

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYINDA BENZER FRENET EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa ALTIN

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

OCAK - 2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYINDA BENZER FRENET EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa ALTIN

(101121111)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 08/01/2013

Tezin Savunulduğu Tarih: 24/12/2012

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (F.Ü)
Prof. Dr. Bayram KARADAĞ (İ.Ü)

OCAK – 2013

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması esnasında bilgi ve tecrübesinden her zaman yararlandığım, çalışmanın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak imkânlar sağlayan, çalışmamın her aşamasında yanımda olan çok kıymetli hocam sayın Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ' a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

MUSTAFA ALTIN

ELAZIĞ-2013

İÇİNDEKİLER

sayfa no

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VII
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. BİRİNCİ BÖLÜM.....	2
2.1 Temel Tanım ve Teoremler	2
3. İKİNCİ BÖLÜM.....	14
3.1 Bir eğrinin ortagonal (dik) çatısı.....	14
4. ÜÇÜNCÜ BÖLÜM.....	24
4.1 IR^n de Direk Benzerliğe Göre Tanımlanan Frenet Eğriliği.....	24
5. DÖRDÜNCÜ BÖLÜM.....	30
5.1 Sıfır Olmayan Öklidyen Eğrilikleriyle Frenet Eğrileri.....	30
6. Beşinci Bölüm.....	33
6.1 Kendine Benzer Frenet Eğrileri.....	33
6.2 Çift Boyutlu Öklidyen Uzaylarda Kendine Benzer Eğriler.....	35

7	Kendine Benzer Frenet Eğrileri İçin Bazı Karakterizasyonlar	50
7.1	Eğrilik Çemberi.....	50
7.2	Eğilim Çizgisi.....	55
7.3	İnvolut ve Evolüt Eğrileri.....	58
7.4	Bertrand Eğri Çifti.....	61
8	SONUÇLAR.....	66
	KAYNAKLAR.....	67
	ÖZGEÇMİŞ.....	69

ÖZET

ÖKLİD UZAYINDA BENZER FRENET EĞRİLERİ

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; Bir eğrinin ortogonal (dik) çatısı incelendi.

Üçüncü bölümde; Kendine benzer Frenet eğrilerin varlık ve teklik teoremleri incelendi.

Dördüncü bölümde; Kendine benzer Frenet eğrilerin odak(focal) eğrisi incelendi.

Beşinci bölümde; çift boyutlu Öklid uzayında kendine benzer Frenet eğrileri incelendi.

Altıncı bölüm çalışmanın orijinal kısmı olup bu bölümde Kendine benzer Frenet eğrileri ile ilgili sonuçlar verildi.

Yedinci bölümde bulunan sonuçlar yorumlandı.

Anahtar Kelimeler: Frenet eğrileri, kendine benzer Frenet eğrileri,

SUMMARY

SIMILAR FRENET CURVES IN EUCLIDEAN SPACES

This thesis consists of seven chapters.

In the first chapter; some fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter; An orthogonal n -frame of a curve is examined.

In the third chapter; the uniqueness and existence theories of similar frenet curves are examined.

In the Fourt chapter; the focal curve of similar frenet curves is examined.

In the fifth chapter; the self-similar curves in the even-dimensional Euclidean spaces are examined.

The sixth section is part of the orijinal study on the results in this section were self-similar Frenet curves.

In the seventh; interpreted the results.

Keywords.Frenet curves, self similar Frenet curves.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 R^3 de Frenet 3 ayaklısı	3
Şekil 2.2 Bertrand eğri çifti	4
Şekil 2.3 İnvölüt Evolüt.....	5
Şekil 2.4 Eğrilik çemberi	5
Şekil 2.5 Logaritmik spiral.....	10
Şekil 2.6 Teğet birim vektörü ile x_1 eksenini arasındaki açı.....	11

SEMBOLLER LİSTESİ

R^n	:n-boyutlu Öklid uzayı
A^T	:A matrisinin transpozu
A^{-1}	:A matrisinin tersi
E^n	:n-boyutlu Öklid uzay
$\ \cdot \ $	:norm
$\langle \cdot \cdot \rangle$	:iç çarpım
k_i	:i yinci eğrilik fonksiyonu
$\kappa(s)$	:eğrilik fonksiyonu
$\tau(s)$	:burulma fonksiyonu
s	:yay uzunluğu parametresi
C^∞	:düzgün fonksiyon
$\wedge^n(v)$	:alterne n-tensörü
H_1	:birinci Harmonik eğriliği

1.GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin belki de en ilginç ve onu iyi temsil eden çalışma alanı eğriler teorisidir. Eğrilerin yerel özelliklerinin incelenmesi farklı ve önemli sonuçlar verir. Bu teorinin lineer ve nonlinear diferansiyel denklemler ve fizikte çok farklı uygulamaları vardır.

Eğriler teorisinin en fazla kullanılan ve doğal yapısını temsil eden konularının başında ise Frenet denklemleri gelmektedir. Bu denklemler geometride oldukça elit bir statüde olup birçok farklı alanda kullanım yerine sahiptir. Bu formüller ilk önce 1852 yılında Frenet tarafından bulunmuş ve yayınlanmıştır. Ondan habersiz olarak Serret, 1851 yılında aynı formülleri hesaplamıştır. Bundan dolayı bu formüllere bugün her ikisinin adı verilerek Frenet-Serret formülleri olarak adlandırılır.

$\mathbb{R}^n$ deki herhangi Frenet eğrisi ile bağlantılı olan dikkate değer iki eğri vardır. Bu eğrilerin ilki; küresel teğet göstergesidir. Bir Frenet eğrisinin küresel teğet göstergesinin yay uzunluğu yardımıyla, bu Frenet eğrisinin yeni parametrizasyonu, eğrinin özelliklerinin incelenmesinde kullanılır. Bu yeni parametrizasyonun uygulamaları 9,10 ve 7 de verilmiştir.

$\mathbb{R}^3$ de bir eğri için $\tilde{k}_i$ değişmezleri ilk olarak 1 de E.Cartan tarafından tartışıldı $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ deki eğrilerde $\tilde{k}_i$ nin hesaplanması için farklı formüller 3 ve 4 de verildi.

Sıfırdan farklı Öklidyen eğrilikleri ve bir Frenet eğrisiyle yakından ilişkili olan ikinci eğri, oskülatör hiper düzlemlerin merkezlerini oluşturduğu “focal(odak) eğriler“dir. Odak eğriler kullandıktan sonra, R. Uribe Vargas, bir Frenet eğrisinin odak eğrilikleri kavramına giriş yaptı ve odak eğrilikleri ve onların ilk türevleri yardımıyla Öklid eğriliklerinin bir temsilini verdi. 12

$\mathbb{R}^n$ de kendine benzer eğrilerle ilgili detaylı kavramlar 2009 yılında Radostina P. Encheva ve Georgi H. Georgiev tarafından ayrıntılı olarak incelendi.

2. BİRİNCİ BÖLÜM

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1

V , sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Bir

$$\Psi: V \times V \rightarrow R$$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa Ψ ye V üstünde bir iç çarpım denir.

(i) Ψ bilinear formdur :

$\forall a_1, a_2 \in R$ ve $\forall x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in V$ için

$$\Psi(a_1x_1 + a_2x_2, y) = a_1\Psi(x_1, y) + a_2\Psi(x_2, y),$$

$$\Psi(x, a_1y_1 + a_2y_2) = a_1\Psi(x, y_1) + a_2\Psi(x, y_2)$$

(ii) Ψ simetrik formdur :

$$\Psi(x, y) = \Psi(y, x) \quad , \quad \forall x, y \in V$$

(iii) Ψ pozitif tanımlıdır :

$$\Psi(x, x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in V,$$

$$\Psi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

[15]

Tanım 2.1.2

I, R de açık bir küme olmak üzere $\alpha: I \rightarrow R^n$ dönüşümü C^∞ sınıfından ise α bir eğridir denir. [16]

Tanım 2.1.3

Normu 1 olan vektöre bir birim vektör denir. 13

Tanım 2.1.4

u ve v gibi iki vektörden biri diğerinin bir skaler ile çarpımına eşit ise bu iki vektöre lineer bağımlıdır denir; aksi halde bu iki vektöre lineer bağımsızdır denir.

Geometrik bir ifade gerekirse $u = AE_2$ olmak üzere u ve v vektörleri nin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart A, E_1 ve E_2 noktalarının kolinear (aynı bir doğru üzerinde) olmasıdır. 13

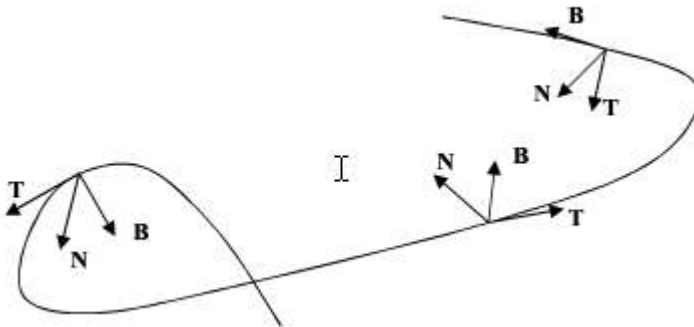
Tanım 2.1.5

E^n , n -boyutlu Öklid uzayında, $(n-1)$ -boyutlu bir yüzey genellikle hiper yüzey olarak adlandırılır. 14

Tanım 2.1.6

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall a^{(k)}, k > r$ için $a^{(k)} \in \text{Sp}\{\psi\}$ olmak üzere ψ den elde edilen $V_1, V_2, \dots, V_r$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı denir.

Her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörü adı verilir. [14].



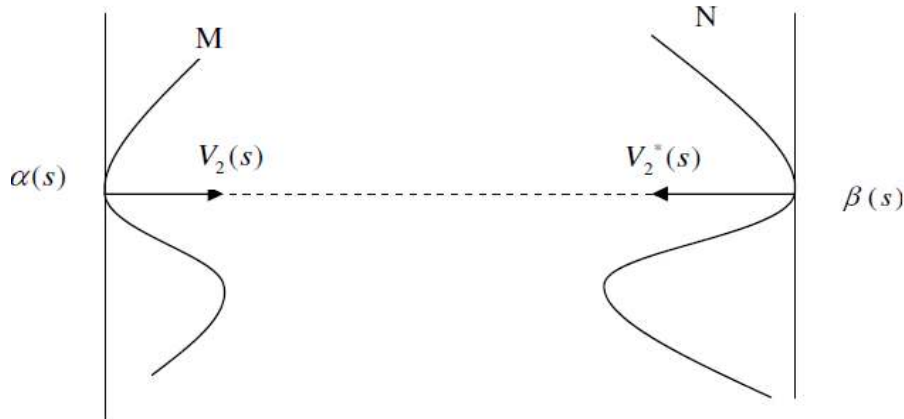
Şekil 2.1 R^3 de Frenet 3 ayaklısı

Tanım 2.1.7.

M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir. [14].

Tanım 2.1.8.

$M, N \subset E^n$ eğrileri sırasıyla (I, α) , (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$, $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin Frenet r-ayaklıları sırasıyla $V_1(s), \dots, V_r(s)$, $V_1^*(s), \dots, V_r^*(s)$ olarak verildiğinde $\forall s \in I$ için $V_2(s), V_2^*(s)$ lineer bağımlı ise, (M, N) eğri 2-lisine bir Bertrand eğri çifti denir. [15].



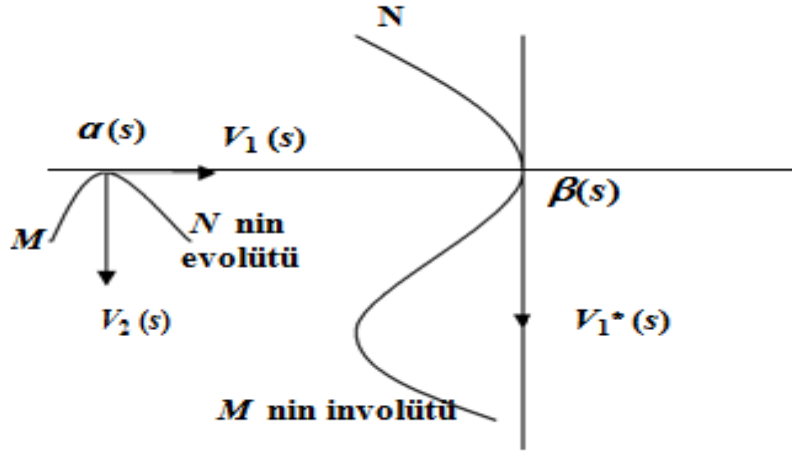
Şekil 2.2 Berdrand eğri çifti

Tanım 2.1.9.

$M, N \subset E^n$ iki eğri olsun. M, N sırasıyla (I, α) , (I, β) koordinat komşulukları verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M, N nin Frenet r-ayaklıları sırasıyla, $V_1(s), \dots, V_r(s)$ ve $V_1^*(s), \dots, V_r^*(s)$ olmak üzere

$$\langle V_1(s), V_1^*(s) \rangle = 0$$

ise, N ye M nin involütü , M ye de N nin evolütü denir. [15].



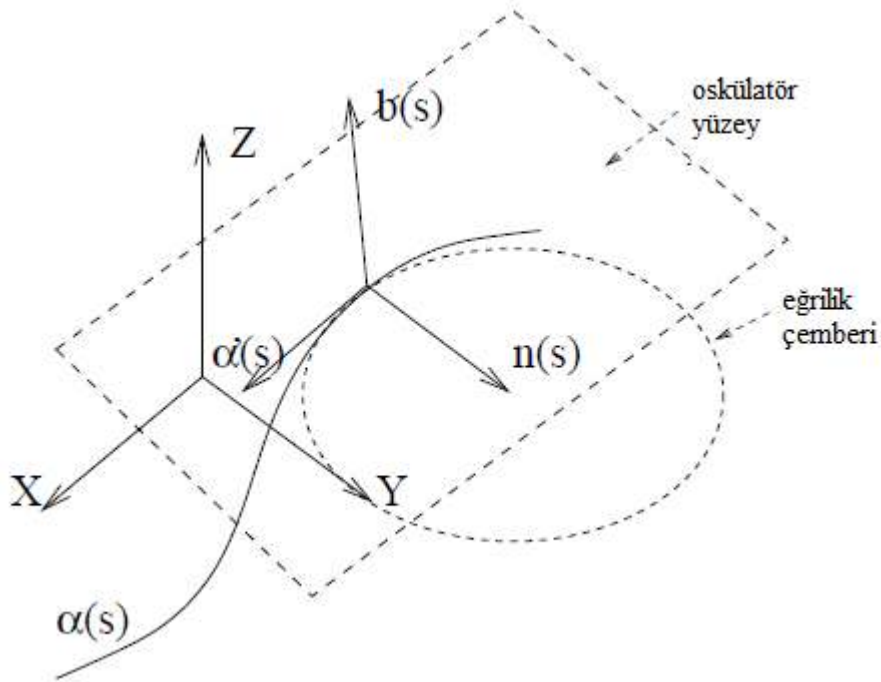
Şekil 2.3 İnvolut Evolüt

Tanım 2.1.10.

$\alpha : I \rightarrow R^3$ birim hızlı eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında ikinci basamaktan değen

$\Upsilon : J \rightarrow R^n$

çemberine, α eğrisinin αs_0 noktasındaki eğrilik çemberi denir. [16]



Şekil 2.4 Eğrilik çemberi

Tanım 2.1.11.

$\alpha : I \rightarrow R^3$ eğrisinin birim hızlı olmadığını varsayalım.

α nın yay uzunluğu fonksiyonu f olsun. $h = f^{-1}$ olmak üzere $\alpha \circ h$ eğrisinin birim hızlı olduğunu biliyoruz.

$\alpha \circ h = \beta$ diyelim. $f : I \rightarrow J$ olmak üzere $s \in J$ için

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(t)$$

dir. Birim hızlı $\beta : J \rightarrow R^3$ eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki eğrilik küresine, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğrilik küresi denir. [16]

Tanım 2.1.12.

f, R^n uzayından R ye giden bir fonksiyon olsun. f sürekli ise “ f fonksiyonuna, C^0 sınıfından bir fonksiyondur,” denir. R^n den R ye giden C^0 sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^0(R^n, R)$ biçiminde gösterilir.

R^n nin her noktasında f fonksiyonunun kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise “ f fonksiyonu C^1 sınıfındandır,” denir.

f fonksiyonunun R^n nin her bir noktasında k inci basamaktan kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise “ f fonksiyonu C^k sınıfındandır” denir. R^n den R ye giden C^k sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^k(R^n, R)$ biçiminde gösterilir.

R^n nin her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa “ f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır veya düzgün(pürüzsüz)fonksiyondur,” denir. [16].

Tanım 2.1.13.

$\alpha : I \rightarrow R^3$ bir eğri olsun. J açık bir aralık olmak üzere, bir $h : J \rightarrow I$ difeomorfizmine, α eğrisi için bir parametrik dönüşüm denir. $\alpha \circ h$ eğrisine de α eğrisinin h ile yeniden parametrelendirilmiş denir. [16].

Tanım 2.1.14

Eğer $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ iken $\langle X, Y \rangle = 0$ ise bu iki vektöre birbirine ortogonaldirler denir. Sıfırdan farklı vektörlerin bir S cümlesinde herhangi iki vektör birbirine dikse bu S cümlesine ortogonaldir denir. S ortogonal iken S deki her bir vektör birer birim vektör ise S ye ortonormal denir. [13]

Tanım 2.1.15

V bir reel vektör uzayı ve V nin bir bazı $V_1, \dots, V_n$ olmak üzere V den seçilen n -tane $\varphi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$, $1 \leq i \leq n$, vektörü için bir $\omega \in \wedge^n(V)$ alterne n -tensörünün değerini

$$\omega(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \det[a_{ij}] \varphi(V_1, \dots, V_n)$$

olarak hesaplanır.

Bu son ifadeye göre sıfırdan farklı bir $\omega \in \wedge^n(V)$ n -formu V nin bazlarını iki ayrık gruba ayırır, bunlar, $\omega(V_1, \dots, V_n) > 0$ ve $\omega(V_1, \dots, V_n) < 0$ olan bazlardır.

Eğer $v_1, \dots, v_n$ ve $u_1, \dots, u_n$ iki farklı baz iseler bir $A = [a_{ij}] \in IR_n^n$ matrisi bu iki baz arasında bir lineer dönüşümü

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

olarak belirtir.

Eğer $\det A > 0$ veya $\det A < 0$ ise bu iki baz aynı gruptandır denir. Bu kriter ω nin $\wedge^n(V)$ deki seçilişinden bağımsız olarak V nin bazlarını ayrık iki gruba ayırmak için uygulanabilir. Bu gruplardan her birine V vektör uzayı için bir yönlendirme (orientasyon) adı verilir. [17]

Tanım 2.1.16

M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r - ayaklısı $V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)$ olsun.

Buna göre

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < r,$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i - yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i - yinci eğriliği denir. [15].

Tanım 2.1.17

$M \subset E^n$ eğrisi I, α koordinat komşuluğu ile verilsin.

$\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, bir U sabit vektörü ile sabit açı teşkil ediyorsa, M ye bir eğilim çizgisi ve $Sp \ U$ yada, M eğilim çizgisinin eğilim eksenini denir.

$M \subset E^n$ eğrisi I, α koordinat komşuluğu ile verilsin.

$\forall s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasında M nin 1. ve 2. eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise,

$$H : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow H(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna, M nin s noktasındaki 1-inci harmonik eğriliği denir. [14].

Tanım2.1.18

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ eğrisi için

$$k : I \rightarrow \mathbb{R}, k(s) = \|T'(s)\|$$

funksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $k(s)$ sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir.

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı olmayan $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu

$$k_s = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

dir. 16

Tanım 2.1.19

R^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R$ eğrisinin frenet vektör alanları T,N,B olmak üzere,

$$\tau: I \rightarrow R, \tau_s = -\langle B'_s, N_s \rangle$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. τ_s sayısına α eğrisinin α_s noktasındaki burulması denir.

R^3 uzayındaki birim hızlı olmayan $\alpha: I \rightarrow R$ eğrisinin burulma fonksiyonu ise

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

dir. 16

Tanım 2.1.20

Bir $A = [a_{ij}]$ reel matrisinde $-A = A^T$ ise, A matrisine antisimetrik matris denir. 13

Tanım 2.1.21

Bir $A = [a_{ij}]$ matrisinde $A = A^T$ ise, yani $a_{ij} = a_{ji}$ ise, A matrisine simetrik'tir denir. 13

Tanım 2.1.22

$A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortogonaldır denir. 13

Tanım 2.1.23

a ve b gerçel parametreler, e ise Euler sayısı iken Kutupsal koordinat sisteminde

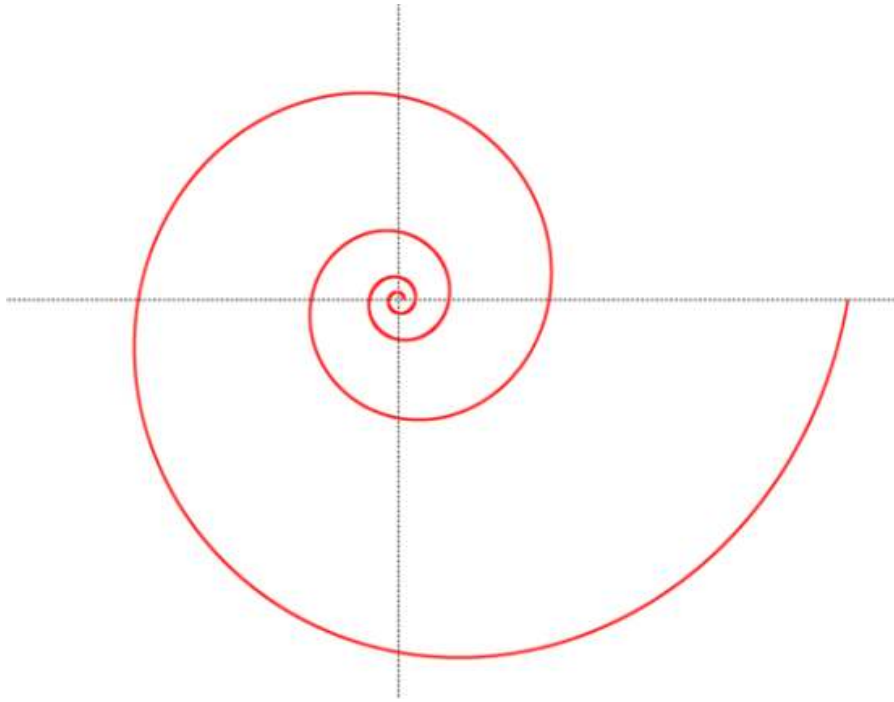
$$r = a.e^{b\theta}$$

şeklinde gösterilen eğriye logaritmik spiral denir.

Kartezyen koordinat sisteminde aynı eğri, şu parametrik denklem çiftiyle ifade edilir:

$$x(t) = a.e^{bt} \cos(t)$$

$$y(t) = a.e^{bt} \sin(t)$$



Şekil 2.5 Logaritmik spiral

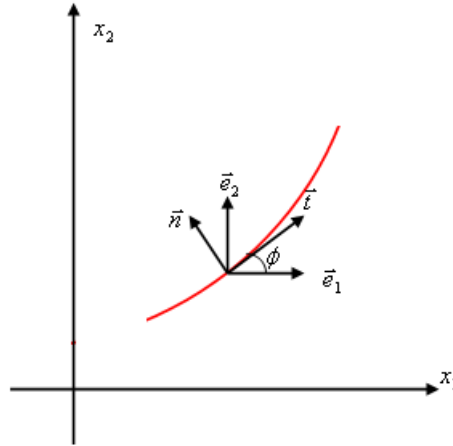
Teorem 2.1.1 (Eğriler için Varlık ve Teklik Teoremi)

s bir reel değişken olmak üzere $\kappa = \kappa(s)$, $\tau = \tau(s)$ herhangi iki sürekli fonksiyon olsun. Uzaydaki konumu dışında, $\kappa(s)$ yi eğrilik $\tau(s)$ yi burulma ve s yi de eğri boyunca bir doğal parametre olarak kabul eden bir ve yalnız bir uzay eğrisi vardır.

İspat :

Genel olarak Frenet denklemlerinin çözümleri integrasyonla elde edilemez. Bununla birlikte eğrinin bir düzlem eğri, yani $\tau \equiv 0$ olması durumunda, Frenet denklemlerinin integrasyonu mümkündür.

C bir düzlem eğri olsun. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi C eğrisinin herhangi bir noktasındaki $\vec{t}$ teğet birim vektörü ile x_1 eksenini arasındaki açıyı ϕ gösterelim.



Şekil 2.6 Teğet birim vektörü ile x_1 eksenini arasındaki açı

$$\vec{t} = (\cos \phi) \vec{e}_1 + (\sin \phi) \vec{e}_2 \quad (2.1)$$

$\vec{n}$, $\vec{t}$ ye dik olduğundan

$$\vec{n} = (-\sin \phi) \vec{e}_1 + (\cos \phi) \vec{e}_2 \quad (2.2)$$

yazılabilir.

$$\vec{t}' = \frac{d}{ds} ((\cos \varphi) \vec{e}_1 + (\sin \varphi) \vec{e}_2) = \varphi' (-\sin \varphi) \vec{e}_1 + \cos(\varphi) \vec{e}_2 = \varphi' \vec{n}$$

$$\vec{n}' = \frac{d}{ds} ((-\sin \varphi) \vec{e}_1 + \cos \varphi) \vec{e}_2 = \varphi' (-\cos \varphi) \vec{e}_1 - (\sin \varphi) \vec{e}_2 = -\varphi' \vec{t}$$

$\tau = 0$ olduğundan Frenet Denklemleri $\vec{t}' = \kappa \vec{n}, \vec{n}' = -\kappa \vec{t}$ ye indirgenir. Böylece

$$\varphi' = \kappa \text{ veya } \phi = \int \kappa ds + c_1 \quad (2.3)$$

bulunur. Bu şekilde ϕ belirlendikten sonra (2.1) eşitliğinden

$$\vec{x} = \int \vec{t} ds + \vec{c}_2 = \int [\cos \phi(s) \vec{e}_1 + (\sin \phi(s)) \vec{e}_2] ds + \vec{c}_2 \quad (2.4)$$

elde edilir. (2.3) teki integrasyon sabiti, ϕ nin c_1 kadar ötelenmesi, yani eğrinin orjin etrafında döndürülmesi, (2.4) teki integrasyon sabiti ise eğrinin c_2 kadar ötelenmesi demektir. Eğer bütün s ler için $\kappa \neq 0$ ise bütün s ler için $\varphi' \neq 0$ ve bunun sonucu olarak $\phi = \phi(s)$ bir düzgün parametre değiştirme fonksiyonudur. Buradan $s = s(\phi)$ ve

$ds = \frac{ds}{d\phi} d\phi$ olduğu göz önüne alınırsa (2.4) ten

$$\vec{x} = \int [\cos \phi) \vec{e}_1 + (\sin \phi) \vec{e}_2] \frac{ds}{d\phi} d\phi + \vec{c}_2 = \int \frac{1}{\kappa(\phi)} [\cos \phi) \vec{e}_1 + (\sin \phi) \vec{e}_2] d\phi + \vec{c}_2$$

bulunur. 19 ve 20

Teorem 2.1.2

Bir eğri doğal parametrenin fonksiyonu olarak eğrilik ve burulması ile tek türlü olarak belirlidir.

İspat:

Her doğal parametre s için $\kappa(s) = \kappa^*(s)$ ve $\tau(s) = \tau^*(s)$ olsun.

$$\frac{d}{ds}(\vec{t} \cdot \vec{t}^*) = \vec{t} \cdot \vec{t}' + \vec{t}' \cdot \vec{t}^* = \vec{t} \cdot (\kappa^* \vec{n}^*) + (\kappa \vec{n}) \cdot \vec{t}^* = \kappa(\vec{t} \cdot \vec{n}^* + \vec{n} \cdot \vec{t}^*)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\vec{n} \cdot \vec{n}^*) &= \vec{n} \cdot \vec{n}' + \vec{n}' \cdot \vec{n}^* = \vec{n} \cdot (-\kappa^* \vec{t}^* + \tau^* \vec{b}^*) + (-\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}) \cdot \vec{n}^* \\ &= -\kappa(\vec{n} \cdot \vec{t}^* + \vec{t} \cdot \vec{n}^*) + \tau(\vec{n} \cdot \vec{b}^* + \vec{b} \cdot \vec{n}^*) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{b} \cdot \vec{b}^*) = \vec{b} \cdot \vec{b}' + \vec{b}' \cdot \vec{b}^* = \vec{b} \cdot (-\tau^* \vec{n}^*) + (-\tau \vec{n}) \cdot \vec{b}^* = -\tau(\vec{b} \cdot \vec{n}^* + \vec{n} \cdot \vec{b}^*)$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{d}{ds}(\vec{t} \cdot \vec{t}^* + \vec{n} \cdot \vec{n}^* + \vec{b} \cdot \vec{b}^*) = 0$$

elde edilir . Buradan, integral alarak,

$$\vec{t} \cdot \vec{t}^* + \vec{n} \cdot \vec{n}^* + \vec{b} \cdot \vec{b}^* = \text{sabit}$$

bulunur. $s = s_0$ noktasında $(\vec{t}_0^*, \vec{n}_0^*, \vec{b}_0^*)$ üçlüsü ile $(\vec{t}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0)$ üçlüsü ile karşılaştırıldığından $s = s_0$ noktasında $\vec{t} = \vec{t}^*$, $\vec{n} = \vec{n}^*$, $\vec{b} = \vec{b}^*$ ve böylece

$$\vec{t} \cdot \vec{t}^* = \vec{n} \cdot \vec{n}^* = \vec{b} \cdot \vec{b}^* = 1$$

elde edilir. Her s için $\vec{t} \cdot \vec{t}^* + \vec{n} \cdot \vec{n}^* + \vec{b} \cdot \vec{b}^* = \text{sabit}$ olduğundan $s = s_0$ için ve dolayısıyla her s için

$$\vec{t} \cdot \vec{t}^* + \vec{n} \cdot \vec{n}^* + \vec{b} \cdot \vec{b}^* = 3$$

bulunur. Herhangi iki birim vektör $\vec{u}$, $\vec{u}^*$ için

$$-1 \leq \vec{u} \cdot \vec{u}^* = \cos \theta \leq 1$$

dir. Buna göre $\vec{t} \cdot \vec{t}^* + \vec{n} \cdot \vec{n}^* + \vec{b} \cdot \vec{b}^* = 3$ eşitliğinden $\vec{t} \cdot \vec{t}^* = \vec{n} \cdot \vec{n}^* = \vec{b} \cdot \vec{b}^* = 1$, buradanda her s için

$$\vec{t} = \vec{t}^*, \vec{n} = \vec{n}^*, \vec{b} = \vec{b}^*$$

elde edilir. $\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{t} = \vec{t}^* = \frac{d\vec{x}^*}{ds}$ ten $\vec{x}(s) = \vec{x}^*(s) + c$ ve $\vec{x}(s_0) = \vec{x}^*(s_0)$ olduğundan $c = 0$

ve böylece bütün s ler için $\vec{x}(s) = \vec{x}^*(s)$ bulunur. Bu ise C ile C^* eğrilerinin çakışması demektir. 19 ve 20

3.İKİNCİ BÖLÜM

3.1.Bir eğrinin ortagonal (dik) çatısı

Bu bölümde IR^n 'deki $Sim^+(IR^n)$ gurubu açısından yönlendirilmiş ve benzerlik altında korunan bir eğrinin diferansiyel ve geometrik değişmezlerini vereceğiz.

$$F : IR^n \rightarrow IR^n$$

dönüşümü direkt benzerlik olarak adlandırılır ve

$$F(x) = \lambda Ax + b \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada;

$x \in IR^n$ de keyfi bir nokta,

A , $n \times n$ tipinde ortagonal matris,

b , bir öteleme vektörü

$$\lambda \text{ reel sabiti } \begin{cases} \lambda > 0 , & n \text{ tek ise} \\ \lambda \neq 0 , & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şartını sağlayan bir katsayıdır.

Bir $I_0 \subseteq IR$ aralığı üzerinde tanımlı ve birim hızlı olan

$$c = c(s) : I_0 \rightarrow IR^n$$

Frenet eğrisini göz önüne alalım.

$e_1, e_2, \dots, e_n$ vektörleri c eğrisinin Frenet hareketli n-çatısı ve

" ' " sembolü s yay uzunluğu parametresine göre türevi gösterebilir.

Eğer $n \geq 3$ ise $c', c'', \dots, c^{(n-1)}$ lineer bağımsızdır ve $i = 1, 2, \dots, n-2$ için

c eğrisinin Öklid eğrilikleri $k_i > 0$ ve $k_{n-1} \neq 0$ dır.

Eğer

$$k_0 = k_n = 0 \quad ([6] \text{ veya } [8])$$

alınırsa

$$\begin{aligned} c'(s) &= e_1(s) \\ e_i' &= -k_{i-1}e_{i-1} + k_i e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (3.2)$$

Frenet denklemleri tanımlıdır.

Kabul edelim ki

1: c', c'' türevleri lineer bağımsız

2: Eğrinin uygun bir yönlendirilmesi mevcut olsun.

Bu taktirde $k_1 > 0$ olmak üzere $n=2$ için (3.2) den Frenet denklemleri elde edilir.

(3.1) ile verilen F direkt benzerliği altında c eğrisinin; görüntüsü $\bar{c} = F(c)$, yay uzunluk parametresi $\bar{s} = |\lambda|s$ ve Öklid eğrilikleri $\bar{k}_i = |\lambda|k_i$, ($i=1,2,...,n-1$) iken, bu dönüşüm sayesinde

$$\bar{c} = F \circ c : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

şeklinde yeni bir Frenet eğrisi tanımlanır.

$s \in I_0$, c eğrisinin küresel teğet göstergesi olmak üzere $\gamma(s) = e_1(s)$ ve σ da $\gamma(s)$ nin yay uzunluk parametresi olsun. Bu durumda c eğrisi, σ yardımıyla;

$$c = c(\sigma) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

şeklinde bir temsile sahip olur ve yeni σ parametresi c eğrisinin küresel yay uzunluk parametresi olarak adlandırılır.

Bu durum da

$$d\sigma = k_1 ds$$

ve

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{d}{ds}$$

olduğu açıktır.

Buradan $\sigma \in I$ için

$$\frac{dc}{d\sigma} = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{dc}{ds} = \frac{1}{k_1} e_1 \quad (3.4)$$

ve

$$e'_1 = -k_0 e_0 + k_1 e_2 = k_1 e_2$$

$$e'_2 = -k_1 e_1 + k_2 e_3$$

$$e'_3 = -k_2 e_2 + k_3 e_4$$

•

•

•

$$e'_{n-1} = -k_{n-2} e_{n-2} + k_{n-1} e_n$$

$$e'_n = -k_{n-1} e_{n-1} + k_n e_{n+1} = -k_{n-1} e_{n-1}$$

veya matris formunda

$$\frac{d}{ds}(e_1, e_2, \dots, e_n)^T = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{1}{k_i} \cdot \frac{d}{ds}$$

olduğundan

$$\frac{d}{d\sigma}(e_1, e_2, \dots, e_n)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{k_2}{k_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{k_1} & 0 & \frac{k_3}{k_1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{k_{n-2}}{k_1} & 0 & \frac{k_{n-1}}{k_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{k_{n-1}}{k_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

matrisi elde edilir.

(3.3) ile verilen $c(\sigma)$ eğrisi için; $\sigma \in I$ olmak üzere

$$\frac{1}{k_1} e_1(\sigma), \frac{1}{k_1} e_2(\sigma), \dots, \frac{1}{k_1} e_n(\sigma) \quad (3.6)$$

Frenet hareketli ortogonal n-çatısı olsun. $c(\sigma)$ eğrisinin Öklid eğrilikleri de

$$\tilde{k}_1 = -\frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} \left(\log\left(\frac{1}{k_1}\right) \right)$$

ve

$$k_i = \frac{k_i}{k_1}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, n-1 \quad \text{için} \quad (3.7)$$

fonksiyonlarıyla tanımlansın.

Bu taktirde

$$\tilde{k}_1 = -\frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{d\sigma} = -\frac{1}{k_1} \cdot \frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{ds} = -\frac{1}{k_1^2} \cdot (k_1)' = \left(\frac{1}{k_1} \right)'$$

ya da

$$\tilde{k}_1 = \frac{d}{d\sigma} \left(\log\left(\frac{1}{k_1}\right) \right) = \frac{1}{k_1} \frac{1}{ds} \left(\log\left(\frac{1}{k_1}\right) \right) = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{k_1} \right)'}{\frac{1}{k_1}} = \left(\frac{1}{k_1} \right)'$$

olarak yazılabilir.

Frenet hareketli ortogonal n-çatısı $\frac{1}{k_1} e_1(\sigma), \frac{1}{k_1} e_2(\sigma), \dots, \frac{1}{k_1} e_n(\sigma)$ olduğundan

$$\left(\frac{1}{k_1}e_1\right)' = \left(\frac{1}{k_1}\right)'e_1 + \frac{1}{k_1}(e_1)' = \widetilde{k}_1 e_1 + \frac{1}{k_1}k_1 e_2 = \widetilde{k}_1 e_1 + e_2$$

$$\left(\frac{1}{k_1}e_2\right)' = \left(\frac{1}{k_1}\right)'e_2 + \frac{1}{k_1}(e_2)' = k_1 e_2 + \frac{1}{k_1}(-k_1 e_1 + k_2 e_3) = -e_1 + \widetilde{k}_1 e_2 + \widetilde{k}_2 e_3$$

$$\left(\frac{1}{k_1}e_3\right)' = \left(\frac{1}{k_1}\right)'e_3 + \frac{1}{k_1}(e_3)' = \widetilde{k}_1 e_3 + \frac{1}{k_1}(-k_2 e_2 + k_3 e_4) = -\widetilde{k}_2 e_2 + \widetilde{k}_1 e_3 + \widetilde{k}_3 e_4$$

•

•

•

$$\left(\frac{1}{k_1}e_{n-1}\right)' = \left(\frac{1}{k_1}\right)'e_{n-1} + \frac{1}{k_1}(e_{n-1})' = \widetilde{k}_1 e_{n-1} + \frac{1}{k_1}(-k_{n-2} e_{n-2} + k_{n-1} e_n)$$

$$= -\widetilde{k}_{n-2} e_{n-2} + \widetilde{k}_1 e_{n-1} + \widetilde{k}_{n-1} e_n$$

$$\left(\frac{1}{k_1}e_n\right)' = \left(\frac{1}{k_1}\right)'e_n + \frac{1}{k_1}(e_n)' = \widetilde{k}_1 e_n + \frac{1}{k_1}(-k_{n-1} e_{n-1}) = -\widetilde{k}_{n-1} e_{n-1} + \widetilde{k}_1 e_n$$

olarak bulunur.

Burada oluşan katsayılar matrisi

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{k}_2 & \tilde{k}_1 & \tilde{k}_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\tilde{k}_{n-2} & \tilde{k}_1 & \tilde{k}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\tilde{k}_{n-1} & \tilde{k}_1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

şeklindedir.

(3.2), (3.4) ve (3.5) den yararlanıldığında

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{k_1} e_1, \frac{1}{k_1} e_2, \dots, \frac{1}{k_1} e_n \right)^T = \frac{1}{k_1} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_1} e_1, \frac{1}{k_1} e_2, \dots, \frac{1}{k_1} e_n \right)^T$$

veya

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{k_1} e_1, \frac{1}{k_1} e_2, \dots, \frac{1}{k_1} e_n \right)^T = \frac{1}{k_1} \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} e_1 \\ \frac{1}{k_1} e_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{k_1} e_n \end{bmatrix}$$

ya da

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{k_1} e_1, \frac{1}{k_1} e_2, \dots, \frac{1}{k_1} e_n \right)^T = \frac{1}{k_1} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{k_1} \right)' e_1 + \frac{1}{k_1} e_1' \\ \left(\frac{1}{k_1} \right)' e_2 + \frac{1}{k_1} e_2' \\ \vdots \\ \left(\frac{1}{k_1} \right)' e_n + \frac{1}{k_1} e_n' \end{bmatrix}$$

olur. Buradan da

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{k_1} e_1, \frac{1}{k_1} e_2, \dots, \frac{1}{k_1} e_n \right)^T = \frac{1}{k_1} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 e_1 + \frac{1}{k_1} e_1' \\ \tilde{k}_1 e_2 + \frac{1}{k_1} e_2' \\ \vdots \\ \tilde{k}_1 e_n + \frac{1}{k_1} e_n' \end{bmatrix}$$

veya

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{k_1} e_1, \frac{1}{k_1} e_2, \dots, \frac{1}{k_1} e_n \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{k}_1}{k_1} e_1 + \frac{1}{k_1} e_2 \\ \frac{\tilde{k}_1}{k_1} e_2 - \frac{1}{k_1} e_1 + \frac{\tilde{k}_2}{k_1} e_3 \\ \vdots \\ \frac{\tilde{k}_1}{k_1} e_n - \frac{\tilde{k}_{n-1}}{k_1} e_{n-1} \end{bmatrix}$$

ve nihayetinde (3.8) matrisi kullanılırsa

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{k_1} e_1, \frac{1}{k_1} e_2, \dots, \frac{1}{k_1} e_n \right)^T = \tilde{K} \left(\frac{1}{k_1} e_1, \frac{1}{k_1} e_2, \dots, \frac{1}{k_1} e_n \right)^T \quad (3.9)$$

elde edilir.

Önerme 3.1.1

(3.3) de verilen $c=c(\sigma) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Frenet eğrisi için; $\sigma \in I$ olmak üzere

$$\frac{1}{k_1} e_1(\sigma), \frac{1}{k_1} e_2(\sigma), \dots, \frac{1}{k_1} e_n(\sigma)$$

Frenet hareketli ortagonal n-çatısı ve

$$\tilde{k}_1 = -\frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{d\sigma} \quad \text{ve} \quad \tilde{k}_i = \frac{k_i}{k_1}, \quad (i = 2, 3, \dots, n-1)$$

fonksiyonlarıyla tanımlı Öklid eğrilikleri tüm $Sim^+(\mathbb{R}^n)$ gurubunun benzerlikleri altında değişmezler.

İspat:

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü ve λ pozitif bir reel sayı, A bir dönüşüm matrisi,

b bir öteleme vektörü olmak üzere $F(x) = \lambda A(x) + b$ şeklinde verilsin.

Bu durumda Foc bileşke dönüşümü $\frac{1}{\lambda} k_i$ Öklid eğrilikleriyle bir Frenet eğrisidir. Ayrıca $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)$ ler de Foc nin Frenet çatıları ve

$$F(e_i) = \lambda A(e_i)$$

şeklindedir.

O halde bu Frenet çatıları ve $\tilde{k}_i$ fonksiyonları değişmezdir.

Ayrıca $n = 2m$ ve $\lambda < 0$ olması durumunda da ispat aynıdır.

Tanım 3.1.1

$c=c(\sigma): I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir Frenet eğrisi olsun. c eğrisin de bulunan

$$\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_{n-1}$$

fonksiyonları c eğrisin Öklid eğrilikleri olarak adlandırılır.

4.ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

4.1. IR^n de Direkt Benzerliğe Göre Tanımlanan Frenet Eğriliği

Bu bölümün amacı, direkt benzerlikler gurubunu kullanarak eğrilerin lokal teorisindeki temel teoremi genişletmektir.

IR^n Öklid uzayında; aynı Öklid eğrilikleri ve aynı modülde Öklid hareketleriyle iki Frenet eğrisi iyi tanımlıdır. 6 ve 8

Afin diferansiyel geometride varlık ve teklik teoremleri 2 ve 11 de verilmiştir.

Teorem 4.1.1 (Teklik Teoremi):

$I \subset IR$ açık bir aralık

$$c_1 : I \rightarrow IR^n$$

ve

$$c_2 : I \rightarrow IR^n$$

olmak üzere c_1 ve c_2 Frenet eğrileri aynı küresel yay uzunluk parametresi σ ya bağlanmış olsunlar.

c_1 ve c_2 eğrilerinin aynı $\tilde{k}_{i,j}$ değişmezlerine sahip olduğunu kabul edelim.

Yani her bir $\sigma \in I$ ve $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için

$$\tilde{k}_{1,j} = \tilde{k}_{2,j} \tag{4.1}$$

olsun. Bu durumda IR^n in bir F direkt benzerliği vardır. Öyle ki; $c_2 = F \circ c_1$ dir.

İspat:

$j = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere $\tilde{k}_{i,j}$ Öklidyen eğrileri ve $i = 1, 2$ iken s_i ' de c_i eğrisinin yay uzunluk parametresini versin.

(4.1) den $\tilde{k}_{1,1} = \tilde{k}_{2,1}$ ve $\tilde{k}_1 = -\frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{d\sigma}$ eşitliklerinden

$$-\frac{1}{k_{1,1}} \cdot \frac{dk_{1,1}}{d\sigma} = -\frac{1}{k_{2,1}} \cdot \frac{dk_{2,1}}{d\sigma}$$

veya

$$-\frac{1}{k_{1,1}} \cdot \frac{1}{k_{1,1}} \cdot \frac{dk_{1,1}}{ds} = -\frac{1}{k_{2,1}} \cdot \frac{1}{k_{2,1}} \cdot \frac{dk_{2,1}}{ds}$$

buradan da

$$\left(\frac{1}{k_{1,1}} \right)' = \left(\frac{1}{k_{2,1}} \right)'$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.1) de verilen F dönüşümünden $\lambda > 0$ reel sabiti için

$$k_{1,1} = \lambda k_{2,1}$$

olduğunu gösterir.

Bu durumda $\tilde{k}_{1,1} = \tilde{k}_{2,1}$ eşitliği $j = 2, \dots, n-1$ için

$$k_{1,j} = \lambda k_{2,j}$$

yi gerektirir.

Diğer taraftan $d\sigma = k_1 ds$ eşitliğinden

$$ds_1 = \frac{1}{k_{1,1}} d\sigma$$

$$ds_2 = \frac{1}{k_{2,1}} d\sigma$$

yazılır ve bu durumda

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{k_{2,1}}{k_{1,1}}$$

ve

$$ds_1 = \frac{1}{\lambda} ds_2$$

olduğu açıktır.

A , $n \times n$ tipinde bir ortogonal matris olmak üzere;

$$H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \rightarrow H^{-1} x = \frac{1}{\lambda} Ax$$

ile verilen H benzerliğini düşünelim.

Burada

$$c_3 = H^{-1} c_2$$

Frenet eğrisi c_1 ile aynı Öklid eğriliklerine sahip olsun.

Öklid uzayındaki eğri teorisindeki teklik teoremine göre, bir $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Öklid hareketi vardır. Öyle ki

$$G^{-1} c_1 = c_3$$

dür.

Sonuç olarak

$$F : H^{-1} \circ G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

bileşkesi bir direkt benzerliktir ve

$$F \circ c_1 = c_2$$

dir.

Şimdi direkt benzerliğin , C^∞ sınıfından olan her (n-1) tane fonksiyonların, bazı şartlar altında bir Frenet eğri uzayı tanımlandığını göstereceğiz.

Teorem 4.1.2 (Varlık Teoremi):

$I \subseteq \mathbb{R}$ ve bu aralıkta $h_1, h_2, \dots, h_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ sınıfından fonksiyonları verilmiş olsun. Kabul edelim ki $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ fonksiyonları aynı işaretle sahip olsun.

$c_0 \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $e_1^0, e_2^0, \dots, e_n^0$, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında , c_0 noktasında ortonormal n çatı olsun.

Bu durumda ; c_0 merkeziyle benzerliği koruyan bir dönüşüme göre;

$a : \sigma_0 \in I$ vardır, öyleki $c \sigma_0 = c_0$ ve $e_1^0, e_2^0, \dots, e_n^0$ da c 'nin c_0 noktasındaki Frenet n çatısıdır.

$b : \text{Herhangi bir } \sigma \in I \text{ ve } i = 2, 3, \dots, n-1 \text{ için } \tilde{k}_i \sigma = h_i \sigma \text{ dır .}$

Şartlarını sağlayan, küresel yay-uzunluk parametresi ile parametreye bağlanmış bir tek $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Frenet eğrisi vardır.

İspat:

Matris değerli , $\varepsilon \sigma = e_1 \sigma, e_2 \sigma, \dots, e_n \sigma^T$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$$M \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h_2 \sigma & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_2 \sigma & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_2 \sigma & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -h_{n-2}(\sigma) & 0 & h_{n-1}(\sigma) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -h_{n-1}(\sigma) & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde matris tanımlayalım ve $e_1^0, e_2^0, \dots, e_n^0$ ortogonal çatısına göre oluşturulan

$$\frac{d}{d\sigma} \varepsilon \sigma = M(\sigma) \varepsilon \sigma \quad 4.2$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Bu birinci dereceden lineer diferansiyel denklemi çözüldükten sonra bir tek ε çözümü elde ederiz. Bu çözüm tüm $\sigma \in I$ lar için tanımlanır ve bazı $\sigma_0 \in I$ 'lar için

$$\varepsilon \sigma_0 = e_1^0, e_2^0, \dots, e_n^0{}^T$$

sağlanır.

$\varepsilon \sigma$ nın $\varepsilon \sigma^T$ transpoz matrisi için 4.2 sistemi uygulandığında ; $M \sigma$ matrisi anti simetrik olduğundan

$$\varepsilon \sigma^T . \varepsilon \sigma$$

nin sabit bir fonksiyon olduğu sonucuna ulaşır.

$e_1^0, e_2^0, \dots, e_n^0$, bir ortonormal n çatı olduğu için burada E birim matris olmak üzere,

$$\varepsilon \sigma_0^T . \varepsilon \sigma_0 = E$$

matris eşitliği sağlanır. Sonuç olarak $\varepsilon \sigma$ matrisi ortogonaldir.

Bu da $e_1 \sigma, e_2 \sigma, \dots, e_n \sigma$ vektörlerinin herhangi bir $\sigma \in I$ için $\mathbb{R}^n$ 'de bir ortonormal n çatı oluşturduğunu gösterir. Kabul edelim ki

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

ve

$$\mu \sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma} h_1 \tau d\tau$$

olmak üzere

$$c \sigma = c_0 \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{\mu \tau} e_1 \tau d\tau, \quad \sigma \in I$$

ile verilen bir yüzey eğrisi olsun. Bu taktir de

$c(\sigma)$, bir $e_1(\sigma), e_2(\sigma), \dots, e_n(\sigma)$ Frenet n çatısı ve

$$i=1,2,3,\dots,n-1 \text{ için } \tilde{k}_i(\sigma) = h_i(\sigma)$$

değişmezleriyle $\mathbb{R}^n$ de bir Frenet eğrisidir.

5.DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

5.1.Sıfır Olmayan Öklidyen Eğrilikleriyle Frenet Eğrileri:

Kabul edelim ki $c: I \rightarrow IR^n$ eğrisi $e_1, e_2, \dots, e_n$, Frenet n çatısı ile tanımlanan birim hızlı bir Frenet eğrisi olsun ve c eğrisinin yay uzunluğu parametresini s ile gösterelim.

c eğrisinin $\forall s \in I$ için $k_i s$ Öklid eğriliklerinin, sıfır olmadığını kabul edelim.

c eğrisinin oskulator hiper kürelerinin merkezlerinin oluşturduğu $C: I \rightarrow IR^n$ eğrisine, c eğrisinin odak(focal) eğrisi denir.

Bu durumda C odak eğrisi,

$$C(s) = c(s) + f_1(s)e_2 + \dots + f_{n-1}(s)e_n$$

şeklinde bir yazılıma sahiptir.

Burada $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$, c eğrisinin odak(focal) eğrilikleri diye adlandırılan düzgün fonksiyonlardır.

Böylece her bir $s \in I$ için $k_i s \neq 0$ olduğundan $i = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere $\tilde{k}_i$ değişmezleri de tanımlanır. Yani daha açık bir biçim de

$$\tilde{k}_i = -\frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{d\sigma} = -\frac{1}{k_1} \cdot \frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{ds} = \frac{-k_1'}{k_1^2} = \left(\frac{1}{k_1} \right)'$$

ve

$$\tilde{k}_i = \frac{k_i}{k_1}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad 5.1$$

yazılabilir.

ÖNERME 5.1.1

Kabul edelim ki $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\forall s \in I$ için $k_i(s) \neq 0$ olan birim hızlı Frenet eğrisi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1 &= f_1' \\ \tilde{k}_i &= \frac{f_1}{f_{i-1} f_i} f_1 f_1' + f_2 f_2' + \dots + f_{i-1} f_{i-1}' \quad , i = 2, 3, \dots, n-1\end{aligned}\tag{5.2}$$

dir.

İspat:

$k_1(s) \neq 0$ olduğundan ve 12 den

$$k_1 f_1 = 1$$

veya

$$f_1 = \frac{1}{k_1}\tag{5.3}$$

yazılabilir. Bura da her iki tarafın türevi alınır

$$f_1' = \left(\frac{1}{k_1} \right)'$$

elde edilir. Buradan da

$$f_1' = \tilde{k}_1$$

sonucuna ulaşılır.

Benzer şekilde $\forall s \in I$ için $k_i(s) \neq 0$, $i = 2, 3, \dots, n-1$ olduğundan ve 12 den

$$k_i = \frac{f_1 f_1' + f_2 f_2' + \dots + f_{i-1} f_{i-1}'}{f_{i-1} f_i} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

yazılır.

Bu eşitliğin her iki taraf $\frac{1}{k_1}$ ile çarpılırsa

$$\frac{k_i}{k_1} = \frac{1}{k_1} \left(\frac{f_1 f_1' + f_2 f_2' + \dots + f_{i-1} f_{i-1}'}{f_{i-1} f_i} \right) \quad (5.4)$$

bulunur.(5.4) de (5.3) ve (5.1) kullanılırsa

$$\tilde{k}_i = f_1 \left(\frac{f_1 f_1' + f_2 f_2' + \dots + f_{i-1} f_{i-1}'}{f_{i-1} f_i} \right) , \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

6.Beşinci Bölüm

6.1 Kendine Benzer Frenet Eğrileri:

Tanım 6.1.1

$c : I \rightarrow IR^n$ Frenet eğrisi, direkt benzerliklerin bir parametrelili bir grubun hareketi altında bir yörünge ise kendine benzerdir denir.

Bu nedenle , IR^n de bir Frenet eğrisinin kendine benzer olması için Frenet eğrisinin bütün $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_{n-1}$ eğriliklerinin sabit olması gerek ve yeterdir.

Tanım 6.1.2

$c : I \rightarrow IR^n$ kendine benzer eğrisi

$$\tilde{k}_{i_0} = 0, \quad i_0 \in 2, 3, \dots, n-1$$

ve

$$\tilde{k}_i \neq 0, \quad i \neq 1, i_0$$

şartlarını sağlıyorsa IR^{n-1} de gömülmüştür(hapsedilmiştir) denir.

Sonuç 6.1.1

$i = 2, 3, \dots, n-2$ olmak üzere $\tilde{k}_1 = 0, \tilde{k}_i > 0$ ve $\tilde{k}_{n-1} \neq 0$ sabit değişmezlerle her bir kendine benzer eğriler

$$k_1 > 0, \quad k_2 = \tilde{k}_2 k_1 > 0, \quad \dots, \quad k_{n-2} = \tilde{k}_{n-2} k_1 > 0, \quad k_{n-1} = \tilde{k}_{n-1} k_1 \neq 0$$

sabit Öklid eğrilerine sahiptir.

Bu bölümün geri kalan kısmında IR^{n-1} de gömülü olmayan ve kendi kendine eşlenik olmayan IR^n de kendine benzer Frenet eğrileri vereceğiz.

Diğer bir ifadeyle,

$$\tilde{k}_1 \neq 0, \quad \tilde{k}_2 \neq 0, \quad \dots, \quad \tilde{k}_{n-1} \neq 0 \quad (6.1)$$

sabit değişmezlerle Frenet eğrilerine ön hazırlık yapacağız.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \tilde{k}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{k}_2 & 0 & \tilde{k}_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{k}_3 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\tilde{k}_{n-2} & 0 & \tilde{k}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\tilde{k}_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Sabit ve ters simetrik matrisini göz önüne alalım.

Bu durumda, simetrik M^2 matrisi tam olarak

$-\lambda_1^2, -\lambda_2^2, \dots, -\lambda_m^2$ $\left(m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ gibi 2. dereceden negatif öz değerlere sahiptir.

M Matrisin normal formu (şekli) 5

n 'nin çift olması durumunda;

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_m & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

n 'nin tek olması durumunda ise sıfırlardan oluşan bir satır ve bir sütunun eklenmesiyle aynı matrisi şekillendirebiliriz.

Bunun yanı sıra $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ olduğunu 8 in 2.16 sında geometrik olarak gösterilmiştir.

6.2 Çift Boyutlu Öklidyen Uzaylarda Kendine Benzer Eğriler

Bu bölümde $n = 2m$ olmak üzere çift boyutlu Öklidyen uzaylarda kendine benzer eğrileri tanımlayacağız. Örneğin Logaritmik spiral, IR^2 Öklid uzayında kendine benzer bir eğridir ve onun $\tilde{k}_1$ sabit değişmesi sıfırdan farklıdır.

Sonuç 6.2.1

Teorem(4.1.2) ye göre , IR^{2m} de her bir kendine benzer eğri, kendisinin (6.1) de verilen sabit değişmezleri tarafından belirlenir(tanımlanır).

Teorem 6.2.1

$c : I \longrightarrow IR^{2m}$, $\tilde{k}_1 \neq 0$, $\tilde{k}_2 \neq 0$, ... , $\tilde{k}_{2m-1} \neq 0$ sabit Öklid eğrilikleriyle kendine benzer bir eğri olsun. M^2 simetrik matrisinin birbirinden farklı $-\lambda_1^2$, $-\lambda_2^2$, ... , $-\lambda_m^2$ negatif öz değerleri olduğunu kabul edelim.

Bu durumda

$$b_i = \sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2} ,$$

$$\theta_i = \sqrt{\lambda_i^2} \sigma + \arccos \left(\frac{\sqrt{\lambda_i^2}}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \right) ,$$

$a_1, a_2, \dots, a_m$ birbirinden farklı sıfır olmayan reel sayıları

ve

$$\langle e_i, e_i \rangle = 1 , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

özelliğine sahip

$$\left. \begin{aligned}
e_1 \sigma &= e^{-\tilde{k}_1 \sigma} \frac{d}{d\sigma} c \sigma \\
e_2 \sigma &= \frac{d}{d\sigma} e_1 \sigma \\
e_3 \sigma &= \frac{1}{\tilde{k}_2} \left(e_1 \sigma + \frac{d}{d\sigma} e_2 \sigma \right) \\
e_4 \sigma &= \frac{1}{\tilde{k}_3} \left(\tilde{k}_2 e_2 \sigma + \frac{d}{d\sigma} e_3 \sigma \right) \\
&\vdots \\
e_m \sigma &= \frac{1}{\tilde{k}_{m-1}} \left(\tilde{k}_{m-2} e_{m-2} \sigma + \frac{d}{d\sigma} e_{m-1} \sigma \right)
\end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

vektörleri yardımıyla küresel yay uzunluğu σ parametrelili olan c eğrisinin bir parametrik gösterimi;

$i = 1, 2, \dots, m$ için

$$\mathbf{c}(\sigma) = \left(\frac{a_1}{b_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cdot \sin \theta_1, \frac{-a_1}{b_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cdot \cos \theta_1, \dots, \frac{a_m}{b_m} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cdot \sin \theta_m, \frac{-a_m}{b_m} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cdot \cos \theta_m \right) \quad 6.3$$

şeklinde m tane cebirsel quadratik denklem sisteminin bir çözümüdür.

İspat:

Teoremin ispatına (6.2) denkleminde verilen $e_1 \sigma, e_2 \sigma, \dots, e_m \sigma$ vektörlerin ispatıyla başlayalım.

$$\frac{dc}{d\sigma} = \frac{1}{k_1} c' = \frac{1}{k_1} e_1$$

veya

$$e_1 = k_1 \frac{dc}{d\sigma}$$

olarak yazılır. Buradan da

$$e_1(\sigma) = e^{-\tilde{k}_1\sigma} \frac{d}{d\sigma} c(\sigma)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$e'_1 = -k_0 e_0 + k_1 e_2$$

olduğundan

$$e_2 = \frac{1}{k_1} e'_1$$

olarak yazılır. Böylece

$$e_2(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} e_1(\sigma)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$e'_2 = -k_1 e_1 + k_2 e_3$$

olduğundan

$$e_3 = \frac{1}{k_2} (k_1 e_1 + e'_2)$$

ya da

$$e_3 = \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_1 e_1}{k_1} + \frac{e'_2}{k_1} \right)$$

olarak yazılır. Böylece

$$e_3(\sigma) = \frac{1}{k_2} \left(e_1(\sigma) + \frac{d}{d\sigma} e_2(\sigma) \right)$$

elde edilir. Aynı yöntemle

$$e'_3 = -k_2 e_2 + k_3 e_4$$

olduğundan

$$e_4 = \frac{1}{k_3} (k_2 e_2 + e'_3)$$

ya da

$$e_4 = \frac{k_2}{k_3} \left(\frac{k_2 e_2}{k_1} + \frac{e'_3}{k_1} \right)$$

olarak yazılır. Buradan da

$$e_4(\sigma) = \frac{1}{\tilde{k}_3} \left(\tilde{k}_2 e_2(\sigma) + \frac{d}{d\sigma} e_3(\sigma) \right)$$

elde edilir. Bu yöntemle devam ederse

$$e'_{m-1} = -k_{m-2} e_{m-2} + k_{m-1} e_m$$

veya

$$e_m = \frac{1}{k_{m-1}} k_{m-2} e_{m-2} + e'_{m-1}$$

ya da

$$e_m = \frac{k_1}{k_{m-1}} \left(\frac{k_{m-2} e_{m-2}}{k_1} + \frac{e'_{m-1}}{k_1} \right)$$

olarak yazılır. Sonuç olarak

$$e_m(\sigma) = \frac{1}{\tilde{k}_{m-1}} \left(\tilde{k}_{m-2} e_{m-2}(\sigma) + \frac{d}{d\sigma} e_{m-1}(\sigma) \right)$$

elde edilir.

Ohalde

$e_1 \sigma, e_2 \sigma, \dots, e_{2m-1} \sigma, e_{2m} \sigma$ birim vektör sistemi

$$\frac{d}{d\sigma} \varepsilon = M \varepsilon$$

şeklinde verilen birinci dereceden adi diferansiyel denklem sisteminin özel bir çözümü olan

$$\varepsilon \sigma = e_1 \sigma, e_2 \sigma, \dots, e_{2m-1} \sigma, e_{2m} \sigma^T$$

matris değerli fonksiyon olarak düşünülebilir.

Buradan, M matrisinin normal formundan e_1 birim vektörünün

$$\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$$

şartını sağlayan bazı reel a_i sabitleriyle

$$e_1 \sigma = a_1 \cos(\lambda_1 \sigma), a_1 \sin(\lambda_1 \sigma), \dots, a_m \cos(\lambda_m \sigma), a_m \sin(\lambda_m \sigma)$$

ile verildiği sonucuna ulaşır. Yani

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle (a_1 \cos(\lambda_1 \sigma), a_1 \sin(\lambda_1 \sigma), \dots, a_m \cos(\lambda_m \sigma), a_m \sin(\lambda_m \sigma)), (a_1 \cos(\lambda_1 \sigma), a_1 \sin(\lambda_1 \sigma), \dots, a_m \cos(\lambda_m \sigma), a_m \sin(\lambda_m \sigma)) \rangle$$

veya

$$a_1^2 (\cos^2(\lambda_1 \sigma) + \sin^2(\lambda_1 \sigma)) + \dots + a_m^2 (\cos^2(\lambda_m \sigma) + \sin^2(\lambda_m \sigma))$$

dir. Böylece

$$\langle e_1, e_1 \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2 = 1$$

olarak bulunur.

Kabul edelim ki

$$X = x_1(\sigma), x_2(\sigma), \dots, x_{2m-1}(\sigma), x_{2m}(\sigma)$$

c eğrisinin parametrik denklemi olsun.

$$\text{Bu durumda 3.4 eşitliğinden } \frac{d}{d\sigma} X = \frac{1}{k_1} e_1 \text{ olup}$$

c eğrisinin birinci Öklidyen eğriliği de

$$k_1 = e^{-\tilde{k}_1 \sigma}$$

şeklinde yazılır. Böylece

$i = 1, 2, \dots, m$ için

$$\frac{d}{d\sigma} x_{2i-1} = a_i e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cos \lambda_i \sigma \quad (6.4)$$

ve

$$\frac{d}{d\sigma} x_{2i} = a_i e^{\tilde{k}_1 \sigma} \sin \lambda_i \sigma \quad (6.5)$$

elde edilir.

(6.4) ve (6.5) eşitliklerinin integrallerini alalım. İlk olarak (6.4) ün integrali alınır

$$\int \frac{d}{d\sigma} x_{2i-1} d\sigma = \int a_i e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cdot \cos(\lambda_i \sigma) d\sigma$$

olup kısmi integrasyondan

$$x_{2i-1} = \frac{a_i}{\tilde{k}_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cos \lambda_i \sigma + \frac{\lambda_i}{\tilde{k}_1} x_{2i} \quad (6.6)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (6.5) in integrali alınır

$$\int \frac{d}{d\sigma} x_{2i} d\sigma = \int a_i e^{\tilde{k}_i \sigma} \cdot \sin(\lambda_i \sigma) d\sigma$$

olup kısmi integrasyondan

$$x_{2i} = \frac{a_i}{\tilde{k}_i} e^{\tilde{k}_i \sigma} \sin \lambda_i \sigma - \frac{\lambda_i}{\tilde{k}_i} x_{2i-1} \quad (6.7)$$

olarak bulunur. Böylece (6.6) ve (6.7) de oluşan bir lineer denklem sistemi elde ederiz.

Şimdi bu lineer denklem sistemini çözelim. (6.6) ve (6.7) den

$$x_{2i-1} - \frac{\lambda_i}{\tilde{k}_i} x_{2i} = \frac{a_i}{\tilde{k}_i} e^{\tilde{k}_i \sigma} \cos(\lambda_i \sigma)$$

ve

$$\frac{\lambda_i}{\tilde{k}_i} x_{2i-1} + x_{2i} = \frac{a_i}{\tilde{k}_i} e^{\tilde{k}_i \sigma} \sin(\lambda_i \sigma)$$

yazılabilir. Buradan

$$x_{2i-1} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{a_i}{\tilde{k}_i} e^{\tilde{k}_i \sigma} \cos(\lambda_i \sigma) & -\frac{\lambda_i}{\tilde{k}_i} \\ \frac{a_i}{\tilde{k}_i} e^{\tilde{k}_i \sigma} \sin(\lambda_i \sigma) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\lambda_i}{\tilde{k}_i} \\ \frac{\lambda_i}{\tilde{k}_i} & 1 \end{vmatrix}}$$

veya

$$x_{2i-1} = \frac{\frac{a_i}{\tilde{k}_i} e^{\tilde{k}_i \sigma} \cos(\lambda_i \sigma) + \frac{\lambda_i}{\tilde{k}_i} \cdot \frac{a_i}{\tilde{k}_i} e^{\tilde{k}_i \sigma} \sin(\lambda_i \sigma)}{1 + \frac{\lambda_i^2}{\tilde{k}_i^2}}$$

ya da

$$x_{2i-1} = \frac{a_i}{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2} \cdot e^{\tilde{k}_1 \sigma} \tilde{k}_1 \cos(\lambda_i \sigma) + \lambda_i \sin(\lambda_i \sigma) \quad (6.8)$$

olarak bulunur. Şimdi de x_{2i} denklemini çözelim.

$$x_{2i} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_i}{\tilde{k}_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cos(\lambda_i \sigma) \\ \frac{\lambda_i}{\tilde{k}_1} & \frac{a_i}{\tilde{k}_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \sin(\lambda_i \sigma) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\lambda_i}{\tilde{k}_1} \\ \frac{\lambda_i}{\tilde{k}_1} & 1 \end{vmatrix}}$$

veya

$$x_{2i} = \frac{\frac{a_i}{\tilde{k}_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \sin(\lambda_i \sigma) - \frac{\lambda_i}{\tilde{k}_1} \cdot \frac{a_i}{\tilde{k}_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cos(\lambda_i \sigma)}{1 + \frac{\lambda_i^2}{\tilde{k}_1^2}}$$

ya da

$$x_{2i} = \frac{a_i}{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2} \cdot e^{\tilde{k}_1 \sigma} \tilde{k}_1 \cos(\lambda_i \sigma) - \lambda_i \sin(\lambda_i \sigma)$$

(6.9)

olarak bulunur.

Diğer taraftan

$$\theta_i = \lambda_i \sigma + \arccos \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \right)$$

eşitliğide her iki tarafın sinüs 'ü alınırsa

$$\sin \theta_i = \sin \left(\lambda_i \sigma + \arccos \frac{\lambda_i}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \right)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\sin \theta_i = \sin(\lambda_i \sigma) \cdot \cos \left(\arccos \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \right) \right) + \cos(\lambda_i \sigma) \cdot \sin \left(\arccos \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \right) \right)$$

veya

$$\sin \theta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \cdot \sin(\lambda_i \sigma) + \frac{\tilde{k}_1}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \cdot \cos(\lambda_i \sigma)$$

ya da

$$\sin \theta_i = \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \cdot (\lambda_i \sin(\lambda_i \sigma) + \tilde{k}_1 \cos(\lambda_i \sigma)) \quad (6.10)$$

elde edilir.

Bezer şekilde

$$\theta_i = \lambda_i \sigma + \arccos \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \right)$$

eşitliğide her iki tarafın cosinüs 'ü alınır

$$\cos \theta_i = \cos \left(\lambda_i \sigma + \arccos \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \right) \right)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\cos \theta_i = \cos(\lambda_i \sigma) \cdot \cos \left(\arccos \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \right) \right) - \sin(\lambda_i \sigma) \cdot \sin \left(\arccos \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \right) \right)$$

veya

$$\cos \theta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \cos(\lambda_i \sigma) - \frac{\tilde{k}_1}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \sin(\lambda_i \sigma)$$

ya da

$$\cos \theta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\tilde{k}_i^2 + \lambda_i^2}} \lambda_i \cos(\lambda_i \sigma) - \tilde{k}_i \sin(\lambda_i \sigma) \quad (6.11)$$

elde edilir.

(6.10) ve (6.11) eşitlikleri (6.8) ve (6.9) denklemlerin de yerine yazılırsa

$$x_{2i-1} = \frac{a_i}{\tilde{k}_i^2 + \lambda_i^2} \cdot e^{\tilde{k}_i \sigma} \tilde{k}_i \cos(\lambda_i \sigma) + (\lambda_i \sin(\lambda_i \sigma))$$

veya

$$x_{2i-1} = \frac{a_i}{\sqrt{\tilde{k}_i^2 + \lambda_i^2}} \cdot e^{\tilde{k}_i \sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}_i^2 + \lambda_i^2}} \tilde{k}_i \cos(\lambda_i \sigma) + (\lambda_i \sin(\lambda_i \sigma))$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$x_{2i-1} = \frac{a_i}{\sqrt{\tilde{k}_i^2 + \lambda_i^2}} \cdot e^{\tilde{k}_i \sigma} \cdot \sin \theta_i$$

veya

$$x_{2i-1} = \frac{a_i}{b_i} \cdot e^{\tilde{k}_i \sigma} \cdot \sin \theta_i \quad (6.12)$$

elde edilir. Benzer hesaplamayla

$$x_{2i} = \frac{a_i}{\tilde{k}_i^2 + \lambda_i^2} \cdot e^{\tilde{k}_i \sigma} \tilde{k}_i \sin(\lambda_i \sigma) - \lambda_i \cos(\lambda_i \sigma)$$

veya

$$x_{2i} = \frac{a_i}{\sqrt{\tilde{k}_i^2 + \lambda_i^2}} \cdot e^{\tilde{k}_i \sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}_i^2 + \lambda_i^2}} - (\lambda_i \cos(\lambda_i \sigma) - \tilde{k}_i \sin(\lambda_i \sigma))$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$x_{2i} = \frac{-a_i}{\sqrt{\tilde{k}_i^2 + \lambda_i^2}} \cdot e^{\tilde{k}_i \sigma} \cdot \cos \theta_i$$

ya da

$$x_{2i} = -\frac{a_i}{b_i} \cdot e^{\tilde{k}_i \sigma} \cdot \cos \theta_i \quad (6.13)$$

elde edilir.

Sonuç olarak bu çözümler

$$x_{2i-1} = \frac{a_i}{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \tilde{k}_1 \cos(\lambda_i \sigma) + \lambda_i \sin(\lambda_i \sigma) = \frac{a_i}{b_i} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \sin \theta_i$$

ve

$$x_{2i} = \frac{a_i}{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \tilde{k}_1 \sin(\lambda_i \sigma) - \lambda_i \cos(\lambda_i \sigma) = -\frac{a_i}{b_i} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cos \theta_i$$

şeklindedir. Buradan Kendine benzer c eğrisi için 3.6 eşitliği kullandığında , 6.2 deki birim vektörlerini elde ederiz.

$$e_1(\sigma) = (a_1 \cos(\lambda_1 \sigma), a_1 \sin(\lambda_1 \sigma), \dots, a_m \cos(\lambda_m \sigma), a_m \sin(\lambda_m \sigma))$$

ve

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 1$$

eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} & \langle (a_1 \cos(\lambda_1 \sigma), a_1 \sin(\lambda_1 \sigma), \dots, a_m \cos(\lambda_m \sigma), a_m \sin(\lambda_m \sigma)), \\ & (a_1 \cos(\lambda_1 \sigma), a_1 \sin(\lambda_1 \sigma), \dots, a_m \cos(\lambda_m \sigma), a_m \sin(\lambda_m \sigma)) \rangle = 1 \end{aligned}$$

veya

$$a_1^2 \cos^2(\lambda_1 \sigma) + a_1^2 \sin^2(\lambda_1 \sigma) + \dots + a_m^2 \cos^2(\lambda_m \sigma) + a_m^2 \sin^2(\lambda_m \sigma) = 1$$

olur. Buradan da

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$$

elde edilir. Aynı yöntemle

$$e_2(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} e_1(\sigma)$$

eşitliğinden

$$e_2(\sigma) = (-a_1 \lambda_1 \sin(\lambda_1 \sigma), a_1 \lambda_1 \cos(\lambda_1 \sigma), \dots, -a_m \lambda_m \sin(\lambda_m \sigma), a_m \lambda_m \cos(\lambda_m \sigma))$$

elde edilir ve

$$\langle e_2, e_2 \rangle = 1$$

olduğundan

$$a_1^2 \lambda_1^2 + a_2^2 \lambda_2^2 + \dots + a_m^2 \lambda_m^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2 \lambda_i^2 = 1$$

elde edilir. Eğer

$$e_3(\sigma) = \frac{1}{\tilde{k}_2} \left(e_1(\sigma) + \frac{d}{d\sigma} e_2(\sigma) \right)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$e_3(\sigma) = \frac{1}{\tilde{k}_2} ((a_1 - a_1 \lambda_1^2) \cos(\lambda_1 \sigma), (a_1 - a_1 \lambda_1^2) \sin(\lambda_1 \sigma), \dots, (a_m - a_m \lambda_m^2) \cos(\lambda_m \sigma), (a_m - a_m \lambda_m^2) \sin(\lambda_m \sigma))$$

olarak bulunur ve

$$\langle e_3, e_3 \rangle = 1$$

olduğundan

$$\frac{1}{\tilde{k}_2^2} ((a_1 - a_1 \lambda_1^2)^2 + (a_2 - a_2 \lambda_2^2)^2 + \dots + (a_m - a_m \lambda_m^2)^2) = 1$$

yani

$$\sum_{i=1}^m a_i^2 (1 - \lambda_i^2)^2 = \tilde{k}_2^2$$

elde edilir. Yani ilk üç ifade

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$$

$$\langle e_2, e_2 \rangle = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i^2 \lambda_i^2 = 1$$

$$\langle e_3, e_3 \rangle = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i^2 (1 - \lambda_i^2)^2 = \tilde{k}_2^2$$

şeklinde bulunur. İspatın geri kalan kısmı benzer hesaplamalarla yapılabilir.

Sonuç 6.2.2:

$$c: I \rightarrow \mathbb{R}^{2m} \quad (m > 1)$$

(6.3) parametrik temsiliyle kendine benzer bir eğri olsun. Bu durumda bu eğri,

$$\frac{b_1^2}{a_1^2} x_1^2 + x_2^2 + \dots + \frac{b_{m-1}^2}{a_{m-1}^2} x_{2m-3}^2 + x_{2m-2}^2 = (m-1) \frac{b_m^2}{a_m^2} x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2 \quad (6.14)$$

denklemleriyle ikinci dereceden hiper yüzey üzerinde yatar.

İspat:

(6.3) eşitliği (6.14) ün sol tarafında yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{b_1^2}{a_1^2} x_1^2 + x_2^2 + \dots + \frac{b_{m-1}^2}{a_{m-1}^2} x_{2m-3}^2 + x_{2m-2}^2 = \\ &= \frac{b_1^2}{a_1^2} \left(\left(\frac{a_1}{b_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \sin \theta_1 \right)^2 + \left(\frac{-a_1}{b_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cos \theta_1 \right)^2 \right) + \dots + \frac{b_{m-1}^2}{a_{m-1}^2} \left(\left(\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \sin \theta_{m-1} \right)^2 + \left(\frac{-a_{m-1}}{b_{m-1}} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cos \theta_{m-1} \right)^2 \right) \\ &= \underbrace{e^{\tilde{k}_1 \sigma^2} + e^{\tilde{k}_1 \sigma^2} + \dots + e^{\tilde{k}_1 \sigma^2}}_{(m-1) \text{ tane}} \\ &= (m-1) e^{\tilde{k}_1 \sigma^2} \\ &= (m-1) \frac{b_m^2}{a_m^2} \left(\left(\frac{a_m}{b_m} \right)^2 \cdot e^{\tilde{k}_1 \sigma^2} \cdot \sin^2 \theta_m + \left(\frac{-a_m}{b_m} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cdot \cos \theta_m \right)^2 \right) \\ &= (m-1) \cdot \frac{b_m^2}{a_m^2} x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buda (6.14) denkleminin ikinci dereceden hiper yüzey üzerinde yattığını gösterir.

Örnek 6.2.1:

$n = 2$ alınırsa c_2 eğrisi $\tilde{k}_1$ sabit Öklid eğriliğiyle bir logaritmik spiral olsun. Bu durumda

$$2m = n = 2$$

olduğundan

$$m = 1, \quad -\lambda_1^2 = -1 \quad \text{ve} \quad a_1^2 \lambda_1^2 = 1$$

dir.

Böylece c_2 eğrisinin bir küresel yay uzunluğunun parametrizasyonu;

$$\theta_i = \sqrt{\lambda_i^2} \sigma + \arccos \left(\frac{\sqrt{\lambda_i^2}}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \right)$$

eşitliğinden

$$\theta = \sigma + \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + 1}} \right)$$

olmak üzere

$$c_2(\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + 1}} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \sin \theta, \frac{-1}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + 1}} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cos \theta \right)$$

dır.

Örnek 6.2.1:

$n = 4$ alınırsa c_4 eğrisi $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ ve $\tilde{k}_3$ sabit Öklid eğriliklerine sahip $\mathbb{R}^4$ de kendine benzer bir eğri olsun.

Bu durumda

$$M^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \tilde{k}_2 & 0 \\ 0 & -1 - \tilde{k}_2 & 0 & \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 \\ \tilde{k}_2 & 0 & -\tilde{k}_2^2 - \tilde{k}_3^2 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 & 0 & -\tilde{k}_3^2 \end{bmatrix}$$

matrisi 2 tane negatif özdeğere sahiptir.

Bu özdeğerler $i = 1, 2$ olmak üzere

$$-\lambda_i^2 = -\frac{1}{2} \left(1 + \tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_3^2 + (-1)^i \sqrt{1 + \tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_3^2 - 4\tilde{k}_3^2} \right)$$

veya

$$-\lambda_i^2 = -\frac{1}{2} \left(1 + \tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_3^2 + (-1)^i \sqrt{1 - \tilde{k}_2^2 - \tilde{k}_3^2 + 4\tilde{k}_2^2} \right)$$

dır.

$$\lambda_2^2 - \lambda_1^2 > 0, \quad \lambda_2^2 - 1 > 0 \quad \text{ve} \quad 1 - \lambda_1^2 > 0 \quad \text{için}$$

$$a_1^2 + a_2^2 = 1$$

ve

$$a_1^2 \lambda_1^2 + a_2^2 \lambda_2^2 = 1$$

ikinci derece denklem sistemleri

$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda_2^2 - 1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}}$$

ve

$$a_2 = \sqrt{\frac{1 - \lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}}$$

şeklinde çözümüne sahiptir.

Buradan c_4 eğrisi

$i = 1, 2$ için

$$b_i = \sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}$$

ve

$$\theta_i = \sqrt{\lambda_i^2} \sigma + \arccos \left(\frac{\sqrt{\lambda_i^2}}{\sqrt{\tilde{k}_1^2 + \lambda_i^2}} \right)$$

olmak üzere

$$c_4(\sigma) = \left(\frac{a_1}{b_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \sin \theta_1, \frac{-a_1}{b_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cos \theta_1, \frac{a_2}{b_2} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \sin \theta_2, \frac{-a_2}{b_2} e^{\tilde{k}_1 \sigma} \cos \theta_2 \right)$$

şeklinde yay uzunluğu temsiline sahiptir.

7. Altıncı Bölüm

7.1 Kendine Benzer Frenet Eğrileri İçin Bazı Karakterizasyonlar

Bu bölüm çalışmamızın orijinal bölümü olup kendine benzer Frenet eğrileri için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

7.2 Eğrilik Çemberi

Bir $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde tanımlı ve birim hızlı $c = c(s) : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin Frenet hareketli n-çatısı $e_1(s), e_2(s), \dots, e_n(s)$, Öklid eğrilikleri $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}$ olsun.

$c = c(s) : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin σ ile parametrelendirilmiş ve kendisine benzer Frenet eğrisi $c = c(\sigma) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ olsun.

$c = c(\sigma) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin Frenet hareketli n-çatısı $e_1(\sigma), e_2(\sigma), \dots, e_n(\sigma)$ ve Öklid eğrilikleri $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, \dots, \tilde{k}_{n-1}$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki kavramları tanımlarız.

Tanım 7.2.1

$c = c(\sigma) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisine bir nokta da temas eden ikinci basamaktan bir çember vardır. $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin $c = c(\sigma) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisine k' inci basamaktan değmesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$c(\sigma) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin $c(\sigma_0)$ noktası verilsin. $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir eğri olmak üzere $t_0 \in J$ için

$$\gamma(t_0) = c(\sigma_0)$$

oluyorsa γ eğrisi $c(\sigma)$ eğrisine 0 inci basamaktan değiyor, eğer

$$\gamma(t_0) = c(\sigma_0) \quad , \quad \gamma'(t_0) = c'(\sigma_0) = \frac{1}{k_1} e_1(s)$$

oluyorsa γ eğrisi $c(\sigma)$ eğrisine 1 inci basamaktan değişiyor

$$\gamma(t_0) = c(\sigma_0) \quad , \quad \gamma'(t_0) = c'(\sigma_0) = \frac{1}{k_1} e_1(s) \quad , \quad \gamma''(t_0) = c''(\sigma_0) = \left(\frac{1}{k_1}\right)' e_1(s) + e_2(s)$$

oluyorsa γ eğrisi $c(\sigma)$ eğrisine 2 inci basamaktan değişiyor ve en son olarak

$$\gamma(t_0) = c(\sigma_0) \quad , \quad \gamma'(t_0) = c'(\sigma_0) = \frac{1}{k_1} e_1(s) \quad , \dots \quad \gamma^k(t_0) = c^k(\sigma_0) = -\tilde{k}_{n-1} e_{n-1}(s) + \tilde{k}_1 e_n(s)$$

oluyorsa γ eğrisi $c(\sigma)$ eğrisine k inci basamaktan değişiyor denir.

Tanım 7.2.2

$c(\sigma): I \rightarrow IR^3$ eğrisinin birinci eğriliği $\tilde{k}_1$ olmak üzere $\frac{1}{\tilde{k}_1}$ fonksiyonuna, $c(\sigma)$

eğrisinin eğrilik yarıçapı fonksiyonu denir ve ρ ile gösterilir. Yani

$$\rho = \frac{1}{\tilde{k}_1} \tag{7.1}$$

dır.

Sonuç 7.2.1

$c(\sigma): I \rightarrow IR^3$ eğrisinin eğrilik yarıçapı fonksiyonu $c = c(s): I_0 \rightarrow IR^n$

eğrisinin birinci eğriliği cinsinden

$$\rho = \frac{-k_1^2}{k_1'} \tag{7.2}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat:

$c = c(s) : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin birinci eğriliği k_1 olmak üzere (7.1) den bulunur.

Tanım 7.2.3

$c(\sigma) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve $\sigma_0 \in I$ olsun. $c(\sigma)$ eğrisine $c(\sigma_0)$ noktasında 2 inci basamaktan değen $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ çemberine $c(\sigma)$ eğrisine $c(\sigma_0)$ noktasındaki eğrilik çemberi denir.

Tanım 7.2.4

$c(\sigma) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğrisinin eğrilik çemberinin merkezi

$$m = c(\sigma_0) + \rho_0 e_2(\sigma_0)$$

şeklinde tanımlanan noktadır.

Sonuç 7.2.2

$c(\sigma) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin eğrilik çemberinin merkezi $c = c(s) : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$

eğrisinin Frenet vektörleri ve Öklid eğriliği cinsinden

$$m = c(\sigma_0) - \frac{k_1}{k_1'} e_2(s_0)$$

şeklinde yazılır.

İspat:

$c(\sigma)$ eğrisinin eğrilik çemberinin merkezi m ve $c(s)$ eğrisinin birinci eğriliği k_1 ve $k_1' \neq 0$ olmak üzere (3.7) ve (7.2) den

$$m = c(\sigma_0) + \rho_0 e_2(\sigma_0) = c(\sigma_0) + \frac{-k_1^2}{k_1'} \cdot \frac{1}{k_1} e_2(s_0) = c(\sigma_0) - \frac{k_1}{k_1'} e_2(s_0)$$

olarak elde edilir.

Tanım 7.2.5

$c(\sigma_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezinden geçen ve $e_3(\sigma_0)$ vektörüne paralel olan doğruya $c(\sigma_0)$ noktasın da eğrilik eksenini denir ve $\mu \in R$ olmak üzere

$$d(\mu) = c(\sigma) + p_0 e_2(\sigma) + \mu e_3(\sigma)$$

ya da

$$d(\mu) = c(\sigma) - \frac{k_1}{k_1'} e_2(s) + \mu \cdot \frac{1}{k_1} e_3(s)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 7.2.6

$c(\sigma): I \rightarrow R^3$ birim hızlı bir eğri ve $\sigma_0 \in I$ olsun. $c(\sigma)$ eğrisine $c(\sigma_0)$ noktasında 2 inci basamaktan değen bir

$$\gamma: J \rightarrow R^n$$

çemberi vardır. Bu çember

$$\gamma(\theta) = c(\sigma) + \rho_0 e_2(\sigma) + \rho_0 \cos \frac{\theta}{\rho_0} (-e_2(\sigma)) + \rho_0 \sin \frac{\theta}{\rho_0} e_1(\sigma)$$

denklemleriyle verilir.

Sonuç 7.2.3

$c(\sigma): I \rightarrow IR^3$ eğrisinin eğrilik çemberinin denklemi $c = c(s): I_0 \rightarrow IR^n$ eğrisinin Frenet vektörleri ve Öklid eğriliği cinsinden

$$\gamma(\theta) = c(\sigma) - \frac{k_1}{k_1'} e_2(s) + \frac{k_1}{k_1'} \cos \frac{-\theta k_1'}{k_1^2} e_2(s) - \frac{k_1}{k_1'} \sin \frac{-\theta k_1'}{k_1^2} e_1(s)$$

şeklinde yazılır.

İspat:

$c(\sigma): I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri olsun. $c(\sigma)$ eğrisine $c(\sigma_0)$ noktasında 2. basamaktan değen çemberin denklemi

$$\gamma(\theta) = c(\sigma) + \rho_0 e_2(\sigma) + \rho_0 \cos \frac{\theta}{\rho_0} (-e_2(\sigma)) + \rho_0 \sin \frac{\theta}{\rho_0} e_1(\sigma)$$

olup (3.7) den

$$\gamma(\theta) = c(\sigma) - \frac{k_1^2}{k_1'} \cdot \frac{1}{k_1} e_2(s) - \frac{k_1^2}{k_1'} \cdot \cos \frac{-\theta k_1'}{k_1^2} \cdot \frac{-1}{k_1} e_2(s) - \frac{k_1^2}{k_1'} \sin \frac{-\theta k_1'}{k_1^2} \cdot \frac{1}{k_1} e_1(s)$$

veya

$$\gamma(\theta) = c(\sigma) - \frac{k_1}{k_1'} e_2(s) + \frac{k_1}{k_1'} \cos \frac{-\theta k_1'}{k_1^2} e_2(s) - \frac{k_1}{k_1'} \sin \frac{-\theta k_1'}{k_1^2} e_1(s)$$

elde edilir.

Tanım 7.2.7

$c(\sigma): I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve $\sigma_0 \in I$ olsun. $c(\sigma)$ eğrisine $c(\sigma_0)$ noktasında 3. basamaktan değen bir ve yalnız bir küre vardır ve bu kürenin merkezi

$$d = c(\sigma) + \rho_0 e_2(\sigma) + \rho_0' \cdot \frac{1}{k_2} e_3(\sigma)$$

veya

$$d = c(\sigma) + \left(\frac{-k_1^2}{k_1'} \cdot \frac{1}{k_1} e_2(s) \right) + \left(\left(\frac{-k_1^2}{k_1'} \right)' \cdot \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{k_1} e_3(s) \right)$$

ya da

$$d = c(\sigma) - \frac{k_1}{k_1'} e_2(s) + \left(-2k_1 + \frac{k_1'' \cdot k_1^2}{(k_1')^2} \right) \cdot \frac{1}{k_2} e_3(s)$$

eşitliğiyle belirli d doğrusudur.

Tanım 7.2.8

$c(\sigma)$ eğrisinin $c(\sigma_0)$ noktasındaki eğrilik küresinin yarıçapı r ise, bu takdirde

$$r = \sqrt{(\rho_0)^2 + ((\rho')_0 \cdot \frac{1}{\tilde{k}_2})^2} = \sqrt{\frac{k_1^4}{(k_1')^2} + (\frac{-2k_1^2}{k_2} + \frac{k_1''k_1^3}{(k_1')^2 \cdot k_2})^2}$$

şeklinde tanımlanır.

7.3 Eğilim Çizgisi

Tanım 7.3.1

$c = c(\sigma) : I \rightarrow R^n$ eğrisinin birim teğet vektör alanı $e_1(\sigma)$ ve $X \in \chi(R^n)$ sabit bir birim vektör alanı olsun. Eğer $p \in c$ için

$$\langle e_1(\sigma), X \rangle \Big|_p = \cos \varphi = \text{sabit} , \quad (\varphi \neq \frac{\pi}{2})$$

ise $c(\sigma)$ eğrisine R^n de bir eğilim çizgisi, φ açısına $c(\sigma)$ eğrisinin eğilim açısı denir.

Sonuç 7.3.1

$c(\sigma)$ eğrisinin ikinci eğriliği $\tilde{k}_2$ olmak üzere $c(s)$ eğrisinin birinci Harmonik eğriliği

$$H_1 = \frac{1}{\tilde{k}_2}$$

dir.

Sonuç 7.3.2

$c(s)$ eğrisinin 1. eğriliği k_1 , 2. eğriliği k_2 ise $c(\sigma)$ eğrisinin birinci Harmonik eğriliği

$$H_1(\sigma) = H_1^* = \frac{\tilde{k}_1}{\tilde{k}_2} = \frac{-\frac{1}{k_1} \cdot \frac{dk_1}{d\sigma}}{\frac{k_2}{k_1}} = -\frac{\frac{dk_1}{d\sigma}}{k_2} = \frac{\frac{1}{k_1} \cdot \frac{dk_1}{d\sigma}}{k_2} = \frac{(k_1)'}{k_1 \cdot k_2}$$

dir.

Teorem 7.3.1

$c = c(s) : I_0 \rightarrow R^n$ eğrisi R^n de bir eğilim çizgisi ve birinci eğriliği $k_1 = \text{sabit}$ ise σ ile parametrelendirilmiş ve kendisine benzer Frenet eğrisi olan $c = c(\sigma) : I \rightarrow R^n$ eğrisi de R^n de bir eğilim çizgisidir.

İspat:

$X \in \chi(R^n)$ sabit bir birim vektör olsun. Eğilim çizgisi olduğunu göstermek için $\langle e_1(\sigma), X \rangle = \text{sabit}$ olduğunu göstermeliyiz.

$p \in c$ ve $c = c(s) : I_0 \rightarrow R^n$ eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$e_1(\sigma) = \frac{1}{k_1} e_1(s)$$

olduğundan

$$\langle e_1(\sigma), X \rangle = \left\langle \frac{1}{k_1} e_1(s), X \right\rangle_p = \frac{1}{k_1} \langle e_1(s), X \rangle_p = \frac{\cos \varphi}{k_1} = \text{sabit}$$

olarak bulunur. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 7.3.2

$c(\sigma)$ bir eğilim çizgisi ve $c(s)$ eğrisinin birinci eğriliği $k_1 = \text{sabit}$ ise $c(s)$ eğrisinin $e_2(s)$ vektörü $X \in \chi(R^n)$ sabit birim vektör alanına diktir yani

$$\langle e_2(s), X \rangle = 0$$

dır.

İspat:

$c(\sigma)$ eğilim çizgisi olduğundan $\langle e_1(\sigma), X \rangle = \text{sabit}$ tir. Bu takdirde

$$\langle \frac{1}{k_1} e_1(s), X \rangle = \text{sabit}$$

tir. Her iki tarafın türevini aldığımızda

$$\langle 0 \cdot e_1(s) + \frac{1}{k_1} \cdot k_1 e_2(s), X \rangle = 0$$

olur.

Buradan da

$$\langle e_2(s), X \rangle = 0$$

olarak bulunur. Bu da bize $c(s)$ eğrisinin birinci dik vektörü $e_2(s)$ nin , $X \in \chi(R^n)$ sabit birim vektör alanına dik olduğunu gösterir.

Teorem 7.3.3

$c = c(s) : I_0 \rightarrow R^n$ eğrisi bir eğilim çizgisi ve birinci eğriliği k_1 olsun. σ ile parametrelendirilmiş kendisine benzer Frenet eğrisi olan $c = c(\sigma) : I \rightarrow R^n$ eğrisi de bir eğilim çizgisi ise $c(\sigma)$ eğrisinin birinci eğriliği $\tilde{k}_1$ sabittir.

İspat:

$X \in \chi(R^n)$ sabit bir birim vektör olsun. $c(\sigma)$ eğilim çizgisi olduğundan

$$\langle e_1(\sigma), X \rangle = \langle \frac{1}{k_1} e_1(s), X \rangle = \text{sabit}$$

tir. Her iki tarafın türevi alınır

$$\langle (\frac{1}{k_1} e_1(s))', X \rangle + \langle (\frac{1}{k_1} e_1(s), 0) \rangle = 0$$

veya

$$\langle \tilde{k}_1 \cdot e_1(s) + e_2(s), X \rangle = 0$$

buradan

$$\tilde{k}_1 \langle e_1(s), X \rangle + \langle e_2(s), X \rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle e_1(s), X \rangle = \cos \varphi \text{ ve } \langle e_2(s), X \rangle = \sin \varphi \text{ alınır}$$

$$\tilde{k}_1 \cos \varphi + \sin \varphi = 0$$

veya

$$\tilde{k}_1 = \tan(180 - \varphi)$$

buradan da

$$\tilde{k}_1 = \text{sabit}$$

elde edilir.

7.4 İvolüt ve Evolüt Eğrileri

Teorem 7.4.1

$c = c(s) : I_0 \rightarrow R^n$ eğrisinin σ ile parametrelendirilmiş ve kendisine benzer Frenet eğrisi $c^* : c^*(\sigma) : I_0 \rightarrow R^n$, $c^* = c^*(s) = I_0 \rightarrow R^n$ eğrisinin σ ile parametrelendirilmiş ve kendisine benzer Frenet eğrisi $c^* : c^*(\sigma) : I \rightarrow R^n$ olsun.

$c^* = c^*(s) = I_0 \rightarrow R^n$ eğrisi $c = c(s) : I_0 \rightarrow R^n$ eğrisinin involütü ve bu eğrilerin 1. eğrilikleri sırasıyla $k_1 \neq 0$ ve $k_1^* \neq 0$ ise $c^* : c^*(\sigma) : I \rightarrow R^n$ eğrisi $c : c(\sigma) : I_0 \rightarrow R^n$ eğrisinin involütüdür.

İspat:

$c(\sigma)$ eğrisinin involütünün $c^*(\sigma)$ olması için

$$\langle e_1(\sigma), e_1^*(\sigma) \rangle = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\langle e_1(\sigma), e_1^*(\sigma) \rangle = \langle \frac{1}{k_1} e_1(s), \frac{1}{k_1^*} e_1^*(s) \rangle = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{1}{k_1^*} \langle e_1(s), e_1^*(s) \rangle = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Theorem 7.4.2

Eğer $c^*(\sigma)$ eğrisi $c(\sigma)$ eğrisinin involütü ise

$$d(c(\sigma), c^*(\sigma)) = \left| \int \frac{1}{k_1} ds \right|$$

veya

$$d(c(\sigma), c^*(\sigma)) = \left| \frac{1}{k_1 k_1^*} \right|$$

dir.

İspat:

$c^*(\sigma)$ eğrisi $c(\sigma)$ eğrisinin involütü ise

$$c^*(\sigma) = c(\sigma) + \lambda e_1(\sigma)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının türevi alındığında

$$\frac{1}{k_1^*} e_1^*(s) = \frac{1}{k_1} e_1(s) + \lambda' \cdot \frac{1}{k_1} e_1(s) + \lambda \left(\left(\frac{1}{k_1} \right)' e_1(s) + e_2(s) \right)$$

olup

$$\frac{1}{k_1^*} e_1^*(s) = \left(\frac{1}{k_1} + \lambda' \cdot \frac{1}{k_1} + \lambda \left(\frac{1}{k_1} \right)' \right) e_1(s) + \lambda e_2(s)$$

veya

$$\frac{1}{k_1^*} e_1^*(s) = \left(\frac{1}{k_1} + \left(\frac{\lambda}{k_1}\right)'\right) e_1(s) + \lambda e_2(s) \quad (7.3)$$

denklemini elde edilir.

Eğer (7.3) eşitliğinin her iki tarafı $e_1^*(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\frac{1}{k_1^*} = \lambda \quad (7.4)$$

bulunur Benzer şekilde (7.3) denkleminde her iki tarafı $e_1(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$-\frac{1}{k_1} = \left(\frac{\lambda}{k_1}\right)'$$

olup

$$\frac{\lambda}{k_1} = -\int \frac{1}{k_1} ds$$

buradan

$$\lambda = -k_1 \cdot \int \frac{1}{k_1} ds \quad (7.5)$$

bulunur.

Diğer taraftan

$$d(c(\sigma), c^*(\sigma)) = \|c^*(\sigma) - c(\sigma)\| = \|\lambda \cdot e_1(\sigma)\| = \left\| \lambda \cdot \frac{1}{k_1} e_1(s) \right\|$$

ve $\|e_1(s)\| = 1$ olduğundan

$$d(c(\sigma), c^*(\sigma)) = \left| \frac{\lambda}{k_1} \right| \quad (7.6)$$

elde edilir. (7.5) denkleminde (7.4) eşitliği kullanılırsa

$$d(c(\sigma), c^*(s)) = \left| -k_1 \left(\int \frac{1}{k_1} ds \right) \cdot \frac{1}{k_1} \right| = \left| \int \frac{1}{k_1} ds \right|$$

elde edilir.

Son olarakta (7.6) denkleminde (7.4) eşitliği kullanılırsa

$$d(c(\sigma), c^*(\sigma)) = \left| \frac{1}{k_1 k_1^*} \right|$$

bulunur.

Sonuç 7.4.1

Eğer $k_1^* = k_1$ seçilirse

$$d(c(s), c^*(s)) = \left| \frac{s^2}{4} - ks + k^2 \right|$$

dir.

İspat:

(7.3) denkleminde $k_1^* = k_1$ alınırsa (7.4) eşitliğinden

$$\lambda e_1^*(s) = (\lambda + (\lambda^2)')e_1(s) + \lambda e_2(s)$$

bulunur. Her iki taraf $e_1(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\lambda + 2\lambda\lambda' = 0$$

veya

$$\lambda = \frac{-s}{2} + k \quad (k \in R) \tag{7.7}$$

bulunur.

(7.6) denkleminde (7.4) ve (7.7) yerine yazılırsa

$$d(c(s), c^*(s)) = \left| \frac{s^2}{4} - ks + k^2 \right|$$

elde edilir.

7.5 Bertrand Eğri Çifti:

Teorem 7.5.1

$c = c(s) : I_0 \rightarrow R^n$ eğrisinin kendisine benzer Frenet eğrisi $c : c(\sigma) : I_0 \rightarrow R^n$,
ve $c^* = c^*(s) : I_0 \rightarrow R^n$ eğrisinde ve kendisine benzer Frenet eğrisi
 $c^* : c^*(\sigma) : I \rightarrow R^n$ olsun.

$c(s)$ eğrisi ile $c^*(s)$ eğrisi Bertrand eğri çifti ve birinci eğrilikleri k_1 ile k_1^* sabit ise $c(\sigma)$ eğrisi ile $c^*(\sigma)$ eğrisi de Bertrand eğri çiftidir.

İspat:

$c(s)$ ile $c^*(s)$ Bertrand eğri çifti olduğundan $e_2(s)$ ile $e_2^*(s)$ lineer bağımlıdır.
Benzer şekilde

$$e_2(\sigma) \text{ ile } e_2^*(\sigma)$$

nın lineer bağımlı olduğunu gösterelim.

$$e_2(\sigma) = \frac{1}{k_1} e_2(s) \quad \text{ve} \quad e_2^*(\sigma) = \frac{1}{k_1^*} e_2(s)$$

dir.

$e_2(s)$ ile $e_2^*(s)$ lineer bağımlı ve $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_1^*} \in R$ olduğundan

$\frac{1}{k_1} e_2(s)$ ile $\frac{1}{k_2^*} e_2(s)$ lineer bağımlı olur. Yani $e_2(\sigma)$ ile $e_2^*(\sigma)$ lineer bağımlıdır.

Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 7.5.2

$c = c(s) : I_0 \rightarrow R^n$ eğrisinin σ ile parametrelendirilmiş ve kendisine benzer Frenet eğrisi $c : \mathcal{A} \rightarrow R^n$, $c^* = c^*(s) : I_0 \rightarrow R^n$ eğrisinin σ ile parametrelendirilmiş ve kendisine benzer Frenet eğrisi $c^* : c^*(\sigma) : I \rightarrow R^n$ olsun.

$c(s)$ ile $c^*(s)$ Bertrand eğri çifti ve $\frac{k_1^*}{k_1} = \text{sabit}$ ise $c(\sigma)$ ile $c^*(\sigma)$ Bertrand eğri çiftidir.

İspat:

$c(s)$ ile $c^*(s)$ Bertrand eğri çifti olduğundan $e_2(s)$ ile $e_2^*(s)$ lineer bağımlıdır. Yani $a \in R$ olmak üzere $e_2(s) = a \cdot e_2^*(s)$ şeklinde yazılabilir.

$$e_2(\sigma) = \frac{1}{k_1} e_2(s) = \frac{1}{k_1} a \cdot e_2^*(s) = \frac{1}{k_1} a \cdot k_1^* e_2^*(\sigma) = \frac{k_1^*}{k_1} \cdot a \cdot e_2^*(\sigma)$$

olarak bulunur. Buda

$$\frac{k_1^*}{k_1} \cdot a \in R \text{ olduğundan } e_2(\sigma) \text{ ile } e_2^*(\sigma) \text{ in lineer bağımlı olduğunu verir.}$$

Teorem 7.5.3

Eğer $c^*(\sigma)$ eğrisi ile $c(\sigma)$ eğrisi Bertrand eğri çifti ise

$$d(c(\sigma), c^*(\sigma)) = |a|, \quad (a \in R)$$

dir.

İspat:

$c^*(\sigma)$ eğrisi ile $c(\sigma)$ eğrisi Bertrand eğri çifti olduğundan

$$c^*(\sigma) = c(\sigma) + \lambda e_2(\sigma)$$

yazılabilir. Bu eşitlikte her iki tarafın türevi alındığında

$$\frac{1}{k_1^*} e_1^*(s) = \frac{1}{k_1} e_1(s) + \lambda' \cdot \frac{1}{k_1} e_2(s) + \lambda \left(\left(\frac{1}{k_1} \right)' e_2(s) - e_1(s) + \frac{k_2}{k_1} e_3(s) \right)$$

veya

$$\frac{1}{k_1^*} e_1^*(s) = \left(\frac{1}{k_1} - \lambda \right) e_1(s) + \left(\lambda' \cdot \frac{1}{k_1} + \lambda \left(\frac{1}{k_1} \right)' \right) e_2(s) + \lambda \frac{k_2}{k_1} e_3(s) \quad (7.8)$$

olarak bulunur.

$e_2^*(s)$ ile $e_2(s)$ lineer bağımlı olduğundan (7.5) eşitliğinin her iki tarafı $e_2(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\lambda' \cdot \frac{1}{k_1} + \lambda \left(\frac{1}{k_1} \right)' = 0$$

veya

$$\left(\frac{1}{k_1} \lambda \right)' = 0$$

bulunur. Buradan da

$$\left(\frac{1}{k_1} \lambda \right) = a \in R$$

veya

$$\lambda = k_1 \cdot a$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$d(c(\sigma), c^*(\sigma)) = \|c^*(\sigma) - c(\sigma)\| = \|\lambda \cdot e_2(\sigma)\| = \left\| \lambda \cdot \frac{1}{k_1} e_2(s) \right\|$$

$\|e_2(s)\| = 1$ olduğundan

$$d(c(\sigma), c^*(\sigma)) = \left\| \frac{\lambda}{k_1} \right\| = \left\| \frac{a \cdot k_1}{k_1} \right\| = |a|$$

elde edilir.

Sonuç 7.5.1

Eğer $c^*(\sigma)$ eğrisi ile $c(\sigma)$ eğrisi Bertrand eğri çifti ise $(a \in R)$ için

$$c^*(\sigma) = c(\sigma) + k_1 \cdot a \cdot e_2(\sigma)$$

ya da

$$c^*(\sigma) = c(\sigma) + a \cdot e_2(s)$$

olarak yazılır.

Sonuç 7.5.2

Eğer $c^*(\sigma)$ eğrisi ile $c(\sigma)$ eğrisi Bertrand eğri çifti ise $(a \in R)$ için

$$(c^*(\sigma))' = \frac{1}{k_1} e_1(s) + a(-k_1 e_1(s) + k_2 e_3(s))$$

veya

$$(c^*(\sigma))' = \left(\frac{1}{k_1} - a.k_1\right)e_1(s) + a.k_2 e_3(s)$$

olarak yazılabilir.

Teorem 7.5.4

Eğer $c^*(\sigma)$ eğrisi ile $c(\sigma)$ eğrisi Bertrand eğri çifti ve $\frac{1}{k_1^*} \cdot \frac{1}{k_1} = \text{sabit}$ ise

$e_1(\sigma)$ ile $e_1^*(\sigma)$ teğet vektörleri arasındaki açı sabittir.

İspat:

$e_1(\sigma)$ ile $e_1^*(\sigma)$ teğet vektörleri arasındaki açının sabit olması için

$$\langle e_1^*(\sigma), e_1(\sigma) \rangle' = 0$$

veya

$$\left\langle \frac{1}{k_1^*} e_1^*(s), \frac{1}{k_1} e_1(s) \right\rangle' = 0$$

olmalıdır.

$$\left\langle \frac{1}{k_1^*} e_1^*(s), \frac{1}{k_1} e_1(s) \right\rangle' = \left\langle \left(\frac{1}{k_1^*}\right)' e_1^*(s) + e_2^*(s), \frac{1}{k_1} e_1(s) \right\rangle + \left\langle \frac{1}{k_1^*} e_1^*(s), \left(\frac{1}{k_1}\right)' e_1(s) + e_2(s) \right\rangle$$

veya

$$\left\langle \frac{1}{k_1^*} e_1^*(s), \frac{1}{k_1} e_1(s) \right\rangle' = \left(\frac{1}{k_1^*}\right)' \cdot \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1^*} \cdot \left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

ya da

$$\langle \frac{1}{k_1^*} e_1^*(s), \frac{1}{k_1} e_1(s) \rangle' = (\frac{1}{k_1^*} \cdot \frac{1}{k_1})'$$

olarak bulunur. $\frac{1}{k_1^*} \cdot \frac{1}{k_1} = \text{sabit}$ olduğundan

$$(\frac{1}{k_1^*} \cdot \frac{1}{k_1})' = 0$$

elde edilir. Bu da $e_1(\sigma)$ ile $e_1^*(\sigma)$ teğet vektörleri arasındaki açının sabit olduğunu gösterir.

8.SONUÇ

Bu tez; direkt benzerlikler yönünde IR^n deki bir Frenet eğrisinin Diferansiyel geometrik değişmezleri için verilmiştir. Böyle değişmezler, küresel teğet göstergesinin yay uzunluğu vasıtasıyla Öklid eğrilikleri yardımıyla verilebilir. Bu metotla kendine benzer eğriler inşa edilip bunların özellikleri incelenebilir.

Bu çalışmanın temel amacı kendine benzer eğrilerin geometrik yapısını verip bunun üzerine invaryant kalan ve kalmayan teorileri incelemektir. Bu amaç doğrultusunda kendine benzer eğriler için bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Kendine benzer eğrilerin involüt-evolüt , Bertrand eğri çifti gibi özellikleri incelenerek bazı önemli teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Elde edilen teoriler oldukça farklı ve kullanışlıdır.

KAYNAKLAR

- [1] **E. Cartan**, La M'ethode de Rep'ere Mobile, la Th'eorie des Groupes Continus, et les Espaces G'en'eralis'es, Expos'es de G'eom'etrie V, Hermann, Paris, 1935.
- [2] **D. Davis**, Generic affine differential geometry of curves in R^n , Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics **136** (2006), 1195–1205.
- [3] **R. Encheva and G. Georgiev**, Curves on the shape sphere, Result. Math. **44** (2003), 279–288.
- [4] **R. Encheva and G. Georgiev**, Shapes of space curves, J. Geom. Graph. **7** (2003), 145–155.
- [5] **W. Greub**, Linear Algebra, 3rd ed., Springer Verlag, Heidelberg, 1967.
- [6] **P. Griffiths**, On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry, Duke Math. J. **41** (1974), 775–814.
- [7] **S. Izumiya and N. Takeuchi**, Generic properties of helices and Bertrand curves, J. Geom. **74** (2002), 97–109.
- [8] **W. K'uhnel**, Differential Geometry – Curves – Surfaces – Manifolds, 2nd ed., AMS, Providence, RI, 2006.
- [9] **A. Schwenk-Schellschmidt, U. Simon and M. Wiehe**, Eigenvalue equations in curve theory, Part I: Characterizations of conic sections, Result. Math. **40** (2001), 273–285.
- [10] **St. M'uller, A. Schwenk-Schellschmidt and U. Simon**, Eigenvalue equations in curve theory, Part II: Evolutes and involutes, Result. Math. **50** (2007), 109–124.

- [11] **U. Simon, A. Schwenk-Schellschmidt and H. Viesel**, Introduction to the Affine Differential Geometry of Hypersurfaces, Science University of Tokyo, Tokyo, 1991.
- [12] **R. Uribe-Vargas**, On vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves, Bull. of the Brazilian Math. Soc. **36** (2005), 285–307.
- [13] **Hacısalıhoğlu H.H.**, “Lineer Cebir” Ankara Üniversitesi, İstanbul 1982
- [14]. **Hacısalıhoğlu H. H.** , “Diferansiyel Geometri” , Ankara Üniversitesi , 1993.
- [15]. **Hacısalıhoğlu H. H.** , “Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş”, Fırat Üni., 1980.
- [16].**Sabuncuoğlu, A.**,” Diferansiyel Geometri” Nobel Yayın Dağıtım,2006,Ankara
- [17]. **Hacısalıhoğlu H. H.** , “Diferansiyel Geometri 3.cilt” , Ankara Üniversitesi ,Kasım 2003.
- [18]. http://tr.wikipedia.org/wiki/Logaritmik_spiral
- [19]. **Manfredo P.do Carmo**, Differential Geometry of Curves and Surface, Prentice-Hall,1976.
- [20]. **YELKENKAYA, Neşe**, Diferansiyel Geometri **Ders Notları**, İstanbul Kültür üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bilgisayar Bölümü, Bölüm IV- Eğriler Teorisi Sayfa 49-50
- [21]. **Radostina P. Encheva and Georgi H. Georgiev** , Similar Frenet Curves , Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, Result. Math. 55 (2009), 359–372

10. ÖZGEÇMİŞ

1982 Yılında Gölbaşı'nda doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Mersin'de tamamladım. 2000 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne girdim ve 2004 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Malatya da özel bir dershanede öğretmen olarak işe başladım ve 6 yıl çalıştım. 2005 yılında İnönü Üniversitesinde Eğitim Bilimleri Enstitüsünde tezsiz yüksek lisansa başladım ve 2006 yılında bitirdim. 2010 yılında Bingöl Üniversitesi Sosyal Bilimler Meslek Yüksek Okuluna öğretim görevlisi olarak atandım. Halen öğretim görevlisi olarak çalışmaktayım.