



T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OLASILIKSAL G-METRİK UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK
TÜRLERİ

ELİF HEVESKER ORUÇ

DANIŞMAN
PROF. DR. ÖMER KİŞİ

BARTIN-2025



T.C.

**BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

OLASILIKSAL G-METRİK UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TÜRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif HEVESKER ORUÇ

JÜRİ ÜYELERİ

Danışman : Prof. Dr. Ömer KİŞİ
Üye : Prof. Dr. Emrah ALTUN
Üye : Doç. Dr. Melih GÖCEN

BARTIN-2025

KABUL VE ONAY

Elif HEVESKER ORUÇ tarafından hazırlanan “OLASILIKSAL G-METRİK UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TÜRLEİ” başlıklı bu çalışma, 21.01.2025 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliğı ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ömer KİŞİ

Üye : Prof. Dr. Emrah ALTUN

Üye : Doç. Dr. Melih GÖCEN

Bu tezin kabulü Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun/...../20... tarih ve 20...../.....-..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Sabri GÖK
Enstitü Müdürü

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Prof. Dr. Ömer KİŞİ danışmanlığında hazırlamış olduğum “OLASILIKSAL G-METRİK UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TÜRLERİ” başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

21.01.2025

Elif HEVESKER ORUÇ



ÖN SÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca deneyimleriyle bana rehberlik eden, tez çalışmam süresince sabır ve anlayışla yol gösteren, her konuda destek olan kıymetli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Ömer KİŞİ'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Elif HEVESKER ORUÇ



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

OLASILIKSAL G-METRİK UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TÜRLERİ

Elif HEVESKER ORUÇ

Bartın Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer KİŞİ

Bartın-2025, sayfa: 29

Bu tez çalışmasında, olasılıksal G-metrik uzaylarda (OGMU) çift diziler için lacunary istatistiksel yakınsama kavramı sunulmaktadır. Belirtilen uzaylarda, lacunary istatistiksel yakınsayan çift dizilerin temel özellikleri özetlenmiş ve lacunary yakınsama için gerekli (ancak yeterli olmayan) bir koşul verilmiştir. Ayrıca, bu yeni kavramın pratik uygulamasını göstermek amacıyla çeşitli örnekler sunulmuştur. OGM uzaylarda çift diziler için, $\mathfrak{I}_2$ -yakınsaklık, $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel yakınsaklık ve $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel Cauchy kavramları tanımlanmış ve bu kavramların temel özellikleri ile aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: $\mathfrak{I}_2$ -yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık, olasılıksal G-metrik uzayı

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

SOME TYPES OF CONVERGENCE IN PROBABİLİSTİC G-METRIC SPACES

Elif HEVESKER ORUÇ

Bartın University

Graduate School

Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Ömer KİŞİ

Bartın-2025, pp: 29

In this thesis, the concept of lacunary statistical convergence for double sequences in probabilistic G-metric spaces (PGMS) is presented. In these spaces, the fundamental properties of lacunary convergent double sequences are outlined, and a necessary (but not sufficient) condition for lacunary convergence is provided. Additionally, various examples are given to illustrate the practical application of this new concept. In probabilistic G-metric spaces, we define the notions of $\mathfrak{S}_2$ -convergence, $\mathfrak{S}_2$ -statistical convergence, and $\mathfrak{S}_2$ -statistical Cauchy for double sequences, and investigate their fundamental properties and relationships.

Keywords: $\mathfrak{S}_2$ -convergence, lacunary statistical convergence, probabilistic G-metric space

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	ii
BEYANNAME.....	iii
ÖN SÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TANIMLAR VE KAVRAMLAR	4
3. OLASILIKSAL G-METRİK UZAYLARDA LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	5
4. OLASILIKSAL G-METRİK UZAYLARDA χ^2 -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	17
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	25
KAYNAKLAR	26
ÖZGEÇMİŞ	28

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$(Y, \mathbb{G}, \tau)$	: Olasılıksal G-metrik uzayı
$St_{\theta_2}(\mathbb{G})$ uzayı	: Olasılıksal G-metrik uzayında lacunary istatistiksek yakınsak diziler
$\mathfrak{T}_{2st}(\mathbb{G})$	: Olasılıksal G-metrik uzayında $\mathfrak{S}_2$ -istatistiksel yakınsak diziler uzayı

KISALTMALAR

OGMU	: Olasılıksal G-metrik uzay
------	-----------------------------



1. GİRİŞ

Matematiğin temel kavramlarından biri olan dizilerin yakınsaklığı, sadece yakınsaklık koşulunu sağlayan dizilerle ilgili değildir; aynı zamanda bu koşulu karşılamayan dizilerin de matematiksel olarak incelenmesi büyük bir öneme sahiptir. Yakınsaklık şartını sağlamayan ancak belirli şartlar altında yakınsaklıkla ilişkilendirilebilen diziler, farklı yakınsaklık türlerinin gelişmesine yol açmıştır.

Yakınsaklık kavramına önemli bir boyut kazandıran bir diğer önemli kavram ise istatistiksel yakınsaklıktır. Pozitif doğal sayıların doğal yoğunluğu esas alınarak, istatistiksel yakınsama ilk kez 1951 yılında Fast tarafından tanımlanmıştır (Fast, 1951). Reel ve kompleks sayılarla ilgili dizilerde istatistiksel yakınsaklıkla ilgili pek çok özellik incelenmiştir (Schoenberg, 1959; Fridy, 1985). İstatistiksel yakınsaklık kavramının çift dizilere uygulanması, ilk defa Mursaleen ve Edely (2003) tarafından gerçekleştirilmiştir.

Fridy ve Orhan (1993), lacunary dizi kavramını kullanarak istatistiksel yakınsaklıkla önemli ilişkiler taşıyan ve yakınsaklık teorisinde önemli bir yer tutan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Bu çalışmada, başta istatistiksel yakınsaklık olmak üzere, diğer toplanabilirlik yöntemleri ile lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca, Fridy ve Orhan (1993) başka bir çalışmalarında, reel sayılar dizileri için Cauchy kriterinin lacunary istatistiksel karşılığını tanımlamışlar ve bu kavram ile lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Bunun yanı sıra, lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin toplanabilirlik özelliklerini de incelemişlerdir. Çakan vd. (2009), çift lacunary yoğunluğunu incelemiş ve çift dizilerin istatistiksel ve lacunary istatistiksel yakınsaklıkları arasındaki ilişkiyi araştırmıştır.

Kostyrko vd. (2000-2001), istatistiksel yakınsamanın genel bir versiyonu olarak $\mathfrak{I}$ -yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Das vd. (2008), bu fikri bir metrik uzayda çift dizilerle uyarlamış ve bu yakınsama biçiminin çeşitli temel özelliklerini incelemiştir. Bu temel üzerinde Das vd. (2011), kavramı daha da geliştirmiş ve $\mathfrak{I}$ -istatistiksel yakınsama olarak evrimleştirmiştir. Bu alanda, özellikle Dünder ve Altay'ın (2014) çalışmalarının yanı sıra birçok araştırmacı da bu kavramı ve uygulamalarını incelemiştir.

Gähler (1963), 2-metrik uzaylar kavramını incelemiş ve 2-metriklerin sıradan bir metrik uzayın doğal bir genellemesi olduğunu öne sürmüştür (daha ayrıntılı sonuçlar için (Cho vd., 2001; Freese ve Cho, 2001) çalışmalara bakılabilir). Ancak bazı araştırmacılar, 2-metrik uzaylar ile sıradan metrik uzaylar arasında anlamlı bir ilişki bulunmadığını belirtmişlerdir (Ha vd., 1988). Daha sonra Dhage (1992), D -metrik uzaylar adı verilen yeni bir genelleştirilmiş metrik sınıfı tanıtmıştır. Ancak Mustafa ve Sims'in (2003), çalışmalarında vurgulandığı gibi, D -metrik de bazı sınırlamalara sahiptir. Son olarak, Mustafa ve Sims (2006), genelleştirilmiş metrik uzaylar veya G -metrik uzaylar olarak adlandırılan yeni bir metrik uzay sınıfı tanıtmışlar ve G -metriklerin, doğal metrik uzayların bir genellemesi olduğunu ispatlamışlardır.

