

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OLABİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ ÜZERİNE

131731

Gültekin SOYLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

131731

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANTALYA

2001

OLABİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ ÜZERİNE

Gültekin SOYLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2001

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OLABİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ ÜZERİNE

Gültekin SOYLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez/...../2001 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından(.....) not takdir edilerek
oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

JÜRİ:

Doç. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Prof. Dr. Doğan ÇOKER

Dr. Melike B. YÜCEL



**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

ÖZET

OLABİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ ÜZERİNE

Gültekin SOYLU

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa Demirci

Haziran 2001, 54 Sayfa

Bu çalışmada bulanık ölçümler kavramı tanıtılmış, olabilirlik konusu farklı kaynaklardan farklı yaklaşımlar biraraya getirilerek etraflıca incelenmiş ve uygulamalarla bu yeni kavramların karşılaşılan problemlerdeki güçlükleri gidermeye ne şekilde yardımcı ve yararlı olduğu gösterilmiştir.

Giriş bölümünde bulanık ölçümlerin gerekliliği ve tarihi gelişimi aktarıldıktan sonra ikinci bölümde ön hazırlık olarak bulanık kümeler kavramı ve bulanık kümelerin özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde bulanık ölçümler teorisi incelenmiş, olabilirlik ölçümü ve bulanık integral tanıtılmıştır. Dördüncü bölüm, göreceli yeni olan bu kavramların yorumlanmasına, olabilirlik kavramına diğer bir yaklaşıma, olabilirlik ve olasılık arasındaki bağlantılara ayrılmıştır. Beşinci ise bu yeni kavramların gelecekte ne kadar önemli görevler üstleneceğini gösterebilmek amacıyla, gerçek hayattan alınmış problemlerin üzerine bulanık ölçümler ve olabilirlik ile nasıl gidilebileceği incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Bulanık Kümeler, Bulanık Ölçümler, Olabilirlik.

JÜRİ: Doç Dr. Mustafa Demirci

Prof. Dr. Doğan Çoker

Dr. Melike B. Yücel

ABSTRACT

ON POSSIBILITY MEASURES

Gültekin SOYLU

M.Sc. in Mathematics

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Mustafa Demirci

June 2001, 54 Pages

In this work the concept of fuzzy measures is introduced, the concept of possibility is studied by collecting different approaches from different references and it is shown how these relatively new concepts are used to solve real world problems.

After explaining the necessity of fuzzy measures and giving the historical development of this concept in the introduction in the second chapter of the work, fuzzy sets are introduced and their properties are given. The third chapter is devoted to fuzzy measure theory, possibility theory and fuzzy integral theory. In the fourth chapter the semantic of the concepts is discussed, another approach to possibility is given and several conversions of possibility and probability are introduced. In the fifth chapter the applications and examples pertained with possibility measures and fuzzy measures are introduced.

KEYWORDS: Fuzzy Sets, Fuzzy Measures, Possibility.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Mustafa Demirci

Prof. Dr. Doğan Çoker

Dr. Melike B. Yücel

ÖNSÖZ

Bulanık ölçümler ve bunların özel bir hali olan olabilirlik konularının anlatıldığı bu tezin, yeni olan bu konularla ilgili ülkemizdeki Türkçe kaynak açığını gidereceğini umuyorum. Doğrudan uygulanabilirliği olan bu konulara ülkemizde ilgi gösterilmesi, gelişmelerin zamanında takip edilmesi hatta gelişmelere katkıda bulunulması çabalarının, gelişmekte olan ülkeler sınıfında kabul edilen ülkemizin arayışını kapatarak bir üst sınıfa atlamasında çok önemli bir yer tutacağı inancındayım.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Mustafa DEMİRCİ'ye teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
2. BULANIK KÜMELER.....	3
2.1. Bulanık Küme Tanımı.....	3
2.2. Bulanık Kümelerin Gösterimi.....	4
2.3. Bulanık Kümelerde Temel Kavramlar.....	5
2.4. Bulanık Kümelerde İşlemler.....	6
3. BULANIK ÖLÇÜMLER, OLABİLİRLİK ve BULANIK İNTEGRAL.....	10
3.1. Bulanık Ölçümler.....	10
3.2. Olabilirlik.....	11
3.2.1. Kanı (belief) ve usalılık (plausibility) ölçümleri.....	11
3.2.2. Olabilirlik (possibility) ve gereklilik (necessity) ölçümleri.....	21
3.3. Bulanık İntegral.....	25
4. OLABİLİRLİĞİN YORUMLANMASI ve FARKLI YAKLAŞIMLAR.....	27
4.1. Olabilirlik-Olasılık Uyumluluğu Prensibi.....	27
4.1.1. Olabilirlik dağılımı.....	27
4.1.2. Olabilirlik-olasılık uyumluluğu prensibi.....	29
4.2. Olabilirlik ile Olasılık Ölçümleri Arasındaki Dönüşümler.....	30

4.2.1. Hileli yazı-tura deneyi.....	30
4.2.2. Genel sonlu durum.....	31
4.2.3. Olabilirlik ile olasılık arasında birebir dönüşüm.....	33
4.3. Diğer Bazı Olasılık-Olabilirlik Dönüşümleri.....	35
4.3.1. Maximum normalleştirme frekans dönüşümü.....	36
4.3.2. Toplamsal frekans dönüşümü.....	36
5. UYGULAMALAR.....	38
5.1. Beklenen Değer.....	38
5.2. Beklenen Değer Aralığı.....	39
5.3. Dempster-Shafer Teorisi.....	41
5.4. Olabilirlik Teorisi.....	43
5.5. Bulanık Ölçüm ve Bulanık İntegral.....	44
6. SONUÇ.....	46
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	49

1. GİRİŞ

Bulanık ölçüm teorisinin 1970'lerde ortaya çıkması matematiksel kavram ve teorileri genelleştirme eğiliminin önemli bir örneğidir. Bu şekildeki genelleştirmelerle konular daha derin olarak incelenmekte ayrıca gerçek hayatı modellemekteki becerilerimiz artmaktadır.

Bulanık ölçüm teorisi de klasik ölçüm teorisinin bir genelleştirmesidir. Klasik teorideki toplamsallık özelliği yerini daha zayıf olan monotonluk ve süreklilik varsayımlarına dayanmaktadır. Bir çok uygulamada, bulanık ölçüm teorisinde toplamsallık varsayımının kaldırılması bu uygulamalarda geniş ölçüde kolaylık sağlamakta ve bulanık ölçüm teorisinin uygulama alanının klasik ölçüm teorisininkine kıyasla daha geniş olmasını sağlamaktadır.

Klasik ölçüm teorisine karşı ilk adımlardan birisi Choquet (1954) tarafından kapasiteler teorisi adı altında atılmıştır. Choquet evrensel kümenin her alt kümesine karşılık bir gerçel sayı getiren küme fonksiyonlarını incelemiştir. Bu tür fonksiyonlara Choquet kapasiteleri adı verilmiştir. Çok geniş bir yaklaşım olmasına rağmen çoğu uygulamalarda Choquet kapasitelerinin fazla genel olduğu ortaya çıkmıştır.

Dempster (1967) tarafından toplamsal olmayan iki çeşit ölçüm ortaya konmuş ve bu kavramlar Shafer (1976) tarafından tamamen geliştirilmiştir. Bu iki ölçümün ilki alttoplamsal olan usalılık ölçümü, ikincisi ise üsttoplamsal olan kanı ölçümüdür. Bu ölçümlerden bir tanesi verildiğinde diğer türden olan bir ölçüm tek türlü olarak belirlenmektedir. Bu iki ölçüm birlikte Dempster-Shafer teorisi adı verilen teorinin temel yapı taşını oluşturmaktadır.

Dempster'in öncü çalışmasına dayanarak kanı ve usalılık ölçümleri alt ve üst olasılık sınırları olarak yorumlanabilmektedir, böylece bu teori olasılığı aralık değerli olarak incelemektedir.

Toplamsal olmayan ölçümlere dayalı diğer bir teori de olabilirlik teorisi olarak bilinir ve Zadeh (1965) tarafından ortaya konan bulanık küme kavramından yola çıkılarak kurulmuştur. Zadeh (1978) normalleştirilmiş bir bulanık kümeden hareketle olabilirlik dağılım fonksiyonunu tanımlamıştır.

Dubois ve Prade (1988) ve Klir ve Folger (1988) alışmalarında olabilirlik ölçümünün sadece bulanık kümelerden yola çıkarak değil Dempster-Shafer teorisindeki usalılık ölçümünü özel bir hali olarak da elde edilebileceğini göstermişlerdir.

Sugeno (1974) ise yine klasik kümelerden bulanık kümelere yapılan genelleştirmenin analoğu olarak klasik ölçümü bulanık ölçüme genelleştirmiş ve bunu yaparken aynı şekilde toplamsallık özelliğini monotonluk ve süreklilik özellikleri ile değiştirmiştir. Bu yaklaşımla Sugeno (1978) bulanık integrali tanımlamıştır.

Olasılık teorisinin toplamsallık özelliğinin doğruluğuna karşı ilginç bir tez de Viertl (1987) tarafından ortaya atılmış ve gerçekte tüm ölçümlerin kaçınılmaz ölçüm hatalarından dolayı bulanık ölçümler olduğu gösterilmiştir.

2. BULANIK KÜMELER

2.1. Bulanık Küme Tanımı

Sıradan kümelerde karakteristik fonksiyon evrensel kümedeki her elemana 0 veya 1 değerini atayarak o elemanın söz konusu kümeye ait olup olmadığını belirler. Bu fonksiyon genelleştirilerek belirli bir aralıkta değerler alması sağlandığında ise evrensel kümedeki elemanların söz konusu kümeye ait olma derecesinden söz edilebilir. Böyle bir fonksiyona üyelik fonksiyonu ve bu fonksiyonun tanımladığı kümeye de bulanık (fuzzy) küme denir. Üyelik fonksiyonu genellikle $[0, 1]$ aralığında tanımlanır. Burada $[0, 1]$, 0 ve 1 dahil olmak üzere 0 ve 1 arasındaki reel sayılar aralığını göstermektedir (Zadeh 1965).

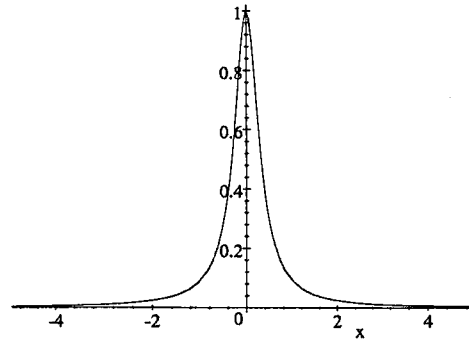
X evrensel kümeyi göstereyin, buna göre X 'in A bulanık altkümelerini tanımlayan μ_A üyelik fonksiyonu genellikle aşağıdaki şekle sahiptir,

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1].$$

Örnek olarak sıfıra yakın gerçel sayıların üyelik fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + 10x^2}.$$

Bu üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdadır.



Şekil 1.1. 0'a yakın gerçel sayıların bulanık kümesinin üyelik fonksiyonuna örnek.

Üyelik fonksiyonları genellikle $[0, 1]$ aralığında alınmakla beraber herhangi tam sıralı veya kısmi sıralı küme bu iş için kullanılabilir. Bu kümenin elemanları arasındaki sıralama

üyelik derecesi olarak yorumlanabildiği sürece sözkonusu elemanların sayılardan oluşmasına da gerek yoktur (Wang ve Klir 1992). Bu şekilde genelleştirilmiş üyelik fonksiyonlarının gösterimi

$$\mu_A : X \rightarrow L$$

şeklindedir.

Burada L en azından kısmi sıralı bir kümeyi belirtmektedir. Bunun bazı uygulamalarda karşımıza çıkan örneği $L = [0, 1]^n$ dir. Burada $[0, 1]^n$,

$$\underbrace{[0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]}_{n \text{ tane}}$$

kartezyen çarpımının kısa gösterimidir. $[0, 1]$ kümesi tam sıralı olmasına rağmen $[0, 1]^n$ kümesi sadece kısmi sıralıdır. Örnek olarak $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in [0, 1]^2 \ni a_1 > a_2$ ve $b_1 < b_2$ için $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ doğal sıralama bağıntımız ile karşılaştırılmaz. Aksi belirtilmedikçe çalışma boyunca $L = [0, 1]$ alınacaktır.

2.2. Bulanık Kümelerin Gösterimi

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu bir küme, A , X 'in bir bulanık altkümesi olsun ve μ_i ise x_i 'nin A 'ya üyelik derecesini göstere. Bu durumda A bulanık kümesinin gösterimi

$$A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \dots + \mu_n/x_n$$

şeklindedir. Bu gösterimde $/$ işareti üyelik derecesi ile söz konusu elemanı birbiriyle ilişkilendirmek $+$ işareti ise cebirsel toplam anlamında değil üyelik dereceleri ile ilintilenmiş elemanların birlikte bulanık kümeyi tanımladıklarını belirtmek için kullanılmıştır. Gözden kaçırılmaması gereken bir nokta da evrensel kümede olup da söz konusu bulanık kümede üyelik derecesi 0 olan dolayısıyla bulanık kümeye ait olmayan elemanların belirtilmesinin yanlış olmamakla beraber gereksiz olduğudur.

A bulanık kümesi sonlu ve sayılabilir bir evrensel kümede tanımlı ise bu gösterim

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_i/x_i$$

şeklini, X evrensel kümemiz bir gerçel sayı aralığı ise benzer olarak,

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

şeklini alır.

2.3. Bulanık Kümelerde Temel Kavramlar

İzleyen tanımlar aşağıdaki bulanık küme örneği ile açıklanacaktır. İnsanların yaşından seçilmiş sıradan evrensel kümemiz,

$$X = \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\},$$

ve bunların arasından genç sayılabilecekleri belirten bulanık kümemiz,

$$genç = \{1/5 + 1/10 + .8/20 + .5/30 + .2/40 + .1/50 + 0/60 + 0/70 + 0/80\}, (\mu_{genç} \in [0, 1])$$

olsun.

Tanım 2.3.1. X evrensel kümesindeki A bulanık kümesinin *dayanağı* X 'in A içerisinde üyelik derecesi 0 dan farklı olan tüm elemanlarından oluşan sıradan kümedir. Böylece, $\mathcal{P}(X)$ X 'in tüm sıradan altkümelerinin ailesini (kuvvet kümesini) ve $\tilde{\mathcal{P}}(X)$ X 'in tüm bulanık altkümelerinin ailesini göstermek üzere, X 'teki bulanık kümelerin dayanağı,

$$\text{supp}: \tilde{\mathcal{P}}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X),$$

fonksiyonundan elde edilir, öyle ki supp fonksiyonu,

$$\forall A \in \tilde{\mathcal{P}}(X), \text{supp } A = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\},$$

şeklinde tanımlanır ve $\text{supp}(A)$ 'ya A 'nın dayanağı denir.

Bu durumda yukarıda tanımladığımız *genç* bulanık kümesinin dayanağı,

$$\text{supp}(genç) = \{5, 10, 20, 30, 40, 50\},$$

sıradan kümesidir. Boş bulanık kümelerin dayanağı boş kümedir.

Tanım 2.3.2. A , X evrensel kümesinin bir bulanık altkümesi olmak üzere A 'nın yüksekliği (height),

$$\text{hght}(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x),$$

reel sayısı ile verilir.

Tanım 2.3.3. Bir bulanık kümenin en az bir elemanı 1 üyelik derecesine sahipse bu bulanık kümeye normaldir denir. Diğer bir deyişle, A , X 'in bir bulanık altkümesi olmak üzere,

$$\exists x \in A \ni \mu_A(x) = 1 \Leftrightarrow A \text{ normaldir.}$$

Tanım 2.3.4. X evrensel kümesinde tanımlı A bulanık kümesinin α -kesimi, A_α ile gösterilen ve aşağıdaki gibi tanımlanan sıradan kümedir.

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

Yukarıdaki örnekte tanımlanan *genç* bulanık kümesinin yüksekliği 1 dir, normaldir ve $\alpha = .8$ için α -kesimi,

$$genç_{.8} = \{5, 10, 20\}$$

dir.

2.4. Bulanık Kümelerde İşlemler

X evrensel küme, A ve B , X 'in bulanık altkümeleri olsun.

Tanım 2.4.1.

$$\forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \Leftrightarrow A \subseteq B,$$

A, B 'nin altkümesidir denir.

Tanım 2.4.2.

$$\forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x) \Leftrightarrow A = B,$$

A, B 'ye eşittir denir.

Tanım 2.4.3.

$$\exists x \in X \ni \mu_A(x) \neq \mu_B(x) \Leftrightarrow A \neq B,$$

A, B 'ye eşit değildir denir.

Tanım 2.4.4.

$$A \subseteq B, A \neq B \Leftrightarrow A \subset B,$$

A, B 'nin has altkümesidir denir.

Tanım 2.4.5

A 'nın tümleyeni $\bar{A}$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu,

$$\forall x \in X, \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 2.4.6. A ve B bulanık kümelerinin bileşimi $A \cup B$ şeklinde gösterilen ve üyelik fonksiyonu,

$$\forall x \in X, \mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)].$$

şeklinde tanımlanan X 'in bulanık altkümesidir. Bu tanımdan kolayca görülüyor ki A ve B bulanık kümeleri $A \cup B$ bulanık kümesinin alt kümeleridir böylece sıradan kümelerin bu özelliği bulanık kümelerde de korunmaktadır.

Tanım 2.4.7. A ve B bulanık kümelerinin kesişimi $A \cap B$ şeklinde gösterilen ve üyelik fonksiyonu,

$$\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)],$$

şeklinde tanımlanan X 'in bulanık altkümesidir. Yine sıradan kümelerin özelliğine paralel olarak $A \cap B$ bulanık kümesinin A ve B bulanık kümelerinin alt kümesi olduğu görülüyor.

Tanım 2.4.8. Sıradan kümelerin matematiksel kavramlarını bulanık kümelere genelleştiren bir diğer temel prensip ise genişleme prensibidir. X 'in sonlu olduğu durumu ele alarak açıklayacak olursak, genişleme prensibi, X sıradan kümesinin $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarını diğer bir sıradan küme Y 'ye götüren herhangi bir f fonksiyonunu X 'in bir bulanık altkümesinden Y 'nin bir bulanık altkümesine götürecek şekilde genelleştirme işini görür. Formal olarak,

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ sonlu bir küme,}$$

$$f: X \rightarrow Y \text{ bir fonksiyon,}$$

$$A \in \tilde{\mathcal{P}}(X), A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \dots + \mu_n/x_n \text{ olsun,}$$

genişleme prensibi,

$$\begin{aligned} f(A) &= f(\mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \dots + \mu_n/x_n) \\ &= \mu_1/f(x_1) + \mu_2/f(x_2) + \dots + \mu_n/f(x_n), \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ek olarak,

$$\begin{aligned} \exists x_1, x_2, \dots, x_k \in X (k \geq 2) \ni f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_k) = y \in Y \Rightarrow \\ \mu_{f(A)}y = \max[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \dots, \mu_A(x_k)], \end{aligned}$$

ayrıca f fonksiyonu örten değilse,

$$\forall x \in X, f(x) \neq y \in Y \Rightarrow \mu_{f(A)}(y) = 0.$$

Son olarak f fonksiyonu,

$$f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y, \quad y \in Y$$

şeklinde verilsin ve $A_1, A_2, \dots, A_n$, sırasıyla $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'in bulanık altkümeleri olsunlar, bu durumda,

$$\mu_{f(A_1, A_2, \dots, A_n)}y = \min[\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)],$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.4.1. Son prensibin uygulanışına örnek olarak $X_1 = \{a, b, c\}$, $X_2 = \{x, y\}$ ve $Y = \{p, q, r\}$ olmak üzere $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ fonksiyonu aşağıdaki matrisle tanımlanmış olsun:

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{cc} x & y \\ \left[\begin{array}{cc} p & p \\ q & r \\ r & p \end{array} \right] \end{array}.$$

A_1, X_1 üzerinde ve A_2, X_2 üzerinde tanımlı bulanık kümeler olsunlar öyle ki,

$$A_1 = .3/a + .9/b + .5/c, \quad A_2 = .5/x + 1/y.$$

Genişleme prensibi kullanılarak p, q, r 'nin $B = f(A_1, A_2) \in \tilde{\mathcal{P}}(Y)$ bulanık kümesindeki üyelik dereceleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\mu_B(p) = \max[\min(.3, .5), \min(.3, 1), \min(.5, 1)] = .5,$$

$$\mu_B(q) = \max[\min(.9, .5)] = .5,$$

$$\mu_B(r) = \max[\min(.5, .5), \min(.9, 1)] = .9.$$

Böylece genişleme prensibi ile,

$$B = f(A_1, A_2) = .5/p + .5/q + .9/r,$$

bulunur.



3. BULANIK ÖLÇÜMLER, OLABİLİRLİK ve BULANIK İNTEGRAL

3.1. Bulanık Ölçümler

Günlük hayatımızda karşılaştığımız problemlerin çözümünde klasik ölçümler bazen yetersiz kalmaktadırlar. Bulanık ölçümler, klasik ölçümlerin aksiyomlarının zayıflatılarak genelleştirilmesiyle elde edilirler ve böylece klasik ölçümleri de kapsarlar. Böylece bulanık ölçümler konusunda yapılan çalışmalarla daha önce aşamadığımız bazı problemler aşılmaya başlanmış, insanoğlunun problemleri matematiksel modelleme yöntemiyle çözmesinde önemli yeni adımlar atılmıştır. Bu açıdan bakıldığında bulanık ölçümler özellikle yapay zekacıların ve uzman sistemcilerin önem vererek üzerinde durdukları konulardan birisidir.

Çalışma boyunca aksi belirtilmedikçe aşağıdaki kabullere sadık kalacağız:

X boş olmayan bir küme, $\mathcal{Y}$ X 'in boş olmayan bir altkümeler ailesi ve $\mu : \mathcal{Y} \rightarrow [0, \infty]$ negatif olmayan, gerçel değerli bir küme fonksiyonu olsun,

$$\sup_{x \in \emptyset} \{x : x \in [0, \infty]\} = 0,$$

$$\inf_{x \in \emptyset} \{x : x \in [0, 1]\} = 1,$$

$$0 \times \infty = \infty \times 0 = 0,$$

$$\frac{1}{\infty} = 0,$$

$$\infty - \infty = 0,$$

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0,$$

öyle ki $\{a_i\}$ bir gerçel sayılar dizisidir.

Tanım 3.1.1. X boş olmayan bir küme, $\mathcal{Y}$ X 'in boş olmayan bir altkümeler ailesi ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mu : \mathcal{Y} \rightarrow [0, \infty]$ negatif olmayan, gerçel değerli bir küme fonksiyonuna X üzerinde bir bulanık ölçüm denir:

(BÖ1) $\emptyset \in \mathcal{Y} \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$ (boş kümede yok olma);

(BÖ2) $E, F \in \mathcal{Y}$ ve $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$ (monotonluk);

(BÖ3) $\{E_n\} \subset \mathcal{Y}, E_1 \subset E_2 \subset \dots$, ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{Y} \Rightarrow \lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ (alttan süreklilik);

(BÖ4) $\{E_n\} \subset \mathcal{Y}, E_1 \supset E_2 \supset \dots$, ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{Y} \Rightarrow \lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$ (üstten süreklilik).

μ bu koşullardan sadece (BÖ1), (BÖ2) ve (BÖ3)'ü sağladığında alt yarı sürekli bulanık ölçüm, sadece (BÖ1), (BÖ2) ve (BÖ4)'ü sağladığında ise üst yarı sürekli bulanık ölçüm adını alır. Bu iki tip ölçüme kısaca yarı sürekli bulanık ölçüm denir. Eğer $X \in \mathcal{Y}$ ve $\mu(X) = 1$ ise bu μ ölçümüne *düzenlidir* denir.

Bulanık ölçümün aksiyomları klasik ölçümünkilerle karşılaştırıldığında toplamsallık koşulunun kalktığını görüyoruz. Bu yüzden bulanık ölçümlere toplamsal olmayan ölçümler de denilebilir. Gözden kaçırılmaması gereken bir nokta da $\mathcal{Y}$ altkümeler ailemizin sonlu sayıda elemanı bulunduğu 3. ve 4. şartların kendiliğinden sağlandıklarıdır.

3.2. Olabilirlik

3.2.1. Kanı (belief) ve usulrılık (plausibility) ölçümleri.

Bu bölümde, kanı ve usulrılık ölçümü adı verilen özel yarı sürekli bulanık ölçümler sunulacak ve bu özel bulanık ölçümler arasındaki bazı temel ilişkiler incelenecektir.

Tanım 3.2.1. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)), \mathcal{P}(X)$ 'in kuvvet kümesini gösterebilir. Eğer p , $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ üzerinde tanımlı ve $p(\{\emptyset\}) = 0$ şartını sağlayan bir ayrık olasılık ölçümü ise

$$m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1], \forall E \in \mathcal{P}(X) \text{ için } m(E) = p(\{E\}),$$

olacak şekilde tanımlanan m küme fonksiyonuna $\mathcal{P}(X)$ üzerinde *basit olasılık ataması* denir.

Teorem 3.2.1. $m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ küme fonksiyonunun basit olasılık ataması olabilmesi için gerekli ve yeterli koşullar aşağıdadır.

- (1) $m(\emptyset) = 0,$
- (2) $\sum_{E \in \mathcal{P}(X)} m(E) = 1.$

İspat. İki koşulun gerekliliği Tanım 3.2.1.'den doğrudan görülüyür. İki koşulun yeterliliği için,

$$\mathcal{D}_n = \{E : \frac{1}{n+1} < m(E) \leq \frac{1}{n}\}, n = 1, 2, \dots,$$

olarak tanımlanırsa, tüm $\mathcal{D}_n$ 'lerin birer sonlu sınıf olduğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\mathcal{D}_k = \{E : \frac{1}{k+1} < m(E) \leq \frac{1}{k}\} \text{ sonlu olmayan bir sınıf olsun,}$$

$$\sum_{E \in \mathcal{D}_k} m(E) \geq \sum_{E \in \mathcal{D}_k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{E \in \mathcal{D}_k} 1,$$

$\mathcal{D}_k$ sonlu olmadığından $\sum_{E \in \mathcal{D}_k} 1$ sonlu değildir bu nedenle,

$$\sum_{E \in \mathcal{D}_k} m(E) > 1$$

bu ise $\sum_{E \in \mathcal{P}(X)} m(E) = 1$ koşuluyla çelişir. Böylece,

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n = \{E : m(E) > 0\}$$

sayılabilir bir sınıf oluşturur. $\mathcal{S}^{\sim} = \{\{E\} : E \in \mathcal{P}(X)\} \cup \{\emptyset\}$ bir yarıhalkadır.

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad p(\{E\}) = \begin{cases} m(E), & E \in \mathcal{D} \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases},$$

ve $p(\{\emptyset\}) = 0$ olarak tanımlanırsa, $p, \mathcal{S}^{\sim}$ üzerinde bir olasılık ölçümü olur. p tek türlü olarak $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ üzerinde bir ayrık olasılık ölçümüne aşağıdaki şekilde genişletilebilir,

$$p(\mathcal{E}) = \sum_{E \in \mathcal{E}} p(\{E\}), \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)).$$

Tanım 3.2.2. $m, \mathcal{P}(X)$ üzerinde bir basit olasılık ataması olsun bu durumda,

$$\text{Bel}(E) = \sum_{F \subseteq E} m(F), \forall E \in \mathcal{P}(X)$$

olarak tanımlanan $\text{Bel}: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ küme fonksiyonuna X üzerinde bir *kanı ölçümü* (belief measure) denir.

$|E|$, boştan farklı sayılabilir E kümesinin kardinalitesini gösterebilir.

Lemma 3.2.1. Eğer E boştan farklı sonlu bir küme ise,

$$\sum_{F \subset E} (-1)^{|F|} = 0.$$

İspat. $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ olsun bu durumda,

$$\{|F| : F \subset E\} = \{0, 1, \dots, n\}$$

ve

$$|\{F : |F| = i\}| = \binom{n}{i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Böylece,

$$\sum_{F \subset E} (-1)^{|F|} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = (1-1)^n = 0.$$

Lemma 3.2.2. Eğer E sonlu bir küme ve $F \subsetneq E$ ise,

$$\sum_{F \subset G \subset E} (-1)^{|G|} = 0.$$

İspat. $E - F$ boştan farklı sonlu bir kümedir. Lemma 3.2.1. yardımıyla,

$$\sum_{F \subset G \subset E} (-1)^{|G|} = \sum_{D \subset E-F} (-1)^{|F \cup D|} = (-1)^{|F|} \sum_{D \subset E-F} (-1)^{|D|} = 0.$$

Lemma 3.2.3. X sonlu bir küme, ν ve λ $\mathcal{P}(X)$ üzerinde tanımlı sonlu küme fonksiyonları olsunlar, bu durumda,

$$\lambda(E) = \sum_{F \subset E} \nu(F), \quad \forall E \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow \quad (1)$$

$$\nu(E) = \sum_{F \subset E} (-1)^{|E-F|} \lambda(F), \quad \forall E \in \mathcal{P}(X). \quad (2)$$

İspat. (1) doğruysa,

$$\begin{aligned} \sum_{F \subset E} (-1)^{|E-F|} \lambda(F) &= (-1)^{|E|} \sum_{F \subset E} (-1)^{|F|} \lambda(F) \\ &= (-1)^{|E|} \sum_{F \subset E} \left[(-1)^{|F|} \sum_{G \subset F} \nu(G) \right] \\ &= (-1)^{|E|} \sum_{G \subset E} \left[\nu(G) \sum_{G \subset F \subset E} (-1)^{|F|} \right] \end{aligned}$$

$$= (-1)^{|E|} v(E) (-1)^{|E|}$$

$$= v(E).$$

Tersine (2) doğruysa,

$$\begin{aligned} \sum_{F \subset E} v(F) &= \sum_{F \subset E} \sum_{G \subset F} (-1)^{|F-G|} \lambda(G) \\ &= \sum_{G \subset E} \left[(-1)^{|G|} \lambda(G) \sum_{G \subset F \subset E} (-1)^{|F|} \right] \\ &= (-1)^{|E|} \lambda(E) (-1)^{|E|} \\ &= \lambda(E). \end{aligned}$$

Teorem 3.2.2. Eğer Bel , X üzerinde bir kani ölçümü ise,

$$(\text{BM1}) \text{Bel}(\emptyset) = 0;$$

$$(\text{BM2}) \text{Bel}(X) = 1;$$

$$(\text{BM3}) \text{Bel}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \geq \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \text{Bel}\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right),$$

$$(\text{BM4}) \text{Bel} \text{ üstten süreklidir.}$$

İspat. Teorem 3.2.1. ve Tanım 3.2.2.'den (BM1) ve (BM2)'nin doğru olduğu kolayca görülebilir. (BM3)'ün doğru olduğunu görmek için herhangi bir sonlu $\{E_1, \dots, E_n\}$ altsınıfı alalım ve

$$\forall F \in \mathcal{P}(X), \quad I(F) = \{i : 1 \leq i \leq n, F \subset E_i\}$$

olsun. Lemma 3.2.1.'i kullanarak,

$$\begin{aligned} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \text{Bel}\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) &= \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} \left[(-1)^{|I|+1} \sum_{F \subset \bigcap_{i \in I} E_i} m(F) \right] \\ &= \sum_{I(F) \neq \emptyset} \left[m(F) \sum_{I \subset I(F), I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{I(F) \neq \emptyset} \left[m(F) \left(1 - \sum_{I \subset I(F)} (-1)^{|I|} \right) \right] \\
&= \sum_{I(F) \neq \emptyset} m(F) \\
&= \sum_{F \subset E_i, \text{ bazı } i\text{'ler için}} m(F) \\
&\leq \sum_{F \subset \bigcup_{i=1}^n E_i} m(F) \\
&= \text{Bel} \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)
\end{aligned}$$

(BM4) için $\{E_i\}$ terimleri $\mathcal{P}(X)$ 'te olan azalan bir kümeler dizisi ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E$ olsun.

Teorem 3.2.1'den $F \notin \{D_n\}$ olduğunda $m(F) = 0$ olacak şekilde sayılabilir $\{D_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ sınıfının var olduğunu biliyoruz.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \ni \sum_{n > n_0} m(D_n) < \varepsilon.$$

ve

$$\forall D_n, n \leq n_0, D_n \not\subset E \Rightarrow \exists i(n) \ni D_n \not\subset E_{i(n)}.$$

$i_0 = \max(i(1), \dots, i(n))$ olarak seçersek,

$$\forall n \leq n_0, D_n \not\subset E \Rightarrow D_n \not\subset E_{i_0}.$$

Böylece,

$$\begin{aligned}
\text{Bel}(E) &= \sum_{F \subset E} m(F) \\
&= \sum_{D_n \subset E} m(D_n) \\
&\geq \sum_{D_n \subset E, n \leq n_0} m(D_n) \\
&\geq \sum_{D_n \subset E_{i_0}, n \leq n_0} m(D_n) \\
&\geq \sum_{D_n \subset E_{i_0}} m(D_n) - \sum_{n > n_0} m(D_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \sum_{F \subset E_{i_0}} m(F) - \varepsilon \\
&= \text{Bel}(E_{i_0}) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots$, için $\text{Bel}(E) \leq \text{Bel}(E_i)$ olduğunu ve $(\text{Bel}(E_i))$ dizisinin i 'ye bağlı olarak azalan olduğunu gözönünde bulundurarak,

$$\text{Bel}(E) = \lim_i \text{Bel}(E_i),$$

yazar ve ispatı tamamlarız.

Teorem 3.2.3. Her kanı ölçümü monoton ve üsttoplamsaldır.

İspat. $E_1, E_2 \subset X$ ve $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ olsun,

$$\begin{aligned}
\text{Bel}(E_1 \cup E_2) &\geq \text{Bel}(E_1) + \text{Bel}(E_2) - \text{Bel}(E_1 \cap E_2) \\
&= \text{Bel}(E_1) + \text{Bel}(E_2) \geq \text{Bel}(E_1).
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikten Bel 'in monoton ve üsttoplamsal olduğu kolayca görülüyor.

Teorem 3.2.2. ve Teorem 3.2.3.'den kanı ölçümünün üstten yarısürekli bir bulanık ölçüm olduğunu görüyoruz.

Sonlu bir uzayda basit olasılık atamasını tek türlü belirlediği kanı ölçümü cinsinden ifade edebiliriz.

Teorem 3.2.4. X sonlu olsun. Eğer bir $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ küme fonksiyonu,

$$(1) \mu(\emptyset) = 0;$$

$$(2) \mu(X) = 1;$$

$$(3) \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \geq \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right), \quad \forall \text{ sonlu } \{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathcal{P}(X)$$

şartlarını sağlıyorsa aşağıdaki gibi belirlenen m küme fonksiyonu

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad m(E) = \sum_{F \subset E} (-1)^{|E-F|} \mu(F) \quad (3)$$

bir basit olasılık atamasıdır, ve μ m 'den indirgenen kanı ölçümünden başka birşey değildir

yani,

$$\mu(E) = \text{Bel}(E) = \sum_{F \subset E} m(F).$$

İspat. Önce $m(\emptyset)$ 'ya bakalım.

$$m(\emptyset) = \sum_{F \subset \emptyset} (-1)^{|\emptyset - F|} \mu(F) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Lemma 3.2.3. ve (1)'den,

$$\sum_{E \subset X} m(E) = \mu(X) = 1.$$

m 'nin basit olasılık ataması olduğunu ispatlamak için her $E \subset X$ için $m(E) \geq 0$ olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten de X sonlu olduğundan E de sonludur ve $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ olarak yazılabilir, bu durumda,

$$\begin{aligned} E_i &= E - \{x_i\} \Rightarrow E = \bigcup_{i=1}^n E_i, \\ m(E) &= \sum_{F \subset E} (-1)^{|E-F|} \mu(F) \\ &= \mu(E) - \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) - \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Son eşitsizlik doğrudan Lemma 3.2.3.'ün bir sonucudur.

Tanım 3.2.3. $m, \mathcal{P}(X)$ üzerinde bir basit olasılık ataması ise

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \text{Pl}(E) = \sum_{F \cap E \neq \emptyset} m(F)$$

şeklinde belirlenen $\text{Pl}: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ küme fonksiyonuna X üzerinde (m 'den türetilen) bir *usalırlık ölçümü* (plausibility measure) denir.

Teorem 3.2.5. Eğer Bel ve Pl aynı basit olasılık atamasından türetilen kanı ve usalırılık ölçümleri ise her $E \subset X$ için aşağıdaki özellikler vardır:

i. $\text{Bel}(E) = 1 - \text{Pl}(\bar{E})$

ii. $\text{Bel}(E) \leq \text{Pl}(E)$.

İspat.i.

$$\begin{aligned} \text{Bel}(E) &= \sum_{F \subset E} m(F) \\ &= \sum_{F \subset X} m(F) - \sum_{F \not\subset E} m(F) \\ &= 1 - \sum_{F \cap \bar{E} \neq \emptyset} m(F) \\ &= 1 - \text{Pl}(\bar{E}). \end{aligned}$$

ii. $E, F \subset X$ olmak üzere,

$\mathcal{A} = \{F : F \subset E\}$ ve $\mathcal{B} = \{F : F \cap E \neq \emptyset\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$$

olduğu açıktır.

$$\text{Bel}(E) = \sum_{F \subset E} m(F) = \sum_{F \in \mathcal{A}} m(F),$$

ve

$$\text{Pl}(E) = \sum_{F \cap E \neq \emptyset} m(F) = \sum_{F \in \mathcal{B}} m(F),$$

olarak tanımlandığından ve m negatif değerler almayan bir fonksiyon olduğundan,

$$\text{Bel}(E) \leq \text{Pl}(E),$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2.6. Pl, X üzerinde bir usalırılık ölçümü ise,

$$(\text{PM1}) \text{Pl}(\emptyset) = 0;$$

$$(PM2) \text{Pl}(X) = 1;$$

$$(PM3) \text{Pl}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \text{Pl}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right), \quad \forall \text{ sonlu } \{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathcal{P}(X)$$

$$(PM4) \text{Pl alttan sürekli} \text{dir.}$$

İspat. Teorem 3.2.2. ve Teorem 3.2.5.'den (PM1), (PM2) ve (PM4) doğrudan çıkar. (PM3) için Lemma 3.2.1.'i kullanarak

$$\begin{aligned} \text{Pl}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) &= 1 - \text{Bel}\left(\overline{\bigcap_{i=1}^n E_i}\right) \\ &= 1 - \text{Bel}\left(\bigcup_{i=1}^n \overline{E_i}\right) \\ &\leq 1 - \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \text{Bel}\left(\bigcap_{i \in I} \overline{E_i}\right) \\ &= \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \left[1 - \text{Bel}\left(\bigcap_{i \in I} \overline{E_i}\right) \right] \\ &= \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \left[1 - \text{Bel}\left(\overline{\bigcup_{i \in I} E_i}\right) \right] \\ &= \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \text{Pl}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right). \end{aligned}$$

Teorem 3.2.7. Her usalırılık ölçümü monoton ve alttoplamsaldır.

İspat. $E \subset F \subset X$ olduđuunda $\overline{F} \subset \overline{E} \subset X$ olur. Teorem 3.2.3. ve teorem 3.2.5.'den,

$$\text{Pl}(E) = 1 - \text{Bel}(\overline{E}) \leq 1 - \text{Bel}(\overline{F}) = \text{Pl}(F).$$

Alttoplamsallığı görmek için $E_1, E_2 \in X$ ise

$$0 \leq \text{Pl}(E_1 \cap E_2)$$

$$\leq \text{Pl}(E_1) + \text{Pl}(E_2) - \text{Pl}(E_1 \cup E_2).$$

Buradan da

$$\text{Pl}(E_1 \cup E_2) \leq \text{Pl}(E_1) + \text{Pl}(E_2).$$

Artık Teorem 3.2.6. ve Teorem 3.2.7.'den usalrılık ölçümünün alttan yarisürekli bulanık ölçüm olduğunu görüyoruz.

Teorem 3.2.8. $(X, \mathcal{P}(X))$ üzerindeki her p ayrık olasılık ölçümü, kanı aynı zamanda da usalrılık ölçümüdür, karşılık gelen basit olasılık ataması $\mathcal{P}(X)$ 'in tekileri üzerinde odaklanır. Tersine, m $\mathcal{P}(X)$ 'in tekileri üzerinde odaklanan basit olasılık ataması ise bu m 'den türetilen kanı ve usalrılık ölçümleri çakışır ve X üzerinde bir ayrık olasılık ölçümü oluştururlar.

İspat. p ayrık olasılık ölçümü olduğundan dolayı sayılabilir $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset X$ vardır öyle ki

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(\{x_i\}) = 1.$$

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad m(E) = \begin{cases} p(E), & \exists i \ni E = \{x_i\} \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa m basit olasılık ataması olur ve

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad p(E) = \sum_{x_i \in E} p(\{x_i\}) = \sum_{F \subset E} m(F) = \sum_{F \cap E \neq \emptyset} m(F)$$

olduğundan p hem kanı hem de usalrılık ölçümü olur. Tersine m basit olasılık ataması sadece $\mathcal{P}(X)$ 'in tekileri üzerinde odaklanıyorsa,

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad \text{Bel}(E) = \sum_{F \subset E} m(F) = \sum_{x \in E} m(\{x\}) = \sum_{F \cap E \neq \emptyset} m(F) = \text{Pl}(E).$$

Böylece Bel ile Pl çakışır ve sonuç olarak X üzerinde ayrık olasılık ölçümü oluştururlar.

Teorem 3.2.9. Bel ve Pl bir m basit olasılık atamasından türetilen kanı ve usalrılık ölçümleri olsunlar. Bel ve Pl çakışıyorsa m sadece tekiler üzerinde odaklanır.

İspat. $\mathcal{P}(X)$ 'in tekili olmayan $m(E) > 0$ olacak şekilde bir $E \in \mathcal{P}(X)$ bulunuyorsa,

$$\forall x \in E, \text{Bel}(\{x\}) = m(\{x\}) < m(\{x\}) + m(E) \leq \sum_{F \cap \{x\} \neq \emptyset} m(F) = \text{Pl}(\{x\}).$$

Bu eşitsizlik Bel ile Pl'nin çakıştığı varsayımı ile çelişir.

3.2.2. Olabilirlik (possibility) ve gereklilik (necessity) ölçümleri.

Tanım 3.2.4. T herhangi bir damga kümesi olsun, $\mathcal{Y}$ 'nin, bileşimi yine $\mathcal{Y}$ 'de olan her $\{E_t : t \in T\}$ alt sınıfı için,

$$\mu\left(\bigcup_{t \in T} E_t\right) = \sup_{t \in T} \mu(E_t) \Leftrightarrow \mu \text{ } \mathcal{Y} \text{ üzerinde } \textit{bulanık toplamsaldır} (f\text{-toplamsaldır}) \text{ denir.}$$

$\mathcal{Y}$ sonlu bir sınıf olduğunda μ 'nün f -toplamsallığı aşağıdaki daha basit koşula bağlıdır,

$$E_1, E_2, E_1 \cup E_2 \in \mathcal{Y}, \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) \vee \mu(E_2).$$

Tanım 3.2.5. μ , $\mathcal{Y}$ üzerinde *genelleştirilmiş olabilirlik ölçümüdür* ancak ve ancak $\mathcal{Y}$ üzerinde f -toplamsal ve $\mu(E) < \infty$ olacak şekilde bir $E \in \mathcal{Y}$ var ise.

Genelleştirilmiş olabilirlik ölçümü genellikle π ile gösterilir.

Tanım 3.2.6. π , X üzerinde tanımlı bir genelleştirilmiş olabilirlik ölçümü ise

$$\forall x \in X, f(x) = \pi(\{x\})$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna X üzerinde olabilirlik *yoğunluk fonksiyonu* denir.

Teorem 3.2.10. $\mathcal{Y}$ üzerinde her π genelleştirilmiş olabilirlik fonksiyonu $\mathcal{Y}$ üzerinde bir alttan yarısürekli bulanık ölçümdür.

İspat.

$$T = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{t \in T} E_t = \emptyset \text{ ve } \sup_{t \in T} \mu(E_t) = 0,$$

olduğundan,

$$\emptyset \in \mathcal{Y} \Rightarrow \pi(\emptyset) = 0,$$

dır.

Monotonluğa gelince $E, F \in \mathcal{Y}$, $E \subset F$ ise f -toplamsallığı kullanarak,

$$\pi(F) = \pi(E \cup F) = \pi(E) \vee \pi(F) \geq \pi(E).$$

Son olarak da π alttan süreklidir, çünkü $\{E_n\}, \mathcal{Y}$ 'nin elemanlarından ve bileşimleri de yine $\mathcal{Y}$ 'de olan bir azalan dizi ise supremum tanımından,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \ni \pi(E_{n_0}) \geq \sup_n \pi(E_n) - \varepsilon = \pi(E) - \varepsilon.$$

π 'nin monotonluğunu gözönünde bulundurarak biliyoruz ki

$$\lim_n \pi(E_n) = \pi(E).$$

Tanım 3.2.7. Düzenli bir genelleştirilmiş olabirlik ölçümüne *olabirlik ölçümü* denir.

Teorem 3.2.11. f herhangi bir π olabirlik ölçümünün yoğunluk fonksiyonu olduğunda

$$\sup_{x \in X} f(x) = 1. \quad (4)$$

Tersine $f: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu (3)'ü sağlıyorsa f tek türlü bir π olabirlik ölçümünü belirler ve f, π 'nin yoğunluk fonksiyonudur.

İspat. Tanım 3.2.4. den dolayı

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} f(x) &= \sup_{x \in X} \pi(\{x\}) \\ &= \pi\left(\bigcup_{x \in X} \{x\}\right) \\ &= \pi(X) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Tersine,

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad \pi(E) = \sup_{x \in E} f(x)$$

olarak alırsak, π bir olabirlik ölçümüdür ve

$$\pi(\{x\}) = \sup_{x \in \{x\}} f(x) = f(x).$$

Benzer bir sonuç genelleştirilmiş olabirlik ölçümleri için de şu şekilde verilebilir: Herhangi bir $f : X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\mathcal{P}(X)$ üzerinde bir π genelleştirilmiş olabirlik ölçümünü tek türlü olarak aşağıdaki gibi belirler,

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad \pi(E) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Tanım 3.2.8. İççe kümeler sınıfına (kümelerdeki kapsama bağıntısıyla tam sıralı) odaklı bir basit olasılık atamasına *uyumlu* denir.

Teorem 3.2.12. X sonlu olduğunda üzerinde tanımlı herhangi bir olabirlik ölçümü bir usalılık ölçümüdür ve karşılık gelen basit olasılık ataması uyumludur. Tersine uyumlu basit olasılık atamasından türetilen usalılık ölçümü bir olabirlik ölçümüdür.

İspat. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve π bir olabirlik ölçümü olsun. Aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunu varsayabiliriz.

$$1 = \pi(\{x_1\}) \geq \pi(\{x_2\}) \geq \dots \geq \pi(\{x_n\}).$$

$\mathcal{P}(X)$ üzerinde bir m küme fonksiyonu,

$$m(E) = \begin{cases} \pi(\{x_i\}) - \pi(\{x_{i+1}\}), & E = F_i, i = 1, \dots, n-1 \text{ ise} \\ \pi(\{x_n\}), & E = F_n \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde,} \end{cases}$$

öyle ki $F_1 = \{x_1, \dots, x_i\}$, $i = 1, \dots, n$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda m iççe kümeler sınıfı olan $\{F_1, \dots, F_n\}$ üzerinde odaklanmış bir basit olasılık atamasıdır. Bu basit olasılık atamasından türetilen usalılık ölçümü de π den başka birşey değildir. Tersine m bir basit olasılık ataması olsun ve $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k$ 'yı sağlayan bir $\{F_1, \dots, F_k\}$ iççe kümeler sınıfına odaklı olsun, $\mathcal{P}_1$ de m 'den türetilen usalılık ölçümü olsun. Her $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(X)$ için

$$j_0 = \min\{j : F_j \cap (E_1 \cup E_2) \neq \emptyset\}$$

ve

$$j_{0i} = \min\{j : F_j \cap E_i \neq \emptyset\}, i = 1, 2$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
Pl(E_1 \cup E_2) &= \sum_{F_j \cap (E_1 \cup E_2) \neq \emptyset} m(F_j) \\
&= \sum_{j \in J_0} m(F_j) \\
&= \left[\sum_{j \in J_{01}} m(F_j) \right] \vee \left[\sum_{j \in J_{02}} m(F_j) \right] \\
&= \left[\sum_{F_j \cap E_1 \neq \emptyset} m(F_j) \right] \vee \left[\sum_{F_j \cap E_2 \neq \emptyset} m(F_j) \right] \\
&= Pl(E_1) \vee Pl(E_2).
\end{aligned}$$

Buradan da Pl'nin Tanım 3.2.5. deki şartı sağladığı görüldüğünden Pl bir olabilirlik ölçümüdür.

X sonlu olmadığı zaman $\mathcal{P}(X)$ üzerinde bir olabilirlik ölçümü X sayılabilir olsa bile bir usulrılık ölçümü olmayabilir.

Örnek $X, [0, 1]$ aralığındaki tüm rasyonellerden oluşsun ve her $x \in X$ için $f(x) = x$ olsun. $\mathcal{P}(X)$ üzerinde π 'yi aşağıdaki gibi tanımlarsak

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \pi(E) = \sup_{x \in E} f(x),$$

$\pi, \mathcal{P}(X)$ üzerinde bir olabilirlik ölçümüdür ancak bir usulrılık ölçümü değildir.

Tanım 3.2.9. $\pi, \mathcal{P}(X)$ üzerinde bir olabilirlik ölçümü ise duali olan

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), n(E) = 1 - \pi(\bar{E})$$

şeklindeki n küme fonksiyonuna $\mathcal{P}(X)$ üzerinde bir *gereklik ölçümü* (veya *uyumlu kanı fonksiyonu*) denir.

Teorem 3.2.13. T herhangi bir damga kümesi ve $n(\emptyset) = 0$ olsun. Bir $n : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun gereklik ölçümü olması için gerek ve yeter koşul şudur:

$$\forall \{E_t : t \in T\} \subseteq \mathcal{P}(X), n\left(\bigcap_{t \in T} E_t\right) = \inf_{t \in T} n(E_t).$$

İspat. Tanım 3.2.7. ve Tanım 3.2.9.'dan kolayca görülür.

Teorem 3.2.14. Her gereklilik ölçümü üstten yarısürekli bir bulanık ölçümdür ve X sonlu olduğunda her gereklilik ölçümü kanı ölçümünün özel bir örneğidir ve karşılık gelen basit olasılık ataması uyumludur.

İspat. Tanım 3.2.9., Teorem 3.2.5. ve Teorem 3.2.12'den doğrudan görülür.

3.3. Bulanık İntegral

Bu bölümde $(X, \mathcal{F})$ ölçülebilir bir uzay, $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ bir bulanık ölçüm, F de X üzerinde tanımlı tüm negatif olmayan sonlu fonksiyonların sınıfını gösterebilir. Verilen herhangi bir $f \in F$ için F_α ve F_{α^+} ise sırasıyla f 'nin α ve kesin α kesmelerini gösterir. Ayrıca,

$$\inf_{x \in \emptyset} f(x) = \infty$$

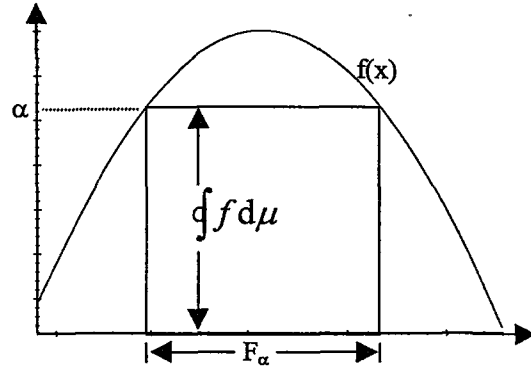
olduğunu kabul edelim.

Tanım 3.3.1. $A \in \mathcal{F}$ ve $f \in F$ olsun. f 'nin A üzerinde μ 'ye göre *bulanık integrali* (Sugeno *İntegrali*) $\oint_A f d\mu$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır (Sugeno, 1974).

$$\oint_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0, \infty]} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)].$$

$A = X$ olduğunda $\oint_A f d\mu$ bulanık integrali kısaca $\oint f d\mu$ şeklinde gösterilir.

Özel halde $X = (-\infty, \infty)$, $\mathcal{F}$, Borel Cebiri $\mathcal{B}$, μ , Lebesgue ölçümü ve $f : X \rightarrow [0, \infty)$ unimodal sürekli fonksiyon olarak seçildiğinde geometrik olarak $\oint f d\mu$, $f(x)$ eğrisi ile x -ekseni arasında kalan en büyük karenin kenar uzunluğuna eşittir (bkz. şekil 3.1.).



Şekil 3.1. Özel şartlar altında bulanık integralin geometrik yorumu.

Aşağıda verilen bulanık integralin temel özelliklerinde $A, B \in \mathcal{F}$ ve $f_1, f_2, f \in F$ olduğu kabul edilecektir.

- (1) $\forall f \in F, \mu(A) = 0 \Rightarrow \oint_A f d\mu = 0.$
- (2) $\oint_A f d\mu = 0 \Rightarrow \mu(A \cap \{x : f(x) > 0\}) = 0.$
- (3) $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \oint_A f_1 d\mu \leq \oint_A f_2 d\mu.$
- (4) $\oint_A f d\mu = \oint f \cdot \chi_A d\mu$, öyle ki χ_A , A 'nın karakteristik fonksiyonudur.
- (5) $\forall a \in [0, \infty), \oint_A a d\mu = a \wedge \mu(A).$
- (6) $\forall a \in [0, \infty), \oint_A (f + a) d\mu \leq \oint_A f d\mu + \oint_A a d\mu.$
- (7) $B \subset A \Rightarrow \oint_B f d\mu \leq \oint_A f d\mu.$
- (8) $\oint_A (f_1 \vee f_2) d\mu \geq \oint_A f_1 d\mu \vee \oint_A f_2 d\mu.$
- (9) $\oint_A (f_1 \wedge f_2) d\mu \leq \oint_A f_1 d\mu \wedge \oint_A f_2 d\mu.$
- (10) $\oint_{A \cup B} f d\mu \geq \oint_A f d\mu \vee \oint_B f d\mu.$
- (11) $\oint_{A \cap B} f d\mu \leq \oint_A f d\mu \wedge \oint_B f d\mu.$

Bu özelliklerin ispatları (Wang ve Klir 1992)'te verilmiştir.

4. OLABİLİRLİĞİN YORUMLANMASI ve FARKLI YAKLAŞIMLAR

Bundan önceki bölümde olabilirlik ölçümünü kurmak için bir basit olabilirlik atamasından nasıl yola çıkıldığını gördük. Bu yaklaşım Dempster'a aittir. Bulanık kümeleri bugünkü yaygın şekliyle tanımlayan LA Zadeh ise olabilirlik ölçümünün bir bulanık kümeden hareketle de kurulabileceğini göstermiştir (Zadeh 1978).

4.1. Olabilirlik-Olasılık Uyumluluğu Prensibi

Dünyamızda iletişim alanındaki hızlı ilerlemeler, bilginin kodlanması, iletilmesi ve alınmasında istatistiksel yaklaşımın büyük katkılarıyla gerçekleşmiştir. Böylece bilginin doğasının istatistiksel olduğu ve bu yüzden olasılık teorisinin araçlarıyla incelenmesi gerektiği yaygın bir görüş haline gelmiştir. Son yıllarda ortaya çıkan bazı önemli uygulamalarda ise bilginin iletilmesinden çok bilginin anlamı ön plana çıkmıştır. Bu tip uygulamalarda önemli olan sorulara, veri tabanındaki bilgilere dayanarak cevaplar verebilmektir. Bu en çok tıbbi teşhis, robotik, doğal dil işlenmesi, konuşma ve desen algılanması, belirsizlik altında karar verme, ender olayları çözümleme gibi alanlarda karşımıza çıkmaktadır. Bu açıdan bakıldığında Zadeh'in bu bölümdeki tezine göre çalışma alanımız bilginin içeriğiyle ilgili ise bilgi çözümlenmesi için olasılık teorisinden çok olabilirlik teorisi olarak adlandırabileceğimiz analogunun araçlarına ihtiyacımız vardır. Bu iş için de bulanık kümeler teorisinin matematik altyapısı olabilirlik teorisi için gerekli temeli sağlar ve ölçüm teorisinin olasılık teorisi için oynadığı rolün benzerini üstlenir. Aşağıda detayları ile verileceği üzere bu perspektiften bakarak bir bulanık kısıtlanmış olabilirlik dağılımı olarak yorumlanabilir; öyle ki kısıtlanmış üyelik fonksiyonu olabilirlik dağılım fonksiyonu görevini görür. Bu durumda bir bulanık değişken bir olabilirlik dağılım fonksiyonu ile aynen bir rassal değişkenin olasılık dağılım fonksiyonu ile ilişkilendirildiği gibi ilişkilendirilmiş olur. İkisi arasındaki bağ da (zayıf da olsa) *olabilirlik-olasılık uyumluluğu prensibi* ile ifade edilebilir.

4.1.1. Olabilirlik dağılımı

Bu bölümde olabilirlik dağılımı kavramını *bulanık kısıtlanmış* kavramı (Zadeh 1975) cinsinden ifade edeceğiz.

U evrensel kümeyi ve X , U üzerinde değerler alan bir değişkeni göstereyim.

$$X = u, u \in U$$

ifadesi X 'e u değerinin atandığını belirtsin.

F , U 'nun bir bulanık alt kümesi ve üyelik fonksiyonu μ_F olsun. Bu durumda F , X 'e atanabilecek değerler üzerinde esnek bir kısıt olarak etki ederse F 'ye X üzerinde bir *bulanık kısıtlama* denir.

X ,

$$X = u: \mu_F(u)$$

şeklindedir ve $\mu_F(u)$, X 'e u değeri atandığında F kısıtının ne kadar sağlandığının derecesi olarak yorumlanabilir. Benzer şekilde $1 - \mu_F(u)$ değeri de X 'e u değerini atayabilmek için F kısıtının ne kadar esnetilmesi gerektiğinin derecesi olarak yorumlanabilir.

X ile ilişkilendirilmiş bir bulanık kısıt $R(X)$ ile gösterirsek, F 'nin X ile ilgili bir bulanık kısıt rolü oynadığını göstermek için,

$$R(X) = F$$

yazarız. Bu eşitlik yardımıyla X üzerinde her bulanık kısıtın özel bir bulanık küme olduğu görülür. Daha genel olarak bir X değişkeninin belirli bir A özelliğini gözönünde bulundurabiliriz. Bu durumda gösterimimiz,

$$R(A(X)) = F$$

şeklini alacaktır (Zadeh 1978) Örnek olarak evrensel kümemiz $U = \{\text{Özlem, Mehmet, Ege}\}$ ve A özelliği yaş olsun. “Özlem gençtir” ifadesini ele alalım. Bu durumda $A(X)$, Yaş(Özlem)'dir ve ifadenin tam çevirisi

$$\text{Özlem gençtir} \rightarrow R(\text{Yaş}(\text{Özlem})) = \text{genç}$$

şeklindedir ve “genç” bulanık bir kümeyle ifade edilebilir. Bu bulanık kümede 25 yaşın üyelik derecesi 0,8 olsun ilk olarak 25 yaşın genç olarak adlandırdığımız kavramla uyumluluğunun 0,8 olduğunu burdan da Özlem'in yaşının 25 olmasının olabilirliğinin 0,8 olduğunu yorumlayabiliriz. (Bundan böyle kolaylık olarak $A(X) = X$ kabul edeceğiz). Daha genel olarak olabilirlik dağılımı kavramını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Tanım 4.1.1. F , sözkonusu evrenimiz U ’nun bir bulanık alt kümesi ve üyelik fonksiyonu μ_F olsun, $\mu_F(u)$, u ’nun F kavramı ile uyumluluğu olarak yorumlansın. X bir değişken olsun ve değerlerini U ’dan alsın. Bu durumda “ X, F dir” cümlesi ki bu cümleyi

$$R(X) = F$$

olarak ifade ediyoruz, X ’e bir olabilirlik dağılımı Π_X tayin eder ve bu dağılım $R(X)$ ’e eşit olur ve,

$$\Pi_X = R(X)$$

olarak ifade edilir.

Karşılık gelen X ile ilişkilendirilmiş olabilirlik dağılım fonksiyonu π_X ile gösterilir ve sayısal değeri F ’nin üyelik fonksiyonuna eşit olarak tanımlanır. Diğer bir ifadeyle

$$\pi_X = \mu_F,$$

$$\Pi_X = F.$$

Bu yaklaşımda olabilirlik ölçümünün tanımı ise şöyle yapılabilir:

A , U evrenimizin bulanık olmayan bir altkütmesi olsun ve Π_X de değerlerini U ’dan alan X değişkeninin olabilirlik dağılımı olsun. Bu durumda X ’in bir değerinin A ’da olmasının olabilirliği olarak yorumlayabileceğimiz A ’nın $\pi(A)$ olabilirlik ölçümü $[0,1]$ aralığında değerler alır ve

$$\pi(A) = \sup_{u \in A} \pi_X(u)$$

şeklinde tanımlanır (Zadeh 1978). Bu tanım Sugeno ve Terano’nun (Sugeno 1974) (Terano ve Sugeno 1975) bulanık ölçüm tanımlarının bir özel hali olarak düşünülebilir.

4.1.2. Olabilirlik-olasılık uyumluluğu prensibi

Günlük lisanımızda çoğu zaman olabilirlik ile olasılık kavramlarını aynı anlamda kullanırız, oysa tıbbi teşhis gibi belirliliğin yüksek dereceli olması gereken dallarda aradaki fark iyi bilinmelidir. Olabilirlik ile olasılık arasındaki farkı daha iyi anlayabilmek için “Mehmet kahvaltıda X yumurta yedi” ifadesini örnek alalım. Burada X değişkeni $U = \{1,2,3,\dots\}$ kümesinden değerler alsın. X ’e bir $\pi_X(u)$ olabilirlik dağılımı atayıp bunu

Mehmet'in kahvaltıda u yumurta yemesinin kolaylık derecesi olarak yorumlayabiliriz. Diğer taraftan X 'e bir $P_X(u)$ olasılık dağılımı atayıp bunu da Mehmet'in kahvaltıda u yumurta yemesinin olasılığı olarak yorumlayabiliriz. Bu değerleri belirli kriterlere bağlı olarak aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi belirlediğimizi varsayalım.

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_X(u)$	1	1	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2
$P_X(u)$	0.1	0.8	0.1	0	0	0	0	0

Tabloda görüyoruz ki Mehmet'in kahvaltıda 3 yumurta yemesinin olabirliği 1 olmasına rağmen gerçekten 3 yumurta yemesinin olasılığı sadece 0.1'dir. Yüksek olabirlik derecesi yüksek olasılığı gerektirmez aynı şekilde düşük olasılık derecesi de düşük olabirlik derecesi gerektirmez. Bununla birlikte bir olay olabilir değilse olası olamayacağını söyleyebiliriz. Olabirlik ile olasılık arasındaki bu sezgisel ilişkiyi *olabirlik-olasılık uyumluluğu prensibi* olarak adlandırılan aşağıdaki formül ile verebiliriz.

X değişkeni $u_1, u_2, \dots, u_n$ değerlerini alabilsin ve sırasıyla karşılık gelen olabirlik değerleri $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$, olasılık değerleri ise $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ olsun. Bu durumda Π olabirlik dağılımı ile P olasılık dağılımını arasındaki uyumluluk derecesi,

$$\gamma = \pi_1 p_1 + \dots + \pi_n p_n$$

eşitliğiyle verilir (Zadeh 1978). Bu prensibin bir kuraldan çok, bir olayın olabirliğinin azalmasının o olayın gerçekleşme olasılığının azalmasına yol açtığı şeklindeki sezgisel gözlemimizin, yaklaşık bir formülasyonu olduğu gözden kaçırılmamalıdır.

4.2. Olabirlik ile Olasılık Ölçümleri Arasındaki Dönüşümler

4.2.1. Hileli yazı-tura deneyi

Olabirlik ölçümü ile olasılık ölçümü arasında birebir bir dönüşüm tanımlamak için hileli bir yazı-tura oyunundan yola çıkacağız (Dubois ve Prade 1983). Bu yazı-tura oyununda yeterince sayıda denemeden sonra yazı ve tura için olasılık değerlerinin elde edildiğini düşünelim, olay kümemiz $X = \{x_1 = \text{yazı}, x_2 = \text{tura}\}$ olsun. Atılan paranın da yazı sayısının daha yüksek olacak şekilde hileli olduğunu düşünelim, yani

$$\forall i, p_i = \text{Prob}(\{x_i\}), 1 \geq p_1 > \frac{1}{2} > p_2 = 1 - p_1.$$

Böyle bir durumda gerçek anlamda rassallıkla karşı karşıya olmadığımız açıktır çünkü paranın yazı gelmesi yönünde bir *gereklilik* vardır. Bu gerekliliğin doğal bir ölçümü olasılığın yazı lehine fazlalığı olarak düşünülebilir:

$$n_1 = p_1 - p_2.$$

n_1 denk olarak tura gelmesinin olanaksızlığı (olabilir olmaması) olarak yorumlanabilir. Karşılık gelen olabilirlik derecesi Tanım 3.2.9.'u kullanarak,

$$\pi_2 = 1 - (p_1 - p_2) = 2p_2$$

eşitliği ile verilebilir. Son olarak modeli tersi veya hilesiz durumda da doğru olarak çalıştırabilmek için

$$n_2 = 0, \quad \pi_1 = 1$$

olarak tanımlıyoruz.

4.2.2. Genel sonlu durum

$X = \{x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. P bir olasılık ölçümü, $p_i = P(\{x_i\})$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ olsun ve x_i 'ler $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ olacak şekilde sıralı olsun. A_i ile $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ kümesini gösterelim ve $A_0 = \emptyset$ olarak tanımlayalım. Aşağıdaki tanım hileli yazı-tura örneğimizin bir genellemesidir.

Tanım 4.2.1. Bir $A \subseteq X$ olayının gerekliliğinin ölçüsü, bu A olayı içerisindeki elementer olayların olasılıklarının A dışında kalan elementer olayların en olası olanından fazlalıkları toplamıdır (Dubois ve Prade 1983).

$$N(A) = \sum_{x_j \in A} \max(p_j - \max_{x_k \in A} p_k, 0).$$

$A = A_i$ alırsak,

$$\max_{x_k \in A} p_k = p_{i+1}$$

olduğundan ve p_i 'leri sıralı aldığımızdan dolayı,

$$N(A_i) = \sum_{j=1}^i (p_j - p_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

olur öyle ki $p_{n+1} = 0$. Burdan

$$N(A_i) \leq P(A_i) = \sum_{j=1}^i p_j,$$

eşitsizliği açıkça görülür.

Lemma 4.2.1. Her $A \subseteq X$ için $N(A) = \max_{A_k \subseteq A} N(A_k)$ (Dubois ve Prade 1983).

İspat. $A = A_0$ olduğunda $x_1 \notin A$ olur ki bu durumda Tanım 4.2.1. gereği $N(A) = 0$ olur.

$$i = \max\{j : A_j \subseteq A\} \geq 1$$

olarak tanımlarsak,

$$x_{i+1} \notin A, \quad \max_{x_k \notin A} p_k = p_{i+1}$$

olur ve,

$$\forall x_j \in A - A_i, \quad p_j \leq p_{i+1}$$

olduğundan dolayı $N(A) = N(A_i) = \max_{A_k \subseteq A} N(A_k)$ dır. Üstelik A_k 'lar iç içe geçmiş kümeler

dizisi oluşturduğundan ve (5)'ten dolayı $N(A_1) \leq N(A_2) \leq \dots \leq N(A_n) = 1$ dir.

A olayı en olası elementer olayları kapsamadığı zaman $N(A) = 0$ 'dır ve bu tip A olayları birbirlerinden olabilirlik dereceleriyle ayrılırlar. Böylece A olayının en olası elementer olayları kapsaması, A olayının gerçekleşmesi için bir tür garanti olarak yorumlanır.

N küme fonksiyonu,

$$N(\emptyset) = 0;$$

$$N(X) = 1;$$

$$\forall A, B \subseteq X, N(A \cap B) = \min(N(A), N(B)),$$

şartlarını sağladığından bir uyumlu kanı ölçümüdür (Shafer 1976), hatta bir gereklilik ölçümüdür (Dubois ve Prade 1988).

İspat. N küme fonksiyonunun ilk iki şartı sağladığı açıktır. Üçüncü şartı sağladığını göstermek için A_i, A_j, A_k sırasıyla $A, B, A \cap B$ 'nin kapsadıkları en büyük kümeler olsun. $A_i \subseteq A_j$ dir veya $A_j \subseteq A_i$ dir.

$$A_i \subseteq A_j \Rightarrow A_i \subseteq A \cap B, \quad A_i = A_k.$$

$$A_j \subseteq A_i \Rightarrow A_j \subseteq A \cap B, \quad A_j = A_k.$$

Böylece,

$$N(A \cap B) = \min(N(A_i), N(A_j)) = \min(N(A), N(B)).$$

4.2.3. Olabilirlik ile olasılık arasında birebir dönüşüm

$N(A)$ 'ya tersi $\bar{A}$ olayının imkansızlık (olabilir olmama) derecesi gözüyle bakarak A olayının olabilirlik derecesini

$$\forall A \subseteq X, \Pi(A) = 1 - N(\bar{A})$$

eşitliği ile gösterebiliriz.

Π küme fonksiyonu,

$$\Pi(\emptyset) = 0;$$

$$\Pi(X) = 1;$$

$$\forall A, B \subseteq X, \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)),$$

şartlarını sağladığından Zadeh anlamında (Zadeh 1978) bir olabilirlik ölçümüdür.

$\pi_i = \Pi(\{x_i\})$ gösterimi ile

$$\Pi(A) = \max_{x_i \in A} \pi_i,$$

elde edilir öyle ki Π ve N tamamen normalleştirilmiş bir bulanık küme gözü ile bakabileceğimiz $\{\pi_i : i = 1, \dots, n\}$ olabilirlik dağılımı tarafından belirlenmiş olur.

π_i 'ler kolayca p_i 'lerden elde edilirler çünkü Lemma 4.2.1.'i kullanarak,

$$\pi_i = 1 - N(X - \{x_i\}) = 1 - N(A_{i-1})$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^{i-1} (p_j - p_i), \quad \forall i > 1$$

ve $\pi_1 = 1$ (normalleştirme). $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 'i kullanarak,

$$\forall i = 2, \dots, n \quad \pi_i = \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{j=1}^{i-1} (p_j - p_i)$$

$$= \sum_{j=i}^n p_j + (i-1)p_i$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=i+1}^n p_j + p_i + (i-1) \cdot p_i \\
&= ip_i + \sum_{j=i+1}^n p_j,
\end{aligned} \tag{6}$$

elde edilir ($\sum_{j=n+1}^n p_j = 0$ kabul ederek).

Bu eşitlik p_i 'leri sıralı kabul etmeden de aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\forall i \quad \pi_i = \sum_{j=1}^n \min(p_i, p_j).$$

İspat.

$$\pi_i = ip_i + \sum_{j=i+1}^n p_j$$

$$= \sum_{j=1}^i p_i + \sum_{j=i+1}^n p_j,$$

$\forall i$ için $p_i \geq p_{i+1}$ olduğundan dolayı,

$$\pi_i = \sum_{j=1}^n \min(p_i, p_j).$$

$i = 1, \dots, n-1$ için (6)'dan kolayca

$$\pi_i - \pi_{i+1} = i(p_i - p_{i+1}),$$

olduğu görülür böylece,

$$\pi_i = \pi_{i+1} \Leftrightarrow p_i = p_{i+1}, \quad \pi_i > \pi_{i+1} \Leftrightarrow p_i > p_{i+1},$$

olur. p_i 'ler düzgün dağıldığında (tam rassallık: $\forall i = 1, 2, \dots, n \quad p_i = \frac{1}{n}$) her i için $\pi_i = 1$ olur ve X kümesinin karakteristik fonksiyonu elde edilir.

(6) eşitliği ile X evrensel kümesi üzerindeki p olasılık dağılımı verildiğinde diğer bir deyişle p_i 'ler verildiğinde π_i 'ler bulunur. Buna karşılık π_i 'ler verildiğinde p_i 'leri elde etmek için (6) eşitliğinde p_i aşağıdaki gibi çözülebilir:

$$\forall i, i = 1, 2, \dots, n \text{ için, } \pi_i = ip_i + \sum_{j=i+1}^n p_j,$$

$$\pi_{i+1} = (i+1)p_{i+1} + \sum_{j=i+2}^n p_j,$$

$$\begin{aligned}\pi_i - \pi_{i+1} &= ip_i - (i+1)p_{i+1} + p_{i+1} \\ &= ip_i - ip_{i+1} = i(p_i - p_{i+1}).\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}p_i &= \frac{1}{i}(\pi_i - \pi_{i+1}) + p_{i+1}, \\ &= \frac{1}{i}(\pi_i - \pi_{i+1}) + \frac{1}{i+1}(\pi_{i+1} - \pi_{i+2}) + p_{i+2}\end{aligned}$$

bulunur ve $\pi_{n+1} = p_{n+1} = 0$ kabulüyle işlem sonuna kadar devam ettirilirse,

$$\begin{aligned}p_i &= \frac{1}{i}(\pi_i - \pi_{i+1}) + \frac{1}{i+1}(\pi_{i+1} - \pi_{i+2}) + \dots + \frac{1}{n}(\pi_n - \pi_{n+1}) + p_{n+1} \\ &= \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}(\pi_j - \pi_{j+1}).\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \text{ için } p_i = \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}(\pi_j - \pi_{j+1}).$$

Böylece olasılık ile olabilirlik arasında birebir örten bir eşleme elde etmiş oluruz. Bu birebir eşlemenin dikkat çekici bir özelliği ise olayların elde edilen olabilirlik ve gereklilik değerlerinin olayın olasılığı üzerinde sınır değerleri olarak etki etmeleridir şöyle ki,

$$\forall A, \quad N(A) \leq P(A) \leq \Pi(A).$$

4.3. Diğer Bazı Olasılık-Olabilirlik Dönüşümleri

Tanım 4.3.1. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu uzayında bir sayma fonksiyonu $c : X \rightarrow \mathbb{N}$, $c_i = c(x_i)$, x_i olayının gözlem sayısını göstermek üzere tanımlansın. Bu durumda frekans dağılımı fonksiyonu $f : X \rightarrow [0, 1]$,

$$f(x_i) = f_i = \frac{c_i}{\sum_i c_i}$$

şeklinde tanımlanır ve $\vec{f}$ vektörü $\langle f_i \rangle$ ile gösterilir.

Tanım 4.3.2. Bir f frekans dağılımı verilsin, frekans ölçümü $P : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$,

$$\forall A \subseteq X, \quad P(A) = \sum_{x_i \in A} f_i$$

olarak tanımlanır ve $\langle f \rangle$ doğal ve normal ($\sum_i f_i = 1$) bir olasılık dağılımı ve P de doğal bir olasılık ölçümü olur.

Diğer bazı $\vec{f} \rightarrow \vec{\pi}$ olasılık-olabilirlik dönüşümleri ayrıntılarına girmeksizin aşağıda sıralanmıştır.

4.3.1. Maximum normalleştirme frekans dönüşümü

Bir frekans dağılımı f verilmiş olsun, $\pi : X \rightarrow [0, 1]$ bir olabilirlik dağılımı,

$$\pi(x_i) = \pi_i = \frac{c_i}{\sum_i c_i} = \frac{f_i}{\sum_i f_i}$$

şeklinde tanımlanabilir (Klir 1990).

Bu dönüşümün tersi de,

$$f_i = \frac{\pi_i}{\sum_i \pi_i},$$

ile verilir.

4.3.2. Toplamsal frekans dönüşümü

Sonlu uzayımız X 'in bir $\vec{X} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ permutasyonunu ele alalım ve $A_i = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ olsun. Bu durumda bir f frekans dağılımı verildiğinde $f_{n+1} = 0$ kabul ederek bir π olabilirlik dağılımı,

$$\pi_i = P(A_i) = \sum_{j=1}^i f_j,$$

ile tanımlanabilir (Zadeh 1965).

Tersine $\pi_0 = 0$ olsun,

$$f_i = \pi_i - \pi_{i-1},$$

olarak bulunur.

Her $2 \leq i \leq n$ için,

$$\pi_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} f_j \leq \sum_{j=1}^i f_j = \pi_i,$$

olduğundan,

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{j=1}^i f_j = \bigvee_{j=1}^i \pi_j,$$

elde edilir.



5. UYGULAMALAR

5.1. Beklenen Değer

Örnek. Meşhur şans oyunlarından birisi olan şans çarkını ele alalım. Bu çark 10 eşit parçaya ayrılmış olsun ve dilimlerin 4 tanesi 100 TL, 3 tanesi 500 TL, 2 tanesi 1000 TL ve bir tanesi de 2000 TL ile işaretlenmiş olsun. Çarkı 600 TL karşılığında çeviriyor ve çark durduğunda üzerindeki ok hangi dilimi işaret ediyorsa orada yazılı miktar kadar ödül kazanıyor olalım. Her dilimin gelme şansının eşit olduğunu kabul ederek bu oyuna katılmalı mıyız?

Problemi incelediğimizde çözümün olasılıksal yaklaşımla bulunacağı açıkça görülüyor. Çarkın yapısına bakarak aşağıdaki olasılık dağılımını oluştururuz:

$$p(100TL) = 0,4$$

$$p(500TL) = 0,3$$

$$p(1000TL) = 0,2$$

$$p(2000TL) = 0,1$$

X olası çıktılar uzayımızı göstermek üzere beklenen değer $E(x)$,

$$E(x) = \sum_{x \in X} xp(x),$$

formülü ile hesaplanır. Şans çarkımızın beklenen değeri 590TL dir ve aşağıdaki tabloda hesaplanmıştır:

x	$p(x)$	$xp(x)$
100	0,4	40
500	0,3	150
1000	0,2	200
2000	0,1	200
$E(x) =$		590

Bu nedenle oynamayı red etmeliyiz, çünkü beklenen gelirimiz 590TL yatırdığımız 600TL'den daha az. Çözümde kanı ölçümü yaklaşımını uygulayabilmek için şimdi problemi biraz değiştirelim.

5.2. Beklenen Değer Aralığı

Örnek. Başka bir şans çarkı yine 10 eşit paraçaya bölünmüş fakat önceki örnekten farklı olarak dilimlerin 4 tanesi 100 TL, 2 tanesi 500 TL, 2 tanesi 1000 TL bir tanesi 2000 TL ve bir tanesi gizlenmiş olarak işaretlenmiş olsun. Bu oyuna kaç para yatırmayı düşünebiliriz?

Bu problemin çözümünde bir yaklaşım gizli olan dilimin alabileceği değerlerin $\{100,500,1000,2000\}$ kümesinde eşit şansa sahip olduğunu kabul etmektir. Buna göre o dilimin gelme olasılığı olan 0.1'i bu değerler üzerine eşit olarak dağıtmak gerekir, ve beklenen değer aşağıdaki gibi hesaplanır:

x	$p(x)$	$xp(x)$
100	0,425	42,5
500	0,225	112,5
1000	0,225	225
2000	0,125	250
$E(x) =$		630

Diğer bir yaklaşım ise görünmeyen dilimin alacağı değerlerin olasılık dağılımının görünen dilimlerin aldıkları değerlerin olasılık dağılımına eşit olduğunu kabul etmektir. Bu kabulü yaptığımızda beklenen değer aşağıdaki gibi bulunur:

x	$p(x)$	$xp(x)$
100	4/9	400/9
500	2/9	1000/9
1000	2/9	2000/9
2000	1/9	2000/9
$E(x) =$		600

Yukarıdaki kabulleri yapmadan bu problem ideal olarak bir kanı fonksiyonu ile çözülebilir. p parametresi gizli dilimin değerini bizim mi (ya da bizim tarafımızı tutacak

bir kişinin mi) ya da çark sahibinin mi belirleyeceğine olan incancımızı simgeleyen bilinmeyen bir olasılığı gösterebilir. Gizli değeri bizim belirlediğimiz durumun olasılığına ρ diyelim bu durumda çark sahibinin belirleme olasılığı $1 - \rho$ olur. Bunun anlamı,

$$p(\text{gizli dilim 2000TL olarak işaretli}) = \rho$$

$$p(\text{gizli dilim 100TL olarak işaretli}) = 1 - \rho.$$

Bu durumda şans çarkının beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

x	$p(x)$	$xp(x)$
100	$0,4 + 0,1(1 - \rho)$	$50 - 10\rho$
500	0,2	100
1000	0,2	200
2000	$0,1 + 0,1\rho$	$200 + 200\rho$
$E(x) =$		$550 + 190\rho$

Elde ettiğimiz beklenen değere göre kaç para yatıracığımıza karar vermek için ρ olasılığının değerini tayin etmemiz yeterlidir. Şans çarkı örneğimizde doğal olarak çark sahibinin kendi lehine bir düzenleme yaptığını düşünerek $\rho = 0$ seçer ve 550TL'den fazlasını yatırmayı kabul etmeyiz. Gizli bölmenin kim tarafından işaretlendiği konusunda hiç bir bilgi mevcut değilse $\rho \in [0,1]$ olduğundan üst ve alt beklenen değerden söz edebiliriz.

Üst beklenen değer $\rho = 1$ durumunda gerçekleşir ve

$$E^* = 740,$$

olarak gösterilir.

Alt beklenen değer ise $\rho = 0$ durumunda gerçekleşir ve

$$E_* = 550,$$

olarak gösterilir. Bu durumda bir beklenen değer aralığından söz edilir ve

$$E(x) = [550, 740],$$

şeklinde gösterilir.

5.3. Dempster-Shafer Teorisi

Örnek. Gizli ajan raporlarının da bilgi kaynağı olarak kullanıldığı aşağıdaki çoklu alıcılı hedef tanımlanması problemini Bogler tanımlamıştır (Bogler 1981). Bir gizli haberalma raporuna göre 100 çeşit hedef olduğu kabul edilmiştir. Bu hedefleri $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{100}\}$ ile gösterelim. Ayrıca başka bir haberalma raporundan x_1 tipindeki hedeflerin sözkonusu taktik sahaya girdikleri öğrenilmiş ancak haberi veren ajan sahaya giren hedeflerin ancak %40'ına dair bilgiye ulaşabilmiştir. Rasgele seçilen bir hedefin belirli bir tipten olma olasılığı nedir?

Bu problemin Dempster-Shafer teorisi ile formülasyonu oldukça basittir. $A = \{x_1\}$ olsun. Bu durumda verilen e_1 bilgisine göre $m_1(A) = 0,4$ ve $m_1(X) = 0,6$ basit olasılık atamalıdır. Kanı ve usulrılık ölçümlerinin tanımlarından,

$$Bel_1(A) = 0,4, \quad Pl(A) = 1;$$

$$Bel_1(\bar{A}) = 0, \quad Pl(\bar{A}) = 0,6,$$

olarak bulunur. Kanı ve usulrılık ölçümlerini sırasıyla alt ve üst olasılık değerleri olarak yorumladığımızda aşağıdaki olasılık aralıklarını elde ederiz:

$$p_1(A) \in [0,4, 1],$$

$$p_1(\bar{A}) \in [0, 0,6],$$

$$p_1(X) = 1.$$

Varsayalım ki sonradan bir alıcıdan alınan e_2 bilgisine göre sahaya sadece x_1 değil on ayrı hedef daha girmiş olsun, diyelim ki bunlar $x_2, \dots, x_{11}$. $B = \{x_1, x_2, \dots, x_{11}\}$ olsun. Bu durumda,

$$m_2(B) = 1,$$

$$Bel_2(B) = Pl_2(B) = 1,$$

$$Pl(B) = Pl(\bar{B}) = 0$$

olur. Şimdi e_1, e_2 bilgilerini birleştirmek için devreye Dempster-Shafer'in birleştirme

kuralını sokmak gerekir.

Bu kurala göre m_1 ve m_2 iki ayrı basit olasılık ataması ise bileşik olasılık ataması m_{12} aşağıdaki gibi bulunur:

$$m_{12}(A) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B).m_2(C)}{1 - K}, A \neq \emptyset,$$

burada,

$$K = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B).m_2(C)$$

olarak tanımlanmıştır ve $m_{12}(\emptyset) = 0$ dır (Shafer,1976; Klir ve Folger, 1988).

Kuralı örneğimizdeki e_1, e_2 bilgilerine uyguladığımızda, aşağıdaki tabloda verilen $(m_{12}, \{A, \bar{A}, B, \bar{B}, X\})$ olayı için bileşik değerleri elde ederiz.

	m_{12}	Bel_{12}	Pl_{12}	p_{12}
A	0.4	0.4	1.0	[0.4,1]
$\bar{A}$	0.0	0.0	0.6	[0,0.6]
B	0.6	1.0	1.0	1
$\bar{B}$	0.0	0.0	0.0	0
X	0.0	1.0	1.0	1

Örnek. Çok alıcılı hedef tanımlanması ile ilgili diğer bir örneği ele alalım, uzayımızın bir önceki örnekte olduğu gibi yine 100 değişik tipteki hedeften oluştuğunu kabul edelim, fakat sadece 2 tip hedef bu olayımızda yer alsın. Bunlar bir savaş uçağı ve bir bombardıman uçağı olsunlar ve sırasıyla s ve b ile gösterilsinler. İki alıcıdan bilgi gelmiştir, kısa menzilli bir alıcıya göre hedef 0,6 dayanakla bir savaş uçağıdır, radar uyarı sistemine göre ise 0,95 dayanakla bir bombardıman uçağıdır. Bileşik bilgi ne kadar dayanak sağlar bize? Yine Dempster-Shafer'in teorisini uygulayarak aşağıdaki tabloda verilen 3 olası olay bulunur.

	m_1	m_2	m_{12}	Bel_{12}	Pl_{12}	p_{12}
$\{s\}$	0.6	0.00	0.07	0.07	0.12	[0.07,0.12]
$\{b\}$	0.0	0.95	0.88	0.88	0.93	[0.88,0.93]
X	0.4	0.05	0.05	1.00	1.00	1

Örnek. İki ayrı briç destesini gözönünde bulunduralım, kartları birbirinden arka yüzlerindeki renkleri ile, kırmızı (k) ve mavi (m) olarak ayırt ettiğimizi düşünelim. İlk destedeki tüm kartların kırmızı olduğunu biliyoruz ancak ikinci destedeki kartların rengi hakkında hiçbir şey bilmiyoruz olalım. Ayrıca bir kartın 0.8 olasılıkla ilk desteden 0.2 olasılıkla da ikinci desteden çekilmiş olduğunu biliyor olalım. Çekilen kart hangi renktendir?

Bu problemin doğal bir formülasyonu basit olasılık atamaları kullanarak yapılabilir. $X = \{k, m\}$ üzerinde $m(\{k\}) = 0$ ve $m(\{k, m\}) = 0.2$ dir. Bunun sonucunda $Bel(\{k\}) = 0.8$, $Pl(\{k\}) = 1$, $Bel(\{m\}) = 0$, $Pl(\{m\}) = 0.2$ olarak bulunur. Bu nedenle çektiğimiz kartın kırmızı olma olasılığı $p(k) \in [0.8, 1]$ ve mavi olma olasılığı da $p(m) \in [0, 0.2]$ aralığındadır.

Dikkat edilmesi gereken nokta eldeki verilerle bu aralıklardan daha kesin bir sonuca ulaşamayacağıdır, ancak olasılık teorisini uygulayacak olursak $p(k) = 0.9$ ve $p(m) = 0.1$ şeklindeki kesin sonuçları elde ederiz ki bu sonuçlar eldeki verilerin garantilediğinden daha fazlasını iddia etmektedirler.

5.4. Olabilirlik Teorisi

Örnek. Bir ormanda yaşayan fillerin bulunabilecekleri bölgeler ormanın bir bulanık kümesi olarak düşünülebilir. Ormanı uzayımız alalım ve X ile gösterelim fillerin bulundukları bölgeyi de X 'in E bulanık altkümesi ile gösterelim.

Elde edilen raporlara dayanarak (her $A \in \mathcal{Y}$ için öyle ki $\mathcal{Y}$, X 'in altkümelerinden oluşan bir kümeler ailesi olsun) A bölgesinde fillerin yaşamasının olasılığı bulunur ve önceki bölümlerde verilen olasılık-olabilirlik dönüşümlerinin birinden yararlanarak fillerin o bölgede yaşamasının olabilirliği $\pi(A)$ hesaplanır. $\mathcal{Y}$ 'deki kümeler (bölgeler) keyfi olarak örtüşebilirler. Bu bilgiye dayanarak E bulanık kümesinin μ_E üyelik fonksiyonunu tahmin etmek istiyoruz. X 'in bir bulanık altkümesinin üyelik fonksiyonu, X üzerinde bir genelleştirilmiş olabilirlik yoğunluk fonksiyonu olarak düşünülebileceğinden, üyelik fonksiyonunu aşağıdaki gibi tahmin edebiliriz:

$$\mu_E : X \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \inf_{x \in A \in \mathcal{Y}} \pi(A).$$

Bu en iyimser tahmindir. En genel halde,

$$\forall A \in \mathcal{Y}, \quad \sup_{x \in A} \mu_E(x) \leq \pi(A).$$

5.5. Bulanık Ölçüm ve Bulanık İntegral

Örnek. Bir üniversitenin matematik bölümüne bir doçent alınacaktır. Başvuran adaylardan üç tanesi ön koşullar olan doçentlik belgesine, yeterince uluslararası yayına, uluslararası atıfa ve 2 yıllık deneyime sahiptir. Herbiri üstteki kriterleri gözönünde bulunduran bölümün belirlediği kantitatif değerlendirme sisteminden 130 puan alarak barajı geçmişlerdir. İstihdam edilecek adayın belirlenmesi bu konuda deneyimli olan öğretim üyelerinden oluşan bir jürinin kararına bağlıdır. Jüri üyeleri önceden aralarında toplanmış ve adayların birer seminer vermesine bu seminer sırasında adaylara özel yaşantıları ile ilgili de sorular sormaya ve özgeçmişlerini incelemeye karar vermişlerdir. Jüri kolaylık açısından seminer sonunda adaya iki faktör üzerinden $[0, 1]$ aralığında puan verecektir. Birinci faktör olan ders verme yetisini x_1 ve ikinci faktör olan kişilik değerlendirmesini de x_2 ile gösterelim, uzayımız $X = \{x_1, x_2\}$ dir. Adayın jüriden alacağı toplam puan için de x_1 faktörüne $w_1 = 0.6$, x_2 faktörüne de $w_2 = 0.4$ ağırlık verilmesine karar verilmiştir. Değerlendirme sonucunda üç adayın aldığı puanlar aşağıdaki tablolada verilmiştir.

Aday No	x_1	x_2
1	1	0
2	0	1
3	0.45	0.45

Buna göre üç adayın ağırlıklı ortalama metodu ile değerlendirmesinde aşağıdaki puanlar elde edilmiştir:

$$Aday_1 = w_1 \times 1 + w_2 \times 0 = 0.6,$$

$$Aday_2 = w_1 \times 0 + w_2 \times 1 = 0.4,$$

$$Aday_3 = w_1 \times 0.45 + w_2 \times 0.45 = 0.45.$$

Bu sonuçlara göre en iyi aday birinci adaydır. Bu sonuç beklentilerimizle çelişir, haklı itirazlar gelir, kişilik özellikleri hiç beğenilmeyen aday mı kabul edilecektir? Bu çelişkinin kaynağının ağırlıkların doğru olarak tespit edilememesinden kaynaklanmadığını görmek çok önemlidir. Ağırlıkları tersine çevirecek olsak bu sefer de hiç ders verme beceresi olmayan aday en iyi aday seçilecektir ki bu da beklentilerimizle çelişir. Sezgilerimiz üçüncü adayın en uygun aday olduğunu söylemektedir. Problemin çözümündeki esas hata ağırlıklı ortalama metodunun $x_1, x_2, \dots, x_n$ faktörlerinin birbirinden bağımsız olduğu kabulünden, diğer bir deyişle etkilerinin *toplamsal* olduğu kabulünden kaynaklanmaktadır. Gerçek problemlerde bu her zaman kabul edilemez. Bu örneğimizde x_1 ve x_2 faktörlerinin bir bütün olarak önemi, tek tek kendilerine atanan önemlerin toplamlarından daha fazladır. *Önem fonksiyonu* olarak toplamsal bir ölçüm yerine bulanık bir ölçüm alırsak ve değerlendirme metodu olarak da bulanık integrali kullanacak olursak daha tatmin edici bir sonuca ulaşabiliriz. Bu aşağıdaki şekilde olabilir,

$$\mu(\{x_1\}) = 0.3,$$

$$\mu(\{x_2\}) = 0.1,$$

$$\mu(\{X\}) = 1, \quad \mu(\{\emptyset\}) = 0.$$

Bulanık integrali kullanarak aşağıdaki sentetik değerlendirme sonuçlarını elde ederiz:

$$Aday_1 = \int f_1 d\mu = (1 \wedge 0.3) \vee (0 \wedge 1) = 0.3,$$

$$Aday_2 = \int f_2 d\mu = (1 \wedge 0.1) \vee (0 \wedge 1) = 0.1,$$

$$Aday_3 = \int f_3 d\mu = 0.45 \wedge 1 = 0.45;$$

burada f_1, f_2, f_3 üç adaya verilen puanlamayı belirtmektedir, $f_1(x_1) = 1, f_1(x_2) = 0, f_2(x_1) = 0, f_2(x_2) = 1, f_3(x_1) = 0.45, f_3(x_2) = 0.45$. Böylece daha mantıklı bir sonuç elde ederiz: en uygun aday üçüncü adaydır.

6. SONUÇ

Bu çalışmada bulanık ölçüm kavramı tanıtıldıktan sonra bulanık ölçümün özel bir hali olan olabilirlik ölçümü incelenirken farklı kaynaklardan farklı yaklaşımlar biraraya getirilmiş, oldukça yeni sayılan bu konularla ilgili ülkemizdeki Türkçe kaynak açığı da bir parça olsun giderilmiştir.

Uygulamalar bölümünün “Bulanık Ölçüm ve Bulanık İntegral” kısmında kurulan örnek, klasik ölçüm teorisinin karşılaşılan bir problemde nasıl yetersiz kaldığını görebilmek açısından çok önemlidir. Kurulan örnekteki problem bir üniversitenin matematik bölümüne yeni bir doçent istihdam edilmesi ile ilgilidir. Problemi çözmek için önce klasik ölçüm araçları ile adaylar sıralanmış ancak sonuç tatmin edici bulunmayınca bulanık ölçüm ve bulanık integralden yararlanılmıştır. Bu örnekle incelenen konulardan problem çözümlerinde ne şekilde yararlanılabileceği konusunda fikir verilmiştir. Bu örnek gerçek hayat problemlerinin matematiksel modellemesinde klasik ölçümün yetersiz olduğu görüşünü desteklemekte ve özellikle uzman sistemcilerin ve yapay uscuların bulanık ölçümlerden faydalananarak bazı problemleri aşabileceklerini göstermektedir.

Çalışmada ayrıca, ispatları Wang ve Klir (1992) tarafından yapılmış olan ancak bazı yerleri okuyucuya bırakılan Bölüm 3.2.’deki Teorem 3.2.1.’in ispatı içerisinde D_n ’lerin birer sonlu sınıf olduğu ispatlanmış, Teorem 3.2.5.’in ikinci kısmında $Bel(E) \leq Pl(E)$ eşitsizliği gösterilmiş, Dubois ve Prade’in (1983) çalışmalarında sonuç olarak verilmiş ve ispatları okuyucuya bırakılmış olan Bölüm 4.2.3.’deki $\forall i$ için $\pi_i = \sum_{j=1}^n \min(p_i, p_j)$ eşitliği ispatlanmış ve yine aynı bölümde $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i = \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} (\pi_j - \pi_{j+1})$ olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- BOGLER, G. 1981.** Shafer-Dempster reasoning with applications to multisensor target identification systems, *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-17: 968-977.
- CHOQUET, G. 1954.** Theory of capacities. *Annales de l'Institut Fourier*, 5: 131-295.
- DEMPSTER, A.P. 1967.** Upper and lower probabilities induced by multi-valued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38: 325-339.
- DUBOIS, D. and PRADE, H. 1982.** On several representations of an uncertain body of evidence, *Fuzzy Information and Decision Processes*, 167-181.
- DUBOIS, D. and PRADE, H. 1983.** Unfair coins and necessity measures: Towards a possibilistic interpretation of histograms, *Fuzzy Sets and System*, 10: 15-20.
- DUBOIS, D. and PRADE, H. 1988.** Possibility Theory, Plenum Press, New York, 263 pp.
- KLIR, G.J. and FOLGER, T.A. 1988.** Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice Hall, New Jersey, 315 pp.
- KLIR, G. 1990.** Principle of uncertainty and information invariance, *Int. J. of General Systems*, 17 (2-3): 249-275.
- SHAEFER, G. 1976.** A Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 149pp.
- SUGENO, M. 1974.** Theory of Fuzzy Integral and its Applications, Ph. D. dissertation, Tokyo Institute of Technology, 124 pp.

- TERANO, T. and SUGENO, M. 1975.** Conditional fuzzy measures and their applications.
In: Zadeh L.A., Fu K.S., Tanaka K. and Shimura M. eds., *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes*, pp. 151-170, Academic Press, New York.
- VIERTL, R. 1987.** Probability and Bayesian Statistics, Plenum Press, New York, 475 pp.
- WANG, Z. and KLIR, G. 1992.** Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York, 354pp.
- ZADEH, L.A. 1965.** Fuzzy sets. *Information and Control*, 8: 338-353, New York.
- ZADEH, L.A. 1975.** The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Part I, *Information Sci.*, 8: 199-249, Part II, *Information Sci.*, 8: 301-357, Part III, *Information Sci.*, 9: 43-80.
- ZADEH, L.A. 1978.** Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1: 3-28.

ÖZGEÇMİŞ

Gültekin Soylu, 1972 yılında Almanya'nın Mülheim-Ruhr kentinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladı. Şubat 1999'da İstanbul Teknik Üniversitesi İşletme Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümünden Endüstri Mühendisi olarak mezun oldu. Eylül 1999'da Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Eylül 1999'dan bu yana Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Öğrenimini sürdürmekte. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmakta.

