar diye. Bölümün ve tersinin türevi. Çünkü çarpımı yaptığım için onlar da çarpım mantığından da çıkabiliyor. Onları da yapabilir diye. Ama mesela bazen şunu da yapıyorum mesela ortalama değer teoremi nedir ne değildir araştırın gelin diyebiliyorum derse. Genelde zaten bu tür araştırma verdiğiniz zaman öğrenciler yine yapamadan geliyor. Çünkü yaptığı şey kitaptakini doğrudan yazmak oluyor ve hiçbir şey anlamıyorlar. Dersin

başında onu ele alıyorum diyorum ki işte ne demek istiyor nasıl yaptınız falan... Hiçbiri anlatamıyor. Bu şeyden kaynaklanıyor hani öğrenci de ödev deyince doğrudan yazıp getirme olarak anlıyor. Sınıfta sonra yaptığımızda anlıyor ispatı. Aslında yazılanları açıklayıcı bir hale getiriyoruz. Biraz daha görselleştiriyoruz o zaman anlıyor. Dolayısıyla ispatı ödev verdiğinizde öncesinde genellikle çocuk kitaptan yazıp getiriyor. Ama sınıfta yaptığınız bir şeyin devamı niteliğinde bir ispatta uğraşıyorlar. Biraz da şey bakıyorum ben hani kolayına kaçıyor çocuk çünkü burada sınıfta yaptığı var. Ve ona benzetmeye çalıştığı için aslında daha az düşünmesini gerektiriyor. Ama önceden onu araştırması demek anlayıp yazması ya da sunması demek ondan kaçıyorlar genelde.”

Bu açıklamasıyla Dr. Türev’in hangi türde ispatları ödev vermeyi tercih ettiğini de açıkladığı söylenebilir. Dr. Uzey lineer dönüşüm ile ilgili bir dizi teorem (verilen bir dönüşümün lineer dönüşüm olup olmamasıyla ilgili) ispatladıktan sonra bu teoremlere benzer bir teorem yazmıştır. Teorem ve ispatla ilgili bazı açıklamalar yaptıktan sonra öğrencilere bu teoremin nasıl ispatlanabileceğini sormuştur. Ardından ispatı ödev olarak verdiğini söylemiştir. Bu ispatı ödev vermesine gerekçe olarak da ödevi verirken “*çünkü gösterdiğim her şey var*” demiştir. Yani ispat için gereken bilgileri onlara öğretmiş olmasını, ispatı onlara ödev olarak vermesine gerekçe olarak gördüğü söylenebilir. Bu uygulamasının sorulduğu ikinci mülakatta da Dr. Uzey derste ki yorumunu tekrarlamıştır.

Öğrencilere verdiği ödevleri onlarla ders dışında gruplar halinde çalışarak kontrol eden ve onlara dönütler veren Dr. Topoloji, derste bir ispatı ödev olarak verdiğini söyleyip şu açıklamayı yapmıştır:

“ τ topolojik yapısı için aksiyomlar varken acaba K ailesi için de benzer aksiyomlar söyleyebilir miyiz? Teorem size bunu söylüyor (çalışma kağıdında teoremi okur ve açıklar) şimdi o zaman buna biraz kafa yorun. De morgan kurallarına geri dönüp bakın. Benim verdiğim problemlerde zaten kullanmanız gerekiyordu. Bunu kendi kendinize bir sonraki derse kadar ispatlamaya çalışın. Notasyonel olarak yazarak. Çünkü hayalden bir şeyler olduğunu söylüyorsunuz ama ifade etmede sıkıntınız var. Onları da yavaş yavaş giderelim. Hem kendiniz yazın bir de birlikte yazalım karşılaştıralım.”

Aslında burada Dr. Topoloji derste “ödev” ifadesini kullanmamıştır. Fakat ilk derste, dersin işleyişi ve öğretimiyle ilgili planlarını anlatırken bu ifadelerin ödev anlamına geldiğini belirtmiştir. Ek olarak, yapılan ikinci mülakatta bu ispatı ödev olarak verdiğini fakat öğrencilerin kendisine gelip göstermeleri gereken ödevlerden olmadığını söylemiştir:

“Bunu ders sonunda vermiştim. Çünkü ispatı biraz uzunca ve salim kafa gerektiriyor. Topolojik yapı olma aksiyomlarını zaten o zamana kadar bol miktarda kullanıyoruz. Benzer mantığı kapalılar için ötelemelerini, genişletmelerini istiyorum. Dolayısıyla hem zaman kalmadı hem salim kafayla yapalım, biraz da kendileri öncelikle düşünsünler diye bir sonraki derse kadar bunun için süre verdik. Bir sonraki dersin başında da birlikte yaptık. Ama bir önceki ödev türünden değil. Çünkü bir sonraki derse tamamlanacak olan ödevler var onlar sadece düşünün diye bıraktıklarım. Bir de haftalık olanlar var, yani yine gelip bana yaptıklarını gösterip bir sonraki hafta derste yaptığımız ödevler var.”

Dr. Topoloji bu örnek haricinde üç teoremin ispatını daha öğrencilere ödev olarak bırakmıştır. İkinci mülakatta da bu ödevlerin haftalık ödev türünden olduğunu teyit etmiştir. Daha sonraki derslerde de bu ödevleri derste çözdüğü gözlemlenmiştir. İkinci mülakatta bu uygulamasını tekrar ayrıntılı olarak anlatmıştır:

“Her çalışma yaprağının sonunda 2-3 er tane o çalışma yaprağı ile ilgili sorular bırakıyorum. Onlar da ya ispat ya da uygulama şeklinde. Her biri için de birer hafta süre veriyorum. Önce kendileri alt yapıları olduğu için uğraşsınlar ondan sonraki hafta gruplar halinde bana getirip çözümlerini yazılı ve sözlü olarak göstermelerini istiyorum. Yani hem matematik notasyonlarla ilgili kullandıkları varsa yanlışları birebir giderebilmek hem de yaptıkları şeyi aslında kitaplarda bulamayacakları şeyler değil ama orada bakarak veya kendileri oluşturdukları teorem ispatını mantık silsilesinde yani ispat gereğinde yaptılar mı yapmadılar mı veya varsa nerede eksik birebir giderebilmek amaçlı. Sonra da 1-1,5 hafta sonra derste onların hepsini birlikte çözüyoruz. Hatta mümkünse onları kaldırıp tekrar yaptıklarını anlattırıyorum.”

Bir grubun alt grup olması için gerek yeter iki şartı içeren teoremi ve ispatı derste sunan Dr. Soyut ise bu işlemi tek aşamada yapmayı sağlayan teoremin ispatının ilkine benzer olduğunu belirterek bu ispatı ödev olarak verdiğini söylemiştir. Dr. Vektör ise integral uygulamaları çözerken verdiği bir kardiodin uzunluğunun bulunmasını istemiştir ve öğrencilere bu soruda kullanacakları formülü yazmıştır. Yazdığı formülün çıkarılışının ispatını ödev olarak verdiğini belirtmiştir. Ancak neden ödev olarak verdiğine yönelik bir açıklamada bulunmamıştır. İspata yönelik ipucu vererek konuya devam etmiştir. Bu uygulaması haricinde izlenen dersleri (Analiz ve Analitik Geometri) boyunca verdiği tüm teoremleri ispatladığı görülen Dr. Vektör mülakatta bu durumu şu şekilde yorumlamıştır:

“Mesela nedir...onların yerine kutupsal koordinatlar cinsinden yerlerine yazıp formülü türetiyorsun. O yüzden bunu öğrencinin kendisinin yapması lazım. Mesela ortalama değer teoreminin ispatını istemem. Kendim yaparım. Ama bir bilgi kullanılarak yapılan ispatlarda öğrenci biraz uğraşsın isterim. Çünkü kendisi yapamıyor mu, yapar. Daha önce kullandıklarını uygulayarak yapılan ispatlar hep demişimdir ki evde bir bakın. Ödev veriyorum da uygulamaya yönelik ödev veriyorum. Maksimum olmasını veriyorum minimum olmasını onlara bırakıyorum. Zaten baka baka gitse kendisi çıkarır. Ama onun haricinde bırakmıyorum. Araştırma yok öğrencilerde ya o yüzden.”

Bölüm 4.2.6.1.1’de bahsedildiği gibi ilk mülakatta yalnızca iki öğretim üyesi ispat yapmaya yönelik ödevler verdiğini belirtmiştir. Bununla birlikte ders gözlemlerinde beş öğretim üyesinin öğrencilere ispat yapma ödevleri verdiğini görülmüştür.

İspatın ödev olarak verilmesine ikinci örnek ise istenen ispatların ders kitaplarından bulunup incelenmesidir. Dr. Kompleks, bir uygulamada kullanacakları bilgi için bir teoremi ispatsız olarak vereceğini ve ispatını incelemeleri için de öğrencileri bir kitaba yönlendireceğini belirtmiştir. Teoremi yazdıktan sonra da altına kitabın adını ve yazarını yazmıştır.

“İspatsız olarak size bir teorem vereceğim. İspatı için sizi bir kaynağa yönlendireceğim. Oradan alırsınız zaten her yerde var.”

Öğrencilerden kitaptan ispat incelemesi yapmasını isteyen bir diğer öğretim elemanı olan Dr. Soyut ise derste açıkladığı iki teoremin ispatını bulup incelemelerini istediğini belirtmiştir. Bu bağlamda, öğretim elemanlarının mesleki deneyimleri sonucunda, hangi ispatları öğrencilerin yapabileceğini ve hangilerini yapamayacaklarını bilmelerinin, bazen öğrencilerden ispatı yapmalarını bazen de ispatı kitaptan incelemelerini isteme tercihlerinde önemli rol oynadığı söylenebilir.

4.2.6.2.2. İspatın öğrencilere (ödev şartı olmaksızın) bırakılması

Bu kategoride ispatların oluşturulması ödevlerde olduğu gibi öğrencilere bırakılmakla birlikte açıklamalarda “ödev” ibaresi kullanılmadığından ayrı bir kategori olarak kabul edilmiştir. Öğretim elemanları teoremi/önermeyi sunduktan veya açıkladıktan sonra ispatı öğrencilere bıraktığını belirtmişler ve bu durum için çeşitli gerekçeler sunmuşlardır.

İlk mülakat analizinde belirtildiği gibi, Dr. Öklid geometri dersinde bazı ispatlarda öğrencilerden ispatın yapılışı ile ilgili fikirlerini aldıktan veya ispatla ilgili kısa bir açıklama

yaptıktan sonra öğrendikleriyle bu ispatı yapmanın onlar için *kolay* olduğunu belirterek yapılışını öğrencilere bıraktığını açıklamıştır. İspatı öğrencilere bıraktığı durumlarda çoğunlukla benzer açıklamayı yaptığı da söylenebilir. Ayrıca o ispatların kitaplarda mevcut olduğunu belirtmiştir.

Dr. Uzey bazı dönüşümler vererek bu dönüşümlerin iç çarpım olup olmadığını gösterilmesine yönelik ispatlamalar yaptıktan sonra matrislerde verdiği bir iç çarpımın gösterilmesini öğrencilere bıraktığını ve bu ispatın benzerlerini yaptığını belirtmiştir. Uygulamalarıyla ilgili açıklamalar yaptığı ikinci mülakatta bu durumu bir önceki bölümdeki ifadesine (“*çünkü gösterdiğim her şey var*”) paralel olacak şekilde şöyle açıklamıştır:

“Yani bu ispatla ilgili şeyleri ben daha öncesinde çok yaptım. Onlara da örnek olsun diye birkaç tane özellikle çok sık kullanılan örnekleri bırakıyorum. Çünkü gösterdiğim her şey var, yani ipuçları vererek onlara bırakıyorum ki kendi gelişimlerini tamamlasınlar. Her türlü ipucunu veriyorum zaten ben onlara. Öğrencilerin bunu gerçekleştirebilecek seviyeye geldiklerine inanıyorsam onlara bırakıyorum ki bu inancın bende oluşması lazım. Yani yeterince örneğin onda oluşması lazım. O zaman karar veriyorum.”

Aynı şekilde, Dr. Öklid de ispatını sunmadığı 7 teoremden üçünde, benzer ispatlar yaptığını ve bu sebeple ispatı öğrencilere bıraktığını söylemiştir. Örneğin “*Paralel doğrularda kesenin oluşturduğu iç ters açılar eşittir*” teoreminin ispatından sonra “*Paralel doğrularda kesenin oluşturduğu dış ters açılar eşittir*” teoreminin ispatı da benzer şekilde yapılır diye o ispatı öğrencilere bıraktığını belirtmiştir.

Dr. Topoloji ise zamanın kısıtlı olduğunu ve gerekli açıklamaları yaptığını belirterek ispatı öğrencilere bıraktığını söylemiştir:

“Şimdi tanımda genişletilmiş reel sayılar kümesini görüyoruz. Bunların üzerinde de topolojik yapılar tabi ki oluşturulabilir. Ama zaman açısından bunların incelenmesini size bırakıyorum. Açıklamasını altta geniş bir şekilde size verdim. Şimdilik bunları geçelim. Siz yapmaya çalışın”

4.2.6.2.3. Diğer açıklamalar

Dr. Kompleks Analiz III dersinde Lagrange çarpanları yönteminden bahsederken öğrencilerden birini tahtaya çağırmıştır. Bazı teoremler yazacaklarını ama ispatlarını vermeyeceğini çünkü ispatın sevimli olmadığını söylemiştir.

“Şimdi biri gelsin ispatsız bazı bağıntılar yazacağız. Esas biz bu bağıntıların uygulamalarını yapacağız. Lagrange çarpanları yöntemi diye bir yöntemimiz var. Yöntemi açıklıyoruz ispat vermiyoruz. Sevimli bir ispatımız yok.”

Bu açıklaması ile ne kastettiği mülakatta sorulduğunda ise bu ispatın öğrencilere karmaşık gelebileceğini düşündüğünü belirtmiştir. Bu açıklama Hersh (1993) de bahsi geçen ‘sıkıcı/meşakkatli ispatlar (tedious proofs)’ ifadesine paralel olarak düşünülebilir.

Dr. Topoloji dersin sonuna doğru, bir teoremin ispatını daha sonra yapacağını belirterek sunmamıştır. Bu duruma sebep olarak zamanın yetmemesi olduğunu söylemiştir.

“Bitirme projeleri için anket yapmak isteyen öğrencilerimiz var onlara yardımcı olabilirsiniz sevinirim. Onlar gelene kadar şuradaki ifadede ne anlıyoruz önce onu çıkaralım ispatını daha sonra yaparız.”

Bu ispatı öğrencilere bırakmamış olması ve daha sonra yapacağını söylemiş olması nedeniyle farklı kabul edilmiş ve ayrı kategori altında değerlendirilmiştir. Benzer şekilde daha sonra yapacağını belirttiği bir başka teorem ise “Kapalı kümelerden oluşan bir ailenin herhangi bir birleşiminin kapalı küme olmayabileceğini gösteriniz” ifadesidir. Burada öğrencilere “Bu ispatı şimdi yapmayacağız bu soruyu yanıtlayabilecek bir örnek daha sonra karşımıza gelecek” demiştir. İkinci mülakatta bu durumu şu şekilde açıklamıştır:

“Buradaki alt yapı bilgileri ve tanıdıkları topolojik yapılar henüz bu soruyu çözmeye yeterli olmadığı için ben demiştim ki bunu bir sonraki çalışma kağıdında bir kısım topolojileri gördükten sonra geriye döneceğiz ondan sonra çözeceğiz demiştim.”

4.2.6.2.4. Açıklama yok

Dr. Kompleks, Analiz III dersinde teoremi yazmadan önce başlığı yazarken ispatı yapmayacağını söylemiş ancak bu kararının nedeniyle ilgili öğrencilere bir açıklama yapmamıştır:

“Cauchy integral formülünü ispatsız vereyim size. Teorem olarak vereyim ispatını yapmayayım. Bakın şu haldeki durumlar için Cauchy şunu yapın diyor...”

Teoremi yazdıktan sonra, Dr. Kompleks “*şimdi problemi bu formülle çözeceğiz*” demiş ve problemi çözmüştür. Bu açıklamaya bakarak onun, öğrencilerin teoremi bilmesinin yeterli olduğunu düşündüğü ve teoremin uygulamasını daha önemli bulduğu söylenebilir. Benzer şekilde, *Cauchy Türev formülüne* yönelik verdiği teoremin ardından ispattan hiç söz etmeyen Dr. Kompleks teoremin sonucunun önemli olduğuna vurgu yapmıştır. Teoremle ilgili açıklama yaptıktan sonra ispattan hiç söz etmeden *Sonuç olarak şuna bakın. Vermiş olduğum şu sonuç çok önemli* (tahtaya bahsettiği sonucu yazar). *Şimdi bunun bir uygulamasını yapalım.*” diyerek uygulamaya geçmiştir.

Uygulamalarıyla ilgili açıklamalar yaptığı ikinci mülakatta ise yukarıdaki bu iki durumu şu şekilde açıklamıştır:

“Kompleks Analiz dersinin süresi kısaltıldığı için vermedim. Geçmiş yıllarda Cauchy türev formülünün ispatını verirdim. Bu Kompleks Analizin temel formüllerinden. Ama zaman yani 5 saatlik dersi 3 saate indirmişler. İki dönemi teke indirmişler. Ayrıca Eğitim Fakültesinde eğitim-öğretim yöntemlerine yöneldiğimizden ispata girmeyebiliyoruz. Hem de bu teoremin uygulaması ve sonucu daha önemli.”

Yani Dr. Kompleks’in hem zaman kısıtlaması nedeniyle hem de eğitim fakültesinin gerektirdiklerini göz önünde bulundurarak bu iki ispatı sunmadığı söylenebilir.

Dr. Soyut bir dersin sonuna doğru vermiş olduğu bir teorem ile ilgili açıklamalar yaptıktan, öğrencilerle tartıştıktan ve onlara teoremle ilgili örnekler verdikten sonra ispattan hiç bahsetmeden dersi bitirdiğini belirtmiş ve bir sonraki derste de ispatını sunmamıştır. Benzer tercihler, iki teoremi ‘not’ veya ‘sonuç’ başlığı altında verdiği durumlarda da gözlenmiştir. İkinci mülakatta bu durumu şu şekilde açıklamıştır:

“Soyut Cebir dersinde birçok şey (ifade, örnek vb.) ispata muhtaç ama bu şekilde hep teorem ispat olarak verdiğimizde öğrenci boğulabiliyor. Ben de öğrenciyi yormamak adına ve ilgili ifadenin ispatına ihtiyacı da yoksa yani direk o ifadeden yararlanacaksa ispatını vermeden onu not olarak veriyorum.”

Özetle, öğretim elemanlarının öğrencilerle ilgili görüşlerinden (öğrencilerin bilgi alt yapısı vb.), öğrencilerin bilgisini ölçme amaçlarından (ödev vb.), öğrencilerin ispatı bilip bilmemelerinin faydasından, zaman kısıtından, ispatın ulaşılabilirliğinden vb. nedenlerle ispatı sunmamayı uygun buldukları söylenebilir. Derste ispatı sunmamayı tercih ettikleri bazı durumlarda bu nedenleri de içeren açıklama yaptıkları ama bazı durumlarda da hiç açıklama yapmadıkları gözlemlenmiştir.

4.3. Üçüncü Alt Probleme İlişkin Bulgular (Öğrenciye bakış)

Öğretim elemanlarının ispat bağlamında öğrenciye yönelik görüşleri üçüncü alt problemi oluşturmaktadır. Bu alt problem ile ispat anlatım esnasında öğrenci katılımına ve ispatın öğrenci tarafından anlaşılmasına, öğrencilerin ispat okumalarına, yapmalarına, ve ispatlamada yaşadıkları güçlüklerle ilişkin düşünceleri ve uygulamalarının anlaşılması amaçlanmıştır. Bu alt problemin incelenmesi, ilk mülakatta sorulan;

“Sizce öğrencilerin ispatı anlaması demek ne demektir?”,

“Bir öğrencinin yaptığınız bir ispatı anlayıp anlamadığını nasıl anlarsınız?”

“Öğrencilerin ispatı anlamalarına yardımcı olmak için neler yaptığınızı belirtiniz.”,

“Öğrencilerinizin ispatlamada yaşadığını düşündüğünüz güçlükler ve bu güçlüklerin nedenleri nelerdir?” ve *“Bu güçlüklerin giderilmesi için ne önerirsiniz?”*

“Öğrencilerden yayımlanmış ispatları incelemelerini istemeli miyiz? Neden?”

“İspat yaparken öğrencilerinizin derse katılımını beklemek gerekir mi? Katılım bekliyorsanız bunun için neler yaparsınız?”,

“Öğrencilerden ispat yapmalarını istemeli miyiz? Neden?”

Sorularına verilen yanıtların ve ders video gözlemlerinin analizi ile yapılmıştır. Bu sorular başlıklar halinde aşağıda ele alınmıştır.

4.3.1. “Sizce öğrencilerin ispatı anlaması demek ne demektir?” sorusuna ilişkin bulgular

Sunulan bir ispatı anlamamanın öğretim elemanlarının bakış açısıyla ne demek olduğunu öğrenmek amacıyla öğretim elemanlarına mülakatta bu soru yöneltilmiştir. Tablo 22 öğretim elemanlarının bu soruya vermiş oldukları yanıtları ve bu yanıtları önem sırasına göre nasıl sıraladıklarını göstermektedir.

Tablo 22

Bir öğrencinin ispatı anlamasının göstergelerinin neler olduğuna yönelik görüşler

Öğrencinin ispatı anladığını gösteren eylemler	Dr. Kompleks	Dr. Vektör	Dr. Türev	Dr. Soyut	Dr. Öklid	Dr. Topoloji	Dr. Uzay
<i>İspatı anlatabilmesi</i>	3*		3*	1	2	3*	1*
<i>Diğer bilgileriyle o ispat arasında ilişki kurabilmesi</i>	1	3	2*	3	3	2	3
<i>Benzer bir teoremi ispatlayabilmesi</i>	2	1	4	2	1*	1*	4
<i>Aynı teoremi farklı yollarla ispatlayabilmesi</i>		2	4		1*	4	
<i>İspattaki kavramlara ve notasyonlara hâkim ve verilen isteneni oluşturabilmesi</i>	1	2*	1	4*		5	2
<i>(Bazı ispatlarda) şaşkınlık ve hayranlık hissetmesi</i>	4			5*			5

Tablo 22’de (*) işareti öğretim elemanlarından hangilerinin ilk mülakatta bu kategorideki görüşleri ifade ettiğini göstermektedir. Numaralar ise 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) öğretim elemanlarının bu görüşlerden hangilerini seçtiklerini ve bu görüşleri kendilerince hangi sırada öncelikli gördüklerini göstermektedir. Renklendirme, görsellik açısından numaralara göre yapılmıştır. Örneğin, dört öğretim elemanı (Dr. Kompleks, Dr. Türev, Dr. Topoloji ve Dr. Uzay), öğrencinin sunulan ispatı anlatabilmesinin onun ispatı anladığını gösterdiğini ilk mülakatta dile getirmişlerdir. 3. mülakatta ise bu görüş Dr. Uzay ve Dr. Soyut tarafından birinci sırada, Dr. Öklid tarafından ikinci sırada, Dr. Türev, Dr. Kompleks ve Dr. Topoloji tarafından üçüncü sırada tercih edilmiştir.

Dr. Kompleks öğrencinin sunulan ispatı özetleyerek tekrar anlatmasının onun anladığını gösterdiğini belirtmiştir:

“Hadi bakalım şunu bir kısaca özetle bakalım nasıl başladık, nasıl geldik diye sorarım. Anladıysa ve anladığını ifade ettiyse tamam.”

Dr. Uzay da öğrencinin hem ispatı anlatması hem de ispata yönelik örnekler vermesi gerektiğini de eklemiştir:

“Öğrencinin ispatı anlaması demek bu ispatı hangi yöntemle neden yaptığımızı anlatabilmesi ve bu ispatı yaptıktan sonra buna (teoreme) uygun doğru örnek ve karşı örnek verebilmesidir.”

Dr. Türev bir öğrencinin başkalarına öğrendiği ispatı anlatabilmesinin o ispatı anladığını göstereceğini belirtmiş ve ispatı başka bilgilerle ilişkilendirebilmesinin de anlamının göstergesi olabileceğini eklemiştir:

“İspatı anlaması onu başkalarına anlatabilmesidir. Anlamadığın bir şeyi anlatabırsın zaten. Anladığını göstermenin en güzel yolu anlatmak ki bunlar da öğretmen olacakları için bu yönün önemli olduğunu düşünüyorum. Aynı zamanda anlayan bir öğrenci onlar arasındaki ilişkiyi kurabilir. Tabi ki şunu da görüyoruz derslerde ispatı doğrudan yine de ezberleyen öğrenciler var. Yani siz sınıf içinde ne yaparsanız yapın onları ezberlemeye çalışanlar var. Ama ezberleyen öğrenci zaten o ispatı uygulayamaz. Ve farklı şeylerle ilişkilendiremez.”

3. mülakat (seçme-sıralama formu) sonuçlarına göre, öğrencinin diğer bilgileriyle ispat arasında ilişki kurabilmesinin ispatı anladığı anlamına geldiği görüşüne tüm öğretim elemanlarının katıldığı söylenebilir. Bu görüşü Dr. Kompleks birinci sırada tercih ederken Dr. Türev ve Dr. Topoloji ikinci sırada, Dr. Vektör, Dr. Uzay, Dr. Soyut ve Dr. Öklid üçüncü sırada tercih etmişlerdir. Benzer şekilde Dr. Topoloji de öğrencinin hem ispatı kendi cümleleriyle anlatabilmesi hem de benzer teoremleri ispatlayabilmesinin o ispatı anladığını göstereceğini belirtmiştir:

“Bir öğrenciye baktığımda zaten gözlerindeki soru işaretlerinden anlaşılıyor kimin neyi anlayıp anlamadığı ama bunun yanı sıra bunu kendi diliyle ifade edebiliyorsa bu önemli. Koşulları, yani oradan motomod yazım şekliyle okumak değil de kendi diliyle anlatabiliyorsa bu önemli koşulları anladı ve üzerine ne yapıldığını anlatabildiyse hangi yöntemi kullandığımızı söyleyebildiyse anlamıştır. Benzeri teoremleri acaba benzeri yolla fark edip ispatlayabiliyor mu diye bakıyoruz mesela birbirine çok benzer birkaç teorem varsa birisinde yaptığımız ispatı anladık demesine rağmen diğerinde yapamıyorsa bunu orada bir sıkıntı var demektir.”

Dr. Öklid, önceki bölümlerde de yer verildiği gibi hem mülakatta hem de ders gözlemlerinde gözlenmiştir ki öncelikle öğrencilerin ispatı yapmaya çalışmasını istemekte ve onları beklemektedir. Bu soruya da buna paralel bir cevap veren Dr. Öklid, aynı

zamanda sunulan ispatın benzerini yapmasının veya aynı teoremi farklı yolla ispatlamasının öğrencinin anladığını göstereceğini de belirtmiştir:

“Kendileri yaptıkları zaman anladıklarının kanıtıdır diye düşünüyorum. İspatı anlaması o ispatın benzerini kendisinin yapması ya da ispatı farklı bir yolla oluşturabilmesidir.”

Burada Dr. Öklid’in ispatın benzerini yapabilmesi görüşü, Dr. Topoloji’de olduğu gibi benzer bir teoremi ispatlayabilmesi kategorisinde ele alınmıştır. “Öğrencinin ispatı anlaması demek benzer bir teoremi ispatlayabilmesi demektir” görüşü Dr.Öklid, Dr. Vektör ve Dr. Topoloji tarafından birinci sırada, Dr. Kompleks tarafından ikinci sırada, Dr. Soyut tarafından üçüncü sırada, Dr. Türev ve Dr. Uzay tarafından ise dördüncü sırada tercih edilmiştir. “Aynı teoremi farklı yollarla ispatlayabilmenin öğrencinin sunulan ispatı anladığını” göstereceği görüşü ise yine Dr. Öklid tarafından birinci sırada, Dr. Vektör tarafından ikinci sırada, Dr. Türev ve Dr. Topoloji tarafından ise dördüncü sırada tercih edilmiştir.

Öğrencinin anladığını gösterdiği iddia edilen göstergelerden bir diğeri ise öğrencinin ‘ispattaki kavramlara ve notasyonlara hâkim olması ve verilen-isteneni oluşturabilmesidir. Dr. Soyut, bu görüşünü soyut matematik dersinden de örnek vererek açıklamıştır:

“İspatı anlaması demek bir defa bu ispat ve teorem ne ile ilgiliyse, teorem neyi anlatıyor, verilenlerden haberdar mı? Hükümden haberdar mı? Bunu göstermesi gerekiyor mu? Onu söylemek lazım. Hatta bazen derste bile söyleyebiliriz, filanca bağıntının tam sayıların, doğal sayıların kuruluşunu sağlayan denklik bağıntıları var diyelim ki o denklik bağıntısının yansıma özelliğini gösteriyor mu göstermiyor mu? bunu öğrencilere soruyoruz, bunu gösterecekler bir şekilde, bu da bir ispat olarak düşünülebilir. En azından o soruya uygun olarak yansıma özelliği var mı yok mu için neyi göstermen lazım onu yazabilmesi lazım öğrencinin. Öğrenci onu yazamıyorsa zaten ispatı yapamaz. Bu da neyi göstermesi gerektiğini anlayabiliyor olduğunu, mesela bağıntıyı notasyonu okuyabilmiş mi, bağıntı ona ne diyor, bağıntının elemanları hangi sıralı ikililerden oluşmuş gibi. Hatta öğrencilere takılırım hep bakın bu satırı yazarsanız sınavda 1-2 puan kaparsınız diye. Dolayısıyla ispatı anlaması demek göstermesi gereken şeyi yazabilmesi demek.”

Dr. Soyut’a benzer şekilde Dr. Vektör de bir ekleme yaparak öğrencilerin aynı zamanda teoremdaki notasyonlara ve kavramlara da hâkim olması gerektiğini söylemiştir:

“Teoremlerle ilgili verilen bütün notasyonların olumlu yönde kullanıldığını anlayabiliyorsa, teoremin ifadesindeki bütün kavramlara hakimse ve ne verilmiş ne isteniyor onu zihninde oluşturabiliyorsa anlamış demektir. Mesela analizin temel teoreminde $F'(x) = f(x)$ olacak. Onu yaparken türevin tanımını kullanarak adım adım oluşturmasını biliyorsa orada sürekliliği kullanıyorsa ortalama değer teoremini kullanıyorsa o zaman ne verilmiş ne isteniyor anlıyorsa zaten ezberlemesine gere de kalmaz.”

“İspattaki kavramlara ve notasyonlara hâkim ve verilen isteneni oluşturabilmesi” görüşü “ispatı yapabilme” kategorisi olmasına rağmen ayrı bir kategori olarak ele alınmıştır. Bunun nedeni, bu görüşün ispatın bitirilmesi gerektiğine yönelik bir gereklilik içermemesidir. Yani, öğrencinin teoremdaki/ispattaki kavramları, notasyonları, verilenleri ve istenenleri açıklaması ve ispatta ulaşması gereken şeyi yazabilmesinin anladığını göstermesi bakımından yeterli olduğunu düşündükleri söylenebilir. Bu görüş, Dr. Kompleks ve Dr. Türev tarafından birinci sırada, Dr. Vektör ve Dr. Uzay tarafından ikinci sırada, Dr. Soyut dördüncü sırada ve Dr. Topoloji tarafından ise beşinci sırada tercih edilmiştir.

Son olarak bir sonraki bölümde bir öğrencinin bir ispatı anlayıp anlamadığını nereden anlarsınız sorusuna verdiği cevabı bu soruda da tekrarlayan Dr. Soyut bazı ispatlarda öğrencinin şaşkınlık ve hayranlık hissetmesinin anladığını gösterdiğine değinmiştir (bkz. 4.3.2). 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) ise bu görüş, Dr. Kompleks tarafından dördüncü sırada, Dr. Soyut ve Dr. Uzay tarafından ise beşinci sırada tercih edilmiştir.

Özetle, öğretim elemanlarının, öğrencinin sunulan ispatı anlayıp anlamadığını ölçüt olarak daha baskın olarak kabul ettikleri davranışların sırasıyla, benzer bir teoremi ispatlayabilmesi, diğer bilgileriyle o ispat arasında ilişki kurabilmesi ve ispatı anlatabilmesi olduğu söylenebilir.

4.3.2. “Bir öğrencinin yaptığınız bir ispatı anlayıp anlamadığını nasıl anlarsınız?” sorusuna ilişkin bulgular

Öğrencilerin ispatı anlayıp anlamadığını öğretim elemanlarının ispat esnasında nasıl anladıklarını öğrenmek için mülakatta “Öğrencilerinizin ispatı anlayıp anlamadığını nasıl anlarsınız?” sorusu sorulmuştur. Öğretim elemanlarının bu soruya verdiği yanıtlar Tablo 23 de verilmiştir.

Tablo 23

Öğretim elemanlarının, öğrencilerin derste sunulan bir ispatı anlayıp anlamadığını nasıl belirlediklerine yönelik görüşleri

Öğrencilerin anlayıp anlamadığını belirleme yolları	Öğretim Elemanı
<i>Sorular sorarım</i>	Dr. Türev, Dr. Topoloji, Dr. Kompleks, Dr. Vektör, Dr. Uzay
<i>Gözlerinden anlaşıyor</i>	Dr. Türev, Dr. Topoloji
<i>Tepkisiz şekilde dinlemelerinden anlarım</i>	Dr. Soyut
<i>Öğrencinin sorduğu sorulardan anlaşıyor</i>	Dr. Soyut, Dr. Öklid

Öğrencilerin anlayıp anlamadığını anlamak için öğretim elemanlarının çoğunlukla kullandığı yöntemin soru sormak olduğu söylenebilir. Buna ek olarak, öğrencilerle kurulan göz teması, öğrencilerin sordukları sorular ve ispatlara verdikleri tepkilerin de ispatın anlaşılıp anlaşılmadığının ölçülmesinde kullanıldığı aktarılmıştır. Dr. Türev, Dr. Topoloji, Dr. Kompleks, Dr. Uzay ve Dr. Vektör öğrencilerin ispatı anlayıp anlamadığını değerlendirmek için sorular sorduklarını belirtmişlerdir. Dr. Kompleks bir önceki bölümde söylediği gibi öğrencilerden ispatı özetlemelerini istediğini aktarmıştır:

“Hadi bakalım şunu bir kısaca anlat özetle bakalım nasıl başladık nasıl geldik? diye sorarım. İspatın içinden bir geçiş sorarım. Ya da ‘Anladın mı?’ diye sorarım. Fazla da üzerinde durmam.”

Dr. Topoloji ise *“Teoreme dair sorular sormak. İspat mantığının kullanılabileceği bir problem sorarım”* diyerek hem teoreme hem ispata yönelik değerlendirme yaptığını belirtmiştir. Dr. Vektör, öğrencinin ispatlama sürecini özetleyebilmesinin bir ölçüt olduğunu söylemiştir:

“Öğrenciye teoremin ifadesinde verilenleri nasıl bulursun diye sorduğumda öğrenci hocam şöyle oluşturacağız böyle adım adım gidebiliriz diyebiliyorsa zaten onun uygulamasını da çok rahat yapabilir.”

Dr. Uzay ise ispat içinde kritik gördüğü noktaları sorduğunu ve aldığı cevaplara göre gerekirse o noktaları tekrar anlattığını aktarmıştır:

“Çocuklara ilk bunu sorduktan, anlattıktan sonra ispat içerisinde kritik noktaları soruyorum onlara. O kritik noktalar özellikle ispatın gidişindeki kritik noktaları... Anlayamadıkları yeri gördüğüm zaman onlara diyorum ki hadi ispatı en baştan bu

şekilde yürümeliyiz diye gidiyoruz. Yoksa en baştan kendim anlatmıyorum sadece. Hem soruyorum hem sorduğum cevaba göre onlardan gelen cevaplara göre ayarlamasını yapıyorum. Bu cevabı onlardan alamadığım zaman o kritik noktada onlara tekrar dönüyorum.”

Dr. Türev de sorular sorduğunu aynı zamanda da bazı öğrencilerin anlamadıklarını bakışlarıyla belli ettiğini aktarmıştır:

“Ders anında aktif sorular sorarak ve her defasında herkesin anlayıp anlamadığını teyit ederim. Kimi öğrenci vardır ki çok belli eder kendini zaten bakışlarıyla. Öyle şeyleri hissettiğimde tekrarlarım ve özellikle o kişiye sorular sormaya çalışırım. Yani öğrencilerin sürekli düşüncelerini almak aslında onların anlayıp anlamadıklarını anlık olarak göstermiş oluyor.”

Öğrencilerin bakışlarını ölçüt olarak kabul eden bir başka öğretim elemanı da Dr. Topolojidir. Dr. Topoloji *“Bir öğrenciye baktığımda zaten gözlerindeki soru işaretlerinden anlaşılıyor kimin neyi anlayıp anlamadığı.”* demiştir. Dr. Topoloji bu açıklamasına paralel olacak şekilde sınıfta ispat anlatımında yaşadığı bir durumda bir ispatı tahtada yaparken öğrencilere bakmış ve onların anlamadıklarını anlayarak ispat anlatımına örnek vererek devam etmiştir (bkz. 4.2.2.2.3)

Dr. Soyut ise öğrencilerin bazı ispatlara verdikleri tepkilerden anlayıp anlamadıklarını anladığını aktarmıştır:

“Mesela başta örnek verdiğim fonksiyon ispatında biz orada ifade ettiğimizde öğrencide bir şaşkınlık ve hayranlık ifadesi olmuyorsa bilin ki o ispatı anlamamıştır. Çünkü o ispatı gerçekten anlayan bir adam ‘Ya bu nerden aklına gelmiş!’ demesi lazım. Ama bakıyorsunuz ispatı yaptınız çok tepkisiz bir şekilde dinlediler bazı ispatlarda ama hepsinde değil. Mesela birim eleman varsa tektir teoreminin ispatında insanda bu hissi uyandırmaz. Ama bazı öyle enteresan ispatlar var ki öyle hissettirir.”

Dr. Soyut buna ek olarak öğrencilerin sordukları sorulardan da anlamadıkları noktaları fark ettiğini de eklemiştir:

“‘Ama’lı cümleler çok kritik ve bazen öyle sorular soruyor ki öğrencinin o konuda bir şey anlamadığını anlıyorsunuz. Sorduğu sorular bunu belli ediyor.”

Dr. Soyut’tan biraz farklı olarak Dr. Öklid öğrencilerin anlamadıkları yerleri kendilerinin sorduklarını bunun haricinde kendisinin bir şey yapmadığını belirtmiştir:

“Soru sorulursa anlaşılmayan adımlar konusunda öyle anlarım. Hem bunlar zaten soru sorma konusunda çekinen öğrenciler değil. Sordukları zaman anlayıp anlamadıklarını anlarım.”

Özetle, öğretim elemanları sorular sorarak, öğrencilerin bakışlarını, tepkilerini (mimiklerini) takip ederek ve onların sorularını analiz ederek anlayıp anlamadıklarına yönelik fikir sahibi olduklarını belirtmişlerdir.

4.3.3. “Öğrencilerin ispatı anlamalarına yardımcı olmak için neler yaptığınızı belirtiniz.” sorusuna ilişkin bulgular

Öğretim elemanlarının ispat esnasında öğrencilerin ispatı anlamalarına yardımcı olmak adına neler yaptıklarını öğrenmek amacıyla mülakatta “*Öğrencilerin ispatı anlamasına yardımcı olmak için neler yaparsınız*” sorusu yöneltilmiştir. Ders gözlemleri ile öğretim elemanlarının yaptıkları uygulamalar görülmüş olmasına rağmen bu sorunun sorulma nedeni, hem öğrencilerin ispatı anlaması adına hangi uygulamaları vurguladıkları hem de dersleri sınırlı sayıda izlendiğinden (varsa) gözlemlenmeyen diğer uygulamalarını da öğrenmektir. Tablo 24, öğretim elemanlarının bu soruya verdikleri yanıtlara yönelik kategorileri ve alt kategorileri göstermektedir.

Tablo 24

Öğrencilerin ispatı anlamalarına yardımcı olmanın amaçlandığı uygulamalar

Kategori	Alt kategori	Öğretim Elemanı
Öğrencileri sürece dahil etmek	Soru sormak	Dr. Türev, Dr. Topoloji Dr. Kompleks, Dr. Soyut, Dr. Öklid, Dr. Uzak
	Öğrencilerden yapmalarını istemek	Dr. Öklid, Dr. Topoloji
Açıklamalar yapmak	Şekil-grafik çizmek	Dr. Uzak, Dr. Soyut, Dr. Vektör, Dr. Türev, Dr. Topoloji, Dr. Öklid
	İspat yöntemini vurgulamak	Dr. Vektör, Dr. Kompleks, Dr. Soyut
	Hipotezi ve hükmü vurgulamak	Dr. Kompleks, Dr. Soyut, Dr. Uzak, Dr. Öklid
	Ön bilgileri hatırlatmak	Dr. Soyut, Dr. Topoloji, Dr. Vektör
	Diğer derslerle ilişkilendirme yapmak	Dr. Soyut, Dr. Uzak
	İspatın adımlarını vurgulamak	Dr. Uzak, Dr. Vektör, Dr. Türev
	Örnek vermek	Dr. Türev, Dr. Topoloji, Dr. Uzak

“Öğrencilerin ispatı anlamasına yardımcı olmak için neler yaparsınız?” sorusuna verilen yanıtlar temel olarak iki kategori altında toplanmıştır. Bu kategorilerden ilki öğrencileri sürece dahil ederek onların anlamasına yardımcı olmaktır. Bu kategorideki açıklamalar bölüm 4.3.6’da öğrencilerin derse katılımının beklenmesine yönelik yanıtlarına atıflar içerdiğinden buna yönelik açıklamalarına orada yer verilmiştir (bkz. Bölüm 4.3.6). İkinci kategori ise “öğrencilerin ispatı anlamasına yardımcı olacağı düşünülen açıklamalar yapma” olarak belirlenmiştir. Bu açıklamalar; örnek verme, şekil-grafik çizme, teknik açıklamalar yapma, ilişkilendirme yapma, ön bilgileri hatırlatma, hipotez ve hükmü vurgulama, ispat adımlarını ve ispat yöntemini vurgulamayı içerebilmektedir. Örneğin, Dr. Uzay, Dr. Soyut, Dr. Vektör, Dr. Türev, Dr. Topoloji ve Dr. Öklid öğrencilerin anlamasına yardımcı olmak adına gereken yerde şekil çizdiklerini belirtmişlerdir. Dr. Soyut şekil çizdiği durumlardan birini açıklamıştır:

“Gerekirse şekil çiziyorum. Mesela çekirdek kümesi ile ilgili bir şey anlatacağım. Tanımını yaptığımızda içinde değer kümesindeki birim lafı geçtiği için öğrenci bunu tam idrak edemeyebiliyor. Ve tanım kümesindeki grubun alt kümesi olduğunu göremeyebiliyor. Bunu kabaca ifade edecek bir şekilde çok daha iyi anlayabiliyorlar.”

Dr. Soyut, Dr. Vektör ve Dr. Kompleks ispat yönteminden bahsettiklerini aktarmışlardır. İspat yaparken ispat yönteminin belirtilmesinin öğrencinin ispatı anlamasına yardımcı olacağına yönelik bu öğretim elemanlarının görüşleri Bölüm 4.2.3 ve 4.2.4’te bahsi geçen görüşlerinin tekrarını içerdiğinden bu bölümde yer verilmemiştir.

Dr. Kompleks, Dr. Soyut, Dr. Öklid ve Dr. Uzay öğrencinin ispatı anlamasını sağlamak adına yaptıkları uygulamalardan birinin teoremdaki hipotezi ve hükmü vurgulamak olduğunu belirtmişlerdir. Bu doğrultudaki açıklamaları Bölüm 4.2.3’te teoremin doğru anlaşılması sağlanmalıdır kategorisi altında verilmiştir.

Bölüm 4.2.3’te ispat anlatımında kesinlikle yapılmalı denenen uygulamalardan bahsederken Dr. Topoloji ve Dr. Vektör ön bilgilerin hatırlatılması gerektiğine değinirken Dr. Soyut bu uygulamayı öğrencilerin anlamasını sağlamak için uyguladığını belirtmiş ve bu uygulamayı sıralamaya bile dahil etmemiştir. Dr. Soyut:

“Bunun haricinde o konuyla ilgili dip metinde hatırlanması gereken şeyler varsa onları anlatıyorum.”

Dr. Soyut ve Dr. Uzay öğrencilerin ispatı anlamasını sağlamak için onların bildikleri diğer derslerle ilişkilendirdiklerini söylemişlerdir. Örneğin Dr. Soyut:

“Diğer kavramlarla da ilişkilendirme yapıyorum. Bu devirli grupların içinde üreteç sayısı var. $Z_m \times Z_n$ de üreteç sayısını belirlerken m ile n aralarında asalsa bu devirli oluyor. Üretece bakarken de $\Phi(n)$. $\Phi(m)$ oluyor. Ve orada $\Phi(n)$. $\Phi(m)$ in $\Phi(m.n)$ ’e eşit olması gerektiğini sorduğumuz zaman yani onu sayılar kuramındaki bir yere atıfta bulunup onun ispatını soyut cebir de yapabildiğimiz oluyoruz. O an için birbirinden farklıymış gibi görünen iki kavram arasında ilişki bile kurulmuş oluyor. Ya da tam tersi sayı kuramında bu konu geldiğinde cebirde de bunu yapmıştık. İşte gün bu gündür deyip... Bu aslında çok şık bir şey. Bakın sayılar kuramındaki bu teoremi cebire taşımışız. Ve hatta üreteç sayısındaki ispatını yazsalar bile olur. Aslında onun sayılar kuramındaki ispatı başka ama bunu devirli gruplara bağlayıp alternatif bir ispat olarak önerebiliyoruz.”

Benzer şekilde Dr. Uzay da öğrencilerin bildiği derslerden bilgilere atıf yaptığını ve böylece öğrencilerin daha iyi anladıklarını aktarmıştır:

“Lineer cebir dersine girdiğim için o derste mesela özellikle analitik geometriye vurgu yapıyorum çünkü Lineer Cebirin çok net uygulamalarından birisi analitik geometri. Analitik geometriden öğrencilerin çok daha hızlı anladıklarını görüyoruz.”

Dr. Uzay, Dr. Vektör ve Dr. Türev ispat içindeki önemli adımları vurguladıklarını belirtmişlerdir. Dr. Vektör zor adımları vurguladığını ve o adımları kutu içine aldığını söylemiştir. Benzer şekilde, Dr. Uzay da önemli adımların altını çizdiğini *“Özellikle adımları vurguluyorum belli adımların altını çiziyorum bize neden lazım olduğunu anlatıyorum.”* diyerek aktarmıştır. Dr. Türev ise ispat içinde öğrenciler için zor olabileceğini düşündüğü adımları o adımlara yönelik sorular sorarak yani öğrencileri bu adımlarla karşı karşıya bırakarak vurguladığını anlatmıştır:

“Genelde ben çok fazla soru sormayı tercih ediyorum o süreçte. Ama bu sorularda dikkat ettiğim şu her zaman doğru şeyleri sormam. Özellikle öğrencilerin... Kendim de mesela öğrenirken nelere dikkat ettim. Öncelikle çünkü benim anlamam önemli. Ben anlamadığım bir şeyi karşımdakine anlatamam. Benim anlarken yaşadığım zorlukları ben özellikle onlara dile getirerek o zorluklarla karşılaşmalarını sağlıyorum. Zor adımları mesela bu şekilde vurguluyorum.”

Dr. Türev, Dr. Uzay ve Dr. Topoloji öğrencilerin ispatı anlamasını kolaylaştırmak için ispat içinde örnekler verdiklerini de aktarmışlardır. Dr. Türev teoremin nerede uygulanabileceğine yönelik örnekler verdiğini belirtmiştir. Dr. Topoloji ise *“Gerekirse örneklere indirgenip anlaşılır hale getirip sonra tekrar onu daha geniş şekle*

Tablo 25’te (*) işareti öğretim elemanlarından hangilerinin ilk mülakatta bu kategorideki görüşleri ifade ettiğini göstermektedir. Numaralar ise 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) öğretim elemanlarının bu görüşlerden hangilerini seçtiklerini ve bu görüşleri kendilerince hangi sırada öncelikli gördüklerini göstermektedir. Renklendirme, görsellik açısından numaralara göre yapılmıştır. Örneğin, “öğrencilerin teoremi anlamakta güçlük yaşadığı” görüşü ilk mülakatta Dr. Soyut, Dr. Topoloji ve Dr. Vektör tarafından dile getirilmiştir. 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) ise bu görüş Dr. Türev, Dr. Vektör, Dr. Topoloji ve Dr. Uzak tarafından birinci sırada tercih edilmiştir. Dr. Soyut ve Dr. Kompleks bu görüşü dördüncü sırada tercih etmişken, Dr. Öklid ise tercih etmemiştir.

Tablo 25

Öğretim elemanlarının öğrencilerin ispatlamada yaşadığı güçlüklerle yönelik fikirleri

<i>Öğrencilerin ispata yönelik yaşadıkları güçlükler</i>	<i>Dr. Kompleks</i>	<i>Dr. Vektör</i>	<i>Dr. Türev</i>	<i>Dr. Soyut</i>	<i>Dr. Öklid</i>	<i>Dr. Topoloji</i>	<i>Dr. Uzak</i>
<i>Teoremi anlamıyorlar</i>	4	1*	1	4*		1*	1
<i>Notasyonu doğru kullanamıyorlar</i>	3	2	3	1*		2*	
<i>Verilenleri iyi kullanamıyorlar</i>	1*	1	2	3	*		2
<i>Doğru yöntemi belirleyemiyorlar</i>	2			5	2*	3	4
<i>Kavramlar arasındaki bağlantıları doğru kuramıyorlar</i>	1*	2*		3	3		3
<i>İspata nereden başlayacağına karar veremiyorlar</i>	2*		1*	2	1	4	5*

Mülakatta öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin nedenlerine yönelik görüşlerin analizi sonucunda ise toplam 15 kategori oluşmuştur. Bu yanıtlar 4 tema altında toplanmıştır. Verilen yanıtlar içerisinde, öğrencilerden kaynaklanmadığı düşünülen nedenler “Öğrenci dışı nedenler” teması altında; öğrencilerin isteksizliği, korkuları, inançları ve ilgilerine yönelik nedenler “Duyuşsal nedenler” teması altında; öğrencilerin düşünme becerilerine yönelik nedenler “öğrencilerin düşünme becerilerindeki

eksiklilerden kaynaklanan nedenler” teması altında; öğrencilerin önbilgilerine yönelik nedenler “öğrencilerin önbilgilerindeki eksiklilerden kaynaklanan nedenler” teması altında gruplandırılmıştır. Öğretim elemanlarının ifadeleri ve temalar Tablo 26’da verilmiştir.

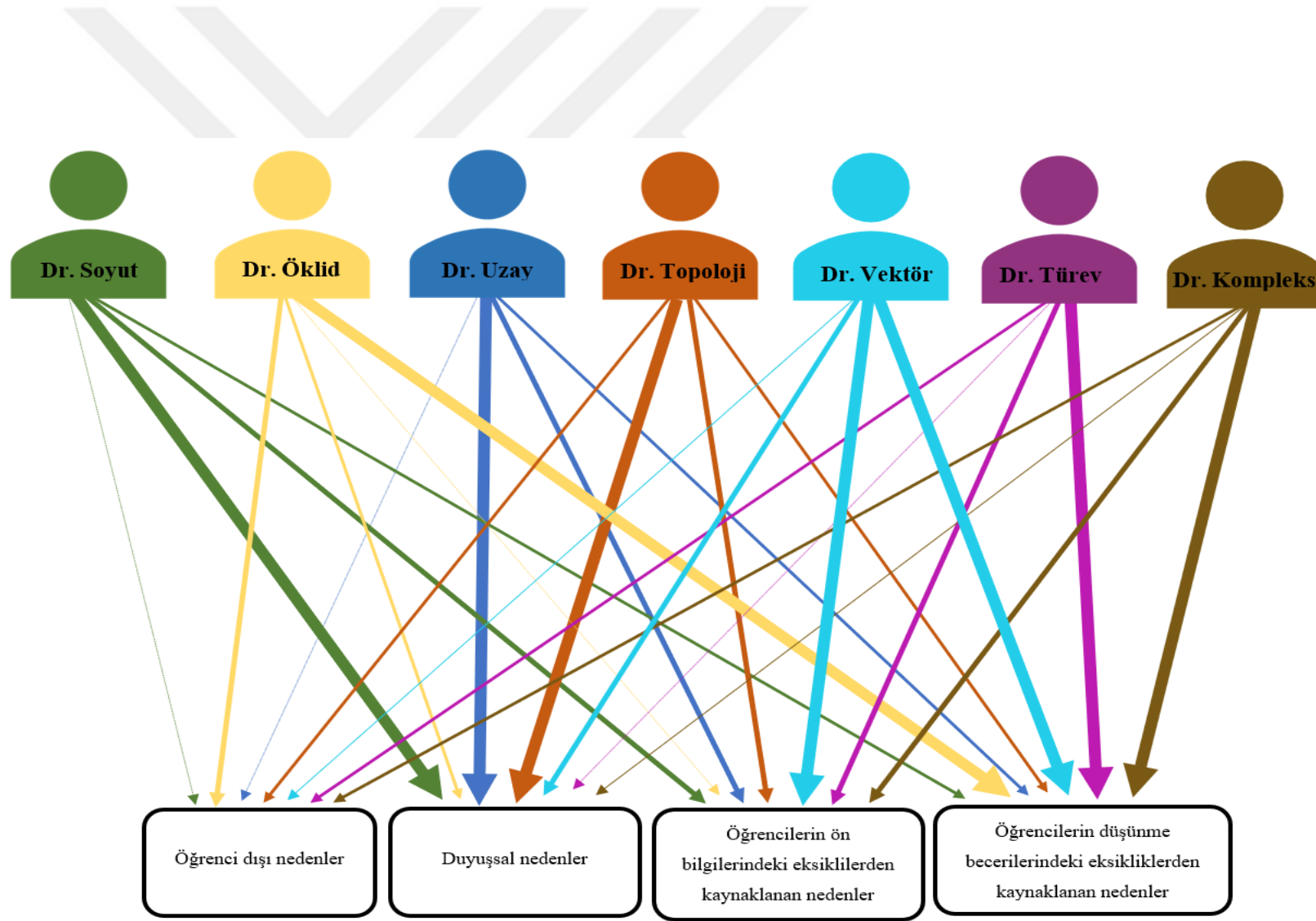
Tablo 26’da (*) işareti öğretim elemanlarından hangilerinin ilk mülakatta bu kategorideki görüşleri ifade ettiğini, (X) işareti ise 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) hangi öğretim elemanının hangi görüşleri seçtiğini göstermektedir. Örneğin, ‘sınav sistemi nedeniyle öğrencilerin teste alışmış olması ve notasyonları kullanamıyor oldukları’ görüşü ilk mülakatta Dr. Vektör, Dr. Türev, Dr. Soyut, Dr. Topoloji ve Dr. Uzay tarafından söylenmiştir. 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) tüm öğretim elemanlarının bu ifadeyi seçtiği görülmektedir. Tablo 26’daki tüm görüşler ilk mülakatta öğretim elemanları tarafından öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin nedenleri olarak sunulmuş görüşler olduğundan bir kategorinin öğretim elemanları tarafından seçilmemiş olması önemsiz olduğu anlamına gelmemektedir. Öğretim elemanları tüm görüşler içerisinde daha önemli buldukları görüşleri işaretlediklerinden, burada yalnızca işaretlenen görüşlerin diğer görüşlere göre daha önemli görüldüğünden söz edilebilir.

İkinci mülakatta, öğretim elemanlarından Tablo 26’da verilen temaları kendilerine göre önem sırasına göre sıralamaları ve her temadan uygun gördükleri kategorileri seçmeleri istenmiştir. Temalar altında bulunan görüşlerin sayısının fazla olması nedeniyle bu görüşlerin sıralanması talep edilmemiştir. Şekil 31, öğretim elemanlarının temaları önem sırasına göre nasıl sıraladıklarını göstermektedir. Şekildeki okların kalınlığı belirtilen önem düzeyine göre artmaktadır. Bu temalardaki görüşlerden hangilerinin seçildiği yine Tablo 26’da verilmiştir. Öğretim elemanları sıralama yaparken, aynı önem düzeyinde gördükleri temalara aynı numaraları verme konusunda özgür bırakılmıştır. Sonuç olarak, yalnızca Dr. Vektör’ün iki temayı birlikte birinci sırada seçtiği gözlenmiştir. Bunun haricinde, onun diğer seçimlerinde ve diğer öğretim elemanlarının sıralamalarında aynı önem düzeyinde görülen temaların olmadığı görülmüştür.

Tablo 26

Öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin nedenlerine ilişkin görüşler

Tema	İfadeler	Dr. Kompleks	Dr. Vektör	Dr. Türev	Dr. Soyut	Dr. Öklid	Dr. Topoloji	Dr. Uzak
Öğrenci dışı nedenler	<i>Liseden üniversiteye geçişte sınav sistemi sebebiyle teste alışmışlar, harflerle ve notasyonlarla çalışamıyorlar</i>	X	X*	X*	X*	X	X*	X*
	<i>İspatları tamamen öğretim elemanları yapıyor</i>		X			*		
	<i>İspatlar kolay değil</i>	X*	*					
	<i>Üniversitede ispata dayalı dersleri çok erken görmek öğrencileri soğutuyor</i>							*
Duyuşsal nedenler	<i>Düşünmeye karşı dirençliler ve isteksizler</i>		X	X		X	X*	X
	<i>İspatlara karşı ön yargı ve korkuları var</i>	X	X*	X	X	X	X	
	<i>İspatın gereksizliğine yönelik bir inanç var, İspatın değerini anlamıyorlar</i>	X	X*		X	X*	X*	X*
	<i>İspat ilgilerini çekmiyor</i>	X*	X		X			
Öğrencilerin ön bilgilerindeki eksikliklerden kaynaklanan nedenler	<i>Tanımları bilmiyorlar.</i>	X	X	X*	X*	X	X	X*
	<i>Matematik okuryazarlığında problem var</i>	X*	X	X	X	X	X*	
	<i>Kendileri az ispat yapıyorlar ya da farklı yöntemlerle yapmaya çalışmıyorlar</i>			X	X	X*	X	X
	<i>Derse hazırlıklı gelmiyorlar</i>	X*			X		X	
	<i>Bir örneğin ispat için yeterli olduğunu düşünüyorlar</i>	X		X	X		X*	X
Öğrencilerin düşünme becerilerindeki eksikliklerden kaynaklanan nedenler	<i>Soyut düşünme becerileri gelişmemiş</i>	X	X	X	X*	X		X
	<i>Eleştirel düşünme becerileri çok düşük</i>	X	X	X*	X	X	X	X*



Şekil 31. Öğretim elemanlarının öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin nedenlerine yönelik temaları önem düzeyine göre sıralamaları

Öğretim elemanlarının öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin neler olduğuna yönelik yanıtlarının analizi sonucunda altı temel güçlük tespit edilmiştir. Öğrencilerin teoremi anlamadığı, notasyonu ve verilenleri doğru kullanamadığı, doğru yöntemi belirleyemediği, kavramlar arasında bağlantı kuramadığı ve ispata nereden başlayacağına karar veremediği öğretim elemanlarının aktardığı güçlüklerdir. Örneğin, Dr. Vektör, Dr. Soyut ve Dr. Topoloji öğrencilerin *teoremi anlamakta güçlük çektiğini* söylemişlerdir. Bu görüş aynı zamanda 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) öğrencilerin yaşadığı söylenen güçlükler içerisinde öğretim elemanlarınca öncelikli görülen güçlüklerdendir ve dört öğretim elemanı tarafından birinci sırada tercih edilmiştir. Dr. Vektör öğrencilerin teoremin ifadesini anlamakta güçlük çektiğini söylemiştir. Dr. Soyut ise öğrencilerin teoremden hipotezi ve hükmü belirleyemediğini dolayısıyla *teoremi anlamadıklarını* şu şekilde açıklamıştır:

“Bir defa bazen teoremi anlamayabiliyorlar. Zaten hep diyoruz ya bir problemi çözenin ilk basamağı anlamak. Anlayabilmesi için önce hipotez hüküm kısmını ayırt edebilmesi lazım. Bu teoremden bana hipotez olarak ne vermiş benim sermayem, ispatta kullanabileceğim ve benden ne istiyor ve özellikle öğrencilere bu konuda hep takılıyoruz. Birinci aşama şudur ki o ispatı yapabilmesi için hüküm olarak neyi göstermesi gerektiğini bilmesi lazım. Yani bu ispatı tamamlamak için nasıl göstereceğini de bilmesi lazım ama öncelikle neyi göstereceğini bilmesi lazım. Çoğu öğrenci daha neyi göstereceğinden habersiz. O yüzden diyoruz örneğin bu soruda türevli her fonksiyon sürekli bu gösterecek. Bak ne demiş hipotezimiz ne burada fonksiyon türevli ise sürekli. Hipotezimizde sermayemizde ne var fonksiyonun türevli olması. Dolayısıyla bir fonksiyon türevliyse neyi sağlıyorsa ben bunları ispatta kullanabilirim. Göstermem gereken şey ne onun sürekli olduğu. Ne olacak her noktada sürekli oluyor. Bir noktada sürekli olması ne demek limitinin o noktadaki değerine eşit olması demek. ben burada her nokta için limitinin değerine eşit olduğunu göstermem lazım. Yani buna önce öğrencinin karar verebilmesi lazım. Bunu nasıl göstereceği ayrı bir konu. Yani ilk aşamayı yapamazsa diğerini zaten yapamıyorlar. Ve genellikle bizim derslerde gördüğüm belki diğer derslerde farklıdır ama Soyut Matematik ve türevleri dersler olduğu için daha öğrenci göstereceği şeyin ne olduğunun farkında değil.”

Öğrencilerin teoremi anlamakta güçlük yaşadıklarına yönelik görüş dört öğretim elemanı tarafından birinci sırada tercih edilmiştir ve tercih önceliklerine bakılarak bu

güçlüğü öğrencilerde ispatlamaya yönelik en yoğun karşılaşılan güçlük olduğunu düşünüldüğü söylenebilir. Dr. Soyut teoremi anlamamanın yanı sıra öğrencilerin ispatlaması gereken şeyi notasyonla gösteremediğini de belirtmiştir:

“İspatlama istendiğinde sınıfın en fazla %5 i bunu yapıyor. İspatlamayı geçtim neyi ispatlaması gerektiğini notasyonik olarak yazamıyorlar. Göstereceği şey için göstermesi gereken şeyi notasyonla yazamıyor, e sonrası ispatı nasıl yapabilsin yani. Benim birinci sınıf Soyut Matematik dersim var. Özellikle oradaki ispatlarda öğrenciler çok zorlanıyorlar. Hem dersin kendisi de ispatlar açısından sorun yaşanan şeyler. Hem de lisede ispat görmeden geldikleri için zorlanabiliyorlar. O yüzden sınıfın seviyesi bu bağlamda önemli. Hani 4. Sınıfa geldikçe tecrübeleri artıyor. Biraz daha rahatlayabiliyorlar. Hocanın stiline alışabiliyorlar. İspat yöntemlerine alışabiliyorlar o bağlamda bir hiyerarşik durum olduğunu zaten düşünüyoruz. Ama onun haricinde de yine de büyük sınıflarda da zorluk yaşıyorlar kesinlikle. Onlarda da bence altyapı eksiklikleri bu bağlamda önemli oluyor. Mesela o kadar alışmışlar ki öğrenciler Soyut Matematikte geldiklerinde şunu soruyorlar hocam sınavda tanım soracak mısınız? tanımsız matematik olmaz. Belki hani ispatların anlaşılmasının temelinde de tanımların iyi yapılabilmesi tanımların çok iyi sindirilmesi lazım. Belki kabaca işlem yapıyor ama ben her zaman sormuşumdur bağıntı nedir fonksiyon nedir vs. bu tür matematiğin temel kilit tanımları biri sorduğunda matematik öğretmeni olarak tanımları adını söyleyecek kadar bir çırpıda söyleyebilmeli. Ama ya bilmiyorlar ya da akademik bir tanım yok kafalarında. Şimdi tanım olmadığı için ya da tanım içselleşmediği için ispat yapmaya kalkıştığın zaman bölük pörçük oluyor. İşte o bağlantıları kurmak çok zor oluyor. Belki de ispat yapabilmek için tanımlarda çok net olabilmek lazım ki devamı gelebilsin. Hani bir de soyut-somut işlemler dönemlerinden bahsediliyor. Ben bu somut-soyut düşünce düzeyinin üniversite bazlısının da olduğunu düşünüyorum. Bu konuda bir araştırma da yapmayı düşünüyorum. Çünkü aynı puanlarla gelen soyut cebirde topolojide özellikle sınıftaki öğrencilerin bazıları anlamıyor. Ve şöyle diyorlar bu ezberlenerek geçilecek bir ders. Anlamıyorlar kalıyorlar kalıyorlar, uzattıktan sonra bir aydınlanma yaşıyorlar. Ve gelip sordukları sorulardan artık bunları anlamaya başladıklarını anlıyorum ben. Herhalde üniversite bazlısında da soyut bir olgunluk lazım ve bazıları bu konuda daha yetenekli olarak geliyor. Belki çoklu zekanın bölümlerinin de alt bölümleri olmalı belki de. Bazıları anlayabilen ki az o yüzden Topolojiyi ben çok rahat geçtim diyen insan çok azdır.”

Yukarıdaki açıklamasında Dr. Soyut, lisede ispat görmemiş olmaları, ispat için gereken alt yapılarının eksik olması ki özellikle tanım bilmemeleri ve bazı öğrencilerin soyut dersler için zihinsel olgunluk seviyesine ulaşmamış olmalarının, öğrencilerin ispatlamada güçlük yaşamalarının nedenlerinden olduğunu aktarmıştır. Dr. Soyut gibi Dr. Vektör, Dr. Türev, Dr. Topoloji ve Dr. Uzay da öğrencilerin lisede testlere alıştıkları, bu nedenle de ispat görmedikleri ve notasyon kullanamadıklarına yönelik açıklamalarda bulunmuşlardır. Buna ek olarak tüm öğretim elemanları öğrenci dışı nedenler teması altındaki bu görüşü işaretlemişlerdir (bkz. Tablo 26). Tüm öğretim elemanlarının katıldığı bir başka görüş ise öğrenci ön bilgisinden kaynaklanan nedenler teması altındaki öğrencilerin “tanımları bilmiyor” olmalarıdır. Bu görüş, mülakatta Dr. Türev ve Dr. Uzay tarafından dile getirilmiştir. Öğrencilerin soyut düşünme becerilerinin gelişmediği yönündeki görüş ise 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) Dr. Topoloji haricinde tüm öğretim elemanları tarafından seçilmiştir. Öğrencilerin notasyonu doğru kullanmakta güçlük yaşadığını görüşüne yönelik 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) Dr. Soyut bu görüşü birinci sırada, Dr. Vektör ve Dr. Topoloji ikinci sırada, Dr. Kompleks ve Dr. Türev ise üçüncü sırada tercih etmişlerdir.

Dr. Topoloji de öğrencilerin hem *teoremi anlamadıklarını* hem de anladıklarını yazmaya çalıştıklarında ise *notasyon kullanımında sıkıntı yaşadıklarını*, bu sorunu bağladığı nedenlerle birlikte ifade etmiştir.

“Gerekirse bazı teoremlerde deşifre ederken anlamakta çok zorlanıyorlar. Yani daha okurken anlamakta zorlanıyorlar. Zaten onun ispatına girmek mümkün değil... Bir kere okuduğunu anlamıyor. Anladığını ifade etmek istediğini yazamıyor. Yani matematik okur yazarlığında çok büyük problem var. Liseden gelen test alışkanlığı burada çok büyük problem yani hep bir şey sorduğunuzda bunu en pratik yoldan nasıl çözerim derdindeler. Sayılarla işlem yapmaya çok alışıklar harflerle notasyonlarla uğraşmamışlar. Yani ben şimdi bazı lise öğrencileri de görüyorum defter bile tutmuyorlar artık. Yazma alışkanlıkları bile yok. Bu bence doğru değil. O alışkanlığı da buraya taşıyorlar. Düşünmeye karşı dirençliler. Bir şeyi verin çözelim çikalım işin içinden öyle bir şeyleri var ya da benzeri bir şey yaptık mı onunla aynı yolla çözelim yani yeni bir şey düşün ya da sana verilen şeyin üzerine biraz düşün kendin bir şey üret dendiğinde çok büyük direnç var. ‘Yapamam’ yani tek kelimeyle. Bir bölümde daha soruyu sordum hocam biz matematikçi değiliz yapamayız. Hemen böyle bir direnç var. Önce bir oku yani anla. Teorem deyince gözlerinde büyütüyorlar. İspatın gereksizliğine olan inanç var bazılarında. Tamam teoremi anladık ispata ne gerek var. Faydasının

farkında değiller. Ayrıca bizim öğrencilerimizde bir örneğin ispat için yeteceğini düşüncesi de var.”

Dr. Topoloji, ders esnasında teoremi sunarken yaptığı bir durum analizinde de öğrencilerde gözlemlediği teoremi anlama sorunundan bahsetmiş ve öğrencilere bu konuda bazı tavsiyeler sunmuştur (bkz. Bölüm 4.2.1.2.5). Dr. Topoloji aynı zamanda derste ispat esnasında yaptığı durum değerlendirmelerinde de öğrencilere notasyona yönelik hatalarından bahsetmiştir (bkz. Bölüm 4.2.2.2.3)

Yukarıdaki açıklamasında Dr. Topoloji'nin, öğrencilerin lisede test alışkanlığından, matematik diliyle yazmaya alışkın olmamalarının, öğrencilerin ispatta matematik dilini kullanamama soruna neden olduğunu düşündüğü söylenebilir. Bu nedenlere ek olarak, öğrencilerin ispattamada güçlük yaşamalarında, düşünmeye karşı direnç göstermeleri, ispata karşı önyargılarının olması, ispat için bir örneği yeterli görmeleri, matematik okuryazarlıklarında problem olması ve ispatın gereksiz olduğunu düşünmelerinin payı olduğunu aktarmıştır.

Öğrencilerin düşünmeye karşı dirençli ve isteksiz oluşu beş öğretim elemanı tarafından; ispata yönelik ön yargı ve korkularının olması ve matematik okuryazarlıklarında problem olması Dr. Uzun haricinde tüm öğretim elemanları tarafından; ispatın gereksiz olduğuna yönelik inançlarının olması Dr. Türev haricinde tüm öğretim elemanları tarafından ve örnekleri ispat olarak kabul etmeleri beş öğretim elemanı tarafından da seçilmiştir. Sonuç olarak öğretim elemanlarının çoğu tarafından işaretlenmiş olmaları dolayısıyla tüm bu nedenlerin öğretim elemanlarınca kabul edilen ve karşılaşılan nedenler olduğu söylenebilir.

Dr. Öklid öğrencilerin ispat yaparken *teoremden verilenleri iyi kullanamadığını* ve *ispattı hangi yöntemle yapacaklarını belirleyemediklerini* aktarmıştır. Bu duruma neden olarak da ispatı öğretim elemanlarının yaptığını, öğrencilerin ispatla az uğraştığını, farklı yöntemler kullanmayı denemediklerini ve bazı ispatları gereksiz gördüklerini göstermiştir:

“Öğrenciler verilenleri iyi kullanmıyorlar sanki. Bir de yöntem bilgisinde belki hangisini yapacağım mesela ben bir olmayana ergi kullandığımda bir ispatta bir dahaki sefere onu akıllarına getiriyorlar. Yapma yolunu tercih ediyorlar. Düşünüyorlar. Hangi yolu yöntemi kullanacaklarını belirleme konusunda güçlük yaşıyorlar. Bu da kendileri az ispat yapıyorlar kendileri ispat yaparken farklı yöntemler kullanmayı da sıklıkla yapmıyorlar. Doğrudan ispat yapıyorlar mesela sadece belki onu kullanıyorlar. Başkalarını kullanmıyorlar. Mesela iki sütunluyu kullanmıyorlar belki. İşte çok sık karşılaştırsak öğrencilerle bu tür ispatları onlar

da artık şu da yapılır bu da yapılır diyebilirler. Ama işte verilenleri çok iyi kullanmıyorlar bir de yol yöntem belirlemede çok sıkıntı çekebiliyorlar. Güçlük çekiyorlar çünkü öğretmen tahtada paldır küldür yapınca ispatı, o ispat onun olmuyor, o ispat hocanın yaptığı ve senin de bu fakülteye de gelmişsen anladığın bir durum oluyor zaten. Yani şey gibi bir soru var o soruyu çözmüş gibi kitap ya da öğretmen. Onun çözümüne baktığın zaman zaten anlıyorsun o çözümü. Anlamadığın kısmını da soruyorsun zaten. Yani aslında bizim yaptığımız ispatlar zor değil. Anlayamayacakları ispatlar değil. Sadece alışkın olmadıkları basit şeylerin ispatını yaparken 'Bunun da mı ispatı yapılır?' yaklaşımı var öğrencilerde."

Öğrencilerin teoremden verilenleri kullanmada güçlük çektikleri görüşü 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) Dr. Kompleks ve Dr. Vektör tarafından birinci sırada, Dr. Türev ve Dr. Uzay tarafından ikinci sırada ve Dr. Soyut tarafından üçüncü sırada tercih edilmiştir. Dr. Öklid ise mülakatta dile getirdiği bu görüşü tercih etmemiştir. Doğru yöntemi belirlememe ise Dr. Kompleks ve Dr. Öklid tarafından ikinci sırada, Dr. Topoloji tarafından üçüncü sırada, Dr. Uzay tarafından dördüncü sırada ve Dr. Soyut tarafından beşinci sırada tercih edilmiştir. İspatlamada yaşanan güçlüklerle yönelik tabloda öğrencilerin az ispat yaptığı veya farklı yöntemlerle ispat yapmaya çalışmadıkları görüşü beş öğretim elemanı tarafından işaretlenmiştir. Dr. Kompleks'in şu açıklamasının da Dr. Öklid'in öğrencilerin verilenleri iyi değerlendiremediği yani bu konuda güçlük yaşadıkları görüşünü desteklediği söylenebilir:

"Mesela limitin tekliğini ispatlıyoruz değil mi? ezbere bilinen şey. Ama öğrenci onun farkında değil yani. Oradaki epsilon, her epsilon ne anlama geliyor. Orada bir sonuca varıyoruz. Neden yani? Bu böyle hadi bakalım sen söyle, yok."

