

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Caner İNCEKAŞ

ÖLÇÜM HATALI MODELLERDE PARAMETRE TAHMİNİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2020

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖLÇÜM HATALI MODELLERDE PARAMETRE TAHMİNİ

Caner İNCEKAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 06/01/2020 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

Doç. Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞİRAY
DANIŞMAN

Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
ÜYE

Dr. Öğr. Üyesi Berrin GÜLTAY
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalı'nda hazırlanmıştır.

Kod no:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖLÇÜM HATALI MODELLERDE PARAMETRE TAHMİNİ

Caner İNCEKAŞ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞİRAY
Yıl: 2020, Sayfa: 113
Jüri : Doç. Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞİRAY
: Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
: Dr. Öğr. Üyesi Berrin GÜLTAY

Regresyon modelinde bağımsız değişkenin hatasız ölçüldüğü varsayılır. Bu varsayım sağlanmadığında veri ölçüm hataları ile bozulur. Veri analizinde, ölçüm hataları çok sık görülür.

Veride ölçüm hatalarının varlığında klasik istatistiksel yöntemlerin geçerliliği düşme eğilimine girer ve parametrelerin en küçük kareler tahmin edicileri yanlı ve tutarsız hale gelir. Parametrelerin tutarlı tahmin edicilerini bulmak için ölçüm hatalarının bilinen kovaryans matrisi ve bilinen güvenilirlik matrisi gibi bazı ilave bilgiler gereklidir.

Bu çalışmada, değişkenlerde ölçüm hatası olması durumunda, ölçüm hatasını en aza indirebilecek alternatif parametre tahmin yöntemleri ve veride çoklu iç ilişki olması durumunda ölçüm hatalı modellere bazı yanlı parametre tahmin yaklaşımları incelenecektir. Ayrıca, bu tahmin ediciler teorik ve sayısal örnekler ile değerlendirilecektir.

Anahtar Kelimeler: Ölçüm hatalı model, Tanımlanabilirlik, Güvenilirlik matrisi, Araç değişken yöntemi, Liu tahmin yaklaşımı

ABSTRACT

MSc THESIS

PARAMETER ESTIMATION IN MEASUREMENT ERROR MODELS

Caner İNCEKAŞ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞIRAY
Year: 2020, Pages: 113
Jury : Assoc. Prof. Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞIRAY
: Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
: Assist. Prof. Dr. Berrin GÜLTAY

In the regression model, it is assumed that the independent variable is measured without error. If this assumption is not provided, the data is corrupted by measurement errors. In data analysis, measurement errors are very common.

In the presence of measurement errors in the data, the validity of classical statistical methods tends to fall, and the least squares estimators of the parameters become biased and inconsistent. In order to find consistent estimator of parameters, some additional information is required, such as the known covariance matrix of the measurement errors and the known reliability matrix.

In this study, alternative parameter estimation methods in case of measurement errors in variables are considered. Moreover, some biased parameter estimation approaches to the measurement error models in case of multicollinearity in data are examined. Also, these estimators are evaluated with theoretical and numerical examples.

Key Words: Measurement error model, Identifiability, Reliability matrix, Instrumental variables technique, Liu estimation approach



GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Ölçme, belli bir nesnenin ya da nesnelerin belirli özelliklere sahip olup olmadıklarının, sahip ise oluş derecesinin gözlenip, gözlem sonuçlarını sayı ve sembollerle ifade etmeyi sağlayan deneysel bir işlemdir. Hipotezleri test etmemiz için değişkenleri ölçmemiz gerekir. Bu değişkenleri doğru ölçmemiz çok önemlidir. Ölçüm ise, ölçme sonucudur.

Bir bakıma tüm istatistiksel problemler ölçüm hatasını içerir. Ölçüm hatası, ilgilenilen bir modele giren değişkenlerden birini veya daha fazlasını tam olarak gözlemleyemediğimiz zaman meydana gelir. Bu tür hataların ortaya çıkmasının birçok nedeni vardır. En yaygın olanı araçsal (instrumental error) hata ve örneklem hatasıdır. Bu gibi durumlarda, değişkenler üzerindeki gözlemler doğru bir şekilde gözlenemez ve veri ölçüm hataları ile bozulur. Her zamanki istatistiksel yöntemler düşme eğilimine girer ve parametre tahminleri yanlı ve tutarsız olabilir.

Regresyon modelinde, bağımsız değişkenin hatasız ölçüldüğü varsayılır. Bu varsayım bozulduğunda model ölçüm hatalı olur. Ölçüm hatalı modeller, regresyon modellerinin bir genelleştirilmesidir. En basit lineer ölçüm hatalı model için amaç her ikisi de hata ile ölçülen iki değişken arasında uydurulan doğruyu iki değişkenli veriden tahmin etmektir. Ölçüm hatalı modeller veri analizinde çok yaygın olarak görülür.

Vektör açıklayıcı değişkenli yani, birden fazla açıklayıcı değişkenli modeller, tek değişkenli modelin bir genişletilmesidir. Vektör değerli açıklayıcı değişkenli doğrusal ölçüm hatalı model, denklem hatası olan model ve denklem hatası olmayan model olarak ele alınır. Denklem hatası, gerçek değerler arasında tam olarak doğrusal bir ilişkinin olmadığı (yani, gerçek değişkenler arasındaki ilişkinin tam olarak bilinmediği) ve denklemde bir q hatasının olduğu modellerdir. Bu modellerde fark q denklem hatası açısından gerçekleşir. Ölçüm hatalı modeller, gerçek değerlerin (ξ_i) durumuna göre, yapısal, fonksiyonel ve ultrayapısal model

olarak ele alınabilir. Ölçüm hatalı model ve regresyon modelleri arasındaki en önemli farklardan birisi de modelin tanımlanabilirliği ile ilgilidir. Literatürde, bir normal yapısal modeli tanımlanabilir kılacak olan altı yan varsayım vardır. Parametrelerin tutarlı tahmin edicilerini bulmak için, ölçüm hatalarının bilinen kovaryans matrisi ve bilinen güvenilirlik matrisi gibi bazı ilave bilgiler gereklidir (Schneeweiss (1976), Fuller (1987), Gleser (1992), Cheng and Van Ness (1999)).

Gleser (1993), maksimum olabilirlik yönteminin, en küçük kareler tahmin yöntemi ile aynı sonuç verdiğini göstermiştir. Parametrelerin tahmin edilmesinde, maksimum olabilirlik yönteminden ziyade araç değişken yöntemi ve genelleştirilmiş en küçük kareler gibi bazı alternatif yaklaşımlar önerilmiştir. Açıklayıcı değişkenler ile hataların ilişkili olması durumunda en küçük kareler, yanlı ve tutarsızdır. Böyle bir durumda, hata ile ilişkisiz bir araç değişkeni tanımlanır. Genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi yansız, tutarlı ve etkili bir tahmin edicidir. İkinci bölümde bu tahmin ediciler ile ilgili simülasyon çalışmalarına yer verilmiştir.

Lineer regresyon analizinde temel varsayımlardan birisi de açıklayıcı değişkenlerin tamamının lineer bağımsız olmasıdır. Bu varsayım, ihlal edildiği zaman veride çoklu iç ilişki problemi ortaya çıkar. Veride çoklu iç ilişki olması durumunda, en küçük kareler tahminleri, tahmin edilen parametrelerin gerçek değerinden oldukça farklı olabilir. Bu olumsuzluğu ortadan kaldırmak için regresyonda en küçük karelere alternatif bazı yanlı tahmin ediciler önerilmiştir. Bunlardan en çok bilinen ve en çok çalışılanlar Hoerl ve Kennard (1970) tarafından tanımlanan ridge regresyon tahmin edici ve Liu (1993) tarafından önerilen Liu tahmin edicidir. Bu çalışmanın üçüncü bölümünde, çoklu iç ilişkinin varlığında ölçüm hatalı modellerde ridge ve Liu yanlı tahmin yaklaşımları incelenecektir. Yanlı tahmin edicilerin performanslarının karşılaştırılması, teorik ve sayısal değerlendirmeler ile analiz edilecek, ayrıca bu tahmin edicileri karşılaştırmak için bir simülasyon çalışması yapılacaktır.

TEŞEKKÜR

Her insan yeni bir sürece başlarken içinde bazı kaygılar ve tereddütler ile başlar. Bu süreçte, kişinin çalışma azmi kadar ona destek olan insanların mahiyeti de oldukça önemlidir. Bu süreçte, yanımda olan, tecrübesiyle bana her türlü konuda bilgi ve birikimini aktaran, beni doğruya ve araştırmaya yönlendiren, değerli zamanını bana ayıran danışman hocam Sayın Doçent Doktor Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞIRAY'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana bilgi ve birikimlerini aktaran, desteklerini esirgemeyen İstatistik Anabilim Dalı hocalarıma teşekkür ediyorum.

Bu süreçte yanımda olan arkadaşlarıma ve desteklerini hayat boyu hissettiğim aileme bana katkılarından dolayı teşekkür ediyorum.



İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT.....	III
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	V
TEŞEKKÜR.....	VII
İÇİNDEKİLER	IX
ÇİZELGELER DİZİNİ	XI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XIII
1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	1
1.1. Giriş ve Ön Bilgiler.....	1
1.1.1. Ölçme ve Ölçüm	1
1.1.2. Ölçüm Hatası.....	2
1.2. Bazı Temel Kavramlar	3
1.2.1. Yansızlık	4
1.2.2. Tutarlılık.....	4
1.2.3. Tanımlanabilirlik.....	5
1.3. ME Modeller	6
1.3.1. ME Modellerin Temel Özellikleri.....	11
1.3.1.1. Modelin Tanımlanabilirliği	11
1.4. Tek Değişkenli Normal ME Modelde ML Tahmini	12
1.4.1. Yapısal İlişkiler İçin ML Tahmini	13
1.4.2. Fonksiyonel İlişkiler İçin ML Tahmini	21
1.4.3. Ultrayapısal İlişkiler İçin ML Tahmini	29
1.5. Denklem Hatalı Model	33
1.5.1. Yapısal Deklem Hatalı Model.....	34
1.5.2. Fonksiyonel Denklem Hatalı Model	36

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL	39
2.1. Giriş	39
2.2. Tanımlanabilirlik	40
2.3. Denklem Hatalı Model	41
2.3.1. ML Tahmin Edici	41
2.3.2. Bilinen Güvenilirlik Matrisi	49
2.4. Denklem Hatası Olmayan Model İçin ML Tahmini	53
2.4.1. İlişkisiz Hatalar İle Fonksiyonel Model	53
2.4.2. İlişkili Hatalar İle Fonksiyonel ve Yapısal Modeller	61
2.5. Parametrelerin Tahminine Alternatif Yaklaşımlar	67
2.5.1. Araç Değişken yöntemi	68
2.5.2. Genelleştirilmiş ve Değiştirilmiş EKK Tahmin Edicileri	73
3. ME MODELLERE YANLI TAHMİN YAKLAŞIMI	75
3.1. Giriş ve Önceki Çalışmalar	75
3.2. Ridge Tahmin Edicisi	76
3.3. Liu Tahmin Edicisi	77
3.4. Ridge ve Liu Tahmin Edicilerinin MSE Karşılaştırılması	77
3.4.1. Ridge ve Liu Tahmin Edicilerinin MSE'si	77
3.4.2. Ridge ve Liu Tahmin Edicilerinin MMSE Karşılaştırmaları	80
3.4.3. Ridge ve Liu Tahmin Edicilerinin SMSE Karşılaştırmaları	82
3.5. Simülasyon Çalışması	86
3.6. Sayısal Örnek	98
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	105
KAYNAKLAR	109
ÖZGEÇMİŞ	113

ÇİZELGELER DİZİNİ

SAYFA

Çizelge 2.1. $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$ ile üç açıklayıcı değişkenli 36 denklem hatalı model verisi.....	46
Çizelge 2.2. $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$ ile üç açıklayıcı değişkenli 36 fonksiyonel model verisi.....	58
Çizelge 2.3. $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$ ile üç açıklayıcı değişkenli ve ilişkili hatalar ile 36 fonksiyonel model verisi.....	64
Çizelge 2.4. $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$ ile üç açıklayıcı değişkenli araç değişkenli 36 ölçüm hatalı model verisi.....	71
Çizelge 3.1. Longley (1967) verisi.....	100



Şekil 3.1. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 1$, $\Sigma_{\delta\delta} = I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri.....	89
Şekil 3.2. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 5$, $\Sigma_{\delta\delta} = I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri.....	90
Şekil 3.3. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 10$, $\Sigma_{\delta\delta} = I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri.....	91
Şekil 3.4. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 1$, $\Sigma_{\delta\delta} = 3I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri.....	92
Şekil 3.5. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 5$, $\Sigma_{\delta\delta} = 3I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri.....	93
Şekil 3.6. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 10$, $\Sigma_{\delta\delta} = 3I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri.....	94
Şekil 3.7. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 1$, $\Sigma_{\delta\delta} = 5I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri.....	95
Şekil 3.8. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 5$, $\Sigma_{\delta\delta} = 5I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri.....	96
Şekil 3.9. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 10$, $\Sigma_{\delta\delta} = 5I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri.....	97
Şekil 3.10. k ve d değerleri için ridge ve Liu tahmin edicilerinin SMSE değerleri.....	101



1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1.1. Giriş ve Ön Bilgiler

Ölçüm hatalı (measurement error: ME) modeller regresyon modellerinin genelleştirilmesidir. ME modeller, veri analizinde çok sık karşımıza çıkar.

1.1.1. Ölçme ve Ölçüm

Ölçme, belli bir nesnenin ya da nesnelerin belli özelliğe sahip olup olmadığını, sahipse oluş derecesinin gözlenip, gözlem sonuçlarını sayı ve sembollerle ifade etmeyi sağlayan deneysel bir işlemdir. Çalışılan konuda gözlenen her ne ise, onun bir miktarı ya da ait olduğu bir kategorisi vardır ve bu (boyda, kütlede olduğu gibi nicel olarak) sayılarla ya da (cinsiyette, doğum yerinde olduğu gibi nitel olarak) sembollerle gösterilebilmelidir. Hipotezleri test etmek için değişkenleri ölçmemiz gerekir. Bu değişkenleri doğru ölçmemiz çok önemlidir. Çoğu konuda yapılan çalışmaların sonuçları, sayısal büyüklüklerle ifade edilen ölçümler yardımı ile elde edilir. Ölçme işleminin doğasında fark vardır. Kısaca, ölçme varlıkların sahip oldukları nitelikleri nicelendirme işlemidir.

Ölçüm, ölçme sonucudur. Ölçüm, gözlemlerin sayılara çevrildiği bir süreçtir. Bu sayılar, onlardan yapılabilecek yorumları ve onlarla anlamlı bir şekilde kullanılabilecek istatistiksel yöntemleri belirler. Yani, ölçme işlemi sonucunda elde edilen sayıya ya da sembole ölçüm denilmektedir. Örneğin, Adana'nın nüfusu 4 milyondur, bugün hava sıcaklığı 36 °C' dir, Can 70kg'dır vb. Hesaplanan veya ölçülen bir değer gerçeğe olan yakınlığı, yapılacak olan analizler için oldukça önemlidir.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

1.1.2. Ölçüm Hatası

Tüm istatistiksel analizlerdeki temel bir varsayım gözlemlerin tamamının doğru bir şekilde ölçülmesidir. Yapılan araştırma yöntemini anlayabilmek için ölçümler yapılır, ancak yapılan ölçümler bazen bir miktar hata içerebilmektedir. Bir bakıma, tüm istatistiksel problemler ölçüm hatasını içerir. Buradaki amaçlar doğrultusunda, ölçüm hatası, ilgilenilen bir modele giren değişkenlerden birini veya daha fazlasını tam olarak gözlemleyemediğimiz zaman meydana gelir. Bu tür hataların ortaya çıkmasının birçok nedeni vardır, en yaygın olanı araçsal hata (instrumental error) ve örneklem hatasıdır.

Örneğin, tat, iklim koşulları, zekâ, eğitim, yetenek vb gibi değişkenler ölçülebilir değildir. Bu durumda, kukla değişkenler kullanılır ve gözlemler kukla değişkenlerin değerleri açısından kaydedilebilir.

Değişkenler bazen açık bir şekilde tanımlanır, ancak gözlemleri doğru almak zordur. Örneğin, yaş, genellikle tam yıllarda veya beş'in katlarında bildirilir.

Bazen değişken kavramsal olarak iyi tanımlanır, ancak üzerinde doğru gözlemleri almak mümkün değildir. Bunun üzerine gözlemler yakın ilişkili temsilli değişkenler üzerinden elde edilir. Örneğin, eğitim seviyesi, öğretim yılı sayısı ile ölçülür.

Bazen değişkenler iyi anlaşılır, ancak nitelikseldir. Örneğin, zekâ, zekâ derecesi skorları (IQ) ile ölçülür.

Su veya kan kimyasalları değerleri ölçülürken genellikle hata ile ölçülürler. Laboratuvarlar, rutin olarak kullanılan ölçüm aletlerini ayarlarlar ve yapılan bu ayarlamaya bağlı olarak değerler elde edilir. Gerçek ve ölçülen değer arasında bir ilişki olmadığı sürece bunlar bazı hatalar içerecektir.

Harvard altı şehir çalışması, bazı kirleticilere maruz kalmanın çocuğun solunum durumu üzerindeki etkisini incelemiştir. Bir bireyin gerçek maruziyetini ölçmek zordur. Bunun yerine, evde yılın farklı zamanlarında farklı odalarda gözlemler yapılmıştır. Bu değerler, maruz kalma değeri olarak modele alınmıştır.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR Caner İNCEKAŞ

Ölçümler, bireylerin sürekli maruziyetini ölçen bir yaka monitörü taktığı çalışmalarla doğrulanmıştır (Buonaccorsi, 2010).

Birey, şirket veya daha büyük düzeyde (örneğin, ilçe, ülke vb) ölçülen birçok finansal ve ekonomik değişkenler ölçüm hatasına tabidir. Hata kendiliğinden raporlama (bildirme), örnekleme, değişkenlerin başka verilerden oluşmasından vb kaynaklanıyor olabilir.

Birçok ülke, işsizliği, ücretleri ve diğer iş ve sağlık değişkenlerini ölçmek için sürekli araştırma yapmaktadır. Bu veriler, genellikle zaman içinde modellenir. Buradaki ölçüm hatası, bireylerin, hanelerin vb alt örneklemelerini kullanarak yapılan tahminlerden kaynaklanan örnekleme hatasıdır. Ölçüm hatalarının, bireylerin ya da hane halkının araştırmada bir süre kaldığı ve daha sonra dağıtıldığı blok örneklemesinin bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu gibi durumlarda değişkenler üzerindeki gözlemler doğru bir şekilde gözlenemez, gerçek değerleri kaydedilmez ve ölçüm hataları ile bozulur. Değişkenin gözlenen ve gerçek değeri arasındaki fark ölçüm hatası veya değişkenlerdeki hatalar olarak adlandırılır. Veri ölçüm hataları ile bozulduğu zaman, her zamanki istatistiksel yöntemlerin geçerliliği düşme eğilimine girer. Değişkenlerdeki ölçüm hataları sebebiyle parametre tahminleri yanlı ve tutarsız olabilmektedir. Bu gibi durumlarda, alternatif bazı parametre tahmin yöntemleri önerilmiştir.

1.2. Bazı Temel Kavramlar

Bu kısımda, tezde çok kullanacağımız bazı temel kavramları tanımlayacağız.

1.2.1. Yansızlık

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$; $f(\xi | \theta)$ fonksiyonundan rasgele örneklemeler olmak üzere değişkenlerin bir fonksiyonu olan $\hat{\theta} = h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tahmin edicisinin yansız olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(\hat{\theta}) = \theta$ olmasıdır.

Yani, $\hat{\theta}$ tahmin edicisinin beklenen değeri θ parametresine eşit ise $\hat{\theta}$ 'ya yansız tahmin edici denir. Bu durumda, $E(\hat{\theta}) - \theta$ farkı yanlılığın (bias) bir ölçüsüdür.

$$Bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$\hat{\theta} = h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tahmin edicisinin θ parametresinin asimptotik olarak yansız tahmin edicisi olabilmesi için $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ şartının sağlanması gerekir.

1.2.2. Tutarlılık

Tutarlılık özelliği, örneklem büyüklüğü sonsuza doğru artarken, tahmin edicinin gerçek parametreye yakınsamasını gerektiren oldukça temel bir özelliktir, fakat iyi bir tahmin edici için tek başına yeterli bir özellik değildir. Tutarlılık (tüm asimptotik özelliklerin yanısıra) tek bir tahmin ediciden ziyade tahmin edicilerin bir dizisi ile ilgilidir.

$f(\xi | \theta)$ dağılımına göre $\xi_1, \xi_2, \dots$ 'leri gözlemlersek, n boyutlu her bir örneklem için aynı tahmin prosedürünü uygulayarak $\hat{W}_n = \hat{W}_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ tahmin edicilerinin bir dizisini oluşturabiliriz. Örneğin, $\bar{\xi}_1 = \xi_1$, $\bar{\xi}_2 = (\xi_1 + \xi_2)/2$, $\bar{\xi}_3 = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)/3$ vb. Şimdi tutarlı bir dizi tanımlayalım.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} \left(\left| \hat{W}_n - \theta \right| < \varepsilon \right) = 1$$

$\hat{W}_n = \hat{W}_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ tahmin edicilerinin bir dizisi, her $\varepsilon > 0$ ve her $\theta \in \Theta$

için θ parametresi tahmin edicilerinin $(\hat{W}_n)$ tutarlı bir dizisidir.

Burada, P bir olasılık dağılımını ifade etmektedir. Ayrıca, örneklem büyüklüğü sonsuza doğru artıkça (örneklem büyüklüğünün gittikçe daha iyi olması), tahmin edici yüksek olasılıkla parametreye yakın olacaktır veya tahmin edicilerin tutarlı bir dizisinin gerçek parametreyi ıskalama olasılığının küçük olduğunu söyleyebiliriz. Tutarlılık için eşdeğer bir ifade, her $\varepsilon > 0$ ve $\theta \in \Theta$ için tutarlı bir $\hat{W}_n$ dizisi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} \left(\left| \hat{W}_n - \theta \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

olur.

Sonuç olarak, her $\theta \in \Theta$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var_{\theta}(\hat{W}_n) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Bias_{\theta}(\hat{W}_n) = 0$$

ise W_n , θ 'nın tahmin edicilerinin tutarlı bir dizisidir.

EKK (en küçük kareler) tahminleri tutarsız oldukları için ME model parametreleri için iyi tahminler olarak düşünülmez.

1.2.3. Tanımlanabilirlik

$T = \{T_{\theta} : \theta \in \Theta\}$, Θ parametre uzayının sonlu yada sonsuz boyutlu olduğu istatistiksel bir model olsun. T , $\theta \rightarrow T_{\theta}$ eşlemesi bire bir ise tanımlanabilir. $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ tamamı için,

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAS

$$T_{\theta_1} = T_{\theta_2} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

olur. Bu tanım, θ 'nın farklı değerlerinin, farklı olasılık yoğunluk fonksiyonlarına karşılık gelmesi gerektiği anlamına gelir: $\theta_1 \neq \theta_2$ ise, $T_{\theta_1} \neq T_{\theta_2}$ 'dir.

Tanımlanabilirlik, kesin çıkarımın mümkün olması için bir modelin yerine getirmesi gereken bir özelliktir, yani bir tahmin edici veya tahmin işlemi değildir. Bir model, sonsuz sayıda gözlem elde edildikten sonra bu modelin temel parametrelerinin gerçek değerlerini öğrenmek teorik olarak mümkün olduğunda tanımlanabilir. Model tanımlanamaz ise çıkarım yapmak zordur. Örneğin, $P(x|\theta) = P(x|\theta')$ ise, her iki dağılımdan gelen gözlemler tamamen aynı görünür ve parametrenin gerçek değerinin θ veya θ' olup olmadığını bilmenin bir yolu olmazdı. Özellikle, hem θ hem de θ' olabilirlik fonksiyonunun aynı değerini verirdi. Tanımlanabilirlik ile ilgili problemler, genellikle model yeniden tanımlanarak çözülebilir.

Örneğin, standart regresyon modelini, $y = X\beta + \varepsilon$, $E[\varepsilon | X] = 0$ düşünelim. β parametresinin tanımlanabilir olması için gerek ve yeter koşul $X'X$ 'in tersinin var olması gerekir. Bu, modeldeki tanımlanabilirlik koşuludur.

1.3. ME Modeller

ME modeller (ayrıca değişkenlerdeki ölçüm hataları olarak adlandırılır) regresyon modellerinin bir genelleştirilmesidir. En basit lineer ME model için amaç, her ikisi de hata ile ölçülen iki değişken arasında uydurulan doğruyu, iki değişkenli veriden tahmin etmektir. Adcock (1877, 1878), genellikle bu tür modelleri düşünen ilk kişi olarak kabul edilir. ME modeller, veri analizinde çok yaygın olarak görülür. ME modeller, regresyon modelleriyle karşılaştırıldığında hem avantajlara hem de dezavantajlara sahiptir. Bu bölümde, basit doğrusal ME modelleri tanıtacağız ve bu modellerin temel özelliklerinin bazıları ve tipik

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

uygulamalarının yanı sıra, bazı güçlü ve zayıf noktalarını tartışacağız. Bağımsız gözlemlerin bir kümesi,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

verildiğinde bir açıklayıcı değişkenli standart regresyon modeli,

$$y = \beta_0 + \beta_1 \xi + \varepsilon \quad (1.1)$$

ile verilir, burada ξ bağımsız değişkeni ya sabit ya da rasgeledir ve ε hatası sıfır ortalamaya sahiptir ve ξ ile ilişkisizdir. Bilinmeyen sabit β_0 ve eğim β_1 genellikle EKK teknikleri veya daha dayanıklı (robust) bir yöntem kullanılarak tahmin edilir.

Karşılık gelen standart doğrusal ME model ξ ve η değişkenleri arasında,

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 \xi \quad (1.2)$$

şeklinde bir ilişki olduğunu, ancak ξ ve η değişkenlerinin gözlemlenemez olduğunu ve sadece ilave hatalar ile gözlenebileceğini varsayar. Böylece, doğrudan ξ ve η 'yi gözlemlmek yerine ξ ile δ ve ε hatalarının ilişkisiz olduğu yerde

$$x = \xi + \delta \quad \text{ve} \quad y = \eta + \varepsilon \quad (1.3)$$

değişkenleri gözlemlenir.

Hem ξ hem de η hata ile ölçüldüğü için bu model, ME model olarak ele alınır. Bu model 'standart' ME model olarak adlandırılır. ξ ve η değişkenleri, bazen gizil değişkenler olarak ifade edilebilir. ξ değişkeninin hata ile ölçüldüğü uygulamalar muhtemelen ξ 'nin kesin olarak ölçüldüğü uygulamalardan daha yaygındır.

Endüstriyel deneylerde sıcaklık ve basınç, tarımsal deneylerde gübre veya su seviyesi, besin gereksinimlerini belirlemek için yapılan diyet çalışmalarında

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

protein seviyeleri, bir öğütücü değirmeninin hızı vb gibi değişkenler hata ile ölçülebilir.

n boyutlu bir örneklem için doğrusal tek değişkenli ME model aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$\eta_i = \beta_0 + \beta_1 \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (1.4)$$

(ξ_i, η_i) gözlemlenemeyen ‘gerçek’ değişkenler, (1.4) eşitliğini sağlar, bununla birlikte gerçek değişkenler, $(\delta_i, \varepsilon_i)$ ilave hataları olan, (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ gözlemleri,

$$x_i = \xi_i + \delta_i \quad \text{ve} \quad y_i = \eta_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

olarak gözlenir. Burada, $\delta_1, \dots, \delta_n$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ tamamının sonlu varyansa sahip olduğu, ilişkisiz olduğu ve sıfır ortalamaya (genellik kaybı olmaksızın) sahip olduğu varsayalım:

$$\begin{aligned} E(\delta_i) &= E(\varepsilon_i) = 0, \quad \text{var}(\delta_i) = \sigma_\delta^2, \quad \text{var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2, \quad \text{her } i \text{ için,} \\ \text{cov}(\delta_i, \delta_j) &= \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad \text{her } i \neq j \text{ için ve} \\ \text{cov}(\delta_i, \varepsilon_j) &= 0, \quad \text{her } i, j \text{ için olur.} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Teorik sonuçların birçoğu, değişkenlerin bağımsız olmasını ve sadece ilişkisiz olmamasını gerektirir. Genellikle $(\delta_i, \varepsilon_i)$ hatalarının normal olarak dağıldığı varsayılır ve ilişkisizlik varsayımı otomatik olarak bir bağımsızlık varsayımı haline gelir.

δ_i ve ε_i hataları üzerindeki kısıtlayıcı varsayım, her birinin ortak ortalama ve varyansa sahip olmasıdır. Eğer bu ortak ortalamalar sıfır değilse (örneğin, sistematik hatalar varsa), β_0 ’a ilave edilebilir, bu nedenle hataların sıfır

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

ortalamaya sahip olduğu varsayımı kısıtlayıcı değildir. Bununla birlikte, böyle bir ilave, sabit terimsiz bir modeli sabit terimli bir modele dönüştürebilir.

ξ hakkındaki varsayımlara bağlı olarak (1.2)-(1.3) formunda üç farklı model vardır:

- i. ξ_i 'ler bilinmeyen sabitler ise, o halde model bir fonksiyonel model olarak adlandırılır.
- ii. ξ_i , bağımsız aynı şekilde dağılmış rasgele değişkenler ve hataları bağımsız (sadece ilişkisiz değil) ise, model yapısal model olarak adlandırılır. Yapısal model için, $E(\xi_i) = \mu$ ve $var(\xi_i) = \sigma^2$ olarak ifade edilir.
- iii. Üçüncü bir model, ultra yapısal model (Dolby, 1976), ξ_i 'nin yapısal modelde olduğu gibi bağımsız rasgele değişkenler olduğunu ancak aynı şekilde dağılmadığını, bunun yerine muhtemelen farklı μ_i ortalamalarına ve ortak σ^2 varyansına sahip olduğunu varsayar.

Ultra yapısal model, fonksiyonel ve yapısal modellerin bir genelleştirilmesidir: $\mu_1 = \dots = \mu_n$ ise, o halde ultra yapısal model, yapısal modele indirgenir; $\sigma^2 = 0$ ise, ultra yapısal model, fonksiyonel modele indirgenir.

İlk bakışta, ME model, bir regresyon modeline benzer. Bununla birlikte, regresyon, δ hatası sıfır olduğu zaman, ME modelin özel bir durumudur. Bir regresyon modeli olarak (1.2) ve (1.3) yazılmaya çalışılırsa,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + (\varepsilon - \beta_1 \delta) \equiv \beta_0 + \beta_1 x + \zeta \quad (1.7)$$

elde edilir. Bu genel regresyon modeli değildir, x rasgeledir (her ME model için) ve hata terimi ζ ile ilişkilidir, $\zeta : cov(x, \zeta) = -\beta_1 \sigma_\delta^2$. Bu kovaryans, yalnızca regresyon modeli olan $\sigma_\delta^2 = 0$ olduğu zaman veya $\beta_1 = 0$ olduğu zaman sıfırdır.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

Eğer ME model verisi üzerinde regresyon tahminleri (EKK) kullanılırsa tutarsız tahminler elde edilir.

Örnek 1.1: ξ 'lerin gözlenemediği bir duruma örnek olarak mısır verimi ve topraktaki mevcut azot arasındaki ilişkiyi düşünelim. Klasik doğrusal regresyon modelinin verim ve azot arasındaki ilişkiye uygun bir yaklaşım olduğunu varsayalım. β_1 katsayısı, topraktaki azot bir birim arttığı zaman verimdeki artışın miktarıdır. Topraktaki mevcut azotu tahmin etmek için deneysel arsanın toprağını örneklemek ve seçilen örnek üzerinde laboratuvar analizi yapmak gerekir. Örneklemin ve laboratuvar analizinin bir sonucu olarak, ξ gözlemlenemez, ancak ξ 'nin bir tahmini gözlemlenir. Bu nedenle, $x = \xi + \delta$ gözlemlenen azotu temsil eder ve δ örnekleme ve laboratuvar analizi için yapılan ölçüm hatasıdır.

Toprak azot verisinin toplanmasına bağlı olarak bazı durumlar söz konusudur. İlk olarak, toprağın farklı alanlarda, farklı seviyelerde toprak azotu üretecek şekilde deney istasyonları tarafından yönetilen deney alanlarının bir kümesi olduğunu varsayalım. Örneğin, çeşitli alanlarda gübre uygulanması ve dönüşümlerde baklagillerin farklı seviyelerde büyümesi farklı miktarlarda toprak azotu üretecektir. Böyle bir durumda, farklı alanlarda, gerçek ama bilinmeyen azot seviyeleri sabit olarak ele alınır. Burada, ξ sabit olarak seçildiği için fonksiyonel model uygun olacaktır.

Diğer yandan, eğer toprak Iowa eyaletinde çiftçinin bir tarlasının rasgele bir örnekleme olsaydı, toprak azotunun gerçek değerleri rasgele değişkenler olarak ele alınırdı. ξ rasgele olarak seçildiği için yapısal model uygun olacaktır (Fuller, 1987).

Örnek 1.2: Bir üniversitenin başarı oranının (η), bu üniversiteden mezun olan öğrencilerin ortalama işe yerleşme sürelerinin (ξ) bir fonksiyonu olarak modellendiğini varsayalım. Veri rasgele belirlenen üniversitelerden alınıyor ise, her

iki değişken de rasgele olacaktır. ξ rasgele seçildiği için yapısal model uygun olacaktır.

1.3.1. ME Modellerin Temel Özellikleri

Model (1.1) ve model (1.2)-(1.3) arasındaki görünen küçük değişiklikler bazı önemli pratik ve teorik sonuçlara sahiptir. Bunlar, ME modelleri, regresyon modellerinden ayıran önemli noktalar.

1.3.1.1. Modelin Tanımlanabilirliği

ME model ve regresyon modelleri arasındaki en önemli farklardan biri modelin tanımlanabilirliği ile ilgilidir. ME modeldeki rasgele değişkenlerin tamamını ortak olarak normal varsaymak yaygındır. Bu durumda, (1.2)-(1.3) yapısal model, tanımlı değildir. Bu, farklı parametre kümelerinin x ve y 'nin aynı ortak dağılımına neden olabileceği anlamına gelir. Bu durumda, veriden tutarlı parametreler tahmin etmek mümkün değildir, çünkü tutarlı bir tahmin edicinin limiti tek olmak zorundadır. Diğer bir deyişle $\theta_1 \neq \theta_2$ ile $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta_1$ ve $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta_2$ için mümkün değildir.

Eğer, Z dağılımı belli bir aileden $F = \{F_\theta; \theta \in \Theta\}$ gelen rasgele bir vektör ise, o halde θ vektörünün i 'inci bileşeni olan θ_i parametresi ancak ve ancak Z 'nin aynı şekilde dağılmamasına yol açarsa, i 'inci bileşenleri farklı olan $\theta \in \Theta$ 'un iki değeri yok ise tanımlanabilir. θ parametrelerinin vektörü, ancak ve ancak bileşenlerinin tamamı tanımlı ise tanımlanabilir olduğu söylenir. Model, eğer θ tanımlanabilir ise tanımlı olacağı söylenir. Bir parametrenin tanımlanabilirliği parametrenin tutarlı bir tahmin edicisini garanti etmez. Bu nedenle bazı araştırmacılar tanımlanabilirliği farklı tanımlamaktadır. Tutarlı bir tahmin ediciye sahip ise, tanımlanabilir olan bir parametre tanımlarlar.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

Literatürde, biri normal yapısal modeli tanımlanabilir kılacak olan altı yan varsayım vardır. Bunlar,

- a. $\lambda = \sigma_{\varepsilon}^2 / \sigma_{\delta}^2$ hata varyans oranının bilinmesi,
- b. ξ 'nin güvenilirlik oranı K_{ξ} 'nin bilinmesi,
- c. σ_{δ}^2 'nin bilinmesi,
- d. σ_{ε}^2 'nin bilinmesi,
- e. Her iki hata varyansı σ_{ε}^2 ve σ_{δ}^2 'nin bilinmesi veya
- f. β_0 sabit terimin bilinmesi ve $E(x) \neq 0$ olmasıdır.

(1.8)

Burada,

$$K_{\xi} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_{\delta}^2} = \frac{\sigma^2}{\text{var}(x)} \quad (1.9)$$

oranı güvenilirlik oranı olarak adlandırılır (Fuller, 1987) ve β_1 'in standart regresyon tahmininin yanlılığı ile ilişkilidir. Burada σ^2 , ξ gerçek değerinin varyansıdır.

Güvenilirlik oranı, genetikte kalıtım derecesi olarak adlandırılır. Bir bitkinin veya hayvanın gözlenen bir özelliği olan x değeri fenotip, bireyin gözlemlenmemiş gerçek genetik yapısı ξ değeri ise genotip olarak adlandırılır. Fenotip, çevresel etkinin ölçüm hatası (δ) olduğu yerde genotipin ve çevresel etkinin toplamıdır.

1.4. Tek Değişkenli Normal ME Modelde ML Tahmini

Gözlemlenebilir (x_i, y_i) 'nin ortak olarak normal dağıldığı varsayımı altında, parametrelerin ML (maximum likelihood: ML) tahminleri, tek değişkenli

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

model için elde edilebilir. Bu ortak normallik varsayımı ξ_i , δ_i ve ε_i 'nin ortak olarak normal olduğu varsayımına denktir.

1.4.1. Yapısal İlişkiler İçin ML Tahmini

(1.2)-(1.3), (1.6) denklemleri ve

$$\begin{aligned} E(x) &= E(\xi) = \mu, \\ E(y) &= E(\eta) = \mu_y = \beta_0 + \beta_1 \mu, \\ \text{var}(x) &= \sigma_x^2 = \text{var}(\xi) + \sigma_\delta^2 = \sigma^2 + \sigma_\delta^2, \\ \text{var}(y) &= \sigma_y^2 = \text{var}(\eta) + \sigma_\varepsilon^2 = \beta_1^2 \sigma^2 + \sigma_\varepsilon^2, \\ \text{cov}(x, y) &= \sigma_{xy} = \text{cov}(\xi, \eta) = \beta_1 \sigma^2, \end{aligned} \tag{1.10}$$

eşitlikleri yapısal ilişkinin tanımını verir.

Ortalamalar ve varyanslar sabit olduğu için veri, bağımsız ve aynı dağılımlıdır. Bu durum, veri bağımsız ancak aynı dağılımlı olmadığında fonksiyonel model için doğru değildir. Yapısal model için ML fonksiyonu yazılabilir ve doğrudan maksimize edilebilir veya ortalamalar, varyanslar ve kovaryanslar için bilinen ML tahminlerinden tahminleri elde etmek için ML tahminlerinin fonksiyonel değişmezlik özelliği kullanılabilir. Burada ikinci yaklaşım kullanılmıştır. İki değişkenli normal dağılımda karşılık gelen parametreler için ML tahminleri,

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i, \\ \hat{\mu}_y &= \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i, \end{aligned} \tag{1.11}$$

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR Caner İNCEKAŞ

$$\hat{\sigma}_x^2 = s_{xx} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2,$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = s_{yy} = \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2,$$

$$\hat{\sigma}_{xy} = s_{xy} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

ML tahminlerinin değişmezlik özelliklerine göre, tahmin edilen altı parametre $\hat{\mu}$, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\sigma}_\delta^2$ ve $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ için tek bir çözüm var ise ve $\hat{\sigma}^2 \geq 0$, $\hat{\sigma}_\delta^2 \geq 0$, $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \geq 0$ ise normal yapısal model için ML tahminleri aşağıdaki gibidir:

- a. $\bar{x} = \hat{\mu}$,
 - b. $\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \hat{\mu}$,
 - c. $s_{xx} = \hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_\delta^2$,
 - d. $s_{yy} = \hat{\beta}_1^2 \hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2$,
 - e. $s_{xy} = \hat{\beta}_1 \hat{\sigma}^2$
- (1.12)

$\hat{\sigma}_\delta^2$ 'nin negatif olmaması için, (1.12c) ve (1.12e)'den

$$s_{xx} - \frac{s_{xy}^2}{\hat{\beta}_1^2} \geq 0 \tag{1.13}$$

olmalıdır.

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \geq 0$ için, (1.12d) ve (1.12e)'den

$$s_{yy} - \hat{\beta}_1^2 s_{xy} \geq 0 \tag{1.14}$$

olmalıdır.

Benzer şekilde, $\hat{\sigma}^2 \geq 0$ gerekliliğinin eklenmesi ve $\sigma^2 > 0$ varsayılması ile aşağıdaki beş kısıtlama kümesi elde edilir:

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

$$\begin{aligned}
 & \text{a. } s_{xx} \geq s_{xy} / \hat{\beta}_1, \\
 & \text{b. } s_{yy} \geq \hat{\beta}_1 s_{xy}, \\
 & \text{c. } s_{xx} \geq \hat{\sigma}_\varepsilon^2, \\
 & \text{d. } s_{yy} \geq \hat{\sigma}_\varepsilon^2, \\
 & \text{e. } \text{sign}(s_{xy}) = \text{sign}(\hat{\beta}_1).
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

(1.12)'in tek bir çözümü olmadığı açıktır, çünkü altı bilinmeyen ($\hat{\mu}$, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$, $\hat{\sigma}_\varepsilon$) vardır ancak sadece beş denklem vardır. Model tanımlanabilir değildir. Bununla birlikte, (1.8)'deki altı ek varsayımdan herhangi biri ile ML çözümleri elde edilebilir (Moran, 1971). Bu, aşağıdaki alt bölümlerde yapılacaktır.

Durum (a): Hata Varyans Oranı λ Bilindiği Zaman Yapısal ML Tahmini

λ 'nın bilindiği varsayılır ise, model tanımlanabilir, yani (1.8a), tanımlanabilirlik problemini ele almanın klasik bir yöntemi olduğu varsayılır. $\sigma^2 = 0$ ise, o halde β_1 'in belirsiz olduğu kolayca görülür; öyleyse $\sigma^2 > 0$ olduğu varsayılır. (1.12) ifadesi, ikinci dereceden denklemi verir,

$$\hat{\beta}_1^2 s_{xy} + \hat{\beta}_1 (\lambda s_{xx} - s_{yy}) - \lambda s_{xy} = 0 \tag{1.16}$$

$s_{xy} = 0$ olmadığı sürece, ($\hat{\beta}_1$ 'nin belirsiz ve $\hat{\sigma}^2 = 0$ olması anlamına gelecek olan $\lambda = s_{yy}/s_{xx}$ olması durumu olmadıkça burada $\hat{\beta}_1 = 0$ olacaktır) bu ikinci dereceden denklem kökleri sıfır olmaz;

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{yy} - \lambda s_{xx} \pm \left\{ (s_{yy} - \lambda s_{xx})^2 + 4\lambda s_{xy}^2 \right\}^{1/2}}{2s_{xy}} \equiv \frac{U}{2s_{xy}}.$$

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

(1.12e)'ye göre $0 \leq \hat{\sigma}^2 = s_{xy} / \hat{\beta}_1 = 2s_{xy}^2 / U$ 'dir ve bu nedenle U , negatif olmamalıdır, U 'da pozitif işaretin alınacağı anlamına gelir:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{yy} - \lambda s_{xx} + \left\{ (s_{yy} - \lambda s_{xx})^2 + 4\lambda s_{xy}^2 \right\}^{1/2}}{2s_{xy}}. \quad (1.17)$$

Şimdi sadece (1.15)'nin sağlanıp sağlanmadığının kontrol edilmesi gerekiyor. $\hat{\sigma}^2 \geq 0$ olduğu zaten sağlandı, bu yüzden gerekli olan tek şey (1.15b)'nin sağlanmasıdır, çünkü $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \lambda \hat{\sigma}_\delta^2$ 'dir. Ancak bu koşul doğrudur, çünkü

$$\begin{aligned} 2\hat{\beta}_1 s_{xy} &= s_{yy} - \lambda s_{xx} + \sqrt{(\lambda s_{xx} - s_{yy})^2 + 4\lambda s_{xy}^2} \\ &\leq s_{yy} - \lambda s_{xx} + \sqrt{(\lambda s_{xx} - s_{yy})^2 + 4\lambda s_{xx} s_{yy}} = 2s_{yy} \end{aligned}$$

'dir. Kalan parametreler için ML çözümleri, şimdi (1.12)'den kolay bir şekilde elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \text{a. } \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \\ \text{b. } \hat{\sigma}_\delta^2 &= \frac{s_{yy} - 2\hat{\beta}_1 s_{xy} + \hat{\beta}_1^2 s_{xx}}{\lambda + \hat{\beta}_1^2}, \\ \text{c. } \hat{\sigma}^2 &= s_{xy} / \hat{\beta}_1. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Literatürde görünen, (1.17)'un bazı eşit formları vardır. Eğer $\alpha = 1/\beta_1$ ise, o halde (1.12c)-(1.12e)'den,

$$\hat{\alpha}^2 \lambda s_{xy} + \hat{\alpha} (s_{xy} - \lambda s_{xx}) - s_{xy} = 0$$

olur.

Böylece, $s_{xy} \neq 0$,

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

$$\hat{\alpha} = \frac{\lambda s_{xx} - s_{yy} + \left\{ (s_{yy} - \lambda s_{xx})^2 + 4\lambda s_{xy}^2 \right\}^{1/2}}{2\lambda s_{xy}}$$

olması şartı ile

$$\hat{\beta}_1 = \frac{2\lambda s_{xy}}{\lambda s_{xx} - s_{yy} + \left\{ (s_{yy} - \lambda s_{xx})^2 + 4\lambda s_{xy}^2 \right\}^{1/2}}$$

olur. Bir diğer form,

$$\hat{\beta}_1 = s(\lambda) + \text{sign}(s_{xy}) \left\{ s^2(\lambda) + \lambda \right\}^{1/2}, \quad s(\lambda) = \frac{s_{yy} - \lambda s_{xx}}{2s_{xy}}$$

‘dir. Doğal olarak, bu formların tamamı denktir.

Durum (b): K_ξ Güvenilirlik Oranı Bilindiği Zaman Yapısal ML Tahmini

(1.8b) ve (1.12c), negatif olmayan,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= s_{xx} K_\xi, \\ \hat{\sigma}_\delta^2 &= s_{xx} (1 - K_\xi), \end{aligned} \tag{1.19}$$

‘i verir, (1.15a) ve (1.15c)-(1.15e)’yi sağlamayı garanti eder. (1.12e)’den,

$$\hat{\beta}_1 = K_\xi^{-1} \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = K_\xi^{-1} \hat{\beta}_{1R} \tag{1.20}$$

‘dir. (1.12d)’den,

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = s_{yy} - \hat{\beta}_1 s_{xy} = s_{yy} - \frac{s_{xy}^2}{K_\xi s_{xx}} \tag{1.21}$$

olur.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR Caner İNCEKAŞ

Bunun, (1.15b)'yi sağlamak için negatif olmadığı varsayılmalıdır. Eğer negatif ise, $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 0$ alınmalı ve eğimin (β_1) ML tahmini,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{yy}}{s_{xy}} = \text{sign}(s_{xy}) \left[\frac{s_{yy}}{K_\varepsilon s_{xx}} \right]^{1/2}$$

olur. Bu, sadece ters regresyon tahmininin karşılığıdır. β_0 , kesinlikle (1.18a) eşitliği ile tahmin edilir.

Durum (c): σ_δ^2 Biliniyor iken, Yapısal ML Tahmini

(1.8c) ve (1.12) ek varsayımları, $s_{xx} > \sigma_\delta^2$ ise doğrudan doğruya,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{xy}}{s_{xx} - \sigma_\delta^2} \quad (1.22)$$

'ı verir. Bu ayrıca, (1.15c) ve (1.15e)'i sağlamayı garanti eder. (1.15d) ifadesi sağlandı, çünkü (1.12c), $\hat{\sigma}^2 > 0$ olduğunu ifade eder, ancak (1.12)'ün ML tahminlerini vermesi için (1.15b) gerekli olmalıdır, yani $s_{yy} \geq s_{xy}^2 / (s_{xx} - \sigma_\delta^2)$ olmalıdır. Bu koşullar sağlanmıyor ise, ML çözümü,

$$\hat{\beta}_1 = s_{yy} / s_{xy} \quad (1.23)$$

'dir. Bu, sadece ters regresyon tahmininin karşılığıdır. Kalan tahminler, (1.18a), (1.18c) ve

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = s_{yy} - \hat{\beta}_1 s_{xy} \quad (1.24)$$

formülleri ile verilir.

$\sigma_\delta^2 \rightarrow 0$, $\hat{\beta}_1 \rightarrow \hat{\beta}_{1R}$ olduğunu unutmayın.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR Caner İNCEKAŞ

Durum (d): σ_ε^2 Bilindiği Zaman Yapısal ML Tahmini

(1.8d) ve (1.12) ek varsayımları, $\hat{\beta}_1 = (s_{yy} - \sigma_\varepsilon^2) / s_{xy}$ ise, doğrudan doğruya,

$$\hat{\beta}_1 = (s_{yy} - \sigma_\varepsilon^2) / s_{xy} \quad (1.25)$$

'i verir. (1.15a) ve (1.15b) doğru ise, yani $s_{yy} > \sigma_\varepsilon^2$ ve $s_{xx} \geq s_{xy}^2 / (s_{yy} - \sigma_\varepsilon^2)$ ise, o zaman (1.15)'nin tamamı sağlanır ve (1.12) ML tahminlerini verir. Bu koşullar sağlanmaz ise, ML çözümü,

$$\hat{\beta}_1 = s_{xy} / s_{xx} \quad (1.26)$$

'dir. Bu sadece regresyon tahminidir. Kalan parametreler, (1.18a), (1.18c) ve

$$\hat{\sigma}_\delta^2 = s_{xx} - \frac{s_{xy}^2}{\hat{\beta}_1} \quad (1.27)$$

formülleri ile verilir. $\sigma_\varepsilon^2 \rightarrow 0$, $\hat{\beta}_1 \rightarrow 1 / \hat{\beta}_{1l}$ olduğu açıktır.

Durum (e): Hem σ_δ^2 hem de σ_ε^2 biliniyor iken Yapısal ML Tahmini

(1.8e) ek varsayımı, ters olan (1.22) ve (1.25)'in türetilmesine izin verir. Böylece (1.12), ML tahminlerinin elde edilmesinde kullanılamaz. Doğrudan, olabilirliği maksimize ederek elde edilmelidirler. Bu, Birch (1964) tarafından yapılmıştır. $\hat{\beta}_1$ 'nin (1.17) ile verildiğidir ve $s_{xx} > \sigma_\delta^2$, $s_{yy} > \sigma_\varepsilon^2$ veya $s_{xx} > (\sigma_\delta^2 - s_{xx})(\sigma_\varepsilon^2 - s_{yy})$ koşulların bir veya daha fazlasının sağlanması şartıyla:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{s_{yy} + \lambda s_{xx} - 2\sigma_\varepsilon^2 + \left[(s_{yy} - \lambda s_{xx})^2 + 4\lambda s_{xy}^2 \right]^{1/2}}{2(\lambda + \hat{\beta}_1^2)}$$

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

olur. Bu üç koşuldan hiçbirisi sağlanmıyor ise, o halde $\hat{\sigma}^2 = 0$ ve $\hat{\beta}_1$ olabilirlik teknikleri aracılığı ile tahmin edilemez. Bu model, aşırı belirlenmiştir ve diğer makul tutarlı tahminler vardır; örneğin, σ^2 'nin bir tahmini olarak,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{s_{xx} + \hat{\beta}_1 s_{xy} - \sigma_\delta^2}{1 + \hat{\beta}_1^2}$$

eşitliği verilmiştir (Kendall ve Stuart, 1979).

Durum (f): β_0 Biliniyor iken Yapısal ML Tahmini

Son olarak, β_0 biliniyor ve $E(x) \neq 0$ olduğu varsayılıyor iken (1.8f) varsayımı uygulansın. (1.12b)'den, $\bar{x} \neq 0$ olduğu varsayılarak,

$$\hat{\beta}_1 = (\bar{y} - \beta_0) / \bar{x} \quad (1.28)$$

elde edilir. Kalan parametreler, (1.18c), (1.27) ve (1.24) formülü ile verilirler. $\mu \neq 0$ olduğu için (1.28) tutarlı bir tahmin edicidir.

Diğer yan koşullar.

Eğer σ^2 'nin bilindiği tanımlanabilirlik varsayımı kullanılacak ise, (1.12e) ek varsayımı,

$$\hat{\beta}_1 = s_{xy} / \sigma^2$$

'ı verir ve (1.15c)-(1.15e) doğrudan sağlanır, çünkü σ^2 tahmin edilmiyor. (1.12c) ve (1.12d)'den,

$$\hat{\sigma}_\delta^2 = s_{xx} - \sigma^2,$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = s_{yy} - \hat{\beta}_1^2 \sigma^2 = s_{yy} - \frac{s_{xy}^2}{\sigma^2}$$

olur. Bunların ML çözümleri olması için bu son iki eşitliğin sol tarafı negatif olmamalıdır.

1.4.2. Fonksiyonel İlişkiler için ML Tahmini

(1.4)-(1.5) modelinin basit normal fonksiyonel versiyonu, ξ_i 'in sabit ancak bilinmeyen sabitler olduğu varsayılan modeldir. Böylece, $\sigma^2 = 0$ 'dır ve $n+4$ tane bilinmeyen parametre vardır: yapısal parametreler $\beta_0, \beta_1, \sigma_\delta^2, \sigma_\varepsilon^2$ ve rasgele parametreler $\xi_1, \dots, \xi_n$ 'dir.

Logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma_\delta^2, \sigma_\varepsilon^2, \xi_1, \dots, \xi_n) \propto -\frac{n}{2} \log \sigma_\delta^2 - \frac{n}{2} \log \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\delta^2} \sum (x_i - \xi_i)^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 \xi_i)^2 \quad (1.29)$$

olarak verilir.

$\beta_0, \beta_1, \sigma_\delta^2, \sigma_\varepsilon^2$ ve $\xi_1, \dots, \xi_n$ 'e göre kısmi türevleri almak ve sonuçları sıfıra eşitlemek, olabilirlik denklemlerini verir:

$$\begin{aligned} \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_i) &= 0, \\ \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_i) \hat{\xi}_i &= 0, \\ \frac{1}{n} \sum (x_i - \hat{\xi}_i)^2 &= \hat{\sigma}_\delta^2, \\ \frac{1}{n} \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_i)^2 &= \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \text{ ve} \end{aligned} \quad (1.30)$$

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

$$\frac{(x_i - \hat{\xi}_i)}{\hat{\sigma}_\delta^2} + \frac{\hat{\beta}_1(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_i)}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Buradan da çözümler,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1^2 &= \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\hat{\sigma}_\delta^2} = \frac{s_{yy}}{s_{xx}}, \\ 2\hat{\sigma}_\delta^2 &= s_{xx} - \frac{s_{xy}}{\hat{\beta}_1}, \\ 2\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= s_{yy} - \hat{\beta}_1 s_{xy}, \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \\ 2\hat{\xi}_i &= x_i + \frac{y_i - \hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1} = x_i + \bar{x} + \frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\beta}_1} \end{aligned} \tag{1.31}$$

eşitlikleri ile verilir.

Buradaki hesaplamalarda, $\hat{\beta}_1$ 'nin işaretinin s_{xy} ile aynı olarak seçildiğine dikkat edilmelidir, çünkü bu olabilirlik fonksiyonunun daha büyük değerini verir.

(1.31) çözümleri, olabilirlik denklem tahminleridir, ancak onlar olabilirlik fonksiyonunun bir maksimumunu vermez ve bu nedenle, çeşitli problemler vardır. Olabilirlik fonksiyonu aslında sınırsızdır. Bu, ilk olarak Anderson ve Rubin (1956) tarafından gösterilmiştir. Sabit terim içermeyen model için ($\beta_0 = 0$), Solari (1969), bu olabilirlik eşitliklerinin çözümünün bir eyer noktası olduğunu ve olabilirlik yüzeyinin bir maksimumunun olmadığını ifade etmiştir. Willassen (1979), sabit terimli model için aynı sonuçları elde etmiştir.

Sınırsızlığı görmek için, logaritmik olabilirlik fonksiyonunu (1.29) ele alalım.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR Caner İNCEKAŞ

$$\frac{-2}{n}L \propto \log \sigma_{\delta}^2 + \log \sigma_{\varepsilon}^2 + \frac{S_1}{\sigma_{\delta}^2} + \frac{S_2}{\sigma_{\varepsilon}^2} \quad (1.32)$$

olduğuna dikkat edilmelidir, burada,

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \xi_i)^2,$$

$$S_2 = \frac{1}{n} \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 \xi_i)^2$$

dir. (1.32),

$$-\frac{2}{n}L \propto h(\sigma_{\delta}^2, S_1) + h(\sigma_{\varepsilon}^2, S_2) \quad (1.33)$$

olarak yazılabilir, burada $h(a, b) = \log a + b/a$ 'dir. Şimdi, $a \rightarrow 0$, $h(a, 0) \rightarrow -\infty$ olsun diye $h(a, 0) = \log a$ 'dir. Böylece, bu iki fonksiyonun toplamı (1.33), eğer sağ taraftaki fonksiyonlardan herhangi biri varsa biri sınırlı kalırken diğeri $-\infty$ eğiliminde olacaktır. Şimdi,

$$\xi_i = x_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad \sigma_{\delta}^2 \rightarrow 0 \quad (1.34)$$

değerlerini düşünelim. Bu durumda $S_1 = 0$ ve $2L/n \rightarrow \infty$ olur ve L , β_1 'e atanan değerlerden bağımsız olarak sonsuza yaklaşmaya meyillidir. Böylece β_1 'in ML tahmini, burada mümkün değildir.

(1.31) tahmin edicileri de tutarlı değildir ($\hat{\xi}_i$ için tutarlılığın anlamı açık değildir).

Aşağıdaki limitlerin mevcut olduğunu varsayalım:

$$\begin{aligned} \xi^* &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi}_n, \\ s_{\xi\xi}^* &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum (\xi_i - \bar{\xi})^2 > 0, \end{aligned} \quad (1.35)$$

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

Burada, $\bar{\xi}_n = n^{-1} \sum \xi_i$ 'dir. $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_{xx} , s_{xy} ve s_{yy} 'nin sırasıyla ξ^* , $\beta_0 + \beta_1 \xi^*$, $s_{\xi\xi}^* + \sigma_\delta^2$, $\beta_1 s_{\xi\xi}^*$ ve $\beta_1^2 s_{\xi\xi}^* + \sigma_\varepsilon^2$ 'ye yakınsadığı, n 'nin sonsuza yaklaşmakta olduğu bir olasılık ile kolayca gösterilebilir. Böylece, örneğin $\hat{\beta}_1$ 'nın β_1 'e yakınsamadığı açıktır:

$$\hat{\beta}_1^2 = \frac{s_{yy}}{s_{xx}} \xrightarrow{w.p.1} \frac{\beta_1^2 s_{\xi\xi}^* + \sigma_\varepsilon^2}{s_{\xi\xi}^* + \sigma_\delta^2} \quad (n \rightarrow \infty \text{ iken})$$

Hatta $\hat{\beta}_1$ tahmininin formu sadece iki hata varyansının tahminlerinin oranıdır ve herhangi bir şekilde kovaryansı içermez.

Problem, örneklem büyüklüğü ile sayısı artan $\xi_1, \dots, \xi_n$, sıkıntı (nuisance) parametrelerinin varlığına göre kolayca izlenir. Neyman ve Scott (1948), sayı olarak sabitlenmiş diğer parametreleri yapısal parametreler olarak adlandırır iken böyle sıkıntı parametrelerini rasgele parametreler olarak adlandırmıştır. Genellikle ML tahminin, rasgele parametrelerin varlığında bozulabileceği doğrudur, bununla birlikte rasgele parametrelerin varlığında olabilirliğin maksimizasyonu kesin sınırlar altında bazen mümkündür. Elde edilen tahmin edicilerin hala tutarlı olması gerekmez, çünkü ML tahminlerinin tutarlılığının kanıtı, örneklem büyüklüğü arttıkça sabit olan bilinmeyen parametrelerin sayısının belirlenmesi gerekmektedir (Cramer, 1946). Böylece, elde edilen herhangi bir tahmin edicinin tutarlılığının duruma göre kontrol edilmesi gerekir.

Şimdi, (1.8) yan varsayımlarının her birinin altında ML tahminlerinin davranışını inceleyeceğiz.

Durum (a): λ Hata Varyans Oranı Bilindiği Zaman Fonksiyonel ML Tahmini

λ biliniyor ise, o halde logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma_\varepsilon^2, \xi_1, \dots, \xi_n) \propto \frac{n}{2} \log \lambda - n \log \sigma_\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum (x_i - \xi_i)^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 \xi_i)^2$$

olur ve (1.32),

$$\frac{2}{n} L \propto \log \lambda - 2 \log \sigma_\varepsilon^2 - \frac{\lambda S_1 + S_2}{\sigma_\varepsilon^2} \quad (1.36)$$

olur ve (1.34), artık (1.36)'u sonsuza götürmez, çünkü S_2 pozitif kalır. Bununla birlikte S_1 ve S_2 tanımlarından, $S_1 = S_2 = 0$ yapacak parametre değerlerini seçemediği açıktır. Böylece L , sonsuzluktan uzak sınırdadır. β_0 , β_1 , σ_ε^2 ve $\xi_1, \dots, \xi_n$ 'e göre kısmi türevlerini almak ve sonuçları sıfıra eşitlemek (1.30),

$$-\frac{n}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} + \frac{\lambda}{2\hat{\sigma}_\varepsilon^4} \sum (x_i - \hat{\xi}_i)^2 + \frac{1}{2\hat{\sigma}_\varepsilon^4} \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_i)^2 = 0$$

$$\lambda(x_i - \hat{\xi}_i) + \hat{\beta}_1(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.37)$$

eşitliklerini verir.

Basit hesaplamalar, (1.18a),

$$\hat{\xi}_i = \frac{\lambda x_i + \hat{\beta}_1(y_i - \hat{\beta}_0)}{\lambda + \hat{\beta}_1^2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.38)$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{2n} \left\{ \lambda \sum (x_i - \hat{\xi}_i)^2 + \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_i)^2 \right\}$$

$$= \frac{\lambda}{2n(\lambda + \hat{\beta}_1^2)} \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_i)^2 \quad (1.39)$$

eşitliklerini verir ve (1.18a)'dan

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\lambda}{2(\lambda + \hat{\beta}_1^2)} (s_{yy} - 2\hat{\beta}_1 s_{xy} + \hat{\beta}_1^2 s_{xx}) \quad (1.40)$$

olur.

(1.38), (1.37)'nin içine yerleştirilirse, (1.16)'a basitleştirilen,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\lambda + \hat{\beta}_1^2)(\lambda s_{xy} + \hat{\beta}_1 s_{yy})}{\lambda^2 s_{xx} + 2\lambda \hat{\beta}_1 s_{xy} + \hat{\beta}_1^2 s_{yy}}$$

'ı verir.

Böylece, doğrusal fonksiyonel ilişkide β_1 için olabilirlik eşitliklerinin çözümleri, hata varyans oranı λ bilindiği zaman karşılık gelen doğrusal yapısal ilişki ile aynıdır. Olasılık eşitliklerinin önceki çözümlerinin (1.17 kullanılarak) gerçekten de olabilirliğin maksimum değerine ulaştığı gösterilmiştir (Willasen, 1979; Gleser, 1981).

Eğer hata varyans oranı λ bilindiği zaman, yapısal ilişki ve fonksiyonel ilişki için ML tahmin edicileri karşılaştırılırsa, her iki ilişki için de ortak üç parametre vardır: β_0 , β_1 ve σ_ε^2 (veya σ_δ^2). İlk iki parametrenin ML tahmin edicileri, her iki durum için örtüşür, ancak σ_ε^2 hata varyansı için tahmin ediciler 1/2 oranında farklıdır. Bu, hata varyans tahmin edicilerinin en az birinin tutarsız olması gerektiği anlamına gelir. Fonksiyonel ilişki tahmin edicisinin, (1.40), $\sigma_\varepsilon^2/2$ 'e yakınsadığını kontrol etmek kolaydır. Tutarlı bir tahmin edici, Lindley (1947) tarafından önerilmiştir.

Durum (b): K_ξ Güvenilirlik Oranı Bilindiği Zaman Fonksiyonel ML Tahmini

Burada, ξ_i gerçek değerleri, rasgeleden ziyade sabittir ve güvenilirlik fonksiyonel model için iyi tanımlı değildir. Gleser (1992), bu durumda

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR Caner İNCEKAŞ

kullanılabilen daha genel bir güvenilirlik tanımını vermiştir. Sayısal yöntem yapısal model için (Bölüm 1.4.1) durum(b)'deki ile aynıdır.

Durum (c)-(d): σ_ϵ^2 veya σ_δ^2 Bilindiği Zaman Fonksiyonel ML Tahmini

İlk olarak, σ_ϵ^2 'nin bilindiğini varsayalım. Logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma_\delta^2, \xi_1, \dots, \xi_n) \propto -\frac{n}{2} \log \sigma_\delta^2 - \frac{\lambda}{2\sigma_\delta^2} \sum (x_i - \xi_i)^2 - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 \xi_i)^2$$

olarak yazılabilir. Şimdi, tekrar bunun sınırsız olduğunu ve ML tahminlerinin var olmadığını göstermek için daha önce verilen argümanlar tekrarlanabilir. Moberg ve Sundberg (1978), bu durum için olabilirlik eşitlik tahminlerini tartıştı. Olabilirlik denklemleri, eyer noktaları veya yerel maksimum olabilen çok katlı kökleri verir. Moberg ve Sundberg, kısmi olarak bu kökleri karakterize etmiştir.

Eğer σ_δ^2 'nin bilindiği varsayılıyorsa, o zaman (1.4)'i,

$$\xi_i = -\frac{\beta_0}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \eta_i$$

olarak yeniden yazabiliriz. x ve y 'nin rollerini tersine çevirirken aynı argüman uygulanır.

Böylece, ML yöntemi, ya σ_ϵ^2 ya da σ_δ^2 biliniyor ise modelin tüm parametreleri için tutarlı tahmin ediciler sağlamada başarısızdır. Bununla birlikte, tutarlı tahminler vardır. Örneğin, karşılık gelen yapısal modelden ML tahminleri kullanılabilir.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

Durum (e): Hem σ_ε^2 hem de σ_δ^2 Bilindiği Zaman Fonksiyonel ML Tahmini

Her iki hata varyansının bilindiği durum için ML tahmin edicileri, λ 'nın bilindiği durumdaki ile aynıdır, biri hariç herhangi bir hata varyansını tahmin etmek gerekmez.

Durum (f): β_0 Bilindiği Zaman Fonksiyonel ML Tahmini

β_0 'ın bilindiği durum için, tekrar (1.31)'e karşılık gelen eyer noktası sonuçları elde edilir (Solari, 1969). Olabilirlik eşitlik tahminleri,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1^2 &= \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\hat{\sigma}_\delta^2} = \frac{\tilde{s}_{yy}}{\tilde{s}_{xx}}, \\ 2\hat{\sigma}_\delta^2 &= \tilde{s}_{xx} - \frac{\tilde{s}_{xy}}{\hat{\beta}_1}, \\ 2\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \tilde{s}_{yy} - \hat{\beta}_1 \tilde{s}_{xy}, \\ 2\hat{\xi}_i &= x_i + \frac{y_i - \beta_0}{\hat{\beta}_1}\end{aligned}\tag{1.41}$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{xx} &= \frac{1}{n} \sum x_i^2, \\ \tilde{s}_{yy} &= \frac{1}{n} \sum (y_i - \beta_0)^2, \\ \tilde{s}_{xy} &= \frac{1}{n} \sum x_i (y_i - \beta_0)\end{aligned}$$

'dir. Bu tahminler, (1.31) tahminlerinin problemlerinin tamamına sahiptir; özellikle, onlar tutarlı değildir ve β_1 'in tahmini bir anlam ifade etmiyor. Bilinen

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

β_0 için yapısal ML tahminler, bu karşılık gelen fonksiyonel durum için tutarlı tahminler sağlar.

Literatürde fonksiyonel model için ML tahminlerinin varlığı ve tutarlılığı ile ilgili tartıştığımız hata varyans varsayımlarının çeşitliliği konusunda bazı karışıklıklar vardır. Hata varyans oranı bilindiği zaman, sabit terim ve eğim için ML tahmin edicileri tutarlıdır, ancak bilinmeyen hata varyansı için ML tahmin edicisi tutarlı değildir. Diğer yandan, hata varyansının biri bilindiği zaman, ML tahmini tamamıyla başarısızdır. Her iki varsayım altında, bilinen hata varyans oranı ve bilinen bir hata varyansında gözlemlerin sayısı ve parametrelerin sayısı aynıdır. İlk varsayım altında (hata varyansının tahmin edicisinin) tutarlılığın eksikliği ve ikinci varsayım altında ML tahmininin bozulması, her ikisi de rasgele parametrelerin sayısı örneklem büyüklüğü ile arttığında, ML tahmininin probleme sahip olduğu gerçeği ile ilgilidir. Bilinen hata varyans oranı durumunda, sabit terim ve eğim için tahmin edicilerin tutarlılığı iyi bir şans meselesidir.

1.4.3. Ultra Yapısal İlişkiler İçin ML Tahmini

Basit normal ultra yapısal model,

$$\xi_i \sim N(\mu_i, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n$$

ile (1.4) ve (1.5) tarafından verilmiştir. Bu model için $n+5$ bilinmeyen parametre vardır: yapısal parametreler $\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \sigma_\delta^2$ ve σ_ϵ^2 ve rasgele parametreler $\mu_1, \dots, \mu_n$ 'dir. ML tahminleri bulmak için (eğer varsa), bu $(n+5)$ boyutlu parametre uzayı üzerinde olabilirlik fonksiyonu maksimize edilmelidir. Bu parametre uzayı, $\mathcal{R}^{n+5}$ 'nin tamamı değildir ($\mathcal{R}^{n+5}:(n+5)$ boyutlu öklidyen uzayı), ancak boyutların üçünde bir sınıra sahiptir, çünkü $\sigma^2 \geq 0, \sigma_\delta^2 \geq 0$ ve $\sigma_\epsilon^2 \geq 0$ 'dir.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR Caner İNCEKAŞ

Örneklem büyüklüğü ile artan sayıdaki rasgele parametrelerin varlığı nedeniyle, ultra yapısal model için ML tahmin, fonksiyonel model için, yapısal modelden daha benzer davranır.

Durum (a): Hem λ hem de ν bilindiği zaman Ultra Yapısal Modelde ML Tahmini

Dolby (1976), λ ve $\nu = \sigma^2 / \sigma_\delta^2$ bilindiği zaman β_0 ve β_1 için ML tahminlerini elde etti. Standart ML tekniklerini kullanarak, oldukça zor bir hesaplama, genellikle tekrarlı sayısal yöntemlerle çözülmesi gereken $\hat{\beta}_1$ için beşinci dereceden bir denklem ile sonuçlanır:

$$\begin{aligned} h(\hat{\beta}_1) &= \nu s_{xx} \hat{\beta}_1^5 + (3\nu \lambda s_{xx} - \nu s_{yy}) \hat{\beta}_1^3 - 2\lambda(\nu - 1) s_{xy} \hat{\beta}_1^2 \\ &\quad + \{2\lambda^2(\nu + 1) s_{xx} - \lambda(\nu + 2) s_{xx}\} \hat{\beta}_1 - 2\lambda^2(\nu + 1) s_{xy} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Bu eşitlik, çoğu zaman iteratif sayısal metotlarla çözülmelidir. (1.42)'nin en az bir çözümü vardır, çünkü tüm tek dereceli polinomlar en az bir gerçek köke sahip olmalıdır. $\hat{\beta}_1$ 'nin çözümü verildiğinde, β_0 için tahmin (1.18a) tarafından verilir ve σ_δ^2 için tahmin,

$$\hat{\sigma}_\delta^2 = \frac{s_{yy} - 2\hat{\beta}_1 s_{xy} + \hat{\beta}_1^2 s_{xx}}{2(\lambda + \hat{\beta}_1^2)}$$

olur.

Durum (b): λ Bilindiği Zaman Ultra Yapısal Modelde ML Tahmini

Dolby (1976), sadece λ 'nın bilindiği durumda, normal ultra yapısal model için parametre uzayının iç kısmında olabilirlik eşitliğinin çözümünün olmadığını gösterdi, bununla birlikte, Gleser (1985, Theorem 1), olabilirliğin parametre kümesinin $\sigma^2 = 0$ sınırı üzerinde maksimize edildiğini gösterdi. σ^2 parametresi, ultra yapısal modelde tanımlanabilir değildir. $\sigma^2 = 0$ ultra yapısal model, sadece fonksiyonel modeldir. Böylece, ultra yapısal model için ML tahminleri sadece fonksiyonel model için ML tahminleridir. Argüman aşağıdaki gibidir.

Normal model için,

$$(x_i, y_i) \sim N\{(\mu_i, \beta_0 + \beta_1 \mu_i), \Omega\},$$

'dir. Burada

$$\Omega = \sigma_\delta^2 \begin{bmatrix} v+1 & \beta_1 v \\ \beta_1 v & \beta_1^2 v + 1 \end{bmatrix}$$

'dir.

Logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(\beta_0, \beta_1, \sigma_\delta^2, \mu, v) &\propto \\ -n \log \sigma_\delta^2 - \frac{n}{2} (\lambda + v\lambda + v\beta_1^2) - \frac{Q(\beta_0, \beta_1, \mu, v)}{2\sigma_\delta^2} \end{aligned} \quad (1.43)$$

olur. Burada $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ ve

$$\begin{aligned} Q(\beta_0, \beta_1, \mu, v) &= \\ = \frac{\lambda \sum (x_i - \mu_i)^2 + \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 \mu_i)^2 + v \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{\lambda + v\lambda + v\beta_1^2} \end{aligned}$$

'dir.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR Caner İNCEKAŞ

Eğer β_0 , β_1 , σ_δ^2 ve ν sabit ise, o halde μ üzerindeki olabilirliği maksimum yapmak, μ üzerindeki $Q(\beta_0, \beta_1, \mu, \nu)$ 'yı minimize yapmaya eşdeğerdir.

$$\hat{\mu}_i = \frac{\lambda x_i + \beta_1 (y_i - \beta_0)}{\lambda + \beta_1^2}$$

olduğunda bu minimum gerçekleşir.

Şimdi, Q 'da μ için $\hat{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ kullanılırsa ve

$$Q(\beta_0, \beta_1, \hat{\mu}, \nu) = \frac{\sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{\lambda + \beta_1^2} \quad (1.44)$$

'yi elde etmeyi kolaylaştırır.

(1.44)'de ν 'nin bağımsız ve

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma_\delta^2, \hat{\mu}, \nu) \propto -n \log \sigma_\delta^2 - \frac{n}{2} (\lambda + \nu \lambda + \nu \beta_1^2) - \frac{\sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{2 \sigma_\delta^2 (\lambda + \beta_1^2)}$$

'nin sabit β_0 , β_1 ve σ_δ^2 için ν 'de azaldığına ve dolayısıyla $\hat{\nu}=0$ 'a göre ν üzerinden maksimum yapılır.

Böylece,

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma_\delta^2, \hat{\mu}, \nu) \propto -n \log \sigma_\delta^2 - \frac{\sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{2 \sigma_\delta^2 (\lambda + \beta_1^2)}$$

'yi maksimum yapmak gerekir.

Yukarıdaki maksimizasyon probleminin çözümü, kolay bir şekilde (1.18a),

$$\hat{\mu}_i = \frac{\lambda x_i + \hat{\beta}_1 (y_i - \hat{\beta}_0)}{\lambda + \hat{\beta}_1^2}, \quad \hat{\nu} = 0,$$

$$\hat{\sigma}_{\delta}^2 = \frac{s_{yy} - 2\hat{\beta}_1 s_{xy} + \hat{\beta}_1^2 s_{xx}}{2(\lambda + \beta_1^2)}$$

eşitlikleri ve (1.17) ile bulunabilir.

σ_{δ}^2 (veya σ_{ε}^2) bilinmeyen hata varyansının tutarsızlığı kalıcıdır ve σ^2 'nin tutarlı tahmin edicisi elde edilemez (Gleser 1985).

Durum (c)-(d): σ_{δ}^2 ve/veya σ_{ε}^2 Bilindiğinde Ultra Yapısal Modelde ML Tahmini

Cheng ve Van Ness (1991), Gleser'in sonuçlarının σ_{δ}^2 ve/veya σ_{ε}^2 'nin bilindiği ve σ^2 'nin belirlenmediği duruma genişlediğini gösterdi, yani ultra yapısal model için olabilirlik fonksiyonunu maksimize etmek için sadece $\sigma^2 = 0$ durumunu düşünmemiz gerekir. Bu nedenle, ML yaklaşımı, fonksiyonel durumda olduğu gibi bozulur. Bu, tutarlı tahminlerin var olmadığı anlamına gelmez. Eğer σ_{δ}^2 ve σ_{ε}^2 biliniyorsa, o halde ML tahmin edicileri, λ 'nın bilindiği durumdaki ile aynıdır.

1.5. Denklem Hatalı Model

Denklem hatalı modeller, yaygın bir şekilde kullanılan standart ME modelin modifiye edilmesiyle oluşmuştur.

ξ ve η gerçek değerlerinin tam olarak doğrusal bir ilişki içinde olmadığı ve denklemde bir q hatasının olduğu durumda (1.4),

$$\eta_i = \beta_0 + \beta_1 \xi_i + q_i \quad (1.45)$$

haline gelir. Burada q_i , sıfır ortalama ve σ_q^2 pozitif varyanslı bağımsız rasgele değişkenlerdir ve q_i , tüm i ve j için ξ_j 'den bağımsızdır. Buna ek olarak $(\delta_i, \varepsilon_i)$

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR Caner İNCEKAŞ

ve (q_j, ξ_j) 'nin tüm i ve j için bağımsız olduğu varsayılır. (1.45) ve (1.3) modeli, denklem hatalı model veya denklem modelindeki hata olarak adlandırılır. Birçok araştırmacı,

$$x_i = \xi_i + \delta_i, \quad y_i = \beta_0 + \beta_1 \xi_i + e_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.46)$$

olarak ifade eder. Burada, e_i , bağımsız değişkenin ölçüm hatasının ve denklem hatasının bir birleşimidir, yani, $e_i = \varepsilon_i + q_i$ 'dir. Böylece,

$$\text{cov} \left(\begin{pmatrix} \delta \\ e \end{pmatrix} \right) = \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_q^2 \end{pmatrix} = \Omega + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_q^2 \end{pmatrix}$$

olur.

Bu modellerde fark, q_i açısından gerçekleşir. Uygulamada, diğer deneyler veya tekrarlardan σ_δ^2 gibi q_i hakkında bilgi elde edilemediği varsayılmaktadır. Bu, tanımlanabilirliği ve/veya tutarlı tahminleri elde etmek için kullanılan bazı ilave varsayımların artık pratik olmadığı anlamına gelir. Denklem hatalı model için kullanılan tipik varsayım, σ_q^2 'nin bilinmediği, ancak ME kovaryans matrisinin,

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_\delta^2 & \sigma_{\delta\varepsilon} \\ \sigma_{\delta\varepsilon} & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

bilindiği veya farklı bir deneyden tahmin edilmiş olduğudur.

1.5.1. Yapısal Denklem Hatalı Model

Yapısal modelde, β_1 'in ML tahmin edicisini bulmak için, ilk olarak δ ve ε 'nin bağımsız olduğu varsayılır. σ_q^2 , denklem hatasız modelde, σ_ε^2 'nin yerine kullanılan $\sigma_e^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_q^2$ 'nin içine alınabildiği için, bir anlamda yeni parametre

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

σ_q^2 , gerçekten bağımsız bir parametre değildir. Bu nedenle, (1.8)'deki koşulların bazıları β_1 'in tanımlanabilirliğine yol açar ve diğerleri bunu yapmaz. (1.12d)'nin,

$$(d')s_{yy} = \hat{\beta}_1^2 \hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \hat{\sigma}_q^2$$

olduğuna dikkat edelim.

(1.8a) ($\lambda = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\delta^2$ biliniyor) varsayımı, β_1 'in tanımlanabilirliğine yol açmaz.

(1.8b), K_ε bilinen güvenilirlik oranı durumu, (1.20) olarak bilinen, denklem

hatasız modelinde olduğu gibi aynı tahmin ediciler ile sonuçlanır. σ_ε^2 artık

tanımlanabilir değildir, ancak $\sigma_e^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_q^2$ olduğuna ve aslında $\hat{\sigma}_e^2$ 'nin

(1.21)'ün sağ tarafı olduğuna dikkat edelim. $\hat{\sigma}_e^2$ negatif ise, $\hat{\beta}_1 = 1/\hat{\beta}_{1l}$ 'dir. (1.8c)

durumu (σ_δ^2 biliniyor), denklem hatasız modelde olduğu gibi aynı ML tahmin

edicilerine sahiptir, yani, (1.22), (1.18c) ve $\hat{\sigma}_e^2$, (1.24)'teki $\hat{\sigma}_e^2$ ile değiştirilerek

elde edilir. (1.8d) varsayımı, β_1 'i tanımlanabilir yapmaz, çünkü σ_q^2

bilinmemektedir. Her iki hata varyansı σ_δ^2 ve σ_ε^2 biliniyor ise, σ_q^2 bilinmediği için

σ_e^2 'de bilinmez; bu nedenle, bu, 'aşırı tanımlanmış' bir durum değildir. β_1 'in ML

tahmin edicisinin sonucu, σ_δ^2 'nin bilindiği durum ile aynıdır. Tek fark, ilave bilgi

ile birlikte σ_e^2 artık,

$$\hat{\sigma}_q^2 = \hat{\sigma}_e^2 - \sigma_\varepsilon^2$$

'u kullanılarak denklem hata varyansı tahmin edilebilir, burada, $\hat{\sigma}_e^2 = s_{yy} - \hat{\beta}_1 s_{xy}$

'dir. Sonuç olarak, sabit terimin bilindiği durum için tahmin ediciler, denklem

hatasız model için olan ile aynıdır. Bu durumda, ne ölçüm hata varyansı σ_ε^2 , ne de

σ_q^2 , tekrar tanımlanabilir, ancak toplamaları σ_e^2 tanımlanabilir. δ ve ε ölçüm

hataları ilişkili ise, bir diğer parametre $\sigma_{\delta\varepsilon}$ eklenir.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Caner İNCEKAŞ

- i. Hem σ_{δ}^2 hem de $\sigma_{\delta\epsilon}$ 'un bilinmesine, ya da
- ii. β_0 sabit teriminin ve $E(x) \neq 0$

olduğunun bilinmesine ihtiyaç vardır. (i)'inci durum için ML tahmin edicisi $s_{xx} - \sigma_{\delta}^2 > 0$ ve $s_{yy} \geq \sigma_{\epsilon}^2 + (s_{xy} - \sigma_{\delta\epsilon})^2 / (s_{xx} - \sigma_{\delta}^2)$ olması şartıyla, kolayca elde edilir. Eğer ikinci eşitsizliği doğrulamak gerekirse, σ_{ϵ}^2 'nun bilgisinin de gerekli olduğunu unutmayalım. (ii) altında, β_1 'in tahmin edicisi, ilişkisiz modeldeki ile aynıdır, çünkü β_1 'in tahmini sadece birinci momenti gerektirir. Bununla birlikte, σ_{δ}^2 , σ_{δ}^2 , $\sigma_{\delta\epsilon}$, σ_{ϵ}^2 ne de σ_q^2 parametrelerinden geri kalanlardan hiçbiri tanımlanamaz.

1.5.2. Fonksiyonel Denklem Hatalı Model

Bu kısımda, bilinen

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_{\delta}^2 & \sigma_{\delta\epsilon} \\ \sigma_{\delta\epsilon} & \sigma_{\epsilon}^2 \end{pmatrix}$$

ile ve bilinmeyen σ_{δ}^2 ile fonksiyonel denklem hatalı modeli ele alacağız. O halde, $n+3$ bilinmeyen parametre vardır. Genellik kaybı olmaksızın $\sigma_{\delta}^2 = \sigma_{\epsilon}^2 = 1$ ve $\sigma_{\delta\epsilon} = 0$ alabiliriz. Daha sonra, logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(\beta_0, \beta_1, \sigma_q^2, \xi_1, \dots, \xi_n) \propto & -\frac{n}{2} \log(1 + \sigma_q^2) - \frac{1}{2} \sum (x_i - \xi_i)^2 \\ & - \frac{1}{2(1 + \sigma_q^2)} \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 \xi_i)^2 \end{aligned} \quad (1.47)$$

olur.

β_0 , β_1 , σ_q^2 ve ξ_i 'e göre (1.47)'nin türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
 \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_i) &= 0, \\
 \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_i) \hat{\xi}_i &= 0, \\
 \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_i)^2 &= n(1 + \hat{\sigma}_q^2)
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

ve

$$(1 + \hat{\sigma}_q^2 \hat{\beta}_1^2) \hat{\xi}_i = (1 + \hat{\sigma}_q^2) x_i + (y_i - \hat{\beta}_0) \hat{\beta}_1$$

eşitlikleri elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle,

$$\begin{aligned}
 (1 + \hat{\sigma}_q^2 + \hat{\beta}_1^2)^{-1} \left\{ \frac{1}{n} \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 \right\} \\
 = (1 + \hat{\sigma}_q^2)^{-1} (1 + \hat{\sigma}_q^2 + \hat{\beta}_1^2)
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

elde edilir. Dolayısıyla, ML yöntemi, bu durumdaki tüm parametreler için tutarlı tahmin ediciler sağlamada başarısızdır.

1. LİNEER ÖLÇÜM HATALI MODELLERE GİRİŞ VE ÖNCEKİ
ÇALIŞMALAR Caner İNCEKAŞ



2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

2.1. Giriş

Bu bölümde, vektör değerli açıklayıcı değişkenli, yani birden fazla x değişkenli, doğrusal ME modeller üzerinde durulacaktır. Bu, önceki bölümde açıklanan tek değişkenli modelin bir genişletilmesidir. Bu modeller için özellikle, parametrelerin nokta tahmini üzerine odaklanılacaktır.

Denklem hatası olan modeller ve denklem hatası olmayan modeller ayrı ayrı ele alınacaktır. Denklem hatası olmayan model,

$$\eta_i = \beta_0 + \beta' \xi_i, \quad (2.1)$$

$$x_i = \xi_i + \delta_i, \quad y_i = \eta_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

'dir. Burada β_0 , η_i , y_i ve ε_i skaler iken $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)'$ $p \times 1$ boyutlu vektör, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)'$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)'$ 'dir ve ξ_i , x_i δ_i , p boyutlu vektörlerdir. Gözlenmiş değişkenler x ve y 'dir, gözlenemeyen gerçek değerler ξ ve η 'dür ve ölçüm hataları δ ve ε 'dur. $(\delta_i', \varepsilon_i')$ ölçüm hataları, bağımsızdır ve ξ_i gerçek değerlerinden bağımsız olan aynı dağılımlı rasgele vektörlerdir. Denklem hatalı model için (2.2) ile birlikte

$$\eta_i = \beta_0 + \beta' \xi_i + q_i \quad (2.3)$$

yazılacaktır. Burada q_i , hem ölçüm hatasından hem de ξ_i gerçek değerlerinden bağımsız olan skaler değerli denklem hatasıdır. Bu, genellikle

$$x_i = \xi_i + \delta_i, \quad y_i = \beta_0 + \beta' \xi_i + e_i \quad (2.4)$$

olarak yazılır. Burada $e_i = \varepsilon_i + q_i$ 'dir.

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

Tek değişkenli modelde olduğu gibi eğer,

- i. ξ gerçek değeri, bağımsız, μ ortalama ve $\Sigma_{\xi\xi}$ kovaryans matrisi ile aynı dağılımlı rasgele vektörler ise model yapısal bir modeldir.
- ii. Eğer ξ gerçek değeri, bilinmeyen sabit bir vektör ise model fonksiyonel bir modeldir.
- iii. Ultra yapısal model, her bir ξ için, μ ortalama ve $\Sigma_{\xi\xi}$ ortak kovaryans matrisi ile ξ 'nin bağımsız olduğunu varsayar.

Bağımsız değişkenlerin bazıları hatasız ölçülebilir. Başka bir deyişle, δ vektörünün elemanlarından bazıları sıfır olabilir, böylece karşılık gelen açıklayıcı değişkenler hatasız olur. Bu durumda, $\Sigma_{\delta\delta}$ hata kovaryans matrisi tekildir. Bir hatasız bağımsız değişkene karşılık gelen $\Sigma_{\delta\delta}$ 'nın satır ve sütunu sıfır vektörleridir. Bazı araştırmacılar, β 'da β_0 sabitine yer verir ve regresyonda yaygın bir uygulama olan, sabiti hesaplamak için $x_{i0} = \xi_{i0} \equiv 1$ (tüm i 'ler için) olarak belirlenir. Bu formülasyonda x_0 hatasız bir değişkendir.

2.2. Tanımlanabilirlik

Basit yapısal modelin klasik tanımlanabilirlik karakterizasyonu, aşağıda belirtildiği gibi Bekker (1986) tarafından vektör değerli açıklayıcı değişkenli yapısal modele genişletildi. (2.4) modelini ele alalım, burada e_i 'nin denklem hatalı olup olmaması önemli değildir. (δ, e) 'nin $\Sigma_{\delta e} = 0$ kovaryansı ile normal olarak dağıldığı varsayılın, o halde ancak ve ancak bir tekil olmayan $A^{(p \times p)} = \left(a_1^{(p \times 1)}, A_2^{(p \times (p-1))} \right)$ matrisi yok ise β parametre vektörü tanımlanır, öyleki $\xi' a_1$, normal olarak dağılmıştır ve $\xi' A_2$ 'den bağımsızdır.

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

ξ 'nin normal olmayışı tanımlamayı garanti eder ve yine basit ME modelinde olduğu gibi β 'nin tutarlı tahmini, yüksek dereceli momentler aracılığıyla mümkündür (Pal 1980). Burada normal olmayan durumlar ele alınmayacaktır. Eğer ξ normal veya normale yakınsa, o halde basit ME modellerindekilere benzer olarak tanımlanabilirlik varsayımları tutarlı tahminler sağlamak için kullanılabilir. Bilindiği üzere, denklem hatalı model için tipik tanımlanabilirlik varsayımı $\Sigma_{\delta\epsilon}^{(p \times 1)} = \Sigma_{\delta\epsilon}^{(p \times 1)} (= \text{cov}(\delta, \epsilon))$ ve $\Sigma_{\delta\delta}$ 'nin bilinmesidir. Diğer yandan, denklem hatasız model için tipik tanımlanabilirlik varsayımı, bilinen Ω_0 ile $((\delta', \epsilon')) = \sigma^2 \Omega_0^{((p+1) \times (p+1))}$ olduğudur. Gleser (1992), denklem hatalı model için güvenilirlik matrisinin bilindiği durumu inceledi. Bu yaklaşım Bölüm 2.3.2'de açıklanacaktır.

Fonksiyonel model için tanımlanabilirlik, problem değildir, ancak β 'nin tutarlı tahmini problemdir. Normal fonksiyonel model, β 'nin tutarlı tahmin edicilerini bulmak için ek bilgiler gerektirir.

2.3. Denklem Hatalı Model

Bu bölümde, (2.4) denklem hatası ile vektör açıklayıcı değişken ME modeli incelenecektir. Klasik tanımlanabilirlik varsayımı kullanılacaktır, yani $\Sigma_{\delta\delta}^{(p \times p)}$ ve $\Sigma_{\delta\epsilon}^{(p \times 1)}$ biliniyor, ancak σ_e^2 bilinmiyor. Bilinen güvenilirlik matrisi durumunu da incelenecektir.

2.3.1. ML Tahmin Edici

Fonksiyonel model için (δ'_i, e_i) normal dağıldığı zaman, ML tahmin edici, tek değişkenli modelde olduğu gibi başarısızdır.

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

Yapısal model için (ξ'_i, δ'_i, e_i) normal dağıldığı zaman, (x'_i, y_i) ,

$(\mu'_x, \mu'_y)' = (\mu', \beta_0 + \beta'\mu)'$ ortalama ve

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\xi\xi} + \Sigma_{\delta\delta} & \Sigma_{\xi\xi}\beta + \Sigma_{\delta e} \\ \beta'\Sigma_{\xi\xi} + \Sigma_{e\delta} & \beta'\Sigma_{\xi\xi}\beta + \sigma_e^2 \end{bmatrix}$$

kovaryans matrisi ile normaldir. μ_x , μ_y , Σ_{xx} , Σ_{xy} ve σ_y^2 'nin ML tahmin edicilerinin, karşılık gelen örneklem ortalaması ve örneklem kovaryans matrisinin elemanları olduğu iyi bilinmektedir. ML tahmin yönteminin fonksiyonel değişmezlik özelliği,

$$\hat{\mu}_x = \bar{x},$$

$$\hat{\mu}_y = \bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}'\bar{x},$$

$$\hat{\Sigma}_{\xi\xi} + \Sigma_{\delta\delta} = S_{xx},$$

$$\hat{\Sigma}_{\xi\xi}\hat{\beta} + \Sigma_{\delta e} = S_{xy},$$

$$\hat{\beta}'\hat{\Sigma}_{\xi\xi}\hat{\beta} + \sigma_e^2 = s_{yy}$$

eşitliklerini verir.

$$S = \begin{pmatrix} S_{yy} & S_{yx} \\ S_{xy} & S_{xx} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

olsun. Burada,

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

$$(i) S_{yy} = (y - \bar{y}j_p)'(y - \bar{y}j_p), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)', j_n = (1, 1, \dots, 1)'$$

$$(ii) S_{xx} = \left(\begin{pmatrix} S_{x_i x_i} \end{pmatrix} \right), S_{x_i x_i} = (\xi_i - \bar{x}_i j_n)'(\xi_i - \bar{x}_i j_n)$$

$$(iii) S_{x_i y} = (x_i - \bar{x}_i j_n)'(y_i - \bar{y}_i j_n), S_{xy} = (S_{x_1 y}, S_{x_2 y}, \dots, S_{x_p y})'$$

$$(iv) \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{it}, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t.$$

olur. Açıkthat ki, $\frac{1}{n-1} S_{xx}$, Σ_{xx} 'in yansız bir tahmin edicisidir ve $\frac{1}{n} S_{xx}$ olasılık

olarak Σ_{xx} 'e yakınsar. $\left(\frac{1}{n} S_{xx} \xrightarrow{p} \Sigma_{xx}; n \rightarrow \infty \right)$.

Böylece, $\hat{\sigma}_e^2 \geq \Sigma_{e\delta} \Sigma_{\delta\delta}^+ \Sigma_{\delta e}$ olması şartıyla

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_x &= \bar{x}, \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}' \bar{x}, \\ \hat{\beta} &= (S_{xx} - \Sigma_{\delta\delta})^{-1} (S_{xy} - \Sigma_{\delta e}), \\ \hat{\Sigma}_{\xi\xi} &= S_{xx} - \Sigma_{\delta\delta}, \\ \hat{\sigma}_e^2 &= s_{yy} - \hat{\beta}' S_{xx} \hat{\beta} + \hat{\beta}' \Sigma_{\delta\delta} \hat{\beta} \\ &= s_{yy} - 2S_{yx} \hat{\beta} + \hat{\beta}' S_{xx} \hat{\beta} + 2\Sigma_{e\delta} \hat{\beta} - \hat{\beta}' \Sigma_{\delta\delta} \hat{\beta} \end{aligned} \tag{2.6}$$

'dir. Burada $\Sigma_{\delta\delta}^+$, $\Sigma_{\delta\delta}$ 'nın Moore Penrose tersi olarak belirlenir ve $\hat{\Sigma}_{\xi\xi} = S_{xx} - \Sigma_{\delta\delta}$ pozitif tanımlıdır. Bu şartlardan herhangi biri ihlal edilirse, maksimum parametre uzayının sınırında görülür (Fuller 1987). Yapısal modelde ML tahmin model tanımlanabilir olduğunda herhangi bir problem doğurmaz, çünkü parametre sayısı sabittir. Bununla birlikte, fonksiyonel ve ultrayapısal modelde bir problem ortaya

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL Caner İNCEKAŞ

çıkar, çünkü bilinmeyen rasgele parametrelerin sayısı ξ_i ve μ_i örneklem büyüklüğü ile artar.

ε ve q (2.4) modelinde bağımsız oldukları için $\Sigma_{\delta e} = \Sigma_{\delta \varepsilon}$ ve $\sigma_e^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_q^2$ dir. Gözlemlerin tekrarlanmasıyla hem $\Sigma_{\delta \delta}$ hem de $\Sigma_{\delta e}$ elde edilir ve ayrıca bu aynı tekrarlamalardan σ_ε^2 hakkında da bilgi edinilir. σ_ε^2 'nin ilave bilgisi ile $\hat{\sigma}_q^2 = \hat{\sigma}_e^2 - \sigma_\varepsilon^2$ ile σ_q^2 denklem hata varyansı da tahmin edilebilir.

Eğer δ ve ε bağımsız ve $\Sigma_{\delta \delta}$ biliniyor ise, parametre tahmin edicileri $\Sigma_{\delta e} = 0$ ile (2.6)'den bulunur. Bu durum, uygulamada, özellikle doğrusal olmayan vektör açıklayıcı değişkenli modelde çok yaygındır. Bu durumda, ne σ_ε^2 ne de σ_q^2 tanımlanabilir (Carroll ve ark., 1995). Yapısal model için yukarıda verilen parametrelerin ML tahmin edicileri, karşılık gelen fonksiyonel ve ultra yapısal modellerde momentler tahmin edicilerinin yöntemi olarak görülebilir. Bu tahminler, yapısal model için onlara karşılık gelen koşullar altında tutarlı olacaktır.

Örnek 2.1. Üç açıklayıcı değişken ve denklem hatası ile normal bir model üzerinde (2.6) tahminlerinin kullanımını göstermek için Matlab R2014a programında yapay bir veri kümesi üretelim.

$$a. \begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \\ \xi_{3,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_{1,36} \\ \xi_{2,36} \\ \xi_{3,36} \end{pmatrix} \text{ olmak üzere 36 bağımsız değer üretelim.}$$

$$\xi \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL
Caner İNCEKAŞ

b. $\begin{pmatrix} \delta_{1,1} \\ \delta_{2,1} \\ \delta_{3,1} \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \delta_{1,36} \\ \delta_{2,36} \\ \delta_{3,36} \\ \varepsilon_{36} \end{pmatrix}$ olmak üzere 36 bağımsız değer üretelim,

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \right) \text{ ve}$$

c. $q_1, \dots, q_{36}$ olmak üzere 36 bağımsız değer üretelim.

$$q \sim N(0, I).$$

d. Veriden,

$$\begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{1,i} + \delta_{1,i} \\ \xi_{2,i} + \delta_{2,i} \\ \xi_{3,i} + \delta_{3,i} \\ 1 + 2\xi_{1,i} + 3\xi_{2,i} + 4\xi_{3,i} + q_i + \varepsilon_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 36, \text{ elde edilir.}$$

Böylece, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$, ξ_1 , ξ_2 ve ξ_3 ilişkilidir ve δ_1 , δ_2 , δ_3 ve ε ilişkilidir. Ürettiğimiz veri çizelge 2.1’de verilmiştir.

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL
Caner İNCEKAŞ

Çizelge 2.1. $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$ ile üç açıklayıcı değişkenli 36 denklem hatalı model verisi

	x_1	x_2	x_3	y
1	-2,3104	-6.9740	-1,4982	-25
2	1,0221	0,5615	-0,3732	-1.4786
3	4,2351	-1.8800	4,6692	26,3808
4	3,7824	1,2789	1,2836	11,6008
5	0,9306	-0,3908	1,6301	4,9957
6	1,9120	1,6018	3,1850	23,3031
7	-0,6166	1,0572	-2,4344	-0,8766
8	-2.4068	-1,1321	-0.1930	-13,2157
9	0,7164	-0,3371	-2,4954	-11,2939
10	0,2669	-3,1509	-0,9269	-7,9965
11	3,7036	-3,0427	1,9705	5,0261
12	2,2051	1,1728	1,0309	11,6940
13	-4,0587	-1,5059	-1,1448	-11,8168
14	0,8837	2.2858	-3,3556	3,0621
15	0,0440	-0,3154	-0,3707	-0,3079
16	-2,5975	3,1463	0,8709	12,6763
17	-2.5170	2,8702	0,5783	9,8429
18	1.1642	-3,5294	2,3485	-7,6329
19	-1,6754	-1,0725	0,1436	-5,9662
20	-0,1639	0,4737	-2,9835	-13,8933
21	-1,0574	3,3062	-0,5582	2,4704
22	-0,1309	2,6859	-0,4650	10,6244
23	1,2241	-0,6581	-0,2324	-6,0938
24	-2,6643	1,9117	-1,4684	-4,4494

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL
Caner İNCEKAŞ

Çizelge 2.1 'in devamı

	x_1	x_2	x_3	y
25	-0.6132	0,0815	-5,6607	-16,6120
26	1,0383	-2,1693	1,8999	3,9477
27	-0,2809	-3,9307	-1,7861	-12,4009
28	-2,6618	-0,2182	-2,2439	-9,0994
29	-0,0074	1,7811	0,0032	0,2264
30	2,5999	0,9639	-2,5904	-4,2742
31	2,0536	-2,7183	0,6213	-2,3169
32	-2,0074	1,9616	-1,5766	-1,1870
33	1,9066	-2,5085	-0,7240	0,2116
34	-3,6687	0,9300	-0,8037	-9,7498
35	1,9604	0,0518	-0,7641	0,1160
36	2,6936	1,9015	3,9045	25,8071

$$\Sigma_{\delta\delta} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ ve } \Sigma_{\delta\epsilon} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

'nın bilindiği varsayıldı. Veriden,

$$\mu_x = \begin{pmatrix} 0.1362 \\ -0.1530 \\ -0.2919 \end{pmatrix}, \quad \mu_y = -0.3799,$$

$$S_{xx} = \begin{pmatrix} 4.6826 & -0.5918 & 2.0477 \\ -0.5918 & 5.3484 & -0.2957 \\ 2.0477 & -0.2957 & 4.4285 \end{pmatrix}, \quad S_{xy} = \begin{pmatrix} 13.1596 \\ 12.7438 \\ 17.8587 \end{pmatrix}$$

elde edilir ve 2.6'dan

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL
Caner İNCEKAŞ

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \begin{pmatrix} 4.6826 & -0.5918 & 2.0477 \\ -0.5918 & 5.3484 & -0.2957 \\ 2.0477 & -0.2957 & 4.4285 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 13.1596 \\ 12.7438 \\ 17.8587 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.8446 \\ 3.1874 \\ 3.8760 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve $\hat{\beta}_0 = 0.9882$ olarak tahmin edilir ve oldukça iyi bir tahmindir. Bununla birlikte, $S_{yy} = 135.2359$ ve

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= 135.2359 - \begin{pmatrix} 1.8446 \\ 3.1874 \\ 3.8760 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 4.6826 & -0.5918 & 2.0477 \\ -0.5918 & 5.3484 & -0.2957 \\ 2.0477 & -0.2957 & 4.4285 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.8446 \\ 3.1874 \\ 3.8760 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 1.8446 \\ 3.1874 \\ 3.8760 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.8446 \\ 3.1874 \\ 3.8760 \end{pmatrix} = 2.7879\end{aligned}$$

EKK tahmin yöntemi ise, gerçek parametre değerlerine ME model tahminlerinden daha az yakınlıkta olan,

$$\hat{\beta}_R = \begin{pmatrix} 1.7044 \\ 2.7345 \\ 3.3735 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \hat{\beta}_{0R} = 0.7913$$

tahminlerini verir.

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

2.3.2. Bilinen Güvenilirlik Matrisi

Bilinen güvenilirlik oranının vektör açıklayıcı değişken modellerine genişletilmesi, Gleser (1992) tarafından yapıldı. Bu genişletilme, aslında hem x hem de y vektör değerli modeller içindir. Bu sonuçlar, genel çoklu regresyon modelleri ve vektör açıklayıcı değişkenli ME modelleri arasında yararlı bir bağlantı kurmuştur.

(ξ'_i, δ'_i, e_i) 'nin ortak normal olarak dağıldığını ve $\Sigma_{\delta e} = 0$ olduğunu varsayalım. $\mu = E(\xi_i) = E(x_i)$ olsun, I_p $p \times p$ boyutlu birim matris olsun ve K_{xx} güvenilirlik matrisi,

$$K_{xx} = \Sigma_{xx}^{-1} \Sigma_{\xi\xi} = (\Sigma_{\xi\xi} + \Sigma_{\delta\delta})^{-1} \Sigma_{\xi\xi}$$

olarak tanımlansın. K_{xx} 'nin bilindiğini varsayalım, o zaman

$$E(\xi_i | x_i) = (I_p - K'_{xx})\mu + K'_{xx}x_i$$

eşitliği kullanılarak, (2.4),

$$\begin{aligned} y_i &= \beta_0 + \beta'\xi_i + e_i = \beta_0 + \beta'E(\xi_i | x_i) + \beta'\xi_i - \beta'E(\xi_i | x_i) + e_i \\ &= \beta_0^* + \beta'^* x_i + \varepsilon_i^* \end{aligned} \quad (2.7)$$

olarak yazılır, burada

$$\beta_0^* = \beta_0 + \beta'(I_p - K'_{xx})\mu,$$

$$\beta^* = K_{xx}\beta,$$

$$\varepsilon_i^* = \beta' \left\{ \xi_i - (I_p - K'_{xx})\mu - K'_{xx}x_i \right\} + e_i$$

'dir. Burada ε_i^* , sıfır ortalamaya sahiptir ve x_i ile (ve dolayısıyla bağımsız) ilişkisizdir. ε_i^* 'nin $(\omega_{ij}^*$ elemanları ile) Ω^* kovaryans matrisinin elemanları,

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \omega_{ii}^* = \beta' \Sigma_{\delta\delta} K_{xx} \beta + \sigma_e^2, \quad \omega_{ij}^* = 0, \quad (\text{tüm } i \neq j \text{ 'ler için}) \quad (2.8)$$

Şimdi (x_i', y_i) 'un ortak yoğunluğundan (2.7) denklemindeki sıkıntı parametrelerinin yoğunluk fonksiyonu ayrılabilir. $f(x_i, y_i) = g(x_i)h(\varepsilon_i^*)$ olduğunu biliyoruz. Burada f , g ve h sırasıyla (x_i, y_i) , x_i ve ε_i^* 'ın yoğunluk fonksiyonlarıdır. Böylece yapısal model için logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$L(y, X; \beta_0, \beta, \sigma_e^2) = \sum \log g(x_i) - \frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\Omega^*| - \frac{1}{2} (y - \beta_0' j - X \beta^*)' (\Omega^*)^{-1} (y - \beta_0' j - X \beta^*)$$

'dir. Burada Ω^* , (2.8)'de tanımlanmıştır ve $y = (y_1, \dots, y_n)'$, $j = (1, \dots, 1)'$, $X = (x_1, \dots, x_n)'$ 'dir. Logaritmik olabilirlik fonksiyonunun bu açık formu oldukça kullanışlıdır (Cheng ve Tsai, 1996).

Yukarıdaki argümanı ele almanın bir başka yolu,

$$f(x_i, y_i) = f(y_i | x_i; \beta_0^*, \beta^*, \sigma_{\varepsilon}^2) g(x_i; \mu, \Sigma_{\xi\xi}, \Sigma_{\delta\delta})$$

yazmak ve modeli aşağıdaki biçimde ele almaktır:

$$y_i = E(y_i | x_i) + \varepsilon_i^*$$

$$E(y_i | x_i) = \beta_0^* + \beta^{*'} x_i \text{ olduğunu görmek kolaydır.}$$

Bizim temel problemimiz, $\Sigma_{\delta\delta}$ 'nin bilindiği varsayımı altında β 'nın tahminidir.

Gleser (1992), β_0^* , β^* ve $\sigma_{\varepsilon}^{*2}$ 'nin ML tahmin edicilerinin, EKK tahmin edicisi olduğunu göstermiştir. Yani,

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

$$\hat{\sigma}_e^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^{*2} - \hat{\beta}_n^{*'} K_{xx}^{-1} \Sigma_{\delta\delta} \hat{\beta}_n^* \geq 0$$

olması şartıyla

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{0n}^* &= \bar{y} - \hat{\beta}_n^{*'} \bar{x}, \\ \hat{\beta}_n^* &= S_{xx}^{-1} S_{xy} \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^{*2} &= n^{-1} \sum \hat{\varepsilon}^{*2} = n^{-1} \sum \left(y_i - \hat{\beta}_{0n}^* - \hat{\beta}_n^{*'} x_i \right)^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Burada $\hat{\sigma}_\varepsilon^{*2}$, (2.7) regresyon modelindeki (serbestlik dereceleri için herhangi bir düzenleme olmaksızın), hata varyansının tahmin edicisidir. β_0 , β ve σ_e^2 'nin ML edicileri,

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{0n} &= \hat{\beta}_0^* - \tilde{\beta}_n' (I_p - K'_{xx}) \hat{\mu}, \\ \tilde{\beta}_n &= K_{xx}^{-1} \hat{\beta}_n^* \text{ ve} \\ \hat{\sigma}_e^2 &= n^{-1} \sum \hat{\varepsilon}_i^{*2} - \tilde{\beta}_n' \Sigma_{\delta\delta} K_{xx} \tilde{\beta}_n \end{aligned} \quad (2.10)$$

'dır. Burada,

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{x} = n^{-1} \sum x_i, \\ \hat{\varepsilon}_i^* &= y_i - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_n^{*'} x_i \end{aligned} \quad (2.11)$$

olur.

Gleser'in sonuçları, bölüm 2.3.1'deki gibi ($\Sigma_{\delta e} = 0$ varsayımı altında) K_{xx} 'in bilinmediği fakat $\Sigma_{\delta\delta}$ 'nın bilindiği durum için de uygulanabilir. Eğer K_{xx} bilinmiyorsa,

$$\hat{K}_{xx} = S_{xx}^{-1} \hat{\Sigma}_{\xi\xi} = S_{xx}^{-1} (S_{xx} - n \Sigma_{\delta\delta}) \quad (2.12)$$

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

aracılığı ile tahmin edilebilir. $n \rightarrow \infty$ iken $\hat{K}_{xx}$ olasılıkla K_{xx} 'e yakınsar. ($\hat{K}_{xx} \xrightarrow{P} K_{xx}$). Böylece β_0 , β ve σ_e^2 ML tahmin edicileri,

$$\tilde{\beta}_{0n} = \hat{\beta}_0^* - \tilde{\beta}_n' (I_p - \hat{K}_{xx}') \hat{\mu},$$

$$\tilde{\beta}_n = \hat{K}_{xx}^{-1} \hat{\beta}_n^* \text{ ve}$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = n^{-1} \sum \hat{\varepsilon}_i^{*2} - \tilde{\beta}_n' \Sigma_{\delta\delta} \hat{K}_{xx} \tilde{\beta}_n$$

olur. Burada $\hat{\mu}$ ve $\hat{\varepsilon}_i^*$, (2.11)'da ve $\hat{K}_{xx}$ (2.12)'de tanımlandığı gibidir. Buna ek olarak $\tilde{\beta}_{0n}$ ve $\tilde{\beta}_n$ 'nın açık formları, bölüm 2.3.1'deki ile aynı tahminler olan,

$$\hat{\sigma}_e^2 = s_{yy} - S_{yx} (S_{xx} - \Sigma_{\delta\delta})^{-1} S_{xy} \geq 0$$

olması şartıyla,

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{0n} &= \bar{y} - \tilde{\beta}_n' \bar{x}, \\ \tilde{\beta}_n &= (S_{xx} - n\Sigma_{\delta\delta})^{-1} S_{xy} \end{aligned} \tag{2.13}$$

olur. Yukarıdaki kısıtlamanın, $S_{xx} - \Sigma_{\delta\delta}$ 'nin pozitif tanımlı olmasını ve (2.6)'de $\hat{\sigma}_e^2$ 'nin negatif olmamasını gerektirmesi ile aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

$n \rightarrow \infty$ iken,

(i) $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n^* - \beta^*)$, 0 ortalamalı ve $\sigma_e^{*2} \Sigma_{xx}^{-1}$ kovaryans matrisli normal dağılıma sahiptir.

(ii) $\sqrt{n}(\tilde{\beta}_n - \beta)$, 0 ortalamalı, $\sigma_e^{*2} C^{-1}$ kovaryans matrisli normal dağılıma sahiptir. C ise,

$$C = K_{xx}' \Sigma_{xx} K_{xx} \tag{2.14}$$

olarak tanımlanır.

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

C 'nin tutarlı tahmin edicisi C_n 'ise,

$$C_n = \hat{K}'_{xx} \hat{\Sigma}_{xx} \hat{K}_{xx} = (S_{xx} - n\Sigma_{\delta\delta})' S_{xx}^{-1} (S_{xx} - n\Sigma_{\delta\delta}) \quad (2.15)$$

olarak verilir (Fuller, 1987).

2.4. Denklem Hatası Olmayan Model İçin ML Tahmini

Bu bölümde, denklem hatasız vektör açıklayıcı değişkenli ME modelinin ML tahminini inceleyeceğiz. $\delta_1, \dots, \delta_p$ ve ε ölçüm hataları bağımsız ise,

tanımlanabilirlik varsayımı tek değişkenli modeldeki $\lambda = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\delta^2}$ oranının bilinmesi durumunun, vektör açıklayıcı değişkenli modele genişletilmesidir.

2.4.1. İlişkisiz Hatalar İle Fonksiyonel Model

Bu kısımda, $\zeta_0 \equiv 1$ 'i tanımlamak ve (2.1) denklem hatasız modeli simetrik formda yazmak uygundur. Simetrik form:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \zeta_j = 0 \quad (2.16)$$

'dır. Burada,

$$\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_k)' = (1, \xi_1, \dots, \xi_p, \eta)' \text{ ve}$$

$$(\beta_0, \beta') = -(\alpha_0 / \alpha_k, \dots, \alpha_p / \alpha_k)$$

'dır. Bu model, herhangi bir sıfır olmayan sabit ile (2.16) çarpılabildiği için tek olarak tanımlanmamıştır. Modeli tek olarak tanımlamak için $\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 = 1$ koşulu uygun olacaktır. α_0 'ın bu koşulda (Zamar, 1989) olmadığına dikkat edilmelidir. (2.16) denklemi,

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

$$\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{pi} \\ x_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{1i} + \delta_{1i} \\ \zeta_{2i} + \delta_{2i} \\ \vdots \\ \zeta_{pi} + \delta_{pi} \\ \zeta_{ki} + \delta_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{1i} + \delta_{1i} \\ \xi_{2i} + \delta_{2i} \\ \vdots \\ \xi_{pi} + \delta_{pi} \\ \eta_i + \varepsilon_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

verisinin k boyutlu uzayında bir hiper düzlemi tanımlar. ζ_0 dışında, gerçek değerler (2.2)'de tanımlandