

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖKLİD UZAYINDA ARDIL EĞRİLERİN
SPİNOR GÖSTERİMİ

Hilal KÖSE ÖZTAŞ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2021
Her Hakkı Saklıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖKLİD UZAYINDA ARDIL EĞRİLERİN SPİNOR GÖSTERİMİ

Hilal KÖSE ÖZTAŞ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde literatür bilgisine yer verilmiştir. İkinci bölümde Öklid uzayı ile ilgili temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölüm olan Materyal ve Yöntemler kısmında ardıl eğriler ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Daha sonra ise spinorlarla ilgili temel bilgilerden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm ise tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğrinin ardıl eğrilerinin spinor formülasyonu araştırılmıştır. Bunun için, öncelikle, herhangi bir birim hızlı eğriye ve bu eğrinin bir ardıl eğrisine birer spinor karşılık getirilmiştir. Daha sonra alınan birim hızlı bir eğri ile bu eğrinin ardıl eğrisinin arasındaki ilişkiler kullanılarak bu eğrilere karşılık gelen spinorlar arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen bu ilişkiler kullanılarak bu eğrilere karşılık gelen spinorların bazı denklemleri teoremlerle ve sonuçlarla ifade edilmiştir. Ek olarak, bu spinorlar için geometrik yorumlar sonuçlar ile birlikte verilmiştir. Daha sonra, alınan birim hızlı bir eğrinin ardıl eğrisi helis eğrisi olarak göz önüne alınarak ardıl helis eğrisinin spinor gösterimi bazı teoremler ile ifade edilmiştir. Son olarak iki tane örnek verilmiştir. Beşinci bölüm ise sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.

2021, 55 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Ardıl Eğriler, Öklid Uzayı, Spinorlar.

ABSTRACT

Master Thesis

SPINOR REPRESENTATION OF SUCCESSOR CURVES IN EUCLIDEAN SPACE

Hilal KÖSE ÖZTAŞ

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Tülay ERİŞİR

This thesis consists of five chapters. The first chapter consists of the introduction. In this section, literature has been given. In the second chapter, basic definitions and theorems in Euclidean space have been expressed. In the third section, at the Materials and Methods part, the successor curves have been explained in detail. Then, basic information about spinors has been mentioned.

The fourth section is the original part of this thesis. In this section, the spinor formulations of successor curves of given a unit speed curve in three dimensional Euclidean space $\mathbb{E}^3$ has been investigated. For this, first of all, two spinors corresponding to the unit speed curve and a successor curve of this curve have been taken separately. Then, by using the relationships between the unit speed curve and its successor curve, the relationships between two spinors corresponding to these curves have been obtained. Moreover, some spinor equations of spinors corresponding to these curves have been expressed with theorems and results. In addition, some geometric interpretations for these spinors have been given with the results. Then, by taking the successor curve as a helix curve, the spinor representation of the successor helix curve has been characterized with some theorems. Finally, two examples have been obtained. In the fifth section, results and recommendations have been given.

2021, 55 Pages

Keywords: Euclidean Space, Spinors, Successor Curves.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşması sırasında bilgi birikimi ve tecrübesiyle yol gösterici olan, zamanını ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım, değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR'e şükran ve saygılarımı sunarım.

Hayatım boyunca maddi ve manevi destekçim olan, her türlü fedakarlığı göstermekten çekinmeyen sevgili anneme, babama ve canım kardeşime; bu süreçte beni yalnız bırakmayan, yüreklendiren, çalışma azmimi arttıran sevgili eşim Rıdvan ÖZTAŞ'a sonsuz teşekkür ederim.

Hilal KÖSE ÖZTAŞ

Mart, 2021

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Öklid Uzayı.....	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM	13
3.1. Ardıl Eğriler	13
3.2. Spinorlar.....	19
3.3. Eğrilerin Spinor Gösterimi.....	23
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	26
4.1. Ardıl Eğrilerin Spinor Gösterimi.....	26
4.2. Ardıl Eğrilerin Helis Eğrisi Olması Durumunda Spinor Gösterimi	39
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR.....	52
EKLER.....	54
Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar	55

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Parametre değişimi.....	7
Şekil 3.1. $\vec{B}$ ile $\vec{B}_1$ vektörleri arasındaki açı.....	14
Şekil 4.1. θ ve ϑ açıları.....	43



SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{E}^n$	n - Boyutlu Öklid Uzayı
I	$\mathbb{R}$ de Açık Aralık
κ, τ	Üç Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Eğrilikleri
$\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$	Üç boyutlu Öklid Uzayında Frenet Vektörleri
$\langle, \rangle$	İç Çarpım
$\ \ $	Norm
$\wedge$	Vektörel Çarpım
V	Vektör Uzayı
ξ, ϕ	Spinorlar
ξ^t	ξ Spinorunun Transpozu
$\hat{\xi}$	ξ Spinorunun Eşi
$\bar{\xi}$	ξ Spinorunun Eşleniği
α, β	$\mathbb{E}^3$ de Herhangi İki Eğri
$\mathbb{R}^n$	n -Boyutlu Reel İç Çarpım Uzayı
$SU(2)$	2×2 Boyutlu Üniter Matrisler Grubu
$SO(3)$	$\mathbb{R}^3$ Uzayında Orijin Etrafında Dönmeler Grubu

1. GİRİŞ

Eğri teorisi farklı boyutlarda ve uzaylarda ortaya konan çalışmalarla, diferensiyel geometrinin en çok çalışılan alanlarından biridir. Newton ve Leibniz tarafından yapılan eğri ve eğrilik ile ilgili araştırmalar eğri teorisinin temelini oluşturmaktadır. 18. yüzyılda Euler tarafından eğrilik tanımı verildikten sonra Monge tarafından uzay eğrileri tanımlanmıştır. Daha sonra 19. yüzyılda ise Serret ve Frenet tarafından, ayrı zamanlarda, günümüzde Serret-Frenet çatısı ve formülleri olarak bilinen denklemler çalışılmıştır. Genel olarak uzayda hareketli bir noktanın hareket boyunca aldığı farklı konumların geometrik yeri bir eğridir. Bu harekette, eğrinin parametre aralığı hareket boyunca geçen zamanı simgeler. Ayrıca eğrinin parametresi eğriyi karakterize etmekte önemli bir yere sahiptir. Örneğin; verilen bir eğrinin parametresi, eğrinin yay uzunluğu cinsinden parametrelendirilmiş olup olmaması açısından birçok farklılığa sahiptir. Eğrinin yay uzunluğu cinsinden parametrelendirilmiş olması eğrinin karakterizasyonunda büyük kolaylık sağlamaktadır. Uzayda herhangi iki eğri göz önüne alındığında; bu eğrilerin karşılıklı noktalarındaki Frenet vektörleri arasında bazı farklı ilişkiler kurularak çeşitli özel eğriler tanımlanmıştır. Örneğin; 1850 yılında Bertrand tarafından herhangi iki eğrinin normalleri arasında özel bir ilişki kurularak Bertrand eğri çifti tanımlanmıştır. Diğer bir özel eğri çifti ise, 1878 yılında A. Mannheim tarafından verilen ve iki eğriden birinin normali ile diğerinin binormali arasında ilişki kurularak elde edilen Mannheim eğri çiftidir (Wang ve Liu, 2007). Bir diğeri ise, herhangi iki eğrinin teğetleri arasında özel bir ilişki kurularak elde edilen involüt-evolüt eğrileridir (Millman ve Parker, 1977).

Bu tezin temelini oluşturan eğriler ardıl eğrileridir. Ardıl eğriler tanımı Menninger (2014) tarafından “Üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir (α) eğrisi göz önüne alınsın. Eğer (α) eğrisi ile aynı yay parametresine sahip bir (β) eğrisinin normal vektör alanı (α) eğrisinin teğet vektör alanı ise (β) eğrisine (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi denir. Her Frenet eğrisi bir ardıl eğrisine sahiptir.” şeklinde tanımlamıştır. Burada, hem (α) eğrisi hem (β) ardıl eğrisi aynı yay parametresine sahip birim hızlı eğrilerdir. Dolayısıyla her iki eğrinin Frenet çatıları ve Frenet eğrilikleri arasında bir ilişki mevcuttur (Menninger, 2014). Daha sonra Masal, çalışmasında ardıl düzlemleri tanımlayarak ve ardıl eğriliklerinin geometrik anlamlarını araştırarak ardıl eğrilerin yer vektörlerine bağlı

ilişkiler elde etmiştir (2018). Ayrıca, ardıl dönüşümün tersi olarak öncül dönüşüm, genel olarak iyi tanımlanmış olmamakla birlikte, Bilinski tarafından verilmiştir (1963).

Diğer taraftan, spinorlar uygulamalı bilimlerin birçok alanında kullanılan fiziksel yapılardır. Fizikte, özellikle kuantum mekaniğinde, spinorlar teorisi, elektron spini ve görelilik teorisi uygulamalarında kullanılmaktadır. Spini $\frac{1}{2}$ olan bir parçacığın dalga fonksiyonuna spinor denir. Ayrıca, elektromanyetik teoride spinorların uygulaması çok önemlidir. Dört boyutlu uzayda bir spin yapısı, fizikte Dirac spinorlarını elde etmek için spinorların genişletilmiş halidir. (Delanghe vd., 1966; Landau and Lifshitz, 1977; Wachter, 2011). Spinorlar sütun vektörleridir ve Pauli spin matrisleri üzerinde hareket ederler. Pauli spin matrisleri 2×2 boyutlu kompleks matrislerdir. Kuantum teorisinde spin, Pauli matrisleri ile ifade edilir. Spinorları geometrik olarak inceleyen, Lie grupları üzerine ilk çalışmaları yapan Cartan'dır (1966). Cartan'ın (1966) bu çalışması temel geometrik tanımların spinor temsillerini vermektedir. Cartan'ın çalışmasında $\mathbb{C}^3$ vektör uzayındaki izotropik vektörler kümesinin $\mathbb{C}^2$ uzayında iki boyutlu bir yüzey oluşturduğu vurgulanmıştır. Cartan bu çalışmasında $\mathbb{C}^3$ kompleks vektör uzayındaki her bir izotropik vektörün $\mathbb{C}^2$ uzayındaki iki vektöre karşılık geldiği görülmektedir. Cartan iki boyutlu bu vektörleri spinor olarak adlandırmıştır (Cartan, 1966).

2×2 boyutlu üniter matrisler grubu olan $SU(2)$ 'yi temsil eden Pauli matrisleri üzerinde hareket eden iki kompleks bileşenli spinorlar cebiri üç boyutlu reel vektör uzayında dönmelerin farklı bir gösterimini verir. Vivarelli bu bilgiyi kullanarak spinorlar ile kuaterniyonlar arasında bir ilişki kurmuş ve üç boyutlu Öklid uzayında dönmelerin kuaterniyon temsiliinin spinor gösterimini elde etmiştir (Vivarelli, 1984). Daha sonra Torres del Castillo ve Barrales tarafından üç boyutlu Öklid uzayında eğrilerin spinor gösterimini vermiştir (2004). Onlar, bu çalışmalarında eğrilerin Frenet vektörlerini ve eğriliklerini spinorlar cinsinden ifade etmiştir (2004). Dolayısıyla bu çalışma bu teze büyük oranda katkı sağlamıştır. Bu çalışmadan yola çıkılarak Kişi ve Tosun tarafından üç boyutlu Öklid uzayının bir yüzeyi üzerinde bir eğrinin Darboux çatısının ve Frenet ile Darboux çatılarının arasındaki ilişkinin spinor formülasyonu verilmiştir (2015). Daha sonra bir başka çalışmada yine üç boyutlu Öklid uzayında eğrilerin Bishop çatısının spinor formülasyonu elde edilmiştir (Ünal vd., 2013). Ayrıca, Erişir ve Kardağ, üç boyutlu Öklid uzayında involüt-evolüt eğri çiftlerinin spinor denklemlerini elde etmiştir

(2019). Diğer bir çalışmada ise, Bertrand eğrilerinin spinor formülasyonu verilmiştir (Erişir, 2021). Daha sonra, üç boyutlu klid uzayında yapılan bu çalışmalardan yola çıkılarak, üç boyutlu Minkowski uzayındaki bazı özel eğrilerin spinor formülasyonları elde edilmiştir (Erişir vd., 2015; Ketenci vd., 2015; Balcı vd., 2015).

Bu tez çalışmasının amacı ise üç boyutlu klid uzayında ardıl eğrilerin spinor gösterimini vermektir. Bunun için, öncelikle Cartan (1966) tarafından tanıtılan spinorlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra, Torres del Castillo ve Barrales (2004) tarafından verilen üç boyutlu klid uzayında alınan bir eğrinin Frenet vektörleri ve eğriliklerinin spinor formülasyonlarından bahsedilmiştir. Ayrıca, ilk defa özel bir eğri çiftinin spinoru gösterimini veren Erişir ve Kardağ'ın çalışması göz önüne alınmıştır (2019). Bu temel çalışmalar göz önüne alınarak, üç boyutlu klid Uzayında birim hızlı bir eğri ile bu eğri ile aynı yay parametresine sahip olan bir ardıl eğrisinin spinor gösterimi incelenmiştir. Bunun için, öncelikle, birim hızlı eğri ile onun ardıl eğrisi farklı iki spinora karşılık getirilmiştir. Daha sonra, bu eğriler arasındaki ilişkiler kullanılarak bu eğrilere karşılık gelen spinorlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca, bu eğriler ve bu eğrileri karşılık gelen spinorların geometrik yorumları yapılmıştır. Ek olarak, spinorların eşleri ve türevlerinin farklı spinor denklemleri incelenmiş olup yine bu spinor denklemlerinin geometrik yorumları verilmiştir. Daha sonra ise ardıl eğrilerin helis eğrisi olma durumunda spinor denklemleri elde edilmiştir. Son olarak iki örnek verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde Öklid uzayı ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1. A boştan farklı bir cümle ve K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. Eğer

$$f : A \times A \rightarrow V$$
$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir f fonksiyonu varsa A cümlesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay denir;

i) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

ii) $\forall P \in A, \forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde tek bir $Q \in A$ noktası vardır

(Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleştirilen n -boyutlu vektör uzayı V olsun.

$V = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ vektör uzayındaki iki vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

olacak şekilde Öklid iç çarpımı tanımlanırsa A afin uzayına Öklid uzayı adı verilir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \vec{x} &\rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona norm fonksiyonu denir. $\|\vec{x}\|$ pozitif reel sayısına ise $\vec{x}$ vektörünün normu denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.4. $d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonu göz önüne alınsın. d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu denir. Burada $d(X, Y)$ reel sayısına ise X ve Y noktaları arasındaki uzaklık adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.1. n -boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.5. $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\} \in \mathbb{E}^n$ Öklid uzayında alınan $n+1$ noktaya $\mathbb{R}^n$ uzayında karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ n -li vektör sistemi $\mathbb{R}^n$ 'in bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ sistemine $\mathbb{E}^n$ uzayında Öklid çatısı denir.

Tanım 2.6. $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında herhangi bir X noktasının standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

olsun. Bu durumda

$$x_i: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq n)$$

şeklinde tanımlanan x_i fonksiyonları X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları olarak adlandırılır.

Tanım 2.7. e^θ fonksiyonunun seri açılımı $e^\theta = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!}$ kullanılarak

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right)$$

yazılabilir. Burada

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots, \quad \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

seri açılımlarından faydalanılırsa

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (2.1)$$

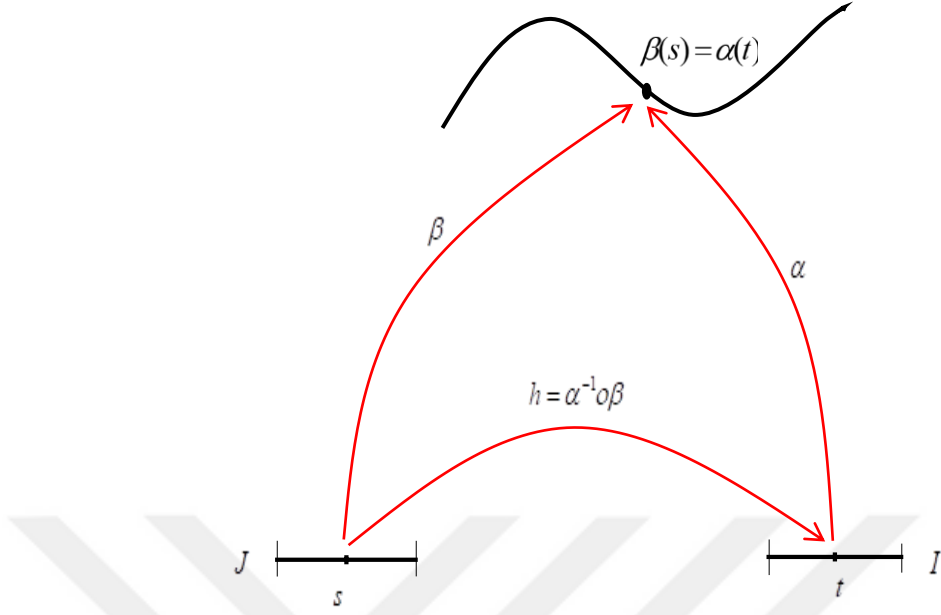
formülü elde edilir. Bu formüle Euler formülü denir. Euler formülü ilk kez 1714 yılında Robert Cotes tarafından $\ln(\cos x + i \sin x) = ix$ formunda verilmiştir. Daha sonra Leonhard Euler tarafından, 1774 yılında, iki tarafın sonsuz serilerin eşitliği yardımıyla ispatlanmıştır.

Tanım 2.8. $I, \mathbb{R}$ 'de bir açık aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha: I &\rightarrow \mathbb{E}^n \\ t &\rightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

şeklindeki diferensiyellenebilir α fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$, n – boyutlu Öklid uzayında bir eğri denir. Burada verilen $I \subset \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı, $t \in I$ 'ya (α) eğrisinin parametresi ve (I, α) ifadesine de (α) eğrisinin koordinat komşuluğu denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.9. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ ve $\beta: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ diferensiyellenebilir eğrileri verilsin. O halde $h = \alpha^{-1} \circ \beta: J \rightarrow I$ olacak şekilde bir diferensiyellenebilir fonksiyon varsa $(\beta) = (\alpha \circ h)$ eğrisine (α) eğrisinin yeniden parametrelendirilmesi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).



Şekil 2.1. Parametre değişimi (Hacısalıhoğlu, 1983).

Şekil 2.1’de $h: \alpha^{-1} \circ \beta$ parametre değişim fonksiyonu kullanılarak $\beta(s) = \alpha(h(s))$ ve $h(s) = t$ yazılarak $\beta(s) = \alpha(t)$ elde edilir.

Tanım 2.10. $\mathbb{E}^n$ ’de bir (α) eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. O halde

$$\begin{aligned} \|\alpha'\|: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

fonksiyonuna (α) eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğunda skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına (α) eğrisinin skaler hızı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.11. $\mathbb{E}^n$, n – boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile bir (α) eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise (α) eğrisine birim hızlı eğri denir. $s \in I$ parametresine ise (α) eğrisinin yay parametresi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.12. Her noktada hızı sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.13. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ olmak üzere (α) eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere (α) eğrisinin a dan b 'ye yay uzunluğu, $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzaklığa karşılık gelen $\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$ reel sayısı ile tanımlıdır. Bu şekilde tanımlı yay uzunluğu koordinat komşuluğundan bağımsızdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.14. $(\alpha) \in \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ şeklindeki lineer bağımsız cümlesi $\forall \alpha(k), k > r$ için $\alpha^k \in S_p \{\psi\}$ oluyorsa ψ cümlesinden elde edilen $\{\vec{V}_1(t), \vec{V}_2(t), \dots, \vec{V}_r(t)\}$ ortonormal sistemine (α) eğrisinin Serret-Frenet r – ayaklı alanı ve her bir $\vec{V}_i, 1 \leq i \leq r$ vektörüne ise Serret-Frenet vektörü adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.15. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ s yay parametrelili bir eğri olmak üzere (α) eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet r – ayaklısı $\{\vec{V}_1(s), \vec{V}_2(s), \dots, \vec{V}_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < r$$

$$t \rightarrow k_i(s) = \left\langle \vec{V}_i'(s), \vec{V}_{i+1}(s) \right\rangle$$

şeklinde tanımlanan k_i fonksiyonuna i . eğrilik fonksiyonu denir. Ayrıca $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına ise $\alpha(s)$ noktasında (α) eğrisinin i . eğriliği denir.

Teorem 2.2. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall t \in I$ için (α) eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Serret-Frenet vektörleri $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ olmak üzere bu vektörler

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{1}{\|\vec{\alpha}'(t)\|} \vec{\alpha}'(t) \\ \vec{N}(t) &= \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) \\ \vec{B}(t) &= \frac{1}{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|} (\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde hesaplanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için, $t \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere, (α) eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliği $\kappa(t)$ ve burulması $\tau(t)$ olmak üzere bu eğrilikler sırasıyla,

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\ddot{\alpha}(t) \wedge \dot{\alpha}(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3} \\ \tau(t) &= \frac{\langle \dot{\alpha}(t) \wedge \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle}{\|\dot{\alpha}(t) \wedge \ddot{\alpha}(t)\|^2}\end{aligned}\tag{2.3}$$

olarak bulunur (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.4. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin keyfi bir parametresi $t \in I$ olsun. Bu eğrinin Frenet 3-ayaklısı $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$, eğrilik ve burulması, sırasıyla, $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ olmak üzere (α) eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{aligned}\vec{T}'(t) &= \|\dot{\alpha}(t)\| \kappa(t) \vec{N}(t) \\ \vec{N}'(t) &= \|\dot{\alpha}(t)\| (-\kappa(t) \vec{T}(t) + \tau(t) \vec{B}(t)) \\ \vec{B}'(t) &= -\|\dot{\alpha}(t)\| \tau(t) \vec{N}(t)\end{aligned}\tag{2.4}$$

şeklinde elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.5. $\mathbb{E}^3$ uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile bir (α) eğrisi verilsin. (α) eğrisinin yay parametresi $s \in I$ olmak üzere (α) eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}\vec{T}(s) &= \dot{\alpha}(s) \\ \vec{N}(s) &= \frac{1}{\|\ddot{\alpha}(s)\|} \ddot{\alpha}(s) \\ \vec{B}(s) &= \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)\end{aligned}\tag{2.5}$$

olarak elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.6. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin yay parametresi $s \in I$ olsun. Bu eğrinin Frenet 3-ayaklısı $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$, eğrilik ve burulması, sırasıyla, $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olmak üzere (α) eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet formülleri

$$\begin{aligned}\vec{T}'(s) &= \kappa(s)\vec{N}(s) \\ \vec{N}'(s) &= -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s) \\ \vec{B}'(s) &= -\tau(s)\vec{N}(s)\end{aligned}\tag{2.6}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.7. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin yay parametresi $s \in I$ olsun. Eğrinin bir doğru olması için gerek ve yeter şart eğrinin $\kappa(s)$ eğriliğinin sıfır olmasıdır (Yüce, 2017).

Teorem 2.8. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin yay parametresi $s \in I$ olsun. Eğrinin düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul eğrinin $\tau(s)$ burulmasının sıfır olmasıdır (Yüce, 2017).

Teorem 2.9. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrinin yay parametresi $s \in I$ olsun. Eğrinin çember olması için gerek ve yeter şart eğrinin $\kappa(s)$ eğriliğinin sabit ve sıfırdan büyük, eğrinin $\tau(s)$ burulmasının sıfır olmasıdır (Yüce, 2017).

Tanım 2.16. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, (α) eğrisinin teğet vektör alanı $\vec{T}$ ve $\vec{U}$ herhangi bir birim vektör olsun. Eğer $\vec{T}$ teğet vektör alanı, $\vec{U}$ sabit vektörü ile sabit açı yapıyorsa, (α) eğrisine helis eğrisi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.10. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin yay parametresi $s \in I$ olsun. κ ve τ sırasıyla (α) eğrisinin eğriliği ve burulması olmak üzere, bu eğrinin helis olması için gerek ve yeter şart $\kappa(s) \neq 0$ ve $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olmasıdır (Yüce, 2017).

İspat: $\Rightarrow: \alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi helis eğrisi, bu eğrinin yay parametresi $s \in I$ ve $\vec{T}_1$, (α) eğrisinin teğet vektör alanı olsun. O halde sabit bir $\vec{U}$ birim vektörü için $\langle \vec{T}(s), \vec{U}(s) \rangle = \cos \theta$ olacak şekilde θ sabit açısı vardır. Buradan

$$\langle \vec{T}', \vec{U} \rangle + \langle \vec{T}, \vec{U}' \rangle = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$\langle \vec{T}', \vec{U} \rangle = 0$$

elde edilir. $\vec{T}' = \kappa \vec{N}$ olduğundan $\langle \kappa \vec{N}, \vec{U} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{N}, \vec{U} \rangle = 0$ bulunur. O halde $\vec{U}$ vektörü $\{\vec{T}, \vec{B}\}$ düzleminde olup $\vec{U} = \cos \theta \vec{T} + \sin \theta \vec{B}$ şeklinde yazılabilir. Buradan $\vec{U}$ sabit vektörünün türevi alınır

$$\begin{aligned} \vec{U}' &= 0 = \cos \theta \vec{T}' + \sin \theta \vec{B}' \\ &= \cos \theta (\kappa \vec{N}) + \sin \theta (-\tau \vec{N}) \\ &= (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) \vec{N} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ elde edilir. $\theta = \text{sabit}$ olduğundan $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ sabittir.

$\Leftarrow: \theta = \text{sabit}$ ve $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ olsun. Buradan $\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta = 0$ elde edilir. $\vec{U} = \cos \theta \vec{T} + \sin \theta \vec{B}$ vektörünün türevi alındığında $\vec{U}' = (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) \vec{N}$ olarak bulunur. Burada teoremin kabulü gereği $\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta = 0$ olduğundan $\vec{U}$ vektörü sabit bir vektördür. Buradan $\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \cos \theta = \text{sabit}$ elde edilir. O halde, her noktada (α) eğrisinin teğet vektörü sabit bir $\vec{U}$ vektörü ile sabit açı yapar. Dolayısıyla (α) eğrisi helistir. Böylece ispat biter.

Tanım 2.17. $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin Frenet çatısının açısal hız vektörüne Darboux vektörü denir. Buna göre, bir eğrinin $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ Frenet vektör alanları için

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= \vec{D} \times \vec{T} \\ \vec{N}' &= \vec{D} \times \vec{N} \\ \vec{B}' &= \vec{D} \times \vec{B}\end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan $\vec{D}$ vektörüne Frenet çatısının Darboux vektörü denir (Özdemir, 2020).

Önerme 2.1. $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir (α) eğrisinin $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ Frenet çatısının Darboux vektörü

$$\vec{D} = (\tau, 0, \kappa) = \tau \vec{T} + \kappa \vec{B} \quad (2.7)$$

ile belirlidir (Özdemir, 2020).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüm üç alt başlıktan oluşmaktadır. İlk bölümde ardıl eğriler ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde, spinorlar için temel bir çalışma olan, Cartan (1966) tarafından tanıtılan spinorlar ile ilgili temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Ayrıca, Torres del Castillo ve Barrales tarafından verilen spinor denklemleri ifade edilmiştir (2004). Üçüncü bölümde ise üç boyutlu Öklid uzayında eğrilerin spinor formülasyonu verilmiştir.

3.1. Ardıl Eğriler

Tanım 3.1. $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile göz önüne alınsın. Ayrıca (α) eğrisi ile aynı yay parametresine sahip $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi verilsin. Eğer (α) eğrisinin teğet vektör alanı (β) eğrisinin asli normal vektör alanı ise (β) eğrisine (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi denir. Her Frenet eğrisi bir ardıl eğri ailesine sahiptir (Menninger, 2014).

Teorem 3.1. $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrileri aynı yay parametresine sahip iki eğri olmak üzere (β) eğrisi (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi olsun. Bu durumda (α) eğrisinin Frenet sistemi $F = \{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \kappa, \tau\}$ ve (β) ardıl eğrisinin ardıl sistemi $F_1 = \{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1, \kappa_1, \tau_1\}$ olmak üzere bu sistemler arasında

$$\begin{pmatrix} \vec{T}_1 \\ \vec{N}_1 \\ \vec{B}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ve

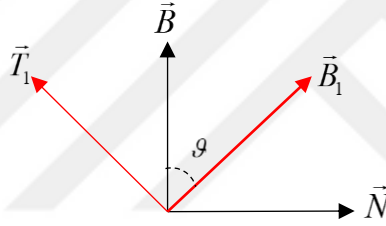
$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

ilişkileri vardır. Burada $\mathcal{G}$ açısı $\vec{B}$ ve $\vec{B}_1$ binormal vektör alanları arasındaki açıdır. Ayrıca $\mathcal{G}_0 = \text{sabit} \in \mathbb{R}$ olmak üzere (α) eğrisinin τ burulması için

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_0 + \int \tau(s) ds \quad (3.3)$$

eşitliği vardır (Menninger, 2014).

İspat: $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında aynı yay parametresine sahip (α) ve (β) eğrileri göz önüne alınsın. Ayrıca (β) eğrisi (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi olsun. O halde Tanım 3.1 gereği (α) eğrisinin teğet vektör alanı, (β) eğrisinin normal vektör alanı olduğundan $\vec{T} = \vec{N}_1$ alınabilir. Buradan $\vec{B}$ ile $\vec{B}_1$ vektör alanları arasındaki açı $\mathcal{G}$ olsun. Dolayısıyla (α) ve (β) eğrilerinin Frenet vektörleri için aşağıdaki şekil verilebilir.



Şekil 3.1. $\vec{B}$ ile $\vec{B}_1$ vektör alanları arasındaki açı

Şekil 3.1 göz önüne alındığında $\vec{B}_1$, $\vec{N}$ ve $\vec{B}$ vektör alanları arasında

$$\vec{B}_1 = \sin \mathcal{G} \vec{N} + \cos \mathcal{G} \vec{B}$$

eşitliği yazılabilir. Benzer şekilde $\vec{T}_1$, $\vec{N}$ ve $\vec{B}$ vektör alanları arasında

$$\vec{T}_1 = -\cos \mathcal{G} \vec{N} + \sin \mathcal{G} \vec{B}$$

ilişkisi mevcuttur. O halde (α) eğrisinin $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ Frenet vektörleri ile (β) ardıl eğrisinin $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet vektörleri arasındaki ilişkilerin matris formu

$$\begin{pmatrix} \vec{T}_1 \\ \vec{N}_1 \\ \vec{B}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan κ_1 , (β) ardıl eğrisinin eğriliği olmak üzere $\kappa_1 = \langle \vec{T}_1', \vec{N}_1 \rangle$ eşitliğini elde etmek için Denk. 3.1'de $\vec{T}_1 = -\cos \vartheta \vec{N} + \sin \vartheta \vec{B}$ eşitliğinden türev alınırsa

$$\vec{T}_1' = \vartheta' \sin \vartheta \vec{N} - \cos \vartheta \vec{N}' + \vartheta' \cos \vartheta \vec{B} + \sin \vartheta \vec{B}'$$

eşitliği elde edilir. Burada Denk. 2.6 kullanılırsa

$$\vec{T}_1' = \kappa \cos \vartheta \vec{T} + \sin \vartheta (\vartheta' - \tau) \vec{N} + \cos \vartheta (\vartheta' - \tau) \vec{B}$$

eşitliği bulunur. Ayrıca (β) eğrisi (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi olduğundan $\vec{T} = \vec{N}_1$ eşitliği de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \langle \vec{T}_1', \vec{N}_1 \rangle \\ &= \kappa \cos \vartheta \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle + \sin \vartheta (\vartheta' - \tau) \langle \vec{N}, \vec{T} \rangle + \cos \vartheta (\vartheta' - \tau) \langle \vec{B}, \vec{T} \rangle \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\kappa_1 = \kappa \cos \vartheta$$

elde edilir. Benzer şekilde $\tau_1 = \langle \vec{N}_1', \vec{B}_1 \rangle$, (β) ardıl eğrisinin burulması olmak üzere $\vec{N}_1' = \vec{T}' = \kappa \vec{N}$ ve $\vec{B}_1 = \sin \vartheta \vec{N} + \cos \vartheta \vec{B}$ eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \langle \vec{N}_1', \vec{B}_1 \rangle \\ &= \langle \kappa \vec{N}, \sin \vartheta \vec{N} + \cos \vartheta \vec{B} \rangle \\ &= \kappa \sin \vartheta \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle + \kappa \cos \vartheta \langle \vec{N}, \vec{B} \rangle \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\tau_1 = \kappa \sin \vartheta$$

eşitliği bulunur. Böylece Denk. 3.2 ispatlanmış olur.

Son olarak $\tau = \langle \vec{N}', \vec{B} \rangle$, (α) eğrisinin burulması olmak üzere Denk. 3.1 göz önüne alınır

$$\begin{aligned} \vec{N}' &= \vartheta' \sin \vartheta \vec{T}_1 + \sin \vartheta \vec{T}_1' + \vartheta' \cos \vartheta \vec{B}_1 + \sin \vartheta \vec{B}_1' \\ &= \vartheta' \sin \vartheta \vec{T}_1 + \sin \vartheta (\kappa_1 - \tau_1) \vec{N}_1 + \vartheta' \cos \vartheta \vec{B}_1 \end{aligned}$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} \tau &= \langle \vec{N}', \vec{B} \rangle \\ &= \vartheta' \sin \vartheta \langle \vec{T}_1, \vec{B} \rangle + \sin \vartheta (\kappa_1 - \tau_1) \langle \vec{N}_1, \vec{B} \rangle + \vartheta' \cos \vartheta \langle \vec{B}_1, \vec{B} \rangle \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\tau = \vartheta' \tag{3.4}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\vartheta(s) = \vartheta_0 + \int \tau(s) ds$ bulunur. Burada $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ ve $s \in I$, (α) ve (β) eğrisinin yay parametresidir. Böylece ispat biter.

Teorem 3.2. $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin bir ardıl eğrisi olmak üzere $\vec{D}_1$, (β) ardıl eğrisinin Darboux vektörü olsun. O halde

$$\vec{D}_1 = \kappa \vec{B} \tag{3.5}$$

dir. Burada κ ve $\vec{B}$, sırasıyla, (α) eğrisinin eğriliği ve binormal vektör alanıdır (Menninger, 2004).

İspat: (β) eğrisi (α) eğrisinin ardıl eğrisi olmak üzere (β) ardıl eğrisinin Darboux dönme eksenini $\vec{D}_1$ olarak verilsin. Bu durumda Denk. 2.7’de $\vec{D}_1 = \tau_1 \vec{T}_1 + \kappa_1 \vec{B}_1$ olduğu göz önüne alınır Denk. 3.1 ve 3.2’den

$$\begin{aligned}\vec{D}_1 &= \tau_1 \vec{T}_1 + \kappa_1 \vec{B}_1 \\ &= \kappa \sin \vartheta (-\cos \vartheta \vec{N} + \sin \vartheta \vec{B}) + \kappa \cos \vartheta (\sin \vartheta \vec{N} + \cos \vartheta \vec{B})\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\vec{D}_1 = \kappa \vec{B}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat biter.

Tanım 3.2. (β) eğrisi (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi olmak üzere $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında (α, β) eğrileri verilsin. (β) eğrisinin ardıl sistemi $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1, \kappa_1, \tau_1\}$ olsun. Eğer (β) ardıl eğrisinin her noktasında $\vec{T}_1$ teğet vektör sabit bir vektörle sabit açı yapıyorsa (β) ardıl eğrisine helis eğrisi denir (Menninger, 2014; Masal, 2018).

Teorem 3.3. (β) eğrisi (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi olsun. (β) ardıl eğrisi helis eğrisi ise $\frac{\kappa_1}{\tau_1} = \text{sabittir}$ (Masal, 2018).

İspat: (β) ardıl eğrisi helis eğrisi olsun. Bu durumda

$$\langle \vec{T}_1, \vec{U} \rangle = \cos \theta = \text{sabit} \neq 0 \quad (3.6)$$

olacak şekilde sabit bir $\vec{U}$ vektörü vardır. Burada θ , $\vec{T}_1$ teğet vektör alanı ile $\vec{U}$ sabit vektörü arasındaki açıdır. Eğer Denk. 3.6'dan $s \in I$ yay parametresine göre türev alınırsa $\langle \kappa_1 \vec{N}_1, \vec{U} \rangle = 0$ olmak üzere $\langle \vec{N}_1, \vec{U} \rangle = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\vec{N}_1 \perp \vec{U}$ olduğundan $\vec{U} = \text{Sp}\{\vec{T}_1, \vec{B}_1\}$ dir. O halde

$$\vec{U} = u_1 \vec{T}_1 + u_2 \vec{B}_1 \quad (3.7)$$

yazılabilir. Burada $u_i = \text{sabit}$ olmak üzere Denk. 3.7'nin türevinden

$$\begin{aligned}
0 &= u_1 \vec{T}_1' + u_2 \vec{B}_1' \\
0 &= u_1 \kappa_1 \vec{N}_1 + u_2 (-\tau_1 \vec{N}_1) \\
0 &= u_1 \kappa_1 - u_2 \tau_1
\end{aligned}$$

olmak üzere $\frac{\kappa_1}{\tau_1} = \frac{u_2}{u_1}$ oranı sabit bulunur. Ayrıca Denk. 3.6 ve 3.7 göz önüne alınırsa

$$\langle \vec{T}_1, \vec{U} \rangle = u_1 = \cos \theta$$

ve

$$\langle \vec{B}_1, \vec{U} \rangle = u_2 = \sin \theta$$

olmak üzere

$$\frac{\kappa_1}{\tau_1} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad (3.8)$$

olur. Dolayısıyla (β) ardıl eğrisi helis eğrisidir.