Dr. Vektör öğrencilerin teoremi anlamamasının yanı sıra matematiksel kavramlar arasında bağlantı kuramadıklarını da söylemiştir. Ayrıca öğrencilerin yaşadıkları bu güçlüklerle neden olduğunu düşündüğü bazı durumlardan da bahsetmiştir:

"Kavramlar arasında bağlantıda sorun oluyor. Bilhassa bir kavram başka bir kavramı içeriyorsa, onu onda kullanacaksa o zaman zorluk çekiyor öğrenci. 'Ya ne alakası var ben türev ispatı yaparken Bolzano teoremi nereden çıktı' diyor. Bir defa teoremin ifadesini anlamakta zorluk çekiyorlar. İspatların genellikle uzun olması da sorun. Bir de ispatlamak zor bir şey. Soru çözmeye göre daha zor öğrenci için. O notasyonlara hakimiyet, ispatın her adımına hakim olmak kolay şeyler değil. O nedenle tabi ki bir sürece bağlı. Az önce de söyledim ispat matematiğin en

zor kısmı. Kendim de teorik çalıştığım için genelde üst düzey makalelere baktığınız zaman en az 10 tane ispat vardır. Bunlar çok kolay gelmiyor. Ya da yayınlarda ne kadar fazla ispat varsa o kadar dikkat çekiyor. Niye? Çok zor olduğu için. Ama uygulama olsa. Bu uygulama zaten deniyor. O nedenle ispatın zor olması da var. Zor öğrenilmesi de var. Aynı zamanda çok fazla bilgi gerektirdiği için de mesela diferansiyel geometri de bir ispatın sonunda çözümü çok zor bir diferansiyel denklem çıkabiliyor. Bu sebeple çok yönlü bilgi gerektirdiğinden bence zor. Mesela eğitim öğretimimiz maalesef teste yönelik sınavlar ile alakalı. O yüzden ispatı sevmiyorlar. Nasıl olsa bana bunun uygulaması lazım diyorlar. Teste yönelik olması caydırıyor insanı. Öğrencilerimiz de zaten genellikle pratik bilgiyle geldiği için dolayısıyla ispata baştan ilgileri olmuyor. Hep teste yönelik çalışmışlar. Şimdi burada seçmeli dersler var. Öğrenci onları seçerken de pratik bilgi içerenleri seçiyor. Mesela her sınavda 'Hocam teorem sormayın!' diyorlar. Belki de güçlük yaşamadan güçlük yaşayacaklarını düşündükleri de oluyor. İspata karşı önyargıları var. Ben genellikle ispatlardan sorarım dememe rağmen 'Hocam ispat sormasanız' diyorlar. Yani ispata karşı bir önyargı, bir korku var. Ama bir de bunun yanında sınavlarda nasıl olsa ispat sorulmuyor dolayısıyla biz bunu yapmayalım niye yapıyoruz ne gerek var deniyor. Bazen ilköğretim matematikte 'Hocam bir nasıl olsa lise öğretmeni olmayacağız niye ispatları yapıyoruz' o tarzda bir yaklaşım da var. Yani ispata yönelik kesinlikle bir önyargı var. Diyebilirsiniz ki ortaöğretim matematikte yok mu? Orada da var.

Yukarıdaki açıklamasında Dr. Vektör'ün öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin, öğrencilerin lisede sınav sistemi nedeniyle testlere alıştığını, bu nedenle ispatı sevmediklerini, ispata karşı önyargılarının olduğunu ve ispatları gereksiz gördüklerini düşündüğü söylenebilir. Ayrıca Dr. Vektör ispatlamanın çok bilgi gerektirmesi yönüyle zor olmasının öğrencilerin güçlük yaşamasına neden olduğunu da eklemiştir. İspatların zor olduğu görüşü öğrencilerin ispatlamada yaşadığı güçlüklerin nedenlerine yönelik görüşlerde yalnızca Dr. Kompleks tarafından işaretlenmiştir (bkz. Tablo 26).

Öğrencilerin kavramlar arasında bağlantı kuramadığı görüşü, 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) Dr. Kompleks tarafından birinci sırada, Dr. Vektör tarafından ikinci sırada, Dr. Soyut, Dr. Öklid ve Dr. Uzay tarafından üçüncü sırada tercih edilmiştir.

Dr. Kompleks yalnızca kendisinin işaretlediği gibi ispat yapmanın kendi doğasından kaynaklı zor olduğunu ve öğrencilerin *kavramlar arasındaki bağlantıları yapamadıklarından* ispatlamada güçlük yaşadıklarını aktarmıştır:

İspatın yapılması çok kolay bir şey değil, çok bilgi gerektiren bir şey. Kompleks Analizde bir ispatlayacağız ama şimdi onu Analiz 3-4 ile bağdaştırıyoruz eğerisel integral konusunu anlatırken. Analize dönüyoruz yani. Analiz III'teki diyelim limit olayı yoksa kompleks analizdeki limit olayını biz şimdi onunla bağdaştırıyoruz. Tabi teoremlerle bağdaştırıyoruz. İşte o alt yapı yoksa nasıl bağdaştırabiliriz? Soru çözdüğümüzde analiz yöntemleri kullanın dediğimizde bilmiyorsa nasıl yapacak?"

Öğrencilerin yaşadığı düşünülen güçlüklerden bir diğeri de ispata nereden başlayacaklarını bilememeleri olmuştur. Dr. Türev, Dr. Kompleks ve Dr. Uzay bu güçlükle ilgili görüş bildirmişlerdir. Örneğin, öğrencilerin ispata başlayamadığını söyleyen Dr. Kompleks öğrencilerin sınıf seviyesine göre ispatlama adına neler yapabildiğinden bahsetmiştir. İspatın öğrencilerin dikkatini çekmediğini ama daha da önemlisi öğrencilerin işlenen konudan bile habersiz olduğunu aktarmıştır:

"1. sınıfta zaten hemen hemen hiç yapamıyorlar. 2. Sınıfta evet bazı teoremleri yapabiliyorlar. 3. sınıfta diyelim daha fazla. Kompleks Analiz 3. sınıfta. Ama yapamıyorlar, kesinlikle önce anlatmam lazım. Analiz III'te şöyle, eğer onlara görev veririm hazırlanıp gelip anlatıyorlar. İspata hiç başlayamıyorlar. Zaten birçok öğrenci hazırlıklı gelmiyor. Zaten öğrenci daha hangi konu işlendiğini bilmiyor, şimdi sen hangi ispattan bahsediyorsun? Zaten birçok öğrencinin de ispat aslında dikkatini çekmeyebiliyor. Hemen örneğini ne zaman vereceksiniz. Uygulamasını ne zaman yapacaksınız tarzında şeyler gelebiliyor."

3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) öğrencilerin derse hazırlıklı gelmediği görüşü ve ispatın öğrencilerin ilgisini çekmediği görüşü ise üçer öğretim elemanı tarafından işaretlenmiştir

Dr. Uzay da öğrencilerin ispata nereden başlayacaklarını bilemediklerini belirtmiştir. Buna ek olarak derste bir ispat sunumunda yaptığı durum analizinde öğrencilere de bu durumdan bahsederek öneride bulunmuştur (bkz. 4.2.2.2.3):

"Şimdi sizin en büyük sorunuz ne? İspata nereden başlayacağımızı bilmiyoruz hocam değil mi? Nereden başlıyorsunuz aslında tanım söylüyor bak!"

Dr. Uzay, öğrencilerin lisede ispat yapmadıklarını, ispatın değerini bilmediklerini, eleştirel düşünme becerilerinin düşük olduğunu ve üniversitedeki dersleri alma sırasının öğrencileri ispattan soğuttuğunu söylemiştir:

“Eleştirel düşünme becerisi çok düşük çocuklarla muhatabız. Eleştirel düşünme becerileri yükseldikçe doğal olarak ispat becerileri de artacaktır. Ben doğrudan eleştirel düşünme becerisi ve ispatın paralellik içerdiğini gördüm birçok makalede literatürden de biliyoruz daha doğrusu. Aslında problem şu neden ispata ihtiyaç duyduğumuzu bilmiyorlar. Önce onu öğretmemiz gerekiyor. Çünkü o çocuk soru çözerek gelmiş hiç ispat yapmamış. Verilenler sağlıyorsa yeterli olmuş onun için. Lisede hiç ispat yapmadıkları için ve ispatın önemi vurgulanmadığı için niye bunlarla uğraşıyoruz problemi var kafalarında. İspata dayalı dersleri çok erken görmek de öğrencileri ispattan soğutuyor. Ve bunu daha öğrenmeden yapmaları daha büyük sıkıntı.”

Üniversitede ispata dayalı dersleri çok erken görmelerinin öğrencileri ispattan soğuttuğu görüşü hiçbir öğretim elemanı tarafından işaretlenmemiştir. Bununla birlikte, eleştirel düşünme becerilerinin düşük olduğu görüşü tüm öğretim elemanları tarafından işaretlenmiştir. Öğrencilerin eleştirel düşünme becerilerini yetersiz bulduğunu mülakatta dile getiren bir başka öğretim elemanı ise Dr. Türev’dir. Dr. Türev öğrencilerin ispata nereden başlayacaklarını bilemediğini ve bu durumun nedenlerini şu şekilde açıklamıştır:

“Nereden başlayacaklarını bilemiyorlar. Çünkü aslında hepsi lisede türev, integral, limit, süreklilik görüyorlar. Ancak buraya geldiklerinde görmedikleri yönü görmeye başlıyorlar. O yüzden ilk dönem mesela ispatlar onlar için çok zor olabiliyor. Mesela kök 2 rasyonel sayı değildir. Onun ispatıyla ilgili şeylerimiz var. O bile başlarda onlara zor gelebiliyor. Bunun çeşitli nedenleri de var. Tanım eksikliği de olabilir. Bir de mantıksal düşünmeyle ilgili. Yani mantıksal sorgulama yapamayan çocuklar var. Çünkü maalesef sınav sistemi belli. Test usulü soruları yapıp geliyorlar. Ama sınıfta çok iyi akıl yürüten öğrenciler var. Bunu fark ediyorsunuz. Aslında ispatı da daha çok onlarla yönetiyoruz diyebilirim. Yani belli 5-6 kişi var. Temel fikirler onlardan geliyor. Ancak diğerlerini onların fikirleri hakkında düşündürtebiliyorum.”

Özetle, öğretim elemanlarının öğrencilerin en çok teoremi anlamakta, verilenleri iyi kullanmakta ve ispata nereden başlayacağına karar vermekte sorun yaşadıklarını düşündükleri söylenebilir. Şekil 31’de, 3. mülakat (seçme-sıralama formu) sonuçlarına göre öğrencilerin ispatlamada güçlük yaşamasının sırasıyla öğrencilerin düşünme becerilerindeki eksikliklerden, duyuşsal durumlarından, önbilgilerindeki eksikliklerinden ve son olarak da öğrenci dışı nedenlerden kaynaklandığını düşündükleri görülmektedir. Temalar altındaki görüşlerden ise öğrencilerin lisedeki eğitimlerinin, tanımları

bilmemelerinin ve eleştirel düşünme becerilerinin düşük olmasının tüm öğretim elemanlarınca bahsi geçen güçlüklerin başlıca nedenleri olarak kabul edildiği görülebilir.

4.3.4.2. “Öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin giderilmesine yönelik önerileriniz nelerdir?” sorusuna verilen yanıtların analizi

Öğretim elemanlarının, öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlükler ve bu güçlüklerin nedenleri ile ilgili görüşleri alındıktan sonra bu güçlüklerin giderilmesine yönelik önerilerinin olup olmadığı da sorulmuştur. Verilen yanıtlar sistemden (eğitimde kanun yapıcılardan), öğretmenlerden ve aileden beklentiler olmak üzere üç tema altında toplanmıştır. Bu temalar ve temaları oluşturan mülakat alıntıları Tablo 27’de verilmiştir.

Tablo 27

Öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin giderilmesi için öğretim elemanları tarafından sunulan öneriler

Tema	İspatlama güçlüklerinin giderilmesi ilişkin öneriler	Öğretim Elemanı
Eğitimde kanun yapıcılardan beklentiler	Üniversitedeki derslerde bazı düzenlemeler yapılmalı	Dr. Uzey
Öğretmenlerden beklentiler	İspat teknikleri küçük yaşlardan itibaren öğretilmeli	Dr. Vektör
Öğretmenlerden beklentiler	Öğrencilerin ispata katılımı sağlanmalı	Dr. Türev, Dr. Öklid
	Öğrencilerin matematik altyapısı ve düşünme becerileri kuvvetlendirilmeli	Dr. Topoloji, Dr. Uzey
	İspat öğretimde uygun yöntemler kullanılmalı	Dr. Topoloji, Dr. Kompleks, Dr. Türev, Dr. Vektör
Aileden beklentiler	Ebeveynler çocukların çok soru sormalarından şikayet etmemeli	Dr. Topoloji

Dr. Uzey ve Dr. Vektör, öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin giderilmesine yönelik olarak ders içeriklerinin düzenlenmesi veya derslerin veriliş sırası gibi eğitimde kanun yapıcılar tarafından yapılabilecek uygulamalara değinmişlerdir. Örneğin, Dr. Uzey üniversitede bu yönde değişiklikler yapılması gerektiğini belirtmiştir. Hem ispat içeriği bakımından bazı derslerin veriliş sırasının değişmesi gerektiğine hem de

Soyut Matematik dersinin ispat felsefesini aktarması bakımından daha yoğun olması gerektiğine değinmiştir:

“Bu özellikle bence 1. sınıfta Lineer Cebir dersi çok erken. 1. sınıfın 1. dönemi bir derste ispat yöntemi öğrenirken diğer derste çok ağır ispatlara maruz kalıyor öğrenciler. Ben okurken Analitik Geometri 1. sınıftaydı. Analitik Geometrinin 1. Sınıfta olup Lineerin ikinci sınıfta olmasını daha etkili daha iyi olduğunu düşünüyorum. Çünkü ispata dayalı dersleri çok erken görmek öğrencileri ispattan soğutuyor. Ve bunu daha öğrenmeden yapmaları daha büyük sıkıntı. Aslında derslerin 1. sınıftan 4. sınıfa doğru ispata dayalılık sırasında göre, yoğun kullanımına göre sıralanması daha iyi olur diye düşünüyorum. 3. sınıf bir öğrenci ispatı neden yaptığını neden yapması gerektiğini biliyor artık. Garipsemiyor daha doğrusu. Ama 1. sınıf bir öğrenci her zaman garipsiyor bunu. Bir diğer nokta da ispat felsefesini çok iyi anlatmamız gerekiyor. Soyut Matematiğin bence daha yoğun olması lazım. 1. sınıfta bunu ne kadar iyi verirsek o kadar iyi gider diye düşünüyorum.”

Dr. Vektör ise ispat tekniklerinin daha erken yaşlarda eğitim içeriğinde verilmesi gerektiğini ve bu noktada öğretmenlere de çok iş düştüğünü aktarmıştır. Dr. Vektör burada öğretmenlere de atıf yapıyor olsa da vurgu yaptığı noktanın öğrencileri ispata alıştırmak adına öğretim müfredatına ispatlama tekniklerinin de konması olduğu söylenebilir:

“Küçük yaşlardan itibaren sevdirmeli ve ispat teknikleri küçük yaşlardan itibaren öğretilmeli. Görsel olabilir. Mesela hikaye olabilir. Drama olabilir. Ön bilgiler verilip sonra ispata dökülebilir. Küçük yaşlardan teknolojiyi kullanarak ispat tekniklerine alıştırılabilir. Tabi ispat derken az bilgi gerektiren ispatlar var. Yani önce azar azar başlayıp sonra arttırmak. Küçük yaşlardan itibaren sevdirmek ve alıştırmak lazım. Tabi öğretmenlere çok iş düşüyor burada.”

Öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin giderilmesine yönelik sunulan önerilerin büyük çoğunluğunun öğretmenlerden beklentiler içerdiği söylenebilir. Bu beklentilerin de, ispata katılımı sağlama, beceri ve altyapı kuvvetlendirme ve farklı yöntemler kullanma gibi kendi içinde farklı öneriler içerdiği gözlenmiştir. Örneğin, Dr. Türev ve Dr. Öklid, öğrencilerin ispat anlatımına dahil edilmesi gerektiğini söylemişlerdir. Dr. Türev öğrencilerin ispatta nereden başlayacağını bilememe sorununa çözüm olarak sorularla onları ispata dahil etmeye çalıştığını aktarmıştır:

“Ama ben şunu yapıyorum mesela diyelim ki bir ispatı doğrudan yapamıyorlar. Nereden başlayacaklarını bilemiyorlar. Onlara hep şunu vurguluyorum. Elimde ne

var? Nereden başlayacağım? Hani en azından bu şekilde tetikleyici sorularla da ispatı onlara mümkün olduğunca dahil etmek gerekir.”

Dr. Öklid ise öğrencilerin kendilerinin ispat yapmaya çalışmasıyla bahsi geçen güçlüklerin aşılabileceğini belirtmiş ve bunu da öğretmenlerin sağlayacağını eklemiştir. Bu görüş, Dr. Öklid’in çözüm önerisi olarak sunduğu tek görüştür.

“Benim düşüncem o güçlüklerin yaşanmaması için herhangi bir şeyi benim ispatlamam değil onların ispatlayabilmesini sağlayabilmek beklemek, onların düşünmesini sağlamak. Olmuyorsa ben devreye girmeyi tercih ediyorum. Bu bence onları geliştiren bir taraf oluyor. Ama o soruyu ya da o ispatı tek başına yapıyorsa herhangi bir yere bakmadan uğraşması bile yeterli. Çözemesse bile öğrencinin uğraşmasını çözüm üretmesini sağlamamız gerekiyor. ancak bu tür güçlükler böyle giderilir diye düşünüyorum. Öğretmenin yapması yerine öğrencinin yapmasını sağlayabilmek.”

Öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin giderilmesi için öğretmenlere, öğrencilerin önbilgisinde veya düşünme süreçlerindeki eksiklikleri tamamlamaları da önerilmiştir. Örneğin, Dr. Soyut kendi uygulamaları üzerinden bu konuda yapılması gerekenlere değinmiştir:

“İspatı öncelikle iyice anlamalarını sağlamaya çalışıyoruz. Neyle muhatap olduklarını görmeleri için. Notasyona vurgu yapıyoruz. Bir ispatı yapabilmedeki en önemli şey matematiksel notasyonu düzgün kullanabilmekten de geçiyor aslında. Ya da onunla ilgili ön kavramlarda da iyi olabilmeli çünkü çoğu ispat bir şekilde ya iki küme eşitliği ya birbirini kapsama yani diğer matematiksel alt kavramları içeriyor. Dolayısıyla ön bilgilerini orada eğer ispatlayamıyorlarsa hatırlatmaya geliştirmeye çalışıyoruz. Ben birinci sınıfta olması nedeniyle Soyut Matematik derslerinde vurguluyorum bu ders bence çok önemli çünkü matematik bölümündeki bundan sonraki tüm derslerde kullanabilecekleri temel kavramları içeriyor. Küme, mantık, önerme, fonksiyon, bağıntı, notasyon kullanma vs bunları çok iyi sindirmeleri lazım diye düşünüyorum yani. Ve belki de lisede de başlayabilmeli bunların öncül temelleri lisede atılabilmeli. Ve tanımlara önem verilmeli.”

Dr. Soyut notasyonun doğru kullanılmasının ispat yapmada önemli olduğunu söylemiş ve öğrencilerin temel matematiksel kavramlara hakimiyetinin özellikle lisede başlaması gerektiğine de vurgu yapmıştır. Benzer şekilde Dr. Topoloji de notasyona değinerek “İlkokuldan itibaren matematik dilini kullanmaya teşvik etmek lazım.” demiştir.

Dr. Topoloji ve Dr. Uzey öğrencilerin düşünme becerilerine dikkat çekerek özellikle eleştirel düşünme becerilerinin geliştirilmesi gerektiğini aktarmışlardır. Dr. Uzey öğrencilerin eleştirel düşünme becerilerindeki düşüklüğün özellikle lisede çeşitli etkinliklerle ve felsefe derslerinde artırılabilceğini aktarmıştır:

“Eleştirel düşünme becerisi çok düşük çocuklarla muhatabız. Eleştirel düşünme becerileri yükseldikçe doğal olarak ispat becerileri de artacaktır. Ben doğrudan eleştirel düşünme becerisi ve ispatın paralellik içerdüğünü gördüm birçok makalede literatürden de biliyoruz daha doğrusu. O yüzden eleştirel düşünme becerisini arttıracak etkinlikler yapılması lisede çok önemli.”

Dr. Topoloji ise öğrencilerin ilkokuldan itibaren sorgulayıcı olarak yetiştirilmesi gerektiğine vurgu yapmış ve aynı zamanda ailelerden beklentisini de aktarmıştır.

“Bizim matematik anlamında söylediğimiz ispat büyük kalabilir ama ilköğretimden itibaren çocukları sorgulayıcı olarak yetiştirmek lazım yani bir kere neden niçin sorusunu sormaları lazım bir. İkincisi de öğretmenler ve ebeveynlerin de bu çocuk neden bu kadar soru soruyor diye merakını kesmemesi lazım. Merak sürekli uyandırılmalı çocuklarda.”

İspatlamada yaşanan güçlüklerin giderilmesine yönelik öğretmenlerden beklentilerden bir diğeri de uygulanan yöntemleri kapsamaktadır. Örneğin bu konuda en çok öneride bulunan Dr. Topoloji, öğrencilerin açık uçlu sorularla da değerlendirilmesi gerektiğini, çalışma yaprakları gibi materyaller kullanılmasını, öğrencilerin okudukları ispatları sınıfta sunmalarının sağlanmasını, ispat yöntemlerinin öğretilmesini ve daha basit ispatlardan zora doğru sıralama yapılmasını önermiştir:

“Sadece testlerle öğrencilerin değerlendirilmesi buna set çekiyor. Bu çok yanlış. Ben üniversite sınavlarında ya da katılımın çok olduğu sınavlarda açık uçlu sorularla işi götürelim ama en azından sınıf içerisinde daha küçük gruplarda bu tür alışkanlıkları açık kapalı ama daha kombine sorularla yapabilmek daha mantıklı olur. Uygun materyaller mümkünse hazırlanabilir. Çalışma yaprakları vs. gibi. Var olan ispatları inceleyip bunları sunmalarını sağlarsak o zaman anlayıp anlamadıklarını belki biraz daha rahat anlayabiliriz. Hem bizim onu değerlendirmemiz açısından hem de onun daha içselleştirmesi açısından önemli bence. Sonraki süreçte kendi ispatlarını tartışabilmeleri sınıf içerisinde grup içerisinde sağlamak da fayda var. Kimsenin kimseyi tenkit etmeden. İspat yöntemlerinin kesinlikle peşin peşin anlatılması lazım. Temel ispatların mutlaka

verilmesi lazım. Temelden kombine ispatlara doğru yavaş yavaş öğrenciyi itmeden götürsek daha iyi olur.”

Dr. Topoloji’ye benzer şekilde Dr. Kompleks öğrencilerin sınıfta ispat sunmalarının sağlanmasını önermiş ve başka öneriler de eklemiştir:

“Sınavlarda kolay da olsa bazı ispatlar sorulmalı. Bizler ispatı yaparken yangından mal kaçırmak gibi ispatı yapmamalıyız. İspat ödevleri verilerek sunmaları sağlanmalı. Biraz zorlamayla olması gerekir bence. Tamam sınıf içi özgür bir ortam olmalı sevgi saygı çerçevesinde olmalı ama birazda bence öğrenci zorlanmalı. Aslında görev verdiğim zaman öğrenciyi zorlarım ben. Tahtada kendini gör ve kendin yapmaya çalış. Sen burada tahtada öğrencilere ders anlatacaksın. Öğreneceksin sonra öğreteceksin. Bu nasıl öğretilir şurada bir gör bir konuş yani. Sorun değil yanlış yap.

Dr. Türev ise ders içinde uygulanabilecek bazı etkinlikler önermiştir:

“Belki böyle etkinlik formatında bireysel olarak ya da iki kişilik gruplar halinde düşünebileceği sorular olabilir öncelikle ispata hazırlayan. Daha sonra o soruların yanıtlanması olabilir. Belki ispata onları kullanarak geçiş yapabiliriz. Yani ispattan önce bir geçiş etkinliği. Hiç yapmadım ama aklıma geldi bu yapılabilir. Belki şu da olabilir. İspatta bazı adımları boş bırakıp onlardan doldurmaları istenebilir. Ya da ispatla ilgili bir şey yazdığında bunun gerekçelendirmesi istenebilir. Çift sütun ispatlar gibi. Neden şeklinde.”

Dr. Vektör öğretmenlerin kendilerini ve öğretim yöntemlerini yenilemesi gerektiğinden bahsetmiştir:

“Öğretmenlerin de güncel şeylere ayak uydurması gerekiyor. Mesela 30 sene önce yapılan ispatla onun güncellenmiş teknolojiyle desteklenmiş şeyleri olabilir onları takip etmesi lazım. Türkçe kullanım açısından da öncemli. Eskiden hipotez hüküm diyorduk şimdi verilen istenen diyoruz mesela. Kavramsal bakımdan da biraz yenilemesi gerekiyor.”

Dr. Topoloji, Dr. Uzay ve Dr. Kompleks öğrencilere ispatın öneminin faydalarının anlatılmasının da gerekli olduğuna vurgu yapmışlardır. Örneğin, Dr. Topoloji öğrencilerin ispatın faydalarını anlaması gerektiğini söylemiştir:

“İspatın faydalarının vurgulanması lazım. Dolayısıyla bunun aşağıdan gelmesi lazım. Zamana yayılan alışkanlıklar edinilmeli. Mesela bir Topoloji dersinde bir

dönem içerisinde bir çok şeyi kazandırmaya çalışıyoruz veya diğer derslerde sağlanmaya çalışılıyor ama hep böyle kısıtlı zamanlar oluyor. Biraz daha geniş zamanlara yaymak. Süreç içerisinde de hocaların mutlaka rol model olması lazım.”

Dr. Kompleks de “Öğrencilere ispatın önemini anlatılması” gerektiğini vurgularken Dr. Uzey bir önceki bölümde “öğrencilerin ispata neden ihtiyaç duyduğumuzu bilmedikleri” yönündeki eleştirisine çözüm önerisi olarak “*Neden ispata ihtiyaç duyduğumuzu önce öğrencilerin öğrenmesi gerekiyor, önce onu öğretmemiz gerekiyor*” demiştir.

Özetle, öğretim elemanların öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerin çözümünde yoğunluklu olarak öğretmenden beklentileri olduğu, bunun yanı sıra eğitimde kanun yapıcılara ve ailelere de öğrencilerin daha küçük yaşlarda ispatlamaya yönelik becerilerinin geliştirilmesi için öneriler sundukları söylenebilir.

4.3.5. “Öğrencilerden yayımlanmış ispatları incelemelerini istemeli miyiz? Neden?” sorusuna ilişkin bulgular

“Öğretim elemanlarının öğrencilerinden yapılmış ispatları incelemelerini istemelerine yönelik görüşleri nelerdir?” sorusu bu alt problemde ele alınmıştır. Bu sorunun yanıtı ile, öğrencilerin bir ders kitabındaki ispatı kendilerinin incelemesi ve anlamaya çalışmasına yönelik öğretim elemanlarının görüşlerinin alınması amaçlanmıştır. Kendilerinin öğrencilerden böyle bir uygulamayı isteyip istemediği ve bu uygulamanın faydalı olup olmayacağına yönelik görüşleri bu alt problem altında değerlendirilmiştir. Bu alt problemin incelenmesi ilk mülakatta sorulan “Öğrencilerden yayımlanmış ispatları incelemelerini istemeli miyiz? Neden?” sorusuna verdikleri yanıtların ve üçüncü mülakatta yaptıkları sıralamaların analizi ile yapılacaktır. Bu soruya “istemeliyiz” diyen öğretim elemanlarının bu tercihlerinin gerekçelerine yönelik görüşleri ve bu görüşlere ilişkin 3. mülakat (seçme-sıralama formu) sonuçları Tablo 28’de verilmiştir.

Tablo 28

Öğrencilerin ispat incelemelerinin istenmesinin gerekçeleri

<i>Öğrencilerin ispat okumalarının istenme gerekçeleri</i>	<i>Dr. Kompleks</i>	<i>Dr. Vektör</i>	<i>Dr. Türev</i>	<i>Dr. Soyut</i>	<i>Dr. Öklid</i>	<i>Dr. Topoloji</i>	<i>Dr. Uzay</i>
Derste yapılacak bir ispatın incelenmesi derse hazırlıklı gelmelerini sağlar.	2		2*	3			3
Öğrenciye pratiklik kazandırır.	5	*					
Öğrencinin muhakeme gücünü artırır.	4	1*			1	4	1
Öğrencinin ispat yöntemlerini öğrenmesini sağlar	3	1	4	4		3	*
Öğrencilerin bilgilerinin pekişmesini sağlar.	4*	2					
Benzer teoremlerin ispatlarının incelenmesi öğrenciye ispat için yol açabilir.	1*	3*	3	1*	2	2*	2
Bir teoremin farklı ispatlarının incelenmesi o teoremin anlaşılmasına katkı sağlar.	1	4	1	2*	3	1	

Tablo 28’de (*) işareti öğretim elemanlarından hangilerinin ilk mülakatta bu kategorideki görüşleri ifade ettiğini göstermektedir. Numaralar ise 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) öğretim elemanlarının bu görüşlerden hangilerini seçtiklerini ve bu görüşleri kendilerince hangi sırada önemli gördüklerini göstermektedir. Renklendirme, görsellik açısından numaralara göre yapılmıştır. Örneğin, bir öğrencinin ispat inceleyerek “muhakeme gücünü arttırabileceği” görüşü ilk mülakatta yalnızca Dr. Vektör tarafından dile getirilmiştir. Bununla birlikte, 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) bu görüş, Dr. Vektör, Dr. Öklid ve Dr. Uzay tarafından öğrencilerin ispat incelemelerini istemelerine sebep olarak ilk sırada tercih ettikleri görüş olmuştur. Öğretim elemanlarının seçimleri yönünden örnek vermek gerekirse örneğin, Dr. Türev “*Bir teoremin farklı ispatlarının incelenmesi o teoremin anlaşılmasına katkı sağlar*” ifadesini birinci sırada; “*Derste yapılacak bir ispatın incelenmesi derse hazırlıklı gelmelerini sağlar*” ifadesini ikinci sırada; “*Benzer teoremlerin ispatlarının incelenmesi öğrenciye ispat için yol açabilir*” ifadesini üçüncü sırada; ve son olarak da “*Öğrencinin ispat yöntemlerini öğrenmesini sağlar*” ifadesini dördüncü sırada tercih ettiği görülmektedir. Tablo 28’de Dr. Uzay’ın yalnızca üç görüşü sıraladığı, Dr. Vektör ve Dr. Kompleks’in de bazı görüşleri aynı önem derecesinde gördüğü görülmektedir.

“Öğrencilerden ispat incelemelerini istemeli miyiz?” sorusuna verilen yanıtlar istemeliyiz ve istememeliyiz diyenler açısından öncelikle iki kategoriye ayrılmaktadır. Dr. Türev ve Dr. Öklid istememeliyiz derken diğer öğretim elemanları istemeliyiz yanıtını vermiştir. Dr. Öklid öğrencilerden böyle bir şey istemediğini ve öğrencilerin ispat incelemelerinin onlara bir şey katmayacağını belirtmiştir:

“Hiç öyle bir şey istemiyorum. İstemedim. Yapmalarını istedim hep. İstemeli miyiz? Bence o bir şey katmaz. Ben mesela derslerde hep bekliyorum önce onlar yapsın diye. Ben bile çok geç yapıyorum. Onların öncelikle yapmasını bekliyorum. Çünkü o zaman o dediğim becerileri (matematiksel düşünme, eleştirel düşünme, akıl yürütme) kazandırma konusunda eksik davranırım diye düşünüyorum.”

Bu açıklamasında Dr. Öklid’in öğrencilerin ispat incelemesiyle ispat yapmalarını karşılaştırdığı ve yapmaya çalışmalarını tercih ettiği söylenebilir. İlk mülakatta istememe yönünde bir tercih belirtmiş olmasına rağmen 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) bu soruya sıralama yaparak yanıt verdiği görülmüştür (bkz. Tablo 28). Yani, öğrencilerin ispat okuyarak muhakeme gücünün artacağını, benzer teoremin ispatının incelenmesinin ispat için yol sağlayacağını ve bir teoremin farklı ispatlarının incelenmesinin teoremin anlaşılmasına katkı yapacağını düşündüğü söylenebilir.

Dr. Türev ise öğrencilerden ispat okumalarını/incelemelerini istemediğini belirtmiştir. Kendileri incelerken anlamayabileceklerini belirterek bunu istememek gerektiğini ancak derse hazırlıklı gelmek açısından bunun uygulanabileceğini söylemiştir:

“Bu şekilde bir şeyi incelemelerini istememeliyiz. Ama şu olabilir belki diyelim ki o gün bir teoremi ispatlayacağım yani hiç böyle bir şey yapmadım ama çocukların araştırma yapmalarını sağlamak için Analizin Temel Teoremi ne, neden temel teorem denmiş? Nasıl ispatlanır, nereden çıkmış gibi önceden hazırlıklı gelmeleri sağlanabilir. Ama herhangi bir Analiz kitabını aldıklarında da ispatı anlamamaları da olası. Verilen derse göre istenebilir. Ben Analiz I-II dersinde öyle bir şey istemiyorum. Çünkü zaten bu derste konu konu yapılması gereken ispatları yapıyoruz sınıfta.”

3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) “derse hazırlıklı gelmeyi sağlar” görüşü Dr. Kompleks ve Dr. Türev tarafından ikinci sırada, Dr. Soyut ve Dr. Uzak tarafından üçüncü sırada tercih edilmiştir.

Dr. Topoloji, Dr. Öklid'in öğrencilerin gerekli becerileri ispatı incelemekle kazanamayacağı düşüncesine paralel bir açıklama yapmış bununla birlikte yine de öğrenciye bir yol açması açısından faydalı olacağını belirtmiştir:

“Bana kalırsa bunun faydası var. Çünkü bir yerde rol model edinme gibi diye düşünüyorum ben. Tamamen yapılmış ispatların üzerinden çalışmak belki öğrenciyi çok fazla bir yere götürmez ama başlangıç açısından özellikle el alışkanlıkları edinip kim nasıl yapmış dediğim gibi onu rol model edinip acaba ben bu mantığı kullanabilir miyim diye gidebiliriz. Yani neyi nasıl incelemiş matematik diliyle nasıl ifade etmiş, nasıl sonuçlandırmış, görsel olarak nasıl konumlandırmış, ispatın estetiği de çünkü bizim için önemli dolayısıyla bunları görmek açısından bence faydalı. Yani kitaplardan vs. de incelenebilir bu sınıfta bizim yaptığımız ispatları birlikte incelememiz şeklinde de olabilir zaman zaman sonra yavaş yavaş öğrencinin kendisine doğru ağırlığı kaydırmak daha mantıklı oluyor.”

Dr. Topoloji'nin rol model edinme başlığı altında “ben bu mantığı kullanabilir miyim” yönünde yaptığı açıklamalar “Benzer teoremlerin ispatlarının incelenmesi öğrenciye ispat için yol açabilir” kategorisi altında değerlendirilmiştir. Aynı şekilde, Dr. Soyut da benzer teoremlerin ispatlarını incelemenin öğrenciye bir yol açabileceğinden bahsetmiş ve bu durumu kendi tecrübeleriyle örneklendirmiştir:

“Yine ben zamanında bir yerde yayınlanmıştı transandant sayılarla ilgili. Bir transandant sayı gelmişti aklıma, onun transandant olduğunu ispatlamaya çalışmıştım. Araştırdım, bu tarzda ilk olarak bir matematikçi göstermiş. Ve onun ispatını incelemiştim. Kendi tanımladığı transandant sayının transandantlığını nasıl ispatlamış diye. Çelişki bulma yöntemi kullanmış ve ortalama değer teoremi bile geçiyordu. Sonra ben orada yapılan ispatı bir şekilde kendi sayıma uyarladım. Ve onun transandant olduğunu gösterebilmişim. Mesela Kurt Mahler diye bir matematikçi bu sayının ispatını yapmış. Mesela onun nasıl gösterdiğini hiç bilmiyorum yani bulamadım onu. Ama diğer matematikçinin ispatını uyarlayarak ispatladım. Dolayısıyla var olan ispatları incelemek o konuda bilgi sahibi olmak, belki daha sonra başka ispatlarda faydalı olabilir. Bir yol açabilir. Bir öneride bulunabilir.”

