



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

ÖKLİD UZAYINDA CAYLEY FORMÜLÜ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine İlayda KATCA

Danışman: Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ

TOKAT- 2025

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ danışmanlığında hazırlamış olduğum “Öklid Uzayında Cayley Formülü ve Uygulamaları” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

03/07/2025

Emine İlayda KATCA

JÜRİ KABUL VE ONAY

Emine İlayda KATCA tarafından hazırlanan “**Öklid Uzayında Cayley Formülü ve Uygulamaları**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı **03.07.2025** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmzası

Üye :

.....

Üye :

.....

Üye :

.....

ONAY

...../...../.....

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET
ÖKLİD UZAYINDA CAYLEY FORMÜLÜ
VE UYGULAMALARI

Katca, Emine İlayda
Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ
Temmuz 2025, 70 sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü ve ikinci bölüm temel kavramlara ayrıldı. Üçüncü bölümde Cayley formülü elde edildi ve bu formülün bazı uygulamaları verildi. Dördüncü bölümde, Frenet hareketi tanımlandı ve bu hareketten elden edilen H/H' hareketinin, H sabit ve H' hareketli uzaylarına göre pol eksenleri bulundu. Tartışma ve sonuç bölümünde ise bu tez çalışmasındaki sonuçlar kullanılarak farklı matrisler üzerinde hangi çalışmaların yapılabileceği vurgulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Cayley Formülü, Öklid Uzayı, Dönme Hareketi, H/H' Hareketi

ABSTRACT
CAYLEY FORMULA AND ITS APPLICATIONS IN EUCLIDEAN SPACE

Katca, Emine İlayda
Master's Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ
July, 2025, 70 pages

This thesis consists of five chapters. The introduction and the second chapter are devoted to basic concepts. In the third chapter, the Cayley formula is obtained and some applications of this formula are given. In the fourth chapter, the Frenet motion is defined and the pole axes of the H/H' motion obtained from this motion are found with respect to the H fixed and H' moving spaces. In the discussion and conclusion section, it is emphasized which studies can be done on different matrices using the results of this thesis.

Keywords: Cayley Formula, Euclidean Space, Rotation Motion, H/H' Motion

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK SÖZLEŞME SAYFASI	i
JÜRİ KABUL VE ONAY	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖNSÖZ	vii
SİMGE VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	2
2.1. Temel Tanım ve Kavramlar	2
3. E^n 'DE BİR ORTOGONAL MATRİS İÇİN CAYLEY FORMÜLÜ	6
3.1. E^n 'de Bir Ortogonal Matris İçin Cayley Formülü.....	6
3.2. Rodrigues Denklemi	9
3.3. Euler Parametreleri	12
3.4. E^3 'de Cayley Formülünün Bazı Uygulamaları.....	13
3.5. Dönme Matrisleri	15
3.6. Öz Değerler Üzerine Teoremler.....	16
3.7. Kuadratik Gösterim.....	18
3.8. Cayley Dönüşümü.....	21
3.9. Cayley Matrisi.....	23
3.10. $A + I$ Matrisinin Regüler Olmadığı Durumlar	25
3.11. Uygulamalar.....	26
3.12. Genelleme Yoluyla Cayley Hareketi	28
3.13. Genelleştirilmiş Cayley Hareketinin Geometrik Yorumu	34
3.14. Dönmelerin Bileşkesi.....	35
3.15. Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönmeler	37
3.15.1 $\mathbb{R}^4$ 'de Dönmeler.....	37
3.15.2 $\mathbb{R}^n$ 'de Dönmeler	38
4. H/H' HAREKETİNİN AÇISAL HIZ MATRİSİ.....	39
4.1. H/H' Hareketinin Açisal Hız Matrisi.....	39
4.2. H/H' Hareketinin Pol Noktaları (Pol Eksenleri)	46
4.3. H/H' Hareketinin Ani Vida Eksenleri.....	51
4.4. t Anında Ω ya Paralel Olan Noktaların Geometrik Yeri.....	54
4.5. E^3 de Frenet-Serret Hareketi	55
4.5.1 Bir Eğri İçin, Frenet-Serret Hareketinin Oluşturulması.....	55

5. TARTIşMA VE SONUÇ	58
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİş	61



ÖNSÖZ

Bu tezi hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda bana yardımcı olan, değerli bilgileriyle bana ışık tutan danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ'ye, önüme çıkan her konuda yardımlarını esirgemeyen, beni tüm içtenliği ve samimiyetiyle destekleyen ve bana emek veren saygı değer hocam, Sayın Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR'e, lisans dönemimden itibaren beni her konuda bilgilendiren ve önüme ışık tutan çok değerli hocam, Sayın Dr. Nurullah YILMAZ'a, gösterdiği yardım ve desteği için ve ayrıca jürimde de yer alarak değerli bilgileri ile çalışmaya katkı sağlayan hocam, Sayın Prof. Dr. Tefik ŞAHİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmalarım sırasında bana sevgi ve destekleri için annem Bircan KATCA ve babam İbrahim KATCA'ya, en değerlilerim kardeşlerime, her zaman yanımda olan sevgili eşim Ömer ÇAĞLAR'a teşekkür ederim.

Ayrıca TÜBİTAK 2211 YURT İÇİ LİSANSÜSTÜ BURS PROGRAMI Bursiyeri olarak Türkiye Bilimsel ve Teknoloji Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) maddi ve manevi desteğinden ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Emine İlayda KATCA

Temmuz 2025

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler

Açıklamalar

$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümmesi
$\mathbb{R}_0$	$[0, \infty)$ aralığı
ω	omega
Ω	Omega
λ	lambda
τ	tau
η	eta
γ	gamma
v	upsilon
ζ	zeta
ϵ	epsilon
κ	kappa
ρ	rho
μ	mü
ψ	psi
χ	chi
ξ	ksi
φ	varphi
π	pi
ϕ	phi
δ	delta
σ	sigma
α	alpha
θ	theta
β	beta

1. GİRİŞ

n -boyutlu Öklid uzayında, Cayley formülü üzerine çalışmalar şimdiye kadar yoğun bir şekilde yapılmıştır. Evren hareket etmektedir. Bu hareket ardışık dönmeler, şekil değiştirmeler ve ötelemeler yoluyla yapılır. Eğer cisim katı ise, bu bahsettiğimiz hareket bir dönme ve öteleme yoluyla yapılır. Cayley formülü de bize katı cisimlerde hareket konusunda kolaylık sağlayacaktır.

Öklid uzayında Cayley formülü antisimetrik matrisler ile ortogonal matrisler arasında bir ilişki kurarak, dönüşüm matrislerinin daha kolay hesaplanmasını sağlar. Başlangıç noktaları aynı olmayan ortonormal iki koordinat sistemi arasında değişim $x = Ax_0 + c$ denklemiyle verilir. Burada $A \in \mathbb{R}_n^n$ tipinde bir pozitif ortogonal matris ve $c \in \mathbb{R}_1^n$ tipinde bir öteleme matrisidir. Dönmeler pozitif ortogonal matrislerle yapılır. Cayley formülü de verilmiş bir eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen pozitif ortogonal matrisi bulmamızı sağlar.

Cayley formülü, bir anti-simetrik matris S için $A = (I - S)^{-1}(I + S)$ şeklinde tanımlanır. Burada A pozitif bir ortogonal matrisi ve I birim matrisi temsil eder. Bu formül özellikle üç boyutlu uzayda bir eksen etrafında belirli bir açıyla döndürme işlemiyle ortogonal matrisi bulmamızı sağlar.

Sonuç olarak, Öklid uzayında Cayley formülü, dönme matrislerinin bulunması ve diferansiyel geometri uygulamalarında önemli bir formüldür.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Afin Uzay) $A \neq \emptyset$ bir küme ve bir vektör uzayı V olsun.

$$\begin{aligned} \psi & : A \times A \rightarrow V \\ (P, Q) & \mapsto \psi(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

dönüşümü

$$(i) \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

$$(ii) \quad \forall P \in A \text{ ve } \alpha \in V \text{ için } \overrightarrow{PQ} = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

Eğer bu şartı sağlıyor ise A kümesi V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir. (Hacısalıhoğlu, 1998)

Tanım 2.1.2. (Öklid Uzay) A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle & : V \times V \longrightarrow R \\ (x, y) & \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A afin uzayına Öklid uzayı, iç çarpım işlemine de standart Öklid iç çarpımı denir. (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.3. Bir iç çarpım uzayında herhangi bir $\vec{x}$ vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.4. Normu 1 olan vektöre birim vektör denir. Eğer $\vec{x} \neq 0$ ve $\vec{y} \neq 0$ iken $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ise bu iki vektör birbirine ortogonaldır denir. Sıfırdan farklı vektörlerin bir

S cümlesinde, herhangi iki vektör birbirlerine dik ise bu S cümlesine de ortogonaldır denir.

Tanım 2.1.5. A^T , A matrisinin transpozu olmak üzere,

$$A = -A^T$$

eşitliğini sağlayan matrise, antisimetrik matris denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Teorem 2.1.6. (Cayley-Hamilton) Her kare matris, kendi karakteristik denkleminin bir köküdür. Yani,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

karakteristik denklemi için $P(A) = 0$ kalır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.7. İnversi transpozuna eşit ve determinantı “+1” olan matrise, pozitif ortogonal matris denir. Böyle matrislerin cümlesi, $SO(n)$ ile gösterilir. Ayrıca

$$\det(A + I) \neq 0$$

ise A matrisine Cayley matrisi denir (Bükcü, 2003).

Tanım 2.1.8.

$$\begin{aligned} d & : E^n \times E^n \rightarrow R \\ (X, Y) & \rightarrow d(X, Y) = \left\| \vec{XY} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n öklid uzayda uzaklık fonksiyonu ve $d(X, Y)$ reel sayısına da $X, Y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.9. Düzlemde bir A noktası ve radyan bir α -açısı alalım. Bir P noktası için $\widehat{PAP'} = \alpha$ ve $\|AP\| = \|AP'\|$ olacak şekilde P yi P' noktasına götüren ve A 'yı sabit bırakan dönüşüme dönme hareketi denir (Bükcü, 2003).

Tanım 2.1.10. (Genel Hareket) E^n , n -boyutlu Öklid uzayında A , $n \times n$ tipinde bir ortogonal matris, C bir öteleme gösteren $n \times 1$ tipinde matris olmak üzere

$$Y = AX + C \quad (2.1.4)$$

ile verilen genel izometrinin ifadesindeki A ve C matrisleri eğer, zaman ile özdeşlenebilen bir t parametresinin fonksiyonları, ayrıca A nın determinanı 1 ve bütün karakteristik değerleri farklı ise izometrilere herhangisi birine de bir genel hareket denir (Tütüncü, 2009).

$$Y = AX \quad (2.1.5)$$

Bir genel harekette AX kısmına hareketin dönme kısmı, C kısmına da hareketin öteleme kısmı denir. Dönme hareketlerini yaptıran ortogonal matrisler, anti-simetrik matrisler kullanılarak Cayley formülü yardımıyla da elde edilebilir. McCarthy (1990) de bir vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.11. $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ vektörüne karşılık gelen 3×3 tipinde anti-simetrik S matrisi aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.6)$$

Bu sayede, dönme eksenini belirlenen ortogonal matris, S anti-simetrik matrisi kullanılarak Cayley formülü yardımıyla elde edilebilir.

Tanım 2.1.12. (Cayley Formülü) A bir ortogonal matris ve S de bir antisimetrik matris olmak üzere Cayley formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$S = (A - I)(A + I)^{-1}. \quad (2.1.7)$$

Cayley dönüşümü ayrıca

$$A = (I - S)^{-1}(I + S) \quad (2.1.8)$$

ile de gösterilebilir. Bu sayede, bir anti-simetrik matris yardımıyla bir ortogonal matris elde edilebildiği gibi bir ortogonal matrsten de bir anti-simetrik matris elde edilebilir.



3. E^n DE BİR ORTOGONAL MATRİS İÇİN CAYLEY FORMÜLÜ

3.1. E^n 'de Bir Ortogonal Matris İçin Cayley Formülü

Orijin etrafında bir dönme hareketi

$$y = Ax, \quad A \in SO(n)$$

ile verilmekte olup, bir harekette iki nokta arasındaki uzunluklar değişmediğinden

$$\langle \vec{ox}, \vec{ox} \rangle = \langle \vec{oy}, \vec{oy} \rangle$$

olur. Yazımda kolaylık olması için $\vec{ox} = x$, $\vec{oy} = y$ ile gösterilirse,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

ve

$$\langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y} + \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

veya

$$\langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y} + \vec{x} \rangle = 0$$

yazılabilir. Böylece

$$f = \vec{y} - \vec{x} \quad \text{ve} \quad g = \vec{y} + \vec{x}$$

vektörleri ortogonal olup, $y = Ax$ eşitliği de göz önüne alınarak

$$f = (A - I_n)x, \quad g = (A + I_n)x, \quad \langle f, g \rangle = 0 \quad (3.1.1)$$

bulunur. $Ax = -x$ hali hariç tutulursa (yani, A'nın özdeğerlerinden birisinin -1 olma hali hariç tutulursa); o zaman $(A - \lambda I)$ determinantında $\lambda = -1$ öz değeri olmadığından $A + I_n \neq 0$ dır. Bu nedenle $A + I_n$ matrisi regülerdir.

Bu durumda (3.1.1) eşitliğindeki ikinci denklemden x çekilir ve (3.1.1) denklemindeki birinci eşitlikte yerine yazılırsa,

$$f = (A - I)(A + I)^{-1}g \quad (3.1.2)$$

elde edilir.

$$B = (A - I)(A + I)^{-1} \quad (3.1.3)$$

denirse,

$$f = Bg \quad (3.1.4)$$

bulunur.

Teorem 3.1.1. B matrisi antisimetrik bir matristir.

