

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÖKLİDYEN UZAYLARIN HELİS ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Musab Safa ÖZKAN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr.Öğr.Üyesi Sema KAZAN

ŞUBAT 2021

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÖKLİDYEN UZAYLARIN HELİS ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Musab Safa ÖZKAN
(36173614019)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr.Öğr.Üyesi Sema KAZAN

ŞUBAT 2021

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren, öneri ve desteklerini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Dr.Öğr.Üyesi Sema KAZAN' a, lisansüstü öğrenimim boyunca beni yönlendiren Sayın Prof.Dr. Sadık Keleş' e, çalışmalarımı yapmak için her türlü imkânı sağlayan bölüm başkanım Prof.Dr. A. İhsan Sivridağ'a, bu süreçte değerli zamanını ve bilgilerini sunan değerli hocam Prof.Dr. Bayram Karadağ' a ve bölümdeki diğer hocalarıma, manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen anneme, babama ve çalışmalarım boyunca gösterdiği destek ve sonsuz güveninden dolayı Sevgili eşim Merve' ye, ayrıca canım oğlum Hasan Ege'ye

teşekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Öklidyen Uzayların Helis Altmanifoldları Üzerine ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Musab Safa ÖZKAN



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	iv
ONUR SÖZÜ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Eğriler ve Riemann Manifoldları.....	4
2.2 Çarpım Manifoldları.....	20
3. HELİS HİPERYÜZEYLERİ.....	22
4. YÜKSEK BOYUTLU ÖKLİD HELİS ALTMANİFOLDLARI.....	31
4.1 ÖKLİDYEN UZAYLARIN HELİS ALTMANİFOLDLARI.....	31
4.2 HELİS ALTMANİFOLDLARININ ÇARPIMI.....	36
5. HELİS ALTMANİFOLDLARININ YAPISI.....	39
5.1 $\mathbb{R}^n$ NİN HELİS EĞRİLERİ.....	39
5.2 REGLE HELİSLER.....	44
5.3 MİNİMAL REGLE HELİSLER.....	47
6. HELİS HİPERYÜZEYLERİ İÇİN TENSÖR ÇARPIMLARI.....	50
7. SONUÇ.....	56
KAYNAKLAR.....	57
ÖZGEÇMİŞ.....	60

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu vektör uzayı,
E^n	: n-boyutlu Öklidyen uzayı,
$T_p M$	: M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
II	: İkinci temel form
A_V	: Weingarten temel tensörü
κ	: Eğrinin eğriliği
τ	: Eğrinin torsiyonu
ξ	: Birim normal vektör alanı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖKLİDYEN UZAYLARIN HELİS ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE

MUSAB SAFA ÖZKAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

60+ix sayfa

2021

Danışman: Dr.Öğr.Üyesi Sema KAZAN

Bu tez, altı alt bölümden oluşmuştur. İlk bölümde literatör taraması yapılırken, ikinci bölümde ana konuya temel olan tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeyleri incelenmiştir. Birim hızlı düzlemsel bir eğriden elde edilen helis hiperyüzeyi için eğriliklere bakılmış, ardından $\mathbb{R}^3$ te verilen eğrilerin Darboux çatıları gözönüne alınarak incelemeler yapılmış ve $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeylerinin Gauss dönüşümü verilmiştir.

Dördüncü bölümde, *Yüksek Boyutlu Öklid Altmanifoldları* başlığı altında Öklidyen uzayların helis altmanifoldları çalışılmıştır. Ayrıca bu bölümde, helis altmanifold kavramı verilmiş ve bu manifoldların çarpımı incelenmiştir.

Beşinci bölümde, helis altmanifoldların yapısına bakılmış ve minimal regle helisler çalışılmıştır.

Son bölümde ise, helis hiperyüzeyleri ve düzlemsel eğrilerin tensör çarpımlarının karakterizasyonlarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Öklidyen Uzay, Helis Hiperyüzeyler, Altmanifold

ABSTRACT

Master Thesis

ON HELIX SUBMANIFOLDS OF EUCLIDEAN SPACES

Musab Safa ÖZKAN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

60+ix pages

2021

Supervisor: Asst.Prof. Sema KAZAN

This thesis consists of six chapter. While the literature review is done in the first chapter, definitions and theorems which are the basis of the main subject are given in the second chapter.

In the third chapter, firstly helix hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ are investigated. The curvatures of a helix hypersurface obtained from a unit speed curve are studied. After, considering the Darboux frames of the curves given in $\mathbb{R}^3$, investigations are made and Gaussian map of the helix hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ is given.

In the fourth chapter, under the title *Yüksek Boyutlu Öklid Altmanifoldları*, helix submanifolds of Euclidean spaces are studied. Also, the notion of helix submanifold is given and the product of these manifolds is investigated in this chapter.

In the fifth chapter, the construction of helix submanifolds is examined and minimal ruled helices are studied.

In the last chapter, characterizations of tensor products of helix hypersurfaces and planar curves are studied.

Keywords: Euclidean Space, Helix Hypersurfaces, Submanifold

1. GİRİŞ

Eğrilerin ve yüzeylerin, diferansiyel geometrisinin iki yüzü vardır; klasik diferansiyel geometri olarak adlandırılabilir olan yüzü, diferansiyel ve integral hesabın başlangıcıyla birlikte ortaya çıkmıştır, diğer yüzü ise yaygın (global) diferansiyel geometri olarak adlandırılır [1]. Bu tezde, ikinci kısımdan çalışmalar yürütülecektir.

Regüler eğri karakterizasyonu, diferansiyel geometrideki eğri çalışmalarında en önemli problemlerden biridir ki problemin çözümünde eğrilik (κ) ve torsiyon (τ) büyük rol oynar. Eğer κ , sıfır ise eğri bir doğrudan ibarettir. κ , sıfırdan farklı fakat τ , sıfır ise eğri düzlemseldir. Eğer κ , sabit ve τ , sıfır ise eğri, yarıçapı $\frac{1}{\kappa}$ olan bir çember belirtir. 1845 yılında B. de Saint Venant, 1802 de M. A. Lancret tarafından helislerle ilgili verilen bir sonucu ispatlamıştır: "*Bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}$ nin sabit olmasıdır.*" Eğer κ , sabit (> 0) ve τ , sabit ($\neq 0$) ise eğriye dairesel helis denir.

Bu bağlamda helis eğrileri gerek doğada gerekse bilimde etkileyici yer tutmaktadırlar. Fraktal geometri, DNA'nın yapısındaki moleküllerin dizilişi bunlara birer örnektir.

Ayrıca, helis eğrileri gibi helis yüzeyleri ve helis hiperyüzeyleri de ilgi çekici olmuştur. Örneğin, Öklidyen uzayın helis altmanifoldları, son zamanların önemli çalışma konularından biridir ve ilk olarak 2009 yılında, Di Scala ve Ruiz-Hernández tarafından çalışılmıştır. [2] de yazarlar, Öklid uzaylarının helis altmanifoldlarını incelemişlerdir. Burada helis hiperyüzeylerinin nasıl inşaa edileceğini vermişler, özellikle de helis hiperyüzeylerinin bir yerel sınıflandırmasını elde etmişlerdir.

Biliyoruz ki bir hiperyüzeyin helis hiperyüzey olması için, bir birim vektör alanı ile hiperyüzeyin tanjant uzayı arasındaki açının sabit olması gerekmektedir. Yani, $M \subset \mathbb{R}^n$ bir hiperyüzey ve $d \neq 0$, $\mathbb{R}^n$ de bir birim vektör alanı olmak üzere, eğer her bir $q \in M$ noktası için d ve $T_q M$ arasındaki açı sabit ise M ye bir helis hiperyüzey denmektedir.

[2] de yazarlar, helis hiperyüzeylerini oluştururlarken $\mathbb{R}^n$ de M hiperyüzeyini ve M nin $\nu(M)$ normal demetini göz önüne almışlardır. Burada, $\xi : M \rightarrow \nu(M)$ birim normal vektör alanı için M boyunca $\langle d, \xi \rangle$ nin sabitliğini incelemişlerdir.

Diğer taraftan, [3] de yazarlar, eikonal kısmi diferansiyel denklemlerle helis manifoldları arasındaki ilişkiyi vermişler ve doğrusal helis altmanifoldlarını karakterize etmişlerdir.

Helis altmanifoldları pek çok yazar tarafından çalışılmıştır. Örneğin, [4] de Ruiz-Hernández, bir gölge sınır olarak helis altmanifoldlarını elde etmiştir. Buna göre eğer gölge sınır, altmanifold üzerinde tamamen geodezik ise altmanifold bir helis altmanifolddur.

Öte yandan, Cermelli ve Di Scala, "Constant-angle surfaces in liquid crystals" isimli çalışmalarında sıvı kristallerin interfaz fiziki ile ilgili olan helis hiperyüzeyleri çalışmışlardır [5]. [6] da, Zıplar ve arkadaşları helis hiperyüzeylerini ve özel eğrileri incelemişlerdir. [7] da yazarlar, Öklidyen uzaylarda helis yüzeylerini çalışmışlardır.

Helislerle ilgili detaylı bilgi için [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20] makalelerine bakılabilir.

1993 de B.Y. Chen, verilen bir Riemann manifoldunun iki immersiyonunun tensör çarpım immersiyonunu çalışmıştır. Chen'nin tanımından yararlanarak F. Decruyenaere ve arkadaşları, diferensiyel manifoldların iki immersiyonunun tensör çarpımını vermiştir, bu belirli şartlar altında çarpım manifoldunun bir immersiyonunu ortaya çıkarmıştır [21]. [22] de, Öklidyen düzlemsel eğrilerin tensör çarpım yüzeyleri incelenmiştir. Ayrıca [23] de yazarlar, bir Öklidyen uzay eğrisi ile bir Öklidyen düzlemsel eğrinin tensör çarpım yüzeylerini çalışmışlardır. Ve A. Aksoy doktora tezinde, Öklidyen uzayda bir yüzey ve Öklidyen düzlemde bir eğrinin tensör çarpımlarını incelemiştir [24].

Bu tez, altı bölümden oluşmuştur:

İlk bölümde literatör taraması yapılırken, ikinci bölümde, ana konuya temel olan tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeyleri incelenmiştir. Birim hızlı düzlemsel bir eğriden elde edilen helis hiperyüzeyi için eğriliklere bakılmış, ardından $\mathbb{R}^3$ de verilen eğrilerin Darboux çatıları gözönüne alınarak incelemeler yapılmış ve $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeylerinin Gauss dönüşümü verilmiştir.

Dördüncü bölümde, *Yüksek boyutlu Öklid altmanifoldları* başlığı altında Öklidyen uzayların helis altmanifoldları çalışılmıştır. Bu bölümde, helis altmanifold kavramı verilmiş ve bu manifoldların çarpımı incelenmiştir.

Beşinci bölümde, helis altmanifoldların yapısına bakılmıştır ve minimal regle helisler çalışılmıştır.

Son bölümde ise, helis hiperyüzeyleri ve düzlemsel eğrilerin tensör çarpımlarının karakterizasyonlarına yer verilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde eğriler ve Riemann manifoldları ve onların üzerindeki diferansiyel yapılar tanıtılmaktadır. İkinci alt bölümde çarpım manifoldları incelenmektedir.

2.1 Eğriler ve Riemann Manifoldları

2.1.1.Tanım. E^n üzerinde bir $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ reel fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tV) - f(p)}{t}, V \in E^n$$

limiti mevcut ise bu limit değerine f nin $p \in E^n$ noktasında ve V yönündeki türevi denir. Bu türev

$$V_p[f] = df(V_p) = \frac{d}{dt}(f(p+tV))|_{t=0}$$

şeklinde gösterilir [25].

2.1.2.Tanım. M bir manifold ve $m \in M$ olsun.

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) = \{f | f : U \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^\infty(U)\}$$

cümlesini ele alalım. Bir

$$V_m : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f \rightarrow V_m[f] = \sum_{i=1}^n v_i|_m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_m$$

dönüşümü için $\sigma, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$1. V_m(\sigma f + \beta g) = \sigma V_m[f] + \beta V_m[g]$$

$$2. V_m(fg) = V_m[f]g(m) + f(m)V_m[g]$$

özellikleri sağlanıyorsa V_m fonksiyonuna M nin m noktasındaki tanjant vektörü denir [26].

M manifoldunun bir $m \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini

$$T_m M = \{V_m | V_m : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ile gösterelim. Bu cümle

$$\begin{aligned} (+) : T_m M \times T_m M &\rightarrow T_m M \\ (V_m, W_m) &\rightarrow V_m + W_m : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (V_m + W_m)[f] &= V_m[f] + W_m[f] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (.) : \mathbb{R} \times T_m M &\rightarrow T_m M \\ (\sigma, V_m) &\rightarrow \sigma V_m : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (\sigma V_m)[f] &= \sigma V_m[f], \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

işlemlerine göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu uzaya M nin m noktasındaki tanjant uzayı denir [26].

$V_p = (v_1, \dots, v_n)|_p \in T_p(E^n)$ verilmiş olsun. Bu durumda

$$V_p[f] = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} |_p = \langle \nabla f |_p, V_p \rangle$$

dir, burada $x_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ koordinat fonksiyonudur.

2.1.3.Tanım. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ noktasına $X_p \in T_p M$ tanjant vektörünü karşılık getiren dönüşüme vektör alanı denir.

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

tanjant demeti olsun, bu durumda

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM \\ p &\rightarrow X_p \end{aligned}$$

dönüşümüne vektör alanı adı verilir. Böylece bir p noktasındaki tanjant vektör

$$\begin{aligned} X_p &= \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} |_p \\ X(f) &= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla X vektör alanı M üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesinden fonksiyonların kümesine bir dönüşümdür. $X(f)$ diferensiyellenebilir ise X vektör alanına da diferensiyellenebilirdir denir [26].

2.1.4.Tanım. M bir Hausdorff uzay olsun. $\forall p \in M$ için M de $E^n (n \geq 0)$ ye homeomorf olan bir U açık komşuluğu bulunabilirse M ye n -boyutlu topolojik manifold denir [27]. Burada, $n = 0$ ise M bir tek nokta belirtir [28].

2.1.5.Tanım. M , n -boyutlu topolojik manifold ve U , M nin açık bir altcümlesi olsun. Eğer U bir Ψ homeomorfizmi ile E^n nin bir W alt cümlesine eşlenebiliyorsa (U, Ψ) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu denir.

$p \in U$ için $\Psi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ $x_i(p) \in \mathbb{R} \ 1 \leq i \leq n$ dır. Burada $x_i(p)$ reel sayısına $\Psi(p)$ noktasının i.koordinatı denir.

$x_i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna da i.koordinat fonksiyonu denir. Ψ fonksiyonu bir homeomorfizm olduğundan koordinat fonksiyonları da süreklidir. Hatta $\Psi(p)$ birebir olduğundan $p, q \in U$ noktaları için $x_i(p) = x_i(q) \Rightarrow p = q$ dır. Bu demektir ki $p \in U$ noktasında $(x_1(p), \dots, x_n(p))$ reel sayılarına $p \in U$ noktasının (U, Ψ) koordinat komşuluğuna göre lokal koordinatları ve U üzerinde tanımlı olan $(x_1, \dots, x_n)$ reel değerli fonksiyon n -lisine de (U, Ψ) üzerindeki lokal koordinat sistemi denir [27].

2.1.6.Tanım. M bir n -boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\sigma\}$ olsun. U_σ açık cümlelerinin σ indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\sigma\}$ örtüsü için $\{U_\sigma\}_{\sigma \in A}$ yazalım. E^n de U_σ ya homeomorf olan bir açık cümle E_σ ve $\Psi_\sigma : U_\sigma \rightarrow E_\sigma$ olsun. Koordinat komşuluklarının $\{(U_\sigma, \Psi_\sigma)\}_{\sigma \in A}$ koleksiyonuna bir atlas (veya koordinat komşuluğu sistemi) denir [27].

2.1.7.Tanım. M bir n -boyutlu manifold ve $S = \{(U_\sigma, \Psi_\sigma)\}_{\sigma \in A}$, M nin bir atlası olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise S ye $C^r, r \geq 1$ sınıftandır denir. $U_\sigma \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \sigma, \beta \in A$ için

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma\beta} &= \Psi_\sigma \circ \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta(U_\sigma \cap U_\beta) \rightarrow \Psi_\sigma(U_\sigma \cap U_\beta) \\ \Phi_{\beta\sigma} &= \Psi_\beta \circ \Psi_\sigma^{-1} : \Psi_\sigma(U_\sigma \cap U_\beta) \rightarrow \Psi_\beta(U_\sigma \cap U_\beta)\end{aligned}$$

fonksiyonları C^r sınıftandır. Eğer S atlası M üzerinde C^r sınıftandır ise S ye C^r sınıftandır bir diferensiyel yapı denir [27].

2.1.8.Tanım. M bir n -boyutlu topolojik manifold ve M nin C^r sınıftandır atlası S olsun. Bu durumda M ye diferensiyellenebilir manifold denir [27].

2.1.9.Tanım. M bir n -manifold olsun. $T_x M$ tanjant uzayının bir bazına $x \in M$ noktasında bir çatı denir. Bir (lokal hareketli) çatı $\{X_i\}$ ($i = 1, \dots, n$), her $x \in M$ için $T_x M$ nin bir bazını veren C^∞ vektör alanlarından oluşan bir sistemdir [26].