3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) “Benzer teoremlerin ispatlarının incelenmesi öğrenciye ispat için yol açabilir” görüşü Dr. Kompleks ve Dr. Soyut tarafından birinci sırada, Dr. Öklid, Dr. Topoloji ve Dr. Uzay tarafından ikinci sırada, Dr. Vektör ve Dr. Türev tarafından ise üçüncü sırada tercih edilmiştir.

Dr. Kompleks de öğrencilerin ispat incelemelerinin, ispatlamanın nasıl yapılacağına yönelik bir fikir vereceğini belirtmiştir. Dr. Kompleks'in bu görüşü de "Benzer teoremlerin ispatlarının incelenmesi öğrenciye ispat için yol açabilir" kategorisi altında değerlendirilmiştir. Ek olarak ispat incelemenin, bilgilerinin pekişmesinde faydalı olacağını da söylemiştir:

"Evet yapılmış olan ispatları inceleseler iyi olur diye düşünüyorum. En azından şu açıdan ne nereden nasıl oluyor yani bir genellemeye nasıl varıyoruz bir teorem nasıl ispatlanıyor? Daha sonra öğrencinin kendisi buradan yola çıkarak yeni bir şeyler yapabilir mi bulabilir mi? Ya da teoremler geliştirebilir mi? Faydalansın diye yani. İnceleseler iyi olur. Bilgileri yerine daha çok oturur."

İspat incelemenin "ispat yapmaya bir yol açacağına" değinen Dr. Vektör de bu uygulamanın öğrenciye aynı zamanda pratiklik kazandıracağını ve öğrencinin muhakeme gücünü arttıracığını söylemiştir.

"Ne kadar ispat görürse muhakeme gücü o kadar artar ve teknik öğrenmiş olur. Pratiklik kazandırır. O yönü de var. Mesela ne kadar ispat görürse ona benzer bir ispat yaptığı zaman... Sadece ispat olarak düşünmemek lazım, soru için de geçerli. Başka da çok bir şey kazandıracağını düşünmüyorum. Aslında ne kadar ispat görürse fazla muhakeme gücü geliyor. Aynı zamanda ne kadar ispat görürse kendisinin ispat tekniğini de geliştirir. Çünkü bu iş tecrübedir. Mesela, diyelim ki verdim şunun ispatı nedir? Neye bakacak. Tecrübe yani. Gördüğü ispatları düşünerek ona göre ispat yapacak. Bu mesela ispat yeteneğini de artırır."

"Öğrenciye pratiklik kazandırır" görüşü ise 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) yalnızca Dr. Kompleks tarafından beşinci sırada tercih edilmiştir. Bununla birlikte "öğrencinin muhakeme gücünü artırır" görüşü üç öğretim elemanı (Dr. Vektör, Dr. Öklid ve Dr. Uzak) tarafından birinci sırada ve Dr. Kompleks tarafından ise dördüncü sırada tercih edilmiştir.

İlk mülakatta istemeliyiz cevabını veren öğretim elemanlarından Dr. Uzak bu uygulamanın öğrencilerin ispat yöntemlerini öğrenmesine faydası olacağını düşündüğünü belirtmiştir. Bu uygulamayı özellikle lineer cebir dersine girdiği lise matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencileri açısından ele aldığı söylenebilir:

"Evet istemeliyiz. Çünkü özellikle 1. sınıftaki öğrenciler ispat yaparken çok zorlanıyorlar. İspatı nasıl yapacaklarını bilmiyorlar. İspat yöntemlerine tam hakim değiller. Ve birinci sınıfta Soyut Matematik, Lineer Cebir ve Analiz derslerini aynı"

anda alıyorlar. Hepsinin içinde ispat var. Ama soyut matematikte ispat yöntemini daha öğrenmeden Lineer Cebirde ve Analizde ispat yapmaya başlıyorlar. Tabii, çoğu başarılı olamıyor. O yüzden olabildiğince fazla ispat yöntemlerini öğrencilere göstermeliyiz. Bir de farklı dersler için çok sık kullanılan ispat yöntemleri var. Mesela Analizde doğrudan ispat yöntemi çok fazlayken mesela Cebirde çelişkiye ulaşma ya da olmayana ergi yöntemi daha fazla kullanılabilir. O yüzden olabildiğince incelemeleri lazım.”

Dr. Uzak aynı zamanda derste bir ispatın sonunda durum analizi yaptığı konuşmada da öğrencilere ispat okumalarını tavsiye etmiş ve özellikle bunun için kütüphanelerden faydalanmalarını önermiştir:

“İspat konusunda çok ciddi eksikler var. 1. sınıfta genellikle böyle olur. Ama bunu ispatları iyi okuyarak geçebilirsiniz. Yani ispat okumanız lazım. Nasıl düşünmüş? Nereden gelmiş? Soyut Matematik dersi alıyorsunuz değil mi? Soyut Matematik dersi özellikle ispatı anlatan bir derstir. İspat yöntemlerini anlatmıştır hocanız. Doğrudan ispatı anlatmıştır, dolaylı ispatı anlatmıştır. Biraz onların üstünde durun. Siz böyle geçiyorsunuz öyle değil o iş. Mesela benim yaptığım ispatın türü ne şu anda? Düşünüyor musunuz ne tür ispat yaptığımı? (öğrencilerden farklı cevaplar gelir) Bakın emin değilsiniz... Ya işte bunu çözmeden olmaz. Bunları iyi okumanız lazım. Matematiğin esası bu. Biz 4 yıl boyunca ispat yapacağız. Doğal olarak ispat nasıl alışıyor anlamamız lazım. İnternette o kadar çok örneği var ki! Ama iyi kaynakları okuyun. Ben çoğu zaman kütüphane kullanırım. Siz internette iyi bilgiyi ayırt edemezsiniz çünkü.”

3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) “ispat yöntemlerini öğrenmeyi sağlar” görüşü Dr. Vektör tarafından birinci sırada, Dr. Kompleks ve Dr. Topoloji tarafından üçüncü sırada, Dr. Türev ve Dr. Soyut tarafından dördüncü sırada tercih edilmiştir. Dr. Soyut da ispat yöntemlerine değinmiş ancak özellikle bazı şık ispatlarda kullanılan yöntemlerin incelenmesinin benzer durumlarda ispat yaparken faydalı olabileceğini ve akla gelmeyecek şeyleri öğrenmelerini sağlayacağını vurgulamıştır. Bu nedenle Dr. Soyut’un bu açıklaması “ispat yöntemlerini öğrenmeyi sağlar” kategorisi altında değil de “öğrenciye bir yol açabilir” kategorisi altında değerlendirilmiştir:

“Mesela eş güçlülük de sonsuz kümelerin birbirine denkliği kavramında fonksiyonlar kümesi var. $(0,1)$ aralığından reel sayılara tanımlı tüm fonksiyonların kümesi. Bunun kardinalitesi reel sayılardan büyük. Ve öyle enteresan bir ispat var ki ben hep çok şık bulmuşumdur. Ben de bir sene sonra falan ispatta gerçekten ne

dediğini anlayabildim. ‘Vay be!’ demiştim. Öğrencilere de dedim eğer bir tepkide bulunmuyorsanız bu ispatı tam olarak anlamıyorsunuz demektir. Çünkü o ispatın orada ne yaptığını anlayan bir insan ‘vay be’ diyebilir gerçekten. Dolayısıyla bazı yapılmış çok özel ispatları incelemeleri bu bağlamda faydalı olabilir. Çünkü insanın o tür bir ispatı kendi başına yapabilmesi çok zor. Çünkü tarih serüveninde bile ilgili matematikçilere ün kazandırmış ispatlar. Yani normal akademisyenlerin bile sıfırdan baksalar tek başına akıl edemeyecekleri argümanlar içerebiliyor. O yüzden bu tür özel ispatlarda özellikle yapılmış ispatları incelemeleri faydalı olabilir. Hatta bundan sonrasında benzer başka şeylerde o ispat yöntemleri faydalı olabilir.”

Dr. Soyut yukarıda bahsi geçen “bir teoreme benzer başka teoremlerin ispatının incelenmesinin” yanı sıra bir teoremin farklı ispatlarının incelenmesine de değinmiştir. Bu uygulamanın da teoremin daha iyi anlaşılmasına katkı yapacağını şu şekilde örneklendirmiştir:

“Bazı teoremlerin birkaç farklı ispatı olabiliyor. Bunları incelemeleri onlar için faydalı olabilir. Ya da farklı disiplinler arasında ilişki bile kurabilir. Farklı disiplin derken matematiğin kendi kavramları arasında. Ki ilişkilendirme müfredatın bile kazandırmayı hedeflediği süreç becerilerinden. O yüzden lazım. Diğer ispatları incelemeleri belki de yaptığı ya da bildiği... Diyelim ki bir teoremi ispatlamaya çalışıyoruz. Bu konuda yapılmış başka ispatlar varsa onları incelemeleri mevcut yapılmış ispatı da daha iyi anlamlandırmalarına da sebep olabilir. Mesela geçenlerde derste soyut cebir konuları anlatırken orada devirli gruplarla ilgili bir yer var. Bu devirli grupların içinde üreteç sayısı var. $Z_m \times Z_n$ de üreteç sayısını belirlerken m ile n aralarında asalsa bu devirli oluyor. Üretece bakarken de $\Phi(n)$, $\Phi(m)$ oluyor. Ve orada $\Phi(n)$, $\Phi(m)$ in $\Phi(m.n)$ e eşit olması gerektiğini sorduğumuz zaman yani onu sayılar kuramındaki bir yere atıfta bulunup onun ispatını soyut cebir de yapabilmiş oluyoruz. O an için birbirinden farklıymış gibi görünen iki kavram arasında ilişki bile kurulmuş oluyor. Ki diğer tarafta biz o ispatı farklı şekilde yapıyoruz ama burada cebire gelince devirli grup kullanarak bunu yapabiliyorsun. Dolayısıyla yapılmış diğer ispatları da incelemek bu bağlamda ilişkilendirme yapmak ve topyekûn daha iyi anlamak açısından faydalı olabilir diye düşünüyorum.”

“Bir teoremin farklı ispatlarının incelenmesinin o teoremin anlaşılmasına katkı yapacağı” görüşü üç öğretim elemanı (Dr. Kompleks, Dr. Türev ve Dr. Topoloji) tarafından

birinci sırada, Dr. Soyut tarafından ikinci sırada, Dr. Öklid tarafından üçüncü sırada ve Dr. Vektör tarafından dördüncü sırada tercih edilmiştir.

Özetle, genel olarak öğrencilerin ispatları incelemelerinin istendiği ve bu uygulamanın farklı açılardan fayda sağlayacağına yönelik görüşler elde edilmiştir. 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) ise bu görüşlerden “öğrencinin muhakeme gücünü arttırır”, “Bir teoreme benzer teoremlerin ispatlarının incelenmesi öğrenciye ispat için yol açabilir”, “Bir teoremin farklı ispatlarının incelenmesi o teoremin anlaşılmasına katkı sağlar” ifadelerinin en çok ve öncelikli tercih edilen görüşler olduğu söylenebilir.

4.3.6. “İspat yaparken öğrencilerin derse katılımını beklemek gerekir mi? Katılım bekliyorsanız bunun için neler yaparsınız? sorularına ilişkin bulgular

Öğretim elemanlarının derste ispat yaparken, öğrencilerin derse katılımını bekleyip beklemediklerine ve katılım bekliyorlarsa bunun için neler yaptıklarına yönelik görüşleri alınmıştır. Öncelikle öğrencilerin ispat sunumuna katılımını bekleyip beklemedikleri sorulmuştur. Dr. Vektör haricinde tüm öğretim elemanları öğrencilerin katılımını beklediklerini belirtmişlerdir. Dr. Vektör, geleneksel öğretimde gerekli olmaması ve zaman kaybı olacağı düşüncesiyle öğrencinin bir ispatı yapmasını ya da öğretmen ispatı yaparken katılım göstermesini beklemediğini söylemiştir:

Dr. Vektör: “Yok öyle bir şeyim yok. Mesela maksimum minimum olması için birinci türev sıfır olması gerektiğini ispatlıyorum. Bunu ben vermiyorum. Çünkü zaten ispatı yapılmış. Şimdi onu yaparsam ders saatlerinde zaman kaybederiz. Çünkü ispatı yapılmış ve niye yapıldığını bizim ifade etmemiz gerekiyor.”

Araştırmacı: “Katılımdan kastedilen sadece ispatı öğrencinin yapması değil, peki ispatın adımlarına katılım bekler misiniz?”

Dr. Vektör: “Yani ben çok önemli olduğunu düşünmüyorum bunun. Bir ara aktif öğrenme vardı. Belki o tür öğrenme yöntemlerinde belki öyle bir katılım istenebilir ama geleneksel öğretim yönteminde gerekli değil. Zaten hocanın hakimiyeti de önemli. Öğrencileri dahil etmek maalesef çok fazla olmuyor. Öğrenciler genellikle teorem ispatlarında suskun kalıyorlar. İspata katkı yapma taraftarı olmuyorlar. Ben de ilk başlarda katmak istiyordum ama sonradan baktım ki hem zaman kaybı oluyor hem de katılım olmuyor. Baştan da söylediğim gibi teorem ve ispatlar matematikte üzerinde durulması gereken konular, öğrenciler de bunlarda çok

zorlandıkları için bir süreçten sonra takip edebiliyorlar o nedenle birden bunları yapamıyorsunuz.”

Dr. Vektör bu soruya yukarıdaki yanıtı vermiş olmasına rağmen “ispat yaparken kesinlikle yapılması gereken uygulamalar” a yönelik fikirlerini anlatırken soru cevapla öğrencileri ispata kattığını da söylemiştir (bkz. Bölüm 4.2.3):

“Eğer mesela türev tanımı kullanacaksak bu türevin tanımı neydi arkadaşlar gibi öğrencileri soru cevap şeklinde katıyorum.”

Dr. Vektör’ün bu açıklamaları doğrultusunda, ispat anlatırken öğrencilerin soru cevapla küçük katılımlar göstermesini istediği ancak öğrencilerden daha büyük katılımlar beklemediği ve bunu gerekli görmediği düşünülebilir. Dr. Vektör haricindeki diğer öğretim elemanları öğrencilerin katılımını beklediklerini ve katılım için neler yaptıklarını belirtmişlerdir. Katılımı neden istedikleri ile ilgili verdikleri yanıtların analizi sonucunda ise, *öğrencilerin ancak ispata katılarak anlayabileceği ya da düşünme becerilerinin bu yolla gelişebileceği* yönünde temel olarak iki neden üzerinde durdukları gözlenmiştir. Örneğin, Dr. Öklid daha önceki bölümlerde de bahsedildiği gibi öğrencilerin katılımını, onların ispat yapmaya çalışmaları şeklinde beklediğini ve bunun da onların düşünme becerilerini geliştireceğini belirtmiştir:

“İspat yaparken o akıl yürütme becerisi, matematiksel düşünme becerisi, eleştirel düşünme becerisi kazandırma ancak kendilerinin yapmasıyla gerçekleşir.”

Benzer şekilde, öğrencilerin düşünmelerini sağlamaya çalıştığını belirten Dr. Türev de bu uygulamanın aynı zamanda *öğrencileri derste aktif hale getirdiğini* de söylemiştir:

“Mümkün olduğunca çok öğrenciye ulaşmaya çalışırım. Çünkü onun önemli olduğunu düşünüyorum. Bu ne sağlar? Hem öğrencilerin daha aktif olmasını hem de çoğunun düşünmesini sağlar.”

Anlatılanların anlaşılması için diyalogun önemli olduğunu belirten Dr. Uzey öğrencinin öğretmeni yakalayabilmesi için bu uygulamanın gerekli olduğunu aktarmıştır:

“Öğrencinin katılımını beklemek gerekir. Yoksa öğrenci sizi yakalayamıyor. (...) Öğrencilerle diyalog çok daha önemli yani bunu sadece tahtaya yazmanız önemli değil öğrencinin onun neden orada yazıldığını anlaması lazım.”

Dr. Uzey’a gibi Dr. Soyut da öğrencilerin anlatılanı anlamasının önemine değinirken aynı zamanda bu uygulamanın *öğrencilerin anlayıp anlamadıklarını ölçmeyi sağladığına* da vurgu yapmıştır:

“Elbette beklemek gerekir. Çünkü öbür türlü direk kendiniz anlatırsanız yani ne kadar iyi anlatılırsa anlatılsın onlar bir şekilde dahil olmadıkları zaman bence anlamayabiliyorlar. Ya da derste bu ispat anlaşıldı mı anlaşılmadı mı bunu anlayabilmek için öğrenci katılımı iyi bir ölçüt aslında.”

Dr. Kompleks ise “*Evet katılım beklemek gerekir...*” derken bunu neden istediğine yönelik bir açıklama yapmamıştır. Öğretim elemanlarına ispat yaparken öğrencilerin katılımlarını bekleyip beklemediklerinin yanı sıra katılım bekliyorlarsa bunun için neler yaptıkları da sorulmuştur. Tablo 29 öğrencilerin ispat sunumuna katılım göstermesi gerektiğini söyleyen öğretim elemanlarının, katılım sağlamak adına yaptıklarını söyledikleri uygulamaları göstermektedir. Bu tabloya göre öğretim elemanlarının öğrenci katılımını sağlamak adına yaptıklarını söyledikleri uygulamalar üç başlık altında değerlendirilmiştir. Bu başlıklara yönelik açıklamalar ve mülakat transkriptleri aşağıda verilmiştir.

Tablo 29

Öğretim elemanlarının ispat anlatımı esnasında öğrencilerin katılımını sağlamak için yaptıkları uygulamalar

Öğrencilerin ispata katılımını sağlamak adına yapılanlar	Öğretim Elemanı
Soru sorma	Dr. Topoloji, Dr. Uzey, Dr. Soyut, Dr. Kompleks, Dr. Türev, Dr. Öklid
Cesaretlendirme	Dr. Topoloji, Dr. Kompleks
Öğrencilere sorumluluk verme	Dr. Öklid, Dr. Topoloji

Katılım beklediğini belirten tüm öğretim elemanlarının bunun için en sık başvurduğu uygulamanın ‘soru sorma’ olduğu söylenebilir. Örneğin, Dr. Kompleks genellikle öğrencilerin katılım göstermediğini belirtmiş ve soru sorarak onları ispat anlatımına katmaya çalıştığını aktarmıştır:

Dr. Kompleks: *“Diyorum bazen buradan sonra devam etmek isteyen var mı? Ama şimdiye kadar 1-2 öğrenci çıkmıştır. Hemen tahtaya ispatı yaptım bitirdim değil*

zaten. Basamak basamak, mesela bir yere kadar geldik evet söyleyin bakalım bunu yazdım neye dayanarak? Şurada şunu kullandım. Başka bir şey kullansam ne olur?”

Araştırmacı: *“Soru sorarak onları katıyorsunuz yani?”*

Dr. Kompleks: *“Tabi. Mesela limitin tekliğini ispatlıyoruz değil mi? Ezbere bilinen şey. Ama öğrenci onun farkında değil yani. Oradaki epsilon, her epsilon ne anlama geliyor. Orada bir sonuca varıyoruz. Neden yani? Bu böyle hadi bakalım sen söyle. Yok. Sen söyle. Yok ! Bunu bakalım biliyor musun bilmiyor musun bazen soruyorum yani. Bazen de öğrencilere ispata geçişlerini sorarak ispatın içine onları çekerim.”*

Bu açıklamada Dr. Kompleks’in sorduğu sorulara cevap alamamaktan da yakındığı söylenebilir. Benzer şekilde Dr. Uzay da öğrencilerle çok sık diyalog kurduğunu ve sorular sorduğunu yukarıda belirtilen nedenleriyle birlikte aktarmıştır. Dr. Soyut ise soru cevaplarla öğrencileri derse katmaya çalıştığını ancak cevap veren öğrencilerin genellikle aynı öğrenciler olduğunu fark ettiğini belirtmiştir:

“(…)O yüzden ben sürekli soru cevaplı anlatmaya çalışırım. “Burada göstermemiz gereken şey ne? Hipotezimiz ne? Bunu gösterebilmek için ne yapmak lazım?” vs diye öğrencileri konuşturmaya çalışırım. Ama burada da şöyle bir tecrübem var. Soru cevap türünde bir şey yapıyorsanız ne yaparsanız yapın bir an bakıyorsunuz her sorunuza cevap geliyor bu aldatıcı bir şey biraz. Eğer dikkatli olursanız bizim derslerde özellikle aslında 40 kişilik bir sınıfta bu şekilde cevap verip konuşanlar aynı 6-7 kişi. Özellikle de bu kişiler sınıfta farklı yerlerde oturmuşlarsa bir an insana şunu hissettirebiliyor bak sınıf ne güzel katılıyor! Ama böyle olmuyor. Bu bağlamda neredeyse sınıfın %10 una ulaşmış oluyorsunuz. Diğerleri sadece takip ediyor. Belki o tartışmalardan da bir şeyler öğreniyorlar ama direk derse dahil olanlar çok değil diye görüyorum.”

Benzer şekilde Dr. Türev de öğrencilerle diyalog halinde ispatları yaptığını aktarırken aynı zamanda Dr. Soyut’un fark ettiğini söylediği ‘hep aynı öğrencilerin cevap vermesi’ durumunda da neler yaptığını belirtmiştir:

“Mutlaka öğrencilerle etkileşim içinde yaparım ve o diyalogu hiç kaybetmem. Tabi ki sınıfta bazı öğrenciler var ki onlar çok hızlı düşünüyor. Diğerlerine göre daha iyiler. Onları da genelde sanki söyledikleri doğru değilmiş gibi ifade edip diğer

öğrencilerin dikkatini çekmeye çalışırım. Ya da bazen onlardan sessiz kalmalarını isteyebiliyorum bütün öğrenciler dahil olsun diye.”

Soru sorduğunu ifade eden bir başka öğretim elemanı ise Dr. Öklid’dir. Dr. Öklid aynı zamanda bir diğer kategoriye de oluşturacak şekilde, öğrencilerden ispatlamaya çalışmalarını istediğini aktarmıştır:

“Önce ben yapmıyorum zaten. Öncelikle onlardan yapmasını istiyorum. Ve sonra birisi bile yapmış olsa bekliyorum öncelikle ama sonra öğrencilerin tahtaya gelip yapmasını istiyorum Hiç kimse yapamıyorsa öğrenciyle diyalog halinde soru yanıtla yapmaya çalışıyorum ispatları.”

Dr. Öklid gibi Dr. Topoloji de ders içinde öğrencilerden ispatlamaya çalışmalarını istediğini söylemiştir. Dr. Topoloji’nin aynı zamanda soru sormaya ve diyaloga vurgu yaptığı da gözlenmiştir. Buna ek olarak, Dr. Topoloji hem öğrenci katılımı için sorular sorduğunu hem de derste sunacağı teoremlerin bir kısmını öğrencilere önceki derslerde vererek çözmeye çalışmalarını ve dersten önce öğrencilerin kendi odasına gelerek ne yaptıklarını anlatmalarını istediğini yani öğrencilerin cevaplarını değerlendirdiğini aktarmıştır (bkz. 4.2.6). Bu uygulamayı neden yaptığına yönelik ise şöyle bir açıklama da bulunurken aynı zamanda öğrencilerin katılımının önündeki en büyük engelin önyargıları olduğunu belirterek onları cesaretlendirmeye çalıştığını da söylemiştir:

“Ders içinde diyalog soru cevap bizim en çok kullandığımız şeyler. Diyalog oldukça önemli. Beraberce teoremlerin ifadelerini analiz etmek beraber düşünmek, ipuçları ile onları yavaş yavaş iteklemeye çalışmak, ellerindeki çalışma kağıtları da özellikle topoloji için önemli. Ön bilgilerini yavaş yavaş hatırlatmak soru cevaplarla. Mümkün olduğunca beraber yani dediğim gibi... Ben gerek ders içerisinde gerekse çalışma yapraklarının sonundaki soruları yanıtlayıp getirip ne yaptıklarını anlatmaları şeklinde istiyorum... Cesaretlendirme de çok önemli yani ben yapamam diyerek başlıyor zaten topoloji için. Soruyorum 1. sınıf veya 2. sınıf öğrencilerine topoloji diye bir isim duydunuz mu diye. Hocam çok zormuş diyorlar. Geldikleri anda böyle bir bariyerle karşılaşıyoruz zaten. Dolayısıyla cesaretlendirme.. ‘Bak yapabilirsin, oluyor!’ şeklinde önemli yani. Geri dönüt mutlaka vermek gerekiyor. Onu da özellikle 2-3 kişi grup olarak yanıma geldiğinde daha çok sağlayabiliyorum nerde yanlış yapmışlar, neyi yanlış yazmışlar, neyi yanlış düşünmüşler, bunun geri dönütünü verdiğinizde iş biraz daha hızlanarak gidiyor. Her fikir doğru yanlış olsun değerlendirmek gerekiyor yani refüze etmeden

bu işi yapmak gerekiyor. Varsa yanlışların da neden yanlış olduğunu göstererek ipuçları... Olumsuz tenkit yok. Olmaması gereken bir şey.”

Dr. Topoloji gibi Dr. Kompleks de öğrencilerin katılımını arttırmak amacıyla ispat esnasında öğrencilere yol gösterdiğini ve ipuçları verdiğini belirtmiştir. Bu uygulamasıyla öğrencileri cesaretlendirmeye çalıştığı söylenebilir.

“Bazen de şöyle oluyor. Mesela diyelim ki improper fonksiyonlarda bir özellik. Önerme biçiminde veriyoruz. Hadi bakalım bu önermeyi kim ispatlayacak. Soruyorlar. Yol gösteririm. Tanım kullanın bakalım ne olacak tarzında yol gösteririm.”

Özetle, öğretim elemanlarının, öğrencilerin anlamalarını arttırma ve düşünme becerilerini geliştirme gibi amaçlarla onların ispat sunumuna katılımlarını bekledikleri ve bunu sağlamak için de soru sorma, cesaretlendirme ve sorumluluk verme gibi yöntemler uyguladıkları söylenebilir.

4.3.7. “Öğrencilerden ispat yapmalarını istemeli miyiz? Neden?” sorusuna ilişkin bulgular

“Öğretim elemanlarının öğrencilerin ispat yapmalarına yönelik görüşleri nelerdir?” sorusu bu alt problemde ele alınmıştır. Bu sorunun yanıtı ile, öğrencilerin bir teoremi kendilerinin ispatlamaya çalışmasına yönelik öğretim elemanlarının görüşlerinin alınması amaçlanmıştır. Kendilerinin öğrencilerden böyle bir uygulamayı isteyip istemediği ve bu uygulamanın faydalı olup olmayacağına yönelik görüşleri bu alt problem altında değerlendirilmiştir. Bu alt problemin incelenmesi ilk mülakatta sorulan “Öğrencilerden ispat yapmalarını istemeli miyiz? Neden?” sorusuna verdikleri yanıtların ve üçüncü mülakatta bu yanıtlara yönelik yaptıkları sıralamaların analizi ile yapılmıştır.

Bu soruya verilen yanıtlarda tüm öğretim elemanlarının “istemeliyiz” dediği görülmüştür. Ancak hangi durumlarda istenmesi gerektiği konusunda farklı ön şartlar öne sürüldüğü belirlenmiştir. Öğrencilerden ispat yapmalarını bekleme nedenleri de Tablo 30’da verilmiştir.

Tablo 30

Öğretim elemanlarının öğrencilerinden ispat yapmaya çalışmalarını isteme amaçları

<i>Öğrencilerin ispat yapmalarının istenme gerekçeleri</i>	<i>Dr. Kompleks</i>	<i>Dr. Vektör</i>	<i>Dr. Türev</i>	<i>Dr. Soyut</i>	<i>Dr. Öklid</i>	<i>Dr. Topoloji</i>	<i>Dr. Uzay</i>
Öğrenciyi dersin içine çekmek	3*			1	3		
Anlayıp anlamadıklarını görmek	4		2	3*	4	2*	2
Matematiğin işleyişini öğrenmelerini sağlamak	2		3	4	2	4	3*
Akıl yürütme/matematiksel düşünme/eleştirel düşünme vb. becerileri kazanmalarını sağlamak	1	1	1*	3	1*	1	1
Bilgilerini veya benzer diğer ispatları pekiştirmelerini sağlamak	5	2*	4	2*		3	

Tablo 30’da (*) işareti öğretim elemanlarından hangilerinin ilk mülakatta bu kategorideki görüşleri ifade ettiğini göstermektedir. Numaralar ise 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) öğretim elemanlarının bu görüşlerden hangilerini seçtiklerini ve bu görüşleri kendilerince hangi sırada önemli gördüklerini göstermektedir. Renklendirme, görsellik açısından numaralara göre yapılmıştır. Örneğin, bir öğrencinin kendilerinin ispat yapmaya çalışmalarını “Öğrenciyi dersin içine çekmek” amacıyla yapılması gerektiğini ilk mülakatta yalnızca Dr. Kompleks dile getirmiştir. Bununla birlikte 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) bu görüş Dr. Soyut tarafından öğrencilerin ispat yapmalarını istemesinde ilk sırada tercih ettiği amaç olmuştur. Dr. Kompleks ve Dr. Öklid ise bu görüşü üçüncü sırada tercih etmişlerdir.

Öğretim elemanlarının, öğrencileri dersin içine çekmek, anlayıp anlamadıklarını ölçmek, matematiğin işleyişini öğrenmelerini sağlamak, çeşitli düşünme becerilerini kazanmalarını sağlamak ve bilgilerini sağlamlaştırmak gibi gerekçelerle onlardan ispat yapmalarını isteyebildikleri belirlenmiştir. Örneğin, Dr. Kompleks öğrencileri dersin içine çekmek amacıyla (yapabileceklerinden emin olmayarak) derste sunulan bir teoremin ispatını onların yapmasını istemek gerektiğini belirtmiştir:

“Kendilerinin ispat yapmalarını isteyebiliriz ama yapabilirler mi bilemiyorum yani. Bazı kolay ispatları yapmalarını isteyebiliriz. Ama her ispatı yapmasını da beklemeyiz öğrenciden. Çünkü öyle ispatlar var ki bizim bile işin içinden çıkmamız bazen zor oluyor. Ama arada istemeliyiz dersin içine çekmek için. İlgilerini çekmek için istemeliyiz. Yapan olursa da onu ödüllendirmeliyiz.”

Dr. Uzay bu uygulama ile matematiğin işleyişini öğrenmelerinin mümkün olabileceğini belirtmiştir. Ancak bunun için öğrencinin öncelikle ispat yöntemlerini öğrenmesi gerektiğine vurgu yapmıştır.

“İspat yapmalarını istiyoruz ki matematiğin işleyişi hakkında bilgi sahibi olsunlar. Matematiğin işleyişi hakkında ya da bir metni okuduğu zaman ne yaptığını görmeli. Neden yanlışla başladığını ispata görmesi lazım. Ya da bir önermenin doğru olmadığını göstermek için tek bir örneğin neden yeterli olduğunu bilmesi lazım. Ya da doğru olduğunu göstermek için uzaydaki her elemanı sağladığını göstermesi lazım. Bence bu sınıfa göre değişir. Önce öğrencilerin ispat yöntemlerini öğrenmeleri sonra ispat yapmalarını istenmelidir. Çünkü yeni gelen bir öğrenci ispat yap dediğimizde birkaç sayı veriyor ve sağladığını düşünüyor.”

Dr. Öklid düşünme becerilerine vurgu yaparak bu becerileri kazandırmanın öğrencilerin ispat yapmaya çalışmalarından geçtiğini düşündüğünü belirtmiştir:

“Evet. Bir de birden fazla ispat ile kendilerinin yapmalarını istiyorum mümkünse. O teoremlerle ilgili birden fazla yolla ispat yapılabilirse öyle yapılması taraftarıyım. Ben mesela derslerde hep bekliyorum önce onlar yapsın diye. Ben bile çok geç yapıyorum. Onların öncelikle yapmasını bekliyorum. Çünkü o zaman o dediğim beceriyi kazandırma konusunda eksik davranırım diye düşünüyorum. İspat yaparken o akıl yürütme becerisi, matematiksel düşünme becerisi, eleştirel düşünme becerisi kazandırma ancak kendilerinin yapmasıyla gerçekleşir yoksa incelemekle değil gibi geliyor.”

Benzer şekilde Dr. Türev de öğrencinin ilişkilendirme yapabilmesini ve düşünebilmesinden söz etmiştir. Bu bağlamda, onun ifadeleri de düşünme becerilerinin kazandırılması kategorisi altında ele alınmıştır:

“Kendilerinin yapmalarını öncelikle mutlaka istemeliyiz. İlişkilendirmelerini istemeliyiz. Bunların önemli olduğunu düşünüyorum. Öğrenci kendisi düşünebilmeli.”

Bu uygulamayı istemenin sürece bağlı olduğuna dikkat çeken Dr. Vektör, formüllerin ispatlarının öğrencilerin kendilerinin yapmaya çalışmasının, o formüllerin pekiştirilmesinde önemli olduğuna değinmiştir:

“İstemeliyiz. Bir defa şöyle bir sorun oluyor. ispatı ezbere öğrendiği zaman konuyu öğrenmekte de zorlanıyor. Mesela katı cisimlerin dönel cisimlerin alanları şimdi onun kafasında oluşturması için bir defa nasıl yapıldığını bilmesi gerekiyor. Şimdi onu bilmeden ezbere yaptığı zaman formüle göre yaptığı zaman unutuyor. Mesela nerede unutuyor? Diyelim formül kutupsal koordinatlarda alan formülü, ben niye unutmuyorum yaptığım için. Ama öbür türlü bakıyorsunuz alan formülüyle hacim formülünü karıştırıyor. Neden? İspatını yapmadığı için. Mantiğini öğrenmediği için bocalıyor. İspatını bir görse o bocalama süresi zaten gider. Ama ezbere formüle göre yaptığı zaman yapılışını bilmediği için formül aklına gelmiyor.”

Dr. Vektör konunun ve özellikle formüllerin pekiştirilmesine değinirken Dr. Soyut ise benzer diğer ispatların pekiştirilmesinden söz etmiştir. Bu nedenle Dr. Vektör ve Dr. Soyut’un bu yöndeki açıklamaları aynı kategori altında değerlendirilmiştir. Dr. Soyut:

“Tabi ki. Şimdi aktif eğitim diyoruz. Günümüzün yükselen değeri. Öğrencilerin kendilerinin yapılandırması lazım belki de ispatları da. O yüzden de alt yapı oluştuktan sonra belli bazı ispatlar derste yapıldıktan sonra onunla alakalı olacak bazı ispatlar ödev olarak verilebilir bence de yani kendilerine de bırakılabilir. Bunun da onları geliştireceğine inanıyorum tabi ki. Mesela benim yine derste ödev verdiğim ispatlardan biri ‘grubun merkezleştiricisi’. Soyut Cebirde grubun merkezini tanımlıyoruz. Ne olduğunu anlatmaya çalışıyoruz. Ve onun ispatını da derste öğrencilerle birlikte yapıyoruz. Daha sonra bir elemanın merkezleştiricisi geldiği zaman onun ispatını genellikle öğrencilere ödev veriyorum. Çünkü merkez tanımına çok benzer kavramlar var. Ama özünde ondan farklı. Dolayısıyla öğrenci derste yaptığı o ispatı gerçekten anlamış mı? Eğer o elemanın merkezleştiricisi tanımını evde kendisi yaparsa hem diğerini pekiştirebilir hem yeni şeyle diğerinin arasındaki farkı daha iyi kavrayabilir. Dolayısıyla faydalı bir etkinlik olur.”

Tüm bu açıklamalarına ek olarak Dr. Soyut’un aynı zamanda öğrencilerin anlayıp anlamadıklarını değerlendirme amacı olduğu da söylenebilir. Bu yönde açıklama yapan bir diğer öğretim elemanı ise Dr. Topoloji’dir:

“Kesinlikle istenmelidir. Önce bir rol model edinecek kendisine gerek kitaptan gerek hocayı izleyerek birlikte onun yaptıklarını inceleyerek ve sonrasında da zaten sınavlarda bile topoloji için konuşursak ya da analitik geometri için

konuşursak yani bir teori ama alt yapılarında daha önce yapmış olduğumuz ispatlar ve teoremlerin zaten hazır bulunmuş olduğu teoremleri vermeyi tercih ediyorum ben. Sınavda soruyorum. Belki 2-3 satırlık ispat olabilir ama önemli olan o eski bilgiyi geri çağırabilmek. Doğru bir şekilde ifade edebiliyor mu bir araya getirebiliyor mu ispat mantığını elde edebilmiş mi? Değişik ispat yöntemleri var bunlardan hangisini kullanacağına karar verebilmiş mi? Önemli o yüzden de sınıf içerisinde önce yapılmış ispatları inceleyerek gerekirse onları örneklerle indirgeyerek birlikte yaparak süreç içerisinde ve ondan sonra kendilerinin artık... Yeni teoriler üretip ispatlamaları veya yapılmış olan ispattan farklı bir yolla ispat yapabilmeleri de ekstra güzel olur herhalde. Zaman zaman istiyorum. Kendilerine bıraktığım zaman zaten dönem sonuna doğru özellikle farklı alternatif yanıtlar gelmeye başlıyor. Şunu şöyle yapsak olur mu? Doğru ya da yanlış önemli değil her bir alternatifi değerlendirip neden doğru neden yanlış üzerinde durursanız sonrasında zaten onun daha güzeli geliyor.”