Diğer yandan, Menger (1942), metrik uzayın bir genellemesi olarak olasılıksal metrik uzay kavramını tanıtmıştır. Metrik uzayların bu olasılıksal genellemesi, fiziksel niceliklerin ve fizyolojik eşiklerin incelenmesi için oldukça uygun bir yaklaşım olarak görülmektedir. Bir olasılıksal metrik uzay, herhangi iki nokta arasındaki "mesafe"nin bir olasılık dağılım fonksiyonu olarak tanımlandığı bir uzaydır. Bu yaklaşım, iki nokta u ve v arasındaki mesafeyi bir reel sayı yerine dağılım fonksiyonu F_{uv} ile tanımlamayı içermektedir. Fonksiyonun $t > 0$ için $F_{uv}(t)$ değeri, u ve v arasındaki mesafenin t 'den küçük olma olasılığını ifade eder. Bu uzaylar, sıradan bir metrik uzayda sağlanan aksiyomlara benzer aksiyomları karşılamak üzere tasarlanmıştır. Ancak, üçgen eşitsizliği konusu bazı tartışmalara yol açmıştır. Menger'in üçgen eşitsizliği ilk olarak Wald (1943) tarafından sorgulanmış ve Menger'in formülünün yerine konulacak zarif bir alternatif önerilmiştir. Bununla birlikte, Schweizer ve Sklar (1960) Wald'ın eşitsizliğinin sınırlayıcı olduğuna dair yeterli gerekçeyi sunarak, Menger'in üçgen eşitsizliğine dönmüş ve onu hafif bir biçimde modifiye etmiştir.

Menger'in bu öncü çalışmasından sonra, Schwiezer ve Sklar (1960), Schwiezer vd. (1960), Tardiff (1976), Thorp (1962) gibi araştırmacılar, olasılıksal metrik uzayların gelişimine önemli katkılar sunmuşlardır. Bu alandaki daha ayrıntılı bilgiler için, Schwiezer ve Sklar (1983) tarafından yayımlanan eser önerilmektedir.

Zhou ve çalışma arkadaşları (2014), Menger olasılıksal metrik uzaylarını genelleştirerek literatüre Menger olasılıksal G -metrik uzaylarını (kısaca OGMU) kazandırmış ve bu yapıyı aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

2008 yılında, Şençimen ve Pehlivan (2008) güçlü topolojiyle donatılmış olasılıksal metrik uzayda istatistiksel yakınsak dizi ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramlarını tanıtmışlardır.

Bu tez çalışmasında, olasılıksal G -metrik uzaylar içinde çift diziler için lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı sunulacak ve bu kavramın temel özellikleri ele alınacaktır. Lacunary yakınsak çift dizilerin özellikleri özetlenecek ve olasılıksal G -metrik uzaylarda lacunary yakınsaklık için gerekli (ancak yeterli olmayan) bir koşul verilecektir. Olasılıklı genelleştirilmiş metrik uzaylarda çift diziler için $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel yakınsaklık ve $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel Cauchy kavramları ortaya konulacak ve bu kavramların temel özellikleri, aralarındaki ilişkiler dahil olmak üzere incelenecektir.

2. TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Bu bölümde temel tanım, teorem, vb. kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 1.1. $\mathbb{Y}$, boş olmayan bir küme; $\mathbb{G}, \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$ kümesinden $\mathcal{D}^+$ kümesine değer alan bir fonksiyon ve τ , sürekli bir σ -norm olsun. Bu bağlamda, her $f, g, h \in \mathbb{Y}$ için aşağıdaki koşullar sağlanır:

1. $\mathbb{G}_{(f,g,h)}(\sigma) = 1$ eşitliği yalnızca $f = g = h$ olması durumunda ve $\sigma > 0$ için geçerlidir;
2. $\mathbb{G}_{(f,f,g)}(\sigma) \geq \mathbb{G}_{(f,g,h)}(\sigma)$ eşitsizliği her f, g için $h \neq g, \sigma > 0$ olması durumunda sağlanır;
3. $\mathbb{G}_{(f,g,h)}(\sigma) = \mathbb{G}_{(g,f,h)}(\sigma) = \mathbb{G}_{(h,f,g)}(\sigma) = \dots$ ($f, g, h \in \mathbb{Y}$ için simetri özelliği);
4. $\mathbb{G}_{(f,g,h)}(m+n) \geq \tau \left(\mathbb{G}_{(f,z,z)}(m), \mathbb{G}_{(z,g,h)}(n) \right), \forall f, g, h, z \in X$ and $m, n \geq 0$.
eşitsizliği her $f, g, h, z \in \mathbb{Y}$ için ve $m, n \geq 0$ için sağlanır.

Bu koşullar altında $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$ Menger olasılıksal G-metrik uzayı olarak adlandırılır ve kısaca OGMU şeklinde ifade edilir.

Bunun yanı sıra, $t \in \mathbb{Y}, \alpha > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ olmak üzere, a_0 'ın (α, ρ) -komşuluğu $\mathfrak{N}_t(\alpha, \rho)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$\mathfrak{N}_t(\alpha, \rho) = \{q \in \mathbb{Y}: \mathcal{G}_{(t,q,q)}(\alpha) > 1 - \rho, \mathcal{G}_{(q,t,t)}(\alpha) > 1 - \rho\}.$$

3. OLASILIKSAL $\mathbb{G}$ -METRİK UZAYLARDA LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Dizi yakınsaklık kavramlarının topolojik uzayların yapısal özelliklerini incelemedeki belirleyici rolü ve olasılıksal $\mathbb{G}$ -metrik uzaylarının topolojik nitelikleri üzerine yapılan sınırlı çalışmalar dikkate alındığında, bu bölüm, olasılıksal $\mathbb{G}$ -metrik uzaylar bağlamında lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmayı ve derinlemesine incelemeyi hedeflemektedir.

Tanım 3.1. $(Y, \mathbb{G}, \tau)$ olasılıksal $\mathbb{G}$ -metrik uzay (OGMU) olsun. Eğer $\forall \vartheta > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ için

$$\lim_{f,g \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{fg}} |\{(v, w) \in I_{fg} : t_{vw} \notin \mathfrak{N}_t(\vartheta, \rho)\}| = 0,$$

veya denk olarak

$$d_{\theta_2}(\{(v, w) \in \mathbb{N}^2 : t_{vw} \notin \mathfrak{N}_t(\vartheta, \rho)\}) = 0$$

koşulu sağlanıyorsa (t_{vw}) dizisi $t \in Y$ 'ye olasılıksal lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ ile gösterilir.

Uyarı 3.1. $(Y, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $(t_{vw}) \in Y$ bir dizi olsun. Eğer (t_{vw}) dizisi $t \in Y$ 'ye olasılıksal yakınsak ise $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ sağlanır.

Eğer $\theta_2 = (\ell_f, \ell_g)$ lacunary dizisi

$$\liminf_{f \rightarrow \infty} \frac{\ell_f}{\ell_{f-1}} > 1, \liminf_{g \rightarrow \infty} \frac{\ell_g}{\ell_{g-1}} > 1$$

koşullarını sağlıyorsa $St(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ ise $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ sağlanır.

Önerme 3.1. $(Y, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ ve $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = z$ olsun. Bu durumda $t = z$ sağlanır.

Teorem 3.1. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $(t_{vw}), (s_{vw}), (u_{vw}) \in \mathbb{Y}$ diziler ve $t, s, u \in \mathbb{Y}$ elemanlar olsun. Eğer $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$, $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} s_{vw} = s$ ve $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} u_{vw} = u$ sağlanıyorsa, bu durumda $\forall \sigma > 0$ için $(\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma))$ dizisi $\mathbb{G}_{t,s,u}(\sigma)$ olasılıksal lacunary istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Herhangi $\sigma > 0, \rho > 0$ sayıları için $\sigma - 2\rho > 0$ sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} (\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma)) &\geq \mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma - \rho) \geq \tau \left(\mathbb{G}_{t_{vw}, t, t} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{t, s_{vw}, u_{vw}} \left(\frac{3\sigma - 4\rho}{3} \right) \right) \\ &\geq \tau \left(\mathbb{G}_{t_{vw}, t, t} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{s_{vw}, s, s} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{s, t, u_{vw}} \left(\sigma - \frac{5\rho}{3} \right) \right) \right) \\ &\geq \tau \left(\mathbb{G}_{t_{vw}, t, t} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{s_{vw}, s, s} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{u_{vw}, u, u} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma - 2\rho) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

sağlanır. Bununla birlikte

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma) &\geq \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma - \rho) \geq \tau \left(\mathbb{G}_{t, t_{vw}, t_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{t_{vw}, s, u} \left(\frac{3\sigma - 4\rho}{3} \right) \right) \\ &\geq \tau \left(\mathbb{G}_{t, t_{vw}, t_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{s, s_{vw}, s_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{s_{vw}, t_{vw}, u} \left(\sigma - \frac{5\rho}{3} \right) \right) \right) \\ &\geq \tau \left(\mathbb{G}_{t, t_{vw}, t_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{s, s_{vw}, s_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{u, u_{vw}, u_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma - 2\rho) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

τ sürekli olduğundan, aynı zamanda istatistiksel süreklidir. Buna bağlı olarak, $d_{\theta_2}(\mathcal{D}) = 1$ koşulunu sağlayan tüm $v, w \in \mathcal{D}$ için $\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma - 2\rho) \geq \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma)$ eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde $d_{\theta_2}(\mathcal{E}) = 1$ koşulunu sağlayan tüm $v, w \in \mathcal{E}$ için $\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma) \geq \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma - 2\rho)$ eşitsizliği sağlanır. $\mathcal{F} = \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ olsun. Bu durumda $d_{\theta_2}(\mathcal{F}) = 1$ koşulunu sağlayan tüm $v, w \in \mathcal{F}$ için $\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma - 2\rho) \geq \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma)$ ve

$\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma) \geq \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma - 2\rho)$ eşitsizlikleri geçerlidir. $\mathbb{G}$ 'nin soldan-süreklili olması nedeniyle, $\forall \sigma > 0$ için $St_{\theta_2} - \lim_{v, w \rightarrow \infty} \mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma) = \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma)$ elde edilir.