2.1.10.Tanım. M ve B manifoldları arasında bir

$$\pi : M \rightarrow B$$

C^∞ dönüşümünün türev dönüşümü

$$d\pi : \chi(M) \rightarrow \chi(B)$$

biçiminde gösterilir. Bu dönüşüm her $x \in M$ noktasında

$$d\pi_x : T_x M \rightarrow T_{\pi(x)} B$$

lineer dönüşümünü verir ve buna da π nin x noktasındaki türev dönüşümü denir [26].

2.1.11.Tanım. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanları X ve Y olsun. Bir $f \in C^\infty(M)$ için

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanan $[,]$ fonksiyonuna X ve Y nin Lie (parantez) operatörü denir. Lie operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar [29]:

$X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $f, g \in C^\infty(M)$ olmak üzere

1. $[X, Y] = -[Y, X]$
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ dir.

2.1.12.Tanım. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. $X, Y, Z \in \chi(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ olmak üzere,

1. $g(X, Y) = g(Y, X)$
2. $g(X, X) \geq 0, \forall X$ için $g(X, X) = 0 \iff X = 0$

3. Bilineer;

$$g(aX + bY, Z) = ag(X, Z) + bg(Y, Z)$$

$$g(X, aY + bZ) = ag(X, Y) + bg(X, Z)$$

şartları sağlanıyorsa, g dönüşümüne Riemann metriği (veya metrik tensör) ve (M, g) ikilisine de Riemann manifoldu adı verilir [25].

2.1.1. Teorem. M bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerindeki metrik tensörün ifadesi;

$$\langle, \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j \quad (2.1.1)$$

veya

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \frac{d(x_i \circ \sigma)}{dt} \frac{d(x_j \circ \sigma)}{dt}$$

dır [26].

Burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ ile M nin bir koordinat komşuluğundaki koordinat fonksiyonları gösterilmektedir.

2.1.13. Tanım. M , metrik tensörü $\langle, \rangle$ olan bir Riemann manifoldu olsun. $a, b \in I$ olmak üzere $\{I, \sigma\}$ atlası ile verilen eğri T ise $\sigma(I) \subset M$ eğrisinin $\sigma(a)$ dan $\sigma(b)$ ye kadar olan yayın uzunluğu

$$|\sigma|_a^b = \int_a^b \sqrt{\langle T(t), T(t) \rangle} dt, \quad t \in I \quad (2.1.2)$$

olarak tanımlanır [25].

2.1.14. Tanım. Bir $f \in \mathcal{F}(M)$ fonksiyonunun $grad f$ gradiyenti metrik olarak $df \in \chi^*(M)$ diferensiyeline denk olan vektör alanıdır. Buna göre $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\langle grad f, X \rangle = df(X) = X(f)$$

dir. $(x^1, \dots, x^n)$ lokal koordinatlarda $grad f$ vektör alanı

$$grad f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ile gösterilir [30].

2.1.15. Tanım. M , n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $X, Y \in \chi(M)$ olsun. Her $q \in M$ için

$$X_q = (x_1, \dots, x_n)|_q \in T_q M$$

dır. $y_i \in C^\infty(M, R)$ olmak üzere

$$y_i : M \rightarrow R, 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonları C^∞ sınıfından ise $Y = (y_1, \dots, y_n)|_q$ vektör alanı C^∞ sınıfındandır denir. Bu durumda,

$$\nabla_X Y = (X_q[y_1], \dots, X_q[y_n]) \quad (2.1.3)$$

ifadesine Y nin X e göre kovaryant türevi denir [25].

2.1.16.Tanım. M bir manifold ve M üzerinde tanımlı vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü

1. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
4. $\nabla_X (fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y$, $\forall f \in C^\infty(M)$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyonu denir [29].

2.1.17.Tanım. $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı I olmak üzere

$$\sigma : I \longrightarrow E^n$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna E^n de bir eğri denir [25].

2.1.1.Örnek: $I = (0, \pi)$ açık aralığı olmak üzere

$$\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \sigma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$$

fonksiyonunu $\mathbb{R}^2$ içinde bir eğridir. $\sigma(I)$, aynı zamanda bir yarı çemberdir.

$\forall t \in I$ için, $\sigma'(t) \neq 0$ oluyorsa bu eğriye regüler eğri denir.

E^n uzayında Öklidiyen koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \dots, x_n$ olmak üzere, bir $\sigma : I \rightarrow E^n$ eğrisi için $x_i \circ \sigma = \sigma_i$, $1 \leq i \leq n$ ve $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ olduğundan

$$\frac{d\sigma}{dt} = (\sigma'_1(t), \sigma'_2(t), \dots, \sigma'_n(t)) \quad , t \in I$$

biçiminde yazabiliriz [25].

2.1.18.Tanım. $M \subset E^n$ eğrisi (I, σ) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\sigma'\| : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \|\sigma'\|(t) = \|\sigma'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\sigma'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, σ) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu ve $\|\sigma'(t)\|$ reel sayısına da M nin (I, σ) koordinat komşuluğuna göre $\sigma(t)$ noktasındaki skaler hızı denir [25].

2.1.19.Tanım. M eğrisi (I, σ) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\sigma'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, σ) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir [25].

2.1.20.Tanım. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T(s) = \sigma'(s)$$

eşitliği ile belirli $T(s)$ vektörüne, σ eğrisinin $\sigma(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [31].

2.1.21.Tanım. T , I aralığının her bir s noktasına, $\sigma(s)$ noktasındaki $T(s)$ teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyondur. Buna göre T , σ eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına, σ eğrisinin birim teğet vektör alanı denir [31].

2.1.22.Tanım. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna, σ eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\sigma(s)$ noktasındaki eğriliği denir [31].

2.1.23.Tanım. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliği ile belirli $N(s)$ vektörüne, σ eğrisinin $\sigma(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) denir. N vektör alanına, σ eğrisinin birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı) denir [31].

2.1.24.Tanım. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile tanımlı $B(s)$ vektörüne, σ eğrisinin $\sigma(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir. B vektör alanına, σ eğrisinin ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı) denir.

Vektörel çarpımın özelliklerinden dolayı $B(s)$ vektörü, $T(s)$ ve $N(s)$ vektörlerinin her ikisine de diktir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesi pozitif yönlü bir çatıdır. Ayrıca her $s \in I$ için

$$\|B(s)\| = \|T(s)\| \|N(s)\| \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = 1$$

dir. Sonuç olarak $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesi $T_{\sigma(s)}(\mathbb{R}^3)$ uzayının ortonormal bir tabanıdır [31].

2.1.25.Tanım. $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine, $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\sigma(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri,

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

kümesine de σ eğrisinin $\sigma(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. Buna göre T , N , B vektör alanlarına, σ eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir [31].

2.1.26.Tanım. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T , N , B olmak üzere

$$\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna, σ eğrisinin burulma fonksiyonu, $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\sigma(s)$ noktasındaki burulması denir [31].

2.1.27.Tanım. $\mathbb{R}^n$ de bir eğri $\sigma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer, $\langle \sigma'(s), \sigma'(s) \rangle = 1$ ise, σ eğrisi birim hızlı bir eğri olarak adlandırılır. Burada, $\langle, \rangle$ ifadesi $\mathbb{R}^n$ deki standart skalar çarpımı göstermektedir. Her bir $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde verilir.

$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_n(s)\}$, σ eğrisi boyunca hareketli çatı (Frenet çatısı) olsun. Burada, V_i ler karşılıklı olarak ortogonal ve $\langle V_i, V_i \rangle = 1$. Bu taktirde σ nın Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} V_1' &= k_1 V_2 \\ V_{n-1}' &= -k_{n-2} V_{n-2} + k_{n-1} V_n \\ V_n' &= -k_{n-1} V_{n-1} \end{aligned}$$

formülleriyle verilir. Burada, $k_i(s)$ ler σ nın i . eğrilikleri olarak adlandırılır [32].

2.1.28.Tanım. $U, \mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$ kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir basit yüzey denir [31].

2.1.29.Tanım. $M, \mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subset M$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir [31].

2.1.30.Tanım. Z, M yüzeyinde birim dik vektör alanı olmak üzere, M nin bir p noktasında,

$$S_p(v_p) = -D_{v_p} Z$$

eşitliği ile tanımlı $S_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ fonksiyonuna, M yüzeyinin p noktasında, Z birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü (veya weingarten dönüşümü) denir [31].

2.1.31.Tanım. $v_p \neq 0$ ve $\langle S(v_p), v_p \rangle = 0$ ise, v_p vektörüne, p noktasında bir asimptotik vektör denir [31].

2.1.32.Tanım. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\sigma : I \rightarrow M$ bir regüler eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\sigma'(t)$ hız vektörü, $\sigma(t)$ noktasında M yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise σ eğrisine, M yüzeyi içinde bir asimptotik eğri denir [31].

2.1.33.Tanım. M, E^n de bir hiperyüzey olsun.

$$\begin{aligned} K : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow K(P) = \det S_P \end{aligned}$$

fonksiyonuna M nin gauss eğrilik fonksiyonu, $K(P) \in \mathbb{R}$ sayısına da M nin P noktasındaki Gauss eğriliği denir [33].

2.1.34.Tanım. M, E^n de bir hiperyüzey ve S, M nin şekil operatörü olsun.

$$\begin{aligned} H : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow H(P) = \frac{1}{n-1} \text{tr} S(P) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M nin ortalama eğrilik fonksiyonu, $H(P)$ sayısına da M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir [33].

2.1.35.Tanım. N bir $C^\infty (n-1)$ -manifold olsun.

$$f : N \rightarrow E^n$$

fonksiyonu bir immersiyon (f_* regüler) ise $f(N) = M$ manifolduna E^n nin bir hiperyüzeyi denir [25].

2.1.36.Tanım. E^n nin bir hiperyüzeyi M olsun. $\chi(M)^\perp$ in bir ortonormal bazı $\{N\}$ ise N ye M nin birim normal vektör alanı denir [25].

2.1.37.Tanım. E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri σ olsun. σ nın teğet vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı σ eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa σ eğrisine M üzerinde eğrilik çizgisi denir.

Bu tanıma göre M üzerindeki eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemi, $\lambda \neq 0$ bir skaler olmak üzere,

$$S(T) = \lambda(T)$$

dir [25].

2.1.38.Tanım. $\mathbb{R}^3$ öklidyen 3-uzayındaki bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ olsun. σ eğrisi boyunca $\{T, Y = T \times N, N\}$ çatısını göz önüne alalım. Burada T, σ nın teğet vektör alanı ve N, M üzerinde bir birim normal vektör alanıdır. Bu taktirde, $\{T, Y, N\}$ çatısı M ye göre σ nın Darboux çatısı olarak ve T, Y, N vektör alanları M ye göre σ nın Darboux vektör alanları olarak adlandırılır. Bu çatının Darboux denklemleri de

$$\begin{aligned} T' &= k_g Y + k_n N \\ Y' &= -k_g T + \tau_g N \\ N' &= -k_n T - \tau_g Y \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada k_n, M üzerindeki σ nın normal eğriliği, k_g, σ nın geodezik eğriliği ve τ_g, σ nın geodezik torsiyonu olarak adlandırılır [31].

2.1.39.Tanım. M bir diferansiyellenebilir manifold ve bir $p \in M$ noktasındaki teğet vektörlerinin uzayı $T_p M$ olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye

$$X : M \longrightarrow \cup_{p \in M} T_p M$$

olarak tanımlanan birebir ve örten X fonksiyonuna denir. M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir [32].

2.1.40.Tanım. Reel sayılar cismi üzerinde r -tane vektör uzayı $V_1, V_2, \dots, V_r$ olsun. $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $1 \leq i \leq r$ için

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, av_i + bv_i, v_{i+1}, \dots, v_r) = af(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_r) + bf(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_r)$$

şeklinde tanımlı ise f ye r -lineer fonksiyon denir [25].

2.1.41.Tanım. $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye bütün r -lineer fonksiyonlarının cümlesini

$$L(V_1, \dots, V_r; \mathbb{R}) = \{f | f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla $\forall (u_1 \dots u_r) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ için

$$(f_1 + f_2)(u_1, \dots, u_r) = f_1(u_1, \dots, u_r) + f_2(u_1, \dots, u_r)$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(\lambda f)(u_1, \dots, u_r) = \lambda f(u_1, \dots, u_r)$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki işleme göre $L(V_1, \dots, V_r; \mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, \dots, V_r^*$ dual vektör uzaylarının tensörel çarpımı denir ve

$$L(V_1, V_2, \dots, V_r) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına r . dereceden bir tensör denir.

$$V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_r$$

ise $V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$ uzayına bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da r . mertebeden bir kovaryant tensör denir, $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir [25].

2.1.2.Teorem. M Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir ∇ konneksiyonu vardır [30].

1. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$
2. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

Teoremdede verilen ∇ konneksiyonuna metrik konneksiyon veya Levi-Civita konneksiyonu denir. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, R)$ için

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
2. $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
3. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$
4. $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$
5. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
6. $Z(\langle X, Y \rangle) = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$

dir [25].

M bir Riemann manifoldu ve ∇ Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

dır. (2.1.4) denkleminde Koszul özdeşliği adı verilir [34].

2.1.42.Tanım. M , n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve g de M nin Riemann metriği olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z \\ R_{XY}Z = R(X, Y)Z &= \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z \end{aligned}$$

olarak tanımlanan tensöre ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir [34].

2.1.43.Tanım. M bir Riemann manifoldu ve g de M nin metriği olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} K : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbf{R}) \\ (X, Y, Z, W) &\rightarrow K(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle \\ &= g(R(X, Y)Z, W) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde Riemann Christoffel eğrilik tensörü denir [25].

2.1.44.Tanım. Bir Riemann manifoldu M ve M üzerindeki Riemann konneksiyonu ∇ olsun. Aşağıdaki bağıntılar, M üzerinde geçerlidir [25]:

- (a) $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$
- (b) $K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W)$
- (c) $K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z)$
- (d) $K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y)$

dir.

2.1.45.Tanım. M ve $\bar{M}$ sırasıyla g ve $\bar{g}$ metrik tensörlerine sahip Riemann manifoldları olsun. Bu durumda her $p \in M$ için ϕ_{*p} birebir ise

$$\phi : M \rightarrow \bar{M}$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne immersiyon denir.

$\phi^*(\bar{g}) = g$ şartını sağlayan bir diferensiyellenebilir immersiyonuna da M nin $\bar{M}$ içine izometrik immersiyonu denir [30].

Bu tezde altmanifold kavramı izometrik immersiyon anlamında kullanılmaktadır.

2.1.46.Tanım. M ve $\bar{M}$ sırasıyla g ve $\bar{g}$ metrik tensörlerine sahip Riemann manifoldları olsun. Bu durumda her $q \in M$ için ψ_{*q} üzerine ise

$$\psi : M \rightarrow \bar{M}$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne submersiyon denir [30].

2.1.47.Tanım. $\bar{M}$, m –boyutlu bir Riemann manifoldu ve M , $\bar{M}$ ye immersed n –boyutlu bir başka Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M ye $\bar{M}$ nin Riemann altmanifoldu denir. $\bar{M}$ üzerindeki Riemann metriği $\bar{g}$ olsun, eğer $\forall X_p \in T_M(p)$ için

$$\bar{g}|_{f(p)}(f_*X_p, \xi) = 0$$

ise ξ vektörü $f(p)$ noktasında normaldir denir. Her bir $f(p)$ noktasında $\bar{M}$ ye normal olan bu cins $\xi_{f(p)}$ vektörlerinin cümlesine $\bar{M}$ üzerindeki normal vektör alanı denir. $\bar{M}$ de M nin birim normal vektörüne normal kesit denir. M üzerindeki bütün normal vektörlerin vektör demetini $T^\perp M$ ile göstereceğiz. Buna göre $\bar{M}$ nin $f(M)$ ye kısıtlanmış olan $T\bar{M}$ tanjant demeti; TM tanjant demeti ile $T^\perp M$ normal demetin direkt toplamına izomorfiktir. Böylece $\bar{M}$ ve M üzerindeki konneksiyonlar sırasıyla $\bar{\nabla}, \nabla$ olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y) \quad (2.1.5)$$

dır. Bu şekilde tanımlanan ∇ bir Riemann konneksiyonudur. Burada II

$$II : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M)$$

ile tanımlı normal demet değerli simetrik bilineer formdur. (2.1.5) denkleminde Gauss formülü ve II ya M nin ikinci temel formu denir. Şimdi $X \in \chi(M), V \in \chi^\perp(M)$ için $-A_V X, \nabla_X^\perp V$ ile $\bar{\nabla}_X V$ nin sırasıyla teğet ve normal kısımlarını gösterelim. Bu durumda

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^\perp V \quad (2.1.6)$$

yazabiliriz. Burada A_V lineer operatörüne normal kesite göre Weingarten temel tensörü ve (2.1.6) denkleminde de Weingarten formülü denir [27].

2.1.3.Teorem. $\bar{M}$ bir Riemann manifoldu ve M , $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. $\bar{M}$ ve M nin eğrilik tensörleri sırasıyla $\bar{R}, R$ ve M nin ikinci temel formu II olsun. Bu durumda $V, W, X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere Gauss denklemi

$$\begin{aligned} \langle R_{VW}X, Y \rangle &= \langle \bar{R}_{VW}X, Y \rangle + \langle II(V, X), II(W, Y) \rangle \\ &- \langle II(V, Y), II(W, X) \rangle \end{aligned}$$

dir [30].

2.1.48.Tanım. $\gamma : I \rightarrow M$ bir eğri olsun. Eğer $t_0 \in I$ noktasında $D_{\frac{d}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ oluyor ise γ eğrisi $t_0 \in I$ da jeodeziktir. Eğer $\gamma, \forall t \in I$ için t de jeodezik ise γ ya jeodeziktir denir [29].

2.1.49.Tanım. $\bar{M}$ bir Riemann manifoldu, M , $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu ve II , M nin ikinci temel formu olsun. Bu durumda $II = 0$ şartı sağlanıyorsa M ye total jeodeziktir denir [30].

Şimdi son bölümde kullanacağımız tensör çarpımlardaki iç çarpımı tanımlayacağız.

2.1.50.Tanım. E^m ve E^n iki Öklid uzayı ve $E^m \otimes E^n$, E^m ve E^n nin tensör çarpımı olsun. Bu durumda $E^m \otimes E^n$ üzerinde $\langle, \rangle$ iç çarpımı

$$\langle \sigma \otimes \beta, \gamma \otimes \delta \rangle = \langle \sigma, \gamma \rangle \langle \beta, \delta \rangle \quad (2.1.7)$$

ile verilir, burada $\langle \sigma, \gamma \rangle$, $\sigma, \gamma \in E^m$ nin Öklid iç çarpımını ve $\langle \beta, \delta \rangle$, $\beta, \delta \in E^n$ nin Öklid iç çarpımını gösterir ve E_*^n ile $E^n - \{0\}$ gösterilir [22].

2.1.1.Lemma. $E^m \otimes E^n$, E^m ve E^n nin tensör çarpımı olsun. Bu durumda $E^m \otimes E^n$, E^{mn} ye izometriktir [21].

İspat. $X = (x_1, \dots, x_m)$, $X' = (x'_1, \dots, x'_m) \in E^m$ ve $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $Y' = (y'_1, \dots, y'_n) \in E^n$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g_{E^m \otimes E^n}(X \otimes Y, X' \otimes Y') &= g_m(X, X') g_n(Y, Y') \\ &= \left(\sum_{i=1}^m x_i x'_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j y'_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i x'_i y_j y'_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i y_j) (x'_i y'_j) \\ &= g_{mn}(X \otimes Y, X' \otimes Y') \end{aligned}$$

elde edilir.

2.1.51.Tanım. M , E^3 te bir yüzey olsun. $\forall p \in M$ noktasında E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey denir. $p \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir [25].

2.1.52.Tanım. Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir [25].

2.1.53.Tanım. $\bar{M}$ Riemann manifoldu olsun. $\bar{M}$ üzerinde v -boyutlu total jeodezik yapraklara sahip $\{L\}$ C^1 -foliasyonu ile birlikte $\bar{M}$ manifoldunun bir M^{v+n} ($v, n > 0$) C^2 -altmanifolduna regle altmanifoldu denir [35].

2.1.54.Tanım. Bir $M \subset \mathbb{R}^n$ hiperyüzeyi ve $\mathbb{R}^n$ de bir $d \neq 0$ birim vektörü verilsin. Eğer her bir $q \in M$ için d ve $T_q M$ arasındaki açı sabitse, bu taktirde M , d sabit doğrultusuna göre bir helis olarak adlandırılır. Belirtelim ki, bu tanım M boyunca $\langle d, \xi \rangle$ çarpımının sabit olması gerçeğine denktir. Burada ξ , M üzerinde bir normal vektör alanıdır [32].

2.1.4.Teorem. $H \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbb{R}^{n-1}$ de yönlendirilebilir bir hiperyüzey ve η , H nin bir birim normal vektör alanı olsun. Bu taktirde,

$$f_\theta(x, s) = x + s(\sin(\theta)\eta(x) + \cos(\theta)d), f_\theta : H \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \theta = \text{sabit}$$

ifadesi $\mathbb{R}^n$ deki d sabit doğrultusuna göre bir helis hiperyüzeydir ($x \in H$, $s \in \mathbb{R}$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$). Burada $d = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ vektörü, η ve H ye ortogonal olacak şekildeki vektördür. Aynı zamanda, bu yüzeyin bir birim normal vektör alanı

$$\xi(x) = -\cos(\theta)\eta(x) + \sin(\theta)d$$

ile de verilir ($x \in H$) [32].

Yukarıdaki tanımdaki T ve ξ , M helis altmanifoldunun sırasıyla teğet ve normal doğrultuları ve d de M nin helis doğrultusu olarak adlandırılır. d birim olarak kabul edilecektir.

2.1.55.Tanım. $\sigma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi $\mathbb{R}^n$ de birim hızlı bir eğri ve X , $\mathbb{R}^n$ de birim bir sabit vektör alanı olsun. Bütün $s \in I$ lar için,

$$\langle V_1, X \rangle = \cos(\varphi), \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \varphi = \text{sabit}$$

ise, bu taktirde σ eğrisi $\mathbb{R}^n$ de bir genel helis olarak adlandırılır. Burada, V_1, σ nın birim teğet vektör alanı ve φ açısı, V_1 ve X vektör alanları arasındaki açıdır [32].

2.1.56.Tanım. $\sigma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ de birim hızlı bir eğri ve k_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) eğrilikleri sıfırdan farklı olsun. $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_n(s)\}$ de σ eğrisinin Frenet çatısını gösterebilir. Eğer n . birim vektör alanı V_n , $\mathbb{R}^n$ deki sabit bir birim X vektörü ile sabit bir φ açısı yapıyorsa, yani σ eğrisi boyunca

$$\langle V_n, X \rangle = \cos(\varphi), \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \varphi = \text{sabit}$$

ise, bu taktirde σ , bir V_n slant helis olarak adlandırılır [32].

2.1.1.Hatırlatma. $d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$ doğrultulu bir $M \subset \mathbb{R}^n$ helis altmanifoldu ve her $X \in TM$ için

$$\cos(\theta)\nabla_X T - \sin(\theta)A^\xi(X) = 0$$

$$\cos(\theta)V(X, T) + \sin(\theta)\nabla_X^\perp \xi = 0$$

sistemi sağlanır [32].

2.1.57.Tanım. $M \subset \mathbb{R}^n$, bir $d \in \mathbb{R}^n$ doğrultulu bir helis altmanifold olsun. M helisinin T teğet doğrultusunun integral eğrileri, M nin d ye göre helis çizgileri olarak adlandırılır.

Ayrıca, M nin bütün helis çizgileri düz çizgiler ise, $M \subset \mathbb{R}^n$ altmanifoldu bir çizgili helis olarak adlandırılır [32].

2.2 Çarpım Manifoldları

2.2.1.Tanım. M ve N Riemann Manifoldları olsun. Bu durumda M ve N manifoldlarının kartezyen çarpımı olan $M \times N$ de bir Riemann manifoldudur. Üstelik aşağıdaki özellikler geçerlidir [30];

(a)

$$\pi : M \times N \rightarrow M$$

$$(p, q) \rightarrow p$$

$$\sigma : M \times N \rightarrow N$$

$$(p, q) \rightarrow q$$

izdüşümleri C^∞ dönüşümlerdir ve bu dönüşümler submersiyondur.

(b) Bir $\phi : P \rightarrow M \times N$ dönüşümünün C^∞ olması için gerek ve yeter şart hem $\pi \circ \phi$ hem de $\sigma \circ \phi$ dönüşümlerinin C^∞ olmasıdır.

(c) Herbir $(p, q) \in M \times N$ için

$$M \times q = \{(r, q) \in M \times N : r \in M\}$$

$$p \times N = \{(p, r) \in M \times N : r \in N\}$$

alt kümeleri $M \times N$ nin altmanifoldlarıdır.

(d) Herbir $(p, q) \in M \times N$ için

$$\pi|_{M \times q}, M \times q \text{ dan } M \text{ ye diffeomorfizmdir}$$

$\sigma|_{p \times N, p \times N}$ den N ye diffeomorfizmdir

(b) den

$$T_{(p,q)}M \equiv T_{(p,q)}(M \times q) \text{ ve } T_{(p,q)}N \equiv T_{(p,q)}(p \times N)$$

uzayları (p, q) da $M \times N$ nin tanjant alt uzaylarıdır.

2.2.1.Lemma. M ve N Riemann manifoldları olsun. $T_{(p,q)}(M \times N)$, $T_{(p,q)}M$ ve $T_{(p,q)}N$ alt uzaylarının direkt toplamıdır, yani $T_{(p,q)}(M \times N)$ nin herbir elemanı $x + v$ gibi bir tek ifadeye sahiptir, burada $x \in T_{(p,q)}M$ ve $v \in T_{(p,q)}N$ dir [30].

2.2.2.Tanım. M ve N Riemann manifoldları ve f , M üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{F}(M)$ ise $M \times N$ ye f nin lifti $\tilde{f} = f \circ \pi \in \mathcal{F}(M \times N)$ ile tanımlıdır. $x \in T_p(M)$ ve $q \in N$ ise (p, q) da x in $\tilde{x}$ lifti $T_{(p,q)}(M)$ de bir tek vektördür ve $d\pi(\tilde{x}) = x$ dir.

$X \in \chi(M)$ ise X in $M \times N$ ye lifti $\tilde{X}$ vektör alanıdır ve herbir (p, q) noktasındaki değeri (p, q) ya X_p nin liftidir. Böylece $M \times N$ de $X \in \chi(M)$ nin lifti $\chi(M \times N)$ nin bir tek elemanıdır, yani X 'e π -bağlantılı ve N üzerinde sıfırdır. Böyle tüm $\tilde{X}$ yatay liftlerinin kümesi $\mathcal{L}(M)$ ile gösterilir. N üzerinde fonksiyonlar, tanjant vektörler ve vektör alanları σ izdüşümü ile benzer şekilde $M \times N$ ye yükseltilir [30].

2.2.1.Sonuç. M ve N Riemann manifoldları ve $M \times N$ çarpım manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir [30];

- (1) $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(M)$ ise $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]^\sim \in \mathcal{L}(M)$ dir ve $\mathcal{L}(N)$ içinde benzer şekildedir.
- (2) $\tilde{X} \in \mathcal{L}(M)$ ve $\tilde{V} \in \mathcal{L}(N)$ ise $[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$ dır.

3. HELİS HİPERYÜZEYLERİ

Bu alt bölümde $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeyleri incelenmiştir. Birim hızlı düzlemsel bir eğriden elde edilen helis hiperyüzeyi için eğriliklere bakılmış ve ardından $\mathbb{R}^3$ de verilen eğrilerin Darboux çatıları gözönüne alınarak incelemeler yapılmıştır. Son olarak da $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeylerinin Gauss dönüşümü verilmiştir.

3.1.Teorem. $M, \mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir helis hiperyüzeyi ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M, M$ de birim hızlı bir geodezik eğri olsun. Bu taktirde, α eğrisi $\mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir V_2 -slant helistir [32].

İspat. ξ, M üzerinde bir birim normal vektör alanı olsun. M, d doğrultulu bir helis hiperyüzey olduğundan, $\langle d, \xi \rangle = \text{sabittir}$. Yani, d ve ξ arasındaki açı, M yüzeyinin her noktasında sabittir. Öte yandan α, M de geodezik olduğundan, α eğrisi boyunca $\alpha'' = \lambda \xi$ yazabiliriz. Ayrıca, Frenet denklemlerini kullanırsak

$$\alpha'' = V_1' = k_1 V_2 \quad (3.0.1)$$

yazabiliriz. Böylece son iki eşitlikten, α boyunca, $\lambda \xi = k_1 V_2$ elde edilir. Böylelikle son denklemden her iki tarafın normu alınarak, α boyunca $\xi = V_2$ ya da $\xi = -V_2$ bulunur. Buradan, α boyunca $\langle d, V_2 \rangle = \text{sabit}$ olduğunu görebiliriz. Bir başka ifadeyle, α boyunca d ile V_2 arasındaki açı sabittir. Sonuç olarak, α eğrisi $\mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir V_2 -slant helistir.

Yukarıdaki teoremden $n = 3$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.1. Sonuç. α , bir N birim normal vektör alanına sahip, sabit açılı ve sabit doğrultusu k olan bir M yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Eğer α, M de geodezik ise, bu taktirde $\alpha, \mathbb{R}^3$ de bir V_2 -slant helistir [32].

3.2.Teorem. $M, \mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir helis hiperyüzey ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M, M$ de birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α nın n . birim vektör alanı V_n, ξ veya $-\xi$ ye eşit ise, bu taktirde $\alpha, \mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir V_n - slant helistir. Burada ξ, M üzerinde bir birim normal vektör alanıdır [32].

İspat. M, d doğrultulu bir helis hiperyüzey olduğundan, $\langle d, \xi \rangle = \text{sabittir}$. Yani, d ve ξ arasındaki açı, M yüzeyinin her noktasında sabittir. Öte yandan, α nın n . birim vektör alanı V_n, ξ veya $-\xi$ ye eşit olduğundan, α boyunca $\langle d, V_n \rangle = \text{sabit}$ elde edilir. Bir başka ifadeyle, α boyunca d ile V_n arasındaki açı sabittir. Sonuç olarak, α eğrisi $\mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir V_n -slant helistir.

3.3.Teorem. $M, \mathbb{R}^n$ deki bir birim d doğrultusuna göre bir helis hiperyüzey ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M, M$ yüzeyi üzerinde t parametrelili bir eğri olsun. α, M yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi ise, bu taktirde α eğrisi boyunca $d \in S_p \{T\}^\perp$ dir. Burada, T, α nın birim teğet vektör alanıdır [32].

İspat. M nin bir birim normal vektör alanı ξ olsun. M , d ye göre bir helis yüzey olduğundan, α eğrisi boyunca $\langle d, \xi \rangle = \text{sabit}$ eşitliğinin her iki tarafının α eğrisi boyunca t ye göre türevini alırsak,

$$\langle \xi', d \rangle = 0 \quad (3.0.2)$$

elde edilir. Öte yandan, bu teoreme göre α , M üzerinde bir eğrilik çizgisi olduğundan, α boyunca

$$\xi' = S(T) = \lambda T \quad (3.0.3)$$

yazabiliriz. Burada S , M nin şekil operatörüdür. Böylece, (3.0.2) ve (3.0.3) eşitliklerinden,

$$\langle T, d \rangle = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, α eğrisi boyunca $d \in S_p \{T\}^\perp$ dir.

Şimdi, $\mathbb{R}^3$ de düzlemsel bir eğriden bir helis hiperyüzey elde edilmesini vererek, bu yüzeyin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ile açılabilirlik durumları inceleyelim:

3.1.Tanım. $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı bir düzlemsel eğri

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \longrightarrow \alpha(u)$$

olsun. Bu taktirde,

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longrightarrow \phi(u, v) = \alpha(u) + v(\sin(\theta)V_2(u) + \cos(\theta)B)$$

yüzeyi α eğrisi kullanılarak elde edilmiş bir regle yüzeydir. Bu regle yüzeyi, α eğrisi tarafından meydana getirilmiş yüzey olarak adlandıracağız. Burada, V_2 ve B , $\{V_1 = T, V_2, V_3 = B\}$ Frenet çatısının elemanları olup, sırasıyla α nın teğeti, asli normali ve binormali diye adlandırılır. Belirtelim ki, $\mathbb{R}^3$ de düzlemsel bir eğrinin binormali sabittir [32].

3.4.Teorem. $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı düzlemsel eğri

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \longrightarrow \alpha(u)$$

olsun. Bu taktirde,

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longrightarrow \phi(u, v) = \alpha(u) + v(\sin(\theta)V_2(u) + \cos(\theta)B)$$

şeklinde tanımlanan yüzeyi, B doğrultulu bir helis yüzeyidir. Ve bu yüzeyi M ile göstereceğiz. Burada θ sabit ve B vektörü (binormal) α eğrisinin düzlemine dik olan bir sabit vektördür [32].

İspat. Z, M yüzeyinin bir birim normal vektör alanı olsun. Bu taktirde, M yüzeyi boyunca $\langle Z, B \rangle$ çarpımının sabit olduğunu göstermek istiyoruz. İlk olarak yüzeyin bir birim normal vektör alanı Z yi bulacağız. Bunu, yapmak için ϕ nin u ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplarsak:

$$\phi_u(u, v) = (1 - k_1 v \sin(\theta))T \quad \text{ve} \quad \phi_v(u, v) = \sin(\theta)V_2 + \cos(\theta)B \quad (3.0.4)$$

elde ederiz. Böylece, (3.0.4) deki eşitlikleri kullanarak, M nin bir birim normal vektör alanı

$$Z = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = -\cos(\theta)V_2 + \sin(\theta)B \quad (3.0.5)$$

olarak elde edilir. Böylece (3.0.5) eşitliği yardımıyla görülür ki, $\langle Z, B \rangle$ çarpımı M boyunca sabittir. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.Sonuç. (3.0.4) de tanımlanan,

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longrightarrow \phi(u, v) = \alpha(u) + v(\sin(\theta)V_2(u) + \cos(\theta)B)$$

yüzeyi her zaman açılabilir [32].

İspat. T, α eğrisinin teğet vektör alanı ve $X = \sin(\theta)V_2(u) + \cos(\theta)B$ olsun. Bu taktirde $\det(T, X, X') = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için T ve $\frac{dX}{du} = X'$ vektör alanlarını hesaplarsak:

$$T = \alpha'$$

$$X' = -k_1 \sin(\theta)T$$

elde ederiz. Böylelikle, T ve X' lineer bağımlı olduğundan $\det(T, X, X') = 0$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

3.5.Teorem. $\mathbb{R}^3$ de doğrusal olmayan birim hızlı bir düzlemsel eğri

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$s \longrightarrow \alpha(s)$$

olsun. Yukarıdaki tanımda ifade edilen, α eğrisi tarafından meydana getirilmiş

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(s, v) \longrightarrow \phi(s, v) = \alpha(s) + v(\sin(\theta)V_2(s) + \cos(\theta)B)$$

yüzeyini göz önüne alalım. Bu taktirde M nin Gauss eğriliği sıfır ve ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 \cos(\theta)}{1 - k_1 v \sin(\theta)} \right)$$

dır. Burada k_1 , α eğrisinin birinci eğriliğidir [32].

İspat. Yukarıdaki sonuçtan, M yüzeyi açılabilir olduğu için Gauss eğriliği sıfırdır. Şimdi, M nin ortalama eğriliğini hesaplayalım:

$\phi(s, v)$ noktasında, M nin teğet uzayının bazı

$$\left\{ x_1 = \frac{\phi_s}{\|\phi_s\|}, x_2 = \phi_v \right\} \quad (3.0.6)$$

olsun. Hatırlatalım ki, Teorem 3.4 den M nin bir birim normal vektör alanı $Z(s, v) = -\cos(\theta)V_2(s) + \sin(\theta)B$ dir. Ayrıca M nin $\phi(s, v)$ noktasındaki ortalama eğriliği,

$$H(\phi(s, v)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \langle S(x_i), x_i \rangle$$

dir. Burada S , M nin Z doğrultusundaki şekil operatörüdür. Şimdi, $S(x_1)$ ve $S(x_2)$ yi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} S(x_1) &= D_{x_1} Z \\ &= D_{\frac{\phi_s}{\|\phi_s\|}} Z \\ &= \frac{1}{\|\phi_s\|} D_{\phi_s} Z \\ &= \frac{1}{\|\phi_s\|} \frac{dZ}{ds} \\ &= \left(\frac{k_1 \cos(\theta)}{|1 - k_1 v \sin(\theta)|} \right) T \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} S(x_2) &= D_{x_2} Z \\ &= D_{\phi_v} Z \\ &= \frac{dZ}{dv} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $D, \mathbb{R}^3$ deki standart kovaryant türevdir. Böylece,

$$\langle S(x_1), x_1 \rangle = \frac{k_1 \cos(\theta)}{1 - k_1 v \sin(\theta)} \text{ ve } \langle S(x_2), x_2 \rangle = 0$$

bulunur. Sonuç olarak, ϕ nin ortalama eğriliği:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 \cos(\theta)}{1 - k_1 v \sin(\theta)} \right)$$

olarak elde edilir ($1 - k_1 v \sin(\theta) \neq 0$). Bu da ispatı tamamlar.

3.1.Örnek: $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı bir eğri

$$\alpha(s) = \left(\frac{3}{5} \sin(s), 1 + \cos(s), \frac{4}{5} \sin(s) \right), \quad s \in [0, 5\pi]$$

şeklinde verilsin. Bu taktirde, α nın asli normali ve binormali sırasıyla,

$$V_2 = \left(-\frac{3}{5} \sin(s), -\cos(s), -\frac{4}{5} \sin(s) \right)$$

$$B = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5} \right)$$

şeklinde bulunur. Eğer, $\theta = \frac{\pi}{6}$ ve $v \in [0, \pi]$ olarak alırsak, α eğrisi tarafından meydana getirilen helis yüzeyin parametrik gösterimi:

$$x(s, v) = \left(\frac{3}{5} - \frac{3v}{10} \right) \sin(s) + \frac{2\sqrt{3}}{5} v$$

$$y(s, v) = \left(1 - \frac{v}{2} \right) \cos(s) + 1$$

$$z(s, v) = \left(\frac{4}{5} - \frac{2v}{5} \right) \sin(s) - \frac{3\sqrt{3}}{10} v$$

olarak bulunur [32].

Şimdi, $\mathbb{E}^3$ deki eğrilerin Darboux çatı özelliklerini dikkate alarak, $\mathbb{E}^3$ deki helis hiperyüzeylerini inceleyelim:

3.6.Teorem. $M, \mathbb{E}^3$ deki bir birim d doğrultulu bir helis hiperyüzeyi ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, M üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α boyunca d doğrultusu, N ve Y vektör alanları tarafından geriliyorsa yani $d \in S_p \in \{N, Y\}$ ise, α , M de bir eğrilik çizgisidir ve $\frac{k_n}{k_g} = -\tan(\theta) = \text{sabittir}$, burada N ve Y vektör alanları α nın Darboux vektör alanları ve θ , d ile N arasındaki sabit açıdır.

Tersine eğer α , M de bir eğrilik çizgisi ise, bu durumda $d \in S_p \{N, Y\}$ dır [6].

İspat. M, d doğrultulu bir helis hiperyüzeyi ve α boyunca $d \in S_p \{N, Y\}$ olduğundan,

$$d = \cos(\theta)N + \sin(\theta)Y \quad (3.0.7)$$

ifadesini yazabiliriz, burada $\langle N, d \rangle = \cos(\theta) = \text{sabittir}$. (3.0.7) denkleminin her iki tarafının türevini alırsak,

$$0 = \cos(\theta)N' + \sin(\theta)Y'$$

elde ederiz. Darboux çatısı tanımındaki Darboux denklemleri ve en son denklem kullanılarak

$$(-k_n \cos(\theta) - k_g \sin(\theta))T + (-\tau_g \cos(\theta))Y + \tau_g \sin(\theta)N = 0 \quad (3.0.8)$$

bulunur. $\{T, Y, N\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan, (3.0.8) den

$$k_n \cos(\theta) + k_g \sin(\theta) = 0 \quad (3.0.9)$$

$$\tau_g \cos(\theta) = 0 \quad (3.0.10)$$

$$\tau_g \sin(\theta) = 0 \quad (3.0.11)$$

eşitliklerini yazabiliriz. (3.0.10) ve (3.0.11) eşitliklerinden, $\tau_g = 0$ ($\theta \neq \frac{\pi}{4}$) elde ederiz. Bu durum, α nın M de bir eğrilik çizgisi olduğunu gösterir. Üstelik, (3.0.9) eşitliğinden, $\frac{k_n}{k_g} = -\tan(\theta) = \text{sabittir}$.

Tersine, kabul edelim ki α , M de bir eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda,

$$\tau_g = 0 \quad (3.0.12)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\langle N, d \rangle = \text{sabit} \quad (3.0.13)$$

dır. (3.0.13) eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak

$$\langle N', d \rangle = 0 \quad (3.0.14)$$

elde ederiz, burada $N' = -k_n T - \tau_g Y$ dır. Böylece, (3.0.12) dan $N' = -k_n T$ olur. Sonuç olarak (3.0.14) eşitliğinden $\langle T, d \rangle = 0$ buluruz. Bu durum $d \in S_p \{N, Y\}$ olmasını gerektirir.

3.7.Teorem. M , $\mathbb{E}^3$ deki bir d doğrultusuna göre bir helis hiperyüzeyi ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, M üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α eğrisi boyunca $d \in S_p \{N, T\}$ ise α , M de bir asimptotik eğridir ve $\frac{\tau_g}{k_g} = \tan(\theta) = \text{sabittir}$, burada, N, T vektör alanları α nın Darboux vektör alanlarıdır ve θ, d ile N arasındaki sabit açıdır.

Tersine α , M de bir asimptotik eğri ise bu durumda $d \in S_p \{N, T\}$ dır [6].

İspat. M , d doğrultulu bir helis hiperyüzeyi ve $d \in S_p \{N, T\}$ olduğundan,

$$d = \cos(\theta)N + \sin(\theta)T \quad (3.0.15)$$

yazabiliriz, burada $\langle N, d \rangle = \cos(\theta) = \text{sabittir}$. (3.0.15) denkleminin her iki tarafının türevini alırsak,

$$0 = \cos(\theta)N' + \sin(\theta)T' \quad (3.0.16)$$

elde ederiz. Darboux çatısı tanımındaki Darboux denklemleri ve (3.0.16) denklemi kullanılarak

$$(-k_n \cos(\theta))T + (-\tau_g \cos(\theta) + k_g \sin(\theta))Y + k_n \sin(\theta)N = 0 \quad (3.0.17)$$

ifadesine sahip oluruz. $\{T, Y, N\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan, (3.0.17) den

$$-\tau_g \cos(\theta) + k_g \sin(\theta) = 0 \quad (3.0.18)$$

$$k_n \cos(\theta) = 0 \quad (3.0.19)$$

$$k_n \sin(\theta) = 0 \quad (3.0.20)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Böylece (3.0.19) ve (3.0.20) eşitliklerinden, $k_n = 0$ elde ederiz. Bu durum, α nın M de bir asimptotik eğri olduğunu gösterir. Ayrıca, (3.0.18) eşitliğinden, $\frac{\tau_g}{k_g} = \tan(\theta) = \text{sabittir}$.

Tersine, kabul edelim ki α , M de bir asimptotik eğri olsun. Bu durumda,

$$k_n = 0 \quad (3.0.21)$$

dır. Diğer taraftan,

$$\langle N, d \rangle = \text{sabit} \quad (3.0.22)$$

dir. (3.0.22) eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak

$$\langle N', d \rangle = 0 \quad (3.0.23)$$

elde ederiz, burada $N' = -k_n T - \tau_g Y$ dir. Ve böylece, (3.0.21) eşitliğini kullanarak $N' = -\tau_g Y$ ifadesine sahip oluruz. Sonuç olarak, eğer (3.0.23) eşitliğini düşünürsek $\langle Y, d \rangle = 0$ elde ederiz. Bu ise $d \in S_p \{N, T\}$ olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi, $\mathbb{E}^n$ deki helis hiperyüzeylerin Gauss dönüşümünü bulalım ve koni helis hiperyüzeyinin Gauss dönüşümünün helis altmanifold olan bir çember olduğunu örnekle verelim:

3.8.Teorem. $M, \mathbb{E}^n$ Öklid n-uzayında bir helis hiperyüzeyi ve N, M nin bir birim normal vektör alanı olsun. Eğer $M, \mathbb{E}^n$ de 1-helis ise bu durumda,

$$\zeta(M) = \{X \in S^{n-1} \mid X = N(P), P \in M\}$$

yüzeyinin bütün noktalarındaki yer vektörleri, $\mathbb{E}^n$ deki sabit bir doğrultuyla sabit açı yapar. Burada,

$$\zeta : M \longrightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$$

$$P \longrightarrow \zeta(P) = \vec{N}(P)$$

dönüşümü M nin Gauss dönüşümü ve $S^{n-1}, \mathbb{E}^n$ de birim hiperküredir [6].

İspat. $d \in \mathbb{R}^n, M$ nin helis doğrultusu olsun. $M, \mathbb{E}^n$ de 1-helis olduğundan, her $P \in M$ için

$$\langle N(P), d \rangle = \text{sabit}$$

dir. Böylece, her $X = \vec{N}(P) \in \eta(M)$ için

$$\langle X, d \rangle = \text{sabit}$$

elde ederiz. Aynı zamanda, $X = \vec{N}(P), S^{n-1}$ birim hiperküresi üzerindeki $\eta(M)$ nin yer vektörü olduğundan, $\eta(M), \mathbb{E}^n$ de bir sabit doğrultu ile sabit açı yapar.

3.2.Örnek: Teorem 2.1.4 de, $H \subset E^3$ hiper yüzeyini şu şekilde alalım.

$$\phi : H \rightarrow E^3, \phi(u, v) = (u, v, u.v)$$

Buna göre, H yüzeyinin normalini belirleyebiliriz. Bunu yapmak için ϕ nin u ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplayalım. Böylece,

$$\phi_u = (1, 0, v)$$

$$\phi_v = (0, 1, u)$$

ifadelerini elde ederiz. O halde, ϕ_u ve ϕ_v kullanılırsa H yüzeyinin normali,

$$\eta = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + u^2 + 1}}(-v, -u, 1)$$

olur. yani, Teorem 2.4 e göre $\phi : M \rightarrow E^4$ olmak üzere,

$$\phi(u, v, s) = (u, v, u.v, 0) + s \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{v^2+u^2+1}} (-v, -u, -1, 0) + \frac{\sqrt{2}}{2} (0, 0, 0, 1) \right)$$

tarafından verilen $M = f_\theta$ hiperyüzeyi, $d = (0, 0, 0, 1) \in E^4$ doğrultusuna göre E^4 te bir 1-helistir, burada $\theta = \frac{\pi}{4}$ ve $s \in \mathbb{R}$ dir.

Ayrıca Teorem 2.4 e göre M nin normal vektör alanı

$$\xi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{v^2+u^2+1}} (-v, -u, -1, 0) + \frac{\sqrt{2}}{2} (0, 0, 0, 1)$$

dır. Böylece,

$$\mu(M) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{v}{\sqrt{v^2+u^2+1}}, \frac{u}{\sqrt{v^2+u^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{v^2+u^2+1}}, 1 \right)$$

elde ederiz ki burada $\mu : M \rightarrow S^3 \subset E^3$, M nin Gauss dönüşümüdür.

Sonuç olarak, Teorem 3.8. i düşünürsek $\mu(M)$, $S' \subset E^4$ üzerinde sabit $d \in E^4$ yönü ile sabit bir açı yapar. [32]

4. YÜKSEK BOYUTLU ÖKLİD HELİS ALTMANİFOLDLARI

Altmanifoldlar teorisi, diferansiyel ve integral hesabın bulunmasından itibaren çalışılmaya başlanmış bir konudur. Teorinin başlangıcı, Fermat'ın verilen bir eğriye teğetin nasıl çizileceği problemiyle başlatılır. Fermat'ın zamanında düzlemsel bir eğrinin diferansiyel geometrisi (eğriliği, eğrilik çemberi, involüt, evolüt vb.) diferansiyel ve integral hesabın önemli bir araştırma alanıydı. Bu çalışmalardan sonra benzer çalışmalar uzay eğrileri ve yüzeylere de taşındı [36].

Bu bölüm, helis altmanifoldlarından oluşmaktadır. Birinci bölümde, Öklidyen uzayların helis altmanifoldları incelenirken ikinci bölümde, helis altmanifoldların çarpımı çalışılmıştır.

4.1 ÖKLİDYEN UZAYLARIN HELİS ALTMANİFOLDLARI

$V \subset \mathbb{R}^n$ bir lineer altuzay ve $d \in \mathbb{R}^n$ herhangi bir doğrultu (yani bir birim vektör) olsun. Buna göre d ve V arasındaki θ açısı, d ve $\pi_V(d)$ arasındaki açıdır, burada $\pi_V : \mathbb{R}^n \rightarrow V$, dik izdüşüm fonksiyonudur. Yani diyebiliriz ki

$$\cos(\theta) = \langle d, \pi_V(d) \rangle \quad (4.1.1)$$

dır. O halde, $\mathbb{R}^n$ de bir $M \subset \mathbb{R}^n$ hiperyüzeyi ve bir $d \neq 0$ birim vektörü olmak üzere her $q \in M$ için d ve $T_q M$ arasındaki açı sabit ise M ye bir helis denir.

Ayrıca $M \subset \mathbb{R}^n$ bir hiperyüzey ve $\xi : M \rightarrow \nu(M)$ bir birim normal vektör alanı olsun, burada $\nu(M)$ normal demeti gösterir. Bu durumda yukarıda verilen tanım, $\langle d, \xi \rangle$ nin M boyunca sabit bir fonksiyon olduğu gerçeğine denktir. Eğer M , θ açısıyla oluşan bir helis ise bu M_θ ile gösterilir [2].

4.1.1.Hatırlatma. $M \subset \mathbb{R}^n$ helis hiperyüzeyinin iki tane özel durumu vardır [2]:

- (a) Helis, bağlantılı ve açısı $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise d ye dik olan bir hiperdüzlemde kalır. Yani bu durumda bu helis, bir hiperdüzlemin açık altkümesi olmalıdır.
- (b) $\theta = 0$ olduğunda d doğrultusu, M_θ helisine teğettir. d sabit olduğu için M_θ paralel düz doğru parçaları tarafından çizilir.

4.1.2.Hatırlatma. Tanjant uzayı, transversal doğrultu ile sabit açı yapan (yani $\theta \neq 0$) bir helis hiperyüzeyi yönlendirilebilirdir. Bu durumda $\theta = 0$ iken yönlendirilemeyen helis hiperyüzeyleri

vardır. Örneğin, $M = M' \times \mathbb{R}$ hiperyüzeyi tanımlanırsa M' , $\mathbb{R}^{n-1}$ de bir yönlendirilemeyen hiperyüzeydir. Bu durumda M hiperyüzeyi, $\mathbb{R}$ çarpanı boyunca bir doğrultuya göre $\mathbb{R}^n$ de yönlendirilemeyen helistir.

Ayrıca bir helis hiperyüzeyi, sıfır Gauss-Kronecker eğriliğine sahiptir, yani şekil operatörü tekildir ($\det(A) = 0$) [2].

Şimdi $M_\theta \subset \mathbb{R}^n$ helis hiperyüzeyini oluşturalım:

$H \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbb{R}^{n-1}$ de bir yönlendirilebilir hiperyüzey ve η , H nın bir birim normal vektör alanı olsun. Genelliği bozmadan, d vektörü $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ olarak alınabilir. Buna göre

$$H \subset \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \quad (4.1.2)$$

yazılabilir.

M_θ diferansiyellenebilir manifoldu, $M = H \times \mathbb{R}$ ye diffeomorfik olduğu için, yani H manifolduna bir boyut eklendiği için immersiyonda H nın görüntüsünü d ye dik (ortogonal) olarak alacağız ve $H \times \mathbb{R}$ deki $\mathbb{R}$ çarpanının görüntüsünü de d vektörü ile sabit açı yapacak şekilde tanımlayacağız. Böylece, $\mathbb{R}^n$ de M nin immersiyonunu tanımlayabiliriz:

Öncelikle,

$$T(x) = \sin(\theta)\eta(x) + \cos(\theta)d \quad (4.1.3)$$

vektör alanını tanımlayalım, burada $x \in H$ dır (yani η , H ya normaldir). Böylece T , H altmanifoldu boyunca tanımlanan bir vektör alanıdır. H , flat normal uzaylı $\mathbb{R}^n$ de iki ek boyutlu bir altmanifold olduğu için T , H boyunca normal paraleldir. O halde $f_\theta : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ immersiyonu,

$$f_\theta(x, s) = x + sT(p)$$

şeklinededir. Bu durumda, yeterince küçük $-\varepsilon < s < \varepsilon$ parametresi için f_θ bir immersiyondur [2].

4.1.1. Teorem. $M_\theta = f_\theta(M)$ daldırılmış altmanifoldu, bir helistir [2].

İspat. Burada $M_\theta = f_\theta(M)$ görüntüsünün bir ξ birim normal vektör alanını hesaplayarak onun d ile arasındaki açısının sabit ve θ ya denk olduğunu ispatlayacağız. Bunu yapabilmek için her bir $f_\theta(x, s)$ noktasında $M_\theta = f_\theta(M)$ nın tanjant uzayını tanımlamalıyız.

$(x, 0)$ noktasına kısıtlandığında f_θ nın fonksiyon olduğu görülebilir, yani $f_{\theta, H} = Id_H$ dır. $f_\theta(H \times \{0\})$ ile H yi ve M_θ görüntüsü ile de M yi tanımlayalım. Bu durumda, bir (x, s)

noktasında $T_{(x,s)}M_\theta$ tanjant uzayı

$$T_{(x,s)}M_\theta = T_xH \oplus \mathbb{R}T(x)$$

ile verilir, burada $\mathbb{R}$, reel uzaydır.

Ayrıca,

$$\xi(x) = -\cos(\theta)\eta(x) + \sin(\theta)d \quad (4.1.4)$$

vektör alanı, M_θ nın bir birim normal vektör alanıdır. Gerçekten η ve d , H ya dik (ortogonal) olduklarından her bir $x \in H$ ve $\xi(x) \in T_xH^\perp$ için

$$\langle \xi(x), T(x) \rangle = \langle -\cos(\theta)\eta(x) + \sin(\theta)d, \sin(\theta)\eta(x) + \cos(\theta)d \rangle = 0$$

olur. η , d vektörüne dik olduğundan $\langle \xi, d \rangle = \sin(\theta)$ dır. Böylece açıktır ki M_θ , θ açılı bir helistir.

T ve ξ , sırasıyla M_θ ya teğet ve normal birim vektör alanları olsun öyle ki

$$d = \cos(\theta)T(p) + \sin(\theta)\xi(p) \quad (4.1.5)$$

dir. O halde aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

4.1.1.Lemma. T nin integral eğrileri $\mathbb{R}^n$ nin doğrularıdır [2].

İspat. $\mathbb{R}^n$ de standart kovaryant türev D , M_θ da indirgenmiş kovaryant türev ∇ ile gösterilsin. Öncelikle gösterebiliriz ki eğer $\cos(\theta) \neq 0$ ise T iyi tanımlı olacaktır. Aksi taktirde, M_θ bir hiperdüzlemin bir açık alt kümesi olacak ve T iyi tanımlı olmayacaktır. Bu yüzden $\cos(\theta) \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz.

Şimdi, M_θ helisinin şekil operatörü $A^\xi(X) = -D_X\xi$, M_θ ve ikinci temel formu $\alpha(X, Y)$ olsun, bu durumda

$$\langle A^\xi(X), Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle \quad (4.1.6)$$

dir. X , M_θ üzerinde bir keyfi vektör alanı olsun.

$d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$ denkleminin her parçasının X e göre kovaryant türevi alınarak,

$$0 = \cos(\theta)D_XT + \sin(\theta)D_X\xi$$

ve

$$0 = \cos(\theta)(\nabla_XT + \alpha(X, T)) - \sin(\theta)A^\xi(X)$$

elde edilir. Bu denklemin (M_θ da) teğet ve normal bileşenleri alınarak

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(\theta)\nabla_X T - \sin(\theta)A^\xi(X) \\ 0 &= \cos(\theta)\alpha(X, T) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her bir $X \in T_p M$ için $\alpha(X, T) = 0$ dır.

$A^\xi(T) = -D_T \xi = 0$ olduğunu ispatlamak için bu ikinci koşulu uygulayalım. Bu durumda $\langle D_T \xi, X \rangle = -\langle A^\xi(T), X \rangle = -\langle \xi, \alpha(T, X) \rangle = 0$ olduğu için $\langle D_T \xi, \xi \rangle = 0$ 'dır. Böylece, $0 = \cos(\theta)\nabla_T T - \sin(\theta)A^\xi T = \cos(\theta)\nabla_T T$ olur. Dolayısıyla buradan,

$$\alpha(T, T) = 0$$

ve

$$\nabla_T T = 0$$

sonuçları çıkarılır. O halde, T nin integral eğrilerinin doğrular olduğunu ispatlamak için $D_T T = 0$ olduğunu söylemek yeterlidir.

$$D_T T = \nabla_T T + \alpha(T, T) = 0$$

olduğu için bu lemmayı ispatlar.

4.1.3.Hatırlatma. $A^\xi(T) = 0$ koşulu, herhangi bir helis hiperyüzeyi M_θ nin şekil operatörünün tekil olduğu anlamına gelir, yani $\det(A^\xi) = 0$ dır [2].

Şimdi M nin C^∞ olduğunu kabul ederek helis altmanifoldu tanımını verebiliriz:

4.1.1.Tanım. Bir $M \subset \mathbb{R}^n$ altmanifoldu ve $\mathbb{R}^n$ de bir $d \neq 0$ birim vektörü verilsin. Eğer her bir $q \in M$ için d ve $T_q M$ arasındaki açı sabit ise M , d ye göre helistir denir. Hatırlanacağı gibi bir d birim vektörü, M altmanifoldu boyunca teğet ve dik bileşenlerine ayrışabilir. Yani $\|T\| = \|\xi\| = 1$ olmak üzere $d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$ dir, burada $T \in TM$ ve $\xi \in \nu(M)$ dir. $T_q M$ ve d arasındaki açının sabit olması için gerek ve yeter koşul d nin teğet bileşeninin $\|\cos(\theta)T\| = \cos(\theta)$ sabit uzunluğa sahip olmasıdır [3].

4.1.2.Tanım. Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise M , d ye dik olan bir hiperdüzlemde bulunur. $\theta = 0$ ise M , d ye paralel yönlü bir çarpan ile birlikte bir Riemann çarpımıdır. Böylece, θ yı 0 ile $\frac{\pi}{2}$ arasında ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) kabul edebiliriz. Bu koşullar altında M nin θ açılı bir helis olduğu söylenebilir.

M helis altmanifoldunun teğet ve normal doğrultuları sırasıyla T ve ξ ile ve M nin helis doğrultusu d ile gösterilecektir, burada d daima birim alınacaktır [3].

4.1.3.Tanım. $M \subset \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ doğrultusuna göre $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ açılı bir helis altmanifold olsun. Buna göre M helisinin T teğet doğrultusunun integral eğrileri d ye göre M nin helis çizgileri diye isimlendirilirler [3].

Helis çizgileri, klasik helislerdir. d ve ξ , $M \cap H$ ya dik oldukları için T ye diktirler. Bu durumda helis çizgileri, $H \cap M$ kümelerine diktirler, burada eğer $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ise H , d ye göre herhangi bir hiperdüzleme diktir [3].

4.1.4.Tanım. M bir helis altmanifoldu olsun. Eğer M nin bütün helis çizgileri, doğrular ise M ye regle helis denir [3].

Hatırlanacağı gibi $d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$, d nin teğet ve normal bileşenlerine ayrışımı olarak verildiğinde eğer $\nabla_T^\perp \xi = 0$ ise ξ , T doğrultusunda paralel normaldir. Burada $\nabla^\perp$, Öklid anlamda standart kovaryant türev tarafından indirgenmiş M nin normal konneksiyonunu gösterir. $\mathbb{R}^n$ deki standart kovaryant türevi D ile ve M deki indirgenmiş kovaryant türevi ∇ ile gösterelim. M herhangi bir hiperdüzlemde bulunmadığından $\cos(\theta) \neq 0$ ifadesine sahibiz. A^ξ ve α sırasıyla $M \subset \mathbb{R}^n$ nin şekil operatörü ve ikinci temel formu olsun. Şimdi

$$d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$$

denkleminin her iki tarafının da X e göre D kovaryant türevi alınarak

$$0 = \cos(\theta)D_X T + \sin(\theta)D_X \xi.$$

elde edilir. Burada teğet ve normal bileşenler (M de) alınır,sa,

$$\cos(\theta)(\nabla_X T + \alpha(X, T)) + \sin(\theta)(-A^\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi) = 0$$

ifadesine sahip oluruz. Bu durumda,

$$\mathcal{C} = \begin{cases} \cos(\theta)\nabla_X T - \sin(\theta)A^\xi(X) = 0, \\ \cos(\theta)\alpha(X, T) + \sin(\theta)\nabla_X^\perp \xi = 0 \end{cases}$$

elde edilir.

Buna göre eğer bir θ sabit açısı varsa, M üzerinde bir birim teğet vektör alanı T ve bir birim normal vektör alanı ξ olmak üzere $d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$ vektör alanı $\mathbb{R}^n$ de sabittir. Böylece M , d ye göre bir helistir.

Kabul edelim ki $\sin(\theta) \neq 0$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{C}$ sisteminin ilk denklemi

$$A^\xi(X) = \cot(\theta)\nabla_X T \quad (4.1.7)$$

dir. Eğer $\sin(\theta) = 0$ ise $T = \frac{d}{\|d\|}$ ve bu durumda d sabit doğrultusu M ye teğet olduğu için M bölünür [3].

4.1.1.Önerme. Bir $M \subset \mathbb{R}^n$ helis altmanifoldunun helis çizgileri, M de geodeziklerdir [3].

İspat. $A^\xi(X) = \cot(\theta)\nabla_X T$ deklemini, $A^\xi(T) = 0$ olduğunu vurgular. Gerçekten, herhangi bir X vektör alanı için T vektör alanı birim uzunluğa sahip olduğundan,

$$\begin{aligned}\langle A^\xi(T), X \rangle &= \langle A^\xi(X), T \rangle \\ &= \cot(\theta) \langle \nabla_X T, T \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\nabla_T T = \tan(\theta)A^\xi(T) = 0$ dir.

4.1.4.Hatırlatma. Herhangi bir M Öklidyen helis altmanifoldu için $\forall X \in TM$ olmak üzere

$$\alpha(T, X) = 0$$

ve

$$\nabla_X^\perp \xi = 0$$

koşulları eşdeğerdir. Bu durumda özel olarak $\alpha(T, T) = 0$ ve $\nabla_T^\perp \xi = 0$ denktir [3].

4.1.5.Tanım. $M \subset \mathbb{R}^n$ helis altmanifoldu ve M nin ikinci temel formu α olsun. α nın göreceli nulluk uzayı

$$\{X \in TM \mid \alpha(X, Y) = 0, \forall Y \in TM\}$$

alt kümesidir.

Özel olarak ξ paralel normal olduğunda, yani $\nabla^\perp \xi = 0$ olduğunda daha fazlası söylenebilir [3]:

4.1.2.Önerme. M paralel normal doğrultulu bir helis olsun. Bu durumda T teğet doğrultusu, M nin göreceli nulluğundadır [3].

İspat. Bu önerme, $\mathcal{C}$ sisteminin ikinci denkleminin doğrudan bir sonucudur.

4.2 HELİS ALTMANİFOLDLARININ ÇARPIMI

Bu alt bölümde iyi bilinen doğrusal cebir kavramları kullanıldı.

$V \subset \mathbb{R}^n$ doğrusal bir altuzay olsun. V nin herhangi bir bazı $v_1, \dots, v_k$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ nin V ye ortogonal (dik) projeksiyonu

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^n &\rightarrow V \\ v &\rightarrow \pi(v) = A(A^t A)^{-1} A^t v^t\end{aligned}$$

ile verilir, burada A , j . kolonda v_j^t vektörünün bulunduğu matristir ve $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dir [3].

Özellikle, eğer V nin bazıları ortonormal ise $\pi(v) = AA^t v^t$ olur.

O halde aşağıdaki gibi bir sonuç verebiliriz:

4.2.1.Sonuç. Eğer M_j , $j = 1, 2$ olmak üzere d_j birim vektör alanı doğrultusunda $\mathbb{R}^{n_j}$ nin bir helis altmanifoldu ise bu durumda $M = M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ Riemann çarpımı $d = \frac{1}{\sqrt{2}(d_1, d_2)} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ doğrultulu bir helis altmanifoldudur [3].

İspat. Yukarıda belirtilen A matrisi, içerisinde A_{11} ve A_{22} 2×2 -tipinde matris bloklarını bulunduran ve diğer her yeri 0 olan bir matristir. Herbir A_{jj} bloğu, $j = 1, 2$ için TM_j nin bir çatı alanı (yerel ortonormal bazı) ile belirlenir. Bu durumda,

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M_1 \oplus T_q M_2$$

projeksiyonu, sabit uzunluğa sahip

$$\pi(d_1, d_2) = A_{11} A_{11}^t d_1^t + A_{22} A_{22}^t d_2^t$$

ortogonal ayrışımı ile verilir.

Şimdi bu sonucu destekleyen bir teorem verebiliriz:

4.2.1.Teorem. $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ve $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ iki altmanifold olsun. $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ çarpımı bir helis altmanifold ise $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ve $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ manifoldları da helis altmanifoldlardır [3].

İspat. $d = d_1 + d_2 \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ile $M_1 \times M_2$ nin helis doğrultusunu göstereceğiz, burada $d_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ve $d_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ dir. T , $T(M_1 \times M_2)$ üzerine d nin birim ortogonal (dik) izdüşümü olsun. T_j de $j = 1, 2$ için TM_j üzerine d_j nin birim ortogonal (dik) izdüşümü olsun. Burada

$$T(M_1 \times M_2) = TM_1 \oplus TM_2$$

tanımlamasını kullanacağız. Bu tanımlamaya göre $T = T_1 + T_2$ dir.

Öncelikle göstereceğiz ki T_1, M_2 den bağımsızdır yani, $p \in M_1, y, z \in M_2$ için $T_1(p, y) = T_1(p, z)$ dir. Bu eşitlik $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ nin bir lineer alt uzayı olarak $M_1 \times M_2$ nin her bir tanjant uzayının belirlenmesi için yorumlanabilir.

$T_1(p, y)$ nin $T_{(p, y)}(M_1 \times \{y\})$ üzerine d nin ortogonal (dik) izdüşümü ve benzer şekilde $T_1(p, z)$ nin $T_{(p, z)}(M_1 \times \{z\})$ üzerine d nin ortogonal (dik) izdüşümü olduğunu gözlemleyebiliriz. Fakat $M_1 \times \{y\}, \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ de $M_1 \times \{z\}$ in bir dönüşümüdür. $d, \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ de dönüşüm altında değişmez olduğu için $T_{(p, y)}(M_1 \times y), T_{(p, z)}(M_1 \times z)$ nin bir dönüşümüdür. Bu durumda $T_1(p, y), \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ de $T_1(p, z)$ nin bir dönüşümüdür yani, onlar denktirler. Özellikle $T_1, \{p\} \times M_2$ de sabit uzunluğa sahiptir. Benzer şekilde T_2 , herhangi bir $q \in M_2$ için $M_1 \times \{q\}$ de sabit uzunluğa sahiptir.

Şimdi $p \in M_1$ herhangi bir nokta olsun ve $\{p\} \times M_2 \subset M_1 \times M_2$ parçasını düşünelim. Bu durumda $\{p\} \times M_2$ üzerinde T_2 vektör alanı sabit uzunluğa sahiptir:

$\forall y \in M_2$ için aşağıdaki eşitliği kullanabiliriz:

$$\begin{aligned} \langle T_1(p, y), T_1(p, y) \rangle + \langle T_2(p, y), T_2(p, y) \rangle &= \langle T_1(p, y) + T_2(p, y), T_1(p, y) + T_2(p, y) \rangle \\ &= \langle T(p, y), T(p, y) \rangle. \end{aligned}$$

$M_1 \times M_2$ bir helis olduğundan $\langle T_1(p, y), T_1(p, y) \rangle + \langle T_2(p, y), T_2(p, y) \rangle$ toplamı y ye bağlı değildir. Şimdi T_2 nin $\{p\} \times M_2$ üzerinde sabit uzunluğunu görmek için sadece T_1 in $\{p\} \times M_2$ üzerinde sabit uzunluğu olduğu görmemiz yeterlidir.

$p \in M_1$ için $\{p\} \times M_2$ parçası $0 + d_2 \in \{0\} + TM_2$ doğrultusuna göre bir helistir. Böylece M_2, d_2 ye göre bir helistir. Benzer şekilde M_1, d_1 e göre bir helistir. Bu ispatı tamamlar.

5. HELİS ALTMANİFOLDLARININ YAPISI

Bu bölümde helis altmanifoldlarının yapısı üç alt başlıkta verildi.

5.1 $\mathbb{R}^n$ NİN HELİS EĞRİLERİ

$\text{boy}M = 1$ olduğunda, $d = (0, \dots, 0, 1)$ doğrultusuna göre bütün $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ klasik eğrilerini (yani teğet vektörü, bir sabit doğrultuyla sabit açı yapan eğrileri) aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ olsun. Bu durumda

$$\gamma(t) = (\alpha(t), at + b)$$

dir, burada $a, b \in \mathbb{R}$ sabittirler. γ nın t parametresi, yay parametresi olmalıdır. Bu durumda α eğrisi,

1. $\|\alpha'\|^2 = 1 - a^2$

2. $|a| \leq 1$

şartlarını sağlar.

Ayrıca Serret-Frenet formüllerini gözönüne alarak, bir boyutlu Öklidyen helislerini tanımlayalım:

$M \subset \mathbb{R}^n$ daldırılmış 1-boyutlu altmanifoldu (bir regüler eğri) ve T de M üzerinde bir birim teğet vektör alanı olsun ($p \in M$, $\|T\| = 1$ ile $T(p) \in T_pM$). İyi bilinir ki ([13], syf:30-33), $T\mathbb{R}^n_M = TM \oplus TM^\perp$ nin bir $\{T, \xi_2 = D_T T / \|D_T T\|, \xi_3, \dots, \xi_n\}$ ortonormal bazı vardır, buna göre

$$\begin{aligned} D_T T &= k_1 \xi_2, \\ D_T \xi_2 &= -k_1 T + k_2 \xi_3, \\ &\vdots \\ D_T \xi_{n-1} &= -k_{n-2} \xi_{n-2} + k_{n-1} \xi_n, \\ D_T \xi_n &= -k_{n-1} \xi_{n-1} \end{aligned}$$

dir. Burada D , $\mathbb{R}^n$ nin standart konneksiyonudur. Genelliği bozmadığından, $j = 2, \dots, n$ için $k_1 = \|D_T T\| \neq 0$, $k_j \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. Bu, M nin tam olduğu, yani $\mathbb{R}^n$ nin bir hiperdüzleminde bulunmadığı ifadesine denktir. Böylece bu denklemler, Serret-Frenet formülleri diye isimlendirilir. Bundan sonra bir Serret-Frenet çatısını çatı diye isimlendireceğiz.

Şimdi M nin bir helis olması için gerek ve yeter koşul tanımlayacağız:

$$h_3 = \frac{k_1}{k_2}, h_4 = \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)'$$

ve $5 \leq m \leq n$ için

$$h_m = \frac{1}{k_{m-1}} (h'_{m-1} + k_{m-2} h_{m-2})$$

olsun. Burada $h'_3 = k_3 h_4$ olduğu görülebilir.

5.1.1. Teorem. $M \subset \mathbb{R}^n$ bir tam eğri olsun. Buna göre, aşağıdaki koşullar denktir:

i) $M^1 \subset \mathbb{R}^n$ bir helistir,

ii) $h_n \neq 0$ dir ve $h_3^2 + h_4^2 + \dots + h_n^2$ sıfırdan farklı bir c^2 sabitidir, burada $c > 0$ dir.

İspat. Kabul edelim ki (ii) gerçekleşsin. Bu durumda, $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında sabit bir $\theta = \tan^{-1}(c)$ tanımlayabiliriz. Ayrıca $\xi = \cot(\theta)(h_3 \xi_3 + \dots + h_n \xi_n)$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &= \cot^2(\theta)(h_3^2 + h_4^2 + \dots + h_n^2) \\ &= \cot^2(\theta)c^2 \\ &= \cot^2(\theta)\tan^2(\theta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir. Şimdi, $Z = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi = \cos(\theta)(T + h_3 \xi_3 + \dots + h_n \xi_n)$ vektör alanını düşünelim. O halde, Z nin M boyunca sabit olduğunu ispatlayacağız. Yani, $D_T Z = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$\|Z\| = 1$ ve $\langle T, Z \rangle = \cos(\theta)$ olduğu (yani TM ve Z arasındaki açının sabit olduğu) gözlemlenebilir. $\mathcal{C}$ sisteminden M nin bir helis olması için gerek ve yeter koşulun

$$\cos(\theta)\nabla_X T - \sin(\theta)A^\xi(X) = 0$$

ve

$$\cos(\theta)\alpha(X, T) + \sin(\theta)\nabla_X^\perp \xi = 0$$

olması gerektiğini biliyoruz. $\text{boy}M = 1$ olduğundan $\nabla_T T = 0$ dir. Böylece $D_T T = \alpha(T, T)$ dir. O halde, 1-boyutlu bir daldırılmış $M \subset \mathbb{R}^n$ altmanifoldunun $Z = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$ doğrultusuna göre bir helis olması için gerek ve yeter koşul

$$D_T T = -\tan(\theta)\nabla_T^\perp \xi \quad (5.1.1)$$

olmasıdır.

Gelecek adımda T ve ξ vektör alanlarının $D_T T + \tan(\theta) \nabla_T^\perp \xi = 0$ denklemini sağladığını kontrol edeceğiz.

$\langle \nabla_T^\perp \xi_j, \xi_i \rangle = \langle D_T \xi_j, \xi_i \rangle$ eşitliği ve Serret Frenet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\nabla_T^\perp \xi_2 &= k_2 \xi_3, \\ \nabla_T^\perp \xi_j &= -k_{j-1} \xi_{j-1} + k_j \xi_{j+1}, \\ \nabla_T^\perp \xi_n &= -k_{n-1} \xi_{n-1},\end{aligned}$$

sonuçları elde edilir, burada $3 \leq j \leq n-1$ dir. $5 \leq m \leq n$ için tekrar eden $k_{m-1} h_m = h'_{m-1} + k_{m-2} h_{m-2}$ formülü önemlidir. Yukarıdaki son denklemden

$$h'_m = k_m h_{m+1} - k_{m-1} h_{m-1}$$

olur, burada $h'_3 = k_3 h_4$ ile birlikte $4 \leq m \leq n-1$ dir.

Şimdi h'_n nün eşitini bulalım. Buna göre, (ii) deki ifade sabit olduğu için

$$h_n h'_n = -h_3 h'_3 - h_4 h'_4 - \dots - h_{n-1} h'_{n-1}$$

dir. Önceki formülden $4 \leq m \leq n-1$ için

$$h_3 h'_3 = k_3 h_3 h_4$$

ve

$$h_m h'_m = k_m h_m h_{m+1} - k_{m-1} h_{m-1} h_m$$

elde ederiz. Gerekli hesaplamalar sonucu $h_n h'_n = -k_{n-1} h_{n-1} h_n$ bulunur. $h_n \neq 0$ olduğu için $h'_n = -k_{n-1} h_{n-1}$ olur. Bu durumda,

$$\tan(\theta) \nabla_T^\perp \xi = h'_3 \xi_3 + h_3 \nabla_T^\perp \xi_3 + \sum_{m=4}^{n-1} (h'_m \xi_m + h_m \nabla_T^\perp \xi_m) + h'_n \xi_n + h_n \nabla_T^\perp \xi_n$$

dır. Son toplamı iki parçada hesaplarız.

Önce birini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=4}^{n-1} (h'_m \xi_m + h_m \nabla_T^\perp \xi_m) \\
&= \sum_{m=4}^{n-1} ((k_m h_{m+1} - k_{m-1} h_{m-1}) \xi_m + h_m (-k_{m-1} \xi_{m-1} + k_m \xi_{m+1})) \\
&= (k_4 h_5 - k_3 h_3) \xi_4 + (k_{n-1} h_n - k_{n-2} h_{n-2}) \xi_{n-1} \\
&+ \sum_{m=5}^{n-2} ((k_m h_{m+1} - k_{m-1} h_{m-1}) \xi_m - h_4 k_3 \xi_3 - h_5 k_4 \xi_4 \\
&- \sum_{m=5}^{n-2} h_{m+1} k_m \xi_m + \sum_{m=5}^{n-2} h_{m-1} k_{m-1} \xi_m + h_{n-2} k_{n-2} \xi_{n-1} + h_{n-1} k_{n-1} \xi_n \\
&= -h_4 k_3 \xi_3 - k_3 h_3 \xi_4 + k_{n-1} h_n \xi_{n-1} + h_{n-1} k_{n-1} \xi_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{m=4}^{n-1} (h'_m \xi_m + h_m \nabla_T^\perp \xi_m) = -h_4 k_3 \xi_3 - k_3 h_3 \xi_4 + k_{n-1} h_n \xi_{n-1} + h_{n-1} k_{n-1} \xi_n$$

olur.

İkinci ve üçüncü toplamdaki indeksi 5 ten $n-2$ ye düzenlersek ikinci kısım:

$$\begin{aligned}
h'_3 \xi_3 + h_3 \nabla_T^\perp \xi_3 + h'_n \xi_n + h_n \nabla_T^\perp \xi_n &= k_3 h_4 \xi_3 - h_3 k_2 \xi_2 + h_3 k_3 \xi_4 \\
&- k_{n-1} h_{n-1} \xi_n - h_n k_{n-1} \xi_{n-1}
\end{aligned}$$

dır. Böylece, bu iki parçanın birleştirilmesinden

$$\tan(\theta) \nabla_T^\perp \xi = -h_3 k_2 \xi_2 = -k_1 \xi_2$$

elde edilir. Son eşitlik gösterir ki

$$\begin{aligned}
D_T T &= k_1 \xi_2 \\
&= -(h'_3 \xi_3 + h_3 \nabla_T^\perp \xi_3 + \dots + h'_n \xi_n + h_n \nabla_T^\perp \xi_n) \\
&= -\tan(\theta) \nabla_T^\perp \xi
\end{aligned}$$

dır. Buna göre $D_T Z = 0$ olduğunu görebiliriz ki bu Z nin sabit olduğunu ispatlar. Bu ise (5.1.1) denkleminin kendisidir. O halde $M, Z = \cos(\theta)(T + h_3 \xi_3 + \dots + h_n \xi_n)$ doğrultusuna göre bir helistir. Böylece (ii) $\rightarrow$ (i) ispatlanır.

(i) $\rightarrow$ (ii) göstermek için kabul edelim ki M sabit bir d doğrultusuna göre bir helistir. Bu durumda $\langle d, T \rangle = \cos(\theta)$ sabittir ve

$$\begin{aligned} d &= \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi \\ &= \cos(\theta)T + \langle d, \xi_2 \rangle \xi_2 + \dots + \langle d, \xi_n \rangle \xi_n \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\langle d, \xi_2 \rangle^2 + \dots + \langle d, \xi_n \rangle^2$$

ifadesi bir sabittir. Şimdi $\langle d, \xi_j \rangle$ ve $k_1, k_2, \dots, k_n$ eğrilikleri arasında ilişki bulmalıyız:

$0 = T \langle d, T \rangle = \langle d, D_T T \rangle = \langle d, \xi_2 \rangle k_2$ olduğundan $\langle d, \xi_2 \rangle = 0$ dır. Tekrar türev alırsak $0 = T \langle d, \xi_2 \rangle = \langle d, D_T \xi_2 \rangle = -\cos(\theta)k_1 + \langle d, \xi_3 \rangle k_2$ olur. Böylece $\langle d, \xi_3 \rangle = \frac{k_1}{k_2} \cos(\theta)$ olur. $\langle d, \xi_4 \rangle$ ve $\langle d, \xi_5 \rangle$ türevlerini alarak,

$$\begin{aligned} \langle d, \xi_4 \rangle &= \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \cos(\theta) \\ \langle d, \xi_5 \rangle &= \frac{1}{k_4} \left[\left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' \cos(\theta) + \frac{k_1 k_3}{k_2} \cos(\theta) \right] \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu şekilde devam ederek $5 \leq m \leq n$ için $\langle d, \xi_m \rangle = h_m \cos(\theta)$ olarak buluruz, burada h_m önceki ifadesi gibidir. O halde,

$$\langle d, \xi_2 \rangle^2 + \dots + \langle d, \xi_n \rangle^2 = \cos(\theta)(h_3^2 + h_4^2 + \dots + h_n^2)$$

ifadesi sabittir.

Eğer $h_n = 0$ ise $\cos(\theta)h_n = \langle d, \xi_n \rangle = 0$ dır. Böylece $0 = \langle d, D_T \xi_n \rangle = -k_{n-1} \langle d, \xi_n \rangle = -k_{n-1} \cos(\theta)h_{n-1}$ olur. Buradan $h_{n-1} = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu şekilde devam ederek $j = n, n-1, \dots, 4$ için $h_j = 0$ elde ederiz. Buna göre

$$\begin{aligned} \cos(\theta)h_4 &= \langle d, \xi_4 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. O halde, $0 = \langle d, D_T \xi_4 \rangle = -k_3 \langle d, \xi_3 \rangle = -k_3 \cos(\theta)h_3$ olur ki bu $h_3 = 0$ olduğunu gösterir. $h_3 = \frac{k_1}{k_2}$ olduğu hatırlanırsa bir çelişki oluşur, çünkü M^1 , tam kabul edildiği için eğriliklerin tamamı hiçbir yerde sıfır olamazlar.

Örneğin; $M, \mathbb{R}^3$ de dolu bir helis ve $\frac{k_1}{k_2}$, 0 dan farklı bir sabit olsun. $\mathbb{R}^4$ koşulları

$$1. \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)^2 \text{ sabittir}$$

$$2. \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \neq 0$$

dir.

5.2 REGLE HELİSLER

Bu bölümde, herhangi bir regle helis hiperyüzeyinin yapısı verilmiş ve yeniden yapılandırılması incelenmiştir.

5.2.1. Teorem. $M \subset \mathbb{R}^n$, d doğrultulu bir tam helis altmanifoldu ve ξ , d nin normal bileşeni olsun. Yani, $d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$ olsun. Bu durumda, M nin regle helis olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_T^\perp \xi = 0$ olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\nabla_T^\perp \xi = 0$ olsun. Bu durumda, M tam olduğundan $\mathcal{C}$ sisteminin ikinci denklemi $\alpha(T, T) = 0$ olduğunu vurgular. Bu durumda, Önerme 4.1.1 den $D_T T = \nabla_T T + \alpha(T, T) = 0$ olur. Dolayısıyla, helis çizgilerini $\mathbb{R}^n$ nin doğruları olarak alabiliriz.

Eğer "*Helis çizgileri, $\mathbb{R}^n$ nin doğrularıdır*" tanımı göz önüne alındığında M bir regle helis ise bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &= D_T d \\ &= \cos(\theta)D_T T + \sin(\theta)D_T \xi \\ &= \sin(\theta)D_T \xi \end{aligned}$$

dır. Böylece Weingarten formülü $0 = D_T \xi = -A^\xi(T) + \nabla_T^\perp \xi$ olduğunu vurgular. Dolayısıyla $\nabla_T^\perp \xi = 0$ olur.

Şimdi $n - k$ ek boyutlu tüm $M \subset \mathbb{R}^n$ regle helis altmanifoldlarını yerel olarak yapılandırmak için bir yöntem vereceğiz:

İlk önce bir $L^{k-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ daldırılmış altmanifold ve $L \subset \mathbb{R}^{n-1}$ in bir η birim normal vektör alanı ile başlayalım. Genelliği bozmadan d vektör alanını $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ olarak kabul edebiliriz. Ayrıca L , $\mathbb{R}^n$ ye daldırılabilir, yani $L \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ olur.

Şimdi, $T(x) = \sin(\theta)\eta(x) + \cos(\theta)d$ vektör alanını tanımlayalım, burada $x \in L$ ve η , L ye normaldir. Böylece T , L altmanifoldu boyunca tanımlanmış bir vektör alanıdır. Sonuç olarak artık $\mathbb{R}^n$ de M nin immersiyonunu tanımlayabiliriz:

$f = L \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ immersiyonu

$$f(x, s) = x + sT(p)$$

şeklinde tanımlanır. $-\varepsilon < s < \varepsilon$ yeterince küçük olduğu için f bir immersiyondur.

5.2.2. Teorem. $M = f(L \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ daldırılmış altmanifoldu, d ye göre θ açılı bir helistir.

İspat. Öncelikle $f(x, 0)$ noktasında immersiyonun bir helis olduğunu ispatlayacağız:

x de L nin bir çatı alanı $Y_1, \dots, Y_{k-1}$ olsun. Bu durumda, $f(x, 0)$ da $f(M)$ nin bir çatı alanı $Y_1, \dots, Y_{k-1}, T$ dır. Bu bir $A = (Y_1' \dots Y_{k-1}' T')$ matrisini tanımladığından helislerin çarpımı konusu dikkate alınırsa $T_{(x,0)}M$ ye d nin bir dik izdüşümü

$$\begin{aligned} \pi(d) &= AA^t(d^t) \\ &= A(0, \cos(\theta))^t \\ &= \cos(\theta)T^t \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Şimdi $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ olsun. Ayrıca $T, T_{(x,s)}M$ ye diktir. $Y \in T_x L$, $x \in L$ de L nin Y_j çatı alanı tarafından oluşturulmuş herhangi bir vektör alanı olsun. $\mathbb{R}^n$ nin standart kovaryant türevini D , $L \subset \mathbb{R}^n$ nin normal konneksiyonunu $\nabla^\perp$ ve şekil operatörünü A ile gösterelim. Böylece (x, s) de f immersiyonunun türevi,

$$f_*(Y) = D_Y f = Y + sD_Y T = Y + s(\nabla_Y^\perp T - A_T(Y))$$

şeklinde hesaplanabilir.

$\|T\| = 1$ olduğundan $T \in TL^\perp$ ve $A_T(Y) \in TL$ için

$$\langle T, f_*(Y) \rangle = s \langle T, \nabla_Y^\perp T \rangle = 0$$

dır.

Eğer L nin η vektör alanını dönüşüm yardımıyla M ye genişletirsek,

$$\langle \eta, f_*(Y) \rangle = s \langle \eta, \nabla_Y^\perp T \rangle = s \sin(\theta) \langle \eta, \nabla_Y^\perp \eta \rangle = 0$$

olur.

Gözlemleyebiliriz ki $L_s = \{f(y, s) \in M \mid y \in L\} = M \cap H$ dır, burada H , d ye dik bir hiperdüzlemdir. Böylece biz yine bu ispatın ilk durumundaki gibi aynı koşullara sahibiz.

T teğet doğrultusu, $L_s = f(L \times \{s\})$ ye diktir ve $T(y, s) = \sin(\theta)\eta(y, s) + \cos(\theta)d$ ayrışımı geçerlidir. Burada $T(y, s) = T(y)$, $\eta(y, s) = \eta(y)$ dir. Bu şu anlama gelir ki biz T vektör alanını, orjinal T ile oluşturulan doğrular boyunca dönüşüm yardımıyla M boyunca vektör alanları içine (L boyunca) η ya genişletiriz. Dolayısıyla, $\eta(x, s)$ ve $T(x, s)$, $L(s)$ ye diklerdir.

5.2.1.Hatırlatma. Teorem 5.2.2 nin farklı bir ispatı direk gösterilerek te verilebilir ki

$$d - \langle d, T \rangle T = d - \cos(\theta)T$$

vektör alanı, M ye normaldir.

M , yukarıdaki yapılandırma ile verilen bir helis olsun. Eğer M nin normal bileşeni ξ , L nin normal konneksiyonuna göre paralel değil ise bu durumda M nin normal konneksiyonuna göre de paralel olmak zorunda değildir.

Şimdi, helis çizgileri doğrular olan $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ açılı herhangi bir helis altmanifoldu, son teoremden oluşturulduğu gibi bir yerel yapıya sahip olduğunu göreceğiz.

$H_{p,d}$ ile $p \in \mathbb{R}^n$ noktası boyunca d doğrultulu ortogonal (dik) hiperdüzlemini gösterelim. $H_{p,d}$ üzerinde d nin normalleşmiş iz düşümü sadece $\frac{\pi(d)}{\|\pi(d)\|}$ dir, burada $\pi, H_{p,d}$ üzerinde ortogonal izdüşümdür.

5.2.3.Teorem. M , $d = (0, \dots, 0, 1)$ doğrultusuna göre $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ açılı bir regle helis altmanifoldu olsun. Bu durumda $H_{p,d}$ üzerine T nin normalleştirilmiş izdüşümü olarak η kullanılarak M , son yapıdaki gibi lokaldır.

İspat. Eğer $\theta = 0$ ise, M lokal olarak $M \times \mathbb{R}$ silindiridir ve ispat burada biter. Bu nedenle, kabul edelim ki $\theta \neq 0$ olsun. T ve ξ sırasıyla M nin birim teğet ve normal doğrultuları olsunlar. Bu durumda,

$$d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$$

dir. $p = (a_1, \dots, a_n) \in M \subset \mathbb{R}^n$ ve $s = a_n \in \mathbb{R}$ olsun. Son olarak $M \cap H$ altmanifoldunu L_s ile gösterelim, burada $H = H_{p,d}$ dir.

$\eta : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ birim vektör alanını, $\eta = \sin(\theta)T - \cos(\theta)\xi$ olarak tanımlarız. Buna göre,

$$\langle \sin(\theta)\eta, T - \sin(\theta)\eta \rangle = 0$$

ve

$$\langle \sin(\theta)\eta, d \rangle = 0$$

olduğunu görebiliriz. Üstelik, $\eta|_{L_s} : L_s \rightarrow \mathbb{R}^n$, L_s ye ortogonal (dik) olmak zorundadır. Bu açıktır çünkü η , T ve d nin (ki onlar $M \cap H$ ya diktirler) lineer birleşimi olabilir.

Bu özellikler, $\sin(\theta)\eta$ nin $H_{p,d}$ üzerine T nin ortogonal (dik) izdüşümü olduğunu ispat eder. Böylece η , sadece T nin normalleşmiş izdüşümüdür.

$\langle \eta, d \rangle = 0$ olduğundan $\eta|_{L_s} : L_s \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ gerçeği sonucuna ulaşabiliriz. Böylece L_s , $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{s\} \subset \mathbb{R}^n$ nin bir $k-1$ boyutlu altmanifoldudur ve $\eta|_{L_s} : L_s \rightarrow T^\perp L_s \subset H$ diferansiyellenebilir birim normal vektör alanıdır, burada $\dim M = k$ dir. Sonuç olarak,

$$T = \sin(\theta)\eta + \cos(\theta)d$$

dir.

d , T ve ξ sırasıyla M nin helis doğrultusu, teğet ve normal yönleri olsun.

5.2.1.Sonuç. Eğer $\nabla_T^\perp \xi = 0$ ise M helis altmanifoldu Teorem 5.2.2 deki gibi yerel olarak yapılandırılabilir.

İspat. Teorem 5.2.1 e göre M yönetilen bir helistir. Sonrasında, Teorem 5.2.3 uygulanır.

5.3 MİNİMAL REGLE HELİSLER

Bu bölümde Öklidyen uzayın keyfi boyutlu ve ek boyutlu minimal regle altmanifoldlarını karakterize edeceğiz.

M , helis çizgileri doğrular olan θ açılı, d doğrultulu bir helis altmanifoldu olsun.

$p \in M$ olmak üzere p boyunca d ye ortogonal (dik) hiperdüzlemi H_p ile göstereceğiz. Önceki kabulümüzü yineleyelim, $\theta \neq \{0, \frac{\pi}{2}\}$ olsun. Bu durumda d , M ye transversaldir ve dik değildir. O halde $L = H_p \cap M$, bir altmanifolddur.

5.3.1.Teorem. Bir M regle helis altmanifoldunun minimal olması için gerek ve yeter koşul her $p \in M$ noktası için $L = H_p \cap M$ nin de minimal olmasıdır.

İspat. T ve ξ , M nin teğet ve normal doğrultuları olsun. $L \subset \mathbb{R}^n$ için Weingarten formülü vurgular ki L üzerindeki her X teğet vektör alanı ve $Z \in TL^\perp$ için

$$D_X Z = -A_L^Z(X) + \nabla_X^{L^\perp} Z$$

dir. Burada A_L^Z , L nin Z yönünde şekil operatörüdür. Formül $M \subset \mathbb{R}^n$ için uyarlandığında L deki her X teğet vektör alanı ve $Z \in TM^\perp$ için

$$D_X Z = -A^Z(X) + \nabla_X^\perp Z$$

olur.

Bu formüllerden $\forall X \in TL$ ve $Z \in TM^\perp$ için,

$$\langle A^Z(X), X \rangle = -\langle D_X Z, X \rangle = \langle A_L^Z(X), X \rangle \quad (5.3.1)$$

sonucu çıkarılır.

$\dim M = k$ olsun. p noktası civarında M nin bir yerel ortonormal bazı ise $X_1, X_2, \dots, X_k = T$ olsun, burada $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, L = H_p \cap M$ nin bir yerel ortonormal bazıdır.

$\forall Z \in TM^\perp$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1} \langle \alpha(X_j, X_j), Z \rangle &= \sum_{j=1}^{k-1} \langle A^Z(X_j), X_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \langle A_L^Z(X_j), X_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \langle \alpha_L(X_j, X_j), Z \rangle \end{aligned}$$

ilişkisine sahibiz, burada α, α_L sırasıyla $M \subset \mathbb{R}^n$ ve $L \subset \mathbb{R}^n$ nin ikinci temel formlarıdır. Böylece $\forall Z \in TM^\perp$ için

$$\sum_{j=1}^{k-1} \langle \alpha_L(X_j, X_j), Z \rangle = \sum_{j=1}^{k-1} \langle \alpha(X_j, X_j), Z \rangle \quad (5.3.2)$$

eşitliğine sahip oluruz.

$TL^\perp = TM^\perp \oplus \langle T \rangle$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\sum_{j=1}^{k-1} \langle \alpha_L(X_j, X_j), T \rangle = c \sum_{j=1}^{k-1} \langle \alpha(X_j, X_j), \xi \rangle \quad (5.3.3)$$

ilişkisine sahip oluruz ki burada c , sıfırdan farklı bir sabittir.

$d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$ ve $\alpha_L \in TL^\perp \cap TH_p$ (H_p , bir hiperdüzlemdir) oldukları için

$$\langle \alpha_L(X_j, X_j), T \rangle = c \langle \alpha_L(X_j, X_j), \xi \rangle = c \langle A_L^\xi(X_j), X_j \rangle$$

elde ederiz.

Şimdi bu ifadeye (5.3.1) denklemini uygularsak

$$\langle \alpha_L(X_j, X_j), T \rangle = c \langle A^\xi(X_j), X_j \rangle = c \langle \alpha(X_j, X_j), \xi \rangle$$

buluruz.

Eğer M , minimal ise ve $\alpha(T, T) = 0$ olduğu gözönüne alınırsa (5.3.2) ve (5.3.3) denklemlerinin sağ tarafları sıfıra eşit olur. Bu da L nin $\mathbb{R}^n$ de minimal olduğunu vurgular.

Sonuç olarak, $\mathbb{R}^n$ de L nin minimal olması durumunda (5.3.2) denkleminin sol tarafı sıfır olur ki bu da M nin minimal olduğu sonucunu verir.

Şimdi aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

5.3.1.Önerme. M , bir minimal helis altmanifoldu olsun öyle ki $\forall p \in M$ için $\mathbb{R}^n$ de $L = H_p \cap M$ minimaldir. Bu durumda M bir regle helistir.

İspat. M , bir minimal helis altmanifoldu olsun öyle ki $\forall p \in M$ için $\mathbb{R}^n$ de $L = H_p \cap M$ minimaldir. Bu durumda M bir regle helistir.

6. HELİS HİPERYÜZEYLERİ İÇİN TENSÖR ÇARPIMLARI

Öklid uzaylar içerisine tanımlı izometrik immersiyonların tensör çarpımı ile yakından ilişkili olan ve Bang-Yen Chen tarafından [37] ve [38] de çalışılan Riemann manifoldların convolution kavramı, warped çarpım manifoldlarının doğal bir genelleştirmesi olarak göz önüne alınabilir. İki Riemann manifoldun convolutionu, belirli şartlar altında yine bir Riemann manifold olmakta ve tensör çarpım immersiyonları, birer convolution Riemann manifold belirlemektedir [24].

Bu bölüm, regüler bir eğri ve bir helis hiperyüzeyinin immersiyonlarının tensör çarpımlarından oluşmaktadır. Buradan bir 3- altmanifold elde edilmiştir. Burada elde edilen 3- altmanifold aynı zamanda bir konvolüsyon manifolddur ki bu manifoldun minimalliğine bakılmıştır.

E_*^3 da bir regüler yüzey ve E_*^2 da regüler bir eğri belirleyen immersiyonlar, sırasıyla $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E_*^3 \subset E^3$, $\phi(u, v) = \alpha(u) + v(\sin \theta N^\alpha + \cos \theta B^\alpha)$ ve $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_*^2 \subset E^2$, $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ olsun, burada E_*^2 ile $E^2 - \{0\}$ ifadesi gösterilmektedir. Bu durumda iki immersiyonun tensör çarpımı,

$$l(u, v, t) = (x \otimes \beta) : U \times I \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow E^3 \otimes E^2 \cong E^6$$

yani

$$l(u, v, t) = (\phi_1(u, v)\beta_1(t), \phi_1(u, v)\beta_2(t), \phi_2(u, v)\beta_1(t), \phi_2(u, v)\beta_2(t), \phi_3(u, v)\beta_1(t), \phi_3(u, v)\beta_2(t)).$$

ile verilir.

$U \times I$ manifoldunun tanjant uzayının bir bazı, $\{\frac{\partial l}{\partial u}, \frac{\partial l}{\partial v}, \frac{\partial l}{\partial t}\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u} &= (\phi_{1u}(u, v)\beta_1(t), \phi_{1u}(u, v)\beta_2(t), \phi_{2u}(u, v)\beta_1(t), \phi_{2u}(u, v)\beta_2(t), \phi_{3u}(u, v)\beta_1(t), \\ &\quad \phi_{3u}(u, v)\beta_2(t)) \\ &= ((\alpha'_1(u) + v\sin\theta N_1^{\alpha'} + v\cos\theta B_1^{\alpha'})\beta_1(t), \\ &\quad (\alpha'_1(u) + v\sin\theta N_1^{\alpha'} + v\cos\theta B_1^{\alpha'})\beta_2(t), \\ &\quad (\alpha'_2(u) + v\sin\theta N_2^{\alpha'} + v\cos\theta B_1^{\alpha'})\beta_1(t), \\ &\quad (\alpha'_2(u) + v\sin\theta N_2^{\alpha'} + v\cos\theta B_1^{\alpha'})\beta_2(t), \end{aligned}$$

$$(\alpha'_3(u) + v \sin \theta N_3^{\alpha'} + v \cos \theta B_3^{\alpha'}) \beta_1(t),$$

$$(\alpha'_3(u) + v \sin \theta N_3^{\alpha'} + v \cos \theta B_3^{\alpha'}) \beta_2(t)),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial v} &= (\phi_{1v}(u, v) \beta_1(t), \phi_{1v}(u, v) \beta_2(t), \phi_{2v}(u, v) \beta_1(t), \phi_{2v}(u, v) \beta_2(t), \phi_{3v}(u, v) \beta_1(t), \\ &\quad \phi_{3v}(u, v) \beta_2(t)) \\ &= ((\sin \theta N_1^{\alpha'} + \cos \theta B_1^{\alpha'}) \beta_1(t), (\sin \theta N_1^{\alpha'} + \cos \theta B_1^{\alpha'}) \beta_2(t) \\ &\quad (\sin \theta N_2^{\alpha'} + \cos \theta B_2^{\alpha'}) \beta_1(t), (\sin \theta N_2^{\alpha'} + \cos \theta B_2^{\alpha'}) \beta_2(t) \\ &\quad (\sin \theta N_3^{\alpha'} + \cos \theta B_3^{\alpha'}) \beta_1(t), (\sin \theta N_3^{\alpha'} + \cos \theta B_3^{\alpha'}) \beta_2(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial t} &= (\phi_1(u, v) \beta'_1(t), \phi_1(u, v) \beta'_2(t), \phi_2(u, v) \beta'_1(t), \phi_2(u, v) \beta'_2(t), \phi_3(u, v) \beta'_1(t), \\ &\quad \phi_3(u, v) \beta'_2(t)) \\ &= ((\alpha_1(u) + v(\sin \theta N_1^\alpha + \cos \theta B_1^\alpha)) \beta'_1(t), \\ &\quad (\alpha_1(u) + v(\sin \theta N_1^\alpha + \cos \theta B_1^\alpha)) \beta'_2(t) \\ &\quad (\alpha_2(u) + v(\sin \theta N_2^\alpha + \cos \theta B_2^\alpha)) \beta'_1(t), \\ &\quad (\alpha_2(u) + v(\sin \theta N_2^\alpha + \cos \theta B_2^\alpha)) \beta'_2(t) \\ &\quad (\alpha_3(u) + v(\sin \theta N_3^\alpha + \cos \theta B_3^\alpha)) \beta'_1(t), \\ &\quad (\alpha_3(u) + v(\sin \theta N_3^\alpha + \cos \theta B_3^\alpha)) \beta'_2(t)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu bazlar yardımıyla, aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

6.1.Lemma. E_*^3 da bir regüler yüzey ve E_*^2 da regüler bir eğri belirleyen immersiyonlar, sırasıyla $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E_*^3 \subset E^3$, $\phi(u, v) = \alpha(u) + v(\sin \theta N^\alpha + \cos \theta B^\alpha)$ ve $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_*^2 \subset E^2$, $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ olsun, burada E_*^2 ile $E^2 - \{0\}$ ifadesi gösterilmektedir. Buna göre, $l(u, v, t)$ ifadesi onların tensör çarpımıdır. Bu durumda, E^6 nın Imf üzerine Öklid metriği tarafından indirgenmiş g Riemann metriğinin bileşenleri

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_1(\phi_u, \phi_u) \rho_2^2, g_{22} = g_1(\phi_v, \phi_v) \rho_2^2, g_{33} = \rho_1^2 g_2(\beta', \beta'), \\ g_{12} &= g_1(\phi_u, \phi_v) \rho_2^2 = g_{21}, g_{13} = \rho_1 \rho_2 d\rho_1(\phi_u) \rho_2(\beta') = g_{31}, \\ g_{23} &= \rho_1 \rho_2 d\rho_1(\phi_v) \rho_2(\beta') = g_{32}, \end{aligned}$$

olarak elde edilirler, burada $\rho_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \phi_i^2}$ ve $\rho_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^2 \beta_j^2}$, sırasıyla x ve β nın uzaklık fonksiyonlarıdır. Ayrıca, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, sırasıyla, E^3 ve E^2 nin Öklidyen koordinat sistemleridirler.

İspat. E_*^3 da bir regüler yüzey ve E_*^2 da regüler bir eğri belirleyen immersiyonlar, sırasıyla $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E_*^3 \subset E^3$, $\phi(u, v) = \alpha(u) + v(\sin \theta N^\alpha + \cos \theta B^\alpha)$ ve $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_*^2 \subset E^2$, $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ olsun. Bu durumda, (2.1.1) dan

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u} \right\rangle = \|\phi_u\|^2 \|\beta\|^2 = g_1(\phi_u, \phi_u) \rho_2^2, \\ g_{22} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial v} \right\rangle = \|\phi_v\|^2 \|\beta\|^2 = g_1(\phi_v, \phi_v) \rho_2^2, \\ g_{33} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right\rangle = \|\phi\|^2 \|\beta'\|^2 = \rho_1^2 g_2(\beta', \beta'), \\ g_{12} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial v} \right\rangle = \langle \phi_u, \phi_v \rangle \|\beta\|^2 = g_1(\phi_u, \phi_v) \rho_2^2 = g_{21}, \\ g_{13} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right\rangle = \langle \phi_u, \phi \rangle \langle \beta, \beta' \rangle = \rho_1 \rho_2 d\rho_1(\phi_u) \rho_2(\beta') = g_{31}, \\ g_{23} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right\rangle = \langle \phi_v, \phi \rangle \langle \beta, \beta' \rangle = \rho_1 \rho_2 d\rho_1(\phi_v) \rho_2(\beta') = g_{32}, \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz:

6.1. Teorem. E_*^3 da bir regüler yüzey ve E_*^2 da regüler bir eğri belirleyen immersiyonlar, sırasıyla $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E_*^3 \subset E^3$, $\phi(u, v) = \alpha(u) + v(\sin \theta N^\alpha + \cos \theta B^\alpha)$ ve $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_*^2 \subset E^2$, $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ olsun, burada E_*^2 ile $E^2 - \{0\}$ ifadesi gösterilmektedir. Bu durumda,

$$\mathbf{l} : U \times I \rightarrow E^3 \otimes E^2 = E^{mn}; (u, v, t) \rightarrow \phi(u, v) \otimes \beta(t), u, v \in U, t \in I,$$

dönüşümü $\rho_2 g_1 * \rho_1 g_2$ metriğine sahip bir $U \star I$ 3-manifoldunu meydana getirir, burada $\rho_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \phi_i^2}$ ve $\rho_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^2 \beta_j^2}$, sırasıyla x ve β nın uzaklık fonksiyonlarıdır. Ayrıca, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, sırasıyla, E^3 ve E^2 nin Öklidyen koordinat sistemleridirler.

İspat. Lemma 6.1 dikkate alınarak ve (2.1.1) formülü kullanılarak istenen ifadeye ulaşılır.

Diğer taraftan, $U \star I$ manifoldunun tanjant uzayının ortonormal bazları için aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

6.2. Lemma. E_*^3 da bir regüler yüzey ve E_*^2 da regüler bir eğri belirleyen immersiyonlar, sırasıyla $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E_*^3 \subset E^3$, $\phi(u, v) = \alpha(u) + v(\sin \theta N^\alpha + \cos \theta B^\alpha)$ ve $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_*^2 \subset E^2$, $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ olsun, burada E_*^2 ile $E^2 - \{0\}$ ifadesi gösterilmektedir. Bu durumda, $\mathbf{l} = \phi \otimes \beta$ tensör çarpım immersiyonu için $U \star I$ nin tanjant uzayının ortonormal bazları

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{l}_u, e_2 = \frac{g_{11} \mathbf{l}_v - g_{12} \mathbf{l}_u}{\sqrt{g_{11} G_{33}}}, \\ e_3 &= \frac{-g_{11} G_{23} \mathbf{l}_v + g_{11} G_{33} \mathbf{l}_t + (g_{12} G_{23} - g_{13} G_{33}) \mathbf{l}_u}{g_{11} \sqrt{G_{33} |G|}}, \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada G, g Riemann metriğine karşılık gelen yani bileşenleri g_{ij} ler olan matrisdir ve $G_{23} = g_{11}g_{12} - g_{12}g_{13}, G_{33} = g_{11}g_{12} - g_{12}^2$ dir.

İspat. M nin tanjant uzayının $\{l_u = x_u \otimes \alpha, l_v = x_v \otimes \alpha, l_t = x \otimes \alpha'\}$ bazını ortonormal hale getirelim. Açık olarak,

$$e_1 = \frac{l_u}{\|l_u\|} = \frac{l_u}{\sqrt{g(l_u, l_u)}} = \frac{1}{g_{11}} l_u$$

dır. e_1 in bu değeri göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{l_v - g(l_v, e_1)e_1}{\|l_v - g(l_v, e_1)e_1\|} \\ &= \frac{l_v - g(l_v, e_1)e_1}{\sqrt{g(l_v - g(l_v, e_1)e_1, l_v - g(l_v, e_1)e_1)}} \\ &= \frac{l_v - g(l_v, e_1)e_1}{\sqrt{g(l_v, l_v) + g(l_v, e_1)^2 g(e_1, e_1) - 2g(l_v, e_1)^2}} \\ &= \frac{g_{11}l_v - g_{12}l_u}{\sqrt{g_{11}^2 g_{22} + g_{12}^2 g_{11} - 2g_{12}^2 g_{11}}} \\ &= \frac{g_{11}l_v - g_{12}l_u}{\sqrt{g_{11}G_{33}}} \end{aligned}$$

elde edilir. e_1 ve e_2 vektörleri göz önüne alınırsa,

$$e_3 = \frac{l_t - g(l_t, e_1)e_1 - g(l_t, e_2)e_2}{\|l_t - g(l_t, e_1)e_1 - g(l_t, e_2)e_2\|}$$

vektörü uzun hesaplamaların ardından

$$e_3 = \frac{-g_{11}G_{23}l_v + g_{11}G_{33}l_t + (g_{12}G_{23} - g_{13}G_{33})l_u}{g_{11}\sqrt{G_{33}}|G|}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$U \star I$ manifoldunun normal uzayı için aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

6.3.Lemma. E_*^3 da bir regüler yüzey ve E_*^2 da regüler bir eğri belirleyen immersiyonlar, sırasıyla $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E_*^3 \subset E^3, \phi(u, v) = \alpha(u) + v(\sin \theta N^\alpha + \cos \theta B^\alpha)$ ve $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_*^2 \subset E^2, \beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ olsun, burada E_*^2 ile $E^2 - \{0\}$ ifadesi gösterilmektedir. Bu durumda, $\mathfrak{l} = \phi \otimes \beta$ tensör çarpım immersiyonu için $U \star I$ nin tanjant uzayının normal bazı

$$\begin{aligned} n_1 &= (-\phi_2(u, v)\beta_2(t), \phi_2(u, v)\beta_1(t), \phi_1(u, v)\beta_2(t), -\phi_1(u, v)\beta_1(t), 0, 0), \\ n_2 &= (\phi_3(u, v)\beta_2(t), -\phi_3(u, v)\beta_1(t), 0, 0, -\phi_1(u, v)\beta_2(t), \phi_1(u, v)\beta_1(t)), \\ n_3 &= (0, 0, -\phi_3(u, v)\beta_2(t), \phi_3(u, v)\beta_1(t), \phi_2(u, v)\beta_2(t), -\phi_2(u, v)\beta_1(t)). \end{aligned}$$

ile verilir.

Şimdi minimallikle ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz:

6.2.Teorem. E_*^3 da bir regüler yüzey ve E_*^2 da regüler bir eğri belirleyen immersiyonlar, sırasıyla $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E_*^3 \subset E^3$, $\phi(u, v) = \alpha(u) + v(\sin \theta N^\alpha + \cos \theta B^\alpha)$ ve $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_*^2 \subset E^2$, $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ olsun, burada E_*^2 ile $E^2 - \{0\}$ ifadesi gösterilmektedir. Bu durumda, bu immersiyonların tensör çarpımlarından oluşan 3- altmanifoldun minimal olması için gerek ve yeter koşul

$$\langle G_{13}l_{ut} - G_{23}l_{vt}, n_1 \rangle = 0,$$

$$\langle G_{13}l_{ut} - G_{23}l_{vt}, n_2 \rangle = 0,$$

$$\langle G_{11}l_{uu} + G_{22}l_{vv} + G_{33}l_{tt} - 2G_{12}l_{uv}, n_3 \rangle = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. Bir $\mathfrak{l} = x \otimes \beta : U \times I \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow E^6$ tensör çarpım immersiyonunun ikinci temel formu h olsun. Bu durumda, M bir minimal altmanifolddur gerek ve yeter şart

$$H = \frac{1}{3}(h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2) + h(e_3, e_3))$$

ortalama eğrilik vektörü özdeş olarak sıfırdır. Lemma 5.3 gözönüne alındığında ve $(h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2) + h(e_3, e_3)) \in TM^\perp$ olduğunda, H nın özdeş olarak sıfıra eşit olması için gerek ve yeter şart $1 \leq i \leq 3$ için

$$\langle h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2) + h(e_3, e_3), n_i \rangle = 0$$

dır. Yani, E^6 nın flat konneksiyonu ∇ düşünüldüğünde

$$\langle \bar{\nabla}_{e_1} e_1 + \bar{\nabla}_{e_2} e_2 + \bar{\nabla}_{e_3} e_3, n_i \rangle = 0.$$

elde edilir. $\langle l_{u, n_i} \rangle = 0, \langle l_{v, n_i} \rangle = 0, \langle l_{t, n_i} \rangle = 0$ olduğu için ikinci türev yönünde türevleri düşünebiliriz. Bu durumda, $\mathfrak{l}$ nin

$$\Delta \mathfrak{l} = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \phi^i} (\sqrt{|G|} \sum_{j=1}^3 g^{ij} l_j),$$

Laplasyanını kullanarak,

$$\frac{1}{|G|} \{G_{11}l_{uu} + G_{22}l_{vv} + G_{33}l_{tt} - 2G_{12}l_{uv} + 2G_{13}l_{ut} - 2G_{23}l_{vt}\}.$$

elde ederiz. Böylece, uzun hesaplamalar sonucunda

$$< G_{13}l_{ut} - G_{23}l_{vt}, n_1 > = 0,$$

$$< G_{13}l_{ut} - G_{23}l_{vt}, n_2 > = 0,$$

$$< G_{11}l_{uu} + G_{22}l_{vv} + G_{33}l_{tt} - 2G_{12}l_{uv}, n_3 > = 0$$

ifadelerine sahip oluruz. O halde, ispat tamamlanır.



7. SONUÇ

Bilindiği gibi helis eğrileri, Fraktal geometri, DNA'nın yapısındaki moleküllerin dizilişi gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. Hatta helis eğrileri gibi helis yüzeyleri ve helis hiperyüzeyleri de ilgi çekici olmuştur. Bu tez oluşturulurken bu ilgi çekicilik dikkate alınmış ve helis hiperyüzeyleri ile ilgili pek çok kavram bir araya getirilmiştir. Buna göre bu tezde, öncelikle $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeyleri incelenmiştir. Birim hızlı düzlemsel bir eğriden elde edilen helis hiperyüzeyi için eğriliklere bakılmış, ardından $\mathbb{R}^3$ de verilen eğrilerin Darboux çatıları gözönüne alınarak incelemeler yapılmış ve $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeylerinin Gauss dönüşümü verilmiştir. Daha sonra, Öklidyen uzayların helis altmanifoldları çalışılmış ve ardından helis altmanifold kavramı verilerek, bu manifoldların çarpımı incelenmiştir. Ayrıca, helis altmanifoldların yapısı tekrar incelenerek regle helisler verilmiş ve bunların minimalliği çalışılmıştır. Son olarak da helis hiperyüzeyleri ve düzlemsel eğrilerin tensör çarpımlarının karakterizasyonları incelenmiştir. Böylece bu tez, helislerle ilgili yeni çalışmalara yol açabilir, farklı karakterizasyonlar elde edilebilmesi için yol gösterici olabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Do Carmo, M.c.B.K.** (2012). *Diferansiyel Geometri: Eğriler ve Yüzeyler*, TÜBA, Ankara.
- [2] **Di Scala, A. ve Ruiz-Hernández, G.** (2009). Helix submanifolds of Euclidean spaces, *Monatsh Math*, 157, 205–215.
- [3] **Di Scala, A. ve Ruiz-Hernández, G.** (2010). Higher codimensional Euclidean helix submanifolds, *Kodai Math. J.*, 33, 192–210.
- [4] **Ruiz-Hernández, G.** (2008). Helix, shadow boundary and minimal submanifolds, *Ill.J. Math*, 52(4), 1385–1397.
- [5] **Cermelli, P. ve Di Scala, A.** (2007). Constant-angle surfaces in liquid crystals, *Philos. Mag.*, 87, 1871–1888.
- [6] **Zıplar, E., Şenol, A. ve Yaylı, Y.** (2012). Helix Hypersurfaces and Special Curves, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 7(25), 1233–1245.
- [7] **Cadena, C., Di Scala, A. ve Hernández, G.** (2015). Helix surfaces in Euclidean spaces, *Beitr Algebra Geom*, 56, 551–573.
- [8] **Ertem, F., Yaylı, Y. ve Hacı salıhoğlu, H.** (2010). A Characterization of Cylindrical Helix Strip, *Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1*, 59(2), 37–51.
- [9] **Fetcu, D.** (2015). A Classification Result for Helix Surfaces with Parallel Mean Curvature in Product Spaces, *Ark. Mat*, 53, 249–258.
- [10] **Garnica, E., O., P. ve Ruiz-Hernández, G.** (15 Jun 2011). Classification of constant angle hypersurfaces in warped products via eikonal functions, *arXiv:1104.0050v3 [math.DG]*.
- [11] **Kelleci, A., Turgay, C.N. ve Ergüt, M.** (2019). New results on helix surfaces in the Minkowski 3-space, *International Electronic Journal of Geometry*, 12(1), 61–70.
- [12] **Kula, L., Ekmekçi, N., Yaylı, Y. ve İlarslan, K.** (2010). Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space, *Turk J Math*, 34, 261–273.
- [13] **Küçükarslan, Y. ve Yıldırım, Y.** (2018). On k-Type 2-Degenerate Slant Helices in 4-Dimensional Minkowski Space-Time, *Journal of Advanced Physics*, 7(1), 147–151.
- [14] **Özkaldı Karkuş, S., Şenol, A., Ghadami, R. ve Yaylı, Y.** (2013). LC Helix On Hypersurfaces In Minkowski Space $\mathbb{E}_1^{n+1}$, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 86(3), 471–485.
- [15] **Ruiz-Hernández, G.** (2011). Minimal helix surfaces in $N^n \times \mathbb{R}$, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg*, 81, 55–67.
- [16] **Zıplar, E., Şenol, A. ve Yaylı, Y.** (2012). On Weak r-Helix Submanifolds, *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 10(2), 139–148.

- [17] **Di Scala, A.** (2009). Weak Helix Submanifolds of Euclidean Spaces, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg*, 79, 37–46.
- [18] **Di Scala, A. ve Ruiz-Hernández, G.** (2016). Minimal helix submanifolds and minimal Riemannian foliations, *Bol. Soc. Mat. Mex*, 22, 229–250.
- [19] **Heydari, A. ve Amiri-Sharifi, S.** (10 May 2015). Semi-Helices of Euclidean Spaces, *arXiv:1505.04165v1 [math.DG]*.
- [20] **Di Scala, A. ve Ruiz-Hernández, G.** (2016). Minimal helix submanifolds and minimal Riemannian foliations, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 22, 229–250.
- [21] **Decruyenaere, F. ve Dillen, F.** (1993). The Semiring of Immersions of Manifolds, *Contributions to Algebra and Geometry*, 34(2), 209–215.
- [22] **Mihai, I., Rosca, R., Verstraelen, L. ve Vrancken, L.** (1994/95). Tensor product surfaces of Euclidean planer curves, *Rend. Sem. Mat. Messina, Ser11*, 18(3).
- [23] **Arslan, K., Ezentaş, R., Mihai, I., Murathan, C. ve Özgür, C.** (2001). Tensor Product Surfaces of a Euclidean Space Curve and a Euclidean Plane Curve, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 42(2), 523–530.
- [24] **Aksoy, A.** *Tensör Çarpım İmmersiyonlarının Geometrisi* (Doktora Tezi). İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [25] **Hacı salihoglu, H.H.** *Diferensiyel Geometri*, cilt I. II. III, Ankara.
- [26] **Gündüzalp, Y.** (2007). *Riemann Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [27] **Şahin, B.** (1996). *CR-Altmanifoldların Geometrisi* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü Üniversitesi, Malatya.
- [28] **Hacı salihoglu, H.H.** (2006). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- [29] **Do Carmo, M.** (1992). *Riemannian Geometry*, Birkhauser Boston.
- [30] **O’neill, B.** (1983). *Semi-Riemann Geometry*, Academic Press, New York.
- [31] **Sabuncuoğlu, A.** (2006). *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayıncılık, Ankara.
- [32] **Zıplar, E.** (2013). *Öklid Uzaylarının r-Helis Altmanifoldları Üzerine* (Doktora Tezi). Ankara.
- [33] **Yüce, S.** *Differansiyel Geometri*, Sürat Üniversite Yayınları.
- [34] **Bootby, W.** (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press Inc.
- [35] **Rovenski, V.** (2004). Foliations, submanifolds and mixed curvature, *J. Math. Sci.*
- [36] **Şahin, B.** (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayıncılık, Ankara.
- [37] **Chen, B.** (2002). Convolution of Riemannian Manifolds and its Applications, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 66(2), 177–191.

- [38] **Chen, B.** (2003). More on Convolution of Riemannian Manifolds, *Contributions to Algebra and Geometr*, 44(1), 9–24.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Musab Safa ÖZKAN

Doğum Tarihi ve Yeri :

E-Posta :

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2015, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİMLER VE ÖDÜLLER:

- Final Eğitim Kurumlarında Eğitimci (Matematik Öğretmeni). 2015-halen