



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**OLASILIKSAL METRİK UZAYLAR İLE KUAZİ-DÜZGÜN
UZAYLAR ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER**

Aygül BİLGİN

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Doç.Dr. Hülya DURU

II. DANIŞMAN

Dr.Öğr.Üyesi Serkan İLTER

Aralık, 2021

İSTANBUL

Bu alışma 27.12.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç.Dr. Hülya DURU (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr. Erhan ALIřKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr. Uğur řENGÜL
Marmara Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Lisans dönemimden tez sürecimin son evresine kadar gerek bilgi birikimi gerekse hayata karşı olan duruşu ile her zaman örnek aldığım, hayatımla ilgili aldığım önemli kararlarda ilham kaynağım olan ve desteğini her zaman hissettiğim saygıdeğer danışmanım Doç.Dr. Hülya DURU'ya, yüksek lisans eğitimim boyunca bana yol gösteren, desteklerini hissettiren ve tez dönemimin her aşamasında emeği olan kıymetli hocam Dr.Öğr.Üyesi Serkan İLTER'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca, hayallerime ulaşmamda ve inandığım yolda yürümemde bana daima destek veren babam Hüseyin BİLGİN'e ve bu zamana kadar yaşadığım her zorlukta, beni yüreklendiren ve ayağa kaldıran ilk öğretmenim annem Kısmet BİLGİN'e sonsuz teşekkür ederim.

Aralık, 2021

Aygül BİLGİN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	x
1 GİRİŞ	1
2 GENEL KISIMLAR	3
3 MALZEME VE YÖNTEM	32
4 BULGULAR	33
5 TARTIŞMA VE SONUÇ	39
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	43

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbf{P}(\mathbf{X})$	: X kümesinin bütün alt kümelerinin topluluğu
$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	: İrrasyonel sayılar kümesi
$\mathbf{B}_r(\mathbf{x})$	: x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\mathbf{B}^n$	: $B \circ B \circ \dots \circ B$, n tane
$\overline{A}$	: A kümesinin kapanışı
A°	: A kümesinin içi
Δ	: Dağılım fonksiyonlarının kümesi
Δ^*	: Soldan sürekli dağılım fonksiyonlarının kümesi
Δ^+	: $F \in \Delta$ olan uzaklık dağılım fonksiyonları kümesi
Δ_*^+	: $F \in \Delta^*$ olan uzaklık dağılım fonksiyonları kümesi
$\mathcal{U}$	: $X \times X$ üzerindeki düzgünlük
$\mathcal{U}_q$	: $X \times X$ üzerindeki kuazi-düzgünlük
t	: t -norm (üçgensel norm)
F_{xy}	: $X \times X$ ten dağılım fonksiyon uzayında tanımlı F fonksiyonunun $F(x,y)$ değeri

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OLASILIKSAL METRİK UZAYLAR İLE KUAZİ-DÜZGÜN UZAYLAR ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

Aygül BİLGİN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Hülya DURU

II. Danışman: Dr.Öğr.Üyesi Serkan İLTER

Derleme niteliğindeki bu tez çalışmasında, olasılıksal metrik uzaylar ve kuazi-düzgünlük kavramları ile ilgilenilmektedir.

İlk olarak, topolojik uzaylar ile ilgili temel kavramlar, dağılım fonksiyonları uzayları, t-norm ve üçgen fonksiyonu kavramları verilmiştir. Kuazi-düzgün uzaylar ve özellikleri tanıtılmıştır. Her kuazi-düzgünlüğün bir düzgünlük olmadığını gösteren çeşitli örnekler verilmiştir. Her kuazi-düzgünlüğün bir topoloji doğurduğunun ispatı verilerek bu topolojinin bazı topolojik özellikleri incelenmiştir.

Daha sonra, üçgen fonksiyonu yardımıyla tanımlı olasılıksal metrik uzay ve t-norm yardımıyla tanımlı Menger olasılıksal metrik uzay kavramları verilmiştir. Üçgen fonksiyonu yardımıyla tanımlı olasılıksal metrik uzay kavramı için, uygun süreklilik koşulu altında, bir düzgünlük belirlenebildiğinden böylece bu uzay üzerinde, düzgünlüğün doğurduğu topolojinin tanımlanabilmesinden bahsedilmiştir. Benzer şekilde, her $(p, q) \in X \times X$ noktasına karşılık genişletilmiş reel sayılardan $[0,1]$ kapalı aralığına tanımlı $F(p, q)$ fonksiyonlarının soldan sürekli, dağılım fonksiyonları olduğu, t-norm kavramı yardımıyla tanımlı (X, F, t) Menger olasılıksal metrik uzayı verildiğinde, X kümesinin metriklenebilir olduğu ifade edilmiştir. Dolayısıyla X üzerinde bir metrik topolojiden bir düzgünlük elde edildiği ve bu düzgünlüğün doğurduğu topoloji ile metrik topolojinin aynı olduğu gözlenmiştir.

Son bölümde ise Menger olasılıksal metrik uzayından farklı olarak $F(p, q)$ fonksiyonları soldan sürekli olmadığında, belirli koşullar altında t-norm kavramı yardımıyla tanımlı $(X, \mathfrak{F}, t)$ uzayı verildiğinde, X kümesinin bir kuazi-düzgünlüğünün doğurduğu topolojiyle topolojik uzay olması ve bu uzayın bazı özellikleri incelenmiştir. Bu topolojinin, Menger olasılıksal metrik uzayı üzerindeki metrik topoloji ile ilişkisi verilmiş, 1. sayılabilir T_2 (Hausdorff) olduğu elde edilmiş ve bu uzayın kuazi-metrik olduğu belirlenmiştir.

Aralık 2021, 53 sayfa.

Anahtar kelimeler: Olasılıksal Metrik Uzay, Kuazi-düzgün uzay, Dağılım fonsiyonları



SUMMARY

M.Sc. THESIS

SOME RELATIONSHIPS BETWEEN QUASI-UNIFORM SPACE AND PROBABILISTIC METRIC SPACE

Aygül BİLGİN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof. Hülya DURU

Co-Supervisor: Assis.Prof. Serkan İLTER

In this compilation thesis, probabilistic metric spaces and quasi-uniform concepts are dealt with.

First, the basic concepts of topological spaces, spaces of distribution functions, t-norm and triangle function concepts are given. Quasi-uniform spaces and their properties are introduced. Various examples are given to show that not every quasi-uniform is a regularity. By giving the proof that every quasi-uniform gives rise to a topology, some topological properties of this topology are examined.

After, probabilistic metric space defined with the help of triangle function and Menger probabilistic metric space defined with the help of t-norm are given. For the probabilistic metric space concept defined with the help of the triangle function, it is mentioned that, under the appropriate continuity condition, a uniformity can be determined, so that the topology caused by the uniformity can be defined on this space. Similarly, for every point $(p, q) \in X \times X$, the $F(p, q)$ functions defined from the extended real numbers to the closed interval $[0, 1]$ are left-continuous, distribution functions defined with the help of the t-norm concept (X, F, t) given the Menger probabilistic metric space, it is stated that the set X is metrizable. Therefore, it has been observed that a uniformity is obtained from a metric topology on X and that the topology created by this uniformity coincides with the metric topology.

In the last section, unlike the Menger probabilistic metric space, when the $F(p, q)$ functions are not continuous from the left, given the $(X, \mathfrak{F}, t)$ space defined with the help of the t-norm concept under certain conditions, the X set is a topological space with a topology caused by a quasi-uniformity. and some properties of this space are investigated. The relation of this topology with the metric topology on the Menger probabilistic metric space is given, it is obtained that it is first countable T_2 (Hausdorff) and it is determined that this space is quasi-metric.

December 2021, 53 pages.

Keywords: Probabilistic Metric Space, Quasi-uniform space, Distribution functions



1. GİRİŞ

1960 yılında Császár tarafından ismi kuazi-düzgün (quasi-uniform) uzay olarak değiştirilen yarı-düzgün (semi-uniform) uzay kavramını, 1948 yılında ilk olarak Nachbin vermiştir [4], [17]. Tersine, verilen bir topolojik uzayın, topoloji ile uyumlu bir kuazi-düzgünlüğe sahip olduğunu ilk olarak 1955 yılında Krishnan göstermiş, 1960 yılında Császár aynı iddiayı kendi tanımladığı yapılar ile ispatlamıştır [4], [13]. Direkt topolojik ispat ise 1962 yılında, Kelley'in bir sonucunu kullanan Pervin tarafından verilmiştir [18].

Kuazi-düzgün uzaylar, topolojik açıdan düzgün uzaylardan daha ilginçtir. Örneğin, düzgün uzaylar tam regüler oldukları olduğu halde, kuazi-düzgün uzayların regüler olması bile gerekmez.

Olasılıksal metrik uzay teorisi ile ilgili çalışmalar, ilk olarak 1942 yılında Menger'in fizik konuları ile ilgili bazı ölçümler eşliğinde tanıttığı istatistiksel metrik uzay kavramları ile başlamıştır [19]. Daha sonra 1943 yılında Wald, Konvolüsyon integrali kullanımı ile bu uzaylarda üçgen eşitsizliğinin karşılığı olarak düşünülebilen yeni bir eşitsizlik ifade ederek farklı bir istatistiksel metrik uzay kavramı vermiştir [20]. Bu çalışmayı Menger'in, Wald'un eşitsizliği ile uyumlu sonuçlar elde ettiği [19], [15] çalışmaları izlemiştir. Schweizer ve Sklar, [20] çalışmasında Menger'in t-norm kavramı yardımıyla verdiği üçgen eşitsizliği koşulunu soldan sürekli dağılım fonksiyonları için kullanarak Menger olasılıksal metrik uzay kavramını tanıtmışlardır. Bu çalışmada, üçgen fonksiyonu kavramı yardımıyla verilen üçgen eşitsizliğini kullanarak farklı bir olasılıksal metrik uzay tanımlamışlar ve üçgen fonksiyonunun süreklilik koşulu altında, bu uzay üzerinde bir düzgünlük belirlenebildiğini ispatlamışlardır. Böylece üçgen fonksiyonu kavramı yardımıyla tanımlı olasılıksal metrik uzay üzerinde, bu düzgünlüğün doğurduğu topoloji tanımlanmıştır. Bu çalışmalarda klasik metrik uzayın, olasılıksal metrik uzayının özel bir hali olduğu açıklanmıştır.

Belirli koşulları sağlayan, t-norm kavramı yardımıyla tanımlı (X, F, t) Menger olasılıksal metrik uzayı verildiğinde, X kümesinin metriklenebilir olduğu ispatlanmıştır. Dolayısıyla X üzerindeki metrik topolojiden bir düzgünlük elde edilir ve bu düzgünlüğün doğurduğu topoloji ile metrik topoloji çakışır. Menger olasılıksal metrik uzayında, her noktasına karşılık

genişletilmiş reel sayılardan $[0,1]$ kapalı aralığına tanımlı fonksiyonlar soldan sürekli, dağılım fonksiyonlarıdır.

Bu tez çalışmasında, Menger olasılıksal metrik uzayından farklı olarak fonksiyonlar soldan sürekli olmadığında, belirli koşullar altında t -norm kavramı yardımıyla tanımlı $(X, \mathfrak{F}, t)$ uzayı verildiğinde, X kümesinin bir kuazi-düzgünlüğünün doğurduğu topolojiyle topolojik uzay olması ve bu uzayın bazı özellikleri incelenmiştir.

Bu tez, [12], [20], [6] ve [2] kitaplarını temel alan bir derlemedir.



2. GENEL KISIMLAR

Bu tez, [12], [20], [6] ve [2] kitaplarını temel alan bir derlemedir.

Tanım 2.1. X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere, $\mathfrak{F} \subseteq \mathbf{P}(X)$ topluluğu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, $\mathfrak{F}$ topluluğuna X üzerinde bir filtre denir.

- (a) Boş küme, $\mathfrak{F}$ topluluğuna ait değildir.
- (b) $\mathfrak{F}$ topluluğundaki herhangi iki kümenin kesişimi yine $\mathfrak{F}$ topluluğuna aittir.
- (c) $\mathfrak{F}$ topluluğundaki bir kümeyi kapsayan X in her alt kümesi, $\mathfrak{F}$ topluluğuna aittir.

Tanım 2.2. X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere, $\mathfrak{B} \subseteq \mathbf{P}(X)$ topluluğu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, $\mathfrak{B}$ topluluğuna X üzerinde bir filtre tabanı denir.

- (a) Boş küme, $\mathfrak{B}$ topluluğuna ait değildir.
- (b) $\mathfrak{B}$ topluluğuna ait herhangi iki kümenin kesişiminin alt kümesi olacak şekilde $\mathfrak{B}$ topluluğunda bir eleman vardır.

Önerme 2.3. $\mathfrak{B} \subseteq \mathbf{P}(X)$ olmak üzere, $\mathfrak{B}$ topluluğuna ait bir kümeyi kapsayan X kümesinin alt kümelerinin oluşturduğu topluluğu $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ ile gösterelim. $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğunun X üzerinde bir filtre olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{B}$ topluluğunun X üzerinde bir filtre tabanı olmasıdır.

Ayrıca $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ filtresinin, $\mathfrak{B}$ filtre tabanını kapsayan en küçük filtre olduğu açıktır.

Sonuç 2.4. $\mathfrak{B}$, X üzerinde bir filtre tabanı ise $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğu $\mathfrak{B}$ tarafından doğurulan filtredir.

Tanım 2.5. X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere, $\tau \subseteq \mathbf{P}(X)$ topluluğu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, τ topluluğuna X üzerinde bir topoloji denir.

(T1) X ve boş küme, τ topluluğuna aittir.

(T2) τ topluluğuna ait sonlu sayıda kümenin kesişimi, τ topluluğuna aittir.

(T3) τ topluluğuna ait herhangi sayıda kümenin birleşimi, τ topluluğuna aittir.

Tanım 2.6. τ topluluğu, X üzerinde bir topoloji ise (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir. Ayrıca,

(a) τ nun üyelerine açık küme,

(b) Bütünleyeni açık olan kümeye kapalı küme

denir. $B \subseteq X$ herhangi bir küme olmak üzere; B kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye, bu kümenin kapanışı denir ve $\bar{B}$ ile gösterilir. B kümesinin kapsadığı en büyük açık kümeye, B kümesinin içi denir ve B° ile gösterilir. Dikkat edilecek olursa topoloji tanımından, her kapanış kümesinin kapalı ve her iç kümesinin açık olduğu kolaylıkla elde edilir.

Tanım 2.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve $a \in X$ herhangi bir nokta olsun. Bir $V \subseteq X$ alt kümesi, a noktasını eleman kabul eden açık bir kümeyi kapsıyorsa, V kümesine a noktasının bu topolojik uzay içindeki bir komşuluğu denir. Bir a noktasının bütün komşuluklarının topluluğu $\mathcal{V}(a)$ ile gösterilir. Bu topluluğa, a noktasındaki komşuluk sistemi denir.

Teorem 2.8. (X, τ) bir topolojik uzay, $a \in X$ ve $\mathcal{V}(a)$, a noktasındaki komşuluk sistemi olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir:

(i) Her $W \in \mathcal{V}(a)$ için $a \in W$.

(ii) $\mathcal{V}(a)$ topluluğu X üzerinde bir filtredir.

(iii) $G \in \mathcal{V}(a)$ ise her $b \in G$ için $G \in \mathcal{V}(b)$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{V}(a)$ vardır.

Teorem 2.9. X boştan farklı herhangi bir küme, $a \in X$ herhangi bir nokta ve $\mathcal{V}(a) \subseteq P(X)$ alt topluluğu Teorem 2.8 koşullarını sağlayan bir topluluk olsun. Bu durumda X üzerinde, $\mathcal{V}(a)$ topluluğunu komşuluk sistemi olarak kabul eden bir τ topolojisi vardır ve

$$\tau = \{G \subseteq X \mid \forall x \in G \quad \exists V \in \mathcal{V}(x) \quad V \subseteq G\} \cup \{\emptyset\} \quad (2.1)$$

şeklindedir.

Tanım 2.10. (X, τ) bir topolojik uzay, $a \in X$ bir nokta ve $\mathcal{V}(a)$ bu noktadaki komşuluk sistemi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathfrak{B}(a) \subseteq P(X)$ alt topluluğuna a noktasında bir lokal taban denir.

- (a) $\mathfrak{B}(a)$ topluluğunun her üyesi, a noktasının bir komşuluğudur.
- (b) Her $W \in \mathcal{V}(a)$ için $G \subseteq W$ olacak şekilde bir $G \in \mathfrak{B}(a)$ vardır.

Teorem 2.11. (X, τ) bir topolojik uzay, $a \in X$ ve $\mathfrak{B}(a)$, a noktasında bir lokal taban olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir:

- (a) Her $A \in \mathfrak{B}(a)$ için $a \in A$.
- (b) $\mathfrak{B}(a)$ topluluğu X üzerinde bir filtre tabanıdır.
- (c) $W \in \mathfrak{B}(a)$ ise öyle bir $W_0 \in \mathfrak{B}(a)$ vardır ki $b \in W_0$ ise $W_1 \subseteq W$ olacak şekilde bir $W_1 \in \mathfrak{B}(b)$ vardır.

Teorem 2.12. X boştan farklı herhangi bir küme, $a \in X$ bir nokta ve $\mathfrak{B}(a) \subseteq P(X)$ alt topluluğu, Teorem 2.11 koşullarını sağlayan bir topluluk olsun. Bu durumda X üzerinde, $\mathfrak{B}(a)$ topluluğunu lokal taban olarak kabul eden bir τ topolojisi vardır ve

$$\tau = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \quad \exists C \in \mathfrak{B}(a) \quad C \subseteq A\} \cup \{\emptyset\} \quad (2.2)$$

şeklindedir.

Teorem 2.13. (X, τ) bir topolojik uzay, $a \in X$ ve $\mathfrak{B}(a)$, a noktasında bir lokal taban olsun. Bu durumda herhangi bir $C \subseteq X$ kümesi için aşağıdakiler gerçekleşir:

- (i) $a \in \overline{C} \iff \forall W \in \mathfrak{B}(a) \quad W \cap C \neq \emptyset$
- (ii) $a \in C^\circ \iff \exists B \in \mathfrak{B}(a) \quad B \subseteq C$
- (iii) $a_n \rightarrow a \iff \forall B \in \mathfrak{B}(a) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \implies x_n \in B)$

Tanım 2.14. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ olsun. Her boştan farklı A açık kümesi, $\mathfrak{B}$ topluluğunun bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa veya buna eşdeğer olarak,

her $A \in \tau$ açık kümesi ve her $a \in A$ için,

$$a \in B_a \subseteq A$$

olacak şekilde bir $B_a \in \mathfrak{B}$ varsa, $\mathfrak{B}$ topluluğuna τ topolojisi için bir taban denir.

Teorem 2.15. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathfrak{B}$ topluluğu, τ topolojisi için bir taban olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir:

(i) $X = \bigcup \{C \mid C \in \mathfrak{B}\}$

(ii) Her $C_1, C_2 \in \mathfrak{B}$ ve her $a \in C_1 \cap C_2$ için öyle bir $C_a \in \mathfrak{B}$ vardır ki $a \in C_a \subseteq C_1 \cap C_2$

Teorem 2.16. X boştan farklı herhangi bir küme ve $\mathfrak{B} \subseteq P(X)$ Teorem 2.15 koşullarını sağlayan bir topluluk olsun. Bu durumda X üzerinde, $\mathfrak{B}$ topluluğunu taban olarak kabul eden bir τ topolojisi vardır ve

$$\tau = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \quad \exists B_a \in \mathfrak{B} \quad a \in B_a \subseteq A\} \cup \{\emptyset\} \quad (2.3)$$

şeklindedir.

Tanım 2.17. (X, τ) topolojik uzayının T_1 olması için gerek yeter koşul her $a, b \in X, a \neq b$ için $a \notin G$ ve $b \notin W$ olacak şekilde $W \in \mathcal{V}(a)$ ve $G \in \mathcal{V}(b)$ komşuluklarının olmasıdır.

Teorem 2.18. (X, τ) topolojik uzay için aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir.

(i) (X, τ) bir T_1 uzayıdır.

(ii) Her $a \in X$ için $\bigcap \{V \mid V \in \mathcal{V}(a)\} = \{a\}$

(iii) Her $a \in X$ için $\{a\}$ tek nokta kümesi kapalıdır.

Tanım 2.19. (X, τ) topolojik uzayının T_2 (Hausdorff) olması için gerek yeter koşul her $a, b \in X, a \neq b$ için $V \cap W = \emptyset$ olacak şekilde $V \in \mathcal{V}(a)$ ve $W \in \mathcal{V}(b)$ var olmasıdır.

Tanım 2.20. X boştan farklı herhangi bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir.

Her $x, y, z \in X$ için,

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x).$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Bu tanımdan, her $x, y \in X$ için,

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y) \implies d(x, y) \geq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla her metriğin değeri pozitif reel sayıdır.

Teorem 2.21. (X, d) bir metrik uzay, $r > 0$ ve $a \in X$ olsun. Bu durumda

$$B_r(a) = \{b \in X \mid d(a, b) < r\}$$

olmak üzere

$$\mathfrak{B}(a) = \{B_r(a) \mid r > 0\}$$

olsun. Bu durumda, X üzerinde bu topluluğu a noktasında lokal taban kabul eden bir topoloji vardır. Bu durumda Teorem 2.12 kullanılırsa,

$$\tau_d = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \quad \exists r > 0 \quad B_r(a) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\} \quad (2.4)$$

topluluğu, X üzerinde bir topoloji olur ve bu topoloji metrik topoloji olarak adlandırılır.

Tanım 2.22. Dağılım fonksiyonları, tanım kümesi genelleştirilmiş reel sayılar kümesi olan ve bu değerleri $[0, 1]$ kompakt aralığına götüren $F(-\infty) = 0$ ve $F(\infty) = 1$ değerini alan monoton artan fonksiyonlara denir. Dağılım fonksiyonları kümesini Δ ile, soldan sürekli

dağılım fonksiyonlarının kümesini de Δ^* ile göstereceğiz.

$$\Delta = \{F : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \rightarrow [0, 1] \mid F \text{ monoton artan, } F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1\}$$

$$\Delta^* = \{F \in \Delta \mid F \text{ soldan sürekli}\}$$

Tanım 2.23. 0 daki değeri 0 olan dağılım fonksiyonlarına uzaklık dağılım fonksiyonu denir. Bu fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki gösterimleri kullanacağız,

$$\Delta^+ = \{F \in \Delta \mid F(0) = 0\},$$

$$\Delta_*^+ = \{F \in \Delta^* \mid F(0) = 0\}.$$

Herhangi bir $F \in \Delta_*^+$ alalım. Dikkat edilirse, F in monoton artanlığından her $x \in [-\infty, 0]$ için $F(x) = 0$ sağlanacaktır. Üstelik $\Delta_*^+ \subset \Delta^+$ dir.

Örnek 2.24. (Ω, Σ, P) olasılık uzayı ve X bu uzay üzerinde rastgele bir değişken olsun.

$$F_1(x) = \begin{cases} P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} & : -\infty < x < +\infty \\ 0 & : x = -\infty \\ 1 & : x = +\infty \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} & : -\infty < x < +\infty \\ 0 & : x = -\infty \\ 1 & : x = +\infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlı F_1 ve F_2 fonksiyonları sırasıyla sağdan ve soldan sürekli dağılım fonksiyonlarıdır. Bu durumda, $F_1 \in \Delta$ ve $F_2 \in \Delta^*$ dir [20].

Örnek 2.25. $a \in \mathbb{R}$ herhangi bir reel sayı olmak üzere,

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq a \\ 1 & : x > a \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ε_a fonksiyonu, her $a \in \mathbb{R}$ için Δ^* kümesinin elemanıdır. Dolayısıyla, her $a \geq 0$ için $\varepsilon_a(0) = 0$ olduğundan ε_a , aynı zamanda Δ_*^+ kümesine de aittir. Bu fonksiyona, birim basamak fonksiyon denir.

Tanım 2.26. $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa üçgensel norm (t-norm) denir.

- i) $t(t(a, b), c) = t(a, t(b, c))$
- ii) $t(a, b) = t(b, a)$
- iii) $a_1 \leq a_2$ ve $b_1 \leq b_2 \implies t(a_1, a_2) \leq t(b_1, b_2)$
- iv) $t(1, a) = t(a, 1) = a$

Örnek 2.27. $x, y \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} t_{\min}(x, y) &= \min\{x, y\}, \\ t_{\max}(x, y) &= \max\{x + y - 1, 0\}, \\ t_1(x, y) &= x \cdot y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar, birer t-normdur.

Tanım 2.28. X ile Δ^+ veya Δ_*^+ kümesi gösterilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan $T : X \times X \rightarrow X$ fonksiyonuna üçgen fonksiyon denir; Her $F, G, H \in X$ için

- i) $T(T(F, G), H) = T(F, T(G, H))$
- ii) $T(F, G) = T(G, F)$
- iii) $F \leq G \implies T(F, H) \leq T(G, H)$
- iv) $T(\varepsilon_0, F) = T(F, \varepsilon_0) = F$

Örnek 2.29. t , soldan sürekli bir t-norm olsun ve X ile, Δ^+ veya Δ_*^+ kümesi gösterilsin. Bu durumda, her $F, G, H \in X$ ve $x \in [-\infty, +\infty]$ için

- i) $T_1(F, G)(x) = t(F(x), G(x))$

$$\text{ii) } T_2(F, G)(x) = \sup\{t(F(u), G(v)) \mid u + v = x\}$$

şeklinde tanımlanan $T_1, T_2 : X \times X \rightarrow X$ fonksiyonları birer üçgen fonksiyondur [20].