Bazı öğretim elemanlarının öğrencilerden ispat yapmalarının istenebilmesi için bazı şartların yerine gelmiş olması gerektiğini düşündükleri söylenebilir. Bu söylemlerde en önemli şartın gerekli bilgi alt yapısının oluşturulması olduğu görülmektedir. Örneğin, Dr. Soyut özellikle yapılması istenen ispatlara benzer ispatların derste yapılmış olması gerektiğini, Dr. Topoloji öncelikle öğretmenin derste yaptığı ispatları veya kitaplardaki ispatları incelemiş olmaları gerektiğini, Dr. Uzay, öğrencilere öncelikle ispat yöntemlerinin öğretilmesi gerektiğini, Dr. Vektör de gerekli alt yapının oluşturulması gerektiğini bunun da sürece bağlı olduğunu ve Dr. Kompleks ise kolay ispatların istenmesi gerektiğini söylemiştir.

Bazı öğretim elemanlarının derste öğrencilerden ispat yapmalarını istediği bazılarının ise ödev vermek suretiyle bu uygulamayı talep ettiği görülmüştür. 3. mülakata (seçme-sıralama formuna) bakıldığında ise öğrencilerin düşünmeye sevk edilmelerinin ve düşünme becerileri kazanmalarının öğretim elemanlarınca en çok tercih edilen görüş olduğu söylenebilir (bkz. Tablo 30).

4.4. Dördüncü Alt Probleme İlişkin Bulgular (Ders kitabına bakış)

“Öğretim elemanlarının derslerinde kullandıkları/kullanacakları kitapları (varsa) seçimlerinde ispatların payı konusundaki görüşleri nelerdir?” sorusu dördüncü alt problem (ders kitabına bakış) olarak ele alınmıştır. Bu alt problemin incelenmesi öğretim elemanlarının “*Derslerinizde bir kitap takip eder misiniz? Bir kitap takip ediyorsanız bu seçiminizde ispatların payı var mıdır?*” sorusuna yönelik görüşleri ve üçüncü mülakatta yaptıkları önem düzeyine göre sıralama verileri ile yapılmıştır. Mülakatta bu sorunun sorulmasının nedeni, öğretim elemanlarının ders kitaplarına ispatlar açısından nasıl baktıklarını öğrenmektir.

Dr. Kompleks, Dr. Uzak ve Dr. Soyut bir ya da daha fazla kitap takip ettiklerini söylemişlerdir. Dr. Türev, Dr. Topoloji ve Vektör ise kitaplarla birlikte kendi oluşturdukları ders notlarını takip ettiklerini belirtmişlerdir. Bununla birlikte, kitap takip eden öğretim elemanlarının tümü öğrencileri bir kitabı almaları konusunda yalnızca yönlendirdiklerini, onları kitap almaya zorlamadıklarını aktarmışlardır. Ders gözlemlerinde de bu konuda yalnızca yönlendirme yaptıkları görülmüştür. Dr. Öklid ise bir kitap takip edemediğini söylemiş ve nedenini şu şekilde açıklamıştır:

“Sınıfla takip ettiğim bir kitap yok. Çok düzenli bir içeriği olmadığı için. Yani benim yapacağım şekilde bir içeriği olan bir kitap olmadığı için.”

Öğretim elemanlarının mülakatta yukarıdaki soruya vermiş oldukları yanıtlar analiz edildiğinde 7 görüş ön plana çıkmıştır. Bu görüşlerin, ispatın kitaptaki yerleşimi, yoğunluğu ve niteliğine yönelik olduğu görülmüştür. Tablo 31 görüşleri ve bu görüşlerin tercih sıralarını göstermektedir.

İspatın kitaptaki yerleşimine yönelik Dr. Öklid yukarıdaki açıklamasına paralel olarak tarihsel akışa dikkat edilerek verilip verilmediğine baktığını ve geometri dersi adına böyle bir kitaba rastlamadığını söylemiştir.

“Geometride özellikle benim temel en baştan başlayıp da işte postulatlardan başlayıp sonra da tek tek hangi ispatlar geliyor hangi teoremler geliyor yani buluş sırasına göre yok. Olmadığı için takip edemiyoruz.”

İspatların kitap seçimindeki payını kitaptaki yoğunluğu bağlamında ele alan Dr. Kompleks kitapta bulunan teoremlerin ispatlarının da verilmiş olmasını istediğini aktarmıştır:

“İspat yapılmış mı yapılmamış mı diye bakıyorum. Çünkü ben de kendim ispat yapacağım için en azından oradan yararlanmak istiyorum.”

Tablo 31

Öğretim elemanlarının ders kitaplarında ispatlara ilişkin görüşleri

<i>Ders kitaplarında ispatlara yönelik beklentiler</i>	<i>Dr. Kompleks</i>	<i>Dr. Vektör</i>	<i>Dr. Türev</i>	<i>Dr. Soyut</i>	<i>Dr. Öklid</i>	<i>Dr. Topoloji</i>	<i>Dr. Uzay</i>
İspatları tarihsel akışa dikkat ederek vermeli	3				4*		
İspatları adım adım nedenleriyle açıklamalı	1	1	2	4*	3	2*	1*
Verilen tüm teoremlerin ispatlarını yapmış olmalı	*		4	1			
İspatları olabildiğince görselleştirmeli		1	3	5	5	5*	
Öğrencinin anlayabileceği şekilde ispatı sunmalı	2	1*	1*	2	2	3	
Akış şeması içermeli	4		*		1	4	2
İspat için gereken ön bilgileri vermiş olmalı	1	1	5*	3		1	3

Tablo 31’de (*) işareti öğretim elemanlarından hangilerinin ilk mülakatta bu kategorideki görüşleri ifade ettiğini göstermektedir. Numaralar ise 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) öğretim elemanlarının bu görüşlerden hangilerini seçtiklerini ve bu görüşleri kendilerince hangi sırada öncelikli gördüklerini göstermektedir. Renklendirme görsellik açısından numaralara göre yapılmıştır. Örneğin, bir ders kitabında ispatların “adım adım nedenleriyle açıklanması” gerektiği görüşü ilk mülakatta Dr. Soyut, Dr. Topoloji ve Dr. Uzay tarafından dile getirilmiştir. 3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) ise bu görüş Dr. Kompleks, Dr. Vektör ve Dr. Uzay tarafından birinci sırada tercih edilmiştir. Dr. Türev ve Dr. Topoloji bu görüşü ikinci sırada, Dr. Öklid üçüncü sırada ve Dr. Soyut ise dördüncü sırada tercih etmişlerdir.

Dr. Öklid ve Dr. Kompleks haricinde diğer öğretim elemanlarının verdikleri yanıtların, kitap seçiminde ispatın payının, ispatın niteliğine yönelik fikirler içerdiği söylenebilir. Örneğin, Dr. Türev bazı kitapların ispatları daha güzel sunduğunu belirtmiştir.

“Hangi kitapta neresi öğrencilerin daha iyi anlayabileceği şekilde ona dikkat ediyorum. Ve kendimin de anlaması çok önemli mesela bazı analiz kitapları var ki oradaki ispatları benim bile anlayabilmem için çok düşünmem gerekiyor. Yani çok karmaşık yollardan ispatlamış oluyorlar. Onlara da dikkat ediyorum. Özellikle Thomas’ın Calculus kitapları yurt dışı odaklı kitapların daha anlaşılır olduğunu düşünüyorum. İçeriği ve ispatları daha güzel sunduklarından onları daha çok kullanıyorum.

“Daha güzel sunma” ifadesiyle neyi kastettiği sorulduğunda ise akış şeması içerme, gerekli ön bilgileri verme ve öğrencinin seviyesine uygun olma gibi özellikleri kastettiğini şu şekilde açıklamıştır:

“Daha çok öğrencinin düşüncesini yansıtan.. Şimdi bazı kitaplarda ispat formal, çocuğun anlamayacağı şekilde anlatılmış, karmaşık bir şekilde verilmiş. Mesela bazı kitaplara baktığında çocuk hiçbir şey anlamıyorum diyor yani buradaki semboller bile bizim kullandığımızdan farklı diyor. Dolayısıyla Thomas’ın Calculus’ünde ya da Türkiye’de de Balcı’nın kitabı öğrencilerin daha anlayacağı şekilde. Öğrencinin düşünebileceği şekilde ispatı sunması aslında. Yani öğrenci düşüncesini önemseyen, bir de mesela o ispatla ilgili bilinenler ne, oradan hareketle nereye ulaşmam gerekiyor. Sonuçta o çocuğun bilgi üretmesini istiyoruz, o bilgiyi üretmek için... Hmm ben ona akış şeması diyorum onu vermesi diyeyim güzel sunması o. Karmaşık ya da mesela ispatta atıyorum çocuğun doğrusal bir fonksiyon oluşturması gerekiyor ama ispata direk onunla başladığında çocuk ne yaptığını anlamıyor. Oysa o bilinenleri vurgulasa hani buradan hareketle ben doğrusal fonksiyonumu oluşturabilirim dese çocuk o zaman daha iyi anlayabileceği hali güzellik o anlamda.

Dr. Türev’in “öğrencinin anlayacağı şekilde ispatların sunulması” görüşü gibi Dr. Vektör de kitaplarda ispatların “öğrencinin seviyesine uygun olmasına” dikkat ettiğini belirtmiştir. Dr. Vektör’ün bu görüşü de “öğrencinin anlayacağı şekilde” sunulmalı kategorisi altında değerlendirilmiştir.

Tablo 31 incelendiğinde “İspatın adım adım nedenleriyle açıklanmış olması” talebinin birden fazla öğretim elemanının tarafından ortak olarak dile getirildiği görülmektedir. Dr. Soyut:

“Başka Soyut Matematik kitapları da var ama gerçekten bazı kavramları çok yüzeysel geçiyorlar. O yüzden daha da ayrıntılı anlattığı için... O ayrıntının içinde tabi ki ispat bazında şeyler de var. Onlara dikkat ediyorum.”

Dr. Uzey, Dr. Soyut'un bu talebine benzer bir talebi 'açıklaması ve ispatı net olan' ifadesiyle dile getirmiştir. Bu ifadeyi şu şekilde açıklamıştır.

“Açıklaması net olan... Açıklamasıyla ispatı net olan kaynakları seçiyorum. Yani adım adım ispatı açıklayan yani ispatı öğrenciye daha az bırakan kitapları tercih ediyorum.

Dr. Topoloji, Topoloji ve Analiz derslerinde özellikle ispatta adım adım açıklamalarla adımların nedenlerinin anlatılmasını istediğini belirtmiştir:

“Analizle Kalkülüs'ler tamamen o şekilde yani neyi neden niçiniyle anlattığı için zaten orada önemli yoksa dediğim gibi Türkçe kitaplar da bir miktar yarım anlatım ve arkasından bir iki tane de soru şeklinde gidiyordu. Ne neden niçin nerden geliyor anlatımı fazla yok. Topolojilerde kesinlikle zaten yani onlarda ispatlardan faydalanmak için...”

Dr. Topoloji aynı zamanda özellikle bazı derslerin kitaplarında ispatların olabildiğince görselleştirilmesi gerektiğine değinmiştir:

“Özellikle analitik geometriyle birlikte analizin anlatıldığı kitapları tercih ederim çünkü ispatları görsel olarak yapabilmek analitik geometriyle ilişkilendirmek benim için önemli.”

3. mülakatta (seçme-sıralama formunda) sonuçlarına göre ispatların her adımında yapılanları nedenleriyle açıklanmış olması öğretim elemanlarının hem en fazla hem de ön sıralarda rağbet ettiğİ ifade olmuştur. Bu tercihle öğretim elemanlarının, öğrencilerin kitaplardan kendi başlarına çalıştıklarında ispatları rahatlıkla anlayabilmesini istedikleri düşünülebilir. Özetle, öğrencinin anlayabileceğİ şekilde sunulmuş olması ve ispat için öğrencinin sahip olması gereken ön bilgileri vermiş olması da en çok tercih edilen görüşlerdendir.

BÖLÜM V

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Tartışma

Öğretim elemanlarının ispat anlatım yapılarını, görüşleri ve mevcut uygulamalarıyla incelemeyi amaçlayan bu çalışmada, içerdiği düşünülen tüm yönleriyle ispat anlatım yapıları ele alınmış ve bu yönlerle ilişkin bulgular bir önceki bölümde sunulmuştur. Bu bölümde bu bulgular literatür ışığında ele alınarak değerlendirilmiştir.

5.1.1. Birinci alt probleme ilişkin tartışma (İspatın önemine bakış)

Bir eğitim fakültesinde görev yapan öğretim elemanlarının derslerinde ispatları hangi amaçlarla yaptıkları yani ispatı derslerde neden önemli bulduklarına yönelik bulgular, ispatın matematik derslerinde hem ne kadar çok çeşitli amaçlarla yapıldığının/anlatıldığının hem de ne kadar farklı gerekçelerle önemli görüldüğünün göstergesi olarak kabul edilebilir. Bu bulgu, Dickerson ve Doerr'in (2014) öğretmenlerin ispatla ilgili görüşlerinin farklılığına ilişkin bulgularını desteklemektedir. Öğretim elemanlarının ispatları önemli kabul etmesinde en etkili gerekçenin ispatın öğrencilerin düşünme becerilerine katkı yapması olduğu söylenebilir. Bu temayı sırasıyla, teoremin/konunun öğrenilmesi, matematiğin tanıtılması, bazı duyuşsal deneyimlerin yaşatılması ve son olarak uygulama becerilerinin geliştirilmesine yönelik amaçlar takip etmektedir. Tema ayırt etmeksizin bakıldığında ise tüm öğretim elemanlarının da seçtiği üç görüş olduğu belirlenmiştir: Bir disiplin olarak matematiği fark etmeyi, onun aksiyomatik yapısını anlamayı ve bir problem durumunda koşulları doğru değerlendirmeyi sağlaması öğretim elemanlarının derste ispatın önemli görülmesinde en çok tercih ettikleri argümanlar olmuştur. Diğer taraftan tüm katılımcılar tarafından seçilmemiş olmakla birlikte çoğunlukla tercih edilen gerekçeler: İspatın, analitik düşünme ve problem çözme becerilerini geliştirmesi, daha kalıcı öğrenmeyi, neyin nereden geldiğini bilmeyi, bilgiyi sistemleştirmeyi sağlaması, güven, matematiksel haz ve heyecan hissettirmesi ve uygulama sorularının temelini göstermesidir. Tercih edilme yoğunluğu gözetmeksizin bakıldığında burada ulaşılan görüşlerin birçoğu literatürdeki görüşlere paralellik göstermektedir. Örneğin, matematiğin aksiyomatik yapısının anlaşılması (Yopp, 2011); matematiksel düşünme becerilerini geliştirme (Knuth, 2002b; Hemmi, 2010; Yopp, 2011); farklı bakış açıları sağlama (Weber, 2012); matematikçilerinkine benzer muhakeme deneyimi yaşama (Zaslavsky ve diğerleri, 2011); teoremi daha iyi anlamayı sağlama (Yopp, 2011; Weber, 2012); daha kalıcı öğrenme sağlama (Weber, 2012); neyin nereden geldiğini bilmeyi

sağlama (Hanna, 1990; Hersh, 1993; Yopp, 2011; Weber, 2012) ve ispat tekniklerinin öğretilmesi (Lew ve diğerleri, 2016; Weber, 2012; Yopp, 2011) bu bulgulara örnek gösterilebilir. Bununla birlikte bu çalışmada ispatın öğrenciye güven vermesi, heyecan duymaya sebep olması vb. farklı görüşler de tespit edilmiştir. Yani, öğrencinin ispatlar yardımıyla konuya daha hâkim olarak kendine güveninin artmasını ve bilgileri ezberlemek yerine nereden geldiğini yani nedenlerini bilmenin heyecanını hissetmesini sağlamak gibi amaçlarla ispat yapılıyor olması bu alt problemin en ilginç sonuçlarından biridir ve bu bulgunun daha ayrıntılı incelenmesi gerektiği söylenebilir. Buna ek olarak, bu duyuşsal deneyimlerin öğrenciler tarafından nasıl algılandığı yani örneğin ispat yapmanın onlarda güven ve heyecan gibi hisler uyandırıp uyandırmadığının araştırılması da öğrencilerin ispat algılarının anlaşılmasına ve geliştirilmesine katkıda bulunabilir.

Bu çalışmada bahsi geçen işlevler, ispatın temel fonksiyonlarını (doğrulama, açıklama, keşfetme, zihinsel meydan okuma, sistemleştirme) içermesi bakımından da Hersh (1993), Hanna (1995), de Villiers (1999) ve Bell'in (1976) çalışmalarını desteklemektedir. Bununla birlikte iletişim işlevine hiç değinilmemiş olması yönüyle Hanna (1995), de Villiers (1999), Harel ve Sowder'dan (2007) ayrılmaktadır. Buna ek olarak, açıklama işlevinin, ispatın sınıftaki en önemli işlevi olması gerektiğini savunan Hanna (1990) ve Hersh'e (1993) benzer şekilde öğretim elemanlarının ispata, açıklama işlevini içerecek pedagojik amaçlar yükledikleri söylenebilir.

Knuth (2002a) öğretmen adaylarının ispat algılarının şekillenmesi ve zenginleşmesinde öğretim elemanlarının rolünden bahsederken öğrencilerin ispatı anlamlı bir araç olarak deneyimlemeye ihtiyaç duyduklarını söylemiştir. Bu nedenle onlara bu deneyimi sağlayacak olan öğretim elemanlarının ispatın işlevlerine ilişkin algılarının zengin olması beklenmektedir. Knuth (2002a) aynı zamanda lise matematik öğretmenlerinin ispatın matematikteki rollerinin farkında olmalarına rağmen matematik eğitiminde ispatı bir araç olarak görmediklerini aktarmıştır. Sonuç olarak, her ne kadar bu çalışmada katılımcılar öğretim elemanları olsa da matematik öğretmen adaylarını hazırlıyor olmaları bakımından onların bu tür algılar oluşturmalarına sebebiyet vermeyecek bir ispat algısına sahip oldukları ve derslerinde de bunu yansıttıkları söylenebilir.

Öğretim elemanlarının derslerinde ispat yaparken ispatın işlevlerinden birini veya birkaçını birlikte amaçladığı düşünülebilir. Bununla birlikte her ispat için ayrı amaç da planlıyor olabilirler. Cilli-Turner (2017) ispatın işlevlerinin içeriğe ve sunuma bağlı olarak çeşitlilik gösterebildiğini belirtmiştir. Bu bağlamda, bu alt problemin sonuçlarının genellenemeyeceği düşünülebilir. Ancak bu sonuçların, öğretim üyelerinin öğretmen

adaylarına matematik derslerinde ispat öğretme amaçları olarak kabul edilebilecek olması bağlamında bir anlam ifade ettiği söylenebilir.

5.1.2. İkinci alt probleme ilişkin tartışma (Derste ispat sunumuna bakış)

Öğrencilerin teoremi anlamadıkları ve teoremden verilenleri kullanamadıklarına ilişkin literatürdeki bulgular (örn., Weber, 2001; Pedemonte, 2007; Selden ve Selden, 1995) teorem sunumunda öğretim elemanının öğrencilerin anlaması için gösterdiği çabayı kıymetli kılmaktadır. Bu bağlamda öğretim elemanlarının mülakatta sorulan “İspatlanacak ifadenin anlaşılmasına yönelik neler yaparsınız?” sorusuna verdikleri cevaplar bu çabalarına ilişkin görüşlerini yansıtmaktadır. Sorular sorma, teoreme yönelik açıklamalar yapma ve öğrencilere sorumluluk verme, öğrencilerin teoremi anlamalarına yardımcı olmak adına öğretim elemanlarının beyan ettikleri uygulamalar olmuştur. Bütün öğretim elemanlarının bazı teoremlerde yalnızca vurgulu okuma yaptıkları ve teoreme yönelik herhangi bir açıklama yapmadıkları da gözlemlenmiştir. Bu uygulamanın çoğunlukla formül teoremlerinde veya bazı benzer teoremlerin (özellik doğrulama vb.) sunumunda görüldüğü hatta bu tür teoremlerde bazen direk ispata geçildiği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, Dr. Öklid, Dr. Uzay ve Dr. Topoloji’nin sunulan ispatların büyük çoğunluğunda teoremi açıkladıkları söylenebilir. Teoremden hipotezin, hükmün, içeriğindeki matematiksel notasyonların ve teoremin ispatında kullanılacak yönteme yönelik açıklamalar olarak kabul edilen teknik açıklamalar yapıldığı da görülmüştür. Teoremi sunarken en çok Dr. Topoloji’nin teknik açıklamalar yaptığı, Dr. Öklid ve Dr. Türev’in ise teoremi sunarken bu tür açıklamalar yapmadığı söylenebilir. Dr. Topoloji ispata geçmeden önce öğrencilerin ispatlanacak ifade üzerine düşünceleri için bazı teoremlerde öğrencilere süre vermiştir. Bu uygulamasının temelinde öğrencilerin okuduğunu anlayıp analiz etmelerini sağlamak olduğunu da hem mülakatta hem de derste öğrencilere söylemiştir. Bu uygulamasıyla problem çözmenin önemli bir basamağı kabul edilen problemi anlamaya yönelik öğrencilere sorumluluk verdiği düşünülebilir.

Bu çalışmada öğretim elemanlarının ispat sunumlarının Hemmi’nin (2010) temellendirdiği tümdengelimli stili yansıtan görüşlere daha yakın olduğu söylenebilir. Öğrencinin ispatı bilmesi ve matematiksel dile alışması gerektiği ve doğru anlatımla ispatı anlayıp soyut düşünmeyi öğrenebileceği ve bu nedenle de ispatın öğretilmesi gerektiğine paralel görüşler bu çalışmada gözlemlenmiştir. Bununla birlikte ispat yapmalarının en önemli amacı “ikna etmek” yani bir ifadenin doğruluğunu sorgulamayı öğretmek olmadığından bu çalışma bu açıdan Hemmi’den (2010) farklılık göstermektedir. Bu durum, öğretim elemanlarının ispata pedagojik olarak bakışlarının daha fazla çeşitlenebileceğine işaret etmektedir. Ayrıca, Gabel ve Dreyfus (2017), bir ispatın, öğretmenin sunumuyla ilgili

tercihlerine bağı olarak farklı akışlara sahip olabileceğini iddia etmiştir. Sonuç olarak öğretim elemanlarının hem bakış açılarının çeşitliliği hem de bu çeşitliliğin ispat akışlarına yansımaları araştırılabilir.

Weber (2004) geleneksel öğretim yaklaşımını benimseyen bir öğretmenin aynı dersinde farklı içerikleri sunarken farklı ispat öğretimleri sergileyebildiklerini göstermiştir. Hatta bu öğretimlerin çoğunlukla birbirinden ayrık ya da az ortak özellikler barındırdığı ve bunların birlikte çok az görüldüğünü aktarmıştır. Bu bağlamda, bu çalışmadaki öğretim elemanlarının “tanım-teorem-ispat” formatında öğretim yapıyor olmalarıyla bu anlamda geleneksel bir yaklaşıma sahip oldukları söylenebilirken Weber’in (2004) sınıflandırdığı gibi ispat içeriklerini bu öğretim stillerinin bir tanesiyle sınırlı kalacak şekilde anlatmadıkları ve bu stilleri genellikle bir arada sergiledikleri gözlemlenmiştir. Öğretim elemanları bir yandan ispatın mantıksal ve yapısal tarafına yani ispatlamada temel şeyleri yapabilmek için gereken biçimsel özelliklere dikkat çekerek öğrencilerin bu yönlerini geliştirmeye çalışırken bir yandan da kavramlar ve ispatı anlamsal olarak da tartıştığı yaklaşımlar sergiledikleri hatta aynı zamanda ispat için gereken stratejik bilgilere de vurgu yaptıkları söylenebilir.

İspatı nasıl sundukları sorusuna verdikleri cevaplarda öğretim elemanlarının soru sorma-sorumluluk verme, bilgi aktarımı ve görselliğe ilişkin eylemlerini vurguladıkları belirlenmiştir. Bilgi aktarımı içinde yapıldığı söylenen uygulamalardan biri de örnek vermedir. Öğretim elemanlarının ispatı açıklarken örnekleri şu amaçlar doğrultusunda kullandıkları tespit edilmiştir:

- Notasyon ve formül kullanımını göstermek veya bir tanımı açıklamak,
- Öğrencilerin sorularına yanıt oluşturmak veya kavrayışlarındaki yanlışları göstermek,
- İspata yol gösterecek referans örnekler vermek,
- Öğrencilerin anlamadıkları noktaları basitleştirmektir.

Bu amaçlar Mills’in (2014) ispat sunumunda örneklerin kullanımına ilişkin bulgularını desteklemektedir. Öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerden biri de ispat yapmalarını kolaylaştıracak şekilde örnekler oluşturamamaları veya örnekleri kullanamamalarıdır (Alcock ve Weber, 2010; Ko ve Knuth, 2009; Moore, 1994). Bu bağlamda bu bulgular öğretmenlerin çeşitli amaçlarla örnekleri ispat sunumunda kullandıkları ve örneklerin nasıl kullanılabileceğini öğrencilerine aktardıklarını göstermektedir. Lew ve diğerlerinin (2016) öğretim elemanının öğretmeyi amaçladıklarıyla

öğrenciler tarafından anlaşılanların bazen örtüşmediği bulgusu ise bu aktarımların başarılı olup olmadığına ilişkin kesin yargılara varmayı engellemektedir.

Dr. Soyut'un ispata sunarken metafor örnek kullanması Mills'in (2014) bulgularıyla örtüşmekle birlikte bu çalışmada benimsenen metafor örnek tanımlaması ile ondan ayrılmaktadır. Matematiksel bir yapıyı başka bir matematiksel yapı ile karşılamak şeklinde metafor örnekleri tanımlayan Mills'in (2014) aksine bu çalışmada matematiksel bir yapıyı başka bir alandan bir yapı ile karşılamının daha uygun olacağı düşünülmüş ve Mills'in metafor örnek tanımı ilişkilendirme örneği olarak kabul edilmiştir. Dr. Soyut'un arabada bazı özelliklerin olup olmamasının araba olma koşuluna nasıl etki edeceği metaforunu ispatta bir yapının işlem olup olmadığına karar verirken işlem olma koşullarını değerlendirmeye örnek vermesi metafor örneğe daha uygun bulunmuştur.

Dr. Soyut, Dr. Uzay ve Dr. Topoloji sundukları ispatların yarısından çoğunda, Dr. Vektör yarısında ve Dr. Kompleks ise yarısına yakınında teknik açıklamalar yapmışlardır. Teknik açıklamalar öğrencilerin ispata ilişkin algılarının şekillenmesinde yani bir teoremin hangi yapılardan oluştuğuna, matematiksel dilin ve ispatlama yöntemlerinin hangi durumda nasıl kullanıldığına yönelik farkındalık kazanmalarında önemli bir paya sahip olduğundan bu çalışmadaki öğretim elemanlarının çoğunun bu bağlamda öğrencilere faydalı olabileceği düşünülen eylemler sergiledikleri söylenebilir.

Pinto ve Karsenty (2018), çalışmasındaki öğretim elemanının derslerde ispat sunumları, haftalık ev ödevleri ve öğrencilere çalışmaları hakkında sağladığı geri bildirimlerin, öğrencilerin ispatları bağımsız olarak öğrenmelerine yardımcı olacak şekilde planlandığına dikkat çekmiştir. Bu bağlamda değerli bulunan bu eylemlere bu çalışmada da rastlandığı söylenebilir. Örneğin, Dr. Türev ve Dr. Topoloji öğrencilere ders dışında da çalışacakları ispat ödevleri vermişler ve öğrencilerin bu ispatları derste veya ders dışında kendilerine sunmalarını isteyerek onlara geri bildirim sağlamışlardır. Buna ek olarak, ders içinde de Dr. Öklid sunduğu ispatların neredeyse hepsinde, Dr. Türev yarısından çoğunda, Dr. Topoloji ve Dr. Soyut ise yarısına yakınında öğrencilere ispata kendilerinin yapması için onlara sorumluluk vermişlerdir. Bununla birlikte, Dr. Kompleks ve Dr. Vektör öğrencilere yalnızca uygulama soruları için sorumluluk verirken ispat yapma konusunda sorumluluk vermemişlerdir.

İspat yaparken sordukları sorularda hangi bilgi türlerini öğrencilerden bekledikleri incelendiğinde Dr. Soyut ve Dr. Öklid'in sordukları tüm (sonuç ve yorum) sorularının yarısına yakınında ispatın adımlarına ilişkin sorumluluğu bu sorularla öğrencilere yönelttikleri görülmüştür. Teknik açıklamalarla ilgili soruların ise en çok Dr. Topoloji ve

Dr. Soyut tarafında sorulduğu, tanım/teorem/özellik ve notasyon sorularının en çok Dr. Kompleks tarafından sorulduğu söylenebilir. Dr. Türev, Dr. Vektör, Dr. Uzay, Dr. Kompleks ve Dr. Topoloji sorularının çoğunda işlem/formül veya işlem prosedürleri sormuşlardır. Öğretim elemanlarının çoğunun sorularının işlem/formül veya işlem prosedürlerine yoğunlaşması nedeniyle Fukawa-Connelly'nin (2012a) bulgularına paralel eylemler sergiledikleri yani tanımları hatırlamak ve basit bir işlemi yapmak gibi sorularla öğrencilere sorumluluk veriliyor olsa da ispat için anlamlı bir sorumluluk verilmediği söylenebilir. Bununla birlikte, Dr. Türev ve Dr. Topoloji'nin öğrencilere ispat yapma sorumluluğunu da veriyor olmalarına rağmen bu tür sorularının daha yoğun olması ilginç bir sonuç olarak kabul edilebilir. Bu durum, öğrencilerine ispatlama sorumluluğu vermedikleri yani kendilerinin sunduğu ispatlarda sorumluluğu daha çok üstlendikleri şeklinde yorumlanabilir.

Sordukları sorular incelendiğinde, tüm öğretim elemanlarının bazı soruları kendilerinin cevapladığı söylenebilir. Dr. Topoloji sorduğu tüm sorularının yarısını, Dr. Kompleks ise yarısına yakını kendisi cevaplamıştır. Hem ispat bazında hem de kendi soruları içerisindeki yüzdeleri göz önünde bulundurduğunda en az Dr. Öklid'in kendi sorularını yanıtladığı söylenebilir. Rehberlik soruları, öğrencilerden beklenen düşünme tarzını öğretmek için her ne kadar faydalı olsa da öğrencilere sorularla yüklenen sorumluluğu azalttığından bu sonuç, Fukawa-Connelly'nin (2012a) ve Uğurel'in (2010) aktardığı bulguları desteklemektedir. Buna ek olarak, tüm öğretim elemanları tarafından neredeyse her ispatta kısa cevap gerektiren sonuç soruları sorulurken öğrencilerin fikirlerini açıklamasını gerektiren yorum sorularının her ispatta sorulmadığı da gözlemlenmiştir. İspat bazında değerlendirildiğinde sırasıyla en çok Dr. Soyut, Dr. Uzay, Dr. Türev ve Dr. Topoloji sundukları ispatların yarısından çoğunda yorum soruları sormuşlardır. Bununla birlikte kendi soruları içinde değerlendirildiğinde ise Dr. Soyut ve Dr. Türev yorum sorularına en çok yer veren öğretim elemanlarıdır. Başarılı bulunan öğretmen eylemleriyle ilgili bulgular paylaşan Mata-Pereira ve Ponte (2017) öğretmenin, söylenenlerin nedenlerinin açıklanmasını veya alternatif gerekçeler sunulmasını istemesinin, öğrencilerin ispatlamaya ilişkin becerilerine katkı sağladığını aktarmıştır.

Öğretim elemanlarının ispat sunumunda öğrencilere yönelttikleri soruları bakımından dikkat çeken diğer sonuçlar şunlardır: Dr. Uzay teorem sunumunda olduğu gibi hem ispat bazında hem de kendi soruları içinde kontrol sorularını en çok soran öğretim elemanıdır. Dr. Vektör'ün ve Dr. Kompleks'in sorularının çoğunluğunu onay soruları ve kendi yanıtladığı sorular oluşturmaktadır.

Derste ispat sunumunda yapılması gerekli görülen uygulamalar/eylemler sırasıyla: Teoremin doğru anlaşılmasını sağlama, öğrencilere ispatı yapmaya çalışmaları için süre verme, ispatın her adımını nedenleriyle açıklama, öğrencilerle diyalog halinde yapma, matematik dilini doğru kullanma, önbilgileri hatırlatma, ispat yöntemini belirtme, mantık sırasını izleme ve ispatın değerlendirmesini yapmadır. Bu bulgulara paralel olarak, Gabel ve Dreyfus (2017) ispat adımlarında hangi seçimin neden yapıldığının aydınlatılmasının, bu seçimlerin belirgin hale getirilmesinin, ispat yapısının netleştirilmesinin, ispata yol açan soru dizilerinin kullanılmasının ve çok önemli olduğu düşünülen fikirlerin vurgulanmasının ispatı öğrenciler için daha açıklayıcı ve anlaşılır hale getiren özellikler olduğunu iddia etmiş ve bir öğretim elemanının ispat akışında yapılan bu müdahalelerin ispat öğretimini daha verimli hale getirdiğini savunmuştur. Bu bağlamda, ispat adımlarının nedenleriyle açıklanmasının önemli olduğu söylenebilir. Fukawa-Connelly (2014) de bu açıklamaların yapılmamasının ispat sunumunun pedagojik değerini düşürdüğünü iddia etmiştir.

Lai ve Weber (2014) öğretmenlerin ispat yaparken değer verdikleri ve olması gerektiğini düşündükleri eylemleri her zaman yapmadıklarını aktarmıştır. Bu çalışmada da öğretim elemanlarının değer verdikleri bu eylemleri her zaman gerçekleştirmedikleri söylenebilir. Örneğin, Dr. Kompleks derste ispat sunumunda öğrencilere ispat yapmaları için süre verilmesi gerektiği görüşünü birinci sırada tercih etmekle birlikte derslerinde bu tercihini yansıtmak eylemlere rastlanmamıştır. Bu bulgulara ilişkin diğer sonuçlar bir sonraki bölümde tartışılmıştır.

Lai ve diğerleri (2012), eğitimcilerin ispatların örtük mantıksal yapısını ortaya çıkarmak için varsayım ve sonuçların altını çizerek ispatları düzenledikleri ve ayrıca, öğrencilerin zorlayıcı bulabileceği mantıksal boşlukları doldurmak için gerekçeler ekleyerek veya öğrencilerin daha aşına ve rahat oldukları ispat tekniklerini kullanarak, ispatları belirli hedef kitlelere göre ayarladıklarını aktarmışlardır. Bu çalışmanın bulguları da bu sonuçları destekler niteliktedir. Buna ek olarak ispatı daha yalın hale getirmek için görsel kullanma ve matematiksel dili anlaşılır hale dönüştürme de öğretim elemanlarının yaptıklarını söyledikleri değişikliklerdir. Benzer sonuçların varlığı, olması istenen özellikler için bir standardın varlığına işaret etmesine rağmen Miller ve diğerleri (2018) çalışmalarında bir öğretim elemanının derste sunduğu ispatları inceleyen farklı öğretim elemanlarının doğru olarak kabul ettikleri ispatlara farklı puanlar verdiklerini aktarmışlardır. Bu açıdan her ne kadar neyin doğru bir ispat olduğuna ilişkin temel bir kanaatin olduğu söylenebilse de bir ispatın pedagojik kalitesi için bir standardın olmadığı da düşünülebilir. Bunun bir nedeni de öğrencilerin eğilimleri (bilgi altyapıları vb.) veya kısıtlayıcı durumlar (zaman vb.) gibi faktörlerin ispat sunumlarını çeşitlendirmesi olabilir.

Sears ve Chavez (2014), öğretmenlerin ders kitabındaki etkinlikleri sınıfta işleme şeklinin kendi inançlarından, öğrencilerin eğilimlerinden ve değerlendirme yöntemlerinden etkilendiğini bulmuşlardır. Bu çalışma bağlamında öğretim elemanlarının derste yapacakları ispatta değer verdikleri ve olmasını bekledikleri temel özellikler sıralama tercihleri göz önünde bulundurularak şöyle sıralanabilir: İspat dersin kapsamına uygun olmalı, ispatta mantık sırası izlenmeli, öğrencinin ilişkilendirme yapmasını sağlamalı, matematik dili bakımından doğru ve öğrencinin seviyesine uygun olmalıdır.

Öğrencilerin ispat yöntemlerini bilmiyor veya doğru uygulayamıyor olmaları ispattamada yaşadıkları sıklıkla söylenen güçlüklerdendir (Baker ve Campbell, 2004; Bleiler ve diğerleri, 2014; Demiray ve Işıksal Bostan, 2017; Güler ve Dikici, 2014; Ko ve Knuth, 2009; Uzun ve Bülbül, 2013; Stylianides ve diğerleri, 2007; Wheler ve Champion, 2013). Her ne kadar ispattama yöntemlerini Soyut Matematik veya ispata geçiş olarak adlandırılan çeşitli derslerde görüyor olmalarına rağmen bu bulguların aktarılmasının, tüm derslerde sunulan ispatlarda ispattama yöntemlerinin vurgulanmasını gerekli kıldığı söylenebilir. Dr. Türev haricinde tüm öğretim elemanları ispat yöntemlerini vurguladıklarını belirtmişlerdir. Dr. Türev ise dersinde genellikle aynı tür ispat yöntemi kullanıyor olmasından dolayı bahsetmediğini söylemiştir. Bununla birlikte, öğrencilerin ispata nasıl başlayacağına ilişkin fikir sahibi olmaları, benzer yöntemler gerektiren ispattarı daha kolay yapabilmeleri ve öğretmen olduklarında (özellikle lise matematik öğretmenlerinin) ispat yöntemleri bilgisine daha hâkim olabilmeleri, ispat yöntemlerinin farkında olmaları ve ispat sunumuna dahil olmaları öğretim elemanlarının ispat yöntemlerini vurgulama gerekçeleridir.

Öğretim elemanlarının matematik derslerinde bazı teoremlerin ispattarını neden sunmamayı tercih ettikleri ve bu tercihi öğrencilerine nasıl açıkladıkları da incelenmiştir. Bu çalışmadaki nedenlerin ve açıklamaların çoğu, literatürdeki bulguları desteklemektedir. Görüşmede yapılan açıklamalar ve derslerdeki uygulamalara yönelik yansımalar birlikte incelendiğinde, ispattın sunulmaması tercihi, öğrencilerin yararının değerlendirildiği durumlar ve kısıtlayıcı durumlar olmak üzere daha genel iki kategoride tartışılabilir.

Öğretim elemanlarının ispattı sunmama tercihlerine, çoğunlukla öğrenciler hakkındaki inançları (örn., öğrencilerin seviyesi) rehberlik ediyor gibi görünmektedir. Lai ve Weber'deki (2014) bulgulara paralel olarak derslerde ispattı sunmama ile ilgili yapılan açıklamaların çoğunda, öğretim elemanlarının öğrencilerin bazı teoremleri kolayca ispatt edebileceğine veya bazı ispattlara kolayca ulaşabileceklerine inandıkları görülmüştür.

Öğretim elemanlarının görüşleri doğrultusunda, ispat sunma yoğunluğunun sırasıyla matematik bölümü, ortaöğretim matematik eğitimi, ilköğretim matematik eğitimi ve son olarak matematik dışındaki diğer bölümler boyunca azaldığı söylenebilir. İlköğretim ve ortaöğretim matematik eğitimi bölümlerinde öğrencilerin meslek hayatlarında kullanacakları bilgilerin bazı ispatları sunma veya sunmama tercihinde dikkate alındığı görülmüştür. Öğrencilerin seviyeleri ve dersten kazanmayı bekledikleri faydalar ise diğer bölümlerde ispat yaparken daha çok dikkate alınmaktadır.

Öğretmenlerin mevcut öğretim uygulamalarını gözlemlemek, bazen görüşmelerde yaptıkları açıklamalardan daha fazla bilgi sağlayabilmektedir. Pinto ve Karsenty (2018), bu sonucu zıt bir perspektiften doğrulayan bir bulguyla öğretmenlerin hedeflerinin sadece görüşmelerde ortaya çıktığını ve sınıfta örtük bırakıldığını savunmuştur. Bu nedenle, ispat yapmama gerekçelerini derslerinde açıklayıp açıklamadıklarını öğretim elemanlarına sormak, öğretimdeki tercihlerini daha iyi anlamaya katkıda bulunabilir. Çünkü nedenlerin birçoğunun öğrencilere söylendiği ancak az da olsa bir bölümünün (öğrencilerin kapasitesinin aşması vb.) açıklanmadığı da görülmüştür.

Ödev vermenin, öğrencilerin ispat oluşturmaya ilişkin engellerini öğretmenin belirlemesine ve derste öğretilenleri anlayıp anlamadıklarını değerlendirmesine olanak sağladığı söylenmiştir. Çünkü ispat, tanımlar, teoremler, aksiyomlar, gösterimler vb. çeşitli matematiksel bilgileri gerektirmektedir. Pinto ve Karsenty'nin (2018) ispat okuma ile ilgili olarak bildirdiği gibi, mevcut çalışma, öğrencilerin ispat yapma konusundaki katılımlarının öğrencilerin konuyu gerçekten anlayıp anlamadıklarını belirlemede önemli bir role sahip olduğunu vurgulamıştır.

Pinto ve Karsenty (2017) ve Mills (2014) 'te aktarıldığından farklı olarak, bu çalışmada öğretim elemanlarının sadece formel ispat sundukları durumlarda ispatı destekleyecek örnekler kullandıkları, bunun dışında ispatı yapmak yerine örnekle açıklama yoluna gitmedikleri gözlemlenmiştir.

Öğretim elemanları öğrencilerin notasyonlardan haberdar olmadıklarını, kendi düşüncelerini ifade etmekte zorlandıklarını, araştırma yapmadıklarını, zayıf matematiksel altyapıya sahip olduklarını ve ispatı ezberlemeye çalıştıklarını söyleyerek ispat sunmama gerekçelerini desteklemişlerdir. Bazı çalışmalarda (örn., Hemmi, 2010) bildirilen matematikçilerin görüşleri de bu bulguyu doğrulamaktadır.

Bazı öğretim elemanlarının öğrencilerin ispatları boğucu gördüğüne, bu nedenle ispata katılım göstermediklerine veya sınıfta az kişinin katılım gösterdiğine ilişkin açıklamaları Sears ve Chavez'deki (2014) katılımcılarının görüşlerini desteklemektedir.

Aynı nedenlerle örneğin Dr. Soyut'un her teoremi, teorem adı altında vermediği, not başlığı altında sunduğu, Dr. Vektör'ün ise bu nedenle öğrencilerden katılım beklemediği söylenebilir.

Bu tür çalışmaların farklı bölümlerde matematik dersi veren daha fazla öğretim elemanları ile yapılmasının bu alana daha geniş bir bakış açısı sağlayacağı düşünülebilir. Bu araştırmada bazı öğretim elemanlarının uygulamaları birden fazla derste gözlemlenirken bazı öğretim elemanlarının sadece bir dersi gözlemlenebilmiştir. Öğretim elemanlarının uygulamalarının farklı derslerde değişiklik gösterip göstermediğinin yorumlanması bu açıdan tüm öğretim elemanları için mümkün olmayabilir. Diğer taraftan, birden fazla dersi gözlemlenen 2 öğretim elemanının farklı derslerinde ispat sunma tercihlerinin değişmediği görülmüştür. Daha sonraki çalışmalarda, bu durumu öğrencilerin perspektifinden ele alarak, öğrencilerin öğretim elemanlarının bu tercihleri hakkındaki görüşlerini ve bunların pedagojik gerekçelerini anlayıp anlamadıklarını incelemek, ispat öğretimine bu bağlamda daha fazla ışık tutabilir.

5.1.3. Üçüncü alt probleme yönelik tartışma (Öğrenciye bakış)

NCTM'ye (2000) göre anaokulundan 12. sınıfa kadar standart öğretim programları, ispat ve akıl yürütme bağlamında tüm öğrencilerin: Matematiksel varsayımlar oluşturmaya ve bu varsayımlarını araştırmasına, matematiksel argümanlar/ispatlar geliştirmesine ve bunları değerlendirmesine, çeşitli ispat ve akıl yürütme yöntemleri seçmesine ve kullanmasına olanak sağlamalıdır. Bu maddeler 12. Sınıfa kadar olan öğrencilere ispat sorumluluğu vermeyi ve bunun önemini gerektirmekle birlikte onları eğitmek üzere yetiştirilen öğretmenlerin de bu süreçlerden geçmesi gerektiği söylenebilir. Buna ek olarak öğretmenlik mesleği özel alan yeterlikleri (ilköğretim ve ortaöğretim) başlığı altında öğretmenlerden beklenen yeterlikler ve üniversiteler tarafından bu doğrultuda belirlenen matematik öğretmenliği (ilköğretim ve ortaöğretim) temel program kazanımları da bu süreçleri gerekli kılmaktadır. Öğretim programları ve literatürdeki çalışmalar (örn., Ko ve diğerleri, 2016; Stylianides ve Stylianides, 2009a) öğrencilerin ispat yapmaya katılımının gerekliliğini vurgulamaları bakımından bu çalışmadaki öğretim elemanlarının çoğunun görüşünü desteklemektedir ve öğretim elemanlarının çoğunun öğrencilere ispatlama sorumluluğu verdiği gözlemlenmiştir. İspatın matematik eğitimindeki önemine ilişkin görüşlere de paralel olarak ispat sorumluluğu vermelerinde öncelikli görülen amaçlar sırasıyla öğrencilerin çeşitli düşünme becerilerini kazanmalarını sağlamak, anlayıp anlamadıklarını ölçmek, matematiğin işleyişini öğrenmelerini sağlamak, bilgilerini sağlamlaştırmak ve onları dersin içine çekmek gibi gerekçelerle onlardan ispat yapmalarını isteyebildikleri belirlenmiştir. Bununla birlikte Dr. Vektör bu açıdan farklı bir

bakış açısı sunarak geleneksel öğretim yaptığını ve öğrencilerin katılımını gerekli görmediğini aktarmıştır. Buna ek olarak, öğrencilerden ispat yapmalarını istemenin onların bilgilerinin pekişmesini sağlayacağını belirtmiş ve düşünme becerilerini geliştireceği görüşünü de öncelikli tercih etmiş olmasına rağmen derste bir ödev dışında öğrencilere böyle bir sorumluluk vermemiştir. Dr. Kompleks de söylemlerinde katılımı önemseydiğini belirtmekle birlikte ispat sunumlarında öğrencilerden böyle bir şey istememiştir. Dr. Kompleks'in açıklamaları doğrultusunda, bu tercihinde öğrencilerin ispatı yapabileceklerinden emin olmamasının etkili olduğu düşünülebilir. Aynı zamanda öğrencilerden ispat yapmalarını istemenin onları dersin içine çekeceğini belirtmiş ama kolay ispatların istenmesi gerektiğini de eklemiştir ve onların düşünme becerilerini geliştireceği görüşünü öncelikli tercih etmiştir. Dolayısıyla bu çalışma öğretim elemanlarının çoğunluğunun tercihleri ve uygulamaları doğrultusunda Fukawa-Connolly (2016) ve Martin ve diğerleri (2005) gibi öğrencilere ispatlama sorumluluğu verme eylemlerini içermekle birlikte yetkinin büyük çoğunlukla öğretmende olduğu Otten ve diğerleri (2017), Harel ve Rabin (2010), Martin ve McCrone (2003) ve Herbst'ün (2002) bulgularına paralel eylemler de içermektedir. Buna ek olarak öğrenciler her iki tür eylemlere de hem lisans eğitimleri boyunca hem de aynı öğretim dönemi içinde maruz kalmaktadırlar. Öğrenciye sorumluluk vermemeye ilişkin eylemlerin Harel ve Sowder'ın (1998) ana hatlarını çizdiği otoriter ispat şemasını gösteren öğrenci davranışlarına neden olup olmayacağını anlamak için öğrencilerin de dahil olduğu daha detaylı çalışmalar gerekmektedir. Bununla birlikte, Dr. Türev'in dersinde, bir ispat sunumu esnasında, bir öğrencinin, ispatın adımlarının doğruluğuna, öğretim elemanının doğru kabul edip etmemesine göre karar vereceğine ilişkin söylemleri, öğrencideki otoriter ispat şemasının mevcudiyetine ipucu da olabilir.

Öğrencilerin ispatı anladığının en önemli göstergeleri olarak sırasıyla benzer bir teoremi ispatlayabilmesi, ispatla bilgileri arasında ilişkilendirme yapabilmesi, ispatı kendi cümleleriyle anlatabilmesi, ispattaki kavramları bilmesi ve verilen isteneni oluşturabilmesi kabul edilmiştir. Bu eylemlerden çoğunun öğrencinin anlayıp anlamadığı değerlendirilirken istendiği gözlemlenirken bazıları hiç gözlemlenmemiştir. Örneğin öğrencilerden ispatı kendi cümleleriyle özetlemesinin istenmesi, öğrencilerin ispatı anlayıp anlamadığının değerlendirilmesinde neredeyse hiç gözlemlenmemiştir. Bu sonuç, öğretmenlerin değer verdikleri eylemleri her zaman sergilemedikleri bulgusunu (Lai ve Weber, 2014) desteklemektedir. Öğretim elemanları, sorular sorarak, öğrencilerin bakışlarını ve tepkilerini (mimiklerini) takip ederek ve onların sordukları soruları analiz ederek ispatı anlayıp anlamadıklarına ilişkin fikir sahibi olduklarını belirtmişlerdir. Uzun ve diğerlerinin (2013) öğretmenlerin, öğrencilerin ispatı ne kadar anladıklarını nadiren

değerlendirdiklerini belirtmiştir. Bu bulgunun aksine bu çalışmada, bazı öğretim elemanlarının öğrencilere anlayıp anlamadıklarını sorarak, onların bilgilerini yoklayacak soruları onlara yönelterek ve onların mimiklerini takip ederek anlayıp anlamadıklarını değerlendirdikleri söylenebilir.

Bu çalışmadaki öğretim elemanları, en az 10 yıl olmak üzere (bkz. yöntem bölümünde meslek tecrübelerini gösteren bilgiler) lisans düzeyinde öğrencilere (hatta çoğunlukla öğretmen adaylarına) ispat sunmaları da gereken matematik dersleri vermekte olduklarından gerek ders içinde ispat sunumunda gerekse sınavlar yoluyla öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüklerle ilişkin bilgi sahibi oldukları söylenebileceğinden aktardıkları güçlüklerle ilişkin bilgilerin kıymetli olduğu düşünülebilir. Öğretim elemanlarının bu çalışmada öğrencilerde gözlemlediklerini belirttikleri ispatlamaya ilişkin güçlükler: Öğrencilerin ispatlanacak ifadeyi anlamamaları, ispata nereden başlayacaklarına karar verememeleri, teoremden verilenleri ve matematiksel notasyonları doğru kullanamamaları, kavramlar arasında bağlantı kuramamaları ve doğru yöntemi seçememeleridir. Öğretim elemanlarının bu tespitleri, ortaokuldan üniversiteye kadar çeşitli düzeylerdeki öğrencilerin ispata ilişkin yeterliklerinin gözlemlendiği çalışmalarda (Moore, 1994; Uzun ve diğerleri, 2013; Uğurel ve diğerleri, 2015; Güler ve Dikici, 2014; Selden ve diğerleri, 2018; Baker ve Campbell, 2004; Stylianides, diğerleri, 2007; Ko ve Knuth, 2009; Wheler ve Champion, 2013; Bleiler ve diğerleri, 2014; Demiray ve Işıksal Bostan, 2017; Epp, 2003; Selden ve Selden, 1995; Weber, 2001; Pedemonte, 2007) bulguları desteklemektedir. Her ne kadar bu çalışmada öğrencilerin bu güçlükleri yaşadıklarına ilişkin bir gözlem yapılmamış olsa da deneyimli öğretim elemanları tarafından ortak fikirle aktarılmış olmaları ve bahsi geçen güçlüklerin her birinin en az iki öğretim elemanınca öncelikli olarak sıralanmış olması bu güçlüklerin mevcudiyetinin ve sıkça karşılaşıldığı olduğunun göstergelerinden sayılabilir.

Bu güçlüklerden bahsederken öğretim elemanlarının ispat okuma, ispat yapma ve verilen bir ispatı doğrulama-değerlendirme eylemleri bakımından ayırım yapmadan değerlendirdikleri ve çoğunlukla da yalnızca ispat yapma eylemine odaklanarak cevap verdikleri görülmüştür. Bununla birlikte, öğrencilerin okudukları bir ispatı anlayıp anlamadıklarına veya anladığını söyledikleri ispatı açıklayıp açıklayamayacaklarına ve bir ispatın doğruluğunu değerlendirip değerlendiremediklerine ilişkin bir görüş açıklamalarında yer almamıştır.

Öğrencilerin ispatlamada güçlük yaşamasının temel olarak öğrencilerin düşünme becerilerindeki eksikliklerden (soyut düşünme vb.), duyuşsal durumlarından (önyargı, inanç, ilgi vb.) ön bilgi (tanım, notasyon vb.) eksikliklerinden ve son olarak da öğrenci dışı

nedenlerden (lisedeki matematik eğitimi vb.) kaynaklandığını düşündükleri görülmektedir. Spesifik olarak belirtilen nedenlerden ise öğrencilerin lisede ispata ilişkin aldıkları yetersiz eğitimin, tanımları bilmemelerinin ve eleştirel düşünme becerilerinin düşük olmasının tüm öğretim elemanlarınca bahsi geçen güçlüklerin başlıca nedenleri olarak kabul edildiği görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin ispata karşı önyargılı olmaları, ispattan korkmaları, ispata değerini anlamamaları, matematik okuryazarlığına ilişkin eksiklikleri, soyut düşünme becerilerindeki yetersizlik ve örnekleri ispat için yeterli görmeleri öğretim elemanlarının çoğu tarafından bahsi geçen güçlüklerin nedenleri arasında kabul edilmiştir.

Dr. Soyut'un bazı öğrencilerin soyut düşünme becerilerinin gelişmediği görüşüne öğretim elemanlarının çoğu katılmıştır. Selden ve Selden'in (1995) öğrencilerin kompleks mantıksal iddiaları anlamakta zorlandığını ve Moore'un (1994) da öğrencilerin ispata dayalı derslere geçiş dersleri almalarına rağmen ispatta sorun yaşadıklarını aktarmış olması Dr. Soyut'un bu görünüşü desteklemektedir. Buna ek olarak Dr. Uzay, ispata dayalı dersleri bu tür ispata geçiş dersleri almadan görmenin ispatlamada güçlük yaşanmasının bir nedeni olarak açıklamış ancak kendisi de dahil olmak üzere hiçbir öğretim elemanı bu nedeni diğer nedenlere nazaran önemli görmemiş ve işaretlemişlerdir. Cihan (2019), lise matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeyi hedefleyen bir ders tasarlamış ve bu dersi uygulayarak faydalı olduğunu aktarmıştır. Bu bağlamda, ispata geçiş derslerinin varlığından ziyade bu derslerin içeriği ve uygulanmasının daha önemli olduğu söylenebilir.

Dr. Kompleks'in, öğrencilerin derse hazırlıklı gelmediğini belirtmiştir. Buna benzer olarak, Lew ve diğerleri (2016) öğrencilerin derste anlatılanları anlamamasında ders notlarını evde tekrar etmeye vakit ayırmadıklarını ve Sarı ve diğerleri (2013) de sunulan ispatları çalışmaya vakit ayırmadıkları ve kendilerinden bunun beklendiğinin farkında olmadıklarını aktarmışlardır. Mülakatta dile getirilmemiş olmasına rağmen Dr. Topoloji'nin derste teoremi sunarken yaptığı bir durum değerlendirmesinde öğrencilerden bazılarının yaşadıkları güçlükleri aşmak için çaba gösterdiğini bazılarının ise bu konuda özensiz davrandığını söylemesi öğrencilerin kendilerinden beklenen davranışlardan ya habersiz oldukları ya da bu beklentilere kayıtsız kaldıklarına işaret ediyor olabilir.

Öğrencilerin ispata değerini anlamadıkları ve bunun sonucu olarak da ispata gereksiz olduğunu düşündükleri görüşüne paralel çalışmalar (Stylianides ve Stylianides, 2009a; Uğurel, 2010) yer almaktadır. Öğrencilerin ispata karşı önyargılı oldukları da öğretim elemanlarının çoğu tarafından desteklenen görüşlerdendir. Bu bağlamda bu bulgular, Yılmaz'ın (2015) ve Sears ve Chavez'in (2014) bulgularını öğretmen bakışı açısıyla desteklemektedir.

Öğrencilerin ispatta kullanabilecekleri tanımları bilmedikleri görüşüne de öğretim elemanlarının hepsi katılmıştır. Bu bağlamda bu sonuç, benzer çalışmaların (Moore, 1994; Ko ve Knuth, 2009; Güler ve Dikici, 2014) bulgularını doğrulamaktadır. Bununla birlikte, bu çalışmada öğretim elemanları, öğrencilerin tanımları bilip de mi kullanamadıkları ya da tanımların nerde kullanılacağını mı bilmedikleri gibi ayrıntılara değinmemişlerdir.

Öğretim elemanları öğrencilerin bir örneğin ispat için yeterli olduğunu düşündüklerini yani deneysel argümanlarla ispat yaptıklarını belirtmişlerdir. Literatürde de bu sonuçlara benzer bulgulara (Martin ve Harel, 1989; Coe ve Ruthven, 1994; Harel ve Sowder, 1998, 2007; Knuth, 2002b; McCrone ve Martin, 2004; Stylianides, 2011; Uzun ve Bülbül, 2013; Martinez ve Pedemonte, 2014; Stylianou ve diğerleri, 2015; Demiray ve Işıksal Bostan, 2017) rastlanmaktadır. Diğer taraftan, öğrencilerin ispatta örnekleri nasıl kullanacaklarını bilip bilmemelerine yönelik bulgulara yer veren çalışmaların (Uğurel ve diğerleri, 2015; Alcock ve Weber, 2010; Moore, 1994; Ko ve Knuth, 2009) aksine öğretim elemanları, bu konuda daha detaylı bir açıklama yapmamışlardır. Ayrıca, öğrencilerin ispata dair kesin fikirlere sahip olmamaları da (Moore, 1994; Selden ve Selden, 1995; Weber, 2001; Inglis ve Alcock, 2012; Uzun ve Bülbül, 2013; Güler ve Dikici, 2014; Bleiler ve diğerleri, 2014; Demiray ve Işıksal Bostan, 2017) bir örneği ispat için yeterli görmelerinin nedeni kabul edilebilir. Örneklere dayanan bu güçlükler bağlamında, Stylianides ve Stylianides'in (2009b) deneysel argümanların sınırlılıklarını gösteren öğretim uygulamalarına ilişkin önerilerinin önemli olduğu söylenebilir.

Tüm bunlara ek olarak epistemolojik bir neden olarak kabul edilebilecek ispatların kendi doğasından kaynaklı olarak kolay olmadığı görüşü de doktoralarını diğer öğretim elemanlarından farklı olarak matematik bölümünde yapmış olan iki öğretim elemanı tarafından dile getirilmiştir. Bu öğretim elemanlarından yalnızca biri tarafından seçilen bu görüş, literatürde Stylianides ve Stylianides'nin (2017) görüşlerini desteklemekle birlikte bu bağlamda çok sık karşılaşılmaması bakımından farklı bir sonuç olarak kabul edilebilir.

Öğretim elemanlarının öğretmenlere yönelik eleştirilerinden biri lise öğretmenlerinin sınav sistemi nedeniyle ispat anlatmaması ve ikincisi ise öğretim elemanlarının ispatları kendilerinin sunması ve öğrencilere ispatlama için sorumluluk vermemesidir. Bu bağlamda bu bulguları destekleyen çalışmalar (Baştürk, 2010; Stylianou ve diğerleri, 2015; Harel ve Rabin, 2010; Weber, 2004; Uğurel, 2010) görülmekle birlikte literatürde öğretmenlerin alan ve pedagojik alan bilgilerindeki eksikliklere değinilmemesi bakımından bu çalışma Martin ve Harel (1989) ve Knuth'un (2002a) çalışmalarından ayrılmaktadır.

Knuth'un (2002b) çalışmasında lise öğretmenlerinin öğrencilerinin ispatları öğrenemeyeceğini düşünmelerini belirtmelerinden farklı olarak bu çalışmada öğretim elemanları ispat öğretiminin lisede de olması gerektiğini belirtmişlerdir. Taştepe'ye (2012) paralel olarak öğretim elemanlarından bazıları ispat öğretiminin kademeli olarak ilkokuldan itibaren başlaması gerektiğini de söylemişlerdir.

Yukarıda bahsi geçen güçlüklerin giderilmesi için öğretim elemanlarının öğretmenlerden, ailelerden ve eğitimde kanun yapıcılardan beklentileri bulunmaktadır. Öğrencilerin sorgulama becerilerinin sadece derslerde sergilenmesinin yeterli olmayacağını düşünerek aile ortamlarında da bu becerinin engellenmemesini istedikleri söylenebilir. Ayrıca üniversitedeki derslerin veriliş sırasında düzenleme yapılması ve ispatın küçük yaşlardan itibaren öğrenilmesine fırsat veren kazanımların müfredatlarda yer alması da beklenmektedir. Öğretmenlerden beklentilerin ise daha fazla vurgulandığı görülmüştür. Örneğin, öğretmenlerin sınıfta tek otorite olması yerine öğrencilerin ispat yapma sürecine katılmalarını destekleyen çalışmalara (örn., Ko ve diğerleri, 2016; Stylianides ve Stylianides, 2009a) benzer şekilde öğretim elemanlarından bazıları öğrencilerin ispatlama becerilerinin gelişimi için öğrencilerin ispata dahil edilmesini önermişlerdir. Buna ek olarak, öğrencilerin ispatın önemini anlamaları için bunun anlatılması ve faydalarının vurgulanması gerektiği söylenmiş ancak bunun nasıl yapılacağından bahsedilmemiştir. Literatürde de ispatın öneminin vurgulanmasına değinilmiş (örn., Nardi ve Knuth, 2017; Demiray ve Işıksal Bostan, 2017) ancak bunun nasıl yapılacağına ilişkin görüşlerin bu çalışmada olduğu gibi o çalışmalarda da örtük kaldığı söylenebilir. Öğrencilerin açık uçlu sorularla değerlendirilmesi, sınavlarda ispatın sorulması, çalışma yapırları gibi materyaller kullanılması, öğrencilerin sınıfta ispatlarını sunmaları gibi çeşitli yöntemlerin uygulanması da tavsiye edilenler arasında yer almaktadır. Bu bağlamda, bu çalışmada benzer önerilerin faydalarını bulgularıyla doğrulayan çalışmaların (örn., İnam, 2014; Ünveren, 2010; Yeşilyurt Çetin, 2017; Yılmaz, 2015) amaçlarını destekleyen görüşler bulunduğu söylenebilir.

5.1.4. Dördüncü alt probleme ilişkin tartışma (Ders kitabına bakış)

Öğretim elemanlarından üçü, bir ya da daha fazla kitap takip ettiklerini, yine üç tanesi kitaplardan da faydalanarak oluşturdukları notları kullandıklarını ve biri ise istediği içeriğe sahip bir kitap olmamasından dolayı kitap takip etmediğini belirtmiştir. Taştepe (2012) deki öğretim elemanlarının uygulamasına benzer şekilde bu çalışmada da ders kitabı takip eden veya etmeyen hiçbir öğretim elemanının öğrencileri tek bir kitaba yönlendirmediği veya bir kitabı almak konusunda zorlamadıkları gözlemlenmiştir. Tercih edecekleri ders kitabında ispatların niteliğine ilişkin beklentileri olduğu ve bu beklentilerini

öğrencilerin faydalarını gözeterek açıkladıkları da söylenebilir. İspat adımlarının nedenleriyle açıklanmış olması, ispatın öğrencinin anlayabileceği şekilde seviyesine uygun sunulması ve ispat içinde gereken önbilgilerin verilmiş olması en çok tercih edilen beklentiler olmuştur. Benzer şekilde, Lai ve diğerlerinin (2012) çalışmasında ders kitabı için hazırlanan bir ispatta, öğretmenlerin ispatların örtük mantıksal yapısını ortaya çıkarmak için varsayım ve sonuçlarının altını çizerek ispatları düzenlediklerini ve ayrıca, öğrencilerin zorlayıcı bulabileceği mantıksal boşlukları doldurmak için gerekçeler ekleyerek ispatları belirli hedef kitleler göre ayarladıklarını aktarmışlardır.

Dr. Öklid'in içerik sıralamasının tarihsel akışa dikkat edilerek verilmediğine yönelik açıklamalarına benzer şekilde Sears ve Chavez (2014) bir öğretmenin ders kitabındaki içeriğin sunulduğu sıranın daha mantıklı olmasını beklediğini aktarmıştır. Ayrıca yine aynı çalışmada matematiksel fikirler arasında bağlantı sağlanması beklentisinin, ispatlar özelinde bakıldığında bu çalışmadaki öğretim elemanlarının adımlar arasındaki bağlantıların açıklanmasına, akış şemasıyla ispatın özetlenmesine ve önbilgilerin verilmesine ilişkin beklentilere paralel olduğu söylenebilir.

Zazkis ve diğerleri (2016) inceledikleri kitaptaki ispatların çok azının resimlerle sunulduğunu ve ispat adımlarının görsellerle gerekçelendirilmediğini aktarmıştır. Bu çalışmada da Dr. Topoloji ders kitabında ispatların olabildiğince görselleştirilerek sunulması gerektiğini dile getirmiş ve Dr. Vektör de bu görüşü öncelikli olarak tercih etmiştir. Benzer şekilde, Samkoff ve diğerleri (2012) ve Lai ve Weber (2014) de öğretim elemanlarının şekiller/diyagramlar içeren ispatlara değer verdiklerini aktarmışlardır.

Bu alt probleme ilişkin bulguların büyük çoğunluğunun öğretim elemanları tarafından öncelikli bulunduğu görülmüştür. Bu bağlamda, birçok matematik eğitimcisi tarafından çoğunluğunun onaylanabileceği de tahmin edilebilir. Bununla birlikte, literatürde genellikle tam tersi beklentinin varlığından söz edilebilecek bir bulguya da ulaşılmıştır. Örneğin, Dr. Kompleks tarafından dile getirilen ve yalnızca Dr. Soyut tarafından öncelikli olarak tercih edilen “kitaptaki tüm teoremlerin ispatlarının yapılmış olması” beklentisi öğrencilerin yararının gözetildiği açıklamalar içermekle birlikte ispatların bir kısmının öğrenciye bırakılmasını da destekleyen çalışmalar (örn., Ayalon ve Hershkowitz (2018) bulunmaktadır. Ayrıca, Lai ve Weber (2014) öğretim elemanlarının öğrenciler için bir ders kitabına ispatlar yazarken tüm teoremleri ispatlamadıklarına ve öğrencilerin yapabilecekleri ispatları vermediklerine dair bulgulara ulaşmışlardır. Benzer şekilde Taştepe (2012) yerli kitaplarda yayınlanma yıllarına göre ispatı öğrenciye bırakma miktarının arttığını, yabancı yayın evine ait kitaplarda ise ispatların birçoğunun öğrenciye bırakıldığını aktarmıştır.

5.2. Sonuç ve Öneriler

“Hocam sizin yazışınız gibi yazmaya çalışıyorum!”

Ders video gözlemlerinde tahtaya kalkmış ispat yapmaya çalışan bir öğrencinin (yukarıdaki) cümlesi aslında bu tezin amacını da özetlemektedir. Öğretmen adayı olan öğrencilerin matematik bilgilerinin yanı sıra bilgiyi aktarım yollarının da şekillendiği lisans eğitiminde, beklenen şeklin oluşmasında en önemli unsurun öğretim elemanları olduğu kuşkusuzdur. Dolayısıyla bu çalışma, öğretmen eğitiminde deneyimli yedi öğretim üyesinin ispat öğretiminin birçok boyutuna ilişkin fikirlerini ve mevcut ders uygulamalarını içermesi bakımından önemli kabul edilebilir. Hem deneyimli öğretim elemanlarının matematiksel ispatın öğretiminde görüşleriyle inşa edebileceği ortak yapının ne olabileceği hem de ayrı ayrı kendi yapılarının ne ölçüde görüldüğü ve hangi öğeleri içerdiği bu çalışmanın temel konusudur.

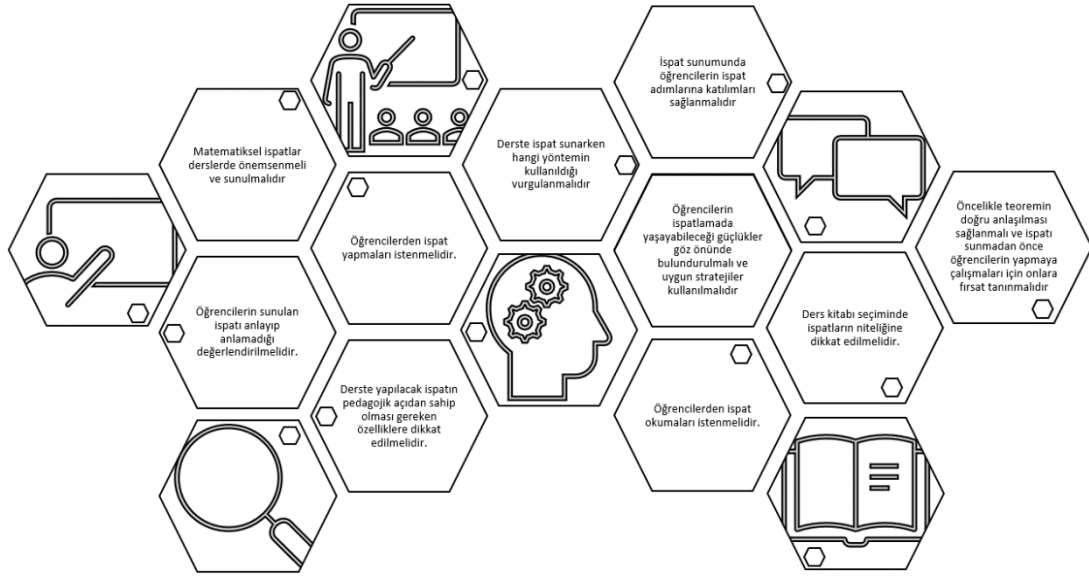
Kuşkusuz ki matematiksel ispatların önemsenmesinde öğrencilere kazandırılması hedeflenen bazı beceriler ve bilgiler rol oynamaktadır. Bununla birlikte, bu hedeflere ulaşmak için kısa vadede amaçlanan şey ise öğrencilerin sunulan ispatı hem konu hem de ispat yapma bağlamında işlemsel ve kavramsal olarak anlamasıdır. Dolayısıyla bir eğitiminin bu amaca götüreceği inançlara sahip olması ve bu amaca hizmet edecek eylemleri gerçekleştirmesi beklenir. Elbette ki bu eylemlerin öğrenci ve ortam farkından etkilenmesi normaldir. Bu çalışmanın amacı, öğretim elemanlarını bu amaca hizmet eden eylemleri bağlamında değerlendirmek, derecelendirmek veya kıyaslamak değildir. Aynı inançların farklı eylemlere yönlendirebileceği veya aynı eylemlerin farklı inançlar taşıyabileceği göz ardı edilmemiştir. Dolayısıyla, ispat öğretiminde aynı, benzer veya farklı inançlara sahip olabilecek öğretim elemanlarının öğretim uygulamalarının hangi örüntüleri, benzerlikleri veya farklılıkları barındırdığı ve bu örüntü, benzerlik ve farklılıkların hangi pedagojik amaçlara/inançlara dayandırıldığının betimlenmesi amaçlanmıştır. Aynı zamanda eylemler ve amaçların tekrar eden yapılar teşkil edip etmediği ve bu yapıların hangi görüş veya uygulamalarda kesişip hangilerinde ayrı düştükleri betimlenmeye çalışılmıştır. Değerlendirme amacı gütmemekle birlikte analiz sürecinin sürekli karşılaştırma işlevi gereğince aynı amaca hizmet edecek eylemlerin kıyaslanması da kaçınılmaz olmuştur. Örneğin, anlamının sağlanmasında veya öğrencilerin sürece dahil edilmesinde sarf edilen çaba çok önemlidir ve öğretim elemanlarının buna yönelik çabaları farklı eylemleri ve söylemleri içerebilmektedir.

Bazı uygulamalar her ders için geçerli olup pedagojik bir değer içerirken bazılarının her derste uygulanmadığı söylenebilir. Örneğin, ispat yaparken örnek kullanmak geometri

dersi için daha az tercih edilebilirken şekil çizmenin de en çok geometri dersi için geçerli olabilecek bir uygulama olduğu düşünülebilir. Bununla birlikte, önemi dersten derse değişmeyen (ve hatta bazıları NCTM ve MEB gibi kurumlarca gerekli görülen) uygulamalar ve eylemler de bulunmaktadır. Örneğin, yaparak yaşayarak öğrenmeyi sağlamak adına öğrenciyi ispat yapmaya (veya en azından ispatın bazı adımlarını oluşturmaya) teşvik etme, durum analizi/değerlendirmesi yaparak öğrencilere kendi mevcut pozisyonlarını yansıtmaya ve onların kendi durumları hakkında fikir sahibi olmalarını sağlama, ispatın adımlarına öğrenci katılımını sağlamak adına sorular sorma, teorem ve ispatların teknik/yapısal yönlerini tanıtmaya veya bu yönlerin nasıl kullanılacağına yönelik bilgi verme vb. durumların ispat temelli olsun olmasın her ders için geçerli ve gerekli olduğu söylenebilir. İşte bu çalışmayla, dersten derse değişmemesi gerektiği düşünülen önemli uygulamaların varlığı veya görülme sıklıkları, derste veya mülakatta bariz olarak farklılık içeren söylemleri ve görüşlerdeki fikir birlikleri veya ayrılıkları sonucunda iki önemli teoriye ulaşılmıştır. Teorilerden biri, öğretim elemanlarının görüşleriyle oluşturdukları “*ideal ispat anlatım yapısı*”dır. Bu ideal ispat anlatım yapısı, mülakatta ispat anlatımına yönelik olması gerekene (*ideal olana*) işaret eden sorulara öğretim elemanlarından gelen yanıtlar ve bu yanıtların seçiliş ve sıralanışları sonucunda şekillenmiştir. İkinci teori ise öğretim elemanlarının ispat anlatımlarında veya görüşlerinde baskın bir farklılık gösteren ve bir örüntü oluşturan (dersten derse değişmemesi beklenen ve pedagojik açıdan önemli kabul edilebilecek) özelliklerini içeren “*odak ispat anlatım yapısı*”dır. Bu anlatım yapılarının belirlenmesi ise öğretim elemanlarının ispat sunumları süresince tespit edilen uygulamalarındaki örüntüler ve farklılıkların analizi ile sağlanmıştır. Aşağıda bu iki teoriye yönelik detaylı bilgilere yer verilmiştir.

5.2.1. İdeal ispat anlatım yapısı

İspat anlatım yapısının incelenmesinde temel alınan bağlamlar doğrultusunda öğretim elemanlarının yapılması veya olması gerekenlere yönelik düşünceleri derlenmiştir. *Olmaması gerekenlere* yönelik fikirleri içermesi sebebiyle “*ideal*” olarak tanımlanmıştır. İspat yapmanın ve ispatlarla aktarılmaya çalışılan bilgilerin öğretilmesi sürecinde ispatın matematik eğitiminde önemine ilişkin inançları, bu öğretimde gerekli gördükleri öğretmen eylemleri/uygulamaları, öğrencilerden ve ders kitaplarından beklentilerinin bu yedi deneyimli öğretim elemanının (ve belki de birçok eğitimcinin) ideal bulduğu ispat anlatım yapısını teşkil ettiği söylenebilir. Şekil 32, bu çalışmada ulaşılan *ideal ispat anlatım yapısını* özetlemektedir.



Şekil 32. İdeal ispat anlatım yapısı özeti

İdeal ispat anlatım yapısına göre olması beklenen inançlar ve eylemler/uygulamalar aşağıda maddeler halinde özetlenmiştir:

- Matematik eğitiminde ispat, öğrencilerin düşünme becerilerini (analitik düşünme ve problem çözme vb.) geliştirmesi, matematiği bir disiplin olarak öğrencilere tanıtmayı, konunun öğrenilmesini sağlaması (kalıcı öğrenme vb.) ve öğrencilerin güven, haz, heyecan vb. duyuşsal hislerini beslemesi yönleriyle önem arz etmektedir. Bu bağlamda derslerde önemsenmeli ve sunulmalıdır.
- Öğrencilerin bağımsız olarak ispat okumaları desteklenmelidir. Çünkü: Öğrencilerin yapılmış bir ispatı okumaları ve anlamaya çalışmaları onların muhakeme yeteneğini attırır. Eğer öğrenci benzer bir teoremin ispatını incelerse kendi yapacağı ispat için fikir geliştirebilir. Ayrıca bir teoremin farklı ispatlarını incelediğinde de o teoremi daha iyi kavrayabilir.
- Hem becerilerini geliştirme hem de değerlendirme amaçlarıyla öğrencilerin ispat yapmaya çalışmaları istenmelidir. Öğrencilerin bağımsız olarak düşünmeye başlayabilmesi ve düşünme becerilerini kazanmaları bunun en önemli amacıdır. Buna ek olarak, bu yolla öğrencilerin ispatlamayı ve konuyu anlayıp anlamadığı değerlendirilebilir ve öğrenciler matematiğin bir disiplin olarak işleyişini de yaşayarak kavramış olurlar. Bununla birlikte, derse ve öğrencilerin durumuna göre bazı ön şartlar da gerekebilir. Örneğin, öğrencilerden ispat yapmalarını istemeden ve beklemeden önce ispat için gereken bilgilere sahip olup olmadıklarından emin olmak (benzer ispatlar göstermiş ve ispatlama

yöntemlerini öğretmiş olmak gibi) ve öğrenciler için zor olabilecek ispatları seçmemek gerekir.

- Derste ispat anlatımı bazı gereklilikleri de beraberinde getirir. Bunlar: Öğrencilerin katılımının sağlanması (örn., soru sorulmalı ve öğrencilerin yapmaların için zaman verilmeli), bazı bilgilerin (örn., ön bilgiler, adımların açıklamaları ve yöntem) sunulması ve bazı prosedürlerin (örn., matematik dilinin kullanımı, ispatı değerlendirme, mantık sırası) takip edilmesidir. Öğrencilerin ispat yaparken yaşadığı en önemli güçlüğü teoremi anlamamaları olması nedeniyle öncelikle teoremin doğru anlaşılması sağlanmalıdır. Buna ek olarak ispatı sunmadan önce öğrencilerin yapmaya çalışmaları için onlara fırsat tanınmalıdır.
- Derste ispat yaparken hangi ispat yönteminin kullanıldığı vurgulanmalıdır. Çünkü ispat yöntemini bilmesi o anda öğrenciye ispat için fikir verebilir ve öğrencinin ispat sunumuna dahil olmasını sağlayabilir. Ayrıca benzer yöntemler gerektiren ispatları yapabilmeleri kolaylaştırır, ispat yöntemlerine yönelik farkındalıkları artar ve böylece profesyonel yaşamlarında da ispat yöntemlerine daha hâkim birer öğretmen olabilirler.
- Öğrencilerin ispata katılarak anlayabileceği ve düşünme becerilerinin de bu yolla gelişebileceğinden dolayı öğrencilerin ispata katılımları sağlanmalıdır. Bu katılım sorular aracılığıyla öğrencileri ispat adımlarına dahil etmek veya ispatı öğrencilerden beklemek şeklinde sağlanabilir.
- Derste ispat yaparken seçilen ispatın dersin kapsamına ve öğrenci seviyesine uygun olmasına, öğrenciye ilişkilendirme yapmayı sağlamasına, adımların mantıklı sıralanmasına ve matematik dilinin doğru kullanılmasına dikkat edilmelidir.
- Öğrencilerin derste sunulan ispatı anlayıp anlamadığı değerlendirilmelidir. Öğrencinin ispatı anladığını gösteren en önemli göstergeler: Benzer bir teoremi ispatlayabilmesi, önceki bilgileriyle ispat arasında ilişkilendirme yapabilmesi ve ispatı kendi cümleleriyle anlatabilmesidir.
- Öğrencilerin ispat yapmaya, okumaya, anlamaya ilişkin yaşayabileceği güçlükler göz önünde bulundurulmalıdır. Öğrenciye göre çeşitlenmekle birlikte en çok karşılaşılan güçlükler: ispatlanacak ifadeyi yani teoremi anlamamaları, verilenleri kullanamamaları, ispata nereden başlayacaklarına karar verememeleri, matematik dilini doğru kullanamamaları, kavramlar arasındaki bağlantıyı yapamamaları ve doğru ispat yöntemini belirleyememeleridir. Öğrencilerin bu güçlükleri yaşaması ise bazı düşünme becerilerinin yeterince

gelişmemiş olması, duyuşsal (düşünmeye direnç göstermeleri, ön yargıları, korkuları, ispatın değerini anlamamaları) durumları, önbilgi yetersizliği ve öğrenci dışı bazı (lisede teste alışmaları ve ispat yapmamaları) nedenlerden kaynaklanmaktadır. Bu güçlüklerin azaltılması için öğretmenler: Öğrencilerin ispata katılımını sağlamalı, matematik altyapılarını ve düşünme becerilerini kuvvetlendirmeli ve ispatları sunarken faydalı olabilecek öğretim yöntemleri kullanmalıdır.

- Derste öğrencilerin ve öğretmenin takip edebileceği ders kitabı içeriğindeki ispatların niteliği açısından bazı özelliklere sahip olmalıdır. Buna göre kitapta ispat adımları nedenleriyle açıklanmış, ispat öğrencinin anlayacağı şekilde seviyesine uygun sunulmuş ve ispatın başında gereken önbilgiler verilmiş olmalıdır.

5.2.2. Odak ispat anlatım yapısı

Odak ispat anlatım yapısı, öğretim elemanlarının ispat anlatımlarında veya görüşlerinde baskın bir farklılık gösteren ve bir örüntü oluşturan (dersten derse değişmemesi beklenen ve pedagojik açıdan önemli kabul edilebilecek) özelliklerini içeren yapılardır. Bu anlatım yapılarının belirlenmesi, öğretim elemanlarının ispat sunumları süresince tespit edilen uygulamalarındaki örüntüler ve farklılıkların analizi ile sağlanmıştır.

Öğretim elemanlarının ders gözlemleri ve mülakatlarının analizleri sonucunda teorem ve ispat sunumunda sorular sordukları, öğrencilere sorumluluk verdikleri, teoreme dikkat çektikleri, ilişkilendirme, tekrar anlatım ve teknik açıklamalar yaptıkları, şekil, görsel grafik kullandıkları, örnek verdikleri, durum değerlendirmeleri yaptıkları vb. uygulamaları gözlemlenmiş ve bu uygulamaların görülme sıklıkları betimlenmiştir. Bununla birlikte, yukarıda bahsedildiği gibi özellikle dersten derse değişmemesi beklenen uygulamalarla öğretim elemanlarının hangi noktalara vurgu yaptıkları ya da odak noktalarının neler olduğu ve bu odak noktalarının ispat sunumlarında görülme sıklığı, öğretim elemanlarının hangi yapıyı daha baskın olarak sergilediğine ilişkin fikir vermiştir. Bu noktalardan bazıları tüm öğretim elemanlarında çeşitli düzeylerde bazıları ise sadece belirli öğretim elemanlarında gözlemlenmiştir.

Aynı yapıyı gösteren öğretim elemanlarının uygulamalarında farklılıklar olabildiğinden bu yapıların hiçbirisi kendi içinde homojen görülmemelidir. Buna ek olarak öğretim elemanları bazı ispatlarda tek yapıyı bazılarında hepsini sergileyebilmektedirler ve her yapıdan çeşitli düzeylerde bir şeyler yansıtabilmektedirler. Burada hem kendi içinde hem de diğer öğretim elemanlarına nispeten baskın şekilde gözlemlenen yapılar ele

alınmıştır. Bu yapılardan başka yapılar da mevcut olabilir ve aynı zamanda öğretim elemanları farklı derslerinde farklı yapılar da sergiliyor olabilirler. Burada, farklılık gösterdiği tespit edilen ve baskın olarak görülen otorite, prosedür, deneyim ve değerlendirme odaklı yapılara yer verilmiştir. Belirlenen bu yapıların hangi eylemleri ya da söylemleri içerdiği ve bu yapıların ispat sunumlarında görülme sıklığına göre hangi öğretim elemanları tarafından baskın şekilde sergilendiği aşağıda maddeler halinde açıklanmıştır:

1. **Prosedür odaklı yapı:** İspat anlatımında prosedüre yönelik eylemler sayılabilecek hipotezin, hükmün, yöntemin veya notasyonların vurgulanması ve açıklanması yani ispatın teknik yönlerinin vurgulanıp açıklanmasına odaklanan yapıdır. Teknik açıklamalar, teoremin ne tür yapılar/kalıplar içerdiği (hipotez-hüküm kısımları vb.), ispat yöntemi, teoremden/ispatta kullanılan notasyona yönelik bilgiler vb. içeren açıklamalar olarak ele alınmıştır. Bu tür açıklamaların öğrencilerin teoreme ve ispata yönelik bir anlayış geliştirmesine katkı sağlayacağı söylenebileceğinden önemli kabul edilmiştir. Teknik açıklamaların tüm öğretim elemanları tarafından çeşitli yoğunluklarda yapıldığı söylenebilir. Bununla birlikte, Dr. Soyut, Dr. Uzay ve Dr. Topoloji sundukları ispatların yarısından çoğunda, Dr. Vektör yarısında ve Dr. Kompleks ise yarısına yakınında bu yapıyı sergilemiştir. Bu yapıyı en az sergileyen öğretim elemanı ise Dr. Türev'dir. Sorular açısından değerlendirildiğinde ise Dr. Topoloji ve Dr. Soyut'un diğer öğretim elemanlarına nispeten teknik açıklama gerektiren daha fazla sonuç ve yorum soruları sordukları görülmüştür. Yalnızca teoremin sunumu göz önünde bulundurulduğunda da öğretim elemanları içinde teoremi sunup anlatırken en çok teknik açıklama yapan öğretim elemanları da Dr. Vektör ve Dr. Topoloji'dir.
2. **Deneyim odaklı yapı:** Bu yapı öğrencinin yaparak yaşayarak öğrenebileceğini savunarak öğrencilere ispat yapma sorumluluğu vermeyi içermektedir. NCTM'nin (2000) öğrencilerin akıl yürütme ve ispatlama süreçlerinin içinde yer almasına yönelik tavsiyeleri ve yaparak yaşayarak öğrenmenin önemi göz önünde bulundurulduğunda bu uygulamanın hem pedagojik olarak öğrencilere faydalı olduğu hem de öğretmen eğitiminde de bu açıdan gerekli olduğu düşünülebilir. Sunulan ispatlarda bu yapıyı, Dr. Öklid neredeyse tüm ispatlarda, Dr. Türev yaklaşık olarak dörtte üçünde, Dr. Topoloji ve Dr. Soyut ise yarısına yakınında sergilemiştir. Bu noktada öğrencilerin katılımında öğretim elemanları arasındaki farklılığın derslerin içerikleri bakımından anlamlı olduğu söylenebilir. Yani, Dr. Öklid ve Dr. Türev'in derslerinin (Geometri ve Analiz), öğrencilerin lisedeki bilgileriyle doğrudan alakalı olması ve öğretmen olduklarında bu bilgilerin (teoremlerin)

çoğunu doğrudan kullanacak olmaları onların ispatlara katılımlarını kolaylaştırıyor olabilir. Diğer taraftan, Dr. Soyut ve Dr. Topoloji'nin dersleri (Soyut Cebir ve Topoloji), bu bağlamda bahsi geçen diğer derslere nispeten daha soyut ve öğrencilerin önceki bilgilerine daha uzak kalan ve genellikle daha zor oldukları düşünülen dersler olduğundan ve o öğrencilerin öğretmen olduklarında bu bilgileri (teoremleri) doğrudan kullanmayacak olmalarından dolayı katılım göstermelerinin daha zor olduğu varsayılabilir. Özetle dersleri de hesaba katılarak düşünüldüğünde bu öğretim elemanlarının hepsinin öğrencilere ispat sorumluluğu verme noktasında baskın bir yapı sergiledikleri söylenebilir. Dr. Soyut diğer öğretim elemanlarından farklı olarak öğrencilerin yalnızca sıralarında yapmaları açısından sorumluluk verirken yaptıkları ispatları sınıfta sunmalarını istememiş ancak sınıfta dolaşarak öğrencilerin yaptıklarını kendisine anlatmalarını istemiştir. Teorem sunumlarında ise bu uygulama öğretim elemanlarından yalnızca Dr. Topoloji'nin derslerinde gözlemlenmiştir. Dr. Topoloji sunduğu teoremlerin bazılarında ispatlanacak ifadeyi öğrencilerin kendileri okuyarak anlamaları için kısa bir süre beklemiştir.

3. **Değerlendirme odaklı yapı:** Yorum soruları, kontrol soruları ve durum analizleri gibi öğrencilerin bilgilerini veya kavrayışlarını değerlendirmeyi amaçlayan uygulamaları içeren yapıdır. Bu yapı bahsi geçen uygulamalarla alt başlıklar halinde değerlendirilmiştir.

- a. **Yorum sorularıyla değerlendirme odaklı yapı:** Yorum soruları öğrencilerin açıklama yaparak kendi bilgi düzeylerini yansıtmalarını gerektirdiğinden bu tür sorular hem öğretim elemanının, öğrencinin öğrenmesini değerlendirebilmesini hem de öğrencilerin derse aktif olarak katılımlarını sağlayabilmektedir. Dr. Soyut, Dr. Uzay ve Dr. Türev sundukları ispatların yarısından çoğunda, Dr. Topoloji yarısında ve Dr. Öklid ise yarısına yakınında yorum soruları sormuşlardır. Bununla birlikte, Dr. Topoloji sunduğu ispatların büyük çoğunluğunda ve Dr. Uzay da yarısından çoğunda yorum soruları soruyor olmalarına rağmen kendi sorularının çok azının yorum sorularından oluştuğu söylenebilir. Dr. Soyut'un ise hem sunduğu ispatların çoğunda yorum soruları sorduğu hem de kendi soruları içerisinde de yorum sorularının (sorduğu tüm soruların yaklaşık olarak beşte biri) diğer öğretim elemanlarına göre daha önemli bir yer tuttuğu görülmüştür. Yalnızca teorem sunumu göz önünde bulundurulduğunda da Dr. Türev hem teorem bazında hem de kendi soruları içinde değerlendirildiğinde diğer öğretim elemanlarına nispeten çok daha fazla yorum soruları sormuştur. Kendi soruları içinde de yorum

sorularının önemli bir yer tuttuğu söylenebilir. Dr. Uzay ve Dr. Kompleks'in ise teoremi sunarken hiç yorum soruları sormadıkları gözlemlenmiştir.

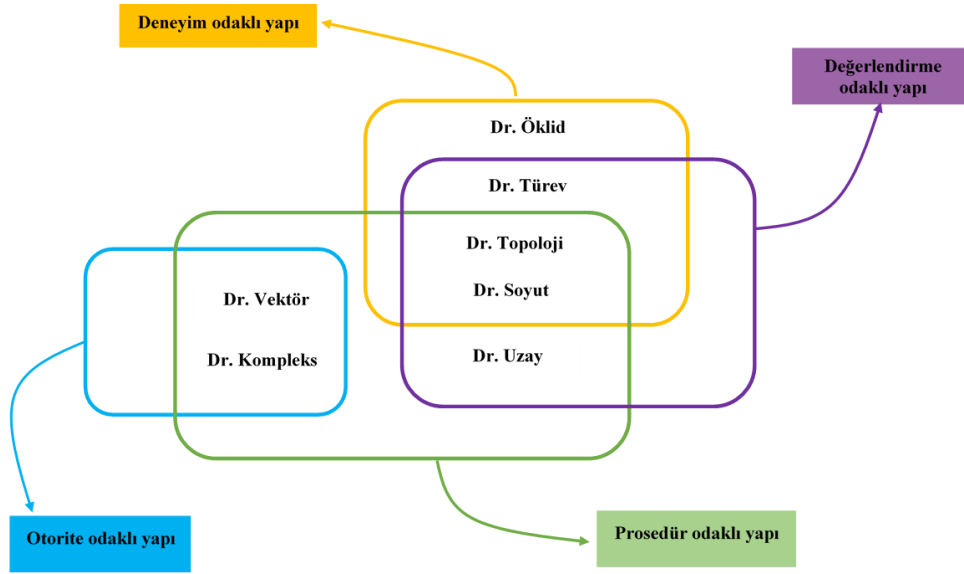
b. Kontrol sorularıyla değerlendirme odaklı yapı: Kontrol soruları öğrencilerin anlayıp anlamadıklarının açık olarak sorulduğu (“Anladınız mı?”, “Sorusu olan var mı?” vb.) sorulardır. Öğrencileri soru sormaya veya tekrar anlatılmasını istemeye teşvik edebilecek olması bakımından bu tür soruların önemli olduğu düşünülebilir. Tüm öğretim elemanlarının ispat yaparken çeşitli yoğunluklarda kontrol soruları sordukları gözlenmiştir. Bununla birlikte, Dr. Uzay'ın hemen hemen her ispat sunumunda, Dr. Türev'in ise ispatların yarısından çoğunda kontrol soruları sordukları ve öğrencilerin anlayıp anlamadığını bu yolla değerlendirmeye çalıştıkları söylenebilir. Buna ek olarak, Dr. Uzay'ın kendi soruları içerisinde de kontrol sorularının diğer öğretim elemanlarına göre daha önemli bir paya sahip olduğu söylenebilir. Teorem sunumunda da kontrol sorularında hem teorem bazında hem de kendi soruları içinde diğer öğretim elemanlarına göre çok daha fazla kontrol sorusu sormuştur.

c. Durum analizleri ile değerlendirme odaklı yapı: Durum analizleri, öğrencilerin kendi durumları hakkında fikir sahibi (bilinçli) olmaları ve öğrenmelerine engel olabilecek bir durumu aşmalarına yönelik bilinçlendirme içerdiğinden bu uygulamanın öğrenmeyi arttırmayı amaçladığı söylenebilir. Bu yapıyı tüm öğretim elemanlarının çeşitli düzeylerde sergilediği yani tüm öğretim elemanlarının öğrencilerin durumlarına yönelik değerlendirmelerini açıkladıkları gözlemlenmiştir. Diğer uygulamalar kadar sık görülmemekle birlikte bu yapıyı Dr. Topoloji ve Dr. Uzay'ın diğer öğretim elemanlarına nispeten daha baskın olarak sergiledikleri söylenebilir.

4. Otorite odaklı yapı: Öğrencilerin ispat adımlarında ya da ispatı yapmak noktasında aktif katılımının ve sorumluluğunun çok az olduğu veya olmadığı yani ispat sunumunda sorumluluğu büyük çoğunlukla öğretmenin üstlendiği yapıdır. Bu yapı, diğer yapılardan farklı olarak öncelikle mülakat bulgularıyla ortaya çıkmış ve ders gözlem bulgularıyla da desteklenmiştir. Dr. Vektör derste ispatı anlatırken öğrencilerin katılım göstermesinin beklenmesine yönelik mülakat sorusuna verdiği yanıtla diğer öğretim elemanlarından farklı olarak öğrencilerin ispat sunumuna katılımını beklemediğini ve bunu gerekli görmediğini belirtmiştir. İspatı öğretim elemanının anlatması gerektiğini de eklemiştir. Mülakattaki diğer sorulara verdiği

yanıtlardan, öğrencilerin derste ispata küçük katılımlar göstermesini beklediği (yani sorulara cevap vermek gibi) ama ispatın adımlarında veya ispat yapma açısından katılım beklemediği söylenebilir. Zaten sonuç soruları (işlem sonucu vb.) gibi kısa cevap gerektiren sorularla öğrencilerin katılımını sağladığı görülmüştür. Bu bağlamda, hem mevcut bir ispatı kendisinin sınıfa sunup açıklaması gerektiği yönünde bir misyon hissettiği hem de öğrencilerin bu sorumluluğu alamadığını düşünmesi nedeniyle ispat sunumlarında otorite odaklı bir yapı sergilediği düşünülebilir. Bunun yanı sıra, ders gözlemlerinde de hem soru sorma hem de öğrencilere sorumluluk verme açısından da çoğunlukla bu yapıya yakın eylemler sergilediği gözlemlenmiştir. Örneğin, öğrencilere ispatlama sorumluluğu vermemenin yanı sıra sunduğu ispatlarda yorum soruları gibi öğrencilerin açıklama yapması ve aktif olarak katılım göstermesi beklenen soruları hem ispat bazında hem de kendi soruları içinde oldukça nadir yer almaktadır. Dr. Vektör'ün hem eylemleri hem de söylemleriyle bu yapıyı baskın olarak sergilemesiyle birlikte, söylemlerinde bu yapıya rastlanmayan ancak dersteki uygulamalarıyla otorite odaklı yapıya paralel eylemler sergileyen diğer öğretim elemanı da Dr. Kompleks'tir. Benzer şekilde Dr. Kompleks'in ispat sunumlarında öğrencilerin ispatlamaya veya ispatın adımlarına katılımlarına imkân sağlayacak eylemlerin ya gözlemlenmediği ya da bazılarının çok nadir olarak görüldüğü söylenebilir. Dr. Uzay da öğrencilere ispatlama sorumluluğunu diğer öğretim elemanlarına nispeten daha az vermiş olmasına rağmen ispat esnasında öğrencilere yönelttiği yorum sorularıyla onların aktif katılımlarını sağladığından bu yapıyı Dr. Vektör ve Dr. Kompleks kadar baskın sergilemediği söylenebilir. Dr. Vektör ve Dr. Kompleks'in derslerinde ispat içermeyen uygulama ağırlıklı soru çözümlerinde öğrencilerine sorumluluk verdikleri, tahtaya kalkma ve çözümü sunma fırsatları oluşturdukları gözlemlenmiştir. Bu nedenle otorite odaklı yapıyı yalnızca ispat sunumlarında sergiledikleri söylenebilir. Buna ek olarak ispatların zor olduğunu yalnızca onların söylemiş olmalarından onların ispat haricindeki ders içeriklerine öğrencileri dahil edip ispatlarda tüm sorumluluğu kendilerinin almalarının bu inançlarından kaynaklandığı düşünülebilir.

Şekil 33, hangi öğretim elemanlarının hangi yapıları baskın şekilde gösterdiğini şema ile göstermektedir.



Şekil 33. Odak noktalarına göre ispat anlatım yapıları ve öğretim elemanları

Şekil 33'te görüldüğü gibi öğretim elemanları farklı yapıları baskın olarak sergileyebilmektedirler. Yukarıda bahsedildiği üzere bu çalışmada baskın olduğu tespit edilen yapılar bunlar olmakla birlikte bu yapılardan başka yapılar da mevcut olabilir. Bu nedenle bu tür çalışmaların daha detaylı olarak daha fazla öğretim elemanı ile gerçekleştirilmesi farklı yapıların varlığına ve hangi yapıların birlikte daha çok sergilendiğine ilişkin bilgi vererek öğretim elemanlarının ispat anlatım yapılarını daha iyi anlamamızı sağlayabilir.

Burada yer alan yapılardan bazıları Weber'in (2004) ispat öğretim stili olarak adlandırdığı yapılara (mantıksal-yapısal, prosedürel ve anlamsal) bazı benzerlikler içermekle birlikte temel olarak ondan ayrılmaktadır. Weber (2004) bir öğretim elemanının bir dönem boyunca farklı içeriklerde farklı stilleri sergilediğini ve bu stillerin birbirinden ayrık olduğunu iddia etmiştir. Örneğin, öğretim elemanının prosedürel öğretim stilini sergilediği ispatlarda yalnızca ispat için gereken stratejik bilgiyi öğrencilere aktardığını, bilginin ve ispatın anlamlandırılmasına yani kavramsal olarak öğrenilmesine fırsatlar sunmadığını aktarmıştır. Buna ek olarak öğretim stillerini oluşturan temel çerçeve yalnızca öğretmenin aktardıklarına bakılarak belirlenmiştir. Yani Weber (2004) öğretmenin ispat sunumunda hangi bilgileri aktarmaya özen gösterdiğine odaklanmıştır. Bununla birlikte yukarıda açıklanan ispat anlatım yapıları öğretim elemanlarının aktarmaya çalıştıkları bilgi türlerinden ziyade onların tüm eylemleri ve söylemleri dikkate alınarak belirlenmiştir. Ayrıca, yalnızca otorite ve deneyim odaklı yapıların birbirinden ayrık olduğu bunun

haricinde bu yapıların diğer yapılarla birlikte baskın şekilde birlikte gözlemlenebildiği söylenebilir.

Öğretim elemanlarının, kendi inançları, öğrencilerin eğilimleri ve dersin gerekleri gibi faktörlerle öğretimlerini şekillendirdikleri ve ispat öğretiminde de bu faktörlerden etkilendikleri görülmüştür. Ayrıca, ispat sunumlarını çeşitli açıklamalarla, ilişkilendirmelerle, örneklerle ve şekillerle zenginleştirdikleri söylenebilir. Sonuç olarak ispatları yalnızca teoremlerin doğruluğunu göstermek için sunmadıkları ve ispat sunumlarını öğrencilerin pedagojik ihtiyaçlarına yönelik algılarına dayalı olarak uyarladıkları düşünülebilir. Buna ek olarak, bir öğretim elemanının zaman içinde derste ispat yapma nedenlerinde değişiklik olmasa bile bu nedenlerin önceliğinde değişiklik olabileceğinden bu görüşlerin ve uygulamaların zaman içinde değişip değişmediğinin de incelenmesinin faydalı olacağı söylenebilir.

Kalıcı öğrenmenin sağlanmasında, yapıp yaşamanın görüp dinlemekten daha etkili oluşu bu noktada bizi öğretmenin deneyimleyerek öğrenmeyi gerektiren ortamları nasıl oluşturduğu ve onlara bu ortamlarda nasıl rehberlik ettiğini anlama arayışına itmektedir. Bununla birlikte, bu çalışma lisans öğrencilerinin, Martin ve diğerlerinin (2005) kurduğu metaforu her iki yönden de destekleyen öğretim uygulamaları ile karşılaştıklarını yani, hem “oyunu oynayarak” hem de “başkalarının oynamasını izleyerek” oyunun kurallarını öğrenmeyi gerektiren ortamlarda bulunduklarını göstermektedir. Bu bağlamda, ispat oyununun öğrenciler tarafından oynandığı ve öğretmenin koçluk yaptığı ders ortamlarının lisans düzeyinde özellikle de matematik öğretmen adaylarının eğitiminde daha fazla yer bulması için öğretim elemanlarının öğretimlerinin gözlemlenmesine izin vermeleri ve bu tür çalışmaların artırılması gerektiği söylenebilir. Diğer taraftan, öğrenciler açısından da ele alınarak onların görüşleri ve öğrenme çıktılarının da dahil edildiği daha zengin sayılabilecek çalışmaların yapılması da önerilebilir.

Bu çalışmanın en önemli katkılarından birinin öğretim elemanlarınca belirtilen görüşlerin, yine öğretim elemanları tarafından birbirleriyle kıyaslanmasına olanak sağlaması olduğu söylenebilir. Diğer taraftan, bu çalışmada yapılmamış olmakla birlikte, bu kıyaslamayı yaparken de hangi görüşü neden öncelikli tercih ettiklerini de açıklamalarının istenmesi, tercihlerinin nedenlerini de anlamamıza yardımcı olabilir. Buna ek olarak, öğretim elemanlarının, mülakatta sorulan bazı uygulamaları gerekli bulmadıklarını söylemiş olmalarına rağmen bu uygulamaların faydaları veya amaçlarına ilişkin diğer öğretim elemanlarının görüşleri doğrultusunda ortaya çıkan fikirlerden bazılarını sıralama yaparak katıldıkları yani bahsi geçen uygulamayı aslında gerekli gördükleri gözlemlenmiştir. Bu durum, öğretim elemanlarının bazı pedagojik eylemlere

kendi öğretimlerinde yer vermemeleri ya da o pedagojik eylemlere ilişkin inançları ve fikirleri üzerine düşünmemiş olmalarından kaynaklanıyor olabilir. Gabel ve Dreyfus (2017), öğretimleri hakkında dışarıdan bir gözlemci ile konuşmanın, öğretim elemanlarının öğretimlerinin altında yatan inançlarını yeniden gözden geçirmelerine neden olabileceğini doğrulayan bulgulara ulaşmışlardır. Bu da ispat öğretiminde öğretmenlerin pedagojik meseleler hakkında konuşmalara katılmalarının onlara bakan faydasını göstermesi bakımından bu çalışmanın da katkıları arasında yer almaktadır.

Hemmi (2010) ve Lai ve Weber (2014) öğretmenlerin öğretimlerinin kendi inançları ve değerlerine ters düşebildiğini belirtmişlerdir. Bu sebeple, olabildiğince çok öğretim elemanının hem görüşleri hem de mevcut öğretim uygulamalarının uzun süreler içerecek şekilde incelenmesi onların hem beyan edilmiş hem de sahnelenmiş inançlarını anlamamıza da yardımcı olacaktır. Fukawa Connelly (2012b) geleneksel öğretmenlerin genellikle öğrencilerinden bekledikleri davranışları modellediklerini belirtmiştir. Bu açıdan öğretim elemanlarının ispat anlatırken neler yaptıkları, tercihlerinin altında yatan pedagojik gerekçeleri ve görüşlerine yönelik çalışmalar, matematik eğitimi literatürüne bu bağlamda da katkıda bulunabilir.

Bu çalışmanın bir diğer önemli katkısı ve sonucu, nitel araştırmalarda bu tür amaçlarla yapılan mülakatlarda, katılımcıların söylediklerinden ziyade (o anki koşullara göre unutmaları vb. nedenlerle) söylemediklerine yönelik kendi söylediklerinden daha fazla inanç besleyebildiklerini göstermiş olmasıdır. Örneğin, Dr. Türev ilk mülakatta ispatın öneminden bahsederken öğrencilerin düşünme becerilerine yönelik bir amaçtan söz etmezken sıralama anketinde bu temayı öncelikli olarak birinci sırada seçmiştir. Sonuç olarak, mülakat verilerinin hem diğer veri türleriyle (gözlem vb.) desteklenmesi hem de ek mülakatlarla detaylandırılıp derinleştirilmesinin daha faydalı olacağı söylenebilir.

Öğretim elemanlarının, öğrencilerin ispata ilişkin yaşadıkları güçlüklerden bahsederken yalnızca ispat yapma eylemine odaklandıkları ve ispat okuma veya ispat değerlendirme eylemlerine ilişkin görüşlerini belirtmedikleri görülmüştür. Bu bağlamda, bu doğrultuda yapılacak çalışmaların bu eylemleri vurgulayarak yaşanan güçlüklerin veya bu güçlüklerin giderilmesine ilişkin önerilerin daha spesifik olarak belirlenmesine olanak sağlaması önerilebilir. Böylece ispat yapma eylemi kadar pedagojik değere sahip olduğu söylenebilen ispatı anlamak için okuma ve bir ispatı değerlendirme eylemlerine ilişkin farkındalığın da artırılması sağlanabilir.

Öğrencilerin düşünme becerileri öğretim elemanları tarafından hem ispatın öğrenilmesinde yetersizliği bakımından en büyük engel hem de öğrenilmesinde bu

becerilere en önemli katkı olarak görülmektedir. Diğer taraftan, öğretim programlarında bu becerilere ilişkin kazanımların yer aldığı bilinmektedir. Bu kazanımların sayısının artırılması önerilmekle birlikte, öncelikle düşünme becerilerinin geliştirilmesine ilişkin öğretim programlarındaki bu kazanımların ders ortamlarına taşınabilmesi gerekmektedir. Her ne kadar vakit alıyor olursa olsun her bir öğrencinin bu düşünme süreçlerini yaşayabileceği öğrenme fırsatları öğretmenler tarafından oluşturulmalıdır.

Literatürde öğrencilere yönelik yapılan çalışmaların sonuçlarını destekleyecek şekilde bu çalışmada öğretim elemanlarının görüşleri doğrultusunda öğrencilerin ispat yapmanın gerektirdiği temel bilgi ve beceri donanımından yoksun oldukları ve ispatlarla kavramsal olarak özellikle üniversiteye geldiklerinde karşılaştıkları söylenebilir. Bu bağlamda yapılan bazı tavsiyelerin bu çalışma dolayısıyla da yenilenmesi gerektiği düşünülmüştür. İspat yapma becerilerine katkısı olabilecek öğretim uygulamalarını (örn., bir duruma uyan ve uymayan örnekler verebilme, varsayım oluşturma ve varsayımı test etme, bir ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını gerekçeler üreterek tartışma vb.) ilkokuldan itibaren uygun koşullar altında uygun etkinliklerle öğrencilerin deneyimlemesi sağlanmalıdır. Bu doğrultuda bu etkinliklerin hangi aşamalarla hangi seviyelerde nasıl verileceğine ilişkin fikir verecek çalışmaların yapılması önerilebilir.

İdeal ispat anlatım yapısı gibi çıktılarıyla bu çalışma, ders gözlemlerinden ve öğretmenlerle yapılan görüşmelerden elde edilen verilerin, uygulamaya ilişkin yararlı açıklamalar ve iç görüler üretmede ne kadar verimli olabileceğini göstermektedir. Diğer taraftan, bu çalışma bir üniversite ve bir eğitim fakültesiyle sınırlıdır. Hem farklı üniversitelerde matematik öğretmen adaylarına ders veren öğretim elemanlarının hem de fen fakültelerinde matematik bölümü öğrencilerine ders veren öğretim elemanlarının görüşlerinin alınması farklılıklar ve benzerliklerin ortaya çıkarılmasında ve özellikle de faydalı olabilecek başka uygulamaların keşfedilmesinde önemli rol oynayabilir. Bununla birlikte ders bazında da ispatın önemi farklılaşabileceğinden öğretim elemanlarının görüşlerini bu doğrultuda paylaşımları sağlanabilir.

İspat yapma, matematiksel düşünmenin hem bir süreç hem de “ürün” (Tall, 1991) olarak sergilenmesine olanak tanıyan bir eylemdir. Bu bağlamda, öğretmen adaylarına ispatın nasıl öğretildiği, aslında yalnızca günümüzün değil, o adayların öğretmen olduklarında öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmek adına seçecekleri pedagojik uygulamalarına yansımalarıyla eğitimimizin görünen yüzünü temsil etmektedir. Çünkü matematiksel düşünme yalnızca matematik problemlerinin çözümüne değil öğrenciye matematiksel bakış açısı kazandırması cihetiyle hayatın her alanında problemlere çözüm üretebilme, varsayımlar oluşturup test edebilme, eleştirel düşünebilme,

bir fikri makul gerekçelerle savunabilme, çeşitli fikirleri değerlendirebilme vb. becerileri kazandırabilir. Dolayısıyla, deneyimli öğretim elemanlarının hem tecrübelerinin gölgesinde dinlenmiş görüşleriyle ispat anlatımının nasıl olması gerektiğine ilişkin bilgiler üretmenin hem de inançları, tecrübeleri, öğrencilerin eğilimleri vb. faktörlerle şekillenen mevcut uygulamalarına bakarak görüşlerinde örtük kalan eylemlerini gözlemlemenin faydalı olacağı söylenebilir. Bununla birlikte, ispat öğretiminin nasıl olacağına ilişkin inançlarının çeşitli nedenlerle derse yansıtılmaması ve inançlarına ters düşecek şekilde öğretim yapılması da hem bu çalışmada hem de literatürde de karşılaşılan bir durumdur. Bu bağlamda, bu tür çalışmalar öğretmenlerin ve öğretim elemanlarının kendi uygulamalarına ve uygulamalarıyla inançları arasındaki bağlantılara farkındalıklarını ve duyarlılıklarını da arttırabilir. Bu bağlamda, öğretme eyleminin zorluğunu, öğrenme eyleminin hiçbir zaman bitmemesi hatta zamanla artmasıyla açıklayan Heidegger (2019) “*Düşünmek ne demektir?*” adlı kitabında “öğrenmeye bırakmak” tabiriyle öğretmen olmanın öğrenmeye ilişkin sorumluluğu arttırdığını belirtmiş ve bu durumu şu şekilde ifade etmiştir:

“Öğretme, öğrenmekten daha zordur. Bu pekâlâ bilinir: fakat nadiren dikkate alınıp düşünülür. Öğretme öğrenmeden neden daha zordur? Öğretmenin büyük bir miktar bilgiye sahip olması ve bunların her zaman hazırlanması gerektiğinden dolayı değil. Öğretme öğrenmekten daha zordur, zira öğretmek şu demektir: öğrenmeye bırakmak. Hatta asıl öğretmen, öğrenme dışında hiçbir şeyi öğrenmeye bırakmaz. Dolayısıyla “öğrenmek” ile şimdi sadece faydalı bilgilerin tedarik edilmesi anlaşılıyorsa eğer, onun eylemleri çoğu zaman kendinden aslında hiçbir şey öğrenilmediği intibasını uyandırır. Öğretmen çıraklardan sadece onlardan çok daha fazla şey öğrenmesi gerektiği konusunda öndedir, yani şunu: Öğrenmeye bırakmak. Öğretmen çıraklardan daha öğretilbilir olmaya muktedir olmalıdır. Öğretmen, kendi meselesine dair çırakların kendi meselelerine nispeten daha az emindir. Bu sebeple öğretmen ve öğrenen arasındaki ilişki eğer hakiki ise hiçbir zaman çok bilen otoritesi ve görevlinin otoriter etkisi devreye girmez. Bundan dolayı öğretmen olmak yüce bir mesele olarak kalır ve bu, meşhur bir doçent olmaktan bambaşka bir şeydir” (s. 30).

KAYNAKÇA

- Alcock, L., & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 111-129. doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9149-x>
- Alcock, L., Hodds, M., Roy, S., & Inglis, M. (2015). Investigating and improving undergraduate proof comprehension. *Notices of the American Mathematical Society*, 62, 741–752. doi: <https://doi.org/10.1090/noti1263>
- Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125-134. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.03.003>
- Alcock, L., & Weber, K. (2010). Undergraduates' example use in proof construction: Purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematics Learning*, 3(1), 1-22. doi: <https://doi.org/10.1080/24727466.2010.11790298>
- Almeida, D. (2000). A Survey of Mathematics Undergraduates' Interaction with Proof: Some Implications for Mathematics Education. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 31(6), pp. 896-890. doi: <https://doi.org/10.1080/00207390050203360>
- Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(1), 53-60. doi: <https://doi.org/10.1080/00207390119535>
- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488. doi: <https://doi.org/10.1080/0020739031000108574>
- Arslan, S., & Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156), 17-31. Erişim adresi: <http://egitimvebilim.ted.org.tr/index.php/EB/article/view/40/8>
- Arslantaş İlter, E. (2020). *Matematik öğretmenlerinin sözsüz ispat becerilerinin pisagor teoremi bağlamında incelenmesi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas, (No: 626696)
- Ayalon, M., & Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 163-173. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010>
- Aylar, E. (2014). 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi. (Yayımlanmamış Doktora Tezi), Hacettepe Üniversitesi, Ankara (No: 363234)

- Baker, D., & Campbell, C. (2004). Fostering the development of mathematical thinking: Observations from a proofs course. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 14(4), 345-353. doi: <https://doi.org/10.1080/10511970408984098>
- Barak, B. (2018). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi. (Yayımlanmamış Doktora Tezi), Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, (No: 494215)
- Baştürk, S. (2010). First- year secondary school mathematics students' conceptions of mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, 36(3), 283-298. doi: <https://doi.org/10.1080/03055690903424964>
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational studies in mathematics*, 7(1-2), 23-40. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00144356>
- Bergwall, A., & Hemmi, K. (2017). The state of proof in Finnish and Swedish mathematics textbooks—Capturing differences in approaches to upper-secondary integral calculus. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(1), 1-18. Doi: <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1258615>
- Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351-382. Erişim adresi: <http://www.jstor.org/stable/41103880>
- Bills, L., & Tall, D. (1998). Operable definitions in advanced mathematics: The case of the least upper bound. In *Proceedings of the Conference of the International Group for* (s. 111). Erişim adresi: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED427970.pdf#page=112>
- Blanton, M. L., & Stylianou, D. A. (2003). The nature of scaffolding in undergraduate students' transition to mathematical proof. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th annual conference of PME-NA, Vol. 2* (pp. 113-120). Honolulu, HI: University of Hawai'i.
- Blanton, M., Stylianou, D., & David, M. M. (2009). Understanding instructional scaffolding in classroom discourse on proof. In Despina A. Stylianou, Maria L. Blanton & Eric J. Knuth (eds.), [*Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective*](#). pp. 290-306, Routledge.
- Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajčevski, M. (2014). Providing written feedback on students' mathematical arguments: proof validations of prospective secondary

- mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(2), 105-127. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-013-9248-1>
- Ceylan, T. (2012). *GeoGebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Ankara Üniversitesi, Ankara, (No: 302918).
- Charmaz, K. (2006). *Constructing Grounded Theory. A Practical Guide Through Qualitative Analysis*. Thousand Oaks, CA: SAGE.
- Charmaz, K. (2000). Constructivist and objectivist grounded theory. In N. K. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (2. baskı, sf. 509-535). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Cihan, F. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı* (Yayımlanmamış Doktora Tezi), Marmara Üniversitesi, İstanbul (No: 570220).
- Cilli-Turner, E. (2017). Impacts of inquiry pedagogy on undergraduate students' conceptions of the function of proof. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 14-21. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.001>
- Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), 41-53. doi: <https://doi.org/10.1080/0141192940200105>
- Corbin, J. M., & Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative sociology*, 13(1), 3-21. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00988593>
- Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research*, (3rd ed.). London: SAGE.
- Creswell, J. W. (2003). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.
- Dawkins, P. C., & Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 123-142. doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9740-5>
- De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. *Rethinking proof with Sketchpad*, 3-10. Erişim adresi: <http://academic.sun.ac.za/education/mathematics/MALATI/Files/proof.pdf>
- De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.
- Demir, F. (2011). *Bir dinamik geometri yazılımının ilköğretim öğrencilerinin geometride ispat becerilerine etkisi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Erzincan Üniversitesi, Erzincan, (No: 287422)

- Demiray, E., & Bostan, M. I. (2017). An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' ability to conduct valid proofs, methods used, and reasons for invalid arguments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(1), 109-130. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10763-015-9664-z>
- Denzin, N. K. (1978). *The research acts. A Theoretical Introduction to Sociological Methods*, (2nd ed.). New York: McGraw Hill.
- Davis, J. D., Smith, D. O., Roy, A. R., & Bilgic, Y. K. (2014). Reasoning and proving in algebra: The case of two reform-oriented US textbooks. *International Journal of Educational Research*, 64, 92-106. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.06.012>
- Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711-733. doi: <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0091-6>
- Dimmel, J. K., & Herbst, P. G. (2018). What Details Do Teachers Expect from Student Proofs? A Study of Proof Checking in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(3), 261-291. doi: <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.49.3.0261>
- Dokuz Eylül Üniversitesi. (t.y.a). İlköğretim Matematik Öğretmenliği ders kataloğu. Erişim adresi: http://debis.deu.edu.tr/ders-katalog/2015-2016/tr/bolum_1103_tr.html
- Dokuz Eylül Üniversitesi. (t.y.b). Matematik Öğretmenliği ders kataloğu. Erişim adresi: http://debis.deu.edu.tr/ders-katalog/2015-2016/tr/bolum_1087_tr.html
- Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, 110(10), 886-899. doi: <https://doi.org/10.1080/00029890.2003.11920029>
- Erickson, A., & Herbst, P. (2018). Will Teachers Create Opportunities for Discussion when Teaching Proof in a Geometry Classroom?. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(1), 167-181. doi: <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9764-4>
- Fukawa-Connelly, T. (2012b). Classroom sociomathematical norms for proof presentation in undergraduate in abstract algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 401-416. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.04.002>
- Fukawa-Connelly, T. (2014). Using Toulmin analysis to analyse an instructor's proof presentation in abstract algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(1), 75-88. doi: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790509>

- Fukawa-Connelly, T. (2016). Responsibility for proving and defining in abstract algebra class. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(5), 733-749. Doi: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1114159>
- Fukawa-Connelly, T. P. (2012a). A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: making sense of her pedagogical moves. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 325-345. Doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9407-9>
- Gabel, M., & Dreyfus, T. (2017). Affecting the flow of a proof by creating presence—a case study in Number Theory. *Educational studies in mathematics*, 96(2), 187-205. doi:10.1007/s10649-016-9746-z
- Giannakoulis, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(3), 160-168. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.07.001>
- Glaser, B. & Strauss, A.L. (1967) *Discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*, Chicago: Aldine.
- Griffiths, P. A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *The American Mathematical Monthly*, 107(1), 1-14. doi: <https://doi.org/10.1080/00029890.2000.12005154>
- Güler, G., & Dikici, R. (2014). Examining prospective mathematics teachers' proof processes for algebraic concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(4), 475-497. doi: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.837528>
- Gürbüz, S., & Şahin, F. (2017). Sosyal bilimlerde araştırma yöntemleri (Gözden geçirilmiş ve güncellenmiş 4. baskı). *Ankara: Seçkin yayıncılık*.
- Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the learning of mathematics*, 9(1), 20-23. Erişim adresi: <https://www.jstor.org/stable/40247941>
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01809605>
- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of mathematics*, 15(3), 42-49. Erişim adresi: <https://www.jstor.org/stable/40248188>
- Hanna, G., (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview, *Educational Studies in Mathematics*. 44, 5–23. Doi: <https://doi.org/10.1023/A:1012737223465>
- Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM*, 40(3), 345-353. Doi: [10.1007/s11858-008-0080-5](https://doi.org/10.1007/s11858-008-0080-5)

- Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of mathematical knowledge. In *Explanation and proof in mathematics* (pp. 85-100). Springer, Boston, MA.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Springer, Dordrecht.
- Harel, G., & Rabin, J. M. (2010). Teaching practices associated with the authoritative proof scheme. *Journal for research in mathematics education*, 14-19. <https://www.jstor.org/stable/40539362> adresinden 29.10.2020 tarihinde erişildi.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, 7, 234-283.
- Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical thinking and learning*, 7(1), 27-50. Doi: https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_3
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 805-842. Erişim adresi: <https://math.ucsd.edu/~harel/TowardComprehensivePerspective.pdf>
- Haseki, D. (2018). *Improving attitudes towards geometric proof in the context of dynamic geometry software-based proof instruction / Geometrik ispata karşı tutumun dinamik geometri yazılımına dayalı öğrenme ortamında geliştirilmesi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul (No: 502224).
- Hemmi, K. (2010). Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics*, 271-291. Doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9256-3>
- Herbst, P. G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 283-312. Doi: <https://doi.org/10.1023/A:1020264906740>
- Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? *Cognition and Instruction*, 24(1), 73-122. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2401_2
- Herbst, P., & Miyakawa, T. (2008). When, how, and why prove theorems? A methodology for studying the perspective of geometry teachers. *ZDM*, 40(3), 469-486. doi: [10.1007/s11858-008-0082-3](https://doi.org/10.1007/s11858-008-0082-3)
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399. Doi: <https://doi.org/10.1007/BF01273372>

- Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 62-101. Doi: 10.5951/jresematheduc.45.1.0062
- Iannone, P., Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Simpson, A. & Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 1–14 doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-011-9299-0>
- Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), p. 358-390. doi: 10.5951/jresematheduc.43.4.0358
- İnam, B. (2014). *Ortaöğretim düzeyinde, kavrama testlerine dayalı bir ispat öğretim uygulamasının değerlendirilmesi* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir (No: 381148)
- İpek, S. (2011). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımlarını kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Hacettepe Üniversitesi, Ankara, (No: 265219).
- Jahnke, H. N. (2010). The conjoint origin of proof and theoretical physics. In *Explanation and proof in mathematics* (sf. 17-32). Springer, Boston, MA.
- Knuth, E. J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, 379-405. Doi: 10.2307/4149959
- Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of mathematics teacher education*, 5(1), 61-88. Doi: <https://doi.org/10.1023/A:1013838713648>
- Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 256-262. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.002>
- Ko, Y. Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: Implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(6), 1109-1129.
- Ko, Y. Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 68-77. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.04.005>

- Ko, Y. Y., & Knuth, E. J. (2013). Validating proofs and counterexamples across content domains: Practices of importance for mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 20-35.
doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.09.003>
- Ko, Y. Y., Yee, S. P., Bleiler-Baxter, S. K., & Boyle, J. D. (2016). Empowering students' proof learning through communal engagement. *The Mathematics Teacher*, 109(8), 618-624. doi: <https://doi.org/10.5951/mathteacher.109.8.0618>
- Komatsu, K., Jones, K., Ikeda, T., & Narazaki, A. (2017). Proof validation and modification in secondary school geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, 47, 1-15. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.05.002>
- Kotelawala, U. (2016). The status of proving among US secondary mathematics teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(6), 1113-1131. doi: <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9638-1>
- Küçükbulut, C. (2019). *Öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin gelişimine 5E modelinin etkisi* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Kastamonu Üniversitesi, Kastamonu (No: 564530).
- Lai, Y., & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 93-108. Doi: [10.1007/s10649-013-9497-z](https://doi.org/10.1007/s10649-013-9497-z)
- Lai, Y., Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2012). Mathematicians' perspectives on features of a good pedagogical proof. *Cognition and Instruction*, 30(2), 146-169. doi: <https://doi.org/10.1080/07370008.2012.661814>
- Levenson, E. (2013). Exploring one student's explanations at different ages: the case of Sharon. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 181-203. Doi: [10.1007/s10649-012-9447-1](https://doi.org/10.1007/s10649-012-9447-1)
- Lew, K., Fukawa-Connelly, T. P., Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2016). Lectures in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(2), 162-198. Doi: <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.47.2.0162>
- Lin, F. L., & Yang, K. L. (2007). The reading comprehension of geometric proofs: The contribution of knowledge and reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(4), 729-754. doi: <https://doi.org/10.1007/s10763-007-9095-6>
- Lincoln, Y. S. ve Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research*

- in *Undergraduate Mathematics Education*, 2(2), 165-196. doi: <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0025-2>
- Lynch, A. G., & Lockwood, E. (2019). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 323-338.
Doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.004>
- Manin, Y. (1992). Contribution in panel discussion on "The theory and practice of proof. In *Proceedings of the seventh international congress on mathematical education (Montreal, Canada)*.
- Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 163-185. doi: <https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694282>
- Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, 44(1-2), 87-125. Doi: <https://doi.org/10.1023/A:1012785106627>
- Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for research in mathematics education*, 41-51. Doi: [10.2307/749097](https://doi.org/10.2307/749097)
- Martin, T. S., & McCrone, S. S. (2003). Classroom factors related to geometric proof construction ability. *The Mathematics Educator*, 7(1), 18-31. Erişim adresi: http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV7_1/02%20McCrone%20Final.pdf
- Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95-124. doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-005-6698-0>
- Martinez, M. V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 125-149. doi: <https://www.jstor.org/stable/43590064>
- Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4>
- McCrone, S. M. S., & Martin, T. S. (2004). Assessing high school students' understanding of geometric proof. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 4(2), 223-242. doi: <https://doi.org/10.1080/14926150409556607>

- McCrorry, R., & Stylianides, A. J. (2014). Reasoning-and-proving in mathematics textbooks for prospective elementary teachers. *International Journal of Educational Research*, 64, 119-131. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.09.003>
- Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). What are the argumentative activities associated with proof?. *Research in Mathematics Education*, 11(1), 77-78. doi: <https://doi.org/10.1080/14794800902732258>
- Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2014). Why and how mathematicians read proofs: Further evidence from a survey study. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 161-173. doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9514-2>
- Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. San Francisco, CA: Jossey-Bass
- Miles, M. B. ve Hubermann, M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Miller, D., Infante, N., & Weber, K. (2018). How mathematicians assign points to student proofs. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 24-34. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.002>
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2017a). *Matematik öğretmeni özel alan yeterlikleri* (İlköğretim). https://oygm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2017_11/06160503_7YYr etmen Yeterlikleri KitabY matematik YYretmeni Yzel alan yeterlikleri ilkYYr etim parYa_10.pdf adresinden 28.10.2020 tarihinde erişildi.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2017b). *Matematik öğretmeni özel alan yeterlikleri* (Ortaöğretim). https://oygm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2017_12/13160643_MA TEMATYK.pdf 28.20.2020 tarihinde erişildi.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018a). *Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)*. Ankara: MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı Yayınları. <https://mufredat.meb.gov.tr/Dosyalar/201813017165445MAT EMATİK%20ÖĞRETİM%20PROGRAMI%202018v.pdf> adresinden 28.10.2020 tarihinde erişildi.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018b). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara: MEB Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları. <https://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=343> adresinden 28.10.2020 tarihinde erişildi.
- Miles, M. B. & Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd ed.). Thousand Oaks, Sage.

- Mills, M. (2014). A framework for example usage in proof presentations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 106-118. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.11.001>
- Mingus, T. T., & Grassl, R. M. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, 99(8), 438-444. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17506.x>
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics*, 27(3), 249-266. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01273731>
- Moore, R. C. (2016). Mathematics professors' evaluation of students' proofs: A complex teaching practice. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(2), 246-278. doi: <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0029-y>
- Nachlieli, T., Herbst, P., & González, G. (2009). Seeing a colleague encourage a student to make an assumption while proving: What teachers put in play when casting an episode of instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 427-459. <http://www.jstor.org/stable/40539346> adresinden 28.10.2020 tarihinde erişildi.
- Nardi, E., & Knuth, E. (2017). Changing classroom culture, curricula, and instruction for proof and proving: How amenable to scaling up, practicable for curricular integration, and capable of producing long-lasting effects are current interventions? *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 267-274. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9785-0>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Otten, S., Bleiler-Baxter, S. K., & Engledowl, C. (2017). Authority and whole-class proving in high school geometry: The case of Ms. Finley. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 112-127. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.04.002>
- Oxford English Dictionary (1989). Second Edition. Oxford: Clarendon Press.
- Özgür, Z., Ellis, A. B., Vinsonhaler, R., Dogan, M. F., & Knuth, E. (2019). From examples to proof: Purposes, strategies, and affordances of example use. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 284-303. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.004>
- Öztürk, T. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi. (Yayımlanmamış Doktora Tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, (No: 448319)
- Öztürk, M., & Kaplan, A. (2019). Cognitive analysis of constructing algebraic proof processes: A mixed method research. *Eğitim ve Bilim*, 44(197). doi: 10.15390/EB.2018.7504

- Panse, A., Alcock, L., & Inglis, M. (2018). Reading proofs for validation and comprehension: An expert-novice eye-movement study. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(3), 357-375. doi: <https://doi.org/10.1007/s40753-018-0077-6>
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri*. (Çev. M. Bütün, S. B. Demir). Ankara: Pegem Akademi.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational studies in mathematics*, 66(1), 23-41. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x>
- Pinto, A. (2013). Revisiting university mathematics teaching: A tale of two instructors. In *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8)*, Antalya, Turkey. http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG14/WG14_Pinto.pdf adresinden 28.10.2020 tarihinde erişildi.
- Pinto, A., & Karsenty, R. (2018). From course design to presentations of proofs: How mathematics professors attend to student independent proof reading. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 129-144. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.008>
- Polat, K. (2018). *Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: Lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi*. (Yayımlanmamış Doktora Tezi), Atatürk Üniversitesi, Erzurum, (No: 503666)
- Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational studies in mathematics*, 52(3), 319-325. Doi: <https://doi.org/10.1023/A:1024360204239>
- Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, 48(1), 83-99. Doi: <https://doi.org/10.1023/A:1015553100103>
- Roy, S., Alcock, L., & Inglis, M. (2010). Supporting Proof Comprehension: A Comparative Study of Three Forms of Presentation. In *Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Raleigh, NC: RUME Erişim adresi: <http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/Archive/Roy%20et%20al.pdf>
- Roy, S., Inglis, M., & Alcock, L. (2017). Multimedia resources designed to support learning from written proofs: An eye-movement study. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 249-266. doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9754-7>
- Samkoff, A., Lai, Y., & Weber, K. (2012). On the different ways that mathematicians use diagrams in proof construction. *Research in Mathematics Education*, 14(1), 49-67. doi: <https://doi.org/10.1080/14794802.2012.657438>

- Samkoff, A., & Weber, K. (2015). Lessons learned from an instructional intervention on proof comprehension. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 28-50. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.05.002>
- Sarı, M. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi*. (Yayımlanmamış Doktora Tezi), Hacettepe Üniversitesi, Ankara, (No: 299545)
- Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor's foreword. *Teaching and learning proof across the grades* (p. xii-xvi). New York, NY: Routledge.
- Sears, R., & Chávez, Ó. (2014). Opportunities to engage with proof: the nature of proof tasks in two geometry textbooks and its influence on enacted lessons. *ZDM*, 46(5), 767-780. DOI 10.1007/s11858-014-0596-9
- Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 123-151. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01274210>
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36. doi: 10.2307/30034698
- Selden, A., Selden, J., & Benkhalti, A. (2018). Proof frameworks: A way to get started. *PRIMUS*, 28(1), 31-45. doi: <https://doi.org/10.1080/10511970.2017.1355858>
- Speer, N. M., Smith III, J. P., & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(2), 99-114. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.02.001>
- Staples, M. E., Bartlo, J., & Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifacted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(4), 447-462. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.001>
- Steele, M. D., & Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: The case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(2), 159-180. doi: [10.1007/s10857-012-9204-5](https://doi.org/10.1007/s10857-012-9204-5)
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American educational research journal*, 33(2), 455-488. doi: <https://doi.org/10.3102/00028312033002455>
- Strauss, A. L. & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.

- Strauss, A. L., & Corbin, J. M. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 289-321. doi: 10.2307/30034869
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288. doi: <https://doi.org/10.1080/10986060903253954>
- Stylianides, A. J. (2011). Towards a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs. *Pythagoras*, 32(1), 1-10. doi: <http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v32i1.14>
- Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of mathematics teacher education*, 11(4), 307-332. doi: <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9>
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009a). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 237-253. doi: 10.1007/s10649-009-9191-3
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009b). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 314-352. Erişim adresi: <https://www.jstor.org/stable/40539339>
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 119-127. doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(3), 145-166. doi: <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9034-z>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1463-1490. doi: <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9409-9>
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (2009). *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. New York: Routledge.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in*

- Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 91-134. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s40753-015-0003-0>
- Snyder, B. A. (2010). Using Sudoku to introduce proof techniques. *Primus*, 20(5), 383-391. doi: <https://doi.org/10.1080/10511970802326145>
- Tabach, M., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., & Levenson, E. (2010). Verbal justification-is it a proof? Secondary school teachers' perceptions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(6), 1071-1090. doi: <https://doi.org/10.1080/14794802.2010.496973>
- Tabach, M., Levenson, E., Barkai, R., Tirosh, D., Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2010). Secondary school teachers' awareness of numerical examples as proof. *Research in Mathematics Education*, 12(2), 117-131. doi: <https://doi.org/10.1080/14794802.2010.496973>
- Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 495-511. Erişim adresi: <https://studylib.net/doc/8922369/the-transition-to-advanced-mathematical-thinking>
- Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Springer Netherlands.
- Taştepe, M. (2012). *İspat kavramının kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelenmesi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Marmara Üniversitesi, İstanbul, (No: 319476).
- Teppo, A. R. (2015). Grounded theory methods. In *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 3-21). Springer, Dordrecht. doi: 10.1007/978-94-017-9181-6
- Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253-295. doi: 10.5951/jresmetheduc.43.3.0253
- Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., Barkai, R., & Tabach, M. (2009). Should proof be minimal? Ms T's evaluation of secondary school students' proofs. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 58-67. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.04.002>
- Turan, İ. (2019). Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerinin ve argüman tercihlerinin incelenmesi. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Tokat Gaziosmanpaşa, Tokat, (No: 587913)

- Türk Dil Kurumu [TDK]. (2020). <http://www.tdk.gov.tr/> adresinden 28.10.2020 tarihinde erişildi.
- Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi* (Yayımlanmamış Doktora Tezi), Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, (No: 270098).
- Uğurel, I., Morali, H. S., Yiğit-Koyunkaya, M., & Karahan, Ö. (2015). Pre-service secondary mathematics teachers' behaviors in the proving process. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(2), 203-231. doi: <https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1523a>
- Uzun, M. S., & Bülbül, A. (2013). Matematik öğretmen adaylarının kanıtlama becerilerini geliştirmeye yönelik bir öğretim deneyi. *Eğitim ve Bilim*, 38(169), 372-390. Erişim adresi: <http://213.14.10.181/index.php/EB/article/view/2366/520>
- Ülker, E. (2018). *Ortaokulda ispata giriş: Gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, (No: 494227)
- Ünveren, E. N. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumlarının matematiksel modelleme sürecinde incelenmesi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir (No: 275269).
- Üstüngün, Ş. (2020). *12.sınıf öğrencilerinin sözsüz ispat becerilerinin incelenmesi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas, (No: 626697).
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101-119. doi: <https://dx.doi.org/10.1023/A:1015535614355>
- Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the learning of Mathematics*, 22(3), 14-17. Erişim adresi: <https://www.jstor.org/stable/40248396>
- Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(2), 115-133. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.03.001>
- Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 351-360. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.005>

- Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for research in mathematics education*, 431-459. doi: <https://www.jstor.org/stable/40539306>
- Weber, K. (2010). Mathematics' majors' perceptions of conviction, validity, and proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 306-336. doi: <https://doi.org/10.1080/10986065.2010.495468>
- Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *Int J Math Educ Sci Technol*, 43(4), 463-482. doi: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.622803>
- Weber, K. (2015). Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(3), 289-314. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s40753-015-0011-0>
- Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics*, 56(2-3), 209-234. doi: <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1>
- Weber, K., Inglis, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2014). How mathematicians obtain conviction: Implications for mathematics instruction and research on epistemic cognition. *Educational Psychologist*, 49(1), 36-58. doi: <https://doi.org/10.1080/00461520.2013.865527>
- Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 329-344. doi: 10.1007/s10649-010-9292-z
- Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2014). Mathematics majors' beliefs about proof reading. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(1), 89-103. doi: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790514>
- Wheeler, A., & Champion, J. (2013). Students' proofs of one-to-one and onto properties in introductory abstract algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(8), 1107-1116. doi: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2012.756546>
- Williams-Pierce, C. C., Pier, E. L., Walkington, C., Boncoddio, R., Clinton, V., Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2017). What we say and how we do: Action, gesture, and language in proving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(3), 248-260. doi: <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.48.3.0248>

Yeşilyurt Çetin, A. (2017). *Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçleri*. (Yayımlanmamış Doktora Tezi), Atatürk Üniversitesi, Erzurum, (No: 480352)

Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum, (No: 394787)

Yopp, D. A. (2011). How some research mathematicians and statisticians use proof in undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 115-130. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.01.002>

Yopp, D. A., & Ely, R. (2016). When does an argument use a generic example?. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 37-53. doi: 10.1007/s10649-015-9633-z

Z

Zandieh, M., Roh, K. H., & Knapp, J. (2014). Conceptual blending: Student reasoning when proving “conditional implies conditional” statements. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 209-229. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.11.007>

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2011). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 215-229). Springer, Dordrecht.

Zazkis, D., Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2015). Two proving strategies of highly successful mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 11-27. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.04.003>

Zazkis, D., Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 155-173. doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9698-3>

Zazkis, D., & Zazkis, R. (2014). Prospective Teachers’ Conceptions of Proof Comprehension: Revisiting a Proof of the Pythagorean Theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-27. doi: 10.1007/s10763-014-9595-0

Zengin, Y. (2017). The effects of GeoGebra software on pre-service mathematics teachers’ attitudes and views toward proof and proving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(7), 1002-1022. doi: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1298855>

- Zerr, J. M., & Zerr, R. J. (2011). Learning from their mistakes: Using students' incorrect proofs as a pedagogical tool. *Primus*, 21(6), 530-544. doi: <https://doi.org/10.1080/10511970903386915>
- Zeybek, Z., Üstün, A., & Birol, A. (2018). Matematiksel ispatların ortaokul matematik ders kitaplarındaki yeri. *Elementary Education Online*, 17(3). doi: 10.17522/balikesirnef.541576
- Zhen, B., Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2016). Mathematics majors' perceptions of the admissibility of graphical inferences in proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(1), 1-29. doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9698-3>



EKLER

EK 1. Akademik özgeçmiş

Kişisel Bilgiler			
Adı ve Soyadı	Esra Aksoy		
E-postası/Web Sayfası	esrarengiz-114@hotmail.com		
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce		
Uzmanlık Alanı	Matematik eğitimi		
Öğrenim Bilgileri			
	Üniversite	Bölüm/ ABD	Yıl
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği/ Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi	2006-2010
Yüksek Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği/ Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi	2012-2014
YL Tez Başlığı	Matematik Alanında Üstün Yetenekli ve Zekalı Öğrencilerin Bazı Değişkenler Açısından Veri Madenciliği ile Belirlenmesi		
YL Tez Danışmanı	Prof. Dr. Serkan NARLI		
Akademik Eserler			
Narli, S., Aksoy, E., & Ercire, Y. E. (2014). Veri madenciliği ile ilköğretim matematik öğretmen adaylarının öğrenme stillerinin ve aralarındaki ilişkilerin incelenmesi. <i>International Journal of Educational Studies in Mathematics</i>, (1), 37-57. *Aksoy, E., & Narli, S. (2015). An Examination of Mathematically Gifted Students' Learning Styles by Decision Trees. <i>Türk Üstün Zekâ ve Eğitim Dergisi</i>, 5(2), 147. Ercire, Y. E., Narli, S., & Aksoy, E. (2016). İrrasyonel Sayı Kümesinin Rasyonel ve Gerçek Sayı Kümeleriyle Olan İlişisine Yönelik Öğrenme Güçlükleri. <i>Turkish Journal of Computer and Mathematics Education</i>, 7(2), 417-439. Idil, F. H., Narli, S., & Aksoy, E. (2016). Using data mining techniques examination of the middle school students' attitude towards mathematics in the context of some variables. <i>International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology</i>, 4(3), 210-228. Narlı, S., Aksoy, E., & Pala, O., & Ercire, Y.E., (2016). Using Proof Image and Epistemic Actions to Trace The Proof Process of A Prospective Mathematics. In Csíkos, C., Rausch, A., & Sztányi, J. (Eds.). <i>Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education</i>, Vol. 1. Szeged, Hungary: PME.			

*Aksoy, E., Narlı, S. & Aksoy, M.A. (2018). Examination of mathematically gifted students using data mining techniques in terms of some variables. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 4(2), 471-485. DOI:10.21890/ijres.428280

*Aksoy, E., & Narlı, S. (2018). Why Do Instructors Prefer Not To Present Proofs of Some Theorems? In Bergqvist, E., Österholm, M., Granberg, C., & Sumpter, L. (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5). Umeå, Sweden: PME.

*Aksoy, E., & Narlı, S. (2019). Öğretim Elemanlarının Matematiksel İspatın Öneme Yönelik Görüşlerinin İncelenmesi. *Buca Faculty of Education Journal*, (47), 134-156.

*Aksoy, E., Narlı, S., & Aksoy, M. A. (2020). An Educational Data Mining Application by Using Multiple Intelligences. In *Examining Multiple Intelligences and Digital Technologies for Enhanced Learning Opportunities* (pp. 93-110). IGI Global.

Alanıyla İlgili Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler

Alanıyla İlgili Aldığı Ödüller

EK 2. Uygulama İzinleri

T.C
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
BUCA EĞİTİM FAKÜLTESİ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK
ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI



Sayı : 53321635-302/ 197
 Konu: Tez Uygulaması

09 Mayıs 2017

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İLGİ: Enstitü Müdürlüğü'nün 04.05.2017 tarih ve 914 sayılı yazısı.

Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora öğrencisi 2014950002 numaralı Esra AKSOY'un , tez çalışması kapsamında anabilim dalımızda uygulama yapma isteğine bölüm başkanlığımızca uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini arz ederim.

Prof. Dr. Mustafa EROL
Bölüm Başkanı

EK 3. Birinci Görüşme Soruları

1. Son yıllarda ispatların kullanıldığı hangi dersleri vermektесiniz?
2. Bu dersleri kaç yıldır vermektесiniz?
3. Derslerinizde bir kitap takip eder misiniz? Bu seçimde ispatların payı var mı?
4. Matematik derslerinde ispatın önemi hakkında ne düşünüyorsunuz? Yani derslerde neden ispat yapmalıyız?
5. Öğrencilerden yapılmış ispatları incelemelerini istemeli miyiz? Neden?
6. Öğrencilerin ispat yapmalarını istemeli miyiz? Neden?
7. Derste verdiğiniz tüm teoremleri/önermeleri ispatlar mısınız? Yapmıyorsanız bir ispatı yapıp yapmayacağınıza nasıl karar verirsiniz?
8. Sizce derste ispat yapmanızı neler etkiler?
9. Derste yaptığınız ispatları literatüre sadık kalarak mı yaparsınız veya herhangi bir değişiklik yapar mısınız? Neden?
10. Matematik öğretiminde derslerde yapılacak bir ispat hangi özelliklere sahip olmalıdır?
11. İspat yapmayı planladığınız teoremi/önermeyi öğrencilerin anlamasına yardımcı olmak için neler yaparsınız?
12. İspatlamayı nasıl yaptığınızı veya ispatı nasıl anlattığınızı tarif ediniz.
13. Öğrencilerin ispatı anlamalarına yardımcı olmak için neler yaptığınızı belirtiniz.
14. İspat yaparken öğrencilerinizin derse katılımını beklemek gerekir mi? Katılım bekliyorsanız bunun için neler yaparsınız?
15. Sizce öğrencilerin ispatı anlaması demek ne demektir?
16. Bir öğrencinin yaptığınız bir ispatı anlayıp anlamadığını nasıl anlarsınız?
17. Derste ispat yaparken ispatlama yöntemlerini vurgular mısınız? Neden?
18. Derste ispat yaparken kesinlikle yapılmalı dediğiniz bir şey var mı?
19. Öğrencilerinizin ispatlamada güçlük yaşadığını düşündüğünüz güçlükler nelerdir? Bu güçlüklerin nedenleri nelerdir?
20. Bu güçlüklerin giderilmesi için ne önerirsiniz?

EK 4. Üçüncü Görüşme Seçme Sıralama Formundan Örnek Sorular

Öğrencilerin ispatlamada güçlük yaşadıklarını düşündüğüm durumlar:

(Aşağıdaki ifadeleri en sık karşılaştığınız durumları göz önünde bulundurarak sıralayınız)

- ☐ *Teoremi anlamak*
- ☐ *Notasyonu doğru kullanmak*
- ☐ *Verilenleri iyi kullanmak*
- ☐ *Doğru yöntemi belirleyebilmek*
- ☐ *Kavramlar arasındaki bağlantıları doğru kurabilmek*
- ☐ *İspata nereden başlayacağına karar verebilmek*

Bence bir öğrencinin ispata anlaması demek demektir.

(Aşağıdaki ifadeleri size göre önem sırasına göre sıralayınız.)

- ☐ *İspatı anlatabilmesi*
- ☐ *Diğer bilgileriyle o ispat arasında ilişki kurabilmesi*
- ☐ *Aynı teoremi farklı yollarla ispatlayabilmesi*
- ☐ *Benzer bir teoremi ispatlayabilmesi*
- ☐ *İspattaki kavramlara ve notasyonlara hâkim ve verilen isteneni oluşturabilmesi*
- ☐ *(Bazı sık ispatlarda) şaşkınlık ve hayranlık hissetmesi*