Teorem 3.4. (β) eğrisi (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi olmak üzere (β) eğrisi helis eğrisidir gerek ve yeter şart (α) eğrisi düzlemseldir (Menninger, 2004).

İspat: $\Rightarrow$: (α) eğrisinin (β) ardıl eğrisi helis eğrisi olsun. O halde Denk. 3.8'den

$$\frac{\kappa_1}{\tau_1} = \tan \theta$$

eşitliği vardır. Burada $\theta = \text{sabit}$ olup $\vec{T}_1$ ile $\vec{U}$ sabit vektörü arasındaki açıdır. O halde Denk. 3.2 göz önüne alınırsa

$$\frac{\kappa_1}{\tau_1} = \tan \theta = \frac{\kappa \cos \vartheta}{\kappa \sin \vartheta} = \cot \vartheta$$

bulunur. $\tan \theta = \text{sabit}$ olduğundan $\cot \theta = \text{sabit}$ ve böylece $\theta = \text{sabit}$ olur. O halde $\theta' = 0$ olmak üzere Denk. 3.4 yardımıyla $\tau = \theta' = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, (α) eğrisi düzlemseldir.

$\Leftarrow$: (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi (β) eğrisi olsun. Kabul edelim ki (α) eğrisi düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda Teorem 2.8 gereği (α) eğrisinin τ burulması $\forall s \in I$ için $\tau = 0$ dır. Dolayısıyla Denk. 2.6 göz önüne alınırsa

$$\vec{B}' = \vec{0}$$

olduğundan (α) eğrisinin $\vec{B}$ binormal vektör alanı $\vec{B} = \text{sabit}$ olur. O halde $\vec{T}_1$, (β) ardıl eğrisinin teğet vektör alanı olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \vec{T}_1', \vec{B} \rangle &= \langle \kappa_1 \vec{N}_1, \vec{B} \rangle = \kappa_1 \langle \vec{N}_1, \vec{B} \rangle \\ &= \kappa_1 \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse $\langle \vec{T}_1', \vec{B} \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \vec{T}_1, \vec{B} \rangle = \text{sabit}$$

olduğu bulunur. Buradan görülür ki $\vec{T}_1$, sabit bir $\vec{B}$ vektörü ile sabit açı yaptığından (β) ardıl eğrisi helis eğrisidir. Böylece ispat biter.

3.2. Spinorlar

Üç boyutlu kompleks vektör uzayı $\mathbb{C}^3$ olmak üzere $\mathbb{C}^3$ uzayında bir izotropik vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ olsun. O halde $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ eşitliği vardır. $\mathbb{C}^3$ vektör uzayındaki izotropik vektörler cümlesi, $\mathbb{C}^2$ kompleks uzayında ξ_1 ve ξ_2 parametreleri ile yazılabilen bir yüzey oluşturur. Eğer burada $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ izotropik vektörü göz önüne alınırsa, bu vektör ξ_1 ve ξ_2 parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
x_1 &= \xi_1^2 - \xi_2^2 \\
x_2 &= i(\xi_1^2 - \xi_2^2) \\
x_3 &= -2\xi_1 \xi_2
\end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan ξ_1 ve ξ_2 parametreleri

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \pm \sqrt{\frac{x_1 - ix_2}{2}}, \\
\xi_2 &= \pm \sqrt{\frac{-x_1 - ix_2}{2}}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde $\mathbb{C}^3$ vektör uzayında her bir izotropik vektör (ξ_1, ξ_2) ve $(-\xi_1, -\xi_2)$ olacak şekilde $\mathbb{C}^2$ uzayında iki vektöre karşılık gelir. $\mathbb{C}^2$ uzayındaki bu iki vektöre ise aynı $\vec{x}$ izotropik vektörü karşılık gelir. Burada bahsedilen $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ kompleks vektörler Cartan tarafından spinor olarak adlandırılmıştır. Ek olarak, Cartan, spinorların sadece iki boyutlu kompleks vektörler değil aynı zamanda üç boyutlu kompleks izotropik vektörlerin bir temsili olduğunu söylemiştir (Cartan, 1966).

$SO(3)$, $\mathbb{R}^3$ uzayında orijin etrafında dönmeler grubu ve $SU(2)$, 2×2 boyutlu üniter matrisler grubu olmak üzere $SO(3)$, $SU(2)$ grubuna homomorfiktir. Ayrıca $SO(3)$ grubunun elemanları $\mathbb{R}^3$ uzayındaki vektörleri hareket ettirirken $SU(2)$ grubunun elemanları ise spinorları hareket ettirir (Goldstein, 1980; Sattinger ve Weaver, 1986; Torres del Castillo ve Barrales, 2004). Bu bilgiler ışığında, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ vektörü göz önüne alınırsa $\vec{a} + i\vec{b} \in \mathbb{C}^3$ vektörüne karşılık gelen spinor $\xi = (\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $\vec{a} + i\vec{b} = (x_1, x_2, x_3)$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}
x_1 &= \xi_1^2 - \xi_2^2 \\
x_2 &= i(\xi_1^2 + \xi_2^2) \\
x_3 &= -2\xi_1 \xi_2
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir (Cartan, 1966; Torres del Castillo ve Barrales, 2004). Diğer taraftan

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

olarak bilinen Pauli matrisleri göz önüne alınsın. Bu durumda Denk. 3.10'da verilen Pauli matrisleri kullanılarak ($i = 1, 2, 3$) olacak şekilde $\sigma_i = CP_i$ denkleminde σ_i matrisleri

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

şeklinde elde edilir. Burada $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dir. (Torres del Castillo, 2003; Payne, 1952).

Ayrıca bir ξ spinorunun eşi $\hat{\xi}$ olmak üzere $\hat{\xi}$ spinoru

$$\hat{\xi} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\xi} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\xi}_2 \\ \bar{\xi}_1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur (Torres del Castillo ve Barrales, 2004). Bu bilgiler yardımıyla $\vec{a} + i\vec{b}$ izotropik vektörü

$$\vec{a} + i\vec{b} = \xi^t \sigma \xi$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde bir $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ reel vektörü göz önüne alınsın.

$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ reel vektörü için $\vec{c} = -\hat{\xi}^t \sigma \xi$ eşitliği göz önüne alınırsa $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ vektör üçlüsü ξ spinoru cinsinden

$$\begin{aligned} \vec{a} + i\vec{b} &= \xi^t \sigma \xi = \left(\xi_1^2 - \xi_2^2, i(\xi_1^2 + \xi_2^2), -2\xi_1\xi_2 \right) \\ \vec{c} &= -\hat{\xi}^t \sigma \xi = \left(\xi_1\bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_1\xi_2, i(\xi_1\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1\xi_2), |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 \right) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada “ $\bar{}$ ” kompleks eşleniktir. Burada $\vec{a} + i\vec{b} \in \mathbb{C}^3$ bir izotropik vektör ve $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ reel bir vektördür (Torres del Castillo ve Barrales, 2004).

Burada gerekli işlemler göz önüne alındığında $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin boyları birbirine eşittir ve $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = \sqrt{\xi^t \xi}$ dir.

Ayrıca $\langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{c} \rangle$ iç çarpımı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{c} \rangle &= \left\langle \left(\xi_1^2 - \xi_2^2, i(\xi_1^2 + \xi_2^2), -2\xi_1\xi_2 \right), \left(\xi_1\bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_1\xi_2, i(\xi_1\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1\xi_2), |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 \right) \right\rangle \\ &= (\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1\bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_1\xi_2) + i^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)(\xi_1\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1\xi_2) - 2\xi_1\xi_2(|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{c} \rangle &= 2\xi_1^2\bar{\xi}_1\xi_2 - 2\xi_2^2\bar{\xi}_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_2|\xi_1|^2 + 2\xi_1\xi_2|\xi_2|^2 \\ &= 2\xi_1^2\bar{\xi}_1\xi_2 - 2\xi_2^2\bar{\xi}_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_2\bar{\xi}_1\xi_1 + 2\xi_1\xi_2\bar{\xi}_2\xi_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buradan $\langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + i\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ olduğundan $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ eşitliği vardır ve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri karşılıklı ortogonaldır. $\det(a, b, c) > 0$ olduğundan $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ sıralı üçlüsü sağ sistem teşkil eder.

Burada dikkat etmek gerekir ki $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$, $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$ sıralı üçlülerine farklı spinorlar karşılık gelir (Torres del Castillo ve Barrales, 2004). Ayrıca spinorlar için aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.1. ξ ve ϕ herhangi iki spinor ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere

- i. $\overline{\phi^t \sigma \xi} = -\hat{\phi}^t \sigma \hat{\xi}$
- ii. $(\lambda \phi + \mu \xi)^\wedge = \bar{\lambda} \hat{\phi} + \bar{\mu} \hat{\xi}$
- iii. $\hat{\hat{\xi}} = -\xi$
- iv. $\phi^t \sigma \xi = \xi^t \sigma \phi$

eşitlikleri yazılır (Torres del Castillo ve Barrales, 2004).

Önerme 3.2. Sıfırdan farklı ξ spinoru için $\{\xi, \hat{\xi}\}$ spinor ikilisi lineer bağımsızdır (Torres del Castillo ve Barrales, 2004).

3.3. Eğrilerin Spinor Gösterimi

$I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı (α) regüler eğrisi göz önüne alınsın. Bu eğrinin yay parametresi $s \in I$ olmak üzere $\|\alpha'(s)\| = 1$ 'dir.

Bu durumda, (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet üçlüsüne

$$\begin{aligned}\vec{N} + i\vec{B} &= \xi^t \sigma \xi \\ \vec{T} &= -\hat{\xi}^t \sigma \xi\end{aligned}\tag{3.12}$$

olacak şekilde bir ξ spinoru karşılık gelir. Burada $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet vektörleri birim vektörler olduğundan $\bar{\xi}^t \xi = 1$ eşitliği söz konusudur (Torres del Castillo ve Barrales, 2004).

Buradan

$$\begin{aligned}\vec{N} + i\vec{B} &= \xi^t \sigma \xi = (\xi_1^2 - \xi_2^2, i(\xi_1^2 + \xi_2^2), -2\xi_1 \xi_2) \\ \vec{T} &= -\hat{\xi}^t \sigma \xi = (\xi_1 \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_1 \xi_2, i(\xi_1 \bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1 \xi_2), |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2)\end{aligned}\tag{3.13}$$

denklemleri yazılabilir.

Şimdi $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet üçlüsüne sahip (α) eğrisine karşılık gelen ξ spinoru için $\frac{d\xi}{ds}$

türevi incelensin. $\frac{d\xi}{ds}$ spinoru, f ve g fonksiyonları kompleks değerli ve keyfi

fonksiyonlar olmak üzere, $\{\xi, \hat{\xi}\}$ spinor ikilisi cinsinden

$$\frac{d\xi}{ds} = f\xi + g\hat{\xi}\tag{3.14}$$

şeklinde yazılabilir. Denk. 3.13’de verilen ilk eşitliğin $s \in I$ parametresine göre türevi alınır

$$-\kappa \vec{T} - i\tau(\vec{N} + i\vec{B}) = 2f(\vec{N} + i\vec{B}) - 2g\vec{T}$$

denkleminde f ve g kompleks fonksiyonları $f = \frac{-i\tau}{2}$, $g = \frac{\kappa}{2}$ olarak bulunur.

Dolayısıyla Denk. 3.14 yardımıyla

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{2}(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi}) \quad (3.15)$$

elde edilir. Burada κ ve τ , sırasıyla, (α) eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır. Böylece (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet çatısına karşılık gelen ξ spinorunun $\frac{d\xi}{ds}$ türevi sayesinde (α) eğrisinin Frenet eğrilikleri tek bir spinor denklemi ile ifade edilmiş olur (Torres del Castillo ve Barrales, 2004).

Teorem 3.5. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir regüler eğri olmak üzere, (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet üçlüsüne bir ξ spinoru karşılık gelsin. O halde $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet vektörlerinin, ayrı ayrı, spinor formülasyonu

$$\begin{aligned} \vec{T} &= -\hat{\xi}^t \sigma_{\xi} \\ \vec{N} &= \frac{1}{2}(\xi^t \sigma_{\xi} - \hat{\xi}^t \sigma_{\hat{\xi}}) \\ \vec{B} &= \frac{-i}{2}(\xi^t \sigma_{\xi} + \hat{\xi}^t \sigma_{\hat{\xi}}) \end{aligned}$$

şeklindedir (Erişir ve Kardağ, 2019).

Teorem 3.6. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir regüler eğri olmak üzere, (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet üçlüsüne bir ξ spinoru karşılık gelsin. O halde bu $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet vektörlerinin spinor denklemleri, bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= \left(\xi_1 \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_1 \xi_2, i(\xi_1 \bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1 \xi_2), |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 \right) \\
\vec{N} &= \frac{1}{2} \left(\xi_1^2 - \xi_2^2 - \bar{\xi}_2^2 + \bar{\xi}_1^2, i(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \bar{\xi}_1^2 - \bar{\xi}_2^2), -2\xi_1 \xi_2 - 2\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \right) \\
\vec{B} &= -\frac{i}{2} \left(\xi_1^2 - \xi_2^2 - \bar{\xi}_2^2 + \bar{\xi}_1^2, i(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2), -2\xi_1 \xi_2 + 2\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur (Erişir ve Kardağ, 2019).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, birim hızlı bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi ve (α) eğrisi ile aynı yay parametresine sahip (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ göz önüne alınmıştır. Ayrıca, (α) eğrisi ile (α) eğrisinin (β) ardıl eğrisine birer spinor karşılık getirilmiştir. Daha sonra, bu eğriler arasındaki ilişkiler göz önüne alınarak bu eğrilere karşılık gelen spinorlar arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Ek olarak, bu spinorlar arasındaki açılar için geometrik yorumlar verilmiştir. Daha sonra, (α) eğrisi ile (β) ardıl eğrisine karşılık gelen bu spinorların eşleri ve türevleri için spinor denklemleri elde edilmiş ve bu denklemlerin geometrik yorumları yapılmıştır. İkinci alt başlıkta ise, (β) ardıl eğrisinin helis olması göz önüne alınarak bu eğrinin spinor denklemleri için bazı teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak iki tane örnek verilmiştir.

4.1. Ardıl Eğrilerin Spinor Gösterimi

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, $s \in I$ yay parametresi ile verilen birim hızlı bir eğri olmak üzere (α) eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ olsun. Bu durumda bilindiği üzere, (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet üçlüsüne karşılık gelen spinor ξ olmak üzere bu Frenet çatısının spinor denklemleri

$$\begin{aligned}\vec{N} + i\vec{B} &= \xi^t \sigma \xi \\ \vec{T} &= -\hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi}\end{aligned}\tag{4.1}$$

şeklinde (Torres del Castillo ve Barrales, 2004). Ek olarak (α) birim hızlı eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet vektörlerinin, ayrı ayrı, spinor denklemleri

$$\begin{aligned}\vec{T} &= -\hat{\xi}^t \sigma \xi \\ \vec{N} &= \frac{1}{2}(\xi^t \sigma \xi - \hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi}) \\ \vec{B} &= \frac{-i}{2}(\xi^t \sigma \xi + \hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi})\end{aligned}\tag{4.2}$$

şeklinde elde edilmiştir (Erişir ve Kardağ, 2019).

Şimdi yukarıda bahsedilen (α) eğrisi ile aynı yay parametresine sahip (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ göz önüne alınsın. Ek olarak, (β) ardıl eğrisinin Frenet vektörleri $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ olsun. Burada, $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$, $\{\vec{N}_1, \vec{B}_1, \vec{T}_1\}$ ve $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet çatılarına farklı spinorlar karşılık gelir. Şimdi, ilk olarak, (β) ardıl eğrisinin $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet vektörlerine bir ϕ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda, $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet çatısının spinor denklemleri

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 + i\vec{T}_1 &= \phi^t \sigma \phi \\ \vec{N}_1 &= -\hat{\phi}^t \sigma \phi\end{aligned}\tag{4.3}$$

olarak alınabilir. O halde, Denk. 4.3 göz önüne alınarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 4.1. $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi ile aynı yay parametresine sahip (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi olsun. Bu durumda (β) ardıl eğrisinin $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet üçlüsüne karşılık gelen spinor ϕ olmak üzere (β) ardıl eğrisinin $\{\kappa_1, \tau_1\}$ Frenet eğrilikleri tek bir spinor denklemi olarak

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\tau_1 - i\kappa_1}{2} \hat{\phi}\tag{4.4}$$

şeklinde yazılır.

İspat: (α) eğrisinin ardıl eğrisi (β) eğrisinin $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet üçlüsüne karşılık gelen spinor ϕ olsun. O halde $\{\phi, \hat{\phi}\}$ spinorlar ikilisi spinor uzayı için bir taban teşkil ettiğinden

$\frac{d\phi}{ds}$ spinoru

$$\frac{d\phi}{ds} = f\phi + g\hat{\phi}\tag{4.5}$$

şeklinde yazılabilir. Burada f ve g fonksiyonları keyfi kompleks değerli fonksiyonlardır. O halde Denk. 4.3’de verilen $\vec{B}_1 + i\vec{T}_1$ kompleks vektörünün (β) ardıl eğrisinin $s \in I$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{B}_1}{ds} + i \frac{d\vec{T}_1}{ds} = \frac{d\phi^t}{ds} \sigma\phi + \phi^t \sigma \frac{d\phi}{ds}$$

eşitliği elde edilir. Burada Denk. 2.1’deki Frenet türev formülleri ve Denk. 4.5’deki $\frac{d\phi}{ds} = f\phi + g\hat{\phi}$ spinoru göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (-\tau_1 + i\kappa_1)\vec{N}_1 &= (f\phi + g\hat{\phi})^t \sigma\phi + \phi^t \sigma(f\phi + g\hat{\phi}) \\ &= f\phi^t \sigma\phi + g\hat{\phi}^t \sigma\phi + f\phi^t \sigma\phi + g\phi^t \sigma\hat{\phi} \end{aligned}$$

denklemini bulunur. Ayrıca, Önerme 3.1’de verilen $\phi^t \sigma\hat{\phi} = \hat{\phi}^t \sigma\phi$ eşitliğinden

$$(-\tau_1 + i\kappa_1)\vec{N}_1 = 2f(\phi^t \sigma\phi) + 2g(\hat{\phi}^t \sigma\phi)$$

denklemini elde edilir. Son olarak, Denk. 4.3’deki $\vec{B}_1 + i\vec{T}_1 = \phi^t \sigma\phi$ ve $\vec{N}_1 = -\hat{\phi}^t \sigma\phi$ eşitlikleri kullanılırsa f ve g fonksiyonları

$$f = 0 \text{ ve } g = \frac{\tau_1 - i\kappa_1}{2}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, Denk. 4.5’de f ve g fonksiyonları yerine yazılırsa

$$\frac{d\phi}{ds} = \left(\frac{\tau_1 - i\kappa_1}{2} \right) \hat{\phi}$$

spinor denklemini elde edilir. Böylece (β) ardıl eğrisinin κ_1 ve τ_1 , sırasıyla, eğrilik ve burulması tek bir spinor denklemini olarak ifade edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 4.2. $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında aynı yay parametresine sahip (α) ve (β) eğrileri sırasıyla (I, α) , (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. (β) eğrisi (α)

eğrisinin bir ardıl eğrisi olmak üzere (β) eğrisinin $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet vektörlerinin spinor denklemleri

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \frac{1}{2}(\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \\ \vec{T}_1 &= \frac{-i}{2}(\phi^t \sigma \phi + \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \\ \vec{N}_1 &= -\hat{\phi}^t \sigma \phi\end{aligned}\tag{4.6}$$

şeklindedir.

İspat: (β) eğrisi (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi olsun. (β) ardıl eğrisinin $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet vektörlerine ϕ spinoru karşılık gelmek üzere Denk. 4.3'den $\vec{B}_1 + i\vec{T}_1 = \phi^t \sigma \phi$ spinor denklemini göz önüne alınsın. O halde Denk. 4.3'deki bu denklemden görüldüğü üzere

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \text{Re}(\phi^t \sigma \phi) \\ \vec{T}_1 &= \text{Im}(\phi^t \sigma \phi)\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla buradan

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= \frac{-i}{2}(\phi^t \sigma \phi - \overline{\phi^t \sigma \phi}) \\ \vec{B}_1 &= \frac{1}{2}(\phi^t \sigma \phi + \overline{\phi^t \sigma \phi})\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca, Önerme 3.1'den $\overline{\phi^t \sigma \xi} = -\hat{\phi}^t \sigma \hat{\xi}$ olduğu göz önüne alınırsa $\vec{T}_1$ ve $\vec{B}_1$ Frenet vektör alanlarının spinor denklemleri

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= \frac{-i}{2}(\phi^t \sigma \phi + \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \\ \vec{B}_1 &= \frac{1}{2}(\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi})\end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerçekten de (β) ardıl eğrisi birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\vec{T}_1 = \vec{\beta}' = \frac{-i}{2}(\phi^t \sigma \phi + \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \quad (4.7)$$

denklemini göz önüne alınırsa Denk. 4.7'nin $s \in I$ yay parametresine göre türevi alınır

$$\vec{\beta}'' = \frac{-i}{2} \left(\frac{d\phi^t}{ds} \sigma \phi + \phi^t \sigma \frac{d\phi}{ds} + \left(\frac{d\hat{\phi}}{ds} \right)^t \sigma \hat{\phi} + \hat{\phi}^t \sigma \left(\frac{d\hat{\phi}}{ds} \right) \right)$$

denklemini elde edilir. Burada Denk. 4.4'deki $\frac{d\phi}{ds} = \frac{\tau_1 - i\kappa_1}{2} \hat{\phi}$ spinor denklemi yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılır

$$\vec{\beta}'' = \frac{-i}{2} \left[\left(\frac{\tau_1 - i\kappa_1}{2} \right) (\hat{\phi}^t \sigma \phi + \phi^t \sigma \hat{\phi}) - \left(\frac{\tau_1 + i\kappa_1}{2} \right) (\phi^t \sigma \hat{\phi} + \hat{\phi}^t \sigma \phi) \right]$$

bulunur. Ayrıca Önerme 3.1'den $\hat{\phi}^t \sigma \phi = \phi^t \sigma \hat{\phi}$ olduğu kullanılırsa son denklem

$$\vec{\beta}'' = -\kappa_1 \hat{\phi}^t \sigma \phi \quad (4.8)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan Denk. 2.3'de verilen Frenet formüllerinden $\vec{\beta}'' = \kappa_1 \vec{N}_1$ ve Denk. 4.8 kullanılırsa

$$\vec{N}_1 = -\hat{\phi}^t \sigma \phi \quad (4.9)$$

elde edilir. Bu ise Denk. 4.3'ün ikinci denklemdir. Son olarak Denk. 4.9'un $s \in I$ yay parametresine göre türevi alınır ve Denk. 4.4'deki $\frac{d\phi}{ds} = \frac{\tau_1 - i\kappa_1}{2} \hat{\phi}$ spinor türev denklemi kullanılırsa

$$\vec{N}_1' = -\left(\frac{d\hat{\phi}}{ds} \right)^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \frac{d\phi}{ds}$$

ve

$$\vec{N}_1' = \left(\frac{\tau_1 + i\kappa_1}{2} \right) \phi^t \sigma \phi - \left(\frac{\tau_1 - i\kappa_1}{2} \right) \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}$$

eşitliği bulunur. Son olarak, Denk. 2.6'da verilen Frenet türev formüllerinden

$\vec{N}_1 = -\kappa_1 \vec{T}_1 + \tau_1 \vec{B}_1$ olduğu dikkate alınır ve Denk. 4.7 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tau_1 \vec{B}_1 &= \left(\frac{\tau_1 + i\kappa_1}{2}\right)\phi^t \sigma \phi - \left(\frac{\tau_1 - i\kappa_1}{2}\right)\hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi} - \frac{i\kappa}{2}(\phi^t \sigma \phi + \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \\ \tau_1 \vec{B}_1 &= \frac{\tau_1}{2}(\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \\ \vec{B}_1 &= \frac{1}{2}(\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi})\end{aligned}\tag{4.10}$$

denklemini bulunur. Böylece ispat biter.