Şimdi kuazi-düzgünlüğü tanımlamak için aşağıdaki tanımları verelim;

X boştan farklı herhangi bir küme ve $A, B \subseteq X \times X$ olmak üzere

$$D = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

$$A^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in A\}$$

$$A \circ B = \{(a, c) \mid (a, b) \in B \text{ ve } (b, c) \in A \text{ olacak şekilde bir } b \in X \text{ vardır}\}$$

kümelerini tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki özellikler gerçekleşir; $A, B, C \subseteq X \times X$ olmak üzere,

$$\text{(i) } (A^{-1})^{-1} = A$$

$$\text{(ii) } A \subseteq B \text{ ise } A^{-1} \subseteq B^{-1}$$

$$\text{(iii) } (A \cap B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1}$$

$$\text{(iv) } (A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$$

$$\text{(v) } A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$$

Tanım 2.30. X boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathfrak{U}_q \subseteq P(X \times X)$ filtresine X kümesi üzerinde bir kuazi-düzgünlük ve bu durumda $(X, \mathfrak{U}_q)$ ikilisine bir kuazi-düzgün uzay denir:

$$\text{(KD1) Her } W \in \mathfrak{U}_q \text{ için } D \subseteq W$$

$$\text{(KD2) Her } W \in \mathfrak{U}_q \text{ için } V \circ V \subseteq W \text{ koşulunu gerçekleyen bir } V \in \mathfrak{U}_q \text{ vardır.}$$

X kümesi üzerinde kuazi-düzgünlük olan $\mathfrak{U}_q$ topluluğu, "her $W \in \mathfrak{U}_q$ için $W^{-1} \in \mathfrak{U}_q$ " koşulunu sağlıyor ise bu topluluğa X üzerinde bir düzgünlük denir ve $(X, \mathfrak{U}_q)$ ikilisine bir düzgün uzay denir.

Örnek 2.31. $X = \{3, 5\}$ olmak üzere $D = \{(3, 3), (5, 5)\}$ ve $X \times X =$

$\{(3,3), (5,5), (5,3), (3,5)\}$ olmak üzere $\mathcal{U}_q = \{X \times X, \{(3,3), (5,5), (3,5)\}\}$ topluluğu $X \times X$ üzerinde bir filtredir ve X kümesi üzerinde bir kuazi-düzgünlüktür. Fakat; $A = \{(3,3), (5,5), (3,5)\} \in \mathcal{U}_q$ iken $A^{-1} = \{(3,3), (5,5), (5,3)\} \notin \mathcal{U}_q$ olduğundan $\mathcal{U}_q$, X üzerinde bir düzgünlük belirtmez.

Tanım 2.32. $(X, \mathcal{U}_q)$ bir kuazi-düzgün uzay ve $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{U}_q$ olsun. $\mathcal{U}_q$ topluluğundaki her küme $\mathfrak{B}$ topluluğuna ait en az bir kümeyi kapsıyorsa, $\mathfrak{B}$ topluluğuna $\mathcal{U}_q$ için bir taban denir.

Teorem 2.33. $\mathfrak{B} \subseteq P(X \times X)$ boştan farklı bir topluluk olsun. X üzerinde bu topluluğu taban kabul eden bir $\mathcal{U}_q$ kuazi-düzgünlüğünün olması için gerek ve yeter koşullar

(QB1) $\mathfrak{B}$ topluluğundaki her küme D kümesini kapsar.

(QB2) Her $B \in \mathfrak{B}$ için $C \circ C \subseteq B$ olacak şekilde bir $C \in \mathfrak{B}$ vardır.

(QB3) Her $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ için $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \mathfrak{B}$ vardır.

şeklindedir.

İspat. $\mathfrak{B}$ topluluğunu X üzerinde taban kabul eden bir $\mathcal{U}_q$ kuazi-düzgünlüğü olsun. Şimdi koşulları sağladığını gösterelim.

Herhangi bir $B \in \mathfrak{B}$ alalım. $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{U}_q$ olduğundan kuazi-düzgünlük (KD1) koşulu gereği $D \subseteq B$ elde edilir. Böylece (QB1) koşulu sağlanır.

Herhangi bir $W \in \mathfrak{B}$ alalım. $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{U}_q$ olduğundan kuazi-düzgünlük (KD2) koşulu gereği $V \circ V \subseteq W$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}_q$ vardır ve $\mathfrak{B}$ taban olduğundan $B \subseteq V$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır. Ayrıca $B \subseteq V$ olduğundan, $B \circ B \subseteq V \circ V \subseteq W$ elde edilir. Böylece (QB2) koşulu sağlanır.

Herhangi iki $V, W \in \mathfrak{B}$ alalım. $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{U}_q$ ve $\mathcal{U}_q$ bir filtre olduğundan $V \cap W \in \mathcal{U}_q$ ve $\mathfrak{B}$ taban olduğundan $B \subseteq V \cap W$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır.

Tersine, $\mathfrak{B}$ topluluğu bu üç koşulu sağlayan bir topluluk olsun. (QB1) ve (QB2) koşulundan $\mathfrak{B}$ topluluğunun bir filtre tabanı olduğu açıktır. Bu durumda $\mathfrak{B}$ topluluğunun doğurduğu

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{B}) = \{F \subseteq X \times X \mid \exists B \in \mathfrak{B} \quad B \subseteq F\} \quad (2.5)$$

topluluğu $X \times X$ üzerinde bir filtredir.

Şimdi $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ topluluğunun X üzerinde bir kuazi-düzgünlük olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ alalım. Tanım gereği, $B \subseteq F$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır. (QB1) koşulu gereği $D \subseteq B \subseteq F$ ise $D \subseteq F$ sağlanır.

Herhangi bir $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ alalım. Tanım gereği, $B \subseteq F$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır. (QB2) koşulu gereği $W \circ W \subseteq B$ olacak şekilde bir $W \in \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ vardır. O halde $W \circ W \subseteq B \subseteq F$ gerçekleşir.

Teorem 2.34. $\mathfrak{B} \subseteq P(X \times X)$ boştan farklı bir topluluk olsun. X üzerinde bu topluluğu taban kabul eden bir $\mathfrak{U}_q$ düzgünlüğünün olması için gerek ve yeter koşul Teorem 2.33 te ifade edilen (QB1), (QB2), (QB3) koşullarının ve aşağıdaki koşulun sağlanmasıdır;

(QB4) Her $A \in \mathfrak{B}$ için $B \subseteq A^{-1}$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır.

Örnek 2.35. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$V_1(\varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\}$$

$$V_2(\varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y < x + \varepsilon\}$$

$$V_3(\varepsilon) = D \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ve } |x - y| < \varepsilon\}$$

kümelerinin oluşturduğu topluluklar sırasıyla

$$\mathfrak{B}_1 = \{V_1(\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

$$\mathfrak{B}_2 = \{V_2(\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

$$\mathfrak{B}_3 = \{V_3(\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

şeklindedir. Bu toplulukları taban kabul eden sırasıyla $\mathfrak{U}_{q_1} = \mathfrak{F}(\mathfrak{B}_1)$, $\mathfrak{U}_{q_2} = \mathfrak{F}(\mathfrak{B}_2)$ ve $\mathfrak{U}_{q_3} = \mathfrak{F}(\mathfrak{B}_3)$ kuazi-düzgünlükleri vardır.

İspat. $\mathcal{U}_{q_1}$ için, $\mathfrak{B}_1$ topluluğunun, Teorem 2.34 ün koşullarını sağladığını gösterelim.

(QB1) Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. $|x - x| = 0 < \varepsilon$ daima sağlanacağından $D \subseteq V_1(\varepsilon)$ gerçekleşir.

(QB2) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $C = V_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ seçimi için, $V_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \circ V_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq V_1(\varepsilon)$ kapsamasının sağlandığını gösterelim. Bunun için, herhangi bir $(x, z) \in V_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \circ V_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ alalım. Tanım gereği, $(x, y), (y, z) \in V_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} (x, y) \in V_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &\implies |x - y| < \frac{\varepsilon}{2} \\ (y, z) \in V_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &\implies |y - z| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

üçgen eşitsizliğinden

$$|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

gerçeklenir. Böylece, $(x, z) \in V_1(\varepsilon)$ olduğu görülür.

(QB3) Herhangi iki $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ alalım. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ seçimi için, $V_1(\varepsilon) \subseteq V_1(\varepsilon_1) \cap V_1(\varepsilon_2)$ olduğunu gösterelim. Bunun için, herhangi bir $(x, y) \in V_1(\varepsilon)$ alalım. Tanım gereği, $|x - y| < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ ve $|x - y| < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ olduğundan $(x, y) \in V_1(\varepsilon_1)$ ve $(x, y) \in V_1(\varepsilon_2)$ bulunur. O halde, $(x, y) \in V_1(\varepsilon_1) \cap V_1(\varepsilon_2)$ gerçekleşir.

Ayrıca, $\mathcal{U}_{q_1}$ kuazi-düzgünlüğü (QB4) koşulunu da sağlar.

(QB4) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $(x, y) \in V_1(\varepsilon)$ alalım. Bu durumda;

$$|x - y| < \varepsilon \iff |y - x| < \varepsilon \iff (y, x) \in V_1(\varepsilon) \iff (x, y) \in V_1^{-1}(\varepsilon)$$

olduğundan $V_1(\varepsilon) = V_1^{-1}(\varepsilon)$ gerçekleşir. O halde $B = V_1(\varepsilon) \in \mathfrak{B}_1$ seçimi için istenilen sağlanır.

$\mathcal{U}_{q_2}$ için, $\mathfrak{B}_2$ topluluğunun, Teorem 2.33 ün koşullarını sağladığını gösterelim.

(QB1) Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda, $x \leq x < x + \varepsilon$ daima sağlanacağından $D \subseteq V_2(\varepsilon)$ olur.

(QB2) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $C = V_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ seçimi için, $V_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \circ V_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq V_2(\varepsilon)$ kapsamasının sağlandığını gösterelim. Bunun için, herhangi bir $(x, z) \in V_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \circ V_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

alalım. Tanım gereği, $(x, y), (y, z) \in V_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} (x, y) \in V_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &\implies x \leq y < x + \frac{\varepsilon}{2} \\ (y, z) \in V_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &\implies y \leq z < y + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ve buradan

$$x \leq y \leq z < y + \frac{\varepsilon}{2} < x + \varepsilon$$

olduğundan $(x, z) \in V_2(\varepsilon)$ elde edilir.

(QB3) Herhangi iki $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ alalım. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ seçimi için, $V_2(\varepsilon) \subseteq V_2(\varepsilon_1) \cap V_2(\varepsilon_2)$ olduğunu gösterelim. Bunun için, herhangi bir $(x, y) \in V_2(\varepsilon)$ alalım. Bu durumda,

$$x \leq y < x + \varepsilon \leq x + \varepsilon_1$$

$$x \leq y < x + \varepsilon \leq x + \varepsilon_2$$

gerçeklendiğinden $(x, y) \in V_2(\varepsilon_1)$ ve $(x, y) \in V_2(\varepsilon_2)$ elde edilir. O halde, $(x, y) \in V_2(\varepsilon_1) \cap V_2(\varepsilon_2)$ dir.

Fakat, $\mathcal{U}_{q_2}$ bir düzgünlük belirtmez. Bunun için, (QB4) ün sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $V_2(\varepsilon') \subseteq V_2^{-1}(\varepsilon)$ koşulunu gerçekleyen bir $\varepsilon' > 0$ vardır. $x \neq y$ olacak şekilde $(x, y) \in V_2(\varepsilon')$ için $(x, y) \in V_2^{-1}(\varepsilon)$ olur. Fakat;

$$V_2(\varepsilon') = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y < x + \varepsilon'\}$$

$$V_2^{-1}(\varepsilon) = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x, y) \in V_2(\varepsilon)\} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y < x + \varepsilon\}$$

olmak üzere $(x, y) \in V_2(\varepsilon')$ ise $x \leq y < x + \varepsilon$ ve $(x, y) \in V_2^{-1}(\varepsilon)$ ise $y \leq x < y + \varepsilon$ gerçekleşir. Bu durumda;

$$x \leq y \leq x < y + \varepsilon < x + \varepsilon + \varepsilon' \implies x = y$$

bulunur. Bu ise kabulümüzle çelişir.

Şimdi $\mathcal{U}_{q_3}$ için, $\mathfrak{B}_3$ topluluğunun, Teorem 2.33 ün koşullarını sağladığını gösterelim.

(QB1) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda,

$$D \subseteq D \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ve } |x - y| < \varepsilon\}$$

(QB2) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $C = V_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ seçimi için, $V_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \circ V_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq V_3(\varepsilon)$ kapsamasının sağlandığını gösterelim. Bunun için, herhangi bir $(x, z) \in V_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \circ V_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ alalım. Bu durumda, $(x, y), (y, z) \in V_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan, $x \neq y \neq z$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (x, y) \in V_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &\implies x \in \mathbb{Q} \text{ ve } |x - y| < \frac{\varepsilon}{2} \\ (y, z) \in V_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &\implies y \in \mathbb{Q} \text{ ve } |y - z| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

üçgen eşitsizliğinden

$$|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ve $x \in \mathbb{Q}$ olduğundan $(x, z) \in V_3(\varepsilon)$ gerçekleşir.

(QB3) Herhangi iki $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ alalım. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ seçimi için, $V_3(\varepsilon) \subseteq V_3(\varepsilon_1) \cap V_3(\varepsilon_2)$ olduğunu gösterelim. Bunun için, herhangi bir $(x, y) \in V_3(\varepsilon)$ alalım. Bu durumda $x \neq y$ olmak üzere, $x \in \mathbb{Q}$ ve $|x - y| < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ ve $|x - y| < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ olduğundan $(x, y) \in V_3(\varepsilon_1)$ ve $(x, y) \in V_3(\varepsilon_2)$ bulunur. Dolayısıyla $(x, y) \in V_3(\varepsilon_1) \cap V_3(\varepsilon_2)$ gerçekleşir.

Fakat, $\mathcal{U}_{q_2}$ bir düzgünlük belirtmez. Bunun için, (QB4) ün sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $V_3(\varepsilon') \subseteq V_3^{-1}(\varepsilon)$ koşulunu gerçekleyen bir $\varepsilon' > 0$ vardır.

$$V_3(\varepsilon') = D \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ve } |x - y| < \varepsilon'\}$$

$$V_3^{-1}(\varepsilon) = D \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (y, x) \in V_3(\varepsilon)\} = D \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \in \mathbb{Q} \text{ ve } |x - y| < \varepsilon\}$$

olmak üzere, $x \neq y$ ve $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ koşulunu gerçekleyen öyle bir $(x, y) \in V_3(\varepsilon')$ vardır ki $(x, y) \notin V_3^{-1}(\varepsilon)$ olacağından kabulümüzle çelişir. O halde $\mathcal{U}_{q_3} = \mathfrak{F}(\mathfrak{B}_3)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir düzgünlük belirtmez.

Örnek 2.36. $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $W = \{(x, y) \mid x \leq y\} \subseteq X \times X$ kümeleri verilsin. $\mathfrak{B} = \{W\}$ topluluğunu taban kabul eden bir $\mathcal{U}_q = \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ kuazi-düzgünlüğü vardır.

İspat. Şimdi Teorem 2.33 ün koşullarının sağlandığını gösterelim.

(QB1) Herhangi bir $W \in \mathfrak{B}$ için $D \subseteq W$ daima sağlanır.

(QB2) Herhangi bir $W \in \mathfrak{B}$ alalım. $W \circ W \subseteq W$ olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $(x, z) \in W \circ W$ alalım. Tanım gereği, $(x, y), (y, z) \in W$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Bu durumda, $x \leq y$ ve $y \leq z$ gerçekleşir. Buradan, $x \leq z$, yani $(x, z) \in W$ elde edilir.

(QB3) Her $W \in \mathfrak{B}$ için $W \subseteq W \cap W = W$ daima sağlanır.

Fakat; $\mathcal{U}_q$ bir düzgünlük belirtmez. Bunun için; $\mathfrak{B}$ topluluğunu taban kabul eden $\mathcal{U}_q = \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ düzgünlüğünün olduğunu kabul edelim. Bu durumda, "Her $A \in \mathcal{U}_q$ için $A^{-1} \in \mathcal{U}_q$ " ve $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{U}_q$ olduğundan

Her $A \in \mathfrak{B}$ için $B \subseteq A^{-1}$ olacak şekilde $B \in \mathfrak{B}$ vardır

koşulu gerçekleşir. Fakat $\{(2, 3)\}$ tek nokta kümesi için $B \subseteq \{(3, 2)\}$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ olmadığından kabulümüz ile çelişir.

Örnek 2.37. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$U_n = \{(x, y) \mid x = y \text{ veya } x = 1 \text{ ve } y = 2n + 2k \text{ veya } x = 2 \text{ ve } y = 2n + 2k + 1, k = 1, 2, 3, \dots\}$$

Örneğin; $U_3 = D \cup \{(1, 8), (1, 10), (1, 12), \dots\} \cup \{(2, 9), (2, 11), \dots\}$ dır.

$\mathfrak{B} = \{U_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ topluluğunu tanımlayalım. Bu durumda, $\mathfrak{B}$ topluluğunu taban kabul eden X üzerinde bir $\mathcal{U}_q = \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ kuazi-düzgünlüğü vardır.

İspat. Teorem 2.33 ün koşullarını sağladığını gösterelim.

(QB1) Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için U_n tanımı gereği $D \subseteq U_n$ daima sağlanır.

(QB2) Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ alalım ve $U_n \circ U_n \subseteq U_n$ olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $(x, z) \in U_n \circ U_n$ alalım. Tanımdan, $(x, y), (y, z) \in U_n$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{N}$ vardır.

Durum 1:) $x = y$ ise; $(x, z) = (y, z) \in U_n$ hipotez gereği sağlanır.

Durum 2:) $x \neq y$ ise; U_n tanımı gereği $x = 1$ veya $x = 2$ dir.

$x = 1$ ise; $x \neq y$ olduğundan ve tanım gereği $y \geq 2n + 2 > 2$ olur. Buradan $y > 2$ olur. $(y, z) \in U_n$ olduğundan $y = z$ elde edilir. O halde, $(x, z) = (x, y) \in U_n$ gerçekleşir.

$x = 2$ ise; $x \neq y$ olduğundan ve tanım gereği $y \geq 2n + 2 + 1 > 3$ olur. Buradan $y > 3$ ve $(y, z) \in U_n$ olduğundan $y = z$ elde edilir. Bu durumda, $(x, z) = (x, y) \in U_n$ sağlanır.

O halde her iki durum için $(x, z) \in U_n$ sağlanır.

(QB3) Herhangi iki $n, m \in \mathbb{N}$ alalım.

Durum 1:) $n = m$ ise; $U_n \subseteq U_n \cap U_m = U_n$ daima sağlanır.

Durum 2:) $n < m$ (veya $m < n$) ise; $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ azalan bir küme dizisi olduğundan $U_n \cap U_m = U_m$ dir ve doğal sayıların üstten sınırsızlığından $m \in \mathbb{N}$ için $m + 1 \in \mathbb{N}$ ve $m \leq m + 1$ ise $U_{m+1} \subseteq U_m$ olduğundan istenilen sağlanır.

Ayrıca, $\mathcal{U}_q$, X üzerinde düzgünlük belirtmesi için (QB4) koşulu gerçekleşmelidir. Bunun için;

Her $A \in \mathfrak{B}$ için $B \subseteq A^{-1}$ olacak şekilde $B \in \mathfrak{B}$ vardır

koşulunun sağlandığını varsayalım. Bu durumda, herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $U_N \subseteq U_n^{-1}$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Fakat,

$$U_N = D \cup \{(1, 2N + 2), (1, 2N + 4), \dots\} \cup \{(2, 2N + 3), (2, 2N + 5), \dots\}$$

$$U_n^{-1} = D \cup \{(2n + 2, 1), (2n + 4, 1), \dots\} \cup \{(2n + 3, 2), (2n + 5, 2), \dots\}$$

olmak üzere $(1, 2N + 2) \in U_N$ ve $(1, 2N + 2) \notin U_n^{-1}$ olduğundan kabulle çelişir. O halde $\mathcal{U}_q$ kuazi-düzgünlüğü bir düzgünlük belirtmez.

Önerme 2.38. $(X, \mathcal{U}_q)$ bir kuazi-düzgün uzay olsun. Bu durumda, her

$$W \in \mathcal{U}_q \text{ için } W \subseteq W \circ W$$

sağlanır.

İspat. Herhangi bir $W \in \mathcal{U}_q$ ve $(a, b) \in W$ alalım. Kuazi-düzgünlük (KD1) koşulu gereği $(a, a) \in W$ olur. Bileşke tanımından $(a, a), (a, b) \in W$ gerçekleştiğinden $(a, b) \in W \circ W$ dir. Dolayısıyla $W \subseteq W \circ W$ bulunur.

Önerme 2.39. $\mathfrak{B}$ topluluğu $\mathcal{U}_q$ kuazi-düzgünlüğü için bir taban olsun. Bu durumda $\{B^n \mid B \in \mathfrak{B}, n \in \mathbb{N}\}$ topluluğu da $\mathcal{U}_q$ için bir tabandır.

İspat. $\mathfrak{B}, \mathcal{U}_q$ için bir taban olsun. Tümevarım yöntemiyle $\{B^n \mid B \in \mathfrak{B}\}$ topluluğunun $\mathcal{U}_q$ için bir taban olduğunu gösterelim.

$n = 1$ için; hipotez gereği sağlanır.

$n = 2$ için; herhangi bir $U \in \mathcal{U}_q$ alalım. Kuazi-düzgünlük (KD2) koşulu gereği $V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}_q$ vardır. Hipotezden, $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır ve $B \subseteq V$ ise $B \circ B \subseteq V \circ V \subseteq U$ elde edilir. Bu durumda $\{B \circ B \mid B \in \mathfrak{B}\}$ topluluğu, $\mathcal{U}_q$ için bir tabandır.

$\vdots$

$n = k$ için; $\{B^k \mid B \in \mathfrak{B}\}$ topluluğu $\mathcal{U}_q$ kuazi-düzgünlüğü için bir taban olsun.

$n = k + 1$ için $\{B^{k+1} \mid B \in \mathfrak{B}\}$ topluluğunun $\mathcal{U}_q$ için bir taban olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $U \in \mathcal{U}_q$ alalım. Kuazi-düzgünlük (KD2) koşulu gereği $V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}_q$ vardır. $\{B^k \mid B \in \mathfrak{B}\}$ topluluğu $\mathcal{U}_q$ için bir taban olduğundan $B \circ B \circ \dots \circ B \subseteq V$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır. Bu durumda Önerme 2.38 kullanılırsa $B \in \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{U}$ için

$$B \subseteq B \circ B \subseteq \dots \subseteq B^k \subseteq B^{k+1} \subseteq \dots \subseteq B^{2k} \subseteq V \circ V \subseteq U \implies B^{k+1} \subseteq U$$

gerçeklenir. Buradan, $\{B^{k+1} \mid B \in \mathfrak{B}\}$ topluluğunun $\mathcal{U}_q$ için bir taban olduğu elde edilir.

Önerme 2.40. $(X, \mathcal{U}_q)$ bir kuazi-düzgün uzay, $a \in X$ bir nokta ve $W \in \mathcal{U}_q$ olsun.

$$W(a) = \{b \in X \mid (a, b) \in W\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda $b \in X$ ve $G \in \mathcal{U}_q$ olmak üzere

(i) $a \in W(a)$

(ii) $W \subseteq G \implies W(a) \subseteq G(a)$

(iii) $b \in G(a) \implies G(b) \subseteq (G \circ G)(a)$

özellikleri sağlanır.

Teorem 2.41. $(X, \mathcal{U}_q)$ bir kuazi-düzgün uzay olsun. Bu durumda

$$\tau_{\mathcal{U}_q} = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A \quad \exists U \in \mathcal{U}_q \quad U(x) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\} \quad (2.6)$$

topluluğu X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye $\mathcal{U}_q$ nun doğurduğu kuazi-düzgün topoloji denir ve $\tau_{\mathcal{U}_q}$ ile gösterilir ve

X kümesinin boştan farklı her alt kümesi için

$$I_A = \{a \in X \mid \exists W \in \mathcal{U}_q \quad W(a) \subseteq A\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda, $(X, \tau_{\mathcal{U}_q})$ topolojisi aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $I_A \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ dır.

(ii) $B \subseteq X$ herhangi bir küme olsun. Bir $x \in X$ noktasının B kümesinin içine ait olması için gerek ve yeter koşul $x \in G \subseteq B$ olacak şekilde bir $G \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ olmasıdır.

(iii) $x \in X$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{B}(x) = \{W(x) \mid W \in \mathcal{U}_q\}$$

topluluğu x noktasında lokal tabandır.

(iv) $B \subseteq X$ herhangi bir küme olsun. Bir x noktasının B kümesinin kapanışına ait olması için gerek yeter koşul her $W \in \mathcal{U}_q$ için $W(x) \cap B \neq \emptyset$ olmasıdır.

(v) X içinde bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir $x \in X$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{U}_q$ kuazi-düzgünlüğünün her W elemanına karşılık $n \geq N$ olduğunda $x_n \in W(x)$ olacak şekilde bir N doğal sayısının olmasıdır.

Matematiksel olarak ifade edersek;

$$x_n \rightarrow x \iff \forall W \in \mathcal{U}_q \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \implies x_n \in W(x)) \text{ dır.}$$

İspat. $\tau_{\mathcal{U}_q}$ topluluğunun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

(T1) $\emptyset, X \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ olduğu $\tau_{\mathcal{U}_q}$ tanımından açıktır.

(T2) Herhangi iki $O_1, O_2 \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ ve $x \in O_1 \cap O_2$ alalım. Bu durumda $\tau_{\mathcal{U}_q}$ topluluğu tanımından $U_1(x) \subseteq O_1$ ve $U_2(x) \subseteq O_2$ olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_q$ vardır ve $(U_1 \cap U_2)(x) = U_1(x) \cap U_2(x)$

gerçeklendiğinden $O_1 \cap O_2 \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ elde edilir. Ayrıca $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_q$ ve $\mathcal{U}_q$ bir filtre olduğundan $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_q$ dir ve $(U_1 \cap U_2)(x)$ tanımlıdır.

Şimdi $(U_1 \cap U_2)(x) = U_1(x) \cap U_2(x)$ olduğunu gösterelim.

$$U \cap V \subseteq U \implies (U \cap V)(x) \subseteq U(x)$$

$$U \cap V \subseteq V \implies (U \cap V)(x) \subseteq V(x)$$

gerçeklendiğinden $(U \cap V)(x) \subseteq U(x) \cap V(x)$ elde edilir.

Ters kapsama için herhangi bir $y \in U(x) \cap V(x)$ alalım. Bu durumda,

$$y \in U(x) \implies (x, y) \in U$$

$$y \in V(x) \implies (x, y) \in V$$

ise $(x, y) \in U \cap V \implies y \in (U_1 \cap U_2)(x)$ dir.

(T3) I herhangi bir küme olmak üzere her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ olsun.

$$\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \tau_{\mathcal{U}_q}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için, herhangi bir $x \in \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$ alalım. Bu durumda $x \in O_{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in I$ vardır. $O_{\alpha_0} \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ olduğundan $U(x) \subseteq O_{\alpha_0}$ olacak şekilde $U \in \mathcal{U}_q$ vardır ve $O_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$ olduğundan $U(x) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$ gerçekleşir. Buradan $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ elde edilir.

(i) Herhangi bir $x \in I_A$ alalım. Tanım gereği $W(x) \subseteq A$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{U}_q$ vardır. Kuazi-düzgünlük (KD2) koşulu gereği $V \circ V \subseteq W$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}_q$ vardır.

Şimdi $V(x) \subseteq I_A$ olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $y \in V(x)$ alalım. Bu durumda $V(y) \subseteq (V \circ V)(x) \subseteq W(x) \subseteq A$ elde edilir. I_A kümesi tanımından $y \in I_A$ bulunur. Bu ise I_A kümesinin, $\tau_{\mathcal{U}_q}$ topolojisine göre açık bir küme olduğunu söyler.

(ii) $A \subseteq X$ boştan farklı herhangi bir küme ise $x \in A^\circ \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ olduğundan $W(x) \subseteq A^\circ \subseteq A$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{U}_q$ vardır. Buradan $x \in I_A$ olur ve dolayısıyla $A^\circ \subseteq I_A$ elde edilir. Diğer yandan, $I_A \subseteq A$ olduğundan (i) şıkkı gereği $I_A \subseteq A^\circ$ bulunur.

(iii) $x \in X$ herhangi bir nokta olmak üzere $\mathfrak{B}(x) = \{U(x) \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$ topluluğunun, Tanım 2.10 koşullarını sağladığını gösterelim.

$$\mathcal{V}_q(x) = \{W \subseteq X \mid \exists G \in \tau_{\mathfrak{U}_q} \quad x \in G \subseteq W\}$$

kümesi $x \in X$ noktasının bu topolojik uzay içindeki komşuluk sistemi olmak üzere; $\mathfrak{B}(x)$ topluluğunun her üyesinin, x noktasının bir komşuluğu olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $W \in \mathfrak{U}_q$ alalım. (ii) koşulu gereği ve daima $x \in W(x) \subseteq W(x)$ olduğundan ve $x \in I_{W(x)}$ ve (ii) gereği $x \in W(x)^\circ$ elde edilir. Dolayısıyla $G = I_{W(x)} \in \tau_{\mathfrak{U}_q}$ seçersek, $x \in I_{W(x)} \subseteq W(x)^\circ \subseteq W(x)$ sağlandığından, $W(x)$, x noktası için bir komşuluk olur.

Her $W \in \mathcal{V}_q(x)$ için $B \subseteq W$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}(x)$ olduğunu gösterelim.

Bunun için, x noktasının herhangi bir W komşuluğunu alalım. Komşuluk ve $\tau_{\mathfrak{U}_q}$ tanımından $A(x) \subseteq G \subseteq W$ olacak şekilde bir $G \in \tau_{\mathfrak{U}_q}$ ve $A \in \mathfrak{U}_q$ kümeleri vardır. $B = A(x) \in \mathfrak{B}(x)$ seçimi için istenilen sağlanır. Bu durumda $\mathfrak{B}(x)$ topluluğu, x noktasında bir lokal tabandır.

(iv) $A \subseteq X$ herhangi bir küme olmak üzere $x \in \bar{A}$ olsun. (iii) koşulu gereği $\mathfrak{B}(x) = \{U(x) \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$ lokal taban olduğundan

a) $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$

b) Her $V \in \mathcal{V}_q(x)$ için $U(x) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \mathfrak{U}_q$ vardır.

koşulları gerçekleşir.

Herhangi bir $W \in \mathfrak{U}_q$ alalım. $\mathfrak{B}(x)$ lokal taban olduğundan $W(x) \in \mathcal{V}_q(x)$ ve hipotezden $W(x) \cap A \neq \emptyset$ elde edilir.

Tersine, her $W \in \mathfrak{U}_q$ için $W(x) \cap A \neq \emptyset$ olsun. $x \notin \bar{A}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $G \cap A = \emptyset$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{V}_q(x)$ vardır. Komşuluk tanımından $x \in O \subseteq G$ olacak şekilde bir $O \in \tau_{\mathfrak{U}_q}$ vardır. $x \in O$ için $W(x) \subseteq O \subseteq G$ olacak şekilde bir $W \in \mathfrak{U}_q$ vardır. $W(x) \subseteq G$ kapsamasının her iki tarafını A kümesi ile kesiştirirsek, $W(x) \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $G \cap A \neq \emptyset$ olur. Bu ise kabulümüzle çelişir.

(v) X içinde bir $x \in X$ noktasına yakınsayan herhangi bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ve $W \in \mathfrak{U}_q$ alalım. $W(x) \in \mathcal{V}_q(x)$ olduğundan ve hipotez gereği $n \geq N$ olduğunda $x_n \in W(x)$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır.

Tersine, her $W \in \mathfrak{U}_q$ için her $n \geq N$ için $x_n \in W(x)$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ var olsun. Herhangi bir $V \in \mathcal{V}_q(x)$ alalım. Komşuluk ve $\tau_{\mathfrak{U}_q}$ tanımından $W(x) \subseteq O \subseteq V$ olacak şekilde $O \in \tau_{\mathfrak{U}_q}$ ve

$W \in \mathfrak{U}_q$ vardır. Hipotezden her $n = N, N+1, N+2, \dots$ için $x_n \in W(x)$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ olduğundan $x_n \rightarrow x$ elde edilir.

Teorem 2.42. $\mathfrak{U}_q$, X üzerinde bir kuazi-düzgünlük olsun. Bu durumda $\mathfrak{U}_q$ nun eşleniği olan $\mathfrak{U}_q^{-1}$ de, X üzerinde bir kuazi-düzgünlüktür. Burada

$$U^{-1} = \{(p, q) \in X \times X \mid (q, p) \in U\}$$

olmak üzere;

$$\mathfrak{U}_q^{-1} = \{U^{-1} \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. $\mathfrak{U}_q$, X üzerinde bir kuazi-düzgünlük olsun. Şimdi $\mathfrak{U}_q^{-1}$ topluluğunun da X üzerinde bir kuazi-düzgünlük belirttiğini gösterelim.

Herhangi bir $U \in \mathfrak{U}_q$ alalım. $D \subseteq U^{-1}$ olduğunu gösterelim.

Hipotez gereği (KD1) koşulu ve $U \subseteq V \implies U^{-1} \subseteq V^{-1}$ özelliği uygulanırsa $D \subseteq U$ olduğundan $D^{-1} = D \subseteq U^{-1}$ elde edilir. Bu durumda kuazi-düzgünlüğün ilk koşulu sağlanmış olur.

Şimdi de ikinci koşulun gerçekleştiğini gösterelim.

Herhangi bir $U \in \mathfrak{U}$ alalım. $V^{-1} \circ V^{-1} \subseteq U^{-1}$ olacak şekilde bir $V \in \mathfrak{U}_q$ olduğunu gösterelim. Hipotez gereği $V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathfrak{U}_q$ vardır. $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$ özelliği uygulanırsa $(V \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ V^{-1} \subseteq U^{-1}$ sağlanır. Bu durumda $\mathfrak{U}_q^{-1}$, X üzerinde bir kuazi-düzgünlük oluşturur.

Ayrıca $\mathfrak{U}_q$, $X \times X$ de bir filtre olduğundan simetri işlemleri gereği $\mathfrak{U}_q^{-1}$ in $X \times X$ de bir filtre olduğu kolayca görülür.

Sonuç 2.43. Her düzgün uzay bir kuazi-düzgün uzaydır. Tersi $\mathfrak{U}_q = \mathfrak{U}_q^{-1}$ koşulu altında geçerlidir.

Tanım 2.44. $(X, \mathcal{U}_q)$ kuazi-düzgün uzay, $Z \subseteq X$ boştan farklı herhangi bir küme ve $U \in \mathcal{U}_q$ olmak üzere

$$U(Z) = \bigcup_{z \in Z} U(z) = \{x \in X \mid (z, x) \in U \text{ olacak şekilde bir } z \in Z \text{ vardır}\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye Z kümesinin bir komşuluğudur denir.

Teorem 2.45. $\mathfrak{B}$ topluluğu X üzerinde tanımlı $\mathcal{U}_q$ kuazi-düzgünlüğü için bir taban olsun ve $A \subseteq X$ herhangi bir küme olmak üzere, A kümesinin $\tau_{\mathcal{U}_q}$ içindeki kapanışı

$$\bar{A} = \bigcap \{B^{-1}(A) \mid B \in \mathfrak{B}\}$$

şeklindedir.

İspat.

$$B^{-1}(A) = \{y \in X \mid \exists x \in A \quad (x, y) \in B^{-1}\} = \{y \in X \mid \exists x \in A \quad (y, x) \in B\}$$

$$x \in B^{-1}(A) \implies \exists y \in A \quad (x, y) \in B$$

$$x \notin B^{-1}(A) \implies \forall y \in A \quad (x, y) \notin B$$

olmak üzere

$$\bar{A} \subseteq \bigcap \{B^{-1}(A) \mid B \in \mathfrak{B}\}$$

kapsamasını göstermek için $x \in \bar{A}$ ve $x \notin \bigcap \{B^{-1}(A) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ olacak şekilde bir $x \in X$ var olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $x \notin B^{-1}(A)$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır. O halde her $y \in A$ için $(x, y) \notin B$ yani, $y \notin B(x)$ olur. Buradan $A \cap B(x) = \emptyset$ bulunur. Bu ise $x \in \bar{A}$ kabulü ile çelişir.

Ters kapsama için, herhangi bir $x \in \bigcap \{B^{-1}(A) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ alalım. Buradan her $B \in \mathfrak{B}$ için $x \in B^{-1}(A)$ dır. Tanım gereği, $(x, y) \in B$ yani, $y \in B(x)$ olacak şekilde bir $y \in A$ vardır. Bunun anlamı $A \cap B(x) \neq \emptyset$ dır.

Ayrıca $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{U}_q$ taban olduğundan her $W \in \mathcal{U}_q$ için $B \subseteq W$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır.

Buradan, her $B \in \mathfrak{B}$ için $A \cap B(x) \neq \emptyset$ kullanılırsa

$$B \subseteq W \implies B(x) \subseteq W(x) \implies B(x) \cap A \subseteq W(x) \cap A \implies W(x) \cap A \neq \emptyset$$

olur. Bu ise $x \in \bar{A}$ olduğunu söyler. O halde her iki kapsamadan

$$\bar{A} = \bigcap \{B^{-1}(A) \mid B \in \mathfrak{B}\}$$

gerçeklenir.

Tanım 2.46. $\mathfrak{U}_q$ ve $\mathfrak{V}_q$ sırasıyla X ve Y üzerinde iki kuazi-düzgünlük olsun. Bu durumda, herhangi bir $f : (X, \tau_{\mathfrak{U}_q}) \rightarrow (Y, \tau_{\mathfrak{V}_q})$ fonksiyonunun bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek yeter koşul her $W \in \mathfrak{V}_q$ elemanına karşılık $(x_0, x) \in U$ olduğunda $(f(x_0), f(x)) \in W$, yani; $f(U(x_0)) \subseteq W(f(x_0))$ olacak şekilde bir $U \in \mathfrak{U}_q$ elemanının olmasıdır.

Teorem 2.47. $f : (X, \tau_{\mathfrak{U}_q}) \rightarrow (Y, \tau_{\mathfrak{V}_q})$ fonksiyonu ve $g : X \times X \rightarrow Y \times Y$, $g(x, y) = (f(x), f(y))$ olmak üzere, aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir.

- (i) $f : (X, \tau_{\mathfrak{U}_q}) \rightarrow (Y, \tau_{\mathfrak{V}_q})$ fonksiyonu sürekli dir.
- (ii) Her $V \in \mathfrak{V}_q$ için $g(U) \subseteq V$ koşulunu gerçekleyen bir $U \in \mathfrak{U}_q$ vardır.
- (iii) Her $V \in \mathfrak{V}_q$ için $g^{-1}(V) \in \mathfrak{U}_q$ dir.

İspat. (i) $\implies$ (ii) :

$f : (X, \tau_{\mathfrak{U}_q}) \rightarrow (Y, \tau_{\mathfrak{V}_q})$ fonksiyonu bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olsun. Herhangi bir $V \in \mathfrak{V}_q$ alalım. Bu durumda hipotez gereği, her $(x_0, x) \in U$ için $(f(x_0), f(x)) \in V$ olacak şekilde bir $U \in \mathfrak{U}_q$ vardır. g tanımı gereği $g(x_0, x) \in V$ olur. Bu ise, $g(U) \subseteq V$ olduğunu gösterir.

(ii) $\implies$ (iii) :

Her $V \in \mathfrak{V}_q$ için $g(U) \subseteq V$ koşulunu gerçekleyen bir $U \in \mathfrak{U}_q$ olsun. Bu durumda herhangi bir $V \in \mathfrak{V}_q$ alalım. Hipotezden $g(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \mathfrak{U}_q$ vardır.

$$U \subseteq g^{-1}g(U) \subseteq g^{-1}(V)$$

ve $\mathfrak{U}_q$ bir filtre olduğundan $g^{-1}(V) \in \mathfrak{U}_q$ bulunur.

(iii) $\implies$ (i) :

Her $V \in \mathfrak{V}_q$ için $g^{-1}(V) \in \mathfrak{U}_q$ olsun. Herhangi bir $V \in \mathfrak{V}_q$ ve $x_0 \in X$ alalım. Bu durumda, $U = g^{-1}(V)$ seçimi için her $(x_0, x) \in g^{-1}(V)$ için $g(x_0, x) \in V$ sağlanacağından $g(x_0, x) = (f(x_0), f(x)) \in V$ olur. O halde f , X üzerinde süreklidir.

Örnek 2.48. $(X, \tau_{\mathfrak{U}_q})$ kuazi-düzgün uzay üzerinde tanımlı birim fonksiyonu süreklidir.

Teorem 2.49. $(X, \mathfrak{U}_q)$, $(Y, \mathfrak{V}_q)$ kuazi-düzgün uzaylar olmak üzere, $f : (X, \tau_{\mathfrak{U}_q}) \rightarrow (Y, \tau_{\mathfrak{V}_q})$ sürekli ise $f^* : (X, \tau_{\mathfrak{U}_q^{-1}}) \rightarrow (Y, \tau_{\mathfrak{V}_q^{-1}})$ fonksiyonu da süreklidir.

İspat. Herhangi bir $V \in \mathfrak{V}_q^{-1}$ alalım. Bu durumda $V = U^{-1}$ olacak şekilde bir $U \in \mathfrak{V}_q$ vardır. $U = (U^{-1})^{-1} = V^{-1}$ ve f sürekli olduğundan

$$(x, y) \in U^* \implies (f(x), f(y)) \in U = V^{-1}$$

olacak şekilde bir $U^* \in \mathfrak{U}_q$ vardır. $U = (U^*)^{-1} \in \mathfrak{U}_q^{-1}$ seçimi için istenilen sağlanır.

Teorem 2.50. $(X, \tau_{\mathfrak{U}_q})$ topolojik uzayının T_1 olması için gerek yeter koşul

$$D = \bigcap \{U \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$$

olmasıdır.

İspat. $(X, \tau_{\mathfrak{U}_q})$ bir T_1 uzayı olsun. Kuazi-düzgünlük (KD1) koşulu gereği, her $U \in \mathfrak{U}_q$ için $D \subseteq U$ olduğundan $D \subseteq \bigcap \{U \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$ elde edilir.

Ters kapsama için herhangi bir $(p, q) \in \bigcap \{U \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$ alalım. Her $U \in \mathfrak{U}_q$ için $(p, q) \in U$ olur. Buradan $q \in U(p)$ elde edilir. Şimdi p noktasının herhangi bir V komşuluğunu alalım. Komşuluk tanımından $p \in O \subseteq V$ olacak şekilde bir $O \in \tau_{\mathfrak{U}_q}$ vardır. $\tau_{\mathfrak{U}_q}$ tanımından $p \in O$ için $W(p) \subseteq O \subseteq V$ olacak şekilde bir $W \in \mathfrak{U}_q$ vardır. Her $U \in \mathfrak{U}_q$ için $q \in U(p)$ gereği $q \in W(p)$ sağlandığından $q \in V$ elde edilir. Bunun anlamı $p \in \overline{\{q\}}$ olmasıdır. Hipotez gereği, her tek nokta kümesi kapalı olacağından $p \in \overline{\{q\}} = \{q\} \implies p = q$ elde edilir. Bu ise $\bigcap \{U \mid U \in \mathfrak{U}_q\} \subseteq D$ olduğunu söyler.

Tersine, $D = \bigcap \{U \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$ olsun. $(X, \tau_{\mathfrak{U}_q})$ bir T_1 uzayı olduğunu göstermek için her tek

nokta kümesinin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için herhangi bir $p \in X$ ve $q \in \overline{\{p\}}$ alalım. Bu durumda, her $U \in \mathfrak{U}_q$ için $U(q) \in \mathcal{V}_q(q)$ olacağından $p \in U(q)$ olur. Böylece her $U \in \mathfrak{U}_q$ için $(q, p) \in U$ olur. Dolayısıyla $(q, p) \in \bigcap \{U \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$ elde edilir. Hipotezden, $p = q$ olur. Buradan $q \in \{p\}$ elde edilir. Bu ise, tek nokta kümesinin kapalı olduğunu söyler.

Teorem 2.51. $(X, \tau_{\mathfrak{U}_q})$ topolojik uzayının Hausdorff olması için gerek yeter koşul

$$D = \bigcap \{U^{-1} \circ U \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$$

olmasıdır.

İspat. $(X, \tau_{\mathfrak{U}_q})$ bir Hausdorff uzayı olsun. Herhangi bir $p \in X$ alalım. Tanım gereği, her $U \in \mathfrak{U}_q$ için $(p, p) \in U^{-1} \circ U$ olur. Böylece

$$D \subseteq \bigcap \{U^{-1} \circ U \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$$

daima sağlanır.

Ters kapsama için $(p, q) \in \bigcap \{U^{-1} \circ U \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$ olacak şekilde bir $(p, q) \in X \times X$, $p \neq q$ olduğunu kabul edelim. Buradan her $U \in \mathfrak{U}_q$ için $(p, q) \in U^{-1} \circ U$, yani her $U \in \mathfrak{U}_q$ için $r \in U(p) \cap U(q) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $r \in X$ vardır. Hipotez gereği, $V \cap W = \emptyset$ olacak şekilde $V \in \mathcal{V}_q(p)$ ve $W \in \mathcal{V}_q(q)$ vardır. Buradan komşuluk tanımı gereği, $U_1(p) \subseteq V$ ve $U_2(q) \subseteq W$ olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}_q$ vardır. $\mathfrak{U}_q$ bir filtre olduğundan $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}_q$ olur. Kuazi-düzgünlük (KD2) gereği, $S \circ S \subseteq U_1 \cap U_2$ olacak şekilde bir $S \in \mathfrak{U}_q$ vardır. Önerme 2.38 den

$$S \subseteq S \circ S \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$$

dir. Benzer şekilde, $S \subseteq U_2$ olur. Özellik gereği;

$$S(p) \subseteq U_1(p) \subseteq V$$

$$S(q) \subseteq U_2(q) \subseteq W$$

gerçeklenir. Buradan $S(p) \cap S(q) \subseteq V \cap W$ olur. Her $U \in \mathfrak{U}_q$ için $r \in U(p) \cap U(q) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $r \in X$ var olduğundan $S(p) \cap S(q) \neq \emptyset$ olur. Buradan, $V \cap W \neq \emptyset$ bulunur. Bu ise

kabulümüzle çelişir. O halde

$$\bigcap \{U^{-1} \circ U \mid U \in \mathfrak{U}_q\} \subseteq D$$

dır.

Tersine, $D = \bigcap \{U^{-1} \circ U \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$ olsun. Herhangi bir $(p, q) \in X \times X$, $p \neq q$ alalım. Hipotez gereği, $(p, q) \notin D = \bigcap \{U^{-1} \circ U \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$ olur. Buradan $(p, q) \notin U^{-1} \circ U$ olacak şekilde $U \in \mathfrak{U}_q$ vardır. Bileşke tanımından, $r \in U(p) \cap U(q)$ olacak şekilde bir $r \in X$ yoktur, yani $U(p) \cap U(q) = \emptyset$ olur. Bu durumda, $V = U(p) \in \mathcal{V}_q(p)$ ve $W = U(q) \in \mathcal{V}_q(q)$ seçimleri için istenilen sağlanır.

Sonuç 2.52. Her düzgünlüğün doğurduğu topoloji T_1 ve regülerdir, fakat kuazi-düzgünlüğün doğurduğu topolojinin T_1 olması için gerek yeter koşul

$$D = \bigcap \{U \mid U \in \mathfrak{U}_q\}$$

olmasıdır. Fakat bilindiği gibi bu koşul bir düzgünlüğün doğurduğu topolojinin T_2 olması ile eşdeğerdir.

Şimdi [20] de ifade edilen bir üçgen fonksiyon yardımıyla tanımlı olasılıksal metrik uzay kavramından ve farklı olarak, Menger'in bir t-norm yardımıyla ve diğer eşitsizlikten yararlanarak, [3] çalışmasında Menger olasılıksal metrik uzay olarak tanımlanan kavramdan bahsedeceğiz.

Burada $F(x, y)$ dağılım fonksiyonunu F_{xy} ve bu fonksiyonun $\alpha \in \mathbb{R}$ noktasındaki değerini $F_{xy}(\alpha)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.53. X boştan farklı bir küme, t bir t-norm, T bir üçgen fonksiyon ve

$$F : X \times X \rightarrow \Delta_*^+$$

bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları göz önüne alalım. Her $x, y, z \in X$ için,

$$(PM1) \quad F_{xy} = \varepsilon_0 \iff x = y$$

$$(PM2) F_{xy} = F_{yx}$$

$$(PM3) F_{xz} \geq T(F_{xy}, F_{yz})$$

$$(PM4) \text{ Her } \alpha, \beta \geq 0 \text{ için } F_{xz}(\alpha + \beta) \geq t(F_{xy}(\alpha), F_{yz}(\beta))$$

(PM1),(PM2) ve (PM3) koşullarını sağlayan (X, F, T) üçlüsüne bir olasılıksal metrik uzay, (PM1),(PM2) ve (PM4) koşullarını sağlayan (X, F, t) üçlüsüne bir Menger olasılıksal metrik uzay denir.

Önerme 2.54. t soldan sürekli bir t-norm ve T_2 ; Örnek 2.29 da tanımlanan üçgen fonksiyon olsun. Bu durumda, (X, F, t) bir Menger olasılıksal metrik uzay ise (X, F, T_2) de bir olasılıksal metrik uzay olur [20].

İspat. $\alpha \in [0, \infty[$ olmak üzere, herhangi $u + v = \alpha$ koşulunu gerçekleyen $u, v \geq 0$ ve herhangi $x, y, z \in X$ alalım.

Hipotez gereği, $F_{xz}(\alpha) \geq t(F_{xy}(u), F_{yz}(v))$ olduğundan $F_{xz}(\alpha), \{t(F(u), G(v)) \mid u + v = \alpha\}$ kümesi için bir üst sınırdır. Bu durumda, supremum en küçük üst sınır olduğundan $F_{xz}(\alpha) \geq T_2(F_{xy}, F_{yz})(\alpha)$ gerçekleşir.

Örnek 2.55. Her metrik uzay bir olasılıksal metrik uzaydır. Çünkü (X, d) bir metrik uzay ise, $F_{xy} = \varepsilon_{d(x,y)}$ şeklinde tanımlı $F : X \times X \rightarrow \Delta_*^+$ fonksiyonu ve $T(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \varepsilon_{a+b}$ koşulunu sağlayan bir üçgen fonksiyon alınırsa, (X, F, T) bir olasılıksal metrik uzay olur. (Örneğin; Örnek 2.29 daki T_2 fonksiyonu bu koşulu sağlayan bir üçgen fonksiyondur.) [13].

Sonuç 2.56. t soldan sürekli bir t-norm, T_2 , Örnek 2.29 da tanımlanan üçgen fonksiyonu ve $F : X \times X \rightarrow \Delta_*^+, F_{xy} = \varepsilon_{d(x,y)}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu şekilde tanımlanan (X, F, T_2) uzayının, olasılıksal metrik uzay olması için gerek yeter koşul (X, d) nin bir metrik uzay olmasıdır [20].

Şimdi olasılıksal metrik uzay üzerindeki topolojilerden bahsedelim.

Önerme 2.57. X boştan farklı bir küme, $x \in X$ bir nokta ve $F : X \times X \rightarrow \Delta_*^+$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon verilsin. Her $t > 0$ için

$$N_x(t) = \{y \in X \mid F_{xy}(t) > 1 - t\}$$

$$B(t) = \{(x, y) \in X \times X \mid y \in N_x(t)\}$$

kümeleri ve

$$\tau_{\mathfrak{U}} = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A \quad \exists t > 0 \quad N_x(t) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\mathfrak{B} = \{B(t) \mid t > 0\}$$

toplulukları olmak üzere, T sürekli bir üçgen fonksiyon ve (X, F, T) olasılıksal metrik uzay olsun. Bu durumda, $\mathfrak{B}$ topluluğu Teorem 2.34 ün koşullarını sağladığından, $\mathfrak{B}$ topluluğunu taban kabul eden bir düzgünlük vardır. Bu düzgünlüğün belirlediği topoloji, olasılıksal metrik uzay üzerindeki kuvvetli topoloji olarak tanımlanır [20].

Önerme 2.58. X boştan farklı bir küme, $t, t \geq t_{max}$ özelliğini sağlayan bir t-norm, $F : X \times X \rightarrow \Delta_*^+$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve (X, F, t) Menger olasılıksal metrik uzay verilsin. Bu durumda,

$$d^* : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+, d^*(x, y) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \mid F_{xy}(\lambda) \leq 1 - \lambda\}$$

fonksiyonu X üzerinde bir metriktir [21] .

İspat. d^* fonksiyonunun, aşağıdaki özelliği sağladığı Teorem 4.8 de gösterilecektir. $\lambda > 0$ için

$$d^*(x, y) < \lambda \iff F_{xy}(\lambda) > 1 - \lambda \quad (2.7)$$

d^* , X üzerinde bir metriktir.

(M1) $d^*(x, y) = 0$ olsun. $x = y$ olduğunu göstermek için her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $F_{xy}(\alpha) = \varepsilon_0(\alpha)$ göstermek yeterlidir. Bunun için,

Durum 1: Her $\alpha \leq 0$ için, $F_{xy} \in \Delta_*^+$ olduğundan $0 \leq F_{xy}(\alpha) \leq F_{xy}(0) = 0$ sağlanacağından

$F_{xy}(\alpha) = 0$ olur.

Durum 2: Her $\alpha > 0$ için, $F_{xy}(\alpha) = 1$ olduğunu gösterelim. Bunun için, $d^*(x, y) = 0$ olduğundan her $\alpha > 0$ için $\alpha \notin \{\lambda \in \mathbb{R} \mid F_{xy}(\lambda) \leq 1 - \lambda\}$ dir. Yani; her $\alpha > 0$ için $F_{xy}(\alpha) > 1 - \alpha$ olur. Herhangi bir $\alpha > 0$ alalım. Doğal sayıların üstten sınırsızlığından

$$\frac{1}{N} < \alpha$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n \geq N$ için

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \alpha$$

sağlanır. F_{xy} in monoton artanlığından her $n \geq N$ için

$$F_{xy}(\alpha) \geq F_{xy}\left(\frac{1}{N}\right) \geq F_{xy}\left(\frac{1}{n}\right) > 1 - \frac{1}{n}$$

dır. Buradan $n \rightarrow \infty$ için limite geçerse, $F_{xy}(\alpha) = 1$ elde edilir. O halde her $x = y$ dir.

Tersine, $x \neq y$ olsun. Bu durumda, (X, F, t) Menger olasılıksal metrik uzayı olduğundan her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $F_{xy}(\alpha) = \varepsilon_0(\alpha)$ dır. $d^*(x, y) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $d^*(x, y) > 0$ dir ve $\lambda_0 > 0$ olacak şekilde bir $\lambda_0 \in \{\lambda \in \mathbb{R} \mid F_{xy}(\lambda) \leq 1 - \lambda\}$ vardır. Bu durumda, $F_{xy}(\lambda_0) \leq 1 - \lambda_0$ dir. $\lambda_0 > 0$ için $F_{xy}(\lambda_0) = 1$ olduğundan $1 \leq 1 - \lambda_0$ çelişkisi elde edilir. O halde kabulümüz yanlıştır. $d^*(x, y) = 0$ dir.

(M2) (X, F, t) Menger olasılıksal metrik uzayı olduğundan $d^*(x, y) = d^*(y, x)$ tir.

(M3) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $x, y, z \in X$ için

$$\begin{aligned} d^*(x, z) + \frac{\varepsilon}{2} &\notin \{\lambda \in \mathbb{R} \mid F_{xz}(\lambda) \leq 1 - \lambda\} \\ d^*(z, y) + \frac{\varepsilon}{2} &\notin \{\lambda \in \mathbb{R} \mid F_{zy}(\lambda) \leq 1 - \lambda\} \end{aligned}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} F_{xz}\left(d^*(x, z) + \frac{\varepsilon}{2}\right) &> 1 - \left(d^*(x, z) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ F_{zy}\left(d^*(z, y) + \frac{\varepsilon}{2}\right) &> 1 - \left(d^*(z, y) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned}$$

gerçeklenir. (X, F, t) Menger olasılıksal metrik uzayı ve t bir t -norm olduğundan

$$\begin{aligned}
 F_{xz}(d^*(x, z) + d^*(z, y) + \varepsilon) &\geq t\left(F_{xz}\left(d^*(x, z) + \frac{\varepsilon}{2}\right), F_{zy}\left(d^*(z, y) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\
 &\geq F_{xz}\left(d^*(x, z) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + F_{zy}\left(d^*(z, y) + \frac{\varepsilon}{2}\right) - 1 \\
 &> 1 - (d^*(x, z) + d^*(z, y) + \varepsilon)
 \end{aligned}$$

Bu durumda $d^*(x, y) < d^*(x, z) + d^*(z, y) + \varepsilon$ gerçekleşir. (2.7) özelliğinden $\varepsilon \rightarrow 0$ giderken, her $x, y, z \in X$ için $d^*(x, y) \leq d^*(x, z) + d^*(z, y)$ gerçekleşir. O halde (M1), (M2) ve (M3) gereği, d^* , X üzerinde bir metriktir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez, [12], [20], [6] ve [2] kitaplarını temel alan bir derlemedir.

Bu tezde kullandığımız malzemeler; yazım için LaTeX programı, çalışmak için kağıt, tahta, tebeşir ve kalem, araştırmak ve öğrenmek için çok sayıda kitap ve araştırma makalesidir. Yöntem ise; öncelikle uzun süreli bir literatür araştırması yaptık. Olasılıksal metrik uzayın çeşitli şekilde yorumlarını veren kitapları ve makaleleri taradık. Düzgünlükten daha zayıf olan kuazi-düzgünlük için aynı çalışmaları yaptık. Kuazi-düzgünlük ile olasılıksal metrik uzay arasındaki bazı ilişkileri inceledik ve bütün bunları derleyerek bu çalışmayı gerçekleştirdik.

4. BULGULAR

Bu tez, [12], [20], [6] ve [2] kitaplarını temel alan bir derlemedir.

Sürekli bir üçgen fonksiyon ile verilen (X, F, T) olasılıksal metrik uzayın doğurduğu topolojinin (Önerme 2.57) metriklenebilir olduğu ve $t \geq t_{max}$ koşulunu sağlayan bir t-norm ile verilen (X, F, t) Menger olasılıksal metrik uzayın bir metrik topolojiye (Önerme 2.58) sahip olduğu bilinmektedir. Ayrıca her iki olasılıksal metrik uzayında, dağılım fonksiyonları soldan sürekli dir.

Bu bölümde, X bir küme olmak üzere, dağılım fonksiyonları soldan sürekli olması gerekmeyen, $\mathfrak{F} : X \times X \rightarrow \Delta^+$ şeklinde tanımlanan ve

$$(U1) \mathfrak{F}_{xx} = \varepsilon_0$$

$$(U2) \text{ Her } k_1, k_2 > 0 \text{ için } \mathfrak{F}_{xz}(k_1 + k_2) \geq t(\mathfrak{F}_{xy}(k_1), \mathfrak{F}_{yz}(k_2))$$

$$(U3) \sup\{t(a, a) \mid a < 1\} = 1$$

koşullarını gerçekleyen $(X, \mathfrak{F}, t)$ uzayını göz önüne alacağız. Dikkat edilirse, (U3) koşulunu sağlayan t-norm ile tanımlı bir Menger olasılıksal metrik uzayı, bir $(X, \mathfrak{F}, t)$ uzayı olur.

Örnek 4.1. $t \geq t_{max}$ koşulunu sağlayan t-normları (U3) özelliğini sağlar. Dolayısıyla Örnek 2.27 deki, $t = t_{min}$ ve $t = t_1$ t-normları bu koşulu sağlar.

Örnek 4.2. $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$ kümesi verilsin. $x, y \in \mathbb{Z}^+, x \neq y$ için

$$G_{xy}(t) = G_{yx}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 3^{-\min(x,y)}, \\ 1 - 3^{-\min(x,y)} & 3^{-\min(x,y)} < t \leq 1, \\ 1 & 1 < t \end{cases}$$

ve $x = y$ için $G_{xy} = \varepsilon_0$ şeklinde tanımlı $G : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \Delta^*$ bir fonksiyon ve $t = t_{min}$ bir t-norm olmak üzere (X, G, t) üçlüsü (U3) özelliğini sağlayan bir Menger olasılıksal metrik uzayıdır [2].

Örnek 4.3. $\varphi \neq \varepsilon_0$ özelliğini sağlayan herhangi bir dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$\mathfrak{F}_{xy} = \begin{cases} \varepsilon_0 & x \leq y \\ \varphi & x > y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \Delta^+$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda, $(\mathbb{R}, \mathfrak{F}, t_{\min})$, (U1), (U2) ve (U3) koşullarını gerçekleyen bir uzaydır.

İspat. (U1) ve (U3) koşullarının sağlandığı $\mathfrak{F}$ tanımından aşıkardır. Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ ve $k_1, k_2 > 0$ için (U2) koşulunun sağlandığını gösterelim.

i) $x \leq z$ ise,

$$\mathfrak{F}_{xz}(k_1 + k_2) = \varepsilon_0(k_1 + k_2) = 1 \geq t(\mathfrak{F}_{xy}(k_1), \mathfrak{F}_{yz}(k_2))$$

daima sağlanır.

ii) $x > z$ olsun. O halde aşağıdaki durumlar söz konusudur;

a) $y \geq x > z$ ise, φ dağılım fonksiyonu ve t bir t-norm olduğundan

$$\varphi(k_1 + k_2) \geq t(\varepsilon_0(k_1), \varphi(k_2)) = \varphi(k_2)$$

olur.

b) $x > y > z$ ise, φ dağılım fonksiyonu olduğundan $k_1 < k_2$ ve $k_2 < k_1$ durumları için

$$\varphi(k_1 + k_2) \geq t(\varphi(k_1), \varphi(k_2))$$

sağlanır.

c) $x > z \geq y$ ise, φ dağılım fonksiyonu ve t bir t-norm olduğundan

$$\varphi(k_1 + k_2) \geq t(\varphi(k_1), \varepsilon_0(k_2)) = \varphi(k_1)$$

olur. Bu durumda, $(\mathbb{R}, \mathfrak{F}, t_{\min})$, $\mathfrak{F}_{xy} \neq \mathfrak{F}_{yx}$ özelliğini sağlayan bir $(X, \mathfrak{F}, t)$ uzayıdır.

Teorem 4.4. $(X, \mathfrak{F}, t)$ uzayı kuazi-düzgünlenebilirdir.

İspat. Her $\lambda > 0$ için

$$U_\lambda = \{(x, y) \in X \times X \mid \mathfrak{F}_{xy}(\lambda) > 1 - \lambda\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda, X üzerinde $\mathfrak{B} = \{U_\lambda \mid \lambda > 0\}$ topluluğunu taban kabul eden bir kuazi-düzgünlük vardır. Bunun için, bu topluluğun Teorem 2.33 koşullarını sağladığını göstereceğiz.

(QB1) Herhangi bir $\lambda > 0$ ve $x \in X$ alalım. $U_\infty = X \times X$ olduğundan $\lambda \in]0, \infty[$ alacağız. (U1) koşulundan

$$\mathfrak{F}_{xx}(\lambda) = \varepsilon_0(\lambda) = 1 > 1 - \lambda \implies (x, x) \in U_\lambda$$

olduğundan $D \subseteq U_\lambda$ bulunur.

(QB2) Herhangi bir $\lambda > 0$ alalım. (U3) koşulundan $1 - \lambda < t(a, a)$ koşulunu gerçekleyen bir $a = a_\lambda \in [0, 1[$ elemanı vardır. t bir t-norm olduğundan $0 < \alpha < \min\left\{\frac{\lambda}{2}, 1 - a\right\}$ şeklinde seçilen bir α sayısı için $t(1 - \alpha, 1 - \alpha) > 1 - \lambda$ sağlanır.

Herhangi bir $(x, z) \in U_\alpha \circ U_\alpha$ alalım. Bileşke tanımı gereği, $(x, y), (y, z) \in U_\alpha$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradan $\mathfrak{F}_{xy}(\alpha) > 1 - \alpha$ ve $\mathfrak{F}_{yz}(\alpha) > 1 - \alpha$ olur.

(U2) koşulu ve t nin bir t-norm olması özelliğinden

$$\mathfrak{F}_{xz}(\lambda) \geq t\left(\mathfrak{F}_{xy}\left(\frac{\lambda}{2}\right), \mathfrak{F}_{yz}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right) \geq t(\mathfrak{F}_{xy}(\alpha), \mathfrak{F}_{yz}(\alpha)) \geq t(1 - \alpha, 1 - \alpha) > 1 - \lambda$$

sağlanır. Böylece $\mathfrak{F}_{xz}(\lambda) > 1 - \lambda$ bulunur. O halde $(x, z) \in U_\lambda$ dır. Böylece $U_\alpha \circ U_\alpha \subseteq U_\lambda$ elde edilir.

(QB3) Her $x, y \in X$ için $\mathfrak{F}_{xy}$ monoton artan olduğundan $0 < \alpha < \beta$ ise $U_\alpha \subseteq U_\beta$ gerçekleşir. Buradan $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$ seçimi için,

$$U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $\mathfrak{B}$ topluluğunu taban kabul eden bir $\mathfrak{U}_q$ kuazi-düzgünlüğü vardır.

Sonuç 4.5. X üzerinde $\mathfrak{U}_q$ kuazi-düzgünlüğü sayılabilir bir tabana sahiptir. $\mathfrak{B} = \{U_{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ topluluğu $\mathfrak{U}_q$ için sayılabilir bir tabandır. Çünkü, herhangi bir $\lambda > 0$ alalım. Doğal sayıların

üstten sınırsızlığından

$$\frac{1}{N} < \lambda$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla

$$U_{\frac{1}{N}} \subseteq U_\lambda$$

gerçeklenir.

Şimdi, $(X, \mathfrak{F}, t)$ uzayı üzerindeki topolojiden bahsedelim.

Sonuç 4.6. $x \in X$ ve $\lambda > 0$ için

$$U_\lambda(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in U_\lambda\} = \{y \in X \mid \mathfrak{F}_{xy}(\lambda) > 1 - \lambda\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda,

$$\tau_{\mathcal{U}_q} = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \text{ için } \exists \lambda > 0 \ U_\lambda(x) \subseteq O\} \cup \{\emptyset\} \quad (4.1)$$

topluluğu X üzerinde birinci sayılabilir bir topolojidir.

İspat. $\tau_{\mathcal{U}_q}$ topluluğunun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

(T1) $\emptyset$ ve X kümeleri $\tau_{\mathcal{U}_q}$ tanım gereği daima topluluğa aittir.

(T2) Herhangi iki $O_1, O_2 \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ ve herhangi bir $x \in O_1 \cap O_2$ alalım. Bu durumda $\tau_{\mathcal{U}_q}$ tanımından $U_\alpha(x) \subseteq O_1$ ve $U_\beta(x) \subseteq O_2$ olacak şekilde $\alpha, \beta > 0$ vardır. $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$ seçimi için, $U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ olduğundan

$$U_\gamma(x) \subseteq (U_\alpha \cap U_\beta)(x) = U_\alpha(x) \cap U_\beta(x) \subseteq O_1 \cap O_2$$

gerçeklenir. O halde, $O_1 \cap O_2 \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ bulunur.

(T3) I herhangi bir küme ve her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau_{\mathcal{U}_q}$ olmak üzere,

Herhangi bir

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$$

alım. Bu durumda, $x \in O_{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in I$ vardır. $\tau_{\mathcal{U}_q}$ tanımından $U_\lambda(x) \subseteq O_{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ vardır. Bu durumda

$$U_\lambda(x) \subseteq O_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$$

sağlanır. O halde

$$\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \tau_{\mathcal{U}_q}$$

dır.

Sonuç 4.7. $(X, \mathfrak{F}, t)$ uzayı (U1), (U2), (U3) ve

(U4) Her $x, y \in X$ için $\mathfrak{F}_{xy} = \mathfrak{F}_{yx}$

koşullarını gerçekleştiriyorsa X uzayı düzgünlenebilir bir uzaydır.

Teorem 4.8. $F : X \times X \rightarrow \Delta_*^+$ şeklinde tanımlı ve $t, t \geq t_{max}$ koşulunu gerçekleyen bir t-norm olmak üzere, (X, F, t) uzayı (U1), (U2), (U4) koşullarını ve her $x, y \in X$ için,

(U5) $F_{xy} = \varepsilon_0$ ise $x = y$

koşulunu sağlıyorsa (X, F, t) bir Menger olasılıksal metrik uzay olur ve Önerme 2.58 de verilen τ_{d^*} topolojisi ile (4.1) de ifade edilen $\tau_{\mathcal{U}_q}$ topolojisi örtüşür.

İspat. (X, τ_{d^*}) topolojisi ile $(X, \tau_{\mathcal{U}_q})$ topolojisinin çakıştığını göstermek için Önerme 2.58 de tanımlanan d^* fonksiyonun aşağıdaki özelliği sağlaması yeterlidir. Bunun için, her $\lambda > 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$d^*(x, y) < \lambda \iff F_{xy}(\lambda) > 1 - \lambda \quad (4.2)$$

olmak üzere, $d^*(x, y) < \lambda_0$ ve $F_{xy}(\lambda_0) \leq 1 - \lambda_0$ olacak şekilde bir $\lambda_0 > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\lambda_0 \in \{\lambda \in \mathbb{R} \mid F_{xy}(\lambda) \leq 1 - \lambda\}$ dir. Kabulden, $\lambda_0 \leq d^*(x, y) < \lambda_0$ olduğundan $\lambda_0 < \lambda_0$ çelişkisi elde edilir. O halde kabulümüz yanlıştır.

Tersine; $F_{xy}(\lambda) > 1 - \lambda$ olsun. λ nın, $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid F_{xy}(\lambda) \leq 1 - \lambda\}$ kümesi için bir üst sınır olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için, $\lambda < \lambda_0$ olacak şekilde bir $\lambda_0 \in \{\lambda \in \mathbb{R} \mid F_{xy}(\lambda) \leq$

$1 - \lambda\}$ olduğunu kabul edelim. F_{xy} in monoton artanlığından

$$F_{xy}(\lambda) \leq F_{xy}(\lambda_0) \leq 1 - \lambda_0 \leq 1 - \lambda$$

elde edilir. Bu ise hipotezimizle çelişir. Kabulümüz yanlıştır.

Teorem 4.9. X herhangi bir küme, $\mathfrak{F} : X \times X \rightarrow \Delta^+$, (U1), (U2) ve (U5) koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon ve $t \geq t_{max}$ t-normu verilsin. Bu durumda, X üzerinde 1. sayılabilir ve Hausdorff olan bir topoloji vardır.

İspat: Sonuç 4.6 da ispatlandığı gibi, X üzerinde, $\mathfrak{B} = \{U_\lambda \mid \lambda > 0\}$ topluluğunu taban kabul eden bir $\mathfrak{U}_q$ kuazi-düzgünlüğü ve $\mathfrak{U}_q$ nun doğurduğu $\tau_{\mathfrak{U}_q}$ topolojisi vardır ve bu topoloji $\mathfrak{B}(x) = \{U_\lambda(x) \mid \lambda > 0\}$ topluluğunu her $x \in X$ noktasında lokal taban kabul eder.

$d^*(x, y) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} \mid (x, y) \notin U_\alpha\}$ [21] alınırsa, (U1) ve (U5) koşulu altında

$d^*(x, y) = 0 \iff x = y$ ve $t \geq t_{max}$ olduğundan (U2) koşulu altında, d^* üçgen eşitsizliğini gerçekler. $\mathfrak{B}_\lambda(x) = \{y \in X \mid d^*(x, y) < \lambda\}$ denilirse $\{\mathfrak{B}_\lambda(x) \mid \lambda > 0\}$ topluluğu her $x \in X$ noktasında bir lokal tabandır, çünkü $\mathfrak{B}_\lambda(x) \subseteq U_\lambda(x)$ ve $U_{\frac{\lambda}{2}}(x) \subseteq \mathfrak{B}_\lambda(x)$ sağlanır. Dolayısıyla $\mathfrak{U}_q$ kuazi-düzgünlüğü Hausdorff ve $\tau_{\mathfrak{U}_q}$ Hausdorff ve 1. sayılabilir bir topoloji olur.

Literatürde $d(x, x) = 0$ ve $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ koşullarını sağlayan $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$ fonksiyonuna kuazi-metrik adı verilmiştir. Dolayısıyla, (X, d^*) kuazi-metrik uzaydır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez, [12], [20], [6] ve [2] kitaplarını temel alan bir derlemedir.

Olasılıksal metrik uzay konularında önemli rol oynayan dağılım fonksiyonlarının soldan sürekliliğini ve simetri özelliğini kaldırarak, uygun koşullar altında tanımladığımız dağılım fonksiyonları ile bir kuazi-düzgünlük elde ederek bu kuazi-düzgünlüğün doğurduğu topolojiyi ve bu topolojinin bazı özelliklerini inceledik. Son olarak bu uzay üzerinde bir kuazi-düzgünlük tarafından doğurulan topolojinin 1. sayılabilir T_2 (Hausdorff) olduğu elde edildi ve bu uzayın kuazi-metrik olduğu belirlendi.

KAYNAKLAR

- [1]. Carter K. S. and Hicks T. L., 1976, Some Results on Quasi-Uniform Spaces, Canad. Math. Bull. Vol. 19
- [2]. Chang Shih-sen , Cho Y. J. , Kang Sin-min, 2001, Nonlinear Operator Theory in Probabilistic Metric Spaces, Nova Science Publishers, Inc. Huntington, New York ISBN: 1-56072-980-5.
- [3]. Cho Y. L., Grabiec M. T. and Saadati R., 2009, Quasi-Pseudo-Metrization in PqpM-Spaces, Scientia Magna Vol. 5, No. 1, 16-28
- [4]. Császár Á., 1960, Fondements de la topologie générale, Akadémiai Kiadó, Budapest. 231 pp.
- [5]. Duru H., 2012, Topolojiye Giriş Ders Notları, Istanbul University Press, Istanbul, Turkey
- [6]. Fletcher P. , William F. L., 1982, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Quasi-Uniform Spaces - (1982, CRC Press) - libgen.lc
- [7]. Frank M. J., 1971, Probabilistic Topological Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications 34, 67-81
- [8]. Golet I. , 2010, On Generalized Probabilistic Metric Spaces, International Mathematical Forum, no. 45, 2249 - 2254
- [9]. Hart K., Nagata J., Vaughan J., 2003, Encyclopedia of General Topology, Elsevier
- [10]. Hicks T. L. and Carlson J. W., 1972, Some Quasi-Uniform Space Examples, Journal of Mathematical Analysis and Applications 39, 712-716
- [11]. James I. M., 1990, Introduction to Uniform Spaces, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press
- [12]. Kelley J.L., 1975, General Topology, Springer
- [13]. Krishnan V. S., 1955, A Note on Semi-Uniform Spaces, J. Madras Univ. Sect. B, 25 , 123-124
- [14]. Kunzi H. - P. A. , 1993, Quasi Uniform Spaces-eleven years later, Topology Proceedings Vol. 18
- [15]. Menger K., 1942, Statistical Metrics, Pacific Journal of Mathematics Vol. 10, No. 1
- [16]. Morrel B., Nagata J., 1978, Statistical Metric Spaces As Related To Topological Spaces, General Topology and its Applications 9 233-237. @ North-Holland Publishing Company
- [17]. Nachbin L., 1948, Sur les Espaces Uniformes Ordonnés, C.R. Acad.Sci. Paris, 226

- [18]. Pervin W.J., 1962, Quasi-Uniformization of Topological Spaces, Math. Annalen 147, 316-317
- [19]. Pervin W.J., 1964, Foundations of General Topology, Academic Press INC., Library of Congress Catalog Card Number: 64-1779 6
- [20]. Schweizer B. and Sklar A., 1960, Statistical Metric Spaces, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 10, No. 1
- [21]. Schweizer B. and Sklar A., 1983, Probabilistic Metric Spaces, Elsevier Science Publishing Co., Inc., 978-0-486-14375-0
- [22]. Shi-sheng Z., 1988, Basic Theory and Applications of Probabilistic Metric Spaces (I)*, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition, Vol.9, No.2)
- [23]. Stoltenberg R., 1967 , Some Properties of Quasi-Uniform Spaces, Proe. London Math. Soe. (3) 17 226-40



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Aygül BİLGİN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2016

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2021