

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖKLİD UZAYINDA MANNHEİM EĞRİLERİ
VE SPİNORLAR

Zeynep İSABEYOĞLU

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2021
Her Hakkı Saklıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖKLİD UZAYINDA MANNHEİM EĞRİLERİ VE SPİNORLAR

Zeynep İSABEYOĞLU

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı için ayrılmıştır. Bu bölümde literatür bilgisine yer verilmiştir. İkinci bölümde bu tezin temelini oluşturan Öklid uzayında bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise öncelikle üç boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğri çifti tanıtılmıştır. Ayrıca, bu eğri çiftinin bazı karakterizasyonları verilmiştir. Daha sonra, spinorlar cebiri kısaca tanıtılıp üç boyutlu Öklid uzayındaki eğrilerin spinor formülasyonu verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, üç boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğri çiftinin Frenet vektörlerinin spinorlar cinsinden ifadesi araştırılmıştır. Ayrıca, Mannheim eğrisi ve Mannheim partner eğrisine karşılık gelen spinorlar arasındaki ilişkiler teoremlerle verilmiştir. Ek olarak, Mannheim eğri çiftine karşılık gelen spinorların geometrik yorumları verilmiştir. Daha sonra, Mannheim eğrisi helis olarak göz önüne alınmıştır ve bu durumdaki spinor formülasyonu araştırılmıştır. Son olarak, bir örnek verilmiştir. Beşinci bölüm ise sonuç ve öneriler kısmından oluşmaktadır.

2021, 62 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Mannheim Eğri Çifti, Öklid Uzayı, Spinorlar

ABSTRACT

Master Thesis

MANNHEIM CURVES IN EUCLIDEAN SPACE AND SPINORS

Zeynep İSABEYOĞLU

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Math

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Tülay ERİŞİR

This thesis consists of five chapters. The first chapter consist of the introduction. In this section, literature information has been given. In the second chapter, some basic definitions and theorems in Euclidean space that form the basis of this thesis has been given. In the third chapter, firstly, Mannheim curve pair in three-dimensional Euclidean space has been introduced. In addition, some characterizations of this curve pair have been given. Then, the spinor algebra has been briefly introduced and the spinor formulation of curves in three-dimensional Euclidean space has been given.

The fourth chapter is the original part of this thesis. In this chapter, the expression of Frenet vectors of Mannheim curve pair in three-dimensional Euclidean space in terms of spinors has been investigated. In addition, the relations between spinors corresponding to Mannheim curve and Mannheim partner curve have been given by theorems. Moreover, geometric interpretations of spinors corresponding to Mannheim curve pair have been given. Then, the Mannheim curve has been considered as a helix and the spinor formulation in this case has been investigated. Finally, one example has been given. The fifth chapter consists of results and recommendations.

2021, 62 Pages

Keywords: Euclidean Space, Mannheim Curve Pair, Spinors.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince deneyimleriyle bana sürekli yol göstererek desteğini esirgemeyen kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR'e, manevi desteklerinden dolayı değerli ailem; annem, babam, ağabeylerime ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez çalışmam süresince beni sabırla bekleyen kızım Nas'a da çok teşekkür ederim.

Zeynep İSABEYOĞLU

Mart, 2021

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
SİMGELER ve KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Öklid Uzayı	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	14
3.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Mannheim Eğri Çifti	14
3.2. Spinorlar	25
3.3. Eğrilerin Spinor Gösterimi	31
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	33
4.1. Mannheim Eğri Çiftinin Spinor Gösterimi.....	33
4.2. Mannheim Eğrisinin Helis Olma Durumunda Spinor Gösterimi	49
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	58
KAYNAKLAR	59
EKLER.....	62
Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar	62

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Parametre değişimi	8
Şekil 3.1. Mannheim eğrileri	14
Şekil 3.2. Mannheim eğri çiftinin Frenet vektör alanları arasındaki açı	16



SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

α, β	$\mathbb{E}^3$ de Herhangi İki Eğri
I	$\mathbb{E}^n$ de Açık Aralık
P, Q, R	$\mathbb{R}^n$ de Herhangi Üç Nokta
$\mathbb{R}^n$	n – Boyutlu Reel İç Çarpım Uzayı
V	Vektör Uzayı
$\vec{x}, \vec{y}$	$\mathbb{E}^n$ de Herhangi İki Vektör
κ, τ	Üç Boyutlu Vektör Uzayında Frenet Eğrilikleri
$\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$	Üç Boyutlu Vektör Uzayında Frenet Vektörleri
$\langle, \rangle$	İç Çarpım
$\ \ $	Norm
$\wedge$	Vektörel Çarpım
ζ, ϕ	Spinorlar
$\bar{\zeta}$	ζ Spinorunun Eşleniği
ζ^t	ζ Spinorunun Transpozu
$\hat{\zeta}$	ζ Spinorunun Eşi
P_1, P_2, P_3	Pauli matrisleri
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	2×2 Kompleks simetrik matrisler
$SU(2)$	2×2 Kompleks üniter matrisler
$SO(3)$	Orjin etrafında dönmeler grubu

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri, geometri bilim dalının önemli çalışma alanlarından biri olup geometride problemleri çözebilmek için diferensiyel ve integral hesaplamaların yanısıra lineer cebir bilgisi kullanan matematiğin bir alt dalıdır. Diferensiyel topoloji ve diferensiyel denklemler ile yakından ilişkili olan diferensiyel geometri, matematiğin diğer alanlarında olduğu gibi bilimin birçok farklı alanında kullanılmaktadır. Örneğin; fizikte, Einstein'nın genel görelilik teorisi ve sicim teorisi gibi teorilerde diferensiyel geometri kullanılmaktadır. Buna ek olarak kara deliklerin çalışmalarında, Lagrange ve Hamilton mekaniği uygulamalarında yine diferensiyel geometrinin bazı temel teoremleri yer almaktadır. Ekonometri alanında ise, örneğin Philips eğrisi iktisadın temel ilkelerini açıklamada yardımcı olmuştur. Mühendislik alanında, dijital sinyal işleme sisteminde oluşan sorunları çözmek için yine diferensiyel geometrinin katkısı bulunmaktadır.

Eğri teorisi, diferensiyel geometrinin en önemli çalışma alanlarından biridir. Farklı boyutlarda ve uzaylarda çalışma imkanıyla bilim insanları tarafından çok fazla dikkat çekmektedir. Newton ve Leibniz tarafından 18. ve 19. yüzyıllarda sunulan eğri ve eğriliklerle ilgili çalışmalar eğri teorisinin temelini oluşturmuştur. Eğrilik tanımı, 18. yüzyılda Euler tarafından verildikten sonra uzay eğrileri Monge tarafından tanıtılmıştır. Ayrıca, Serret-Frenet formülleri olarak bilinen formüller elde edilmiştir. Üç boyutlu Öklid uzayında eğri teorisi üzerine çok fazla çalışma yapılmıştır. Özellikle herhangi iki eğrinin karşılıklı noktalarında alınan Frenet vektörleri arasında bazı özel bağlantılar kurularak birçok teori geliştirilmiştir. Bunlardan en iyi bilinenleri, Bertrand eğrileri, involüt-evolüt eğrileri ve Mannheim eğrileridir. Mannheim eğrisi ilk olarak A. Mannheim tarafından 1878 yılında ortaya atılmıştır. Üç boyutlu Öklid uzayında alınan herhangi bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şartın

$$\kappa = \lambda(\kappa^2 + \tau^2)$$

olduğu ispatlanmıştır. Burada κ ve τ ; eğrinin eğrilikleri olup $\lambda = sbt \neq 0$ dır. Son zamanlarda ise Mannheim eğrisi Wang ve Liu tarafından yeniden tanımlanmıştır (Wang ve Liu, 2007). Wang ve Liu tarafından verilen bu tanıma göre (α) ve (β) , $\mathbb{E}^3$, Öklid

uzayında herhangi iki eğri olmak üzere (α) eğrisinin asli normal vektörü ile (β) eğrisinin binormal vektörü lineer bağımlı ise (α) eğrisine Mannheim eğrisi (β) eğrisine ise Mannheim partner eğrisi denir. (α, β) ikilisine ise Mannheim eğri çifti denir (Wang ve Liu, 2007; Liu ve Wang, 2008). Ayrıca, (β) eğrisinin (α) eğrisinin Mannheim partner eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\tau_1' = \frac{\kappa_1}{\lambda} (1 + \lambda^2 \tau_1^2)$$

olmasıdır. Burada $\kappa_1, \tau_1; (\beta)$ eğrisinin eğriliği ve burulmasıdır (Wang ve Liu, 2007; Liu ve Wang, 2008). Bu çalışmanın ardından Mannheim eğrileri üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Orbay ve Kasap, 2009; Azak, 2009; Matsuda ve Yoruzu, 2009; Güngör ve Tosun, 2010; Akyiğit vd., 2011; Ersoy vd., 2012; Şenyurt ve Bektaş, 2012).

Spinorlar, şu ana kadar çoğunlukla fizikte kullanılmış vektörel yapılardır. Pauli 1927'de spin matrislerini tanıttığında spinorları matematiksel fiziğe uyarlamıştır (Pauli, 1927). Daha sonra, spinorlarla Lorentz grubu arasındaki ilişki Dirac tarafından gösterilmiştir ve spinorlar elektron spini ile görelilik teorisi uygulamalarında kullanılmıştır (Dirac, 1928). Fizikte spini $\frac{1}{2}$ olan bir parçacığın dalga fonksiyonuna spinor denir. Dört boyutlu uzayda ise spinlerin yapısı, Dirac spinorlarını elde etmek amacıyla spinorların genişletilmiş şeklidir (Delanghe vd., 1966; Landau ve Lifshitz, 1977; Wachter, 2011;). Spinorlar kompleks sütun vektörler olup Pauli spin matrisleri üzerinde hareket ederler. Lie grupları üzerine ilk çalışanlardan biri olan Fransız matematikçi Cartan, spinorları geometrik açıdan inceleyen ilk kişidir (1966). Cartan bir çalışmasında geometrideki temel tanımların spinor formüllerini elde etmiş olup $\mathbb{C}^3$ kompleks vektör uzayındaki izotropik vektörlerin $\mathbb{C}^2$ kompleks uzayında iki boyutlu bir yüzey oluşturduğunu vurgulamıştır. Ayrıca, $\mathbb{C}^3$ uzayında her izotropik vektörün $\mathbb{C}^2$ uzayında iki vektöre karşılık geldiğini göstermiştir. Daha sonra da $\mathbb{C}^2$ uzayında bu kompleks vektörleri spinor olarak adlandırmıştır (Cartan, 1966). İki kompleks bileşenli spinorlar cebiri, üç boyutlu reel vektör uzayında dönmelerin farklı ve hoş bir gösterimini verir. Vivarelli bir çalışmasında kuaterniyonlar ile spinorlar arasında lineer bir ilişki kurarak ve üç boyutlu

Öklid uzayında dönme hareketlerinin kuaterniyonlar ile gösterimini göz önüne alarak dönmelerin spinor formülasyonu elde etmiştir (1984). Başka bir çalışmada Torres del Castillo ve Barrales üç boyutlu Öklid uzayındaki eğri teorisini spinorlar ile göstermiştir (2004). Daha sonra yapılan çalışmalardan yola çıkılarak, Ünal vd. tarafından Bishop çatısının spinor formülasyonu verilmiştir. Ayrıca, Bishop çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkisinin spinor denklemleri elde edilmiştir (2013). Ek olarak, Kişi ve Tosun tarafından üç boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş bir yüzeyin Darboux çatısının spinor gösterimi elde edilmiştir (2015). Ayrıca, üç boyutlu Minkowski uzayında seçilen bazı özel eğrilerin spinor formülasyonlarına verilmiştir (Erişir vd., 2015; Ketenci vd., 2015; Balcı vd., 2015). Bu çalışmalara ek olarak Erişir ve Kardağ, üç boyutlu Öklid uzayında özel bir eğri çifti olan involüt-evolüt eğrilerinin spinor denklemlerini bulmuştur (2019). Yapılan farklı bir çalışmada ise Bertrand eğrilerinin spinor formülasyonu elde edilmiştir (Erişir, 2021).

Bu tezin amacı ise üç boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğri çiftinin spinor gösterimini vermektir. Bunun için ilk olarak Cartan (1966) tarafından verilen spinorlar tanıtılmıştır. Daha sonra Torres Del Castillo ve Barrales (2004) tarafından ifade edilen üç boyutlu Öklid uzayındaki seçilen eğrinin Frenet vektörleri ve eğriliklerinin spinor formülasyonu verilmiştir. Bu temel bilgilerden yola çıkılarak üç boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğri çifti göz önüne alınmıştır. Bu eğrilerin her birine $\mathbb{C}^2$ uzayında bir vektör olan spinorlar karşılık getirilmiştir. Bu eşleştirme sayesinde Mannheim eğri çifti arasındaki ilişki göz önüne alınarak bu eğrilere karşılık gelen spinorlar arasındaki ilişkiler teoremlerle verilmiştir. Ayrıca, geometrik yorumlar sonuçlar ile birlikte elde edilmiştir. Ek olarak, Mannheim eğrisi bir helis eğrisi olarak göz önüne alındıktan sonra Mannheim helis eğrisinin spinor formülasyonu teorem ve sonuçlarla ifade edilmiştir. Son olarak bir örnek verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, Öklid uzayında temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1. A boş olmayan bir cümle ve K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. O halde

$$\begin{aligned} f : A \times A &\rightarrow V \\ (P, Q) &\rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

olacak şekilde verilen bir f fonksiyonu

- i. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$,
- ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $f(P, Q) = \vec{\alpha}$ olacak şekilde tek bir $Q \in A$ noktası vardır, şartlarını sağlıyorsa A cümlesine V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleştirilen n -boyutlu vektör uzayı V olsun. O halde V vektör uzayında $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ herhangi iki vektör olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan iç çarpım Öklid iç çarpım ise A afin uzayına Öklid uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \vec{x} &\rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \end{aligned}$$

şeklindeki fonksiyon tanımlansın. Bu fonksiyona norm fonksiyonu ve $\|\vec{x}\|$ pozitif reel sayısına da $\vec{x}$ vektörünün normu denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.4.

$$d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|\overline{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna, $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(X, Y)$ reel sayısına $X, Y \in \mathbb{E}^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.1. $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.5. $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayı olmak üzere

$$d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|\overline{XY}\|$$

şeklinde d fonksiyonu tanımlansın. Bu d fonksiyonuna Öklid metriği denir.

Tanım 2.6. $\forall X, Y, Z \in \mathbb{E}^n$ noktalarından elde edilen $\overline{XY}$ ile $\overline{XZ}$ vektörleri arasındaki açı $\theta \in \mathbb{R}$ olsun. O halde $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere bu vektörler arasındaki açı

$$\cos \theta = \frac{\langle \overline{XY}, \overline{XZ} \rangle}{\|\overline{XY}\| \|\overline{XZ}\|}$$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.7. $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta $n+1$ lisi göz önüne alınsın. $\mathbb{R}^n$, n -boyutlu reel vektör uzayında bu noktalara karşılık gelen

$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ n -tane vektör, $\mathbb{R}^n$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta sistemine Öklid çatısı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.8. $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında $\{E_0, E_1, E_2, \dots, E_n\}$ nokta $n+1$ lisi

$$E_0 = (0, 0, \dots, 0), E_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \dots, E_n = (0, 0, \dots, 1)$$

şeklinde alınsın. Bu noktalar bir Öklid çatı oluştururlar ve böylece $\langle \overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j} \rangle = \delta_{ij}$ eşitliği vardır. O halde $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında $\{E_0, E_1, E_2, \dots, E_n\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.9. $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında bir X noktası göz önüne alınsın. Bu noktanın standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

şeklinde verilsin. O halde

$$x_i : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

biçiminde ifade edilen x_i fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları denir. Burada $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $1 \leq i \leq n$ olmak üzere n -li fonksiyon cümlesine ise Öklid koordinat sistemi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.10. e^θ fonksiyonun seri açılımı

$$e^\theta = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!}$$

kullanılırsa

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right)$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}\cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots \\ \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\end{aligned}$$

seri açılımından faydalanırsa

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

elde edilir. Bu eşitliğe Euler formülü denir (Yüce, 2017). Euler formülü 1714 yılında Roger Cotes tarafından ilk olarak verilmiştir. Daha sonra iki tarafın sonsuz serilerin eşitliği yardımıyla da Leonhard Euler tarafından 1774 yılında ispatlanmıştır.

Tanım 2.11. $\mathbb{R}$ 'de I bir açık aralık olmak üzere

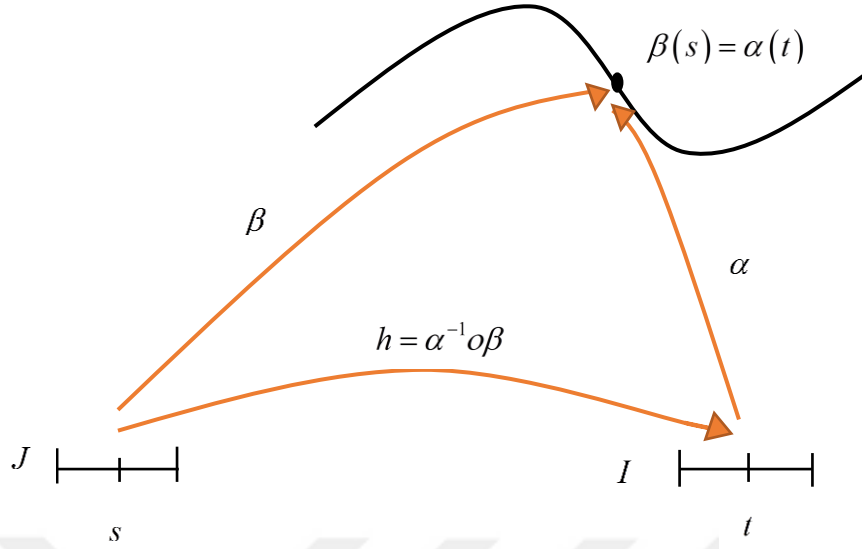
$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow \mathbb{E}^n \\ t &\rightarrow \alpha(t)\end{aligned}$$

şeklinde verilen α diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyona $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında bir eğri denir. Ayrıca I aralığına (α) eğrisinin parametre aralığı, $t \in I$ 'ya (α) eğrisinin parametresi ve (I, α) ikilisine ise (α) eğrisinin koordinat komşuluğu denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.12. $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu bir eğri (I, α) ve (J, β) şeklinde iki koordinat komşuluğu ile verilsin. O halde $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ ve $\beta : J \rightarrow \mathbb{E}^n$ olmak üzere

$$h : \alpha^{-1} \circ \beta : J \rightarrow I$$

şeklinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon tanımlanırsa (β) eğrisine (α) eğrisinin yeniden parametrizasyonu ya da eğrinin I 'daki parametresinin J 'deki parametre ile değişimi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).



Şekil 2.1. Parametre değişimi (Hacısalıhoğlu, 1983)

Tanım 2.13. $\mathbb{E}^n$, n – boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir (α) eğrisi için

$$\begin{aligned} \|\alpha'\|: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna (α) eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına ise (α) eğrisinin skaler hızı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.14. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. O halde $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise (α) eğrisine birim hızlı eğri denir. $s \in I$ parametresine ise (α) eğrisinin yay parametresi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.15. Her noktasındaki hızı sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.16. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğunda verilsin. O halde $a, b \in I$ için a dan b ye (α) eğrisinin yay uzunluğu, $t \in I$ olmak üzere $\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$ şeklinde bulunur. Bu şekilde verilen $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğa yay uzunluğu denir. Yay uzunluğu koordinat komşuluğundan bağımsızdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.17. $\mathbb{E}^n$ 'de bir (α) eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuyla verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ cümlesi lineer bağımsız olmak üzere $k > r$ ve $\forall \alpha^k \in S_p \{\psi\}$ olacak şekilde ψ cümlesinden elde edilen $\{\vec{V}_1(t), \vec{V}_2(t), \dots, \vec{V}_r(t)\}$ ortonormal sistemine (α) eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Serret-Frenet r - ayaklısı, her bir $\vec{V}_i$, $1 \leq i \leq r$ vektörüne de Serret-Frenet vektörü denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.18. $\mathbb{E}^n$ 'de bir (α) eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuyla verilsin. O halde (α) eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Serret-Frenet r - ayaklısı $\{\vec{V}_1(t), \vec{V}_2(t), \dots, \vec{V}_r(t)\}$ olmak üzere

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i < r$$

$$s \rightarrow k_i(t) = \langle \vec{V}'_i(t), \vec{V}_{i+1}(t) \rangle$$

şeklinde tanımlanan k_i fonksiyonuna (α) eğrisinin i . eğrilik fonksiyonu denir. Burada $t \in I$ için $k_i(t)$ reel sayısına ise (α) eğrisinin $\alpha(t)$ noktasında i . eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.2. $\mathbb{E}^3$ 'de bir (α) eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall t \in I$ için (α) eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Serret-Frenet vektörleri $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ olmak üzere bu vektörler

$$\begin{aligned}
\vec{T}(t) &= \frac{1}{\|\vec{\alpha}'(t)\|} \vec{\alpha}'(t) \\
\vec{N}(t) &= \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t) \\
\vec{B}(t) &= \frac{1}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|} (\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t))
\end{aligned} \tag{2.1}$$

biçimde bulunur (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $t \in I$ keyfi bir parametre olmak üzere (α) eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki $\kappa(t)$ eğriliği ve $\tau(t)$ burulması sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\|\vec{\alpha}''(t) \wedge \vec{\alpha}'''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3} \\
\tau(t) &= \frac{\langle \vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t), \vec{\alpha}'''(t) \rangle}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|^2}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

olarak bulunur (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.4. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi keyfi bir $t \in I$ parametresi ile verilen herhangi bir eğri olmak üzere (α) eğrisinin Frenet 3-ayaklısı $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ olsun. Bu eğrinin, eğriliği $\kappa(t)$ ve burulması $\tau(t)$ olmak üzere, $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet formülleri

$$\begin{aligned}
\vec{T}'(t) &= \|\vec{\alpha}'(t)\| \kappa(t) \vec{N}(t) \\
\vec{N}'(t) &= \|\vec{\alpha}'(t)\| (-\kappa(t) \vec{T}(t) + \tau(t) \vec{B}(t)) \\
\vec{B}'(t) &= -\|\vec{\alpha}'(t)\| \tau(t) \vec{N}(t)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.5. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile göz önüne alınsın. (α) eğrisinin yay parametresi $s \in I$ ve $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet vektörleri $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ olmak üzere bu vektörler

$$\begin{aligned}\vec{T}(s) &= \vec{\alpha}'(s) \\ \vec{N}(s) &= \frac{1}{\|\vec{\alpha}''(s)\|} \vec{\alpha}''(s) \\ \vec{B}(s) &= \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s)\end{aligned}\tag{2.4}$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.6. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilen birim hızlı eğri olmak üzere bu eğrinin Frenet 3-ayaklısı $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ olarak verilsin. O halde (α) eğrisinin eğriliği $\kappa(s)$ ve burulması $\tau(s)$ olmak üzere (α) eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet formülleri

$$\begin{aligned}\vec{T}'(s) &= \kappa(s) \vec{N}(s) \\ \vec{N}'(s) &= -\kappa(s) \vec{T}(s) + \tau(s) \vec{B}(s) \\ \vec{B}'(s) &= -\tau(s) \vec{N}(s)\end{aligned}\tag{2.5}$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.7. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin yay parametresi $s \in I$ olsun. O halde (α) eğrisinin bir doğru olması için gerek ve yeter şart eğrinin eğriliğinin sıfır olmasıdır (Yüce, 2017).

Teorem 2.8. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin yay parametresi $s \in I$ olsun. Bu durumda (α) eğrisinin yay parametresi olmak üzere, (α) eğrisinin düzlemsel olması için gerek ve yeter şart eğrinin burulmasının sıfır olmasıdır (Yüce, 2017).

Teorem 2.9. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin yay parametresi $s \in I$ olsun. O halde (α) eğrisinin eğriliği sabit, sıfırdan büyük ve eğrinin burulması sıfır olması için gerek ve yeter şart (α) eğrisinin çember olmasıdır (Yüce, 2017).

Tanım 2.19. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuyla verilsin. Yay parametresi $s \in I$ olmak üzere, (α) eğrisinin teğet vektör alanı $\vec{T}$ ve $\vec{U}$ da herhangi bir birim vektör olsun. Bu vektörlerden $\vec{T}$ teğet vektörü, $\vec{U}$ sabit vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa, (α) eğrisine helis eğrisi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.10. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, (α) eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. (α) eğrisinin eğriliği ve burulması sırasıyla κ, τ olmak üzere, (α) eğrisinin helis olabilmesi için gerek ve yeter şart $\kappa(s) \neq 0$ ve $\frac{\tau}{\kappa} = sbt$ olmasıdır (Yüce, 2017).

İspat: $\Rightarrow: \alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilmiş helis eğrisi olsun. O halde sabit bir $\vec{U}$ birim vektörü için $\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \cos \theta$ dır. Buradan

$$\langle \vec{T}', \vec{U} \rangle = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada Denk. (2.5) den $\vec{T}' = \kappa \vec{N}$ olduğu kullanılırsa $\langle \kappa \vec{N}, \vec{U} \rangle = 0$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere $\langle \vec{N}, \vec{U} \rangle = 0$ olduğu görülür. O halde, $\vec{U}$ vektörü $\{\vec{T}, \vec{B}\}$ düzleminde dir. Dolayısıyla

$$\vec{U} = \cos \theta \vec{T} + \sin \theta \vec{B}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan $\vec{U}$ sabit vektörünün türevi alınır

$$\begin{aligned} \vec{U}' &= 0 = \cos \theta \vec{T}' + \sin \theta \vec{B}' \\ &= \cos \theta (\kappa \vec{N}) + \sin \theta (-\tau \vec{N}) \\ &= (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) \vec{N} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ elde edilir. $\theta = sbt$ olduğundan $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ sabit bulunur.

$\Leftarrow$: $\theta = sbt$ ve $\frac{\tau}{\kappa} = sbt$ olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ olsun. Buradan

$$\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta = 0$$

elde edilir. $\vec{U} = \cos \theta \vec{T} + \sin \theta \vec{B}$ vektörüne türev işlemi uygulandığında $\vec{U}' = (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) \vec{N} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\vec{U}$ vektörü sabit bir vektördür. Buradan $\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \cos \theta = sbt$ elde edilir. Buradan, her noktada (α) eğrisinin teğet vektörü sabit bir $\vec{U}$ vektörü ile sabit açı yapar. O halde, (α) eğrisi helistir ve böylece ispat biter.

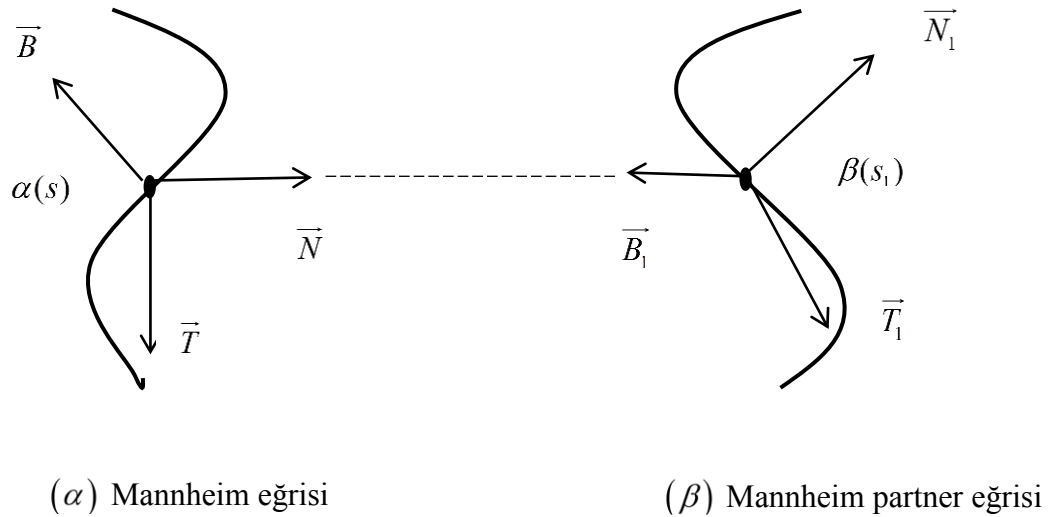
Teorem 2.11. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi yay parametresi $s \in I$ olan birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda (α) eğrisinin eğriliği sabit ve sıfırdan büyük; ayrıca, eğrinin burulması sabit olması için gerek ve yeter şart (α) eğrisinin dairesel helis olmasıdır (Yüce, 2017).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, bu tezin temelini oluşturan konulardan biri olan Mannheim eğri çifti tanıtılmıştır. Ayrıca, Mannheim eğri çiftini karakterize eden temel teoremler verilmiştir. İkinci kısımda, Cartan (1966), Torres del Castillo ve Barrales (2004) tarafından verilen spinorlar temel olarak tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde ise üç boyutlu Öklid uzayındaki eğrilerin spinor denklemleri verilmiştir.

3.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Mannheim Eğri Çifti

Tanım 3.1. $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ ve $\beta: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (J, β) koordinat komşuluklarıyla verilsin. Bu eğrilerin karşılıklı noktalarında (α) eğrisinin asli normal vektör alanı ile (β) eğrisinin binormal vektör alanı lineer bağımlı ise, (α) eğrisine Mannheim eğrisi; (β) eğrisine (α) eğrisinin Mannheim partner eğrisi denir. Ayrıca, $\{\alpha, \beta\}$ eğri çifti de Mannheim eğri çifti olarak adlandırılır (Wang ve Liu, 2007).



Şekil 3.1. Mannheim eğri çifti

Bu durumda (α) Mannheim eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ ve (β) Mannheim partner eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ olmak üzere (α, β) Mannheim eğri çifti için Şekil 3.1 çizilebilir.

Teorem 3.1. $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında (α, β) eğri çifti Mannheim eğri çifti olsun. Bu durumda, $s \in I$ ve $s_1 \in J$ parametreleri sırasıyla (α) ve (β) eğrilerinin yay parametreleri olmak üzere bu eğrilerin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Liu, Wang, 2008).

İspat: $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında (α, β) eğri çifti Mannheim eğri çifti olsun. Bu durumda Şekil 3.1'den bu eğri çifti için

$$\vec{\alpha}(s_1) = \vec{\beta}(s_1) + \lambda(s_1) \vec{B}_1(s_1) \quad (3.1)$$

eşitliği yazılabilir. O halde Denk. 3.1'in $s_1 \in J$ parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\alpha}}{ds_1} &= \frac{d\vec{\beta}}{ds_1} + \frac{d\lambda}{ds_1} \vec{B}_1 + \lambda \frac{d\vec{B}_1}{ds_1} \\ \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{ds_1} &= \vec{T}_1 + \frac{d\lambda}{ds_1} \vec{B}_1 + \lambda(-\tau_1 \vec{N}_1) \\ \vec{T} \frac{ds}{ds_1} &= \vec{T}_1 - \lambda \tau_1 \vec{N}_1 + \frac{d\lambda}{ds_1} \vec{B}_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\vec{N}$ ile $\vec{B}_1$ vektör alanları lineer bağımlı olduğundan son denklemin her iki tarafı $\vec{N}$ ile iç çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \vec{T}, \vec{N} \rangle \frac{ds}{ds_1} &= \langle \vec{T}_1, \vec{N} \rangle - \lambda \tau_1 \langle \vec{N}_1, \vec{N} \rangle + \frac{d\lambda}{ds_1} \langle \vec{B}_1, \vec{N} \rangle \\ \frac{d\lambda}{ds_1} &= 0 \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Böylece $\lambda = \text{sabit}$ elde edilir. Dolayısıyla (3.1) denkleminde

$$\|\beta(s_1) - \alpha(s_1)\| = |\lambda| = \text{sabit}$$

olduğu görülür. O halde, (α, β) Mannheim eğri çiftinin karşılıklı noktalarındaki uzaklık sabittir. Böylece ispat biter.

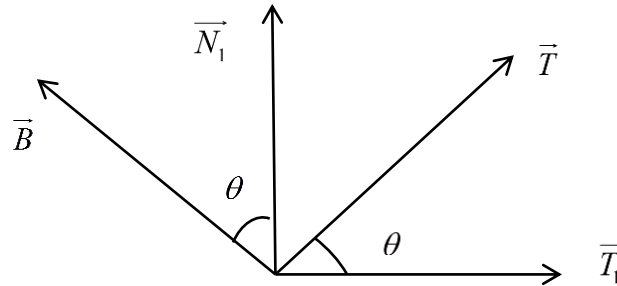
Şimdi Orbay ve Kasap (2009) tarafından verilen çalışmadan yola çıkılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında (α, β) Mannheim eğri çifti verilsin. Bu durumda bu eğrilerin $\vec{T}$ ve $\vec{T}_1$ teğet vektör alanları arasındaki açı θ olmak üzere bu Mannheim eğri çiftinin Frenet vektör alanları arasında

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \cos \theta \vec{T}_1 + \sin \theta \vec{N}_1 \\ \vec{N} &= -\vec{B}_1 \\ \vec{B} &= -\sin \theta \vec{T}_1 + \cos \theta \vec{N}_1\end{aligned}\tag{3.2}$$

ilişkisi mevcuttur (Orbay ve Kasap, 2009).

İspat: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim eğrisi olmak üzere $\beta: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi Mannheim partner eğrisi olsun. Bu durumda $\vec{N}$ normal vektör alanı ile $\vec{B}_1$ binormal vektör alanı lineer bağımlıdır. O halde, $\vec{T}$ ile $\vec{T}_1$ teğet vektör alanları arasındaki açı θ olmak üzere aşağıdaki şekil çizilebilir.



Şekil 3.2. Mannheim eğri çiftinin Frenet vektör alanları arasındaki açı

Bu durumda Şekil 3.2'den $\vec{T}$ vektör alanı için

$$\vec{T} = \cos \theta \vec{T}_1 + \sin \theta \vec{N}_1$$

eşitliği yazılabilir. Benzer şekilde $\vec{B}$ vektör alanı için Şekil 3.2 den

$$\vec{B} = -\sin \theta \vec{T}_1 + \cos \theta \vec{N}_1$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{B} \wedge \vec{T} = (-\sin \theta \vec{T}_1 + \cos \theta \vec{N}_1) \wedge (\cos \theta \vec{T}_1 + \sin \theta \vec{N}_1) \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) (\vec{N}_1 \wedge \vec{T}_1) \\ &= \vec{N}_1 \wedge \vec{T}_1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\vec{N} = -\vec{B}_1$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

Teorem 3.3. $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında (α) ve (β) eğrileri göz önüne alınsın. (β) eğrisinin eğrilik ve burulması, sırasıyla, κ_1 ve τ_1 olmak üzere (β) eğrisinin, (α) eğrisinin bir Mannheim partner eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\tau_1' = \frac{d\tau_1}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{\lambda} (1 + \lambda^2 \tau_1^2) \quad (3.3)$$

denklemin sağlanmasıdır. Burada $\lambda = sbt \neq 0$ dır (Liu ve Wang, 2008).

İspat: $(\Rightarrow)$: $\mathbb{E}^3$, üç boyutlu Öklid uzayında verilen (α, β) eğri çifti Mannheim eğri çifti olsun. Bu durumda (β) eğrisi (α) eğrisinin Mannheim partner eğrisi olmak üzere Denk. 3.1'den

$$\vec{\alpha}(s_1) = \vec{\beta}(s_1) + \lambda \vec{B}_1(s_1) \quad (3.4)$$

yazılabilir. Burada $\lambda = sbt \neq 0$ olmak üzere $\vec{B}_1$, (β) eğrisinin binormal vektörü olup $s_1 \in J$, (β) eğrisinin yay parametresidir. O halde Denk. 3.4'ün s_1 parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{\alpha}}{ds_1} = \frac{d\vec{\beta}}{ds_1} + \lambda \frac{d\vec{B}_1}{ds_1}$$

elde edilir. Burada Denk. 2.5'de verilen Frenet formülleri kullanılırsa

$$\vec{T} \frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 - \lambda \tau_1 \vec{N}_1 \quad (3.5)$$

eşitliği bulunur.

Diğer taraftan Denk. 3.2'den $\vec{T} = \cos \theta \vec{T}_1 + \sin \theta \vec{N}_1$ olduğu biliniyor. Bu denklemin s_1 parametresine göre türevi alınırsa

$$\kappa \vec{N} \frac{ds}{ds_1} = -\sin \theta \left(\frac{d\theta}{ds_1} + \kappa_1 \right) \vec{T}_1 + \cos \theta \left(\frac{d\theta}{ds_1} + \kappa_1 \right) \vec{N}_1 + \sin \theta \tau_1 \vec{B}_1$$

eşitliği elde edilir. Burada (α, β) eğri çifti Mannheim eğri çifti olduğundan $\vec{N}$ ile $\vec{B}_1$ vektör alanları lineer bağımlıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \left(\kappa_1 + \frac{d\theta}{ds_1} \right) \sin \theta &= 0 \\ \left(\kappa_1 + \frac{d\theta}{ds_1} \right) \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde

$$\kappa_1 = -\frac{d\theta}{ds_1} \quad (3.6)$$

bulunur. Ayrıca, Denk. 3.5 ve $\vec{T} = \cos \theta \vec{T}_1 + \sin \theta \vec{N}_1$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{\lambda \tau_1}{\sin \theta} \quad (3.7)$$

ve

$$\lambda \tau_1 = -\tan \theta \quad (3.8)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada Denk. 3.8'in s_1 parametresine göre türevi alınır ve Denk. 3.6 kullanılırsa

$$\lambda \frac{d\tau_1}{ds_1} = \kappa_1 (1 + \lambda^2 \tau_1^2)$$

ve son olarak

$$\tau_1' = \frac{d\tau_1}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{\lambda} (1 + \lambda^2 \tau_1^2)$$

elde edilir.

($\Leftarrow$): Tersine κ_1 ve τ_1 , sırasıyla (β) eğrisinin eğrilik ve burulması olmak üzere

$$\tau_1' = \frac{d\tau_1}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{\lambda} (1 + \lambda^2 \tau_1^2)$$

eşitliği göz önüne alınsın. Ayrıca (α, β) eğrilerinin arasındaki ilişkinin

$$\vec{\alpha}(s_1) = \vec{\beta}(s_1) + \lambda \vec{B}_1(s_1)$$

olduğu kabul edilsin. O halde $\lambda = s b t \neq 0$ olmak üzere bu denklemin s_1 'e göre türevi alınır

$$\vec{T} \frac{ds}{ds_1} = \vec{T}_1 - \lambda \tau_1 \vec{N}_1 \quad (3.9)$$

eşitliği elde edilir. Denk. 3.9'un tekrar s_1 'e göre türevi alınır

$$\kappa \vec{N} \left(\frac{ds}{ds_1} \right)^2 + \vec{T} \frac{d^2s}{ds_1^2} = \lambda \kappa_1 \tau_1 \vec{T}_1 + \left(\kappa_1 - \lambda \frac{d\tau_1}{ds_1} \right) \vec{N}_1 - \lambda \tau_1^3 \vec{B}_1 \quad (3.10)$$

eşitliği bulunur. Burada Denk. 3.9 ve Denk. 3.10'a vektörel çarpım uygulanırsa

$$\kappa \left(\frac{ds}{ds_1} \right)^3 \vec{B} = \lambda^2 \tau_1^3 \vec{T}_1 + \lambda \tau_1^2 \vec{N}_1 + \left(\kappa_1 - \lambda \frac{d\tau_1}{ds_1} + \lambda^2 \tau_1^2 \kappa_1 \right) \vec{B}_1 \quad (3.11)$$

bulunur. Denk. 3.11'de teoremin kabulü gereği

$$\frac{d\tau_1}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{\lambda} (1 + \lambda^2 \tau_1^2)$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$\kappa \left(\frac{ds}{ds_1} \right)^3 \vec{B} = \lambda^2 \tau_1^3 \vec{T}_1 + \lambda \tau_1^2 \vec{N}_1 \quad (3.12)$$

denklemini bulunur. Denk. 3.9 ve Denk. 3.12'ye vektörel çarpım uygulanırsa

$$\kappa \left(\frac{ds}{ds_1} \right)^4 \vec{N} = -\lambda \tau_1^2 (1 + \lambda^2 \tau_1^2) \vec{B}_1$$

olduğu görülür. Buradan $\vec{N}$ ile $\vec{B}_1$ vektör alanlarının lineer bağımlı olduğu görülür.

Dolayısıyla (α, β) Mannheim eğri çiftidir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile birim hızlı Mannheim eğrisi olmak üzere $\beta: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $s_1 \in J$ yay parametresi ile Mannheim partner eğrisi olsun. Bu durumda (α) eğrisinin Frenet eğrilikleri $\{\kappa, \tau\}$ ve (β) eğrisinin Frenet eğrilikleri $\{\kappa_1, \tau_1\}$ olmak üzere

$$\tau_1 = \frac{\kappa}{\lambda \tau}$$

eşitliği vardır. Burada $\lambda = sbt \neq 0$ dır (Orbay ve Kasap, 2009).

İspat: (α, β) Mannheim eğri çifti için $s \in I$ ve $s_1 \in J$, sırasıyla (α) ve (β) nın yay parametreleri olmak üzere Denk. 3.1'nin $s \in I$ 'ya göre türevi alınırsa

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + \lambda(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B})$$

elde edilir. Burada Denk. 2.3 göz önüne alınırsa

$$\vec{T}_1 \frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda\kappa)\vec{T} + \lambda\tau\vec{B} \quad (3.13)$$

eşitliği bulunur. Diğer taraftan Denk. 3.2'den $\vec{T}_1 = \cos\theta\vec{T} - \sin\theta\vec{B}$ Denk. 3.13 ile birlikte kullanılırsa

$$\cos\theta = (1 - \lambda\kappa) \frac{ds}{ds_1} \quad (3.14)$$

ve

$$\sin\theta = -\lambda\tau \frac{ds}{ds_1} \quad (3.15)$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca Denk. 3.7'den $\cos\theta = \frac{ds_1}{ds}$ ve $\sin\theta = -\lambda\tau_1 \frac{ds_1}{ds}$ eşitlikleri kullanılırsa Denk. 3.14 ve Denk. 3.15'den

$$\cos^2\theta = (1 - \lambda\kappa), \quad \sin^2\theta = \lambda^2\tau\tau_1$$

eşitlikleri bulunur. Burada $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ eşitliği kullanılırsa

$$1 - \lambda\kappa + \lambda^2\tau\tau_1 = 1$$

eşitliğinden

$$\tau_1 = \frac{\kappa}{\lambda\tau}$$

denkleminde ulaşılır. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.5. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim eğrisi ile $\beta: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim partner eğrisi verilsin. $\{\kappa, \tau\}$ ve $\{\kappa_1, \tau_1\}$ sırasıyla (α, β) Mannheim eğri çiftinin Frenet eğrilikleri olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

i. $\tau_1 = (-\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta) \frac{ds}{ds_1},$

ii. $\kappa = -\tau_1 \sin \theta \frac{ds_1}{ds},$

iii. $\tau = \tau_1 \cos \theta \frac{ds_1}{ds},$

(Orbay ve Kasap, 2009).

İspat: (α, β) Mannheim eğri çifti göz önüne alınsın. O halde;

i. $\vec{N}$ ile $\vec{B}_1$ vektör alanları lineer bağımlı olduğundan $\langle \vec{N}, \vec{N}_1 \rangle = 0$ elde edilir. O halde bu denklemin $s_1 \in J$ parametresine göre türevi alınır

$$\left\langle \frac{d\vec{N}}{ds_1}, \vec{N}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{N}, \frac{d\vec{N}_1}{ds_1} \right\rangle = 0$$

elde edilir. Buradan Denk. 2.5'deki türev formülleri kullanılırsa

$$\left(-\kappa \langle \vec{T}, \vec{N}_1 \rangle + \tau \langle \vec{B}, \vec{N}_1 \rangle \right) \frac{ds}{ds_1} - \kappa_1 \langle \vec{N}, \vec{T}_1 \rangle + \tau_1 \langle \vec{N}, \vec{B}_1 \rangle = 0$$

bulunur. Diğer taraftan, Denk. 3.2'den $\langle \vec{T}, \vec{N}_1 \rangle = \sin \theta$, $\langle \vec{B}, \vec{N}_1 \rangle = \cos \theta$, $\langle \vec{N}, \vec{B}_1 \rangle = -1$ olduğu ve (α, β) Mannheim eğri çifti olduğundan $\langle \vec{N}, \vec{T}_1 \rangle = 0$ olduğu son denklemde kullanılırsa

$$\tau_1 = (-\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta) \frac{ds}{ds_1}$$

elde edilir.

ii. $\vec{N}$ ile $\vec{B}_1$ vektör alanları lineer bağımlı olduğundan $\langle \vec{T}, \vec{B}_1 \rangle = 0$ eşitliği söz konusudur. Dolayısıyla buradan $s_1 \in J$ parametresine göre türev alınır ve Denk. 2.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\vec{T}}{ds_1}, \vec{B}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{T}, \frac{d\vec{B}_1}{ds_1} \right\rangle &= 0 \\ \kappa \frac{ds}{ds_1} \langle \vec{N}, \vec{B}_1 \rangle - \tau_1 \langle \vec{T}, \vec{N}_1 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

ve $\vec{N} = -\vec{B}_1$ ile $\langle \vec{T}, \vec{N}_1 \rangle = \sin \theta$ olduğundan

$$\kappa = -\tau_1 \sin \theta \frac{ds_1}{ds}$$

elde edilir.

iii. $\vec{N}$ ile $\vec{B}_1$ vektör alanları lineer bağımlı olduğundan $\langle \vec{B}, \vec{B}_1 \rangle = 0$ dır. O halde $s_1 \in J$ 'ye göre türev alınır ve Denk. 2.3 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\vec{B}}{ds_1}, \vec{B}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{B}, \frac{d\vec{B}_1}{ds_1} \right\rangle &= 0 \\ \tau \frac{ds}{ds_1} \langle \vec{N}, \vec{B}_1 \rangle + \tau_1 \langle \vec{B}, \vec{N}_1 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

ve buradan $\vec{N} = -\vec{B}_1$ ve $\langle \vec{B}, \vec{N}_1 \rangle = \cos \theta$ olduğundan

$$\tau = \tau_1 \cos \theta \frac{ds_1}{ds}$$

bulunur ve böylece ispat biter.

Önerme 3.1. (α) eğrisi s yay parametrelili birim hızlı Mannheim eğrisi ve (β) ise Mannheim partner eğrisi olsun. Bu durumda (α) Mannheim eğrisi bir helis eğrisi ise (β) Mannheim partner eğrisi bir doğrudur (Wang ve Liu, 2007).

İspat: (α) , s yay parametrelili Mannheim eğrisi bir helis olsun. O halde, $\vec{T}, (\alpha)$ eğrisinin teğet vektör alanı olmak üzere Tanım 2.19 gereği

$$\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \cos \gamma = sbt \quad (3.16)$$

olacak şekilde sabit $\vec{U}$ vektörü vardır. O halde Denk. 3.16'nın s yay parametresine göre türevi alınırsa $\kappa \neq 0$ olmak üzere

$$\langle \vec{N}, \vec{U} \rangle = 0$$

elde edilir. Burada $\vec{N}$ ile $\vec{B}_1$ lineer bağımlı olduğundan

$$\langle \vec{B}_1, \vec{U} \rangle = 0 \quad (3.17)$$

eşitliği yazılabilir. Denk. 3.17'nin tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \vec{B}_1, \vec{U} \rangle &= 0 \\ -\tau_1 \langle \vec{N}_1, \vec{U} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olur. Son denklemde $\tau_1 = 0$ olamaz. Çünkü $\tau_1 = 0$ olursa Teorem 3.5'den $\kappa = \tau = 0$ olur. Bu ise (α) eğrisinin helis olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\langle \vec{N}_1, \vec{U} \rangle = 0$ dır. Buradan tekrar türev alınırsa

$$-\kappa_1 \langle \vec{T}_1, \vec{U} \rangle + \tau_1 \langle \vec{B}_1, \vec{U} \rangle = 0$$

bulunur. Burada Denk. 3.17 dikkate alınırsa

$$-\kappa_1 \langle \vec{T}_1, \vec{U} \rangle = 0$$

elde edilir. Ayrıca, $\vec{T}_1$, hem $\vec{B}_1$ ile hem $\vec{N}_1$ ile dik olduğundan $\langle \vec{T}_1, \vec{U} \rangle = 0$ olamaz. O halde $\kappa_1 = 0$ dır. Dolayısıyla (β) Mannheim partner eğrisi bir doğrudur. Böylece ispat biter.

Önerme 3.2. (α) eğrisi Mannheim eğrisi ve (β) eğrisi Mannheim partner eğrisi olsun.

Bu durumda, (β) helis ise (α) eğrisinin κ, τ eğrilik ve burulması için

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{c_2}{2} e^s - \frac{1}{2c_2} e^s$$

dir. Burada c_1 ve c_2 sıfırdan farklı sabitler ve s , (α) nın yay parametresidir. Özel olarak $c_1 = c_2 = 1$ alınırsa

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{e^s - e^{-s}}{2} = \sinh s$$

dir (Wang ve Liu, 2007).

3.2 Spinorlar

Bu bölümde spinorlarla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Öncelikle Cartan (1966) tarafından tanıtılan spinorlar verilmiştir. Daha sonra ise Torres Del Castillo ve Barrales (2004) tarafından elde edilen spinorlardan bahsedilmiştir.

$\mathbb{C}^3$, üç boyutlu kompleks vektör uzayı olsun. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ bir izotropik vektör olmak üzere $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ eşitliği vardır. $\mathbb{C}^3$ kompleks vektör uzayında izotropik vektörler cümlesi, $\mathbb{C}^2$ uzayında iki boyutlu bir yüzey üretir. İki boyutlu bu yüzey ζ_1 ve ζ_2 olarak parametrelendirilirse bu iki parametre $\vec{x}$ vektörünün bileşenleri cinsinden

$$\zeta_1 = \pm \sqrt{\frac{x_1 - ix_2}{2}},$$

$$\zeta_2 = \pm \sqrt{\frac{-x_1 - ix_2}{2}}$$

olarak yazılabilir. Burada i kompleks birim ve $i^2 = -1$ dir. O halde bir $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ izotropik vektörü bu parametreler cinsinden

$$\begin{aligned}
x_1 &= \zeta_1^2 - \zeta_2^2 \\
x_2 &= i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \\
x_3 &= -2\zeta_1\zeta_2
\end{aligned} \tag{3.18}$$

olacak şekilde yazılabilir. O halde $\mathbb{C}^3$ kompleks vektör uzayında verilen her izotropik vektörün (ζ_1, ζ_2) ve $(-\zeta_1, -\zeta_2)$ olacak şekilde $\mathbb{C}^2$ uzayında iki vektöre karşılık geldiği aşıkardır. Ters olarak; $\mathbb{C}^2$ kompleks uzayında her iki vektöre de aynı $\vec{x}$ vektörü karşılık gelir. Cartan, bu şekilde tanımlanan

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

şeklindeki iki boyutlu kompleks vektörleri spinor olarak adlandırmıştır (1966).

$SO(3)$ olarak bilinen orjin etrafında dönmeler grubu ile $SU(2)$ olarak bilinen birim determinanlı 2x2 boyutlu kompleks üniter matrisler grubu göz önüne alınsın. O halde $SO(3)$ ile $SU(2)$ arasında bir homomorfizm olduğundan $SO(3)$, $\mathbb{R}^3$ 'deki vektörleri harekete geçirirken $SU(2)$ ise iki kompleks bileşenli vektörleri, yani spinorları, harekete geçirir (Goldstern, 1980; Sattinger ve Weaver, 1986; Torres del Castillo ve Barrales, 2004). O halde verilenler sayesinde $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\vec{a} + i\vec{b} \in \mathbb{C}^3$ izotropik vektörü Denk. 3.19 ile verilen ζ spinoru ile eşleşsin. Burada Denk. 3.18 yardımıyla $\vec{a} + i\vec{b} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ kompleks vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}
x_1 &= \zeta_1^2 - \zeta_2^2 \\
x_2 &= i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \\
x_3 &= -2\zeta_1\zeta_2
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir (Cartan, 1966; Torres del Castillo ve Barrales, 2004). Öte yandan Pauli matrisleri

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

göz önüne alınırsa

$$\sigma_1 = CP_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = CP_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = CP_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

şeklinde σ matrisleri elde edilir. Burada σ matrisleri 2×2 boyutlu kompleks simetrik matrisler olmak üzere $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dır (Payne, 1952; Torres del Castillo, 2003).

Ayrıca, bir ζ spinorunun eşi $\hat{\zeta}$ olmak üzere; bu spinor

$$\hat{\zeta} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\zeta} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\zeta}_2 \\ \bar{\zeta}_1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlanır (Torres del Castillo ve Barrales, 2004). O halde, Denk. 3.19 ve Denk. 3.21 göz önüne alınırsa $\vec{a} + i\vec{b}$ kompleks vektörü

$$\vec{a} + i\vec{b} = \zeta^t \sigma \zeta \quad (3.22)$$

olarak yazılır. Burada ζ^t, ζ spinorunun transpozudur. Dolayısıyla Denk. 3.22'den $\vec{a} + i\vec{b}$ vektörünün bileşenleri spinorlar cinsinden

$$\begin{aligned} x_1 &= \zeta^t \sigma_1 \zeta = \zeta_1^2 - \zeta_2^2 \\ x_2 &= \zeta^t \sigma_2 \zeta = i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \\ x_3 &= \zeta^t \sigma_3 \zeta = -2\zeta_1 \zeta_2 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur (Torres del Castillo ve Barrales, 2004). Şimdi bir $c \in \mathbb{R}^3$ reel vektörü göz önüne alınsın. O halde bu vektör aynı ζ spinoru cinsinden

$$\vec{c} = -\hat{\zeta}^t \sigma \zeta \quad (3.23)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} c_1 &= -\hat{\zeta}^t \sigma_1 \zeta = \zeta_1 \bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_1 \zeta_2 \\ c_2 &= -\hat{\zeta}^t \sigma_2 \zeta = i(\zeta_1 \bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_1 \zeta_2) \\ c_3 &= -\hat{\zeta}^t \sigma_3 \zeta = |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. O halde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vektör üçlüsüne ζ spinoru karşılık gelmek üzere bu vektörlerin spinor denklemleri

$$\begin{aligned}\vec{a} + i\vec{b} &= \zeta^t \sigma \zeta = (\zeta_1^2 - \zeta_2^2, i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2), -2\zeta_1\zeta_2) \\ \vec{c} &= -\hat{\zeta}^t \sigma \zeta = (\zeta_1\bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_1\zeta_2, i(\zeta_1\bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_1\zeta_2), |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2)\end{aligned}$$

şeklinde yazılır (Torres del Castillo ve Barrales, 2004).

Şimdi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin boyları ζ spinoru cinsinden ifade edilsin. O halde öncelikle, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörünün boyu

$$\begin{aligned}\|\vec{c}\| &= \sqrt{(\zeta_1\bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_1\zeta_2)^2 + i^2((\zeta_1\bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_1\zeta_2))^2 + (|\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2)^2} \\ &= \sqrt{\zeta_1^2\bar{\zeta}_2^2 + \bar{\zeta}_1^2\zeta_2^2 + 2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2 - \zeta_1^2\bar{\zeta}_2^2 - \bar{\zeta}_1^2\zeta_2^2 + 2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2 + |\zeta_1|^4 + |\zeta_2|^4 - 2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2} \\ &= \sqrt{|\zeta_1|^4 + 2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2 + |\zeta_2|^4} \\ &= \sqrt{(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2)^2} \\ &= |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 \\ &= \bar{\zeta}^t \zeta\end{aligned}\tag{3.24}$$

şeklinde bulunur. $\vec{a} + i\vec{b} \in \mathbb{C}^3$ vektörü bir izotropik vektör olduğundan $\langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{a} + i\vec{b} \rangle = 0$ eşitliği vardır. Buradan açık bir şekilde

$$\begin{aligned}\langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{a} + i\vec{b} \rangle &= \langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle \\ &= \langle (\zeta_1^2 - \zeta_2^2, i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2), -2\zeta_1\zeta_2), (\zeta_1^2 - \zeta_2^2, i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2), -2\zeta_1\zeta_2) \rangle \\ &= (\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^2 + i^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2 + (-2\zeta_1\zeta_2)^2 \\ &= \zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 2\zeta_1^2\zeta_2^2 - \zeta_1^4 - \zeta_2^4 - 2\zeta_1^2\zeta_2^2 + 4\zeta_1^2\zeta_2^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{a} + i\vec{b} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle i\vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, i\vec{b} \rangle + \langle i\vec{b}, i\vec{b} \rangle \\
&= \|\vec{a}\|^2 + i\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + i\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + i^2 \|\vec{b}\|^2 \\
&= \|\vec{a}\|^2 + 2i\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \|\vec{b}\|^2
\end{aligned}$$

ve $\langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{a} + i\vec{b} \rangle = 0 + i0$ olduğundan

$$\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}\|^2 \quad (3.25)$$

ve

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \quad (3.26)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin boyları eşit ve aynı zamanda $\vec{a} \perp \vec{b}$ dir.

Ek olarak

$$\begin{aligned}
\|\vec{a} + i\vec{b}\|^2 &= \langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{a} + i\vec{b} \rangle = \langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{a} - i\vec{b} \rangle \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_1^2 - \zeta_2^2, i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2), 2\zeta_1^2 \zeta_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{\zeta_1^2 - \zeta_2^2}, i(\overline{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}), -2\overline{\zeta_1^2 \zeta_2^2} \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= (\zeta_1^2 - \zeta_2^2)(\overline{\zeta_1^2 - \zeta_2^2}) + i\overline{i}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)(\overline{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}) + 4\zeta_1^2 \overline{\zeta_1^2} \zeta_2^2 \overline{\zeta_2^2} \\
&= |\zeta_1|^4 + |\zeta_2|^4 - \zeta_1^2 \overline{\zeta_2^2} - \overline{\zeta_1^2} \zeta_2^2 + |\zeta_1|^4 + |\zeta_2|^4 + \zeta_1^2 \overline{\zeta_2^2} + \overline{\zeta_1^2} \zeta_2^2 + 4|\zeta_1|^2 |\zeta_2|^2 \\
&= 2(|\zeta_1|^4 + |\zeta_2|^4 + 2|\zeta_1|^2 |\zeta_2|^2)
\end{aligned}$$

denklemini yardımıyla

$$\|\vec{a} + i\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = 2(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2)^2$$

eşitliği elde edilir. O halde Denk. 3.25 ve Denk 3.26'dan

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = \overline{\zeta^t} \zeta$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin boyları eşittir.

Şimdi $\langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{c} \rangle$ iç çarpımı hesaplınsın. O halde

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{c} \rangle &= \left\langle \left(\zeta_1^2 - \zeta_2^2, i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2), -2\zeta_1\zeta_2 \right), \left(\zeta_1\bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_1\zeta_2, i(\zeta_1\bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_1\zeta_2), |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2 \right) \right\rangle \\ &= 2\zeta_1^2\bar{\zeta}_1\zeta_2 - 2\zeta_2^2\bar{\zeta}_1\zeta_2 - 2\zeta_1\zeta_2|\zeta_1|^2 + 2\zeta_1\zeta_2|\zeta_2|^2 \\ &= 2\zeta_1^2\bar{\zeta}_1\zeta_2 - 2\zeta_2^2\bar{\zeta}_1\zeta_2 - 2\zeta_1\zeta_2\bar{\zeta}_1\zeta_1 + 2\zeta_1\zeta_2\bar{\zeta}_2\zeta_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + i\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ olduğundan $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ olduğu görülür. Ayrıca Denk. 3.27 göz önüne alınırsa

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$$

elde edilir. O halde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri karşılıklı ortogonaldir (Torres del Castillo, Barrales, 2004).

Ek olarak aşağıdaki önermeler verilebilir.

Önerme 3.3. ζ ve ϕ keyfi verilen iki spinor ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere

- i. $\overline{\phi^t \sigma \zeta} = -\hat{\phi}^t \sigma \hat{\zeta}$
- ii. $(\lambda \phi + \mu \zeta)^\wedge = \bar{\lambda} \hat{\phi}^t + \bar{\mu} \hat{\zeta}$
- iii. $\hat{\hat{\zeta}} = -\zeta$
- iv. $\phi^t \sigma \zeta = \zeta^t \sigma \phi$

eşitlikleri vardır (Torres del Castillo ve Barrales, 2004).

Önerme 3.4. Sıfırdan farklı bir ζ spinoru için $\{\zeta, \hat{\zeta}\}$ spinor ikilisi lineer bağımsızdır (Torres del Castillo ve Barrales, 2004).

3.3. Eğrilerin Spinor Gösterimi

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde birim hızlı (α) regüler eğrisi $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere göz önüne alınsın. O halde, (α) eğrisi s yay parametresiyle verilmiş olmak üzere $\|\alpha'(s)\|=1$ dir. Buradan Denk. 3.22 ve Denk. 3.23 göz önüne alınırsa (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet üçlüsüne

$$\begin{aligned}\vec{N} + i\vec{B} &= \zeta^t \sigma \zeta \\ \vec{T} &= -\hat{\zeta}^t \sigma \zeta\end{aligned}\tag{3.27}$$

olacak şekilde bir ζ spinoru karşılık gelir. Burada (α) eğrisi birim hızlı olduğundan $\overline{\zeta^t} \zeta = 1$ dir. Yani $|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 = 1$ eşitliği vardır. (Torres del Castillo ve Barrales, 2004). Buradan

$$\begin{aligned}\vec{N} + i\vec{B} &= \zeta^t \sigma \zeta = (\zeta_1^2 - \zeta_2^2, i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2), -2\zeta_1 \zeta_2) \\ \vec{T} &= -\zeta^t \sigma \zeta = (\zeta_1 \overline{\zeta_2} + \overline{\zeta_1} \zeta_2, i(\zeta_1 \overline{\zeta_2} - \overline{\zeta_1} \zeta_2), |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2)\end{aligned}\tag{3.28}$$

yazılır.

Şimdi (α) eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{B}, \vec{T}\}$ Frenet üçlüsüne karşılık gelen ζ spinoru için $\frac{d\zeta}{ds}$ bulunsun. $\{\zeta, \zeta\}$ spinor ikilisi spinorlar için bir baz teşkil ettiğinden $\frac{d\zeta}{ds}$ spinoru

$$\frac{d\zeta}{ds} = f\zeta + g\hat{\zeta}$$

yazılabilir. Burada f ve g fonksiyonları keyfî, kompleks değerli fonksiyonlardır. Diğer taraftan Denk. 3.27'de ilk eşitliğe türev işlemi uygulanır ve Denk. 2.5 göz önüne alınırsa

$$-\kappa \vec{T} - i\tau(\vec{N} + i\vec{B}) = 2f(\vec{N} + i\vec{B}) - 2g\vec{T}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $f = \frac{-i\tau}{2}$, $g = \frac{\kappa}{2}$ ve dolayısıyla

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{1}{2}(-i\tau\zeta + \kappa\hat{\zeta}) \quad (3.29)$$

bulunur. Burada $\kappa, \tau; (\alpha)$ eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır. Buradan $\frac{d\zeta}{ds}$ ye karşılık gelen eğrinin Frenet denklemi tek bir spinor denklemi tarafından ifade edilir. (Torres del Castillo ve Barales, 2004).



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, Torres Del Castillo ile Barrales (2004) ve Erişir (2021) tarafından yapılan çalışmalardan yola çıkılarak Mannheim eğri çiftinin spinor formülasyonu verilmiştir. Bunun için öncelikle, Mannheim eğrisi ile Mannheim partner eğrisine birer spinor karşılık getirilmiştir. Daha sonra, Mannheim eğri çiftinin arasındaki ilişkiler kullanılarak bu eğri çiftine karşılık gelen spinorlar arasındaki ilişkiler teoremler ile ifade edilmiştir. Ek olarak, bu spinorlar arasındaki açıların geometrik yorumları verilmiştir. Daha sonra, Mannheim eğrisinin helis olması durumu göz önüne alınarak bazı teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak bir örnek verilmiştir.

4.1. Mannheim Eğri Çiftinin Spinor Gösterimi

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi s yay parametrelili birim hızlı Mannheim eğrisi ve $\beta: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi ise s_1 yay parametrelili Mannheim partner eğrisi olsun. O halde, (α) Mannheim eğrisinin $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ Frenet vektörlerine ζ spinoru ve (β) Mannheim partner eğrisinin $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet vektörlerine ϕ spinoru karşılık gelsin. Dolayısıyla, (α, β) Mannheim eğri çiftinin spinor denklemleri için aşağıdaki teoremler ve sonuçlar verilebilir.

Öncelikle, (α) Mannheim eğrisi göz önüne alınsın. Bu durumda, (α) Mannheim eğrisinin $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ Frenet çatısına karşılık gelen ζ spinoru için

$$\begin{aligned}\vec{B} + i\vec{T} &= \zeta^t \sigma \zeta \\ \vec{N} &= -\hat{\zeta}^t \sigma \zeta\end{aligned}\tag{4.1}$$

denklemleri yazılabilir. Dolayısıyla, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ Mannheim eğrisi s yay parametrelili birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda, bu eğrinin $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ Frenet çatısını bir ζ spinoru karşılık gelsin. O halde, bu eğrinin κ ve τ eğrilik ve burulması tek bir spinor denklemi cinsinden

$$\frac{d\zeta}{ds} = \left(\frac{\tau - i\kappa}{2} \right) \hat{\zeta}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: (α) Mannheim eğrisinin $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ Frenet çatısına ζ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda, Denk. 4.1'in ilk denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{B}}{ds} + i \frac{d\vec{T}}{ds} = \left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^t \sigma \zeta + \zeta^t \sigma \left(\frac{d\zeta}{ds} \right) \quad (4.2)$$

eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan $\{\zeta, \hat{\zeta}\}$ spinor ikilisi spinorlar için bir taban teşkil ettiğinden $\frac{d\zeta}{ds}$ spinoru

$$\frac{d\zeta}{ds} = f\zeta + g\hat{\zeta} \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, f ve g keyfi değerli kompleks fonksiyonlardır. Dolayısıyla, Denk. 4.3, Denk. 4.2 de yerine yazılır ve Denk. 2.5 Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} -\tau \vec{N} + i\kappa \vec{N} &= \left(f\zeta + g\hat{\zeta} \right)^t \sigma \zeta + \zeta^t \sigma \left(f\zeta + g\hat{\zeta} \right) \\ (-\tau + i\kappa) \vec{N} &= f\zeta^t \sigma \zeta + g\hat{\zeta}^t \sigma \zeta + f\zeta^t \sigma \hat{\zeta} + g\hat{\zeta}^t \sigma \hat{\zeta} \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Burada Önerme 3.3 den $\phi^t \sigma \zeta = \zeta^t \sigma \phi$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(-\tau + i\kappa) \vec{N} = 2f(\zeta^t \sigma \zeta) + 2g(\hat{\zeta}^t \sigma \zeta)$$

denklemleri elde edilir. O halde, Denk. 4.1 kullanılırsa son denklem

$$(-\tau + i\kappa)\vec{N} = 2f(\vec{B} + i\vec{T}) - 2g\vec{N}$$

olmak üzere f ve g kompleks fonksiyonları

$$f = 0 \text{ ve } g = \frac{\tau - i\kappa}{2}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\frac{d\zeta}{ds} = \left(\frac{\tau - i\kappa}{2} \right) \hat{\zeta} \quad (4.4)$$

elde edilir. Böylece (α) Mannheim eğrisinin κ ve τ Frenet eğrilikleri tek bir spinor denklemi cinsinden ifade edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 4.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı Mannheim eğrisinin $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ Frenet çatısına ζ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda, Frenet vektörlerinin spinor denklemleri

$$\begin{aligned} \vec{T} &= -\frac{i}{2}(\zeta^t \sigma \zeta + \hat{\zeta}^t \sigma \hat{\zeta}) \\ \vec{N} &= -\hat{\zeta}^t \sigma \zeta \\ \vec{B} &= \frac{1}{2}(\zeta^t \sigma \zeta - \hat{\zeta}^t \sigma \hat{\zeta}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklindedir.

İspat: (α) Mannheim eğrisinin $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ Frenet çatısına bir ζ spinoru karşılık gelsin.

O halde, Denk. 4.1'in ilk denkleminde $\vec{B} + i\vec{T} = \zeta^t \sigma \zeta$ göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \text{Re}(\zeta^t \sigma \zeta) \\ \vec{T} &= \text{Im}(\zeta^t \sigma \zeta) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla buradan

$$\vec{T} = -\frac{i}{2}(\zeta^t \sigma \zeta - \overline{\zeta^t \sigma \zeta})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \left(\zeta^t \sigma \zeta + \overline{\zeta^t \sigma \zeta} \right)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi, Önerme 3.1’de verilen $\overline{\phi^t \sigma \zeta} = -\hat{\phi} \sigma \hat{\zeta}$ spinor eşitliği kullanılırsa $\vec{T}$ ve $\vec{B}$ vektör alanları için

$$\vec{T} = -\frac{i}{2} \left(\zeta^t \sigma \phi + \hat{\zeta} \sigma \hat{\zeta} \right)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \left(\zeta^t \sigma \zeta - \hat{\zeta} \sigma \hat{\zeta} \right)$$

spinor eşitlikleri elde edilir. Ayrıca Denk. 4.1’den $\vec{N} = -\hat{\zeta}^t \sigma \zeta$ olduğundan ispat biter.

Şimdi, (α) Mannheim eğrisinin $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ Frenet çatısının bileşenleri bu çatıya karşılık gelen ζ spinoru cinsinden yazılsın. Bunun için Denk. 4.5’den öncelikle $\zeta^t \sigma \zeta$ spinor denklemi hesaplanırsa

$$\zeta^t \sigma_1 \zeta = (\zeta_1 \ \zeta_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \zeta_1^2 - \zeta_2^2$$

$$\zeta^t \sigma_2 \zeta = (\zeta_1 \ \zeta_2) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)$$

$$\zeta^t \sigma_3 \zeta = (\zeta_1 \ \zeta_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = -2\zeta_1 \zeta_2$$

denklemleri elde edilir. Burada $\sigma_i, i=1,2,3$ matrisleri Denk. 3.20’de verilen matrislerdir. Benzer şekilde $\hat{\zeta}^t \sigma \hat{\zeta}$ spinor denklemleri hesaplanırsa

$$\hat{\zeta}^t \sigma_1 \hat{\zeta} = \begin{pmatrix} -\overline{\zeta_2} & \overline{\zeta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\overline{\zeta_2} \\ \overline{\zeta_1} \end{pmatrix} = \overline{\zeta_2}^2 - \overline{\zeta_1}^2$$

$$\hat{\zeta}^t \sigma_2 \hat{\zeta} = \begin{pmatrix} -\overline{\zeta_2} & \overline{\zeta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\overline{\zeta_2} \\ \overline{\zeta_1} \end{pmatrix} = i(\overline{\zeta_2}^2 + \overline{\zeta_1}^2)$$

$$\hat{\zeta}^t \sigma_3 \hat{\zeta} = \begin{pmatrix} -\overline{\zeta_2} & \overline{\zeta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\overline{\zeta_2} \\ \overline{\zeta_1} \end{pmatrix} = 2\overline{\zeta_1} \overline{\zeta_2}$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan (α) Mannheim eğrisinin $\{\bar{B}, \bar{T}, \bar{N}\}$ Frenet vektörlerinin bileşenleri spinorlar cinsinden

$$\begin{aligned}\bar{T} &= -\frac{i}{2} \left(\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \bar{\zeta}_2^2 - \bar{\zeta}_1^2, i \left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \bar{\zeta}_1^2 + \bar{\zeta}_2^2 \right), -2\zeta_1\zeta_2 + 2\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2 \right) \\ \bar{N} &= \left(\zeta_1\bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_1\zeta_2, i \left(\zeta_1\bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_1\zeta_2 \right), |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2 \right) \\ \bar{B} &= \frac{1}{2} \left(\zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \bar{\zeta}_2^2 + \bar{\zeta}_1^2, i \left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \bar{\zeta}_1^2 - \bar{\zeta}_2^2 \right), -2\zeta_1\zeta_2 - 2\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2 \right)\end{aligned}\quad (4.6)$$

olarak elde edilir.

Şimdi (α) eğrisinin $\beta: J \rightarrow \mathbb{E}^3$, s_1 yay parametreli Mannheim partner eğrisi göz önüne alınsın. Bu eğrinin $\{\bar{T}_1, \bar{N}_1, \bar{B}_1\}$ Frenet çatısına bir ϕ spinoru karşılık gelsin. O halde, Denk. 4.1'e benzer olarak $\{\bar{T}_1, \bar{N}_1, \bar{B}_1\}$ Frenet çatısının spinor denklemleri için

$$\begin{aligned}\bar{T}_1 - i\bar{N}_1 &= \phi^t \sigma \phi \\ \bar{B}_1 &= -\hat{\phi}^t \sigma \phi\end{aligned}\quad (4.7)$$

eşitlikleri yazılabilir. O halde, Denk. 4.7'den aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3. $\beta: J \rightarrow \mathbb{E}^3$, s_1 yay parametreli eğrisi (α) eğrisinin Mannheim partner eğrisi olsun. O halde, (β) eğrisinin $\{\bar{T}_1, \bar{N}_1, \bar{B}_1\}$ Frenet çatısına bir ϕ spinoru karşılık gelmek üzere bu eğrinin κ_1 ve τ_1 Frenet eğrilik ve burulması tek bir spinor denklemi cinsinden

$$\frac{d\phi}{ds_1} = \frac{i}{2} \left(\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi} \right) \quad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\hat{\phi}$, ϕ spinorunun eşidir.

İspat: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim eğrisinin, Mannheim partner eğrisi $\beta: J \rightarrow \mathbb{E}^3$, s_1 yay parametreli eğrisi olsun. (β) eğrisine bir ϕ spinoru karşılık gelmek üzere ϕ spinorunun türevi Denk. 4.3'e benzer olarak

$$\frac{d\phi}{ds_1} = f\phi + g\hat{\phi} \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada f ve g keyfî değerli kompleks fonksiyonlardır. O halde Denk. 4.7'nin ilk denkleminin $s_1 \in J$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{T}_1}{ds_1} - i \frac{d\vec{N}_1}{ds_1} = \left(\frac{d\phi}{ds_1} \right)^t \sigma\phi + \phi^t \sigma \left(\frac{d\phi}{ds_1} \right)$$

eşitliği elde edilir. Burada Denk. 4.9 ve Denk. 2.5 Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\kappa_1 \vec{N}_1 - i(\kappa_1 \tau_1 + \tau_1 \vec{B}_1) = (f\phi + g\hat{\phi})^t \sigma\phi + \phi^t \sigma(f\phi + g\hat{\phi})$$

olmak üzere

$$i\kappa_1 (\vec{T}_1 - i\vec{N}_1) - i\tau_1 \vec{B}_1 = f\phi^t \sigma\phi + g\hat{\phi}^t \sigma\phi + f\phi^t \sigma\phi + g\phi^t \sigma\hat{\phi}$$

eşitliği yazılır. Ayrıca Önerme 3.3'den $\phi^t \sigma\zeta = \zeta^t \sigma\phi$ olduğu göz önüne alınırsa

$$i\kappa_1 (\vec{T}_1 - i\vec{N}_1) - i\tau_1 \vec{B}_1 = 2f(\phi^t \sigma\phi) + 2g(\hat{\phi}^t \sigma\phi)$$

denklemini ile Denk. 4.7 göz önüne alındığında

$$i\kappa_1 (\vec{T}_1 - i\vec{N}_1) - i\tau_1 \vec{B}_1 = 2f(\vec{T}_1 - i\vec{N}_1) - 2g\vec{B}_1$$

olmak üzere f ve g kompleks fonksiyonları

$$f = \frac{i\kappa_1}{2} \text{ ve } g = \frac{i\tau_1}{2}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla Denk. 4.9'dan

$$\frac{d\phi}{ds_1} = \frac{i}{2}(\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi})$$

olduğu bulunur. Böylece ispat biter.

(α, β) Mannheim eğri çiftinin yay parametreleri sırasıyla $s \in I$, $s_1 \in J$ olsun. O halde, (β) Mannheim partner eğrisi için

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{ds} &= \frac{d\beta}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} \\ \frac{d\beta}{ds} &= \vec{T}_1 \frac{ds_1}{ds}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| = \frac{ds_1}{ds} \quad (4.10)$$

olduğu biliniyor. O halde Denk. 4.8 ve Denk. 4.10 yardımıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1. (α) eğrisinin Mannheim partner eğrisi (β) ve (β) 'nin yay parametresi $s_1 \in J$ olmak üzere ϕ spinoru bu eğriye karşılık gelsin. Dolayısıyla, $s \in I$ parametresi (α) Mannheim eğrisinin yay parametresi olmak üzere $\frac{d\phi}{ds}$ spinoru

$$\frac{d\phi}{ds} = i \frac{\|\beta'\|}{2} (\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi})$$

yazılabilir. Burada $\beta' = \frac{d\beta}{ds}$ dir.

Teorem 4.4. $\beta: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim partner eğrisinin $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet çatısına ϕ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda, $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet vektörleri için

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= \frac{1}{2} (\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \\ \vec{N}_1 &= \frac{i}{2} (\phi^t \sigma \phi + \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \\ \vec{B}_1 &= -\hat{\phi}^t \sigma \phi\end{aligned} \quad (4.11)$$

olacak şekilde spinor denklemleri vardır.

İspat: ϕ spinoru (β) Mannheim eğrisine karşılık gelmek üzere Denk. 4.7'nin ilk denkleminde $\vec{T}_1 - i\vec{N}_1 = \phi^t \sigma \phi$ olduğu biliniyor. O halde, buradan

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\phi^t \sigma \phi) &= \vec{T}_1 \\ \operatorname{Im}(\phi^t \sigma \phi) &= -\vec{N}_1\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında $\vec{T}_1$ ve $\vec{N}_1$ vektör alanları

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= \frac{1}{2}(\phi^t \sigma \phi + \overline{\phi^t \sigma \phi}) \\ \vec{N}_1 &= \frac{i}{2}(\phi^t \sigma \phi - \overline{\phi^t \sigma \phi})\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Önerme 3.1 dikkate alındığında $\overline{\phi^t \sigma \zeta} = -\hat{\phi}^t \sigma \hat{\zeta}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= \frac{1}{2}(\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \\ \vec{N}_1 &= \frac{i}{2}(\phi^t \sigma \phi + \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi})\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Gerçekten de, $s_1 \in J$, (β) Mannheim partner eğrisinin yay parametresi olmak üzere $\frac{d\vec{T}_1}{ds_1} = \kappa_1 \vec{N}_1$ olduğu biliniyor. Dolayısıyla, (β) eğrisinin $\vec{T}_1$ teğeti

$$\vec{T}_1 = \frac{1}{2}(\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi})$$

olarak alınırsa bu denklemin $s_1 \in J$ yay parametresine göre türevi

$$\frac{d\vec{T}_1}{ds_1} = \kappa_1 \vec{N}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi^t}{ds_1} \sigma\phi + \phi^t \sigma \frac{d\phi}{ds} - \left(\frac{d\hat{\phi}}{ds} \right)^t \sigma\hat{\phi} - \hat{\phi}^t \sigma \left(\frac{d\hat{\phi}}{ds_1} \right) \right)$$

olarak bulunur. Burada Denk. 4.8’de verilen ϕ spinorunun türevi kullanılırsa

$$\kappa_1 \vec{N}_1 = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \frac{i}{2} (\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi})^t \sigma\phi + \phi^t \sigma \left(\frac{i}{2} (\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi}) \right) - \left(\frac{i}{2} (\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi})^t \right)^\wedge \sigma\hat{\phi} \\ & - \hat{\phi}^t \sigma \left(\frac{i}{2} (\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi}) \right)^\wedge \end{aligned} \right]$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, Önerme 3.1’den $(a\psi + b\phi)^\wedge = \bar{a}\hat{\psi} + \bar{b}\hat{\phi}$ olduğu biliniyor.

Dolayısıyla son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \kappa_1 \vec{N}_1 &= \frac{1}{2} \left[i\kappa_1 (\phi^t \sigma\phi) + i\tau_1 (\hat{\phi}^t \sigma\phi) + i\kappa_1 \hat{\phi}^t \sigma\hat{\phi} - i\tau_1 (\hat{\phi}^t \sigma\phi) \right] \\ \kappa_1 \vec{N}_1 &= \frac{\kappa_1}{2} \left[i (\phi^t \sigma\phi + \hat{\phi}^t \sigma\hat{\phi}) \right] \end{aligned}$$

olmak üzere $\vec{N}_1$ normal vektörü

$$\vec{N}_1 = \frac{i}{2} (\phi^t \sigma\phi + \hat{\phi}^t \sigma\hat{\phi})$$

şeklinde elde edilir. Bu ise Denk. 4.11 ile aynıdır. Ayrıca, $\frac{d\vec{N}_1}{ds_1} = -\kappa_1 \vec{T}_1 + \tau_1 \vec{B}_1$ olduğu

göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{N}_1}{ds_1} &= -\kappa_1 \vec{T}_1 + \tau_1 \vec{B}_1 = \frac{i}{2} (\phi^t \sigma\phi + \hat{\phi}^t \sigma\hat{\phi})' \\ &= \frac{i}{2} \left[\begin{aligned} & \frac{i}{2} (\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi})^t \sigma\phi + \phi^t \sigma \left(\frac{i}{2} (\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi}) \right) + \left(\frac{i}{2} (\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi})^t \right)^\wedge \sigma\hat{\phi} \\ & + \hat{\phi}^t \sigma \left(\frac{i}{2} (\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi}) \right)^\wedge \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\kappa_1 \vec{T}_1 + \tau_1 \vec{B}_1 = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} \kappa_1 (\phi^t \sigma \phi) + \tau_1 (\hat{\phi}^t \sigma \phi) + \kappa_1 (\phi^t \sigma \phi) + \tau_1 (\phi^t \sigma \hat{\phi}) - \kappa_1 (\hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) \\ + \tau_1 (\phi^t \sigma \hat{\phi}) - \kappa_1 (\hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) + \tau_1 (\hat{\phi}^t \sigma \phi) \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\vec{T}_1 = \frac{1}{2} (\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi})$ yardımıyla

$$\tau_1 \vec{B}_1 = -\frac{1}{2} \kappa_1 (\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}) - \tau_1 (\hat{\phi}^t \sigma \phi) + \frac{1}{2} (\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi})$$

ve sonuç olarak

$$\vec{B}_1 = -\hat{\phi}^t \sigma \phi$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi (β) Mannheim partner eğrisinin $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet vektörlerinin bileşenlerinin spinor denklemleri aşağıdaki sonuçla verilebilir.

Sonuç 4.2. (α) Mannheim eğrisinin, Mannheim partner eğrisi (β) ve (β) Mannheim partner eğrisinin $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet çatısını ϕ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet çatısının spinor denklemleri için

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= \frac{1}{2} \left(\phi_1^2 - \phi_2^2 + \bar{\phi}_1^2 - \bar{\phi}_2^2, i \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - \bar{\phi}_1^2 - \bar{\phi}_2^2 \right), -2 \left(\phi_1 \phi_2 + \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 \right) \right) \\ \vec{N}_1 &= -\frac{i}{2} \left(\phi_1^2 - \phi_2^2 + \bar{\phi}_1^2 - \bar{\phi}_2^2, i \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2 \right), -2 \left(\phi_1 \phi_2 - \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 \right) \right) \\ \vec{B}_1 &= \left(\phi_1 \bar{\phi}_2 + \bar{\phi}_1 \phi_2, i \left(\phi_1 \bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1 \phi_2 \right), |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

eşitlikleri vardır.

İspat: (β) Mannheim partner eğrisinin $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet çatısına bir ϕ spinoru karşılık gelsin. O halde, $\phi^t \sigma \phi$ spinor denklemi için

$$\begin{aligned}
\phi^t \sigma_1 \phi &= (\phi_1 \ \phi_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \phi_1^2 - \phi_2^2 \\
\phi^t \sigma_2 \phi &= (\phi_1 \ \phi_2) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = i(\phi_1^2 + \phi_2^2) \\
\phi^t \sigma_3 \phi &= (\phi_1 \ \phi_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = -2\phi_1\phi_2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ve $\hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}$ spinor denklemi için

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}^t \sigma_1 \hat{\phi} &= (-\bar{\phi}_2 \ \bar{\phi}_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_1 \end{pmatrix} = \bar{\phi}_2^2 - \bar{\phi}_1^2 \\
\hat{\phi}^t \sigma_2 \hat{\phi} &= (-\bar{\phi}_2 \ \bar{\phi}_1) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_1 \end{pmatrix} = i(\bar{\phi}_2^2 + \bar{\phi}_1^2) \\
\hat{\phi}^t \sigma_3 \hat{\phi} &= (-\bar{\phi}_2 \ \bar{\phi}_1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_1 \end{pmatrix} = 2\bar{\phi}_1\bar{\phi}_2
\end{aligned} \tag{4.14}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca, $\hat{\phi}^t \sigma \phi$ spinor denkleminde

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}^t \sigma_1 \phi &= (-\bar{\phi}_2 \ \bar{\phi}_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = -\bar{\phi}_2 \phi_1 - \bar{\phi}_1 \phi_2 \\
\hat{\phi}^t \sigma_2 \phi &= (-\bar{\phi}_2 \ \bar{\phi}_1) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = i(-\bar{\phi}_2 \phi_1 + \bar{\phi}_1 \phi_2) \\
\hat{\phi}^t \sigma_3 \phi &= (-\bar{\phi}_2 \ \bar{\phi}_1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = -|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2
\end{aligned} \tag{4.15}$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, Denk. 4.11’de Denk. 4.13, Denk. 4.14, Denk. 4.15 yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\vec{T}_1 &= \frac{1}{2} \left(\phi_1^2 - \phi_2^2 + \bar{\phi}_1^2 - \bar{\phi}_2^2, i(\phi_1^2 + \phi_2^2 - \bar{\phi}_1^2 - \bar{\phi}_2^2), -2(\phi_1\phi_2 + \bar{\phi}_1\bar{\phi}_2) \right) \\
\vec{N}_1 &= -\frac{i}{2} \left(\phi_1^2 - \phi_2^2 + \bar{\phi}_1^2 - \bar{\phi}_2^2, i(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2), -2(\phi_1\phi_2 - \bar{\phi}_1\bar{\phi}_2) \right) \\
\vec{B}_1 &= (\phi_1\bar{\phi}_2 + \bar{\phi}_1\phi_2, i(\phi_1\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1\phi_2), |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2)
\end{aligned}$$

spinor denklemleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.5. (α, β) Mannheim eğri çifti olsun. (α) Mannheim eğrisinin $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ Frenet çatısına ζ spinoru ve (β) Mannheim partner eğrisinin $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet çatısına ϕ spinoru karşılık gelsin. O halde, bu spinorlar arasında

$$\zeta = \pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \phi \quad (4.16)$$

ilişkisi vardır.

İspat: (α, β) Mannheim eğri çifti göz önüne alınsın. O halde, Denk. 3.2 yardımıyla

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \cos \theta \vec{T}_1 + \sin \theta \vec{N}_1 \\ \vec{B} &= -\sin \theta \vec{T}_1 + \cos \theta \vec{N}_1 \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan $\vec{B} + i\vec{T} \in \mathbb{C}^3$ kompleks vektörü için

$$\begin{aligned} \vec{B} + i\vec{T} &= -\sin \theta \vec{T}_1 + \cos \theta \vec{N}_1 + i(\cos \theta \vec{T}_1 + \sin \theta \vec{N}_1) \\ &= -\sin \theta \vec{T}_1 + \cos \theta \vec{N}_1 + i \cos \theta \vec{T}_1 + i \sin \theta \vec{N}_1 \\ &= (-\sin \theta + i \cos \theta) \vec{T}_1 + (\cos \theta + i \sin \theta) \vec{N}_1 \\ &= i(\cos \theta + i \sin \theta) \vec{T}_1 + (\cos \theta + i \sin \theta) \vec{N}_1 \\ &= e^{i\theta} (i\vec{T}_1 + \vec{N}_1) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\vec{B} + i\vec{T} = ie^{i\theta} (\vec{T}_1 - i\vec{N}_1) \quad (4.17)$$

eşitliği bulunur. Burada θ , $\vec{T}$ ile $\vec{T}_1$ teğet vektör alanları arasındaki açıdır ve Euler formülünden $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ eşitliği vardır. Dolayısıyla, Denk. 4.17’de Denk. 4.1 ve Denk. 4.7 göz önüne alınırsa

$$\zeta^t \sigma \zeta = ie^{i\theta} (\phi^t \sigma \phi)$$

elde edilir. O halde, son denklemden

$$\begin{aligned}\zeta^t \sigma \zeta &= (\zeta_1^2 - \zeta_2^2, i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2), -2\zeta_1 \zeta_2) \\ \phi^t \sigma \phi &= (\phi_1^2 - \phi_2^2, i(\phi_1^2 + \phi_2^2), -2\phi_1 \phi_2)\end{aligned}$$

spinor eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\zeta_1^2 &= ie^{i\theta} \phi_1^2 \\ \zeta_2^2 &= ie^{i\theta} \phi_2^2\end{aligned}\tag{4.18}$$

olduğu bulunur. Diğer taraftan, Tanım 2.10'daki Euler formülünden

$$\begin{aligned}ie^{i\theta} &= i(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= i \cos \theta - \sin \theta \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ &= e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}\end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa Denk. 4.18'den

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \phi_1 \\ \zeta_2 &= \pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \phi_2\end{aligned}$$

olduğu bulunur. O halde, ζ ve ϕ spinorları arasında

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\zeta = \pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \phi$$

ilişkisi elde edilir. Böylece ispat biter.

Teorem 4.5'in bir sonucu olarak aşağıdaki geometrik yorum verilebilir.

Sonuç 4.3. (α, β) Mannheim eğri çiftinin $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ ve $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet çatılarına, sırasıyla, ζ ve ϕ spinorları karşılık gelsin. Bu durumda, $\vec{T}$ ve $\vec{T}_1$ vektör alanları arasındaki açı θ ise ζ ve ϕ spinorları arasındaki açı $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ dir.

Ayrıca, Teorem 4.5'den aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.4. ζ ve ϕ spinorları, sırasıyla, (α, β) Mannheim eğri çiftine karşılık gelsin. Öyleyse, ζ ve ϕ spinorları arasında

$$\zeta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{i\frac{\theta}{2}} \phi$$

ilişkisi mevcuttur.

İspat: ζ ve ϕ spinorları için Denk. 4.16'da verilen denklemde $\zeta = \pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \phi$ formülü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[e^{i\frac{\theta}{2}} + i e^{i\frac{\theta}{2}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde, Denk. 4.16'dan

$$\zeta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{i\frac{\theta}{2}} \phi$$

spinor denklemi bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5. (α, β) Mannheim eğri çiftine karşılık gelen spinor çifti, sırasıyla, (ζ, ϕ) olsun. Bu durumda, bu spinorların eşleri arasındaki ilişki

$$\hat{\zeta} = \pm e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \hat{\phi}$$

(4.19)

dir.

İspat: ζ ve ϕ spinorlarının arasındaki ilişkiyi veren Denk. 4.16 göz önüne alınsın. Bu denklemin her iki tarafının eşi alınırsa

$$\hat{\zeta} = \left(\pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \hat{\phi} \right)^{\wedge}$$

spinor denklemi yazılır. Buradan Önerme 3.1'den $(\lambda\phi + \mu\zeta)^{\wedge} = \bar{\lambda}\hat{\phi} + \bar{\mu}\hat{\zeta}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\hat{\zeta} = \pm e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \hat{\phi}$$

olur ve kolayca

$$\hat{\zeta} = \pm e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \hat{\phi}$$

eşitliği bulunur. Böylece ispat biter.

O halde, Sonuç 4.4'den yola çıkılarak aşağıdaki geometrik yorum yapılabilir.

Sonuç 4.6. (α, β) Mannheim eğri çiftine, sırasıyla, karşılık gelen spinorlar (ζ, ϕ) olsun. Bu durumda, ζ ile ϕ spinoru arasında $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ açılı bir dönme oluşuyorken $\hat{\zeta}$ ile $\hat{\phi}$ spinorları arasında $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ açılı ters yönde bir dönme oluşur.

Sonuç 4.7. (α, β) Mannheim eğri çifti olsun. Ayrıca, (ζ, ϕ) spinorları, sırasıyla, (α, β) eğri çiftine karşılık gelsin. Bu durumda, (α) Mannheim eğrisine karşılık gelen ζ spinorunun $\frac{d\zeta}{ds}$ türevi (β) Mannheim partner eğrisi cinsinden

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{\|\beta'\| \tau_1}{2} e^{i\theta} \hat{\zeta} \quad (4.20)$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: (α, β) Mannheim eğri çiftine (ζ, ϕ) spinor çifti karşılık gelsin. Bu durumda Denk. 4.4'den

$$\frac{d\zeta}{ds} = \left(\frac{\tau - i\kappa}{2} \right) \hat{\zeta}$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla, Teorem 3.6'dan $\kappa = -\tau_1 \sin \theta \frac{ds_1}{ds}$ ve $\tau = \tau_1 \cos \theta \frac{ds_1}{ds}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{ds} &= \frac{1}{2} \left(\cos \theta \tau_1 \frac{ds_1}{ds} + i \sin \theta \tau_1 \frac{ds_1}{ds} \right) \hat{\zeta} \\ \frac{d\zeta}{ds} &= \frac{1}{2} \frac{ds_1}{ds} \tau_1 (\cos \theta + i \sin \theta) \hat{\zeta} \\ \frac{d\zeta}{ds} &= \frac{\|\beta'\| \tau_1}{2} e^{i\theta} \hat{\zeta} \end{aligned}$$

denklemini bulunur. Burada τ_1 , (β) Mannheim partner eğrisinin burulmasıdır. Böylece ispat biter.

Sonuç 4.7 yardımıyla aşağıdaki geometrik yorumlar yapılabilir.

Sonuç 4.8. (α, β) Mannheim eğri çiftine, sırasıyla, (ζ, ϕ) spinor çifti karşılık gelsin.

Bu durumda, (α) Mannheim eğrisinin $\vec{T}$ teğeti ile (β) Mannheim partner eğrisinin $\vec{T}_1$ teğeti arasındaki açı θ ise $\frac{d\zeta}{ds}$ spinoru ile $\hat{\zeta}$ spinoru arasındaki açı da θ dır.

Sonuç 4.9. ζ ve ϕ spinorları, sırasıyla, (α) Mannheim eğrisi ile (β) Mannheim partner eğrisine karşılık gelsin. O halde, $\frac{d\zeta}{ds}$ spinoru ile $\hat{\phi}$ spinoru arasındaki açı $\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ dür.

İspat: ζ spinoru (α) Mannheim eğrisine karşılık gelmek üzere Denk. 4.20'den $\frac{d\zeta}{ds}$ spinoru

$$\frac{d\zeta}{ds} = \pm \frac{\|\beta'\| \tau_1}{2} e^{i\theta} \hat{\zeta}$$

olduğu biliniyor. Burada Denk. 4.19 dikkate alınırsa son denklemden açıkça

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{ds} &= \pm \frac{\|\beta'\| \tau_1}{2} e^{i\theta} e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \hat{\phi} \\ &= \pm \frac{\|\beta'\| \tau_1}{2} e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \hat{\phi} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla buradan, $\frac{d\zeta}{ds}$ ile $\hat{\phi}$ spinorları arasındaki açının $\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ olduğu görülür. O halde ispat tamamlanır.

4.2. Mannheim Eğrisinin Helis Olma Durumunda Spinor Gösterimi

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi s yay parametrelili Mannheim eğrisi ve $\beta: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi ise s_1 yay parametrelili Mannheim partner eğrisi olsun. Bu durumda, ζ ve ϕ spinorları, sırasıyla, (α, β) Mannheim eğri çiftinin $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ ve $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet çatılarına karşılık gelsin.

Şimdi (α) Mannheim eğrisinin bir helis olduğu göz önüne alınsın. Bu durumda, aşağıdaki teorem ve sonuçlar verilebilir.

Teorem 4.6. (α, β) Mannheim eğri çiftine, sırasıyla, (ζ, ϕ) spinor çifti karşılık gelsin.

O halde (α) Mannheim eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart

$$\vec{U} = -\frac{i}{2} \left(e^{i\gamma} \zeta^t \sigma \zeta + e^{-i\gamma} \hat{\zeta}^t \sigma \hat{\zeta} \right)$$

dir. Burada $\gamma = \arccos(\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle)$ sabit açıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: (α) Mannheim eğrisi bir helis eğrisi ve ζ spinoru (α) eğrisine karşılık gelsin. O halde, Denk. 3.16 gereği $\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \cos \gamma = s b t$ olacak şekilde $\vec{U}$ sabit vektörü

$$\vec{U} = \cos \gamma \vec{T} + \sin \gamma \vec{B}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan Denk. (4.5) göz önüne alınırsa $\vec{U}$ vektörünün spinor denklemi

$$\vec{U} = -\frac{i}{2} \cos \gamma \left(\zeta^t \sigma \zeta + \hat{\zeta}^t \sigma \hat{\zeta} \right) + \frac{1}{2} \sin \gamma \left(\zeta^t \sigma \zeta - \hat{\zeta}^t \sigma \hat{\zeta} \right)$$

olmak üzere

$$\vec{U} = -\frac{i}{2} \left[\zeta^t \sigma \zeta (\cos \gamma + i \sin \gamma) + \hat{\zeta}^t \sigma \hat{\zeta} (\cos \gamma - i \sin \gamma) \right]$$

$$\vec{U} = -\frac{i}{2} \left[e^{i\gamma} \zeta^t \sigma \zeta + e^{-i\gamma} \hat{\zeta}^t \sigma \hat{\zeta} \right]$$

olacak şekilde bulunur.

$(\Leftarrow)$: (α) Mannheim eğrisine bir ζ spinoru karşılık gelsin. Ayrıca, bir $\vec{U}$ sabit vektörü

$$\vec{U} = -\frac{i}{2} \left[e^{i\gamma} \zeta^t \sigma \zeta + e^{-i\gamma} \hat{\zeta}^t \sigma \hat{\zeta} \right]$$

olarak alınsın. Burada $\gamma = sbt$ açıdır. Bu durumda, (α) Mannheim eğrisinin teğet vektörü $\vec{T}$ olmak üzere

$$\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = -\frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \overline{\zeta_2^2} - \overline{\zeta_1^2}, i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \overline{\zeta_1^2} + \overline{\zeta_2^2}), -2\zeta_1\zeta_2 + 2\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_2}, \\ e^{i\gamma}(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + e^{-i\gamma}(\overline{\zeta_2^2} - \overline{\zeta_1^2}), ie^{i\gamma}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + e^{-i\gamma}(\overline{\zeta_1^2} + \overline{\zeta_2^2}), \\ -2e^{i\gamma}\zeta_1\zeta_2 + 2e^{-i\gamma}\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

spinor denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \vec{T}, \vec{U} \rangle &= \frac{1}{2} \left[(\zeta_1\overline{\zeta_1} + \zeta_2\overline{\zeta_2})^2 (e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}) \right] \\ &= \cos \gamma (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ birim vektörler olduğundan ζ spinoru için $|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 = 1$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla

$$\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = \cos \gamma$$

eşitliği bulunur. O halde, (α) Mannheim eğrisi bir helis eğrisidir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi teorem 4.6 yardımıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.10. (α) Mannheim eğrisinin Mannheim partner eğrisi (β) ve (α, β) Mannheim eğri çiftine karşılık gelen spinorlar, sırasıyla, ζ ve ϕ olsun. Bu durumda, (α) Mannheim eğrisi bir helis ise $\vec{U}$ sabit vektörü (β) eğrisine karşılık gelen ϕ spinoru cinsinden

$$\vec{U} = \frac{1}{2} (\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi})$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi (β) Mannheim partner eğrisi için Denk. 4.8 göz önüne alınsın. Burada (α) helis eğrisi olduğundan Önerme 3.1 gereği (β) bir doğrudur. Dolayısıyla $\kappa_1 = 0$ olduğundan

$\frac{d\phi}{ds} = \frac{i}{2}(\kappa_1\phi + \tau_1\hat{\phi})$ denkleminde açık bir şekilde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.11. (α, β) Mannheim eğri çifti için (α) Mannheim eğrisi bir helis olsun. Bu durumda (β) Mannheim eğrisine karşılık gelen ϕ spinoru için

$$\frac{d\phi}{ds_1} = \frac{i\tau_1}{2} \hat{\phi} \quad (4.21)$$

eşitliği vardır.

Denk. 4.21’de verilen eşitlikten görülür ki $d\phi$ ile $\hat{\phi}$ spinorları lineer bağımlıdır.

Sonuç 4.12. (α, β) Mannheim eğri çifti için (α) Mannheim eğrisi bir helis olsun. O halde; (ζ, ϕ) spinor çifti (α, β) Mannheim eğrisine karşılık gelmek üzere bu spinorların türevleri arasında

$$d\zeta = \pm e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)} d\phi$$

eşitliği vardır.

İspat: (α, β) Mannheim eğri çiftine (ζ, ϕ) spinor çifti karşılık gelsin. Ayrıca, (α) Mannheim eğrisi bir helis eğrisi olsun. Öncelikle Denk. 4.20’de verilen

$$\frac{d\zeta}{ds_1} = \frac{\tau_1}{2} e^{i\theta} \hat{\zeta} \quad (4.22)$$

spinor denkleminde Denk. 4.19 yerine yazılırsa

$$\frac{d\zeta}{ds_1} = \pm \frac{\tau_1}{2} e^{i\theta} e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \hat{\phi}$$

$$\frac{d\zeta}{ds_1} = \pm \frac{\tau_1}{2} e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \hat{\phi}$$

eşitliği yazılabilir. Burada, (α) Mannheim eğrisi olduğundan Denk. 4.21 son denkleme yerine yazılırsa

$$\frac{d\zeta}{ds_1} = \pm (-i) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \frac{d\phi}{ds_1}$$

elde edilir ve Tanım 2.10 yardımıyla $-ie^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)}$ olduğu dikkate alınır

$$\frac{d\zeta}{ds_1} = \pm e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)} \frac{d\phi}{ds_1}$$

olmak üzere

$$d\zeta = \pm e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)} d\phi$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat biter.

Sonuç 4.13. (α, β) Mannheim eğri çiftine (ζ, ϕ) spinor çifti karşılık gelsin. (α) bir helis olmak üzere $d\zeta$ ve $d\phi$ arasındaki açı $\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)$ dür.

Sonuç 4.14. (α, β) Mannheim eğri çiftine (ζ, ϕ) spinorları karşılık gelsin. O halde, (α) Mannheim eğrisi bir helis eğrisi ise

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{\kappa}{2 \sin \gamma} e^{-i\gamma} \hat{\zeta}$$

eşitliği vardır.

İspat: (α) Mannheim eğrisi bir helis eğrisi olsun. Bu durumda $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \gamma = sbt$ olmak üzere sabit γ açısı vardır. O halde, $\tau = \kappa \cot \gamma$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{d\zeta}{ds} = \left(\frac{\tau - i\kappa}{2} \right) \hat{\zeta}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{ds} &= \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} - i \right) \hat{\zeta} \\ &= \frac{\kappa}{2 \sin \gamma} (\cos \gamma - i \sin \gamma) \hat{\zeta} \\ &= \frac{\kappa}{2 \sin \gamma} e^{-i\gamma} \hat{\zeta} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi $\alpha(s) = \left(3 \cos \frac{s}{5}, 3 \sin \frac{s}{5}, \frac{4}{5}s \right)$ olarak alınsın.

Bu durumda Denk. 2.4 göz önüne alınırsa birim hızlı (α) eğrisinin $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \vec{T}(s) &= \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, 4 \right) \\ \vec{N}(s) &= \left(-\cos \frac{s}{5}, -\sin \frac{s}{5}, 0 \right) \\ \vec{B}(s) &= \frac{1}{5} \left(4 \sin \frac{s}{5}, -4 \cos \frac{s}{5}, 3 \right) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Denk. 4.23 göz önüne alınıp Denk. 2.2 kullanılırsa (α) eğrisinin κ ve τ Frenet eğrilikleri

$$\kappa = \frac{3}{25}, \quad \tau = \frac{4}{25}$$

olarak bulunur.

Şimdi (α) eğrisinin $\{\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}\}$ Frenet vektörlerine bir ζ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda Denk. 3.23 ve Denk. 4.23 göz önünde bulundurularak gerekli işlemler uygulandığında

$$\zeta_1 = \pm \sqrt{\frac{3+4i}{10}} e^{-i\frac{s}{10}}$$

$$\zeta_2 = \pm \sqrt{\frac{3+4i}{10}} e^{i\frac{s}{10}}$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$\zeta = \pm \sqrt{\frac{3+4i}{10}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{s}{10}} \\ e^{i\frac{s}{10}} \end{pmatrix}$$

bulunur. Ayrıca Denk. 4.4'den

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{ds} &= \frac{\left(\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i\right)}{2} \zeta \\ &= \frac{(4-3i)}{50} \zeta \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi birim hızlı (α) Mannheim eğrisinin bir (β) Mannheim partner eğrisi olsun. (α) ve (β) eğrisinin karşılıklı $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında Denk. 3.1'den $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s)$ ilişkisi mevcuttur. Bu durumda birim hızlı olmayan (β) Mannheim partner eğrisi

$$\beta(s) = \left(\cos \frac{s}{5} (3-\lambda), \sin \frac{s}{5} (3-\lambda), \frac{4}{5}s \right)$$

olarak alınabilir. Burada $\lambda = sbt$ olduğundan özel olarak $\lambda = 2$ alınsın. Bu durumda (β) eğrisi

$$\beta(s) = \left(\cos \frac{s}{5}, \sin \frac{s}{5}, \frac{4}{5}s \right)$$

şeklinde bulunur. (β) eğrisinin $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ Frenet vektörleri

$$\vec{T}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(-\sin \frac{s}{5}, \cos \frac{s}{5}, 4 \right)$$

ve $\|\beta'\| = \left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| = \frac{ds_1}{ds}$ olduğundan

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{17}}{5}$$

bulunur. Ayrıca $\vec{N} = -\vec{B}_1$ olduğundan

$$\vec{B}_1 = \left(\cos \frac{s}{5}, \sin \frac{s}{5}, 0 \right)$$

dır. Dolayısıyla $\vec{B}_1 \wedge \vec{T}_1 = \vec{N}_1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\vec{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4 \sin \frac{s}{5}, -4 \cos \frac{s}{5}, 1 \right)$$

olarak bulunur. Buradan gerekli işlemler yapıldığında

$$\kappa_1 = \frac{1}{17} \text{ ve } \tau_1 = \frac{4}{17}$$

olarak bulunur.

Şimdi (β) eğrisinin $\{\vec{B}_1, \vec{T}_1, \vec{N}_1\}$ Frenet vektörlerine bir ϕ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda Denk. 3.23 ve Denk. 4.23 göz önünde bulundurularak gerekli işlemler uygulandığında

$$\phi_1 = \pm \sqrt{\frac{4-i}{2\sqrt{17}}} e^{-i\frac{s}{10}}$$

$$\phi_2 = \pm \sqrt{\frac{4-i}{2\sqrt{17}}} e^{i\frac{s}{10}}$$

ve buradan

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{4-i}{2\sqrt{17}}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{s}{10}} \\ e^{i\frac{s}{10}} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Ayrıca Sonuç 4.1'den $\frac{d\phi}{ds} = \frac{\|\beta'\|}{2} (\kappa_1 \phi + \tau_1 \hat{\phi})$ eşitliği kullanılırsa $\frac{d\phi}{ds}$ spinoru

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{10\sqrt{17}} (\phi + 4\hat{\phi})$$

şeklinde elde edilir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde, üç boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğri çiftinin spinor gösterimleri incelenmiştir. Bunun için ilk olarak spinorlar tanımı verilmiştir. Sonra üç boyutlu Öklid uzayında bulunan bir eğrinin Frenet vektörleri ve eğriliklerinin spinor formülasyonları verilmiştir. Verilen bilgiler göz önüne alınarak üç boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğri çiftinin her birine $\mathbb{C}^2$ uzayının elemanları olan spinorlar karşılık getirilerek Mannheim eğri çiftinin spinor formülü elde edilmiştir. Daha sonra Mannheim eğri çiftine karşılık gelen spinorlar arasındaki ilişkiler teoremler ile verilmiştir. Son olarak bir örnek verilmiştir.

Bu tez çalışmasından yola çıkılarak bundan sonra yapılacak çalışmalarda üç boyutlu Öklid uzayında diğer eğri çiftlerinin spinor formülasyonları elde edilebilir. Ayrıca, Minkowski uzayında Mannheim eğri çiftinin spinor gösterimi araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Akyiğit, M., Ersoy, S., Özgür, I., and Tosun, M., (2011) “Generalized Timelike Mannheim Curves in Minkowski Space-time” *Mathematical Problems in Engineering*, 1, 1-19.
- Azak, A. Z., (2009) “Üç Boyutlu Lorentz Uzayında Timelike Mannheim Eğri Çifti Üzerine”, *Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi*, (11), 35-45.
- Balcı, Y., Erişir, T. and Güngör, M. A., (2015) “Hyperbolic Spinor Darboux Equations of Spacelike Curves in Minkowski 3-Space”, *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, 28(4), 535-535.
- Cartan, E., (1966) “The Theory of Spinors”, *Dover Publications*, New York, 1-157.
- Del Castillo, G. F. T. and Barrales, G. S., (2004) “Spinor Formulation of the Differential Geometry of Curves”, *Revista Colombiana de Matemáticas*, 38, 27-34.
- Delanghe, R., Sommon, F., Soucek, V., (1966) “Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions: A function Theory for The Dirac Operator”, *Dover Publications*, New York.
- Dirac, P. A. M., (1928) “The Quantum Theory of The Electron”, *Proceeding of the Royal Society A*, 117(778), 610-624.
- Erişir, T., Güngör, M. A. and Tosun, M. (2015) “Geometry of the Hyperbolic Spinors Corresponding to Alternative Frame”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(4), 799-810.
- Erişir, T. and Kardağ, N. C., (2019) “Spinor Representations of Involute Evolute Curves in $\mathbb{E}^3$ ”, *Fundam J. Math Appl.*, 2(2), 148-155.
- Erişir, T., (2021) “On Spinor Construction of Bertrand Curves”, *AIMS Mathematics*, 6(4), 3583-3591.

- Ersoy, S., Tosun, M. and Matsuda, H., (2012) “Generalized Mannheim Curves in Minkowski Space-time $\mathbb{E}_1^4$ ”, **Hokkaido Mathematical Journal**, 41(3), 441-461.
- Goldstein, H. (1980) “Classical Mechanics”, 2nd ed., **Addison-Wesley, Reading, Mass.**
- Güngör, M. A. and Tosun, M., (2010) “A Study on Dual Mannheim Partner Curves”, **International Mathematical Forum**, 5,7,47, 2319-2330.
- Hacısalıhoğlu, H. H., (1983) “Diferensiyel Geometri”, **Fen Fakültesi Yayınları**, Ankara Üniversitesi, Cilt I.
- Ketenci, Z., Erişir, T. and Güngör M. A., (2015) “ A Construction of Hyperbolic Spinors According to Frenet Frame in Minkowski Space”, **Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories**, 13(2), 179-193.
- Kiş, İ. and Tosun, M., (2015) “Spinor Darboux Equations of Curves in Euclidean 3-Space”, **Mathematica Moravica**, 19(1), 87-93.
- Landau, L.D. and Lifshitz, E. M., (1977) “Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)”, **Pergamon Press**, Oxford.
- Liu, H. and Wang, F., (2008) “Mannheim Partner Curves in 3-Space”, **Journal of Geometry**, 88(1-2), 120-126.
- Matsuda, H. and Yorozu, S., (2009) “On Generalized Mannheim Curves in Euclidean 4-Space”, **Nihonkai Math. J.**, 20, 33-56.
- Orbay, K. and Kasap, E., (2009) “On Mannheim Partner Curves in $\mathbb{E}^3$ ”, **International Journal of the Physical Sciences**, 4(5), 261-264.
- Pauli, W., (1927) “Zur Quantenmechanik des Magnetischen Elektrons”, **Zeitschrift für Physik**, 43, 601-623.
- Payne, W. T. (1952) “Elementary Spinor Theory”, **American Journal of Physics**, 20, 253.

- Sabuncuoğlu, A., (2014) “Diferensiyel Geometri”, *Nobel Yayın Dağıtım*, Ankara.
- Sattinger, D. H. and Weaver, O. L. (1986) “Lie Groups and Algebras with Applications to Physics”, *Geometri and Mechanics, Springer-Verlang*, Newyork.
- Şenyurt, S. and Bektaş, Ö., (2012) “Timelike-Spacelike Mannheim Partner Curves in $\mathbb{E}^3$ ”, *International Journal of the Physical Sciences*, 7(1), 100-106.
- Ünal, D., Kişi, İ. and Tosun, M., (2013) “Spinor Bishop Equation of Curves in Euclidean 3-Space”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 757-765.
- Vivarelli, M. D., (1984) “Development of Spinor Descriptions of Rotational Mechanics from Euler’s Rigid Body Displacement Theorem”, *Celestial Mechanics*, 32 193-207.
- Wachter, A., (2011) “Relativistic Quantum Mechanics”, *Springer*, Dordrecht.
- Wang F. and Liu, H., (2007) “Mannheim Partner Curves in 3-Euclidean Space”, *Mathematics in Practice and Theory*, vol.37, 141-143.
- Yüce, S., (2017) “Öklid Uzayında Diferensiyel Geometri”, *Pegem Akademi*, Ankara.

EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Erişir, T. and İsabeyoğlu, Z., (2021) “Mannheim Curves in Euclidean Space and Spinors”, *5th International Mardin Artuklu Scientific Researches Conference*, Mardin, 15-16 January.