Şimdi $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet vektörlerinin bileşenleri spinorlar cinsinden ifade edilsin. O halde Denk. 4.6'daki $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ çatısının spinor denklemleri göz önüne alınırsa $\phi^t \sigma \phi$ spinor denklemleri için

$$\begin{aligned}\phi^t \sigma_1 \phi &= \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \phi_1^2 - \phi_2^2 \\ \phi^t \sigma_2 \phi &= \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = i(\phi_1^2 + \phi_2^2) \\ \phi^t \sigma_3 \phi &= \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -2\phi_1 \phi_2\end{aligned}\tag{4.11}$$

denklemleri elde edilir. Burada $\sigma_i, i=1,2,3$ matrisleri Denk. 3.12'de verilen matrislerdir.

Benzer şekilde $\hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}$ spinor denklemleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\hat{\phi}^t \sigma_1 \hat{\phi} &= \begin{pmatrix} -\bar{\phi}_2 & \bar{\phi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_1 \end{pmatrix} = \bar{\phi}_2^2 - \bar{\phi}_1^2 \\ \hat{\phi}^t \sigma_2 \hat{\phi} &= \begin{pmatrix} -\bar{\phi}_2 & \bar{\phi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_1 \end{pmatrix} = i(\bar{\phi}_2^2 + \bar{\phi}_1^2) \\ \hat{\phi}^t \sigma_3 \hat{\phi} &= \begin{pmatrix} -\bar{\phi}_2 & \bar{\phi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_1 \end{pmatrix} = 2\bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2\end{aligned}\tag{4.12}$$

bulunur. O halde Denk. 4.6, 4.11 ve 4.12'den

$$\begin{aligned}
\vec{B}_1 &= \frac{1}{2} \left(\phi_1^2 - \phi_2^2 - \overline{\phi_2^2} + \overline{\phi_1^2}, i(\phi_1^2 + \phi_2^2 - \overline{\phi_1^2} - \overline{\phi_2^2}), -2\phi_1\phi_2 - 2\overline{\phi_1\phi_2} \right) \\
\vec{T}_1 &= \frac{-i}{2} \left(\phi_1^2 - \phi_2^2 + \overline{\phi_2^2} - \overline{\phi_1^2}, i(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \overline{\phi_1^2} + \overline{\phi_2^2}), -2\phi_1\phi_2 + 2\overline{\phi_1\phi_2} \right) \\
\vec{N}_1 &= \left(\phi_1\overline{\phi_2} + \overline{\phi_1}\phi_2, i(\phi_1\overline{\phi_2} - \overline{\phi_1}\phi_2), |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (β) ardıl eğrisinin Darboux ani dönme ekseninin spinor denklemi elde edilsin. O halde aşağıdaki teorem ve sonuç verilebilir.

Teorem 4.3. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin bu eğri ile aynı yay parametresine sahip bir ardıl eğrisi $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi olsun. O halde, (β) ardıl eğrisinin Darboux dönme eksenini $\vec{D}_1$ olmak üzere

$$\vec{D}_1 = \frac{\kappa}{2} \left[e^{-i\theta} \phi^t \sigma \phi - e^{i\theta} \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi} \right]$$

dır. Burada ϕ , (β) ardıl eğrisine karşılık gelen spinordur.

İspat: (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi olan (β) eğrisinin $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ çatısına ϕ spinoru karşılık gelsin. O halde $\vec{D}_1$, (β) ardıl eğrisinin Darboux vektörü olmak üzere Denk. 2.7 gereği

$$\vec{D}_1 = \tau_1 \vec{T}_1 + \kappa_1 \vec{B}_1$$

yazılabilir. Burada Denk. 4.6 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\vec{D}_1 &= \frac{-i\tau_1}{2} \left(\phi^t \sigma \phi + \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi} \right) + \frac{\kappa_1}{2} \left(\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[(\kappa_1 - i\tau_1) \phi^t \sigma \phi - (\kappa_1 + i\tau_1) \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi} \right]
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada ϕ , $\vec{B}$ ve $\vec{B}_1$ binormal vektörleri arasındaki açı olmak üzere Denk. 3.2'den $\kappa_1 = \kappa \cos \theta$, $\tau_1 = \kappa \sin \theta$ olduğu dikkate alınırsa son denklemden

$$\vec{D}_1 = \frac{\kappa}{2} \left[e^{-i\theta} \phi^t \sigma \phi - e^{i\theta} \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi} \right]$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3 yardımıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1. $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi aynı yay parametresine sahip $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin bir ardıl eğrisi olmak üzere (α) eğrisinin Frenet sistemi $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \kappa, \tau\}$ ve (β) ardıl eğrisinin ardıl sistemi $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1, \kappa_1, \tau_1\}$ olsun. Bu durumda $\vec{D}_1$, (β) ardıl eğrisinin Darboux vektörünün spinor denklemi

$$\vec{D}_1 = -\frac{i\kappa}{2} \left(\xi^t \sigma \xi + \hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi} \right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ξ spinoru (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet çatısına karşılık gelen spinordur.

İspat: (α) eğrisinin $\vec{B}$ binormal vektör alanının spinor denklemi için Denk. 4.2'den

$$\vec{B} = -\frac{i}{2} \left(\xi^t \sigma \xi + \hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi} \right) \text{ olduğu biliniyor. Burada } \xi \text{ spinoru } (\alpha) \text{ eğrisinin } \{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$$

Frenet çatısına karşılık gelmektedir. Dolayısıyla, (β) ardıl eğrisinin Darboux vektörü Denk. 3.5'de $\vec{D}_1 = \kappa \vec{B}$ olduğundan kolayca

$$\vec{D}_1 = -\frac{i\kappa}{2} \left(\xi^t \sigma \xi + \hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi} \right)$$

olduğu görülür. Burada κ , (α) eğrisinin eğriliğidir. Böylece ispat biter.

Şimdi (α) eğrisi ile (β) ardıl eğrisine sırasıyla karşılık gelen ξ ve ϕ spinorları arasındaki ilişki elde edilsin. O halde aşağıdaki teorem verilebilir

Teorem 4.4. $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrileri aynı yay parametresine sahip birim hızlı eğriler olsun.

(β) , (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi olmak üzere (α) eğrisinin Frenet vektörleri $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$

Frenet üçlüsüne ξ spinoru ve (β) ardıl eğrisinin $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet üçlüsüne ϕ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda bu spinorlar arasında

$$\xi = \pm e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2})} \phi \quad (4.14)$$

ilişkisi vardır.

İspat: (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet çatısına karşılık gelen spinor ξ ve (β) ardıl eğrisinin $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet çatısına karşılık gelen spinor ϕ olsun. Bu durumda $\vec{B}$ ve $\vec{B}_1$ binormal vektör alanları arasındaki açı ϑ olmak üzere Denk. 3.1'den

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= -\cos \vartheta \vec{N} + \sin \vartheta \vec{B} \\ \vec{B}_1 &= \sin \vartheta \vec{N} + \cos \vartheta \vec{B} \end{aligned} \quad (4.15)$$

olduğu biliniyor. O halde, $\vec{B}_1 + i\vec{T}_1 \in \mathbb{C}^3$ kompleks vektörü

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 + i\vec{T}_1 &= \sin \vartheta \vec{N} + \cos \vartheta \vec{B} + i(-\cos \vartheta \vec{N} + \sin \vartheta \vec{B}) \\ &= -i(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \vec{N} + (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \vec{B} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\vec{B}_1 + i\vec{T}_1 = -ie^{i\vartheta}(\vec{N} + i\vec{B}) \quad (4.16)$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan Denk. 2.1'de verilen Euler formülü göz önüne alınırsa $-ie^{i\vartheta}$ yerine $e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2})}$ yazılabilir. Dolayısıyla bu formül göz önüne alınarak Denk. 4.1'deki $\vec{N} + i\vec{B} = \xi^t \sigma \xi$ ve Denk. 4.3'deki $\vec{B}_1 + i\vec{T}_1 = \phi^t \sigma \phi$ eşitlikleri Denk. 4.16'da yerine yazılırsa

$$\xi^t \sigma \xi = e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2})} \phi^t \sigma \phi \quad (4.17)$$

denklemini bulunur. Burada $\xi^t \sigma \xi$ ve $\phi^t \sigma \phi$ spinor denklemlerinin bileşenlerinin

$$\begin{aligned}\xi^t \sigma \xi &= (\xi_1^2 - \xi_2^2, i(\xi_1^2 + \xi_2^2), -2\xi_1 \xi_2) \\ \phi^t \sigma \phi &= (\phi_1^2 - \phi_2^2, i(\phi_1^2 + \phi_2^2), -2\phi_1 \phi_2)\end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \pm e^{i(\frac{\pi-\vartheta}{2})} \phi_1 \\ \xi_2 &= \pm e^{i(\frac{\pi-\vartheta}{2})} \phi_2\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla

$$\xi = \pm e^{i(\frac{\pi-\vartheta}{2})} \phi$$

eşitliği bulunur. Burada ξ ve $-\xi$ aynı $\vec{N} + i\vec{B}$ vektörüne karşılık gelirken ϕ ve $-\phi$ aynı $\vec{B}_1 + i\vec{T}_1$ vektörüne karşılık gelir. Böylece ispat biter.

Şimdi Teorem 4.4 gereği aşağıdaki geometrik yorum verilebilir.

Sonuç 4.2. (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi (β) eğrisi olmak üzere $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ ve $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet çatıları, sırasıyla, (α) ve (β) eğrilerinin Frenet çatıları olsun. Ayrıca, ξ ve ϕ spinorları, sırasıyla, (α) ve (β) eğrilerinin bu çatılarına karşılık gelsin. Bu durumda $\vec{B}$ ve $\vec{B}_1$ binormal vektör alanları arasındaki açı $\mathcal{G}$ ise ξ ve ϕ spinorları arasındaki açı $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mathcal{G}}{2}\right)$ 'dir.

Denk. 4.14'de verilen $\xi = \pm e^{i(\frac{\pi-\vartheta}{2})} \phi$ denkleminde benzer olarak ξ ve ϕ spinorları arasındaki aşağıdaki sonuç açıktır.

Sonuç 4.3. ξ ve ϕ spinorları, sırasıyla, (α) eğrisi ile (β) ardıl eğrisine karşılık gelsin. O halde, bu spinorlar arasında

$$\xi = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{-i\frac{\mathcal{G}}{2}} \phi$$

ilişkisi vardır.

İspat: ξ ve ϕ spinorları için Denk. 4.14’de verilen $e^{i\left(\frac{\pi-\vartheta}{4}\right)}$ ifadesi göz önüne alınsın.

$e^{i\left(\frac{\pi-\vartheta}{4}\right)}$ Euler formülünde trigonometrik toplam fark formülleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} e^{i\left(\frac{\pi-\vartheta}{4}\right)} &= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\vartheta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\vartheta}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} + i \cos \frac{\vartheta}{2} - i \sin \frac{\vartheta}{2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Denk. 4.14’de son denklem göz önüne alınırsa

$$\xi = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \phi$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.5. $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin bir ardıl eğrisi olmak üzere ξ ve ϕ spinorları, sırasıyla, (α) ve (β) eğrilerine karşılık gelsin. Bu durumda ξ ve ϕ spinorlarının eşleri arasında

$$\hat{\phi} = \pm e^{i\left(\frac{\pi-\vartheta}{4}\right)} \hat{\xi} \quad (4.18)$$

ilişkisi vardır.

İspat: ξ ve ϕ spinorları, sırasıyla, (α) eğrisi ve (β) ardıl eğrisine karşılık gelsin. Ayrıca ξ ve ϕ spinorlarının eşleri, sırasıyla, $\hat{\xi}$ ve $\hat{\phi}$ olsun. Bu durumda Denk. 4.14’ün her iki tarafının eşi alınırsa

$$\hat{\xi} = \pm \left(e^{i\left(\frac{\pi-\vartheta}{4}\right)} \phi \right)^\wedge$$

elde edilir. Burada Önerme 3.1'den $(\lambda\phi + \mu\xi)^\wedge = \bar{\lambda}\hat{\phi} + \bar{\mu}\hat{\xi}$ olduğu göz önüne alınırsa son denklemden

$$\hat{\xi} = \pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)} \hat{\phi}$$

denklemini elde edilir. Ayrıca, burada $e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)} = e^{-i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)}$ olduğu dikkate alınırsa ξ ve ϕ spinorlarının eşleri arasındaki ilişki

$$\hat{\phi} = \pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)} \hat{\xi}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat biter.

Teorem 4.5'den, ξ ve ϕ spinorlarının eşleri için aşağıdaki geometrik yorum verilebilir.

Sonuç 4.4. ξ ve ϕ spinorları, sırasıyla, (α) eğrisi ve (α) eğrisinin ardıl eğrisi olan (β) eğrisine karşılık gelsin. Bu durumda ϕ spinoru ξ spinoruna $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)$ açı ile dönerken $\hat{\phi}$ spinoru $\hat{\xi}$ spinoruna aynı açı ile ters yönde bir dönme yapar.

Şimdi ξ ve ϕ spinorlarının türevleri ile ilgili bazı teoremler aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 4.6. $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrileri aynı $s \in I$ yay parametresine sahip birim hızlı eğriler olmak üzere (β) , (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi olsun. Bu durumda ξ ve ϕ spinorları, sırasıyla, (α) ve (β) eğrilerine karşılık gelmek üzere $\frac{d\phi}{ds}$ spinoru

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm \frac{\kappa}{2} e^{i\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \hat{\xi}$$

şeklinde yazılabilir. Burada κ , (α) eğrisinin eğriliğidir.

İspat: ϕ spinoru (β) ardıl eğrisinin $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ üçlüsüne karşılık gelmek üzere Denk. 4.4'den

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\tau_1 - i\kappa_1}{2} \hat{\phi}$$

olduğu biliniyor. Ayrıca Denk. 3.2'den (α) ve (β) eğrilerinin eğrilik ve burulmaları arasındaki ilişkiden $\kappa_1 = \kappa \cos \vartheta$ ve $\tau_1 = \kappa \sin \vartheta$ olduğu göz önüne alınırsa son denklemden

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\kappa \sin \vartheta - i\kappa \cos \vartheta}{2} \hat{\phi}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{-i\kappa}{2} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \hat{\phi} \quad (4.19)$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{-i\kappa}{2} e^{i\vartheta} \hat{\phi}$$

olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan Denk. 4.14, Denk. 4.19'da yerine yazılır ve

$-ie^{i\vartheta} = e^{i(\vartheta - \frac{\pi}{2})}$ eşitliği kullanılırsa

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm \frac{\kappa}{2} e^{i(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4})} \hat{\xi}$$

bulunur. Böylece ispat biter.

Teorem 4.7. ξ ve ϕ spinorları, sırasıyla, (α) eğrisi ile (β) ardıl eğrisine karşılık gelsin.

Bu durumda, ξ spinorunun $\frac{d\xi}{ds}$ türevi ϕ spinoru cinsinden

$$\frac{d\xi}{ds} = \pm e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2})} \left(\frac{d\phi}{ds} - i \frac{\vartheta'}{2} \phi \right)$$

şeklinde yazılır. Burada $\frac{d\vartheta}{ds} = \vartheta' = \tau$, (α) eğrisinin burulmasıdır.

İspat: ξ spinoru (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet çatısına karşılık gelmek üzere Denk.

3.15'den

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{2}(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi})$$

olduğu biliniyor. Bu denklemde Denk. 4.14 ve 4.18 göz önüne alınırsa

$$\frac{d\xi}{ds} = \pm \frac{1}{2} \left(-i\tau e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)} \phi + 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)} \frac{d\phi}{ds} \right)$$

ve

$$\frac{d\xi}{ds} = \pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)} \left(\frac{-i\tau}{2} \phi + \frac{d\phi}{ds} \right)$$

bulunur. Son olarak Denk. 3.4'de $\tau = \vartheta' = \frac{d\vartheta}{ds}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{d\xi}{ds} = \pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)} \left(\frac{d\phi}{ds} - i \frac{\vartheta'}{2} \phi \right)$$

bulunur. Böylece ispat biter.

4.2. Ardıl Eğrilerin Helis Eğrisi Olması Durumunda Spinor Gösterimi

Bu bölümde, $\mathbb{E}^3$ üç boyutlu Öklid Uzayında alınan birim hızlı bir (α) eğrisinin (β) ardıl eğrisi helis eğrisi olması durumu incelenmiştir. Bu durumda (β) ardıl helis eğrisinin spinor gösterimi için aşağıdaki teorem ve sonuçlar verilebilir.

Teorem 4.8. (α) eğrisinin (β) ardıl eğrisi $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1, \kappa_1, \tau_1\}$ ardıl sistemine sahip olsun.

Ayrıca, (β) ardıl eğrisinin $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ çatısına bir ϕ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda

(β) ardıl eğrisi helis eğrisidir gerek ve yeter şart $\vec{U}$ sabit vektörünün spinor denklemi

$$\vec{U} = \frac{1}{2} \left(e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} \phi^t \sigma \phi + e^{-i(\theta - \frac{\pi}{2})} \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi} \right) \quad (4.20)$$

şeklindedir. Öyle ki, $\theta = \arccos \langle \vec{T}_1, \vec{U} \rangle$ sabit açısıdır.

İspat: ($\Rightarrow$): (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi (β), helis eğrisi olsun. Bu durumda, Tanım 3.2 gereği (β) ardıl eğrisinin $\vec{T}_1$ teğet vektörü sabit bir $\vec{U}$ vektörü ile sabit θ açısı yapar.

Dolayısıyla, Denk. 3.8'den

$$\vec{U} = \cos \theta \vec{T}_1 - \sin \theta \vec{B}_1$$

yazılabilir. Buradan Denk. 4.6 gereği

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= -\frac{i}{2} (\phi^t \sigma \phi + \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \\ \vec{B}_1 &= \frac{1}{2} (\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \end{aligned}$$

olduğundan $\vec{U}$ vektörü

$$\vec{U} = \frac{1}{2} \left[(-i \cos \theta + \sin \theta) \phi^t \sigma \phi + (-i \cos \theta - \sin \theta) \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi} \right]$$

olur ve bu denklem düzenlenirse

$$\vec{U} = -\frac{i}{2} \left[e^{i\theta} \phi^t \sigma \phi + e^{-i\theta} \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi} \right]$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, $-e^{i\theta} = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\vec{U} = \frac{1}{2} \left(e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} \phi^t \sigma \phi + e^{-i(\theta - \frac{\pi}{2})} \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi} \right)$$

bulunur.

($\Leftarrow$): (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi (β)'ya bir ϕ spinoru karşılık gelsin. Ayrıca, $\vec{U}$ sabit bir vektör olmak üzere

$$\vec{U} = \frac{1}{2} \left(e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} \phi^t \sigma \phi + e^{-i(\theta - \frac{\pi}{2})} \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi} \right)$$

olarak göz önüne alınsın. burada $\theta = \text{sabit}$ dir. Bu durumda, $\vec{T}_1 = \frac{-i}{2} (\phi^t \sigma \phi + \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi})$ olmak

üzere $\langle \vec{T}_1, \vec{U} \rangle$ hesaplanırsa

$$\langle \vec{T}_1, \vec{U} \rangle = -\frac{1}{4} \left[\begin{aligned} & \left(e^{i\theta} (\phi_1^2 - \phi_2^2) + e^{-i\theta} (-\bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2) \right) \cdot (\phi_1^2 - \phi_2^2 + \bar{\phi}_2^2 - \bar{\phi}_1^2) \\ & - \left(e^{i\theta} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + e^{-i\theta} (\bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2) \right) \cdot (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2) \\ & + (-2\phi_1\phi_2 + \bar{\phi}_1\bar{\phi}_2) \cdot (-2e^{i\theta}\phi_1\phi_2 + 2e^{-i\theta}\bar{\phi}_1\bar{\phi}_2) \end{aligned} \right]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \vec{T}_1, \vec{U} \rangle &= \frac{1}{2} (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ &= \cos \theta (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada ϕ spinoru $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet birim vektörlerine karşılık geldiği için $\bar{\phi}^t \phi = 1$ olup $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = 1$ dir. Dolayısıyla

$$\langle \vec{T}_1, \vec{U} \rangle = \cos \theta$$

dır. Dolayısıyla, (β) ardıl eğrisinin $\vec{T}_1$ teğet vektörü sabit bir $\vec{U}$ vektörü ile sabit açı yaptığından (β) ardıl eğrisi bir helis eğrisidir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Teorem 4.8'den $\vec{U}$ sabit vektörü için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.5 (α) eğrisinin (β) ardıl eğrisi helis eğrisi olsun. O halde (α) eğrisine karşılık gelen spinor ξ olmak üzere $\vec{U}$ vektörünün spinor denklemi

$$\vec{U} = \frac{1}{2} \left[-e^{i(\theta+\vartheta)} \xi^t \sigma_\xi + e^{-i(\theta+\vartheta)} \hat{\xi}^t \sigma_{\hat{\xi}} \right] \quad (4.21)$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: (α) eğrisinin (β) ardıl eğrisi bir helis eğrisi olmak üzere $\langle \vec{T}_1, \vec{U} \rangle = \cos \theta = \text{sabit}$ olacak şekilde sabit θ açısı vardır. Denk. 4.20'den

$$\vec{U} = \frac{1}{2} \left(e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} \phi^t \sigma_\phi + e^{-i(\theta-\frac{\pi}{2})} \hat{\phi}^t \sigma_{\hat{\phi}} \right)$$

ve Denk. 4.17'den

$$\phi^t \sigma_\phi = e^{i(\vartheta-\frac{\pi}{2})} \xi^t \sigma_\xi$$

olmak üzere her iki tarafın eşleniği alınırsa

$$\hat{\phi}^t \sigma_{\hat{\phi}} = e^{-i(\vartheta-\frac{\pi}{2})} \hat{\xi}^t \sigma_{\hat{\xi}}$$

olduğu biliniyor. Dolayısıyla, $\vec{U}$ vektörü

$$\vec{U} = \frac{1}{2} \left[e^{i(\theta+\vartheta-\pi)} \xi^t \sigma_\xi + e^{i(\pi-(\theta+\vartheta))} \hat{\xi}^t \sigma_{\hat{\xi}} \right]$$

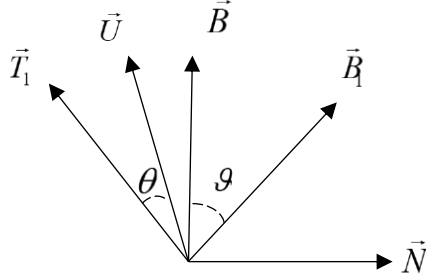
şeklinde yazılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\vartheta-\pi)} &= -e^{i(\theta+\vartheta)} \\ e^{i(\pi-(\theta+\vartheta))} &= e^{-i(\theta+\vartheta)} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\vec{U} = \frac{1}{2} \left[-e^{i(\theta+\vartheta)} \xi^t \sigma_\xi + e^{-i(\theta+\vartheta)} \hat{\xi}^t \sigma_{\hat{\xi}} \right]$$

bulunur. Burada, Teorem 3.4 gereği (β) ardıl helis eğrisidir gerek ve yeter şart (α) düzlemsel eğridir. Dolayısıyla $\tau = 0 = \mathcal{G}' = 0$ olup θ ve $\mathcal{G}$ sabit açılardır.



Şekil 4.1. θ ve $\mathcal{G}$ açıları

Ayrıca θ ve $\mathcal{G}$ sabit açıları için Şekil 4.1 çizilebilir. Böylece ispat biter.

Şimdi Denk. 3.15'de verilen

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{2}(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi})$$

denklemini göz önüne alınsın. Burada, (β) ardıl eğrisinin bir helis eğrisi olduğu göz önüne alınırsa (α) eğrisi düzlemsel olup $\tau = 0$ dır. O halde, açıkça aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.6. (β) , (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi helis eğrisi olmak üzere (α) eğrisine bir ξ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda $\frac{d\xi}{ds}$ spinoru için

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\kappa}{2}\hat{\xi} \quad (4.22)$$

eşitliği yazılabilir.

Sonuç 4.7. (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi (β) ve (β) ardıl eğrisi helis eğrisi olmak üzere ϕ spinoru (β) ardıl eğrisine karşılık gelsin. Bu durumda,

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\tau_1}{2 \cos \theta} e^{-i\theta} \hat{\phi} \quad (4.23)$$

spinor eşitliği vardır.

İspat: (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi (β) ve (β) ardıl eğrisi helis eğrisi olsun. Bu durumda, Denk. 3.8 gereği $\frac{\kappa_1}{\tau_1} = \tan \theta = \text{sabit}$ olur. Dolayısıyla,

$$\kappa_1 = \tan \theta \tau_1 \quad (4.24)$$

yazılabilir. O halde Denk. 4.24, Denk. 4.4'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds} &= \frac{\tau_1 - i \tan \theta \tau_1}{2} \hat{\phi} \\ &= \frac{\tau_1}{2} \left(1 - \frac{i \sin \theta}{\cos \theta} \right) \hat{\phi} \\ &= \frac{\tau_1}{2 \cos \theta} (\cos \theta - i \sin \theta) \hat{\phi} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\tau_1}{2 \cos \theta} e^{-i\theta} \hat{\phi}$$

bulunur. Böylece ispat biter.

Sonuç 4.8. (α) eğrisi ile (β) ardıl eğrisinin spinor karşılıkları, sırasıyla, ξ ve ϕ olsun.

Bu durumda, (β) bir helis eğrisi olmak üzere $\frac{d\xi}{ds}$ ve $\frac{d\phi}{ds}$ spinorları arasında

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm \frac{\sin \vartheta}{\cos \theta} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2} - \theta\right)} \frac{d\xi}{ds}$$

ilişkisi vardır.

İspat: (α) eğrisi ile (α) eğrisinin (β) ardıl eğrisine, sırasıyla, ξ ve ϕ spinorları karşılık gelsin. Bu durumda, Denk. 4.23 göz önüne alınırsa

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm \frac{\tau_1}{2 \cos \theta} e^{-i\theta} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \hat{\xi}$$

ve $\tau_1 = \kappa \sin \theta$ olduğundan

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm \frac{\sin \theta}{\cos \theta} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} - \theta\right)} \frac{d\xi}{ds}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.1. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi $\alpha(s) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos s, \frac{2}{\sqrt{5}} \sin s, \frac{s}{\sqrt{5}} \right)$ olarak göz önüne alınsın. O halde, Denk. 2.5 kullanılırsa birim hızlı (α) eğrisinin $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \vec{T}(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}} (-2 \sin s, 2 \cos s, 1) \\ \vec{N}(s) &= (-\cos s, -\sin s, 0) \\ \vec{B}(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\sin s, -\cos s, 2) \end{aligned} \tag{4.25}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca Denk. 2.3 göz önüne alınarak gerekli işlemler yapıldığında (α) eğrisinin κ ve τ Frenet eğrilikleri

$$\kappa = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ ve } \tau = \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{4.26}$$

olarak elde edilir.

Şimdi (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet üçlüsüne bir ξ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda Denk. 3.13 ve Denk. 4.25 göz önüne alınarak gerekli işlemler yapıldığında ξ spinorunun ξ_1, ξ_2 bileşenleri

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}} i e^{\frac{-is}{2}} \\ \xi_2 &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}} e^{\frac{is}{2}}\end{aligned}\quad (4.27)$$

olarak bulunur. Son olarak $\frac{d\xi}{ds}$ ifadesi için Denk. 3.15'den $\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{2}(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi})$ eşitliğinde Denk. 4.26'da bulunan κ ve τ değerleri yerine yazılırsa

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-i\xi + 2\hat{\xi})$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi birim hızlı (α) eğrisinin ardıl eğrisi (β) eğrisi olsun. O halde, ardıl eğriler tanımı gereği (α) eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$, (β) eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ olmak üzere aralarında $\vec{T} = \vec{N}_1$ ilişkisi vardır. O halde (β) eğrisinin $\vec{N}_1$ normal vektör alanı

$$\vec{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\sin s, 2\cos s, 1)$$

olarak yazılır. Ayrıca Denk. 3.1'den

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= -\cos \vartheta \vec{N} + \sin \vartheta \vec{B} \\ \vec{B}_1 &= \sin \vartheta \vec{N} + \cos \vartheta \vec{B}\end{aligned}$$

dir. Burada $\tau = \vartheta' = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ olduğundan

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{5}}s + c$$

bulunur. O halde ϑ , Denk. 3.1'de yerine yazılırsa

$$\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right)\cos s + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right)\sin s, \\ \cos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right)\sin s - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right)\cos s, \\ \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right)\cos s + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right)\sin s, \\ -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right)\sin s - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right)\cos s, \\ \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, Denk. 3.2 göz önüne alındığında $\kappa_1 = \kappa \cos \vartheta$ ve $\tau_1 = \kappa \sin \vartheta$ olduğundan (β) eğrisinin Frenet eğrilikleri

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{2}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right) \\ \tau_1 &= \frac{2}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s + c\right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

olarak bulunur.

Şimdi (β) ardıl eğrisine karşılık gelen spinor ϕ olsun. Denklem 4.14 ve 4.27 göz önüne alınırsa ϕ spinoru

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta-s}{2}\right)} \\ \phi_2 &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta+s}{2}\right)} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{5}}s + c$ 'dir. Son olarak Denk. 4.4 ve Denk. 4.28 göz önüne

alınırsa (β) ardıl eğrisinin Frenet denklemleri tek bir spinor formülü sayesinde

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\sin \left(\frac{1}{\sqrt{5}} s + c \right) - 2i \cos \left(\frac{1}{\sqrt{5}} s + c \right) \right) \hat{\phi}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.2. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ şeklindeki verilen birim hızlı (α) eğrisinin bir ardıl eğrisi

$\beta = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ olacak şekilde helis eğrisi olarak göz önüne alınsın. Bu

durumda (α) eğrisinin Frenet sistemi $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \kappa, \tau\}$, (β) eğrisinin ardıl sistemi

$\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1, \kappa_1, \tau_1\}$ olmak üzere; (β) ardıl helis eğrisinin Frenet vektörleri Denk. 2.5 göz

önüne alınarak

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right) \\ \vec{N}_1 &= \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ \vec{B}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

olarak bulunur. Ayrıca Denk. 2.3 göz önüne alınarak gerekli işlemler yapıldığında (β) ardıl helis eğrisinin κ_1, τ_1 Frenet eğrilikleri

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{2} \\ \tau_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.30)$$

olarak elde edilir. Gerçekten de $\frac{\tau_1}{\kappa_1} = 1 = \text{sabit}$ olduğundan (β) eğrisi bir helistir. Burada

$\frac{\tau_1}{\kappa_1} = \cot \theta = 1$ olduğundan $\theta = \frac{\pi}{4}$ alınabilir. Ayrıca, Teorem 3.4 gereği (α) eğrisinin

burulması

$$\tau = \mathcal{G}' = 0 \quad (4.31)$$

dır. Ek olarak, Denk. 3.2’de verilen $\kappa_1 = \kappa \cos \vartheta$ eşitliğinde Denk. 4.30 ve Denk. 4.31 yerine yazılırsa

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olarak bulunur. Şimdi (β) ardıl eğrisine karşılık gelen spinor ϕ olsun. Denklem 4.13 ve 4.29 göz önüne alınırsa ϕ spinorunun ϕ_1 ve ϕ_2 bileşenleri

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \pm \sqrt{\frac{1+i}{2\sqrt{2}}} e^{-i\frac{s}{2\sqrt{2}}} \\ \phi_2 &= \pm \sqrt{\frac{1+i}{2\sqrt{2}}} e^{i\frac{s}{2\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ardıl eğriler tanımından $\vec{T} = \vec{N}_1$ olduğundan (α) eğrisinin teğet vektör alanı

$$\vec{T} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

şeklinde bulunur. (α) eğrisi birim hızlı bir eğri olduğundan $\vec{T} = \alpha'(s)$ eşitliği vardır. O halde (α) eğrisi

$$\alpha(s) = \sqrt{2} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right)$$

olarak alınabilir. Denk. 2.5 göz önüne alınarak (α) eğrisinin normal vektör alanı ve binormal vektör alanı ise

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \left(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ \vec{B} &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi, (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet üçlüsüne bir ξ spinoru karşılık gelsin.

$\vec{N} + i\vec{B} = \left(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, i \right)$ olduğundan Denk. 3.13 göz önüne alınarak gerekli işlemler yapıldığında

$$\xi_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{s}{2\sqrt{2}}\right)}$$

$$\xi_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{s}{2\sqrt{2}}\right)}$$

olarak bulunur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde üç boyutlu Öklid uzayında ardıl eğrilerin spinor gösterimi incelenmiştir. Bunun için öncelikle üç boyutlu Öklid uzayında ardıl eğriler tanıtılmıştır. Daha sonra spinorlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir ve üç boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğrinin spinor formülasyonu incelenmiştir. Bu temel bilgilerden yola çıkılarak üç boyutlu Öklid uzayında verilen birim hızlı bir eğri ile bu eğrinin ardıl eğrisine spinorlar karşılık getirilerek ardıl eğrilerin spinor formülü elde edilmiştir. Ayrıca ardıl eğrilere karşılık gelen spinorlar arasındaki ilişkiler teoremlerle ifade edilmiştir. Ek olarak bazı geometrik yorumlar verilmiştir. Daha sonra, ardıl eğrilerin helis olması göz önüne alınarak bu durumda spinor denklemleri elde edilmiştir. Son olarak 2 tane örnek verilmiştir.

Bu tez çalışmasından yola çıkılarak Minkowski uzayında ardıl eğrilerin spinor gösterimleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Balcı, Y., Erişir, T. and Güngör, M. A. (2015) “Hyperbolic Spinor Darboux Equations of Spacelike Curves in Minkowski 3-Space”, *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, 28(4), 525-535.
- Bilinski, S. (1963) “Über eine Erweiterungsmöglichkeit der Kurventheorie”, *Monatshefte für Mathematik*, 67, 289–302.
- Cartan, É. (1966) “The Theory of Spinors”, *Dover Publications*, New York, 1-157.
- Delanghe, R., Sommen, F., Soucek, V. (1966) “Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions: A Function Theory for the Dirac Operator”, *Dover Publications*, New York.
- Erişir, T., Güngör, M. A. and Tosun, M. (2015) “Geometry of the Hyperbolic Spinors Corresponding to Alternative Frame”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(4), 799-810.
- Erişir, T., Kardag, N. C. (2019) “Spinor Representations of Involute Evolute Curves in $\mathbb{E}^3$ ”, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 148-155.
- Erişir, T. (2021) “On spinor Construction of Bertrand Curves”, *AIMS Mathematics*, 6(4), 3583-3591.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983) “Diferensiyel Geometri”, *Fen Fakültesi Yayınları*, Ankara Üniversitesi, Cilt I.
- Ketenci, Z., Erişir, T. and Güngör, M. A. (2015) “A Construction of Hyperbolic Spinors According to Frenet Frame in Minkowski Space”, *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 13(2), 179-193.
- Kiş, İ. and Tosun, M. (2015) “Spinor Darboux Equations of Curves in Euclidean 3-Space”, *Mathematica Moravica*, 19(1), 87-93.
- Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1977) “Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)”, *Pergamon Press*, Oxford.
- Masal, M. (2018) “Curves According to the Successor Frame in Euclidean 3-Space”, *Sakarya University Journal of Science*, 22(6), 1868-1873.
- Menninger, A. (2014) “Characterization of the Slant Helix as Successor Curves of the General Helix”, *International Electronic Journal of Geometry*, 7(2), 84-91.
- Millman, R. S. and Parker, G. D. (1977) “Elements of Differential Geometry”, *Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs*, New Jersey.
- Özdemir, M. (2020) “Diferansiyel Geometri”, *Altın Nokta*, İzmir.

- Payne, W. T. (1952) “Elementary Spinor Theory”, *American Journal of Physics*, 20, 253.
- Tandoğan, N. C. (2019) “Üç Boyutlu Öklid Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğrilerinin Spinor Gösterimi”, *Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi*, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Torres del Castillo, G. F. T and Barrales, G. S. (2004) “Spinor Formulation of the Differential Geometry of Curves”, *Revista Colombiana de Matemáticas*, 38, 27-34.
- Torres del Castillo, G. F. T. (2003) “3-D Spinors, Spin-Weighted Functions and Their Applications”, *Birkhäuser*, Boston.
- Ünal, D., Kişi, İ. and Tosun, M. (2013) “Spinor Bishop Equation of Curves in Euclidean 3-Space”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 8(2), 365-402.
- Vivarelli, M. D. (1984) “Development of Spinor Descriptions of Rotational Mechanics from Euler’s Rigid Body Displacement Theorem”, *Celestial Mechanics*, 32, 193-207.
- Wachter, A. (2011) “Relativistic Quantum Mechanics”, *Springer*, Dordrecht.
- Wang, F., Liu, H. (2007) “Mannheim Partner Curves in 3-Euclidean Space”, *Mathematics in Practice and Theory*, 37, 141-143.
- Yüce, S. (2017) “Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri”, *Pegem Akademi*, Ankara.



EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Erişir, T. and Köse Öztaş, H. (2021) “Spinor Representation of Successor Curve in Euclidean Space”, *5th International Mardin Artuklu Scientific Researches Conference*, Mardin, 15-16 January.