İspat. (3.1.4) denkleminin her iki yanı g ile iç çarpılırsa,

$$\langle f, g \rangle = \langle Bg, g \rangle, \quad \forall g$$

$$\sum_{i \neq j=1}^n (b_{ij} + b_{ji})g_i g_j + \sum_{i=j}^n (b_{ij} + b_{ji})g_i g_j = 0$$

$$\langle Bg, g \rangle = 0$$

$$(Bg)^T g = 0$$

$$g^T B^T g = 0$$

$$\begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j}^n b_{ij} g_i g_j = \sum_{i \neq j}^n (b_{ij} + b_{ji}) g_i g_j + \sum_{i=j}^n (b_{ii} + b_{ii}) g_i g_i \\ b_{ij} &= -b_{ji}, \quad g_i g_i = g_i^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\sum_{i,j}^n b_{ij} g_i g_j = \sum_{i \neq j}^n (b_{ij} + b_{ji}) g_i g_j + \sum_{i=j}^n (b_{ii} + b_{ii}) g_i g_i = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik $\forall g$ için doğru olduğundan

$$b_{ij} + b_{ji} = 0 \text{ ve } b_{ii} = 0$$

olmasını gerektirir. Bu da B matrisinin antisimetrik olması demektir. Diğer taraftan (3.1.3) denkleminde

$$(I_n - B)A = (I_n + B) \quad (3.1.5)$$

yazılabilmekte olup, B bir reel antisimetrik matris olduğundan $\det B \geq 0$ dır. $\det(B - \lambda I) \in R$, negatif olmayan katsayılar ile λ ya göre bir polinomdur. O halde bütün reel özdeğerler sıfırdır. Böylece özel olarak $\lambda = 1$ için $\det(B - \lambda I) \neq 0$ olup $B - I_n$ matrisi regülerdir. Bu durumda $B - I_n$ matrisinin tersi vardır ve (3.1.5) denkleminde öz değerlerinden biri -1 olmayan herhangi bir A pozitif ortogonal matrisi

$$A = (I_n - B)^{-1}(I_n + B) \quad (3.1.6)$$

biçiminde yazılabilir. (3.1.6) denklemi Cayley formülü olarak bilinmektedir. Böylece öz değeri -1 den farklı ortogonal matrislerin cümlesi

$$A = (I_n - B)^{-1}(I_n + B)$$

matrislerin cümlesine özdeştir. Her reel antisimetrik matrise, (3.1.6) ile belirlenen bir CAYLEY matrisi ve her CAYLEY matrisine de (3.1.3) ile belirlenen bir antisimetrik matris karşılık gelir. Fakat genel olarak her A ortogonal matrisi, antisimetrik bir matris yardımıyla elde edilmez; bunun için $A + I$ regüler olmalıdır. Fakat bu her zaman mümkün değildir. Mesela

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{bmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ba & -a^2 + b^2 - c^2 & 2bc \\ 2ca & 2cb & -a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

matrisi ortogonaldır, fakat $\det(A + I) = 0$ olduğundan $A + I$ matrisi regüler değildir.

Teorem 3.1.2. A bir Cayley matrisi ise $A + I = 2(I - B)^{-1}$ dir.

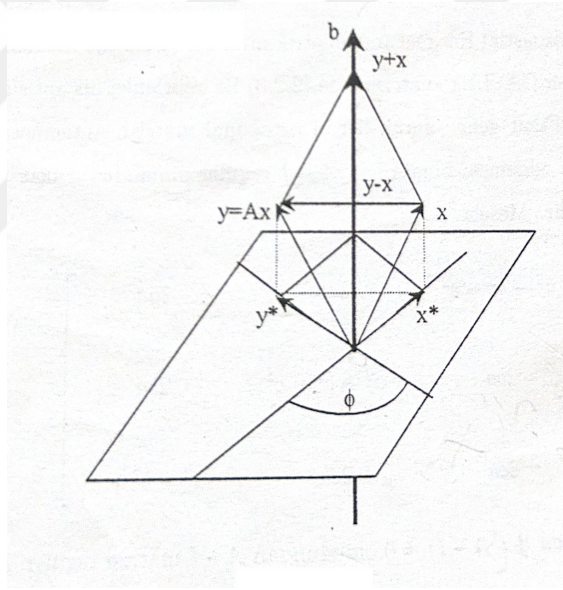
İspat. $A = (I - B)^{-1}(I + B)$ bulunmuştu.

$$\begin{aligned}
 A + I &= (I - B)^{-1}(I + B) + I = (I - B)^{-1}[(B - I) + 2I] + I \\
 &= (I - B)^{-1}(B - I) + (I - B)^{-1}2I + I \\
 &= -[(I - B)^{-1}(I - B)] + 2I(I - B)^{-1} + I = -I + 2I(I - B)^{-1} + I
 \end{aligned}$$

veya

$$A + I = 2(I - B)^{-1} \quad (3.1.8)$$

3.2. Rodrigues Denklemi



Şekil. 3.1: Rodrigues Denklemi

Bir A pozitif ortogonal matrisi için

$$y - x = B(y + x) \quad (3.2.1)$$

olduğunu gördük. Son denklem dönen cisim noktalarının, hareketli ve sabit çatıdaki koordinatları arasındaki ilişkiyi verir. $n = 3$ için,

$$\vec{y} - \vec{x} = \vec{b} \wedge (\vec{y} + \vec{x}) \quad (3.2.2)$$

yazılabilir. (3.2.2) denklemi dönmeler için **Rodrigues denklemi** ve $\vec{b}$ vektörü de **Rodrigues vektörü** olarak bilinir. $\vec{y}$ ve $\vec{x}$ arasındaki ilişki $\vec{y}$ ve $\vec{x}$ in düzleme iz düşümleri olan $\vec{y}^*$ ve $\vec{x}^*$ arasında da geçerlidir. Gerçekten, $\vec{y}$ ve $\vec{x}$ vektörlerinin $\vec{b}$ ye paralel izdüşümleri $\vec{y}^*$ ve $\vec{x}^*$ olsun. $\vec{b}$ vektörü O dan geçen düzlemin normali olarak seçildiğinden dolayı, $\vec{b}$ vektörü $\vec{y}^*$, $\vec{x}^*$ ve $\vec{y}^* - \vec{x}^*$ vektörlerine diktir. Şekil 3.1 den

$$\vec{y} = \vec{y}^* + \lambda \vec{b} \implies \vec{y}^* = \vec{y} - \lambda \vec{b} \quad (3.2.3)$$

$$\vec{x} = \vec{x}^* + \lambda \vec{b} \implies \vec{x}^* = \vec{x} - \lambda \vec{b} \quad (3.2.4)$$

$$Ax^* = A(x - \lambda b) = Ax - \lambda Ab = y - \lambda b$$

veya

$$Ax^* = y^* \quad (3.2.5)$$

yazılabilir. $y = Ax$ dönmesinde elde edilen

$$\vec{y} - \vec{x} = \vec{b} \wedge (\vec{y} + \vec{x}) \quad (3.2.6)$$

denkleminin düzlemdeki karşılığı $y^* = Ax^*$ dönmesi yardımıyla

$$\vec{y}^* - \vec{x}^* = \vec{b} \wedge (\vec{y}^* + \vec{x}^*) \quad (3.2.7)$$

şeklindedir. O halde

$$\|\vec{y}^* - \vec{x}^*\| = \|\vec{b}\| \|\vec{y}^* + \vec{x}^*\| \sin(\vec{b}, \vec{y}^* + \vec{x}^*)$$

$$\|\vec{y}^* - \vec{x}^*\| = \|\vec{b}\| \|\vec{y}^* + \vec{x}^*\| .1$$

$$\|\vec{y}^* - \vec{x}^*\| = \|\vec{b}\| \|\vec{y}^* + \vec{x}^*\| \quad (3.2.8)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\|\vec{y}^* - \vec{x}^*\| &= \sqrt{\langle \vec{y}^* - \vec{x}^*, \vec{y}^* - \vec{x}^* \rangle} \\
&= \sqrt{\langle \vec{y}^*, \vec{y}^* \rangle - 2\langle \vec{y}^*, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{x}^*, \vec{x}^* \rangle} \\
&= \sqrt{\|\vec{y}^*\|^2 - 2\|\vec{y}^*\|\|\vec{x}^*\|\cos\phi + \|\vec{x}^*\|^2}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$\|\vec{y}^*\| = \|\vec{x}^*\| = a$$

dersek

$$\begin{aligned}
\|\vec{y}^* - \vec{x}^*\| &= \sqrt{a^2 - 2a^2\cos\phi + a^2} = \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos\phi} = \sqrt{2a^2(1 - \cos\phi)} \\
&= a\sqrt{2}\sqrt{1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)} = a\sqrt{2}\sqrt{1 - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \\
&= a\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\|\vec{y}^* - \vec{x}^*\| = 2a\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (3.2.9)$$

bulunur. Benzer işlemler yapılırsa

$$\|\vec{y}^* + \vec{x}^*\| = 2a\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (3.2.10)$$

elde edilir. (3.2.9) ve (3.2.10) eşitlikleri oranlanırsa,

$$\frac{\|\vec{y}^* - \vec{x}^*\|}{\|\vec{y}^* + \vec{x}^*\|} = \frac{2a\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{2a\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\|\vec{y}^* - \vec{x}^*\|}{\|\vec{y}^* + \vec{x}^*\|} \quad (3.2.11)$$

elde edilir. (3.2.7) eşitliğinin normu alınırsa,

$$\left\| \vec{y}^* - \vec{x}^* \right\| = \left\| \vec{b} \right\| \left\| \vec{y}^* + \vec{x}^* \right\| \quad (3.2.12)$$

bulunur. (3.2.11) ve (3.2.12) denklemlerinden

$$\left\| \vec{b} \right\| = \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \quad (3.2.13)$$

bulunur. $\vec{b}$ yönündeki birim vektör $\vec{s} = (a, b, c)$ ise $\vec{b}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} b_1 = \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) a \\ b_2 = \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) b \\ b_3 = \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) c \end{cases} \quad (3.2.14)$$

şeklindedir. Buradaki a,b,c sabitlerine **Rodrigues parametreleri** denir.

3.3. Euler Parametreleri

A ortogonal matrisi için Cayley formülü; ϕ dönme açısı ve $B = \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) S$ ile belirlenmiş olan $\vec{s}$ birim vektörünün terimleri cinsinden ifade edilebilir. Bu ifade

$$A = \left[\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) I - \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) S \right]^{-1} \left[\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) I + \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) S \right] \quad (3.3.1)$$

şeklindedir. Burada

$$C = \left[\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) I - \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) S \right] \quad (3.3.2)$$

matrisi içindeki sabitlere A'nın Euler Parametreleri denir. Bu parametreler

$$\begin{cases} c_0 = \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \\ c_1 = a \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \\ c_2 = b \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \\ c_3 = c \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \end{cases} \quad (3.3.3)$$

3.4. E^3 'de Cayley Formülünün Bazı Uygulamaları

(1) (3.2.1) denkleminde B antisimetrik matrisi $B = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ olsun.

Bu durumda A ortogonal matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+a^2-b^2-c^2}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{2(ab-c)}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{2(ac+b)}{1+a^2+b^2+c^2} \\ \frac{2(ba+c)}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{1-a^2+b^2-c^2}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{2(bc-a)}{1+a^2+b^2+c^2} \\ \frac{2(ca-b)}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{2(cb+a)}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{1-a^2-b^2+c^2}{1+a^2+b^2+c^2} \end{bmatrix} \quad (3.4.1)$$

elde edilir.

(2) (3.3.1) denkleminde $\frac{\phi}{2} = x$ olsun.

$$A = (I - B)^{-1}(I + B)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} A &= [I - S \tan x]^{-1} [I + S \tan x] \\ A &= \left[I - S \frac{\sin x}{\cos x} \right]^{-1} \left[I + S \frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ A &= \left[\frac{I \cos x - S \sin x}{\cos x} \right]^{-1} \left[\frac{I \cos x + S \sin x}{\cos x} \right] \\ A &= [I \cos x - S \sin x]^{-1} [I \cos x + S \sin x] \end{aligned}$$

veya

$$A = \frac{Ek [I \cos x - S \sin x]}{\det [I \cos x - S \sin x]} [I \cos x + S \sin x]$$

veya $K = I \cos x - S \sin x$ ve $L = I \cos x + S \sin x$ olmak üzere,

$$A = \frac{(Cof K)^T}{|K|} L$$

dir. Burada

$$|K| = |I \cos x - S \sin x| = \cos x$$

$$K = \begin{bmatrix} \cos x & c \sin x & -b \sin x \\ -c \sin x & \cos x & a \sin x \\ b \sin x & -a \sin x & \cos x \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \cos x & -c \sin x & b \sin x \\ c \sin x & \cos x & -a \sin x \\ -b \sin x & a \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{\text{cof} K}{|K|} = \begin{bmatrix} \cos x + a^2 \frac{\sin^2 x}{\cos x} & -c \sin x + ab \frac{\sin^2 x}{\cos x} & ac \frac{\sin^2 x}{\cos x} + b \sin^2 x \\ c \sin x \cos x + ab \frac{\sin^2 x}{\cos x} & \cos x + b^2 \frac{\sin^2 x}{\cos x} & -a \sin x + bc \frac{\sin^2 x}{\cos x} \\ -b \sin x + ac \frac{\sin^2 x}{\cos x} & a \sin x + bc \frac{\sin^2 x}{\cos x} & \cos x + c^2 \frac{\sin^2 x}{\cos x} \end{bmatrix}$$

veya

$$M = I \cos x + S \sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} (I + S^2)$$

dir. Böylece $A = ML$ eşitliğinden eşitliğinden

$$A = \left(I \cos x + S \sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} (I + S^2) \right) (I \cos x + S \sin x)$$

$$A = (I \cos^2 x + I^2 \sin^2 x) + (S^2 \sin^2 x + S^2 I \sin^2 x) + \left(\frac{\sin^3 x}{\cos x} S^3 + \frac{\sin^3 x}{\cos x} S + (2 \cos x \sin x) x S \right)$$

$$A = I + \left((S^3 + S) \frac{\sin^3 x}{\cos x} + (\cos x \sin 2x) S \right) + (2 \sin^2 x) S^2$$

veya $S^3 + S = O$ dan

$$A = I + (\sin 2x) S + (2 \sin^2 x) S^2$$

$$A = I + (\sin 2x) S + (2 \sin^2 x) S^2, \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$A = I + S \sin 2x + S^2 (1 - \cos 2x)$$

$$A = I + (\sin 2x) S + (1 - \cos 2x) S^2, \quad x = \phi/2$$

$$A = I + (\sin \phi) S + (1 - \cos \phi) S^2 \quad (3.4.2)$$

elde edilir.

(3) $B = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix}$, E^3 de eğrilikler matrisi olsun. Bu durumda (3.4.1) denkleminde $a = -k_2$, $b = 0$, $c = -k_1$ alınır, A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1-k_1^2+k_2^2}{1+k_1^2+k_2^2} & \frac{2k_1}{1+k_1^2+k_2^2} & \frac{2k_1k_2}{1+k_1^2+k_2^2} \\ \frac{-2k_1}{1+k_1^2+k_2^2} & \frac{1-k_1^2-k_2^2}{1+k_1^2+k_2^2} & \frac{2k_2}{1+k_1^2+k_2^2} \\ \frac{2k_1k_2}{1+k_1^2+k_2^2} & \frac{-2k_2}{1+k_1^2+k_2^2} & \frac{1+k_1^2-k_2^2}{1+k_1^2+k_2^2} \end{bmatrix} \quad (3.4.3)$$

bulunur.

(4) $B = \begin{bmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda (3.4.1) denkleminde $a = b = 0$ ve $c \neq 0$ alınır, A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1-c^2}{1+c^2} & \frac{-2c}{1+c^2} & 0 \\ \frac{2c}{1+c^2} & \frac{1-c^2}{1+c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. $\sin \theta = \frac{2c}{1+c^2}$ denirse, $\cos \theta = \frac{1-c^2}{1+c^2}$ olur. Buradan A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.4)$$

bulunur. A matrisi, xOy düzleminde $(0, 0, 1)$ eksenini etrafında θ radyanlık bir dönmeyi gösterir.

3.5. Dönme Matrisleri

R^3 'de $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere bir $\vec{s}$ birim vektörü etrafında θ kadar pozitif bir dönme $R(\vec{s}, \theta)$ ile gösterilsin. Benzer şekilde $\vec{s}$ vektörü etrafında $-\theta$ kadarlık bir negatif dönmenin $-\vec{s}$ vektörü etrafında θ kadar bir pozitif dönme ile ifade edildiğini ve $R^{-1}(\vec{s}, \theta) = R(-\vec{s}, \theta)$ olduğuna işaret edelim. Bir dönme altında $\vec{r} \rightarrow \vec{r}^*$ ise o

taktirde $R(\vec{s}, \theta)r = r^* = A.r$ yazabiliriz. Ayrıca her reel 3×3 tipinde determinanı 1 olan ortogonal bir matrisin bir dönme gösterdiği de ispatlanacaktır.

Orijin noktasında $\vec{s}$ ye dik olan ξ vektörünün içinde yattığı düzlemi göz önüne alalım. Aynı zamanda, ξ yi R^3 de bir vektör belirlemek ve A gibi matrislerle ξ üzerinde işlem yapmak için kullanacağız. Her $\vec{s}$ birim vektörünü, bir antisimetrik matris ile eşleyeceğiz. Bunun tersini de düşünebiliriz.

$\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ birim vektörüne karşılık gelen antisimetrik matris

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. $S.r = \vec{s} \wedge \vec{r}$ (vektörel çarpım) ve $S.s = \vec{s} \wedge \vec{s} = 0$ eşitliklerinin var olduğunu kolayca görebiliriz. ξ düzleminde $\vec{s} \wedge \vec{\xi} = S\xi$ olduğunu görüyoruz. $\vec{s} \wedge \vec{\xi}$ vektörü hem $\vec{s}$ ye hem de $\vec{\xi}$ ye dik olan bir vektördür. Dolayısıyla bir $\vec{\xi}$ vektörünü bir $\vec{s}$ vektörü ile soldan vektörel çarpmak; $\vec{\xi}$ vektörünü $\vec{s}$ vektörü etrafında 90° döndürmek demektir. O halde $\vec{s}$ vektörüyle eşlenmiş S antisimetrik matrisi de $\vec{\xi}$ vektörünü $\vec{s}$ vektörü etrafında 90° döndürür.

3.6. Öz Değerler Üzerine Teoremler

Teorem 3.6.1. $Au = \lambda u$ ($u \neq 0$) olacak şekilde bir A matrisinin bir öz değeri λ ise o taktirde, $A^n u = \lambda^n u$ dur. (Hacısalıhoğlu, 1998)

Teorem 3.6.2. f reel değişkenli, reel katsayılı bir polinom ve A bir kare matris olsun.

$$Au = \lambda u \text{ ise } f(A)u = f(\lambda)u \quad (3.6.1)$$

dır. Başka bir ifadeyle, A nın öz değeri λ ise $f(A)$ nın öz değeri de $f(\lambda)$ dır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Teorem 3.6.3. Bir S reel antisimetrik dönüşümün öz değerlerinin hepsi imajiner eksen üzerindedir.

İspat. S, C üzerinde 3×3 tipinde reel antisimetrik bir dönüşüm olsun.

$$\begin{aligned} S: R^3 &\rightarrow R^3 \\ \vec{u} &\rightarrow S(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \end{aligned}$$

$\vec{u} \neq 0$ olacak şekilde bir $\vec{u} \in R^3$ vektörü vardır. $S(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ eşitliği sağdan $\vec{u}$ ile çarpılırsa,

$$\langle S(\vec{u}), \vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \quad (3.6.2)$$

ve soldan çarpılırsa,

$$\langle \vec{u}, S(\vec{u}) \rangle = -\lambda \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$$

olur. S, C üzerinde reel antisimetrik dönüşüm olduğundan

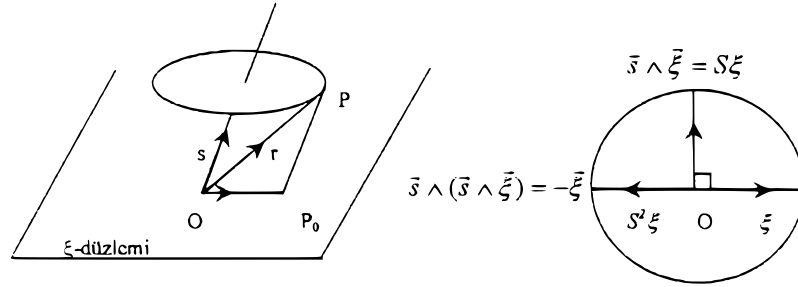
$$\langle S(\vec{u}), \vec{u} \rangle = -\langle \vec{u}, S(\vec{u}) \rangle$$

dir. Bu nedenle,

$$\langle \vec{u}, S(\vec{u}) \rangle = -\lambda \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \quad (3.6.3)$$

yazılabilir. (3.6.2) ve (3.6.3) denklemlerinin sol tarafları aynı olur. Buradan $\lambda = -\lambda$ veya $\lambda + \bar{\lambda} = 0$ elde edilir. Bu yüzden S nin bütün öz değerleri imajinerdir. Sonuç itibariyle, $\lambda \neq 0$ hariç öz değerler $\pm i\lambda$ formundaki kompleks sayılardan oluşur. Buradan da S reel antisimetrik bir dönüşümün öz değerlerinin hepsinin imajiner eksen üzerinde olduğu sonucu çıkar.

3.7. Kuadratik Gösterim



Şekil. 3.2: Kuadratik Gösterim

Teorem 3.7.1.

$$R(\vec{s}, \theta).r = A.r$$

eşitliğinde A matrisi

$$A = I + (\sin \theta)S + (1 - \cos \theta)S^2 = f(S)$$

eşitliğini sağlayan pozitif ortogonal bir matristir. Ayrıca $\det A = 1$ dir.

İspat. Şekil 3.2'den, $\mathbb{R}^3$ deki keyfi bir $\vec{r}$ vektörü $\vec{r} = k\vec{s} + \vec{\xi}$ olarak yazılabilir. 3×3 tipindeki antisimetrik matrisler ile vektörel çarpım arasındaki bağlantılar kullanılarak

$$S.r = \vec{s} \wedge \vec{r} = \vec{s} \wedge (k\vec{s} + \vec{\xi}) = \vec{s} \wedge (k\vec{s}) + \vec{s} \wedge \vec{\xi}$$

bulunur. $S.r = \vec{s} \wedge \vec{r}$ eşitliğine S uygulanırsa,

$$S.(S.r) = S.(S.\xi)$$

$$S^2.r = S^2.\xi$$

$$S.(S.r) = -\xi$$

elde edilir. Bu bilgilerden sonra,

(i) $P = P_0$ olsun. Bu durumda O noktası etrafında, $\vec{s}$ -ye dik bir düzlem içinde θ kadar bir dönmeye, $\vec{\xi}$ vektörünün bitiş pozisyonu vektörünü hesaplayalım.

$$R(\vec{s}, \theta) \cdot \xi = \cos \theta \xi + \sin \theta (\vec{s} \wedge \vec{\xi}) = \cos \theta \xi + (\sin \theta)(S \cdot \xi) = \cos \theta \xi + (\sin \theta)(S \cdot r)$$

yazılabilir.

(ii) $P \in \mathbb{R}^3$ de olsun. Buradan

$$R(\vec{s}, \theta) \cdot r = R(\vec{s}, \theta)(k\vec{s} + \vec{\xi}) = k\vec{s} + R(\vec{s}, \theta) \cdot \xi = (r - \xi) + (\cos \theta)\xi + (\sin \theta)S \cdot r$$

$$R(\vec{s}, \theta) \cdot r = r + (1 - \cos \theta)(-\xi) + (\sin \theta)S \cdot r = rI + (1 - \cos \theta)S^2 \cdot r + (\sin \theta)S \cdot r$$

$$R(\vec{s}, \theta) \cdot r = [I + (\sin \theta)S + (1 - \cos \theta)S^2] \cdot r$$

veya

$$R(\vec{s}, \theta) \cdot r = A \cdot r$$

Geriye A nın ortogonal ve $\det A = 1$ olduğunu göstermek kaldı.

(a) A ortogonaldır. Gerçekten,

$$1 - \cos \theta = 1 - \frac{1 - s^2}{1 + s^2} = 1 - \cos \theta = \frac{2s^2}{1 + s^2} \quad (3.7.1)$$

θ yerine $-\theta$ yazılırsa ve $A(-\theta) = B$ dersek,

$$B = I - (\sin \theta)S + (1 - \cos \theta)S^2 = f(-S) \quad (3.7.2)$$

olur. A nın transpozu alınır,

$$A^T = I + (\sin \theta)S^T + (1 - \cos \theta)(S^2)^T = f(S^T), \quad S^T = -S$$

$$A^T = I - (\sin \theta)S + (1 - \cos \theta)S^2$$

olur. Buradan $B = A^T$ dir. $\vec{s}$ yerine $-\vec{s}$ yazılırsa $-\theta$ lık bir dönme yapılıyordu ve bu durumda $R^{-1}(\vec{s}, \theta) = R(-\vec{s}, \theta)$ ile gösteriliyordu. O halde $A^{-1} = f(S)$ dir. Buradan $A^{-1} = A^T$ bulunur. Öyleyse A ortogonaldir.

(b) $\det A = 1$ dir. Gerçekten, S nin öz denklemi $\det(S - I\lambda) = 0$ dir.

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \quad (3.7.3)$$

yazılırsa (3.7.3) denkleminde $\lambda = 0$, $\lambda = -i$, $\lambda = i$ bulunur. Yani S nin öz değerleri $0, -i, i$ dir. Teorem 3.6.2'den dolayı $f(S)$ nin özdeğerleri $f(0)$, $f(-i)$, $f(i)$ dir. O halde $f(S)$ nin öz değerleri,

$$f(\lambda) = 1 + (\sin \theta)\lambda + (1 - \cos \theta)\lambda^2$$

yardımı ile bulunacaktır.

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 + (\sin \theta)0 + (1 - \cos \theta)0 \\ f(-i) &= 1 + (\sin \theta)(-i) + (1 - \cos \theta)(-i)^2 = \cos \theta - \sin \theta = e^{-i\theta} \\ f(i) &= 1 + (\sin \theta)(i) + (1 - \cos \theta)(i)^2 = \cos \theta + \sin \theta = e^{i\theta} \end{aligned}$$

Sonuç olarak, S nin öz değerleri $0, -i, i$ ise $f(S)$ nin öz değerleri $f(0) = 0$, $f(-i) = e^{-i\theta}$, $f(i) = e^{i\theta}$ bulunur.

Bir matrisin determinantı baz değişiminden bağımsız olduğu için, $f(S)$ matrisinin öz değerleri diyagonal olacak şekilde bir koordinat sistemi değişimi veya baz değişimi daima yapılabilir. Bu yüzden

$$\det A = 1.e^{-i\theta}.e^{i\theta} = 1$$

olur. Böylece A pozitif ortogonaldir.

Sonuçlar:

$$\begin{aligned} 1) \quad A - A^T &= [I + (\sin \theta)S + (1 - \cos \theta)S^2] - [I - (\sin \theta)S + (1 - \cos \theta)S^2] \\ A - A^T &= 2(\sin \theta)S \end{aligned}$$

2) Bir matrisin izi baz değişiminden bağımsız olduğu için

$$IzA = 1 + e^{-i\theta} + e^{i\theta} = 1 + 2 \left[\frac{e^{-i\theta} + e^{i\theta}}{2} \right] = 1 + 2 \cos \theta$$

bulunur.

3.8. Cayley Dönüşümü

Tanım 3.8.1. $S \in R_3^3$ bir antisimetrik matris olsun.

$$\begin{aligned} f: SO(3) &\rightarrow SO(3) \\ S &\rightarrow f(S) = A = (I - S)^{-1}(I + S) \end{aligned}$$

$f(S) = A$ şeklinde tanımlanan f dönüşümüne S nin Cayley dönüşümü denir.

Teorem 3.8.2. $S \in R_3^3$ bir antisimetrik matris ise, $A = (I - S)^{-1}(I + S)$ olmak üzere A bir pozitif ortogonal dönme gösterir. Burada

$$\vec{s} = (s_1, s_2, s_3), \quad \tan \frac{\theta}{2} = \|\vec{s}\| = s \neq 1, \quad \hat{s} = \frac{\vec{s}}{s} \quad (3.8.1)$$

ve

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. S nin öz denklemi $\lambda^3 + s^2\lambda = 0$ ve Cayley-Hamilton teoreminden dolayı $S^3 + s^2S = 0$ ise $S^3 = -s^2S$ dir.

$$(I - S)^{-1} = I + aS + bS^2 \quad (3.8.2)$$

yazılabilir. Son eşitlikten

$$\begin{aligned}
(I - S)^{-1} \cdot (I - S) &= (I + aS + bS^2) \cdot (I - S) \\
I &= I + aS + bS^2 - S - aS^2 - bS^3 \\
aS + bS^2 - S - aS^2 + b(s^2S) &= 0 \\
(a - 1 + bs^2)S + (b - a)S^2 &= 0
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{cases} a + bs^2 = 1 \\ b - a = 0 \end{cases}$$

denklem sistemine varılır. Buradan $a = b = \frac{1}{1+s^2}$ bulunur. Bu değerler (3.8.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(I - S)^{-1} = I + \frac{1}{1+s^2}S + \frac{1}{1+s^2}S^2 \quad (3.8.3)$$

bulunur. (3.8.3) eşitliğinin her iki tarafı $(I + S)$ ile çarpılır, $A = (I - S)^{-1}(I + S)$ ve $S^3 = -s^2S$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$A = \left(I + \frac{1}{1+s^2}S + \frac{1}{1+s^2}S^2 \right) \cdot (I + S)$$

olur. Son eşitlikten,

$$A = I + \frac{2}{1+s^2}S + \frac{2}{1+s^2}S^2$$

elde edilir. $\hat{S} = \frac{S}{s}$ konumuyla, S yerine $s\hat{S}$ yazılarak,

$$A = I + \left(\frac{2s}{1+s^2} \right) \hat{S} + \left(\frac{2s^2}{1+s^2} \right) \hat{S}^2$$

Hipotezde $\tan \frac{\theta}{2} = s$ verilmişti. Buradan,

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \quad (3.8.4)$$

bulunur. (3.8.4) eşitliğinden de $\sin \theta = \frac{2s}{1+s^2}$ ve $1 - \cos \theta = \frac{2s^2}{1+s^2}$ bulunur.

$$A = I + (\sin \theta) \hat{S} + (1 - \cos \theta) \hat{S}^2 \quad (3.8.5)$$

olup, A matrisi $R(\vec{s}, \theta)$ yı temsil eden pozitif ortogonal bir matristir.

Bazı Özel Durumlar:

1) (3.8.5) denkleminde $\theta = 0$ ise $A = R(\vec{s}, \theta) = I$ bulunur.

2) $\theta = \pi$ ise $s = \tan \frac{\pi}{2} = \infty$ olur. Bu yüzden $\theta = 90^\circ$ şartı Cayley formülünde bir anlam kazanmaz. Fakat $s \rightarrow \infty$ olmasına müsaade edildiğinde, $\tan \frac{\pi}{2} = \infty$ denkleminde $\theta = \pi$ bulunur. $\theta = \pi$ olduğunda $A = 1 + 2\hat{S}^2$ elde edilir. Bu da $R(\vec{s}, \pi)$ dönmesini gösterir.

3.9. Cayley Matrisi

Teorem 3.9.1. A , 3×3 tipinde reel pozitif ortogonal ve $S = (A - I)(A + I)^{-1}$ ise S antisimetrik ve S nin Cayley dönüşümü A dır.

İspat. $(A - I)(A + I) = (A + I)(A - I) = A^2 - I$ dır. $S = (A - I)(A + I)^{-1}$ eşitliği soldan ve sağdan regüler $A + I$ matrisiyle çarpılırsa, sırasıyla $(A + I).S = S(A + I) = A - I$ eşitliği elde edilir. Buradan

$$[(A + I)S]^T = (A - I)^T$$

$$S^T(A^T + I) = A^T - I$$

$$S^T(A^T + I) = A^T - I$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı A regüler matrisyle çarpılırsa,

$$S^T(A^T + I)A = (A^T - I)A$$

$$S^T(A^T A + A) = (A^T A - A)$$

$$S^T(A + I) = (I - A)$$

veya son eşitliğin $(I + A)^{-1}$ ile çarpımından

$$S^T = -S$$

olup S antisimetriktir.

Şimdi de $S = (A - I)(A + I)^{-1}$ formülünden A yı bulalım.

$$S(A + I) = (A - I)(A + I)^{-1}(A + I)$$

$$S + SA = A - I$$

$$(I - S)A = (I + S)$$

olur. Son eşitlikten A yı çekersek

$$A = (I - S)^{-1}(I + S)$$

elde edilir.

Teorem 3.9.2. $(I - S)^{-1}$ ve $(I + S)$ matrislerinin çarpımı değişmelidir.

İspat. $M = I + S$ olsun. Buradan $M^T = I - S$ dir. Buradan $MM^T = M^TM = I - S^2$ bulunur. Bu da M ve M^T matrislerinin çarpımlarının değişmeli olduğunu gösterir. O halde

$$(I - S)(I + S) = (I + S)(I - S)$$

dir. M ve M^T matrisleri regüler olduklarından,

$$I + S = (I - S)^{-1}(I + S)(I - S)$$

yazılabilir.

$$I + S = \{(I - S)^{-1}(I + S)\} (I - S) \quad (3.9.1)$$

$$I + S = A(I - S)$$

bulunur. (3.9.1) eşitliğinin her iki tarafı sağdan $(I - S)^{-1}$ ile çarpılırsa,

$$A = (I + S)(I - S)^{-1}$$

bulunur ve $\det A = 1$ olduğundan

$$A = (I - S)^{-1}(I + S) = (I + S)(I - S)^{-1}$$

elde edilir.

Bu teoremden $A + I$ matrisinin tersinin olduğu kabul edildi. Şimdi $A + I$ matrisinin tersinin olmadığı durum ile ilgilenelim.

3.10. $A + I$ Matrisinin Regüler Olmadığı Durumlar

Farz edelim ki $\det(A + I) = 0$ olsun. Bu yüzden -1 sayısı A nın öz değeridir. A pozitif ortogonal olduğu için üç öz değerinin çarpımı $+1$ dir. A nın öz polinomu üçüncü dereceden reel katsayılı bir denklemdir. Bundan dolayı da köklerden ikisi eşlenik kompleks geriye kalan reel veya bütün kökler reeldir. A matrisi ortogonal olduğundan öz değerleri $1, -1, -1$ dir. 1 ve -1 , A nın öz değeri oldukları için, $A.s = s$, $A.u = -u$, şartlarını gerçekleyen $\vec{s}$ ve $\vec{u}$ birim vektörleri vardır.

$$\begin{aligned} A.s &= s & A.u &= -u \\ A^{-1}(A.s) &= A^{-1}.s & A.u &= -u \\ (i) \quad (A^{-1}.A).s &= A^T.s & (ii) \quad (A^{-1}.A).u &= -A^{-1}.u \\ I.s &= A^T.s & I.u &= -A^T.u \\ A^T.s &= s & u &= -A^T.u \end{aligned}$$

(iii) A ortogonal olduğundan uzunlukları korur yani $\langle \vec{s}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{As}, \vec{Au} \rangle$.

(i) ve (ii) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \vec{s}, \vec{u} \rangle &= -\langle \vec{s}, \vec{u} \rangle \\ \langle \vec{s}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{s}, \vec{u} \rangle &= 0 \\ \langle \vec{s}, \vec{u} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\vec{s}$ vektörünün $\vec{u}$ vektörüne dik olduğu anlaşılır. $\vec{v} = \vec{s} \wedge \vec{u}$ olsun. Bundan dolayı

$$\langle \vec{v}, \vec{s} \rangle = 0 \text{ ve } \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$$

olur. Şimdi,

$$\langle A\vec{v}, \vec{s} \rangle = 0 \text{ ve } \langle A\vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$$

olduğunu gösterelim.

$$\langle Av, \vec{s} \rangle = \langle \vec{v}, A^T s \rangle = \langle \vec{v}, \vec{s} \rangle = 0$$

ve benzer şekilde

$$\langle Av, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, A^T u \rangle = \langle \vec{v}, -\vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, -\vec{u} \rangle = -\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$$

dır. Bundan dolayı $A\vec{v}, \vec{s} \wedge \vec{v}$ nin bir katı olmak zorundadır. Yani $Av = \lambda v$ dir. Burada λ , A nın bir öz değeri olup, λ için kullanışlı değer sadece -1 dir. Bundan dolayı $Av = \lambda v$ ve $\vec{s}, \vec{v}, \vec{u}$ vektörleri $As = s, Au = -u, Av = v$ olacak şekilde R^3 ün ortonormal bir bazını oluştururlar.

3.11. Uygulamalar

Bu kesimde A pozitif ortogonal matrisi verildiğinde dönme açısının ve dönme ekseninin bulunmasına ait iki örnek verelim.

Örnek 3.11.1. $A = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 29 & -20 & 28 \\ 28 & 35 & -4 \\ -20 & 20 & 35 \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. $\det A = 1$

ve $\det(A + I) \neq 0$ dır. Yani, $A + I$ matrisi regülerdir. A matrisine karşılık gelen dönme eksenini ve dönme açısını bulalım.

$$\text{Dönme açısı ...} \quad \text{Tr} A = 1 + 2 \cos \theta \quad (3.11.1)$$

$$\text{Dönme eksenini ...} \quad A - A^T = 2 \sin \theta S$$

$$\begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix} = 2 \sin \theta \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

formüllerinden bulunacaktır. $IzA = \frac{11}{5}$ ve $\frac{11}{5} = 1 + 2\cos\theta$ denkleminin çözümünden $\cos\theta = \frac{3}{5}$ bulunur. $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ise $\sin\theta = \frac{4}{5}$ elde edilir. Dönme eksen formülünden de $(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{24}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ bulunur. Sonuç olarak, A matrisinin yaptırdığı pozitif dönmede;

$$\begin{aligned} \text{dönme açısı } \theta &= \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \\ \text{dönme eksen } \vec{s} &= \frac{1}{24}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

dir.

Örnek 3.11.2. $B = \frac{1}{49} \begin{bmatrix} -41 & 12 & -24 \\ 12 & -31 & -36 \\ -24 & -36 & 23 \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. $\det B = 1$

ve $\det(B + I) = 0$ dır. Yani, $B + I$ matrisi regüler değildir. $B^T = B$ olduğundan, $B^T - B = 0$ olur. Bu yüzden $2(\sin\theta).S = 0$ olur ki, buradan $\vec{s}$ eksen bulunamaz. (i) ye benzer şekilde $IzB = -1$ bulunur. $IzB = 1 + 2\cos\theta$ denkleminde $-1 = 1 + 2\cos\theta$ veya $\cos\theta = -1$ veya $\theta = \pi$ bulunur. Fakat $B^T - B = 2(\sin\theta)S$ eşitliğinden, $B^T - B = 2\sin\pi.S$ veya $0 = 0.S$ veya $0 = 0$ bulunur ki bu buradan eksen bulmak mümkün değildir. O halde simetrik ortogonal matrisler için,

$$B + B^T = [I + (\sin\theta)S + (1 - \cos\theta)S^2] + [I - (\sin\theta)S + (1 - \cos\theta)S^2]$$

$$B + B = 2I + 4S^2$$

$$B = I + 2S^2$$

eksen denkleminde bulunur. Sayısal değerleri yazılırsa;

$$\frac{1}{49} \begin{bmatrix} -41 & 12 & -24 \\ 12 & -31 & -36 \\ -24 & -36 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{49} \begin{bmatrix} -41 & 12 & -24 \\ 12 & -31 & -36 \\ -24 & -36 & 23 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + 2(-s_2^2 - s_3^2) & 2s_1s_2 & 2s_1s_3 \\ 2s_2s_1 & 1 + 2(-s_1^2 - s_3^2) & 2s_2s_3 \\ 2s_3s_1 & 2s_3s_2 & 1 + 2(-s_1^2 - s_2^2) \end{bmatrix} \\
\frac{1}{49} \begin{bmatrix} -41 & 12 & -24 \\ 12 & -31 & -36 \\ -24 & -36 & 23 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + 2(s_1^2 - 1) & 2s_1s_2 & 2s_1s_3 \\ 2s_2s_1 & 1 + 2(s_2^2 - 1) & 2s_2s_3 \\ 2s_3s_1 & 2s_3s_2 & 1 + 2(s_3^2 - 1) \end{bmatrix} \\
\frac{1}{49} \begin{bmatrix} -41 & 12 & -24 \\ 12 & -31 & -36 \\ -24 & -36 & 23 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + 2s_1^2 - 2 & 2s_1s_2 & 2s_1s_3 \\ 2s_2s_1 & 1 + 2s_2^2 - 2 & 2s_2s_3 \\ 2s_3s_1 & 2s_3s_2 & 1 + 2s_3^2 - 2 \end{bmatrix} \quad (3.11.2)
\end{aligned}$$

(3.11.2) eşitliğinden

$$\begin{cases} \frac{-41}{49} = 1 + 2s_1^2 - 2 \\ \frac{-41}{49} = 2s_1^2 - 1 \Rightarrow s_1 = \pm \frac{2}{7} \\ \frac{-31}{49} = 1 + 2s_2^2 - 2 \\ \frac{-31}{49} = 2s_2^2 - 1 \Rightarrow s_2 = \pm \frac{3}{7} \\ \frac{23}{49} = 1 + 2s_3^2 - 2 \\ \frac{23}{49} = 2s_3^2 - 1 \Rightarrow s_3 = \pm \frac{6}{7} \end{cases} \quad (3.11.3)$$

$$\left\{ s_1s_2 = \frac{6}{49}, \quad s_1s_3 = \frac{-12}{49}, \quad s_2s_3 = \frac{-18}{49} \right. \quad (3.11.4)$$

bulunur. (3.11.3) ve (3.11.4) denklemlerinden $\vec{s}_1 = \frac{1}{7}(2, 3, -6)$ ve $\vec{s}_2 = \frac{1}{7}(-2, -3, 6)$ eksenleri elde edilir.

3.12. Genelleme Yoluyla Cayley Hareketi

Teorem 3.12.1. $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ reel değerli ve reel değişkenli bir polinom ve S , 3×3 bir antisimetrik matris ise o taktirde $f(S)$ regülerdir.

İspat. $S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ ve $s^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ olmak üzere, S nin öz denklemi $\det(S - \lambda I) = 0$ dır. Buradan $\lambda^3 + \lambda = 0$ olur. Cayley-Hamilton teoremi gereğince her kare matris kendi öz denklemini gerçektir. Bu nedenle $S^3 + S = 0$ veya $S^3 = -S$ yazılabilir. Şimdi

$$C = f(S) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0 I$$

matrisinin regüler olduğunu gösterelim.

$n = 0, 1, 2, \dots$ için $S^{2n+1} = (-1)^n S$ ve $S^{2n+2} = (-1)^n S^2$ olduğundan C matrisi genel olarak I, S ve S^2 matrislerinin bir lineer birleşimi olacaktır. Yani,

$$C = f(S) = (a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \dots)S + (-a_2 + a_4 - a_6 + \dots)S^2 + a_0 I$$

$$f(S) = a_0 I + xS + yS^2; \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (3.12.1)$$

yazılabilir. $a_0 \neq 0$, $m = \frac{x}{a_0}$ ve $n = \frac{y}{a_0}$ denilirse, (3.12.1) denklemi,

$$f(S) = a_0 \left(I + \frac{x}{a_0} S + \frac{y}{a_0} S^2 \right) = a_0 (I + mS + nS^2) = a_0 F(S)$$

olur. Bu durumda $f(S)$ nin regüler olması $\det(F(S)) \neq 0$ olması ile mümkündür. $m \neq 0$ ve $n \neq 1$ olmak üzere $\det(F(S)) \neq 0$ dır. Gerçekten

$$F(S) = I + mS + nS^2$$

$$F(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ba & b^2 - 1 & bc \\ ca & cb & c^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$F(S) = \begin{bmatrix} 1 + na^2 - n & -mc + nab & mb + nac \\ mc + abn & 1 + nb^2 - n & -ma + nbc \\ -mb + nac & ma + nbc & 1 + nc^2 - n \end{bmatrix}$$

$$\det(F(S)) = (1 + na^2 - n)P - (-mc + nab)Q + (mb + nac)R$$

$$\det(F(S)) = (1 + na^2 - n)P + (mc - nab)Q + (mb + nac)R$$

$$\begin{aligned} P &= \left[(1 + nb^2 - n)(1 + nc^2 - n) - (ma + nbc)(-ma + nbc) \right] \\ &= 1 + nc^2 - n + nb^2 + n^2b^2c^2 - n^2b^2 - n - n^2c^2 + n^2 - n^2b^2c^2 + m^2a^2 \\ &= 1 + nc^2 - n + nb^2 - n^2b^2 - n - n^2c^2 + n^2 + m^2a^2 \\ &= 1 + n(b^2 + c^2 + a^2 - a^2 - 2) - n^2(b^2 + c^2 + a^2 - a^2 - 1) + m^2a^2 \\ &= 1 + n(1 - a^2 - 2) - n^2(1 - a^2 - 1) + m^2a^2 \\ &= 1 - n(a^2 + 1) + n^2a^2 + m^2a^2 \\ &= 1 - na^2 - n + n^2a^2 + m^2a^2 \end{aligned}$$

veya

$$P = (1 - n) + a^2(m^2 + n^2 - n) \quad (3.12.2)$$

$$\begin{aligned} Q &= (1 + nc^2 - n)(mc + nab) - (-bm + nac)(nbc - am) \\ &= mc(1 + nc^2 - n) + nab(1 + nc^2 - n) + (mb - nac)(nbc - am) \\ &= mc + mnc^3 - mnc + nab + n^2abc^2 - n^2ab + mnb^2c - m^2ab - n^2abc^2 + mna^2c \\ &= mc + mnc^3 - mnc + nab + mnb^2c - m^2ab + mna^2c \\ &= mnc(c^2 - 1 + b^2 + a^2) + mc + nab - n^2a - abm \\ &= mc + nab - n^2ab - abm^2 \end{aligned}$$

veya

$$Q = mc - ab(m^2 + n^2 - n), \quad (3.12.3)$$

$$\begin{aligned}
R &= (mc + nab)(ma + nbc) - (1 + nb^2 - n)(-bm + nac) \\
&= (mc + nab)(ma + nbc) + (1 + nb^2 - n)(bm - nac) \\
&= m^2ac + mnc^2b + mna^2b + n^2b^2ac + bm + mnb^3 - mnb - nac + n^2ac \\
&= m^2ac + mnc^2b + mna^2b + bm + mnb^3 - mnb - nac + n^2ac \\
&= mnb(a^2 + b^2 + c^2 - 1) + m^2ac + bm - nac + n^2ac \\
&= m^2ac + bm - nac + n^2ac
\end{aligned}$$

$$R = bm + ac(m^2 + n^2 - n) \quad (3.12.4)$$

dir. $k = m^2 + n^2 - n$ olsun.

$$\begin{aligned}
\det(F(S)) &= (1 + nb^2 - n) \left[(1 - n) + a^2k \right] + (mc - nab) [mc - abk] \\
&\quad + (mb + nac) [bm + ack] \\
&= ((1 - n) + na^2) \left[(1 - n) + a^2k \right] + (mc - nab) [mc - abk] \\
&\quad + (mb + nac) [bm + ack] \\
&= (1 - n)^2 + na^4k + (1 - n)a^2k + (1 - n)a^2n + m^2c^2 + nka^2b^2 \\
&\quad + kna^2b^2 - kmabc - mnabc + m^2b^2 + nka^2c^2 + kmabc + mnabc \\
&= (1 - n)^2 + na^4k + (1 - n)a^2k + (1 - n)a^2n + m^2c^2 + m^2b^2 \\
&\quad + nka^2b^2 + nka^2c^2 \\
&= (1 - n)^2 + (1 - n)a^2k + (1 - n)a^2n + m^2(c^2 + b^2 + a^2 - a^2) + \\
&\quad na^2k(a^2 + b^2 + c^2) \\
&= (1 - n)^2 + (1 - n)a^2k + (1 - n)a^2n + m^2(1 - a^2) + na^2k \\
&= (1 - n)^2 + a^2k - na^2k + a^2n - a^2n^2 + m^2 - m^2a^2 + na^2k \\
&= (1 - n)^2 + a^2k + a^2n - a^2n^2 + m^2 - m^2a^2 \\
\det(F(S)) &= (1 - n)^2 + (m^2 + n^2 - n)a^2 - (m^2 + n^2 - n)a^2 + m^2
\end{aligned}$$

$$\det(F(S)) = (1 - n)^2 + m^2$$

denklemini $n = 1$ ve $m = 0$ (yani $\det(I + S^2) = 0$) durumu hariç tutulduğunda, daima $\det(F(S)) \neq 0$ olur. Bu da bize $f(S)$ nin regüler olduğunu gösterir.

Teorem 3.12.2. S , 3×3 tipinde bir antisimetrik matris, $A \in SO(3)$ ve $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ olsun.

$$A = (f(S^T))^{-1} \cdot f(S) \quad (3.12.5)$$

ise $f(S^T)$ ve $f(S)$ matrisleri değişmelidir.

İspat. $M = f(S)$ olsun. Bu durumda,

$$M^T = [f(S)]^T = f(S^T) = f(-S)$$

dir. Göstermem gereken eşitlik $MM^T = M^T M$ dır. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ Cayley-Hamilton teoreminden $f(S) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0$ ve (3.12.1) denklemi $f(S) = a_0 I + mS + nS^2$ idi.

$$MM^T = (a_0 I + nS^2 + mS)(a_0 I + nS^2 - mS) = (a_0 I + nS^2)^2 - (mS)^2$$

ve

$$M^T M = (a_0 I + nS^2 - mS)(a_0 I + nS^2 + mS) = (a_0 I + nS^2)^2 - (mS)^2$$

olduğundan

$$MM^T = M^T M$$

ve

$$f(S^T)f(S) = f(S)f(S^T)$$

elde edilir. Teorem 3.12.2'den dolayı da

$$A = (f(S^T))^{-1} f(S) = f(S)(f(S^T))^{-1}$$

yazılabilir.

Teorem 3.12.3. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ve $S_{3 \times 3}^T = -S_{3 \times 3}$ olsun. $A = (f(S^T))^{-1} f(S)$ ise A pozitif ortogonal bir matristir.

İspat. (a) Önce $A \in O(3)$ olduğunu gösterelim. $M = f(S)$ olsun. Buradan $M^T = f(S^T)$ olur. $f(S^T)$ ve $f(S)$ matrisleri değişmelidir. Bu durumda $A^T = \left[(f(S^T))^{-1} f(S) \right]^T = f(S^T)(f(S))^{-1}$ olur. AA^T matrisinin

$$\begin{aligned} AA^T &= (f(S^T))^{-1} f(S) f(S^T) (f(S))^{-1} = (f(S^T))^{-1} f(S^T) f(S) (f(S))^{-1} \\ &= \left[(f(S^T))^{-1} f(S^T) \right] \left[f(S) (f(S))^{-1} \right] \end{aligned}$$

veya $AA^T = I$ ve benzer şekilde $A^T A = I$ bulunur. $AA^T = A^T A = I$ olduğundan A ortogonal bir matristir.

(b) Şimdi de $\det A = 1$ dir. Gerçekten,

$$\det A = \det((f(S^T))^{-1} f(S)) = \det(f(S^T))^{-1} \det f(S) = (\det f(S^T))^{-1} \det f(S)$$

veya

$$\det A = \frac{\det f(S)}{(\det f(S^T))} = \frac{\det f(S)}{(\det(f(S))^T)} = \frac{\det f(S)}{\det f(S)} = 1$$

olur. (a) ve (b) den dolayı, A pozitif ortogonal bir matristir.

Teorem 3.12.4.

$A = (f(S^T))^{-1} f(S)$ pozitif ortogonal ise $(f(S^T))^{-1} f(S) = f(S)(f(S^T))^{-1}$ dir.

İspat. Hip.: A pozitif ortogonal.

Hük.: $(f(S^T))^{-1} f(S) = f(S)(f(S^T))^{-1}$ dir. A nın inversi ve transpozu hesaplanırsa

$$A^{-1} = (f(S))^{-1} f(S^T) \tag{3.12.6}$$

$$A^T = f(S^T)(f(S))^{-1} \tag{3.12.7}$$

olur. A ortogonal olduğundan (3.12.6) ve (3.12.7) eşitliklerinden

$$(f(S))^{-1} f(S^T) = f(S^T)(f(S))^{-1}$$

bulunur. $f(S)$ matrisi regülerdir. Son eşitliğin inversi alınır, istenilen eşitlik elde edilir.

$f(S)$ nin Farklı Durumları:

(1) $f(S) = I + S$ olsun. $f(S)$, (3.12.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$A = (I - S)^{-1}(I + S)$$

olur. Bu durumda f en basit Cayley dönüşümü olarak adlandırılır.

(2) $f(S) = I - mS + nS^2$ olsun. $f(S)$, (3.12.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} A &= \left((I - mS + nS^2)^T\right)^{-1} (I - mS + nS^2) \\ A &= (I + mS + nS^2)^{-1} (I - mS + nS^2) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda, f ye genelleştirilmiş Cayley dönüşümü denir. Burada $S, \vec{s}$ ile birleşen 3×3 tipinde bir antisimetrik matristir.

3.13. Genelleştirilmiş Cayley Hareketinin Geometrik Yorumu

S nin öz denklemi $\lambda^3 + s^2\lambda = 0$ dır. Bundan dolayı S nin öz değerleri $0, is, -is$ dir. A nın öz değerleri ise,

$$(f(0))^{-1}.f(0), (f(-is))^{-1}.f(is), (f(is))^{-1}.f(-is)$$

dır. Daha açık bir ifadeyle,

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 - a.0 + b.0 = 1 \\ f(is) &= 1 - a.(is) + b.(is)^2 = (1 - bs^2) - ias \\ f(is) &= p - iq \\ f(-is) &= 1 - a.(-is) + b.(-is)^2 = (1 - bs^2) + ias = p + iq \end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak A matrisinin öz değerleri,

$$1, \quad (p + iq)(p - iq) \text{ ve } (p - iq)(p + iq)$$

dır.

3.14. Dönmelerin Bileşkesi

Teorem 3.14.1. 3×3 tipinde reel pozitif ortogonal A , B matrisleri tarafından temsil edilen ardışık iki dönme verilmiş olsun. A matrisine karşılık gelen antisimetrik matris S ve B matrisine karşılık gelen antisimetrik T ise AB matrisine karşılık gelen antisimetrik matris

$$W = \frac{S + T - ST + TS}{\sqrt{\det(I + ST)}}$$

dir. (Room, 1952).

Bu formül paydasındaki kök sebebiyle hesaplamalarda sıkıntı veriyor. Bu yüzden paydadaki kökü kaldıralım. Aşağıdaki hesaplamalar yapılrısa,

$$\langle \vec{s}, \vec{t} \rangle = s^T t = s_1 t_1 + s_2 t_2 + s_3 t_3 = k$$

$$G = G = st^T = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 t_1 & s_1 t_2 & s_1 t_3 \\ s_2 t_1 & s_2 t_2 & s_2 t_3 \\ s_3 t_1 & s_3 t_2 & s_3 t_3 \end{bmatrix},$$

$$ST = \begin{bmatrix} -s_3 t_3 - s_2 t_2 & s_2 t_1 & s_3 t_1 \\ s_1 t_2 & -s_3 t_3 - s_1 t_1 & s_3 t_2 \\ s_1 t_3 & s_2 t_3 & -s_2 t_2 - s_1 t_1 \end{bmatrix}$$

$$ST = -kI + G^T, \quad I + ST = (1 - k)I + G^T$$

$$I + ST = \begin{bmatrix} 1 - s_3 t_3 - s_2 t_2 & s_2 t_1 & s_3 t_1 \\ s_1 t_2 & 1 - s_3 t_3 - s_1 t_1 & s_3 t_2 \\ s_1 t_3 & s_2 t_3 & 1 - s_2 t_2 - s_1 t_1 \end{bmatrix}$$

$$\det(I + ST) = \det \left[(1 - k)I + G^T \right] = \det \left[(1 - k)I^T + G \right]^T = \det \left[(1 - k)I + G \right]$$

$$Iz(ST) = -2(s_1t_1 + s_2t_2 + s_3t_3) = -2s^Tt = -2k \quad (3.14.1)$$

$$G^2 = (st^T)(st^T) = s(t^Ts)t^T = s(s^Ts)t^T = kst^T = kG$$

G nin öz denklemi $\lambda^2 - k\lambda = 0$ dır. G^2 nin öz denklemi $\lambda^3 - k\lambda^2 = 0$ dır. Bundan dolayı

$$\det(G - \lambda I) = \lambda^2(k - \lambda)$$

dır. $\lambda = k - 1$ denirse,

$$\begin{aligned} \det([1 - k]I + G) &= (1 - k)^2 \text{ ve} \\ \det(I + ST) &= (1 - k)^2 = \left\{ 1 + \frac{1}{2}Iz(ST) \right\}^2 \end{aligned}$$

bulunur. (Yukarıdaki ara işlemlerde, Room karekökün işaretini açıklamadan muğlak bir biçimde alıyor).

$$ST - TS = \begin{bmatrix} 0 & s_2t_1 - s_1t_2 & s_3t_1 - s_1t_3 \\ s_1t_2 - s_2t_1 & 0 & s_3t_2 - s_2t_3 \\ s_1t_3 - s_3t_1 & s_2t_3 - s_3t_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14.2)$$

$U = ST - TS$ antisimetrik matrisiyle eşlenen vektör $\vec{u}$ olsun. Bu durumda

$$\vec{u} = \vec{s} \wedge \vec{t} = (s_2t_3 - s_3t_2, s_3t_1 - s_1t_3, s_1t_2 - s_2t_1)$$

bulunur. Ardışık dönmenin W matris formunu elde etmek için, “ Chong and Andrews” makalesinin sayfa 252 deki anlattığı metod uygulanır ve makaledeki a , b , λ sırasıyla s , t , w ile yer değiştirirse,

$$R(\vec{s}, 2\alpha)R(\vec{t}, 2\beta) = R(\vec{w}, 2\gamma)$$

elde edilir. Burada $\vec{w} = \frac{\vec{s} + \vec{t} - \vec{s} \times \vec{t}}{1 - \langle \vec{s}, \vec{t} \rangle}$ dır. (3.14.2) kullanılmasıyla $W = \frac{S+T-ST+TS}{1-k}$ ve (3.14.1) in kullanılmasıyla da $1 - k = 1 - \langle \vec{s}, \vec{t} \rangle = 1 + \frac{1}{2}Iz(ST)$ elde edilir.

3.15. Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönmeler

3.15..1 $\mathbb{R}^4$ 'de Dönmeler

R^2 deki dönmeler tek noktayı invaryant bırakırlar. R^3 deki dönmeler, bir doğruyu invaryant bırakırlar. Fakat R^4 deki dönmeler, 2-boyutlu bir düzlemi invaryant bırakırlar. Bu düzlem $u = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)$ ve $v = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$ ortonormal yer vektörleri tarafından gerilmiş olsun. S antisimetrik matrisi, tensör notasyonu ile,

$$S_{ij} = e_{ijkl}u_kv_l, \quad (1 \leq i, j \leq 4) \quad (3.15.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada e_{ijkl} , (i, j, k, l) gibi dört sembolün permütasyon tensörüdür. (3.15.1) eşitliğinden, $s_{12} = \sum_{k,l=1}^4 e_{12kl}u_kv_l = (e_{1234})u_3v_4 + (e_{1243})u_4v_3 = u_3v_4 - u_4v_3$ ve $s_{13} = \sum_{k,l=1}^4 e_{13kl}u_kv_l = (e_{1324})u_2v_4 + (e_{1342})u_4v_2 = -u_2v_4 - u_4v_2$ ve $s_{ii} = 0, 1 \leq i \leq 4$ bulunur. Diğer bileşenler benzer şekilde hesaplanırsa, S matrisi,

$$\begin{bmatrix} 0 & (u_3v_4 - u_4v_3) & -(u_2v_4 - u_4v_2) & (u_2v_3 - u_3v_2) \\ -(u_3v_4 - u_4v_3) & 0 & (u_1v_4 - u_4v_1) & -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ (u_2v_4 - u_4v_2) & -(u_1v_4 - u_4v_1) & 0 & (u_1v_2 - u_2v_1) \\ -(u_2v_3 - u_3v_2) & (u_1v_3 - u_3v_1) & -(u_1v_2 - u_2v_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15.2)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $Su = Sv = S(\lambda u + \mu v) = 0$; $(\lambda, \mu \in R)$ dır. Böylece, S matrisinin belirlediği θ radyanlık dönme,

$$R(u, v, \theta) = \exp(\theta S) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} S^k$$

ile gösterilebilir. Şimdi bu dönme matrisini bulalım. S anti-simetrik matrisi

$$S^2 + I_4 = u \otimes u + v \otimes v \quad (3.15.3)$$

eşitliğini sağlar ve

$$S(S^2 + I_4) = S(uu^T + vv^T)$$

$$S^3 + S = (Su)u^T + (Sv)v^T$$

dır. Buradan $S^3 = -S$ elde edilir. Böylece, A pozitif ortogonal matrisi

$$R(u, v, \theta) = \exp(\theta S) = A = I + (\sin \theta)S + (1 - \cos \theta)S^2 \quad (3.15.4)$$

şeklinde bulunur. Son denklem, üç boyutlu Öklid uzaydaki dönme matrisi ile aynı formdadır.

3.15..2 $\mathbb{R}^n$ 'de Dönmeler

R^n içindeki dönmeler bir $(n - 2)$ boyutlu alt uzayı invaryant bırakırlar. Bu alt uzay, $u_1, u_2, \dots, u_{n-2}$ ortonormal vektörleri tarafından gerilmiş olsun. Tensör notasyonu kullanarak anti-simetrik matris, $S^2 + I = \sum_{k=1}^{n-2} u_k \otimes u_k = u_1 \otimes u_1 + \dots + u_{n-2} \otimes u_{n-2}$ eşitliğini sağlar. Son eşitlik S matrisiyle çarpılırsa, $S^3 = -S$ elde edilir. Böylece verilen şartlar altında, R^n deki dönme matrisi

$$R(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, \theta) = \exp(\theta S) = I + (\sin \theta)S + (1 - \cos \theta)S^2$$

dır. Bu son eşitlik de yine, diğerleri ile benzer formdadır. Düzlemde dönme rolünü oynayan, $u_{(n-1)}$ ve u_n vektörleri hesaplanmak istenirse,

$$S^2 u_k = \lambda_k u_k$$

öz sistemi çözülür. $1 \leq k \leq n - 2$ için, öz değerler $\lambda_k = 0$ ve öz vektörler daha önceden belirlenmiş $(n - 2)$ vektördür. $k = n - 1$ ve $k = n - 2$ için öz değerler “-1” dir ve bu iki öz değere karşılık gelen öz vektörler dönmenin yapıldığı düzlemi gererler.

4. H/H' HAREKETİNİN AÇISAL HIZ MATRİSİ

4.1. H/H' Hareketinin Açısall Hız Matrisi

H harekeli H' sabit uzay olmak üzere, $x = Ax_0 + c$ hareketinin dönme kısmını göz önüne alalım ve x_0, H da sabittir olsun. $x = Ax_0$ denklemininden $x = A^{-1}x$ bulunur. $x = Ax_0$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$x' = A'x_0 = A' (A^{-1}x) = (A'A^{-1})x = \Omega x$$

bulunur. Pozitif ortogonal bir A matrisi için $A^{-1} = A^T$ veya $A^T A = AA^T = I$ dır. Son $AA^T = I$ eşitliğin türevi alınırsa, $A'A^T + A(A')^T = 0$ veya $A'A^T = -A(A')^T$ elde edilir. $\Omega = A'A^T$ denilir ve son eşitliğin transpozesi alınarak,

$$\Omega^T = (A'A^T)^T = A(A')^T = - (A'A^T) = -\Omega$$

bulunur. Böylece Ω matrisinin antisimetrik olduğu gösterildi.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1-k_1^2+k_2^2}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{2k_1}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{2k_1k_2}{k_1^2+k_2^2+1} \\ \frac{-2k_1}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{1-k_1^2-k_2^2}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{2k_2}{k_1^2+k_2^2+1} \\ \frac{2k_1k_2}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{-2k_2}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{1+k_1^2-k_2^2}{k_1^2+k_2^2+1} \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

dır. (4.1.1) deki A matrisindeki (kolon vektörlerinin paydasını hariç tutarak) kolon vektörleri

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 - k_1^2 + k_2^2 \\ -2k_1 \\ 2k_1k_2 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 2k_1 \\ 1 - k_1^2 - k_2^2 \\ -2k_2 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 2k_1k_2 \\ 2k_2 \\ 1 + k_1^2 - k_2^2 \end{bmatrix}$$

olsunlar.

$$H = Sp\{O'; E_1, E_2, E_3\} \quad , \quad H' = Sp\{O; e_1, e_2, e_3\}$$

sırasıyla, hareketli ve sabit uzayları belirtsin. A pozitif ortogonal matrisi yerine (4.1.1) matrisini ve c ötelemesi yerine de $c = \alpha(t)$ eğrisini alarak,

$$x = Ax_0 + c \quad (4.1.2)$$

ile E^3 Öklid uzayında α eğrisi boyunca bir katı cismin bir parametrelili bir hareketi elde edilir.

Şimdi (4.1.2) deki hareketin Hız ve Darboux vektörlerini pol noktolarını (pol eksenlerini), hesaplayalım. (4.1.2) ile belli olan H ın H' ye göre hareketini H/H' ile göstereceğiz.

A matrisinin türev matrisi

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{-4k_1(k'_1 + k'_1k_2^2 - k'_2k_1k_2)}{(k_1^2 + k_2^2 + 1)^2}, & a_{12} &= \frac{-2(-k'_1 + k'_1k_1^2 - k'_1k_2^2 + 2k'_2k_1k_2)}{(k_1^2 + k_2^2 + 1)^2} \\ a_{13} &= \frac{-2(-k'_1k_2 - k'_2k_1 - k'_1k_2^3 - k'_2k_1^3 + k'_1k_1^2k_2 + k'_2k_1k_2^2)}{(k_1^2 + k_2^2 + 1)^2}, \\ a_{21} &= \frac{2(-k'_1 + k'_1k_1^2 - k'_1k_2^2 + 2k'_2k_1k_2)}{(k_1^2 + k_2^2 + 1)^2}, & a_{22} &= -4\frac{k'_1k_1 + k'_2k_2}{(k_1^2 + k_2^2 + 1)^2} \\ a_{23} &= \frac{-2(-k'_2 - k'_2k_1^2 + k'_2k_2^2 + 2k'_1k_1k_2)}{(k_1^2 + k_2^2 + 1)^2}, & a_{32} &= \frac{2(-k'_2 - k'_2k_1^2 + k'_2k_2^2 + 2k'_1k_1k_2)}{(k_1^2 + k_2^2 + 1)^2} \\ a_{31} &= \frac{-2(-k'_1k_2 - k'_2k_1 - k'_1k_2^3 - k'_2k_1^3 + k'_1k_1^2k_2 + k'_2k_1k_2^2)}{(k_1^2 + k_2^2 + 1)^2} \\ a_{33} &= \frac{4k_2(-k'_2 - k'_2k_1^2 + k'_1k_1k_2)}{(k_1^2 + k_2^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dır. $x = Ax_0 + c$ hareketinin $x = Ax_0$ dönme kısmını düşünelim. t -ye göre türev alınırsa, $x' = A'x_0$ bulunur. x değeri yerine yazılırsa $x' = (A'A^T)x = \Omega x$ elde edilir. Burada Ω antisimetrik bir matristir. Bu matrise, A ya karşılık gelen hareketin Darboux matrisi denir. Şimdi H/H' hareketinin Darboux matrisini hesaplayalım:

$$\Omega = A'A^T = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \frac{2}{k_1^2 + k_2^2 + 1} \begin{bmatrix} 0 & k'_1 & -(k'_1 k_2 - k'_2 k_1) \\ -k'_1 & 0 & k'_2 \\ (k'_1 k_2 - k'_2 k_1) & -k'_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

bulunur. (4.1.3) ile belli olan Darboux matrisini ele alıp, bu matrisin Ω ile gösterilen Darboux matrisinden ani açılal hız matrisinin bileşenlerini bulalım. Ω antisimetrik matrisinin üç elemanını biliyorsak matrisini yazabiliriz. (4.1.3) denkleminde belli bir sırada alınan üç elemandan

$$\vec{\Omega} = \frac{2}{1 + k_1^2 + k_2^2} (k'_2, k'_1 k_2 - k'_2 k_1, k'_1) \quad (4.1.4)$$

vektörü bulunur. Bu son denklemin belirttiği $\vec{\Omega}$, H' sabit uzayındaki çatıya göre Darboux vektörünü veya ani açılal hız vektörünün bileşenlerini verir. H hareketli uzayındaki

$$\{O'; E_1, E_2, E_3\}$$

çatısına göre Darboux vektörünü $\vec{W}$ ile gösterelim. $\vec{\Omega} = AW$ eşitliğinden $\vec{W} = A^{-1}\vec{\Omega}$ dir. Böylece $\vec{W} = A^T\vec{\Omega}$ eşitliğinden bulunabilir. Gerçekten,

$$W = \frac{2}{1 + k_1^2 + k_2^2} \begin{bmatrix} \frac{1-k_1^2+k_2^2}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{2k_1}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{2k_1 k_2}{k_1^2+k_2^2+1} \\ \frac{-2k_1}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{1-k_1^2-k_2^2}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{2k_2}{k_1^2+k_2^2+1} \\ \frac{2k_1 k_2}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{-2k_2}{k_1^2+k_2^2+1} & \frac{1+k_1^2-k_2^2}{k_1^2+k_2^2+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_2 \\ k'_1 k_2 - k'_2 k_1 \\ k'_1 \end{bmatrix}$$

$$W = \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + 1} (k'_2, k'_2 k_1 - k'_1 k_2, k'_1).$$

Teorem 4.1.1. H nın H' ye hareketini veren B matrisi ile, hareketin Ω Darboux matrisi arasında $\Omega = \frac{2}{k_1^2+k_2^2+1} (BB' - B'B + B')$ veya $\vec{\Omega} = \frac{2}{k_1^2+k_2^2+1} (b' \wedge b + b')$ bağıntıları vardır. Burada b veya b' vektörleri sırasıyla, B ve B' nin üçer elemanından meydana gelen vektörlerdir.

İspat. Biri aşağıdaki eşitlikleri kolayca elde edebilir.

$$BB' = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k'_1 & 0 \\ -k'_1 & 0 & k'_2 \\ 0 & -k'_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k'_1 k_1 & 0 & k'_2 k_1 \\ 0 & -k'_1 k_1 - k'_2 k_2 & 0 \\ k'_1 k_2 & 0 & -k'_2 k_2 \end{bmatrix}$$

$$B'B = \begin{bmatrix} 0 & k'_1 & 0 \\ -k'_1 & 0 & k'_2 \\ 0 & -k'_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k'_1 k_1 & 0 & k'_1 k_2 \\ 0 & -k'_1 k_1 - k'_2 k_2 & 0 \\ k'_2 k_1 & 0 & -k'_2 k_2 \end{bmatrix}$$

$$B'B - BB' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k'_1 k_2 - k'_2 k_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ k'_2 k_1 - k'_1 k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BB' - B'B + B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k'_1 k_2 - k'_2 k_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ k'_2 k_1 - k'_1 k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k'_1 & 0 \\ -k'_1 & 0 & k'_2 \\ 0 & -k'_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$BB' - B'B + B' = \begin{bmatrix} 0 & k'_1 & k'_1 k_2 - k'_2 k_1 \\ -k'_1 & 0 & k'_2 \\ k'_2 k_1 - k'_1 k_2 & -k'_2 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$$\frac{2}{k_1^2 + k_2^2 + 1} (BB' - B'B + B') = \frac{2}{k_1^2 + k_2^2 + 1} \begin{bmatrix} 0 & k'_1 & -(k'_1 k_2 - k'_2 k_1) \\ -k'_1 & 0 & k'_2 \\ k'_1 k_2 - k'_2 k_1 & -k'_2 & 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Böylece

$$\Omega = \frac{2}{k_1^2 + k_2^2 + 1} (B'B - BB' + B')$$

dır. Benzer şekilde,

$$b' \wedge b = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ k'_2 & 0 & k'_1 \\ k_2 & 0 & k_1 \end{vmatrix} = (k'_2, k'_1 k_2 - k'_2 k_1, k'_1)$$

ve

$$b' \wedge b + b' = (k'_2, k'_1 k_2 - k'_2 k_1, k'_1) + (k'_2, 0, k'_1) = (k'_2, k'_1 k_2 - k'_2 k_1, k'_1)$$

Böylece

$$\vec{\Omega} = \frac{2}{k_1^2 + k_2^2 + 1} b' \wedge b + b'$$

elde edilir. $\vec{\Omega}$ ve $\vec{W}$ vektörleri arasındaki ilişkiyi bir teoremle verelim.

Teorem 4.1.2. H/H' hareketinin sabit ve hareketli uzaya göre Darboux vektörleri sırasıyla $\vec{\Omega}$ ve $\vec{W}$ ise

$$\vec{\Omega} = \vec{W} \iff \frac{k_1}{k_2} = \text{sabit}.$$

dır, burada $k_1 = k_1(s)$ ve $k_2 = k_2(s)$ bir $\alpha = \alpha(s)$ uzay eğrisinin eğrilikleridir.

İspat. $\Rightarrow$: $\vec{\Omega} = \vec{W}$ olsun. $\vec{\Omega} = \frac{2}{k_1^2 + k_2^2 + 1} (k'_2, k'_1 k_2 - k'_2 k_1, k'_1)$ ve $\vec{W} = \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + 1} (k'_2, k'_2 k_1 - k'_1 k_2, k'_1)$ olduğundan, $\vec{\Omega} = \vec{W}$ eşitliğinden

$$k'_1 k_2 - k'_2 k_1 = k'_2 k_1 - k'_1 k_2$$

$$k'_1 k_2 - k'_2 k_1 = 0$$

$$\frac{k'_1 k_2 - k_1 k'_2}{k_2^2} = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{k_1}{k_2} \right) = 0$$

veya $\frac{k_1}{k_2} = \text{sabit}$.

Sonuç: k_1 ve k_2 eğrilikleri sabit olmayan ve yay parametresine göre verilmiş bir eğri α olsun. H/H' hareketinde sabit ve hareketli uzaylardaki Darboux vektörleri paralel ise $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. Bu durumda, α uzay eğrisinin bir genel helis olmasını gerektirir.

Teorem 4.1.3. $A \in SO(3)$, $rank A' = 2$ ve $\vec{\Omega}$, $\vec{W}$ vektörleri de sırasıyla, H/H' hareketinin sabit ve hareketli uzaya ait Darboux vektörleri ise o taktirde aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

- (i) $(A')^T \vec{\Omega} = 0$
- (ii) $A' \cdot \vec{W} = 0$
- (iii) $A'' \cdot W = 0$ ise $A' \cdot W' = 0$
- (iv) $A''^T \vec{\Omega} = 0$ ise $A'^T \Omega' = 0$

İspat. $\delta = \frac{2}{k_1^2 + k_2^2 + 1}$ olsun.

$$(i) : (A')^T \vec{\Omega} = A'^T \left(\delta \begin{bmatrix} k'_2 & k'_1 k_2 - k'_2 k_1 & k'_1 \end{bmatrix}^T \right) = \delta \left(A'^T \begin{bmatrix} k'_2 & k'_1 k_2 - k'_2 k_1 & k'_1 \end{bmatrix}^T \right) = \delta \vec{O} = \vec{O} \text{ veya } (A')^T \vec{\Omega} = \vec{O}.$$

(ii)

$$A'W = A' \left(\delta \begin{bmatrix} k'_2 & k'_2 k_1 - k'_1 k_2 & k'_1 \end{bmatrix}^T \right) = \delta \left(A' \begin{bmatrix} k'_2 & k'_1 k_2 - k'_2 k_1 & k'_1 \end{bmatrix}^T \right) \delta \vec{O}$$

veya

$$A' \vec{W} = (0, 0, 0) \quad (4.1.5)$$

bulunur.

(iii) $A'W = \vec{O}$ eşitliğinin her iki tarafının s ye göre türevinden yani $\frac{d}{ds}(A'W) = \frac{d}{ds}(\vec{O})$ dan

$$A''W + A'W' = 0$$

olur. $A'' \vec{W} = \vec{O}$ olduğundan $A'W' = \vec{O}$ elde edilir.

(iv) $\left((A')^T \vec{\Omega} \right) = \vec{O}$ eşitliğinin her iki tarafının s ye göre türevinden yani $\frac{d}{ds} \left((A')^T \vec{\Omega} \right) = \frac{d}{ds} (\vec{O})$ dan $(A'')^T \vec{\Omega} + (A')^T \vec{\Omega}' = 0$ olur. $A''^T \vec{\Omega} = 0$ olduğundan $(A')^T \vec{\Omega}' = 0$ elde edilir. İleride bu eşitlikleri sağlayan $\vec{\Omega}$ ve $\vec{W}$ vektörlerine sırası ile sabit ve hareketli uzayın ani vida eksenleri denilecektir.

Teorem 4.1.4. (E ile E^* arasındaki bağıntı). $E^* = \frac{\vec{\Omega}}{\|\vec{\Omega}\|}$ ve $E = \frac{\vec{W}}{\|\vec{W}\|}$ vektörleri ve $A \in SO(3)$ olsun. A pozitif ortogonal olduğundan $A^T = A^{-1}$ dir. Son eşitlikten $A^T A = I$ olur. Son eşitliğin diferansiyeli alınır, $(A')^T A + A^T A' = 0$ veya

$(A')^T A = -A^T A'$ olur. Buradan

$$\left((A')^T A \right) A^{-1} = \left(-A^T A' \right) A^{-1}$$

$$(A')^T = -A^T A' A^{-1}$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$(A')^T \vec{\Omega} = -A^T A' A^{-1} \vec{\Omega}$$

$$(A')^T \vec{\Omega} = -A^T A' \vec{W}$$

yazılabilir. $A' \cdot W = 0$ olduğu için son eşitlikten

$$(A')^T \vec{\Omega} = 0$$

olur. denklem sistemine varılır. Bu sistemin çözümünden $A^{-1} E^* = \lambda E, \lambda \in R$ veya $(AA^{-1})E^* = A(\lambda E)$ veya

$$E^* = \lambda A E \tag{4.1.6}$$

eşitliğine varılır. (4.1.6) eşitliğinin normunun karesi alınırsa,

$$\langle E^*, E^* \rangle = \langle \lambda A E, \lambda A E \rangle = \lambda^2 \langle A E, A E \rangle$$

elde edilir. Dönme uzunlukları koruyan bir dönüşüm olduğundan,

$$\langle E^*, E^* \rangle = \lambda^2 \langle E, E \rangle$$

$$\|E^*\|^2 = \lambda^2 \|E\|^2$$

$$1 = \lambda^2 \cdot 1 = \lambda^2$$

bulunur. $\lambda = 1$ için $E^* = A E$ olur.

4.2. H/H' Hareketinin Pol Noktaları (Pol Eksenleri)

$A'x_0 + c'$ ile verilen sürüklenme hızı sıfır olan noktalar pol noktaları olduğundan

$$A'x_0 + c' = 0 \quad (4.2.1)$$

denklem sisteminin çözümü,

$$x = Ax_0 + c \quad (4.2.2)$$

ile belirlenen (4.2.2) hareketinin hareketli pol noktalarını verir. (4.2.1) denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$\text{rank} A = \text{rank}(A', c') = 2$$

eşitliği sağlanmalıdır. Yani sistem bağdaşabilir olmalıdır. (4.2.2) den

$$Ax_0 = x - c$$

$$A^{-1}Ax_0 = A^{-1}(x - c)$$

$$x_0 = A^{-1}(x - c) \quad (4.2.3)$$

dir. (4.2.3)'ü, (4.2.1) denkleminde yerine yazalım. Yeni denklem;

$$A'x_0 + c' = 0 \quad (4.2.4)$$

$$A'(A^{-1}(x - c)) + c' = 0$$

$$A'A^{-1}(x - c) + c' = 0$$

olur. (4.2.4) denkleminde $A'A^{-1} = \Omega$ ve $x - c = x^*$ denilirse, (4.2.4) denklemi

$$\vec{\Omega} \wedge x^* + c' = 0 \quad (4.2.5)$$

şekline gelir. (4.2.5) denkleminin çözümleri bize H/H' hareketinin sabit pol noktasını verir. (4.2.5) denkleminin çözülebilmesi için

$$\langle \vec{\Omega}, c' \rangle = 0 \quad (4.2.6)$$

şartı sağlanmalıdır. Genel olarak (4.2.6) şartı sağlanmaz. Fakat c' vektörünü Ω Darboux vektörüne dik ve paralel olmak üzere iki bileşene ayırabiliriz. Yani,

$$c' = c' - \frac{\langle \Omega, c' \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega + \frac{\langle \Omega, c' \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega \quad (4.2.7)$$

yazılabilir. Burada

$$U = c' - \frac{\langle \Omega, c' \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega, \quad V = \frac{\langle \Omega, c' \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega$$

denirse, (4.2.7) eşitliklerinden

$$c' = U + V \quad (4.2.8)$$

şekline gelir. (4.2.8) deki eşitlikten,

$$U = c' - \frac{\langle \Omega, c' \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega$$

$$\langle \Omega, U \rangle = \left\langle \Omega, c' - \frac{\langle \Omega, c' \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega \right\rangle = \langle \Omega, c' \rangle - \frac{\langle \Omega, c' \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \langle \Omega, \Omega \rangle = \langle \Omega, c' \rangle - \langle \Omega, c' \rangle = 0$$

$$V = \frac{\langle \Omega, c' \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega = \lambda \Omega$$

olduğundan c' vektörü biri Ω Darboux vektörüne dik ve diğeri Ω Darboux vektörüne paralel olmak üzere iki bileşene ayrılmış olur. (4.2.5) denklem sisteminde c' yerine U vektörü yazılırsa

$$\Omega x^* + U = 0 \quad (4.2.9)$$

bulunur. (4.2.9) denklem sisteminde $\langle \Omega, U \rangle = 0$ şartı sağlandığından

$$\text{rank}(\Omega, U) = \text{rank} \Omega = 2$$

olup sistem çözülebilir. Şimdi

$$\Omega x^* = 0 \quad (4.2.10)$$

homogen kısmın genel çözümünü bulalım. (4.2.10) homogen denklem sisteminin bir çözümü,

$$E^* = \frac{\vec{\Omega}}{\|\vec{\Omega}\|}, a = \frac{1}{\sqrt{k_1'^2 + k_2'^2 + (k_1'k_2 - k_1k_2')^2}}$$

veya

$$E^* = a (k_2', k_1'k_2 - k_1k_2', k_1') \quad (4.2.11)$$

olarak bulunur. O halde (4.2.10) homogen denklem sisteminin bütün çözümleri

$$x^* = \lambda E^* \quad (4.2.12)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\langle \Omega, U \rangle = 0$$

şartı altında (4.2.9) denklemi çözülürse,

$$\Omega x^* + U = O$$

$$\Omega \wedge x^* + \vec{U} = O$$

$$\Omega \wedge (\Omega \wedge x^* + U) = \Omega \wedge O$$

$$\Omega \wedge (\Omega \wedge x^*) + \Omega \wedge U = O$$

$$\langle \Omega, x^* \rangle \Omega - \langle \Omega, \Omega \rangle x^* + \Omega \wedge U = O$$

$$\langle \Omega, \Omega \rangle x^* = \langle \Omega, x^* \rangle \Omega + \Omega \wedge U$$

veya

$$x^* = \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \frac{\langle \Omega, x^* \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega$$

$$x^* = \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \frac{\mu}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega$$

$$x^* = \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \lambda \Omega$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bir özel çözümü, Ω bir vektör olmak üzere

$$P_0 = \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle}$$

alınabilir. Böylece (4.2.9) denklem sisteminin genel çözümü, (4.2.12) ve (4.2.13) eşitliklerinden

$$x^* = \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \lambda E^* \quad (4.2.13)$$

olarak bulunur. (4.2.13) eşitliğinde

$$x^* = x - c$$

değeri yerine yazılırsa

$$x = \left(\frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + c \right) + \lambda E^* \quad (4.2.14)$$

bulunur. (4.2.14) eşitliğinde

$$Q = \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + c \quad (4.2.15)$$

denilirse,

$$x = Q + \lambda E^* \quad (4.2.16)$$

olur. (4.2.16) nin anlamı, Q noktasından geçen ve doğrultmanı E^* olan bir doğrudur. Bu doğruya H' sabit uzayında sabit pol(vida) eksenini diyeceğiz.

Sabit pol ekseninin H hareketli uzayında ifadesi $x = Ax_0 + c$ eşitliğinde x -in (4.2.16) deki değeri yerine yazılarak bulunur ve (4.2.16) yerine yazılırsa hareketli uzayın pol eksenini olarak,

$$x = Ax_0 + c \quad (4.2.17)$$

$$\frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + c + \lambda E^* = Ax_0 + c$$

$$Ax_0 = \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \lambda E^*$$

veya

$$x_0 = A^{-1} \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \lambda A^{-1} E^*$$

$$x_0 = -A^{-1} \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \lambda E$$

bulunur.

Teorem 4.2.1. E^* vektörü Ω vektörüne paraleldir.

İspat. $E^* = a(k'_2, k'_1 k_2 - k_1 k'_2, k'_1)$ dir. Ayrıca (4.7.3) den H' sabit uzayındaki Darboux vektörü

$$\Omega = \frac{2(k'_2, k'_1 k_2 - k_1 k'_2, k'_1)}{1 + k_1^2 + k_2^2}$$

idi. Buradan

$$\Omega = \eta E^* ; \eta = \frac{2a}{1 + k_1^2 + k_2^2}$$

bulunur. Bu ise sabit pol ekseninin, Ω Darboux vektörüne paralel olduğunu gösterir.

Sonuç 4.2.2. H/H' hareketinin sabit pol eksenini,

$$x = \frac{1}{\eta} (E^* \wedge U) + c + \lambda E^*$$

dir.

İspat. Teorem (4.2.1) den

$$\Omega = \eta E^* ; \eta = \frac{2\alpha}{1 + k_1^2 + k_2^2}$$

olarak bilinmektedir. Bu değeri (4.2.7) de yerine yazarsak ,

$$c' = c' - \langle c', E^* \rangle E^* + \langle c', E^* \rangle E^*$$

bulunur. Ayrıca

$$U = c' - \langle c', E^* \rangle E^* \quad , \quad V = \langle c', E^* \rangle E^*$$

olur. O halde

$$A'x + U = 0$$

denkleminin özel çözümü olan (4.2.16)

$$R^* = \frac{1}{\eta} A^{-1} (E^* \wedge U) + \lambda A^{-1} E^*$$

bulunur. Aynı şekilde sabit pol ekseninin yeni ifadesi olarak

$$x = \frac{1}{\eta} (E^* \wedge U) + c + \lambda E^*$$

bulunur.

4.3. H/H' Hareketinin Ani Vida Eksen

$x = Ax_0 + c$ hareketinin, H hareketli uzayında sabit normlu hız vektörüne sahip noktaların geometrik yerini bulalım. $Ax_0 = 0$ homogen denklem sisteminde $rank A = 2$ olduğundan çözüm uzayını gerer. Bu vektörü E ile gösterelim ve E yi normlayalım.

$$E = \frac{(k'_2, k_1 k'_2 - k'_1 k_2, k'_1)}{\sqrt{k_1'^2 + k_2'^2 + (k_1 k'_2 + k'_1 k_2)^2}} \quad (4.3.1)$$

olarak bulunur.

$$\left\{ \begin{array}{l} A'y = 0 \quad , \quad y = A'x_0 + c' \end{array} \right.$$

homogen denklem sistemini (4.3.1) deki gibi düşünür ve çözüm uzayını geren vektör E^* ile gösterilirse,

$$E^* = \frac{(-k'_2, k'_1 k_2 - k_1 k'_2, k'_1)}{\sqrt{k_1'^2 + k_2'^2 + (k'_1 k_2 - k_1 k'_2)^2}} \quad (4.3.2)$$

olarak bulunur.

$$B = c' - \langle c', E^* \rangle E^* \quad (4.3.3)$$

olmak üzere H hareketli uzayında sabit normlu bir hız vektörüne sahip noktalar

$$A'x_0 + B = 0 \quad (4.3.4)$$

denklemini sağlarlar. (4.3.4) denklem sistemini çözelim. $A'x_0 = O$ homogen kısmın bir çözümü E olduğundan $A'x_0 = O$ denkleminin bütün çözümleri

$$x_0 = \lambda E \quad (4.3.5)$$

biçimindedir. Şimdi (4.3.4) denklem sisteminin bir özel çözümünü bulalım.

$$\langle B, E^* \rangle = 0 \quad (4.3.6)$$

olduğu deki (4.3.3) deki B nin eşitinin yerine yazılması ile görülebilir. Teorem 4.3.1 den

$$\Omega = \eta E^*$$

olarak bilinmektedir. O halde (4.3.4) denklem sisteminin bir özel çözümü

$$P = \frac{1}{\eta} A^{-1} (E^* \wedge B) \quad (4.3.7)$$

olarak bulunur. Gerçekten

$$A'P + B = \frac{1}{\eta} A' A^{-1} (E^* \wedge B) + B = \frac{\Omega}{\eta} (E^* \wedge B) + B = E^* \wedge (E^* \wedge B) + B$$

$$A'P + B = 0$$

bulunur. Buradan $A'x_0 + B = 0$ denklem sisteminin genel çözümü (4.3.5) ve (4.3.7) den

$$x_0 = P + \lambda E \quad (4.3.8)$$

bulunur.

(4.3.8)'in anlamı :

P noktasından geçen ve doğrultman vektörü E olan bir doğrudur. Buna göre aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 4.3.1. (4.2.2) ile belli olan $x = Ax_0 + c$ hareketinin H hareketli uzayında sabit normlu bir hız vektörüne sahip noktaların geometrik yeri (4.3.8) ile verilen doğrudur.

Tanım 4.3.2. H/H' hareketinin H hareketli uzayında herhangi bir t anında sabit normlu bir hız vektörüne sahip olan noktaların geometrik yeri olan doğruya ani vida eksenini denir ve bu kısaca $I.S.A$ ile gösterilir. (4.3.8) de verilen ani vida eksenini için

$$P = \frac{1}{\eta} A^{-1} (E^* \wedge B); \quad \eta = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + (k_1' k_2 - k_1 k_2')^2}}{1 + k_1^2 + k_2^2}$$

$$E = \frac{(k_2', k_1 k_2' - k_1' k_2, k_1')}{\sqrt{k_1'^2 + k_2'^2 + (k_1 k_2' + k_1' k_2)^2}}$$

dır. (4.3.8) ile verilen

$$x_0 = P + \lambda E$$

ani vida ekseninin H' sabit uzayında vektör temsili olarak,

$$x_0 = \frac{1}{\eta} (-E^* \wedge B) + c + \lambda E$$

bulunur.

Sonuç 4.3.3. H/H' hareketinde $I.S.A = \text{Pol}$ eksenidir.

İspat. Sonuç 4.2.2'den

$$U = c' - \langle c', E^* \rangle E^*$$

olmak üzere $A'x_0 + U = 0$ denkleminin çözümü

$$x_0 = \frac{1}{\eta} A^{-1} (E^* \wedge B) + \lambda A^{-1} E^*$$

olarak bulunmuştu. Bu denkleme hareketli pol eksenini adı verilmişti. (4.3.3) de, $B = c' - \langle c', E^* \rangle E^*$ idi. $U = B$ olduğundan pol eksenini için

$$x_0 = \frac{1}{\eta} A^{-1} (E^* \wedge B) + \lambda A^{-1} E^*$$

olur. Bu ise (4.3.8) ile verilen ani vida eksenidir.

4.4. t Anında Ω ya Paralel Olan Noktaların Geometrik Yeri

$x_0 \in H$ sabit noktasının hızı

$$x' = A'x_0 + c' \quad (4.4.1)$$

dır.

$$x = Ax_0 + c \quad (4.4.2)$$

(4.4.2) den, $x_0 = A^{-1}(x - c)$ bulunur. Bunu (4.4.1) de yerine yazarsak

$$x' = \Omega \wedge (x - c) + c' \quad (4.4.3)$$

olarak bulunur. Biz Ω 'ya paralel hız noktalarını arıyoruz. Bu noktalar

$$x' = \sigma\Omega, \sigma \in R$$

bağıntısını sağlamalıdır. x değeri (4.4.3) de yerine yazılırsa

$$\Omega \wedge (x - c) + c' = \sigma\Omega$$

$$\Omega \wedge (x - c) = -(c' - \sigma\Omega)$$

bulunur. $a \wedge x = b$ denkleminin $\langle a, b \rangle = 0$ şartı altında çözüm cümlesi

$$x = \frac{a \wedge b}{\langle a, b \rangle} + \eta\alpha$$

dır. Bunu (4.4.3) eşitliğine uygularsak, çözüm cümlesi

$$x - c = \frac{\Omega \wedge c'}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \eta\Omega$$

$$x = \frac{\Omega \wedge c'}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + c + \eta\Omega \quad (4.4.4)$$

bulunur.

Sonuç 4.4.1. H/H' hareketinin herhangi bir t anında, hızı Ω ya paralel olan noktaların geometrik yeri, yine Ω paralel bir doğrudur.

İspat. Hızı Ω ya paralel olan noktalar (4.4.4) denkleminde,

$$x = \frac{\Omega \wedge c'}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + c + \eta \Omega$$

idi. $Q_0 = \frac{\Omega \wedge c'}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + c$ denilirse,

$$x = Q_0 + \eta \Omega \quad (4.4.5)$$

olur. (4.4.5) nın anlamı Q_0 noktasından geçen ve doğrultman vektörü Ω olan bir doğrudur. Bu ise ispatı tamamlar.

4.5. E^3 de Frenet-Serret Hareketi

Bu bölümde, bir uzay eğrisinin Frenet-Serret hareketi tanımlanıp bu hareketin Darboux matrisi hesaplanacaktır.

4.5.1 Bir Eğri İçin, Frenet-Serret Hareketinin Oluşturulması

İncelediğimiz bu özel hareket, aksoidler ve onların boğaz eğrilerinin kesinlikle belirlenebildiği ve henüz açık olmayan, genel teoremin bir örneğini sunar. Bu hareket, H' içinde sabitlenmiş bir α uzay eğrisi cinsinden tanımlanır. Bu hareket, x ve y eksenlerini, sırasıyla, α eğrisinin teğet ve asli normalini çakışacak şekilde döndürmesine karşın, $O_{\{xyz\}}$ hareketli çatısını α boyunca O ile birlikte taşıyacak şekilde bir harekettir. Bu O noktası α 'nın bir Q noktası ile çakıştığında, $O_{\{xyz\}}$ çatısının Q noktasındaki $Q_{\{\xi\eta\rho\}}$ Frenet üçyüzlüsü ile çakıştığı anlamına gelir. Bu üçyüzlü, karşılıklı olarak birbirine dik olan, teğet $Q_{\{\xi\}}$, asli normal $Q_{\{\eta\}}$ ve binormal $Q_{\{\rho\}}$ binormal eksenlerinden oluşur. Açıkça bu hareketin geometrisi, tamamen α tarafından belirlenir.

Eğer x ve x_0 , sırasıyla H' ve E' 'de ölçülen, bir hareketli noktanın konum vektörleri iseler, o zaman herhangi bir hareket için

$$x = Ax_0 + c \quad (4.5.1)$$

olduğunu biliyoruz. A , bir ortogonal matris ve c , O başlangıçlı bir öteleme vektörüdür ve A ve c hareketin parametresine bağlıdır.

Özel hareketimiz O noktasını α boyunca hareket ettirdiğinden dolayı, $x = c$, α uzay eğrisini temsil eder. Hareketin parameresi olarak, α nın yay uzunluğunu s sembolünü ve s ye göre türevleri belirtmek için de $'$ sembolünü kullanacağız.

$Q_{\{\xi\}}$, $Q_{\{\eta\}}$, $Q_{\{\rho\}}$ boyunca birim vektörler $t = (t_1, t_2, t_3)$, $n = (n_1, n_2, n_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ olsunlar. Eğri yay uzunluğuyla verildiğinden

$$t = \alpha', \quad n(s) = \frac{1}{k_1} \alpha'', \quad b(s) = t(s) \wedge n(s) \quad (4.5.2)$$

denklemlerine sahiptir. A matrisini

$$A = \begin{bmatrix} t_1 & n_1 & b_1 \\ t_2 & n_2 & b_2 \\ t_3 & n_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (4.5.3)$$

(4.5.2) den

$$x' = A'x_0 + c'. \quad (4.5.4)$$

α eğrisinin eğriliği κ ve torsiyonu τ olmak üzere Frenet formüllerinden

$$\begin{cases} t' = \kappa n & , & b' = -\tau n & , & n' = -\kappa t + \tau b \end{cases} \quad (4.5.5)$$

(4.5.1) den

$$x_0 = A^{-1}(x - c), \quad (4.5.6)$$

ve $A^{-1} = A^T$ olduğunda (4.5.2) ve (4.5.6) denklemlerinden, $A'A^T = \Omega$ eşitliğini kullanarak ve (4.5.5) anlamını kullanarak x_0 'ı elimine edilerek

$$x' = \Omega(x - c) + c'$$

veya açık ifadesiyle

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -(\kappa b_3 + \tau t_3) & \kappa b_2 + \tau t_2 \\ \kappa b_3 + \tau t_3 & 0 & -(\kappa b_1 + \tau t_1) \\ -(\kappa b_2 + \tau t_2) & \kappa b_1 + \tau t_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.7)$$

antimetrik matris elde edilir. Böylece

$$\Omega = (\tau t_1 + \kappa b_1, \kappa b_3 + \tau t_3, \kappa b_2 + \tau t_2), \quad (4.5.8)$$

H' içindeki ani açısal hız vektörü ve $\vec{\Omega} = A\vec{W}$ eşitliğinden bulunan

$$\vec{W} = (\tau, 0, \kappa) \quad (4.5.9)$$

vektörü de, H içindeki ani açısal hız vektörüdür.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada geometri alanında önemli yeri olan Cayley formülünden bahsedilmiş ve uygulamalarıyla gösterilmiştir. Dönme konusuyla ilgili Cayley, n - boyutlu Öklid uzayda iki ortogonal vektör için, belirli şartlar altında her reel anti-simetrik matrisine bir Cayley matrisi ve her Cayley matrisine, bir antisimetrik matris karşılık geldiği gösterilmiştir.

Diğer taraftan ilk olarak Euler, bir dönme formülü ortaya koymuş, sonrasında Rodrigues, bu formülü geliştirmiş yorumlamış ve Euler-Rodrigues parametreleri olarak ifade edilmiştir. E^n , n -boyutlu Öklid uzayında, Cayley formülü üzerine bir çok çalışma yapılmıştır.

Öklid uzayında, dönme ve dönme eksenin bulunması, geometrinin önemli kavramlarından biridir. E^3 de, dönme matrisi ve dönme eksenini ile ilgili olarak, Chong, Kantor, Room ve Taber tarafından çeşitli makaleler yayınlanmıştır. Fakat bunların atıfta bulunduğu makaleler oldukça eski tarihlidir. Sonuç olarak bu tezde, E^3 deki ifadelerin bulunmasında bu çalışmalardan yararlanıldı fakat farklı bir teknik ve üslup içerisinde tekrar ifade edildi. Bu sayede yapılan çalışmaların bir genellemesi ortaya konuldu.

Bu çalışmada E^3 de bir α birim hızlı eğrisinden elde edilen $x = Ax_0 + c$, $A \in SO(3)$ ve $c = \alpha$, H/H' özel hareketinin sabit ve hareketli uzaylarda, sabit kalan vektörler çalıştık, fakat kompleks ve dual matrisleri göz önüne almadık. Bu tez vektörler konusunda çalışma yapmak isteyen araştırmacılar, 3×3 kompleks ve 3×3 Dual matrisleri alarak, bu tezin hangi şartlar altında tekrarlanabilir sorusuna cevap arayabilirler.

KAYNAKLAR

- Başdaş, H. E., 1997. Minkowsky uzayında hareketler. Ph. D. Thesis, Ankara Üniversitesi, Ankara.
- Bottema, O. ve Roth, B., 1990. Theoretical Kinematics, pp. 9-11, 17-26, 153-156, 300-310. Dover Publications, New York.
- Bükcü, B., 2003. Lorentz uzayında Cayley formülü ve uygulamaları. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Bükcü, B., 2006a. General Cayley mapping at Euclidean space and rotation matrices. Erciyes Univ. Grad. Sch. Nat. Sci. Press, **22** 194–202.
- Bükcü, B., 2006b. General On the rotation matrices in the semi-Euclidean space. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, **55(1)** 7–13.
- Büke, M., 1972. Analitik Geometri. İstanbul Üniversitesi Yayınları, İstanbul.
- Chong, F. ve Andrews, R. J., 2000. Rotation matrices. Australian Mathematical Society Gazette, **26(3)** 108–119.
- Esin, E. ve Hacısalihoğlu, H. H., 1986. Curvature matrices and Darboux matrices of motions along a curve. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, **35**, 35–44.
- Gantmacher, F. R., 1959. Theory of Matrices, vol. 1. Chelsea Publishing Comp., New York.
- Hacısalihoğlu, H. H., 1974. On the geometry of motion in the Euclidean n-space. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, **23**, 95–108.
- Hacısalihoğlu, H. H., 1998. Lineer Cebir, Cilt 1. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Beşevler, Ankara.
- Hiller, M. ve Woernle, C., 1984. A unified representation of spatial displacements. Mechanism and Machine Theory, **19**, 477–486.
- Horn, R. A. ve Johnson, C. R., 2012. Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge.
- Kula, L., 1998. Semi öklidiyen uzayda hareketlerin geometrisi. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Müller, H. R., 1966. Zur bewegungsgeometrie in Räumen höherer dimension. Monatshefte für Mathematik, **70(1)**, 47–57.
- O'Neill, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity, Pure and Applied Mathematics. Academic Press, San Diego; London.
- Özkaldı, S. ve Gündoğan, H., 2010. Cayley formula, Euler parameters and rotations in 3-dimensional Lorentzian space. Advances in Applied Clifford Algebras, **20**, 367–377.
- Room, T. G., 1952. The composition of rotations in Euclidean three-space. The American Mathematical Monthly, **59(10)**, 688–692.
- Taber, H., 1952. Note on the representation of orthogonal matrices. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, **27**, 163–164.
- Tsiotras, P., Junkins, J. L. ve Schaub, H., 1997. Higher-order Cayley transforms with applications to attitude representations. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, **20(3)**, 528–536.

- Ünal, D., Güngör, M. A. ve Tosun, M., 2016. Homothetic Cayley formula and its applications. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **26**, 809–824.
- Ünal, D., 2016. Homotetik hareketler için Cayley formülü, Euler parametreleri ve uygulamaları. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Yaylı, Y., 1985. Cayley formülü üzerine kinematik uygulama. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı

Kişisel Bilgiler

İletişim Bilgileri

Öğrenim Bilgileri

İş Deneyimi