Teorem 3.2. (t_{vw}) , $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$ OGMU'da bir dizi ve $\widehat{\theta}_2' = (\widehat{k}_{\mathfrak{f}}, \widehat{\ell}_{\mathfrak{g}})$ dizisi $\theta_2 = (k_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}})$ dizisinin $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathbb{N}$ için $I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}} = \{(k, \ell): k_{\mathfrak{f}-1} < k \leq k_{\mathfrak{f}} \text{ \& } \ell_{\mathfrak{g}-1} < \ell \leq \ell_{\mathfrak{g}}\}$ ve $\widehat{I}_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}} = \{(\widehat{k}, \widehat{\ell}): \widehat{k}_{\mathfrak{f}-1} < \widehat{k} \leq \widehat{k}_{\mathfrak{f}} \text{ \& } \widehat{\ell}_{\mathfrak{g}-1} < \widehat{\ell} \leq \widehat{\ell}_{\mathfrak{g}}\}$ koşullarını sağlayan bir lacunary inceltilmiş olsun. $\mathfrak{f} = h(\varpi), \mathfrak{g} = h(\zeta)$ olacak biçimde $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer $\widehat{I}_{\varpi, \zeta} \subset I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}$ için $\frac{|\widehat{I}_{\varpi, \zeta}|}{|I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}|} \geq \varphi$ koşulunu sağlayan $\varphi > 0$ sayısı mevcutsa, bu durumda $t_{vw} \rightarrow t(S_{\text{OGMU}}^{\theta_2}) \Rightarrow t_{vw} \rightarrow t(S_{\text{OGMU}}^{\widehat{\theta}_2'})$ elde edilir.

İspat. $t_{vw} \rightarrow t(S_{\text{OGMU}}^{\theta_2})$ olsun ve $\mathfrak{x} > 0$ ve $\rho \in (0, 1)$ alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\widehat{I}_{\varpi, \zeta}|} |\{(\nu, w) \in \widehat{I}_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}: t_{\nu w} \notin \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}| \\ &= \left(\frac{|I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}|}{|\widehat{I}_{\varpi, \zeta}|} \right) \left(\frac{1}{|I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}|} \right) |\{(\nu, w) \in I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}: t_{\nu w} \notin \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}| \\ &\leq \frac{1}{\varphi} \left(\frac{1}{|I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}|} \right) |\{(\nu, w) \in I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}: t_{\nu w} \notin \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}| \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{|I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}|} |\{(\nu, w) \in I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}: t_{\nu w} \notin \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}| \geq \left(\frac{\varphi}{|\widehat{I}_{\varpi, \zeta}|} \right) |\{(\nu, w) \in \widehat{I}_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}: t_{\nu w} \notin \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}|$$

elde edilir. $t_{vw} \rightarrow t(S_{\text{OGMU}}^{\theta_2})$ olduğundan

$$\lim_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}|} |\{(\nu, w) \in I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}: t_{\nu w} \notin \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}| = 0$$

yazılır. Bununla birlikte $\varphi > 0$ ve $\mathfrak{f} = h(\varpi), \mathfrak{g} = h(\zeta)$ için

$$\lim_{\varpi, \zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{|\widehat{I_{\varpi, \zeta}}|} |\{(v, w) \in I_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}: t_{vw} \notin \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}| = 0$$

bulunur. Böylece $t_{vw} \rightarrow t \left(S_{\text{OGMU}}^{\theta_2^*} \right)$ elde edilir.

Teorem 3.3. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $(t_{vw}) \in \mathbb{Y}$ bir dizi olsun. Bu durumda

$$St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v, w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$$

olması için gerek ve yeter koşul, $d_{\theta_2}(\mathcal{P}) = 1$ sağlayan

$$\mathcal{P} = \{(k_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}}): k_{\mathfrak{f}} < k_{\mathfrak{f}+1}, \ell_{\mathfrak{g}} < \ell_{\mathfrak{g}+1}\} \subseteq \mathbb{N}^2$$

alt kümesi için

$$\mathbb{G} - \lim_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \rightarrow \infty} t_{k_{\mathfrak{f}} \ell_{\mathfrak{g}}} = t$$

sağlanmasıdır.

İspat. $d_{\theta_2}(\mathcal{P}) = 1$ sağlayan

$$\mathcal{P} = \{(k_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}}): k_{\mathfrak{f}} < k_{\mathfrak{f}+1}, \ell_{\mathfrak{g}} < \ell_{\mathfrak{g}+1}\} \subseteq \mathbb{N}^2$$

alt kümesi alınsın ve $\mathbb{G} - \lim_{n \rightarrow \infty} t_{k_{\mathfrak{f}} \ell_{\mathfrak{g}}} = t$ sağlasın. $\mathfrak{x} > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ olsun. $\mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}$, $\mathfrak{g} \geq \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho}$ iken $t_{k_{\mathfrak{f}} \ell_{\mathfrak{g}}} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)$ sağlayan $\mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}, \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho}$ mevcuttur. Buradan

$$\{(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \in \mathbb{N}^2: t_{vw} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\} \supset \{(k_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}}) \in \mathbb{N}^2: \mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}, \mathfrak{g} \geq \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho}\}$$

elde edilir.

$$d_{\theta_2}(\{(k_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}}) \in \mathbb{N}^2: \mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}, \mathfrak{g} \geq \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho}\}) = 1$$

olduğundan

$$d_{\theta_2}(\{(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \in \mathbb{N}^2: t_{vw} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}) = 1$$

bulunur. Böylece $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ elde edilir.

Tersine, $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ olsun. Böylece $\mathfrak{x} > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ için

$$d_{\theta_2}(\{(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \in \mathbb{N}^2: t_{vw} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}) = 1$$

yazılır. $\mathfrak{x} > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ için

$$B(\mathfrak{x}, \rho) = \{(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \in \mathbb{N}^2: t_{vw} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}$$

kümesi tanımlansın. $d_{\theta_2}(B(\mathfrak{x}, \rho)) = 1$ olduğu açıktır. Tüm $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \geq 2$ için $\mathfrak{x}_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}} = \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}$ and $\rho_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}} = \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}$ seçildiğinde

$$\mathfrak{N}_t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \supset \mathfrak{N}_t(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \supset \dots \supset \mathfrak{N}_t(\frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}, \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}) \supset \mathfrak{N}_t(\frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}+1}, \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}+1}) \supset \dots$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \supset B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \supset \dots \supset B(\frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}, \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}) \supset B(\frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}+1}, \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}+1}) \supset \dots$$

elde edilir.

$\mathfrak{f}, \mathfrak{g} (> 1) \in \mathbb{N}$ için $d_{\theta_2}(B(\frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}, \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}})) = 1$ olsun. $\eta_1 = 1$ alınsın. $d_{\theta_2}(B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = 1$ olduğundan tüm $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \geq \eta_2$ için

$$\frac{\left| \left\{ (v, w) \in I_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}: (v, w) \in B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right\} \right|}{\mathfrak{h}_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}} > 1 - \frac{1}{2}$$

sağlayan $\eta_2 \in B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ve $\eta_2 > \eta_1$ mevcuttur. $d_{\theta_2}(B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) = 1$ olduğundan tüm $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \geq \eta_3$ için

$$\frac{\left| \left\{ (\nu, w) \in I_{fg} : (\nu, w) \in B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\} \right|}{h_{fg}} > 1 - \frac{1}{3}$$

sağlayan $\eta_3 \in B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ve $\eta_3 > \eta_2$ mevcuttur. Benzer şekilde, $d_{\theta_2}(B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)) = 1$ olduğundan tüm $f, g \geq \eta_4$ için

$$\frac{\left| \left\{ (\nu, w) \in I_{fg} : (\nu, w) \in B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \right\} \right|}{h_{fg}} > 1 - \frac{1}{4}$$

sağlayan $\eta_4 \in B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{43}\right)$ ve $\eta_4 > \eta_3$ mevcuttur.

Bu işlemler devam ettikçe, $\eta_{mn} \in B\left(\frac{1}{mn}, \frac{1}{mn}\right)$ ve $f, g \geq \eta_{mn}$ için

$$\frac{\left| \left\{ (\nu, w) \in I_{fg} : (\nu, w) \in B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \right\} \right|}{h_{fg}} > 1 - \frac{1}{mn}$$

koşulunu sağlayan pozitif tam sayıların (η_{mn}) dizisi elde edilir.

Şimdi

$$\begin{aligned} A = \{ & (\nu, w) \in \mathbb{N}^2 : (\nu, w) \\ & \in [\eta_1, \eta_2] \} \bigcup \left\{ \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \left\{ (\nu, w) \in \mathbb{N}^2 : (\nu, w) \right. \right. \\ & \left. \left. \in [\eta_{mn}, \eta_{mn+1}] \cap B\left(\frac{1}{mn}, \frac{1}{mn}\right) \right\} \right\} \end{aligned}$$

kümesi tanımlansın.

Bu durumda $f, g \in \mathbb{N}$ iken $\eta_{mn} \leq f, g < \eta_{mn+1}$ için

$$\frac{\left| \left\{ (\nu, w) \in I_{fg} : (\nu, w) \in B \right\} \right|}{h_{fg}} \geq \frac{\left| \left\{ (\nu, w) \in I_{fg} : (\nu, w) \in B\left(\frac{1}{mn}, \frac{1}{mn}\right) \right\} \right|}{h_{fg}} \geq 1 - \frac{1}{mn}$$

elde edilir. $d_{\theta_2}(B) = 1$ bulunur. $\varkappa > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ alınsın. $\frac{1}{xy} < \varkappa$ and $\frac{1}{xy} < \rho$ koşulunu sağlayan yeterince büyük $x, y \in \mathbb{N}$ seçilsin. $f, g \geq \eta_{xy}$ ve $f, g \in B$ olsun. Bu durumda $\eta_{ef} \leq f, g < \eta_{eh+1}$ ve $e > x, h > y$ sağlayan $e, h \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $f, g \in B\left(\frac{1}{eh}, \frac{1}{eh}\right)$ elde edilir. Böylece

$$t_{f,g} \in \mathfrak{N}_t\left(\frac{1}{eh}, \frac{1}{eh}\right) \subset \mathfrak{N}_t\left(\frac{1}{xy}, \frac{1}{xy}\right) \subset \mathfrak{N}_t(\varkappa, \rho)$$

bulunur. $f, g \in B$ ve $f, g \geq \eta_{xy}$ için $t_{f,g} \in \mathfrak{N}_t(\varkappa, \rho)$ olur. $\mathcal{P} = \{(k_f, \ell_g) : k_f < k_{f+1}, \ell_g < \ell_{g+1}\} \subseteq \mathbb{N}^2$ olarak alınırsa $\mathbb{G} - \lim_{f,g \rightarrow \infty} t_{k_f \ell_g} = t$ elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $(t_{vw}) \in \mathbb{Y}$ dizi olsun. Bu durumda $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ olması için gerek ve yeter koşul hemen hemen v ve w için $t_{vw} = q_{vw}$ olacak biçimde (q_{vw}) dizisinin var olması ve $\mathbb{G} - \lim_{v,w \rightarrow \infty} q_{vw} = t$ sağlanmasıdır.

Şimdi, olasılıksal lacunary istatistiksel yakınsak bir dizi için gerekli bir koşul sunulacaktır.

Teorem 3.4. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $(t_{vw}) \in \mathbb{Y}$ dizi olsun. Eğer $St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ sağlanırsa tüm $\varkappa > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ için

$$\lim_{f,g \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{fg}} \left| \left\{ (v, w) \in I_{fg} : \mathbb{G}_{t_{vw}, t_{v_0 w_0}, t_{v_0 w_0}}(\varkappa) > 1 - \rho, \mathbb{G}_{t_{v_0 w_0}, t_{vw}, t_{vw}}(\varkappa) > 1 - \rho \right\} \right| = 1$$

koşulunu sağlayan $v_0 = v_0(\varkappa, \rho)$ ve $w_0 = w_0(\varkappa, \rho)$ var olmasıdır.

İspat. $\varkappa > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ sayıları içi ve τ 'nın sürekliliğinden

$$\tau(1 - \rho_0, 1 - \rho_0) > 1 - \rho$$

sağlayan $\rho_0 \in (0,1)$ mevcuttur.

$$St_{\theta_2}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$$

olduğundan

$$d_{\theta_2} \left(\left\{ (\nu, w) \in \mathbb{N}^2 : t_{\nu w} \in \mathfrak{N}_t \left(\frac{\gamma}{2}, \rho_0 \right) \right\} \right) = 1$$

yazılır.

$$B = \left\{ (\nu, w) \in \mathbb{N}^2 : t_{\nu w} \in \mathfrak{N}_t \left(\frac{\gamma}{2}, \rho_0 \right) \right\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda $d_{\theta_2}(B) = 1$ olur. B kümesinin keyfi ν_0, w_0 elemanları alınsın. $t_{\nu_0 w_0} \in \mathfrak{N}_t \left(\frac{\gamma}{2}, \rho_0 \right)$ olduğu açıktır. $(\nu, w) \in B$ için

$$\mathbb{G}_{t_{\nu w}, t_{\nu_0 w_0}, t_{\nu_0 w_0}}(\gamma) \geq \tau \left(\mathbb{G}_{t_{\nu w}, t, t} \left(\frac{\gamma}{2} \right), \mathbb{G}_{t, t_{\nu_0 w_0}, t_{\nu_0 w_0}} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right) \geq \tau(1 - \rho_0, 1 - \rho_0) > 1 - \rho$$

yazılır. Aynı zamanda

$$\mathbb{G}_{t_{\nu_0 w_0}, t_{\nu w}, t_{\nu w}}(\gamma) \geq \tau \left(\mathbb{G}_{t_{\nu_0 w_0}, t, t} \left(\frac{\gamma}{2} \right), \mathbb{G}_{t, t_{\nu w}, t_{\nu w}} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right) \geq \tau(1 - \rho_0, 1 - \rho_0) > 1 - \rho$$

bulunur. Böylece

$$B \subset \left\{ (\nu, w) \in \mathbb{N}^2 : \mathbb{G}_{t_{\nu w}, t_{\nu_0 w_0}, t_{\nu_0 w_0}}(\gamma) > 1 - \rho, \mathbb{G}_{t_{\nu_0 w_0}, t_{\nu w}, t_{\nu w}}(\gamma) > 1 - \rho \right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{f, g \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{fg}} \left| \left\{ (\nu, w) \in I_{fg} : \mathbb{G}_{t_{\nu w}, t_{\nu_0 w_0}, t_{\nu_0 w_0}}(\gamma) > 1 - \rho, \mathbb{G}_{t_{\nu_0 w_0}, t_{\nu w}, t_{\nu w}}(\gamma) > 1 - \rho \right\} \right| = 1$$

yazılır.

Takip eden örnek, Teorem 3.4'te belirtilen koşulun yeterli olmadığını kanıtlamaktadır.

Örnek 3.1. $\ell_0 = 0, \ell_{\mathfrak{f}} = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}+1}, \ell_0 = 0, \ell_{\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}+1}, \forall \mathfrak{f}, \mathfrak{g} \geq 1$ olsun. $\mathbb{H}$ ve $\mathbb{D}$ dağılım fonksiyonları

$$\mathbb{H}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } \mathfrak{x} \leq 0 \text{ ise,} \\ 1, & \text{eğer } \mathfrak{x} > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve $\mathbb{D}$ dağılım fonksiyonu

$$\mathbb{D}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } \mathfrak{x} \leq 0 \text{ ise} \\ 1 - e^{-\mathfrak{x}}, & \text{eğer } \mathfrak{x} > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bununla birlikte, $\mathfrak{x} > 0$ için $\mathbb{D}(\mathfrak{x}/0) = \mathbb{D}(\infty) = 1$ ve $\mathbb{D}(0/0) = 0$ olarak kabul edilsin. Aynı zamanda $\mathfrak{x} > 0$ için $\mathbb{G}: (0,1) \times (0,1) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\mathbb{G}_{m,n,p}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \mathbb{H}(\mathfrak{x}), & \text{eğer } m = n = p \text{ ise,} \\ \mathbb{D}\left(\frac{\mathfrak{x}}{|m-n| + |n-p| + |p-m|}\right), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fonksiyonu ortaya konulsun. Bu durumda, T , minimum üçgen fonksiyonu olmak üzere $((0,1), \mathbb{G}, T)$, OGMU belirtmektedir. $(\mathfrak{t}_{vw})$ dizisi

$$(\mathfrak{t}_{vw}) = \begin{cases} vw, & \text{eğer } v, w \text{ tam kare ise} \\ 1/4vw, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde belirlensin. $(\mathfrak{t}_{vw})$ dizisinin hiçbir alt dizisi yakınsak olmadığından, $(\mathfrak{t}_{vw})$ dizisi de istatistiksel yakınsak değildir. Şimdi ise, $(\mathfrak{t}_{vw})$ dizisinin teoremden belirlenen koşulları sağladığı gösterilsin. $\rho \in (0,1)$ ve $\mathfrak{x} > 0$ olsun. $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ pozitif tamsayısı $e^{-\mathcal{T}\mathcal{S}} < \rho$ koşulunu sağlasın. $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ tam kare olmayan pozitif tamsayı olsun. Bu durumda

$$\mathbb{G}_{\mathfrak{y}\mathfrak{z}, \mathcal{T}\mathcal{S}, \mathcal{T}\mathcal{S}}(\mathfrak{x}) = 1 - e^{-\mathfrak{x}/2|\mathfrak{t}_{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} - \mathfrak{t}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}|} = 1 - e^{-\mathfrak{x}/2|1/\mathfrak{y}\mathfrak{z} - 1/\mathcal{T}\mathcal{S}|} \geq 1 - e^{-\mathcal{T}\mathcal{S}} > 1 - \rho$$

elde edilir. Benzer şekilde $\mathbb{G}_{\mathcal{T}\mathcal{S}, \mathcal{T}\mathcal{S}, \mathfrak{y}\mathfrak{z}}(\mathfrak{x}) > 1 - \rho$ bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \left\{ (\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \in \mathbb{N}^2: \mathbb{G}_{\mathfrak{t}_{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}, \mathfrak{t}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}, \mathfrak{t}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}}(\mathfrak{x}) > 1 - \rho, \mathbb{G}_{\mathfrak{t}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}, \mathfrak{t}_{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}, \mathfrak{t}_{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}}(\mathfrak{x}) > 1 - \rho \right\} \\ & \supseteq \{ (\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \in \mathbb{N}^2: \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \text{ tam kare değil} \} \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\lim_{f,g \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{fg}} \left| \left\{ (\eta, \beta) \in I_{fg} : \mathbb{G}_{t_{\eta\beta}, t_{JS}, t_{JS}}(\gamma) > 1 - \rho, \mathbb{G}_{t_{JS}, t_{\eta\beta}, t_{\eta\beta}}(\gamma) > 1 - \rho \right\} \right| = 1$$

elde edilir.

Örnek 3.2. $\mathcal{X} = [0, \infty)$ ve tüm $d, e \in [0, 1]$ için $\mathcal{T}(d, e) = \min\{d, e\}$ tanımlansın. Tüm $m, n, p \in \mathcal{X}$ ve $\gamma \geq 0$ için $\mathbb{G}_{m,n,p}(\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma + |m-n| + |n-p| + |p-m|}$ olsun. Bu durumda $(\mathcal{X}, \mathbb{G}, T)$ OGMU belirtmektedir. Baloncuk sıralama yöntemiyle bir listeyi sıralayan bir algoritmayı ele alalım. Bu algoritmanın çalışma süresi (T_{vw})

$$T_{vw} = \begin{cases} v^2 w^2, & \text{eğer } v, w \text{ asal sayılar ise,} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile ifade edilen bir dizi tarafından tanımlanır; burada v, w , listenin eleman sayılarını temsil etmektedir. Bu bağlamda, herhangi bir reel v_0, w_0 sayıları için $\mathbb{G}_{T_{vw}, v_0 w_0, v_0 w_0}(\gamma) < 1, \mathbb{G}_{T_{vw}, T_{vw}, v_0 w_0}(\gamma) < 1$ koşulları tüm $\gamma \geq 0$ ve v, w asal değerleri için sağlanmaktadır. Bu durum (T_{vw}) dizisinin $v_0 w_0$ değerine yakınsamadığını göstermektedir. Bununla birlikte, liste boyutu v, w arttıkça zaman karmaşıklığı (T_{vw}) da artar, bu da algoritmanın performansının büyük giriş boyutlarında (standart anlamda) kötüleştiğini ve dizinin ıraksadığını ortaya koymaktadır. Ancak, (T_{vw}) istatistiksel olarak 1'e yakınsamakta olup, bu durum analiz açısından daha avantajlı bir davranış sergilemektedir. Bu tür bir yaklaşım, algoritmanın istatistiksel yakınsama özelliğinin önemli olduğu belirli uygulama alanlarında faydalı olabilir. Gerçekten, bir algoritmanın istatistiksel yakınsama göstermesi, algoritmanın giriş boyutunun artışıyla birlikte belirli bir değere doğru yaklaşma eğiliminde olduğunu ifade eder. Bu durum, algoritmanın performansının büyük girişler için daha güvenilir hale geldiğini gösterir. Bu özellik, özellikle belirsizlik içeren verilerle çalışırken, algoritmanın genel doğruluğunu koruyarak istatistiksel hataların etkisini minimize eder. İstatistiksel yakınsama, belirli bir değere yakınsamayı garanti ettiğinden, algoritmaların büyük veri setlerinde daha verimli çalışmasını sağlar ve zamanla artan doğrulukla performans iyileştirmelerine olanak tanır.

Aşağıdaki örnekler, lacunary istatistiksel yakınsama kavramının, OGM uzaylarında dizilerin istatistiksel yakınsama kavramından farklı olduğunu göstermektedir.

Örnek 3.3. Standart topoloji altında verilen gerçekte sayılar doğrusu $\mathbb{R}$ üzerinde düşünelim. Bu durumda $(\mathbb{R}, \mathfrak{F}, M)$ OGMU belirtmektedir; burada $\mathfrak{F} = \varepsilon_{|u-v|}$, tüm $u, v \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır. Dolayısıyla, $\mathcal{G}^*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$\mathcal{G}_{x,y,z}^*(\mathfrak{x}) = \min\{\mathfrak{F}_{x,y}(\mathfrak{x}), \mathfrak{F}_{y,z}(\mathfrak{x}), \mathfrak{F}_{x,z}(\mathfrak{x})\}$$

olarak tanımlandığında OGM uzayıdır. Şimdi, $\theta_2 = (\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}})$ lacunary dizisi

$$\liminf_{\mathfrak{f} \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}}}{\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}-1}} = 1, \liminf_{\mathfrak{g} \rightarrow \infty} \frac{\ell_{\mathfrak{g}}}{\ell_{\mathfrak{g}-1}} = 1$$

koşulunu sağlasın. $(\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}_j})$ ve $(\ell_{\mathfrak{g}_i})$ sırasıyla $(\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}})$ ve $(\ell_{\mathfrak{g}})$ dizilerinin $\mathfrak{f}_j \geq \mathfrak{f}_{j-1} + 2$ için $\frac{\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}_j}}{\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}_{j-1}}} < 1 + \frac{1}{j}$ ve $\frac{\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}_{j-1}}}{\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}_{j-1}}} > j$ ve $\mathfrak{g}_i \geq \mathfrak{g}_{i-1} + 2$ için $\frac{\ell_{\mathfrak{g}_i}}{\ell_{\mathfrak{g}_{i-1}}} < 1 + \frac{1}{i}$ ve $\frac{\ell_{\mathfrak{g}_{i-1}}}{\ell_{\mathfrak{g}_{i-1}}} > i$ koşullarının sağlayan alt dizileri olsunlar. $(\mathfrak{t}_{vw})$ dizisini

$$T_{vw} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } v, w \in I_{\mathfrak{f}_j, \mathfrak{g}_i} \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şekilde tanımlansın.

Herhangi bir m reel sayısı için $\mathfrak{x}_0 < \min\{|1 - m|, |m|\}$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathfrak{h}_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}}} |\{(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \in I_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}} : \mathfrak{t}_{vw} \notin \mathfrak{N}_m(\mathfrak{x}_0, \delta)\}| \neq 0$$

olur. Diğer taraftan, herhangi bir $\mathfrak{x}, \delta > 0$ için

$$\lim_{r, s \rightarrow \infty} \frac{1}{rs} |\{(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) : \mathfrak{t}_{vw} \notin \mathfrak{N}_0(\mathfrak{x}, \delta), \mathfrak{v} \leq r, \mathfrak{w} \leq s\}| = 0$$

elde edilir. Çünkü $\theta_2 = (\ell_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}})$ dizisinin yapısına göre $\{(\mathfrak{f}_j, \mathfrak{g}_i) : j, i \in \mathbb{N}\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır.



4. OLASILIKSAL $\mathbb{G}$ -METRİK UZAYLARDA $\mathfrak{T}_2$ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 4.1. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$ olasılıksal $\mathbb{G}$ -metrik uzay (OGMU) olsun. Eğer $\forall \gamma > 0, \rho \in (0,1)$

$$\{(v, w) \in \mathbb{N}^2: t_{vw} \notin \mathfrak{N}_t(\gamma, \rho)\} \in \mathfrak{S}_2$$

koşulu sağlanıyorsa (t_{vw}) dizisi $t \in \mathbb{Y}$ 'ye olasılıksal $\mathfrak{T}_2$ -yakınsaktır denir ve $\mathfrak{T}_2(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ ile gösterilir.

Tanım 4.2. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$ olasılıksal $\mathbb{G}$ -metrik uzay (OGMU) olsun. Eğer $\forall \gamma > 0, \rho \in (0,1)$ ve $\alpha > 0$ için

$$\left\{ (a, b) \in \mathbb{N}^2: \frac{1}{ab} |\{v \leq a, w \leq b: t_{vw} \notin \mathfrak{N}_t(\gamma, \rho)\}| \geq \alpha \right\} \in \mathfrak{S}_2,$$

veya denk olarak

$$d^{\mathfrak{S}_2}(\{(v, w): t_{vw} \notin \mathfrak{N}_t(\gamma, \rho)\}) = 0$$

koşulu sağlanıyorsa (t_{vw}) dizisi $t \in \mathbb{Y}$ 'ye olasılıksal $\mathfrak{T}_2$ -istatistiksel yakınsaktır denir ve $\mathfrak{T}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ ile gösterilir.

Uyarı 4.1. OGMU'da her olasılıksal $\mathfrak{T}_2$ - yakınsak dizi aynı zamanda olasılıksal $\mathfrak{T}_2$ -istatistiksel yakınsaktır.

Önerme 4.1. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $(t_{vw}) \in \mathbb{Y}$ dizi olsun. Eğer $\mathfrak{T}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ ve $\mathfrak{T}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = z$ olsun. Bu durumda $t = z$ sağlanır.

Teorem 4.1. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU, $\mathfrak{S}_2$ trivial olmayan uygun ideal, $(t_{vw}), (s_{vw}), (u_{vw}) \in \mathbb{Y}$ diziler ve $t, s, u \in \mathbb{Y}$ elemanlar olsun. Eğer $\mathfrak{T}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$, $\mathfrak{T}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} s_{vw} = s$ ve $\mathfrak{T}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} u_{vw} = u$ sağlanıyorsa, bu durumda $\forall \sigma > 0$ için $(\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma))$ dizisi $\mathbb{G}_{t,s,u}(\sigma)$ olasılıksal $\mathfrak{S}_2$ -istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Herhangi $\sigma > 0, \rho > 0$ pozitif sayıları için $\sigma - 2\rho > 0$ sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma)) &\geq \mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma - \rho) \geq \tau \left(\mathbb{G}_{t_{vw}, t, t} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}} \left(\frac{3\sigma - 4\rho}{3} \right) \right) \\
&\geq \tau \left(\mathbb{G}_{t_{vw}, t, t} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{s_{vw}, s, s} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{s, t, u_{vw}} \left(\sigma - \frac{5\rho}{3} \right) \right) \right) \\
&\geq \tau \left(\mathbb{G}_{t_{vw}, t, t} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{s_{vw}, s, s} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{u_{vw}, u, u} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma - 2\rho) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

sağlanır. Bununla birlikte

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma) &\geq \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma - \rho) \geq \tau \left(\mathbb{G}_{t, t_{vw}, t_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}} \left(\frac{3\sigma - 4\rho}{3} \right) \right) \\
&\geq \tau \left(\mathbb{G}_{t, t_{vw}, t_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{s_{vw}, s_{vw}, s_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{s_{vw}, t_{vw}, u_{vw}} \left(\sigma - \frac{5\rho}{3} \right) \right) \right) \\
&\geq \tau \left(\mathbb{G}_{t, t_{vw}, t_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{s_{vw}, s_{vw}, s_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \tau \left(\mathbb{G}_{u_{vw}, u_{vw}, u_{vw}} \left(\frac{\rho}{3} \right), \mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma - 2\rho) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

τ sürekli olduğundan, aynı zamanda istatistiksel süreklidir. Buna bağlı olarak, $d^{\mathfrak{S}_2}(\mathcal{D}) = 1$ koşulunu sağlayan tüm $v, w \in \mathcal{D}$ için $\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma - 2\rho) \geq \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma)$ eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde $d^{\mathfrak{S}_2}(\mathcal{E}) = 1$ koşulunu sağlayan tüm $v, w \in \mathcal{E}$ için $\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma) \geq \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma - 2\rho)$ eşitsizliği sağlanır. $\mathcal{F} = \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ olsun. Bu durumda $d^{\mathfrak{S}_2}(\mathcal{F}) = 1$ koşulunu sağlayan tüm $v, w \in \mathcal{F}$ için $\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma - 2\rho) \geq \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma)$ ve $\mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma) \geq \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma - 2\rho)$ eşitsizlikleri geçerlidir. $\mathbb{G}$ 'nin soldan-sürekli olması nedeniyle, $\forall \sigma > 0$ için $\mathfrak{I}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{v, w \rightarrow \infty} \mathbb{G}_{t_{vw}, s_{vw}, u_{vw}}(\sigma) = \mathbb{G}_{t, s, u}(\sigma)$ elde edilir.

Teorem 4.2. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $(t_{vw}) \in \mathbb{Y}$ bir dizi olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{I}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{v, w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$$

olması için gerek ve yeter koşul, $d^{\mathfrak{S}_2}(\mathcal{P}) = 1$ sağlayan

$$\mathcal{P} = \{(\ell_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}}): \ell_{\mathfrak{f}} < \ell_{\mathfrak{f}+1}, \ell_{\mathfrak{g}} < \ell_{\mathfrak{g}+1}\} \subseteq \mathbb{N}^2$$

alt kümesi için

$$\mathbb{G} - \lim_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \rightarrow \infty} t_{\ell_{\mathfrak{f}} \ell_{\mathfrak{g}}} = t$$

sağlanmasıdır.

İspat. $d^{\mathfrak{S}_2}(\mathcal{P}) = 1$ sağlayan

$$\mathcal{P} = \{(\ell_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}}): \ell_{\mathfrak{f}} < \ell_{\mathfrak{f}+1}, \ell_{\mathfrak{g}} < \ell_{\mathfrak{g}+1}\} \subseteq \mathbb{N}^2$$

alt kümesi alınsın ve $\mathbb{G} - \lim_{n \rightarrow \infty} t_{\ell_{\mathfrak{f}} \ell_{\mathfrak{g}}} = t$ sağlasın. $\mathfrak{x} > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ olsun. $\mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}$, $\mathfrak{g} \geq \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho}$ iken $t_{\ell_{\mathfrak{f}} \ell_{\mathfrak{g}}} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)$ sağlayan $\mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}, \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho}$ mevcuttur. Buradan

$$\{(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \in \mathbb{N}^2: t_{\mathfrak{f} \mathfrak{g}} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\} \supset \{(\ell_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}}) \in \mathbb{N}^2: \mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}, \mathfrak{g} \geq \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho}\}$$

elde edilir.

$$d^{\mathfrak{S}_2}(\{(\ell_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}}) \in \mathbb{N}^2: \mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}, \mathfrak{g} \geq \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho}\}) = 1$$

olduğundan

$$d^{\mathfrak{S}_2}(\{(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \in \mathbb{N}^2: t_{\mathfrak{f} \mathfrak{g}} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}) = 1$$

bulunur. Böylece $\mathfrak{I}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rightarrow \infty} t_{\mathfrak{v} \mathfrak{w}} = t$ elde edilir.

Tersine, $\mathfrak{I}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rightarrow \infty} t_{\mathfrak{v} \mathfrak{w}} = t$ olsun. Böylece $\mathfrak{x} > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ için

$$d_{\theta_2}(\{(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \in \mathbb{N}^2: t_{\mathfrak{f} \mathfrak{g}} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}) = 1$$

yazılır. $\mathfrak{x} > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ için

$$B(\mathfrak{x}, \rho) = \{(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \in \mathbb{N}^2: t_{\mathfrak{v}\mathfrak{w}} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\}$$

kümesi tanımlansın. $d^{\mathfrak{S}_2}(B(\mathfrak{x}, \rho)) = 1$ olduğu açıktır. Tüm $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \geq 2$ için $\mathfrak{x}_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}} = \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}$ and $\rho_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}} = \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}$ seçildiğinde

$$\mathfrak{N}_t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \supset \mathfrak{N}_t(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \supset \dots \supset \mathfrak{N}_t(\frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}, \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}) \supset \mathfrak{N}_t(\frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}+1}, \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}+1}) \supset \dots$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \supset B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \supset \dots \supset B(\frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}, \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}) \supset B(\frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}+1}, \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}+1}) \supset \dots$$

elde edilir.

$$\mathfrak{f}, \mathfrak{g} (> 1) \in \mathbb{N} \text{ için } d^{\mathfrak{S}_2}(B(\frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}, \frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{g}})) = 1 \text{ olsun. } \mathfrak{y}_1 = 1 \text{ alınsın. } d^{\mathfrak{S}_2}(B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = 1$$

olduğundan tüm $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \geq \mathfrak{y}_2$ için

$$\frac{\left| \left\{ (\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \in I_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}: (\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \in B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right\} \right|}{\mathfrak{h}_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}} > 1 - \frac{1}{2}$$

sağlayan $\mathfrak{y}_2 \in B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ve $\mathfrak{y}_2 > \mathfrak{y}_1$ mevcuttur. $d^{\mathfrak{S}_2}(B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) = 1$ olduğundan tüm $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \geq \mathfrak{y}_3$ için

$$\frac{\left| \left\{ (\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \in I_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}: (\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \in B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \right\} \right|}{\mathfrak{h}_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}} > 1 - \frac{1}{3}$$

sağlayan $\mathfrak{y}_3 \in B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ve $\mathfrak{y}_3 > \mathfrak{y}_2$ mevcuttur.

Benzer şekilde, $d^{\mathfrak{S}_2}(B(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})) = 1$ olduğundan tüm $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \geq \mathfrak{y}_4$ için

$$\frac{|\{(v, w) \in I_{fg}: (v, w) \in B(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}|}{h_{fg}} > 1 - \frac{1}{4}$$

sağlayan $\eta_4 \in B(\frac{1}{4}, \frac{1}{43})$ ve $\eta_4 > \eta_3$ mevcuttur.

Bu işlemler devam ettikçe, $\eta_{mn} \in B(\frac{1}{mn}, \frac{1}{mn})$ ve $f, g \geq \eta_{mn}$ için

$$\frac{|\{(v, w) \in I_{fg}: (v, w) \in B(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}|}{h_{fg}} > 1 - \frac{1}{mn}$$

koşulunu sağlayan pozitif tam sayıların (η_{mn}) dizisi elde edilir.

Şimdi

$$A = \{(v, w) \in \mathbb{N}^2: (v, w) \in [\eta_1, \eta_2]\} \cup \left\{ \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \{(v, w) \in \mathbb{N}^2: (v, w) \in [\eta_{mn}, \eta_{mn+1}] \cap B(\frac{1}{mn}, \frac{1}{mn})\} \right\}$$

kümesi tanımlansın.

Bu durumda $f, g \in \mathbb{N}$ iken $\eta_{mn} \leq f, g < \eta_{mn+1}$ için

$$\frac{|\{(v, w) \in I_{fg}: (v, w) \in B\}|}{h_{fg}} \geq \frac{|\{(v, w) \in I_{fg}: (v, w) \in B(\frac{1}{mn}, \frac{1}{mn})\}|}{h_{fg}} \geq 1 - \frac{1}{mn}$$

elde edilir. $d^{\mathfrak{S}_2}(B) = 1$ bulunur. $\mathfrak{x} > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ alınsın. $\frac{1}{xy} < \mathfrak{x}$ and $\frac{1}{xy} < \rho$ koşulunu

sağlayan yeterince büyük $x, y \in \mathbb{N}$ seçilsin. $f, g \geq \eta_{xy}$ ve $f, g \in B$ olsun. Bu durumda $\eta_{ef} \leq$

$f, g < \eta_{eh+1}$ ve $e > x, h > y$ sağlayan $e, h \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $f, g \in B(\frac{1}{eh}, \frac{1}{eh})$ elde

edilir. Böylece

$$t_{\mathfrak{f},g} \in \mathfrak{N}_t\left(\frac{1}{eh}, \frac{1}{eh}\right) \subset \mathfrak{N}_t\left(\frac{1}{xy}, \frac{1}{xy}\right) \subset \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)$$

bulunur. $\mathfrak{f}, g \in B$ ve $\mathfrak{f}, g \geq \mathfrak{y}_{xy}$ için $t_{\mathfrak{f},g} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)$ olur. $\mathcal{P} = \{(\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}}, \ell_g) : \mathfrak{k}_{\mathfrak{f}} < \mathfrak{k}_{\mathfrak{f}+1}, \ell_g < \ell_{g+1}\} \subseteq \mathbb{N}^2$ olarak alınırsa $\mathbb{G} - \lim_{\mathfrak{f},g \rightarrow \infty} t_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}}\ell_g} = t$ elde edilir.

Sonuç 4.1. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $(t_{vw}) \in \mathbb{Y}$ dizi olsun. Bu durumda $\mathfrak{T}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ olması için gerek ve yeter koşul hemen hemen v ve w için $t_{vw} = q_{vw}$ olacak biçimde (q_{vw}) dizisinin var olması ve $\mathbb{G} - \lim_{v,w \rightarrow \infty} q_{vw} = t$ sağlanmasıdır.

Şimdi, olasılıksal $\mathfrak{T}_2$ -istatistiksel yakınsak bir dizi için gerekli bir koşul sunulacaktır.

Teorem 4.3. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $(t_{vw}) \in \mathbb{Y}$ dizi olsun. Eğer $\mathfrak{T}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$ sağlanırsa tüm $\mathfrak{x} > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_2 - \lim_{a,b \rightarrow \infty} \frac{1}{ab} \left| \left\{ u \leq a, v \leq b : \mathbb{G}_{t_{vw}, t_{v_0w_0}, t_{v_0w_0}}(\mathfrak{x}) > 1 - \rho, \mathbb{G}_{t_{v_0w_0}, t_{vw}, t_{vw}}(\mathfrak{x}) > 1 - \rho \right\} \right| \\ = 1 \end{aligned}$$

koşulunu sağlayan $v_0 = v_0(\mathfrak{x}, \rho)$ ve $w_0 = w_0(\mathfrak{x}, \rho)$ var olmasıdır.

İspat. $\mathfrak{x} > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ sayıları içi ve τ 'nın sürekliliğinden

$$\tau(1 - \rho_0, 1 - \rho_0) > 1 - \rho$$

sağlayan $\rho_0 \in (0,1)$ mevcuttur.

$$\mathfrak{T}_{2st}(\mathbb{G}) - \lim_{v,w \rightarrow \infty} t_{vw} = t$$

olduğundan

$$d^{\mathfrak{T}_2} \left(\left\{ (v, w) \in \mathbb{N}^2 : t_{vw} \in \mathfrak{N}_t\left(\frac{\mathfrak{x}}{2}, \rho_0\right) \right\} \right) = 1$$

sağlanır.

$$B = \left\{ (v, w) \in \mathbb{N}^2 : t_{vw} \in \mathfrak{N}_t\left(\frac{\gamma}{2}, \rho_0\right) \right\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda $d^{\mathfrak{I}_2}(B) = 1$ olur. B kümesinin keyfi v_0, w_0 elemanları alınsın. $t_{v_0 w_0} \in \mathfrak{N}_t\left(\frac{\gamma}{2}, \rho_0\right)$ olduğu açıktır. $(v, w) \in B$ için

$$\mathbb{G}_{t_{vw}, t_{v_0 w_0}, t_{v_0 w_0}}(\gamma) \geq \tau\left(\mathbb{G}_{t_{vw}, t, t}\left(\frac{\gamma}{2}\right), \mathbb{G}_{t, t_{v_0 w_0}, t_{v_0 w_0}}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) \geq \tau(1 - \rho_0, 1 - \rho_0) > 1 - \rho$$

yazılır. Aynı zamanda

$$\mathbb{G}_{t_{v_0 w_0}, t_{vw}, t_{vw}}(\gamma) \geq \tau\left(\mathbb{G}_{t_{v_0 w_0}, t, t}\left(\frac{\gamma}{2}\right), \mathbb{G}_{t, t_{vw}, t_{vw}}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) \geq \tau(1 - \rho_0, 1 - \rho_0) > 1 - \rho$$

bulunur. Böylece

$$B \subset \left\{ (v, w) \in \mathbb{N}^2 : \mathbb{G}_{t_{vw}, t_{v_0 w_0}, t_{v_0 w_0}}(\gamma) > 1 - \rho, \mathbb{G}_{t_{v_0 w_0}, t_{vw}, t_{vw}}(\gamma) > 1 - \rho \right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_2 - \lim_{a, b \rightarrow \infty} \frac{1}{ab} \left| \left\{ u \leq a, v \leq b : \mathbb{G}_{t_{vw}, t_{v_0 w_0}, t_{v_0 w_0}}(\gamma) > 1 - \rho, \mathbb{G}_{t_{v_0 w_0}, t_{vw}, t_{vw}}(\gamma) > 1 - \rho \right\} \right| \\ = 1 \end{aligned}$$

yazılır.

Tanım 4.3. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$ olasılıksal $\mathbb{G}$ -metrik uzay (OGMU) olsun. Eğer $\forall \gamma > 0, \rho \in (0, 1)$ için

$$d^{\mathfrak{I}_2} \left(\left\{ (v, w) : t_{vw} \notin \mathfrak{N}_{t_{v k_{\gamma, \rho}}, w l_{\gamma, \rho}}(\gamma, \rho) \right\} \right) = 0$$

koşulunu sağlayacak $k_{\gamma, \rho}, l_{\gamma, \rho} \in \mathbb{N}$ mevcut ise (t_{vw}) dizisi $t \in \mathbb{Y}$ 'ye olasılıksal $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Uyarı 4.2. Eğer (t_{vw}) dizisi OGMU'da istatistiksel Cauchy dizisi ise $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 4.4. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $t = (t_{vw}) \in \mathbb{Y}$ bir dizi olsun. Bu durumda, $d^{\mathfrak{I}_2}(\mathcal{P}) = 1$ sağlayan

$$\mathcal{P} = \{(k_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}}): k_{\mathfrak{f}} < k_{\mathfrak{f}+1}, \ell_{\mathfrak{g}} < \ell_{\mathfrak{g}+1}\} \subseteq \mathbb{N}^2$$

alt kümesi için $(t)_{\mathcal{P}}$ 'nin bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda (t_{vw}) dizisi $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat. $d^{\mathfrak{I}_2}(\mathcal{P}) = 1$ sağlayan

$$\mathcal{P} = \{(k_v, \ell_w): k_v < k_{v+1}, \ell_w < \ell_{w+1}\} \subseteq \mathbb{N}^2$$

alt kümesi alınsın ve $(t)_{\mathcal{P}}$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\forall \mathfrak{x} > 0, \rho \in (0,1)$ için

$$d^{\mathfrak{I}_2} \left(\left\{ (v, w): t_{vw} \notin \mathfrak{N}_{t_{v_{\mathfrak{f}}, \rho} w_{\mathfrak{g}, \rho}}(\mathfrak{x}, \rho) \right\} \right) = 0$$

koşulunu sağlayacak $\mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}, \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho} \in \mathbb{N}$ mevcuttur.

$\mathfrak{x} > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ olsun. $\mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}, \mathfrak{g} \geq \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho}$ iken $t_{k_{\mathfrak{f}} \ell_{\mathfrak{g}}} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)$ sağlayan $\mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}, \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho}$ mevcuttur. Buradan

$$\{(v, w) \in \mathbb{N}^2: t_{vw} \in \mathfrak{N}_t(\mathfrak{x}, \rho)\} \supset \{(k_{\mathfrak{f}}, \ell_{\mathfrak{g}}) \in \mathbb{N}^2: \mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}_{\mathfrak{x}, \rho}, \mathfrak{g} \geq \mathfrak{g}_{\mathfrak{x}, \rho}\}$$

Bu kapsam ilişkisinden $d^{\mathfrak{I}_2} \left(\left\{ (v, w): t_{vw} \in \mathfrak{N}_{t_{v_{\mathfrak{f}}, \rho} w_{\mathfrak{g}, \rho}}(\mathfrak{x}, \rho) \right\} \right) = 1$ elde edilir. Böylece (t_{vw}) dizisi $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 4.5. $(\mathbb{Y}, \mathbb{G}, \tau)$, OGMU ve $t = (t_{vw}) \in \mathbb{Y}$ bir dizi olsun. (t_{vw}) dizisi $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel yakınsak ise $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel Cauchy dizisidir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, olasılıksal G-metrik uzaylar içinde çift diziler için lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılacak ve bu kavramın temel özellikleri incelenecektir. Lacunary yakınsak çift dizilerin özellikleri özetlenecek ve bu yakınsaklık türü için olasılıksal G-metrik uzaylarda gerekli (ancak yeterli olmayan) bir koşul sunulacaktır. Ayrıca, olasılıklı genelleştirilmiş metrik uzaylarda çift diziler için $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel yakınsaklık ve $\mathfrak{I}_2$ -istatistiksel Cauchy kavramları tanımlanacak ve bu kavramların temel özellikleri, aralarındaki ilişkiler dâhil olmak üzere detaylı bir şekilde analiz edilecektir. Bu çalışma, olasılıksal G-metrik uzaylarda çift diziler için yakınsaklık analizine katkı sağlarken, bu yeni kavramların daha geniş matematiksel yapıların anlaşılması ve uygulanabilirliğine ışık tutmayı amaçlamaktadır.

KAYNAKLAR

- Çakan, C., Altay, B. ve Çoşkun, H. (2018). Double lacunary density and lacunary statistical convergence of double sequences. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 47(1): 35-45.
- Cho, Y.J., Paul, C.S., Kim, S.S. ve Misiak, A. (2001). *Theory of 2-Inner Product Spaces*. Nonva Science Publishers, New York.
- Das, P., Kostyrko, P., Wilczynski, W. ve Malik, P. (2008). I and I^* -convergence of double sequences. *Mathematica Slovaca*, 58(5): 605-620.
- Das, P., Savaş, E. ve Ghosal, S.Kr. (2011). On generalizations of certain summability methods using ideals. *Applied Mathematics Letters*, 24: 1509-1514.
- Dhage, B.C. (1992). Generalized metric spaces and mappings with fixed point. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, 84: 329-336.
- Dündar, E., ve Altay, B. (2014). $\mathfrak{I}_2$ -convergence and $\mathfrak{I}_2$ -Cauchy double sequences. *Acta Mathematica Scientia*, 34(2): 343-353.
- Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, 2: 241-244.
- Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, 5: 301-313.
- Fridy, J. ve Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics*, 160: 43-51.
- Freese, R.W. ve Cho, Y.J. (2001). *Geometry of Linear 2-Normed Spaces*. Nonva Science Publishers, New York.
- Gähler, S. (1963). 2-metrische räume und ihre topologische strukture. *Mathematische Nachrichten*, 26: 115-148.
- Ha, K.S., Cho, Y.J. ve White, A. (1988). Strictly convex and strictly 2-convex 2-normed spaces. *Mathematica Japonica*, 33: 375-384.
- Kostyrko, P., Šalát, T. ve Wilczyński, W. (2000/2001), I -convergence. *Real Analysis Exchange*, 26(2): 669-685.
- Menger, K. (1942). Statistical metrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 28: 535-537.
- Mursaleen, M. ve Edely, O.H.H. (2023). Statistical convergence of double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288(1): 223-231.
- Mustafa, Z. ve Sims, B. (2003). Remarks concerning D-metric spaces. In: *Proceedings of the International Conferences on Fixed Point Theory and Applications*, Valencia,

Spain, pp. 189-198.

Mustafa, Z. ve Sims, B. (2006). A new approach to generalized metric spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 7: 289-297.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *The American Mathematical Monthly*, 66(5): 361-375.

Schweizer, B. ve Sklar, A. (1983). Probabilistic Metric Spaces. Elsevier, New York.

Schweizer, B., Sklar, A. ve Thorp, E. (1960). The metrization of statistical metric spaces, *Pacific Journal of Mathematics*, 10, 673-675.

Şençimen, C. ve Pehlivan, S. (2008). Strong statistical convergence in probabilistic metric spaces. *Stochastic Analysis and Applications*, 26: 651-664.

Tardiff, R. M. (1976). Topologies for probabilistic metric spaces, *Pacific Journal of Mathematics*, 65: 233-251.

Wald, A. (1943). On a statistical generalization of metric spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 29: 196-197.

Zhou, C., Wang, S., Ćirić, L., ve Alsulami, S. (2014). Generalized probabilistic metric spaces and fixed point theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, 2014: 91.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :

Doğum Yeri ve Tarihi :

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi :

Yüksek Lisans Öğrenimi : Bartın Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Bilimsel Faaliyet/Yayınlar : Kişi, Ö., Gürdal, M. ve Hevesker, E. (2024). Some results on generalized statistical convergence of double sequences via ideals in probabilistic generalized metric spaces. International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches, 8(7): 200–210.
Kişi, Ö., Gürdal, M. ve Hevesker, E. (2024). Some Results For Probabilistic Generalized Metric Spaces. International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches, 8(7): 218–227.
Kişi, Ö., Güler, E. ve Hevesker, E. (2024). Further results on lacunary statistical convergence of double sequences in probabilistic G-metric spaces. 4th International Conference on Innovative Academic Studies ICIAS 2024.
Kişi, Ö., Güler, E. ve Hevesker, E. (2024). On neutrosophic I_2 -lacunary statistical convergence of order α of neutrosophic random variables in probability. 4th International Conference on Innovative Academic Studies ICIAS 2024.

İş Deneyimi

Stajlar :

Projeler ve Kurs Belgeleri :

Çalıştığı Kurumlar :

İletişim**E-Posta Adresi**

:

Tarih

:

21/01/2025 (Tez Savunma Tarihi)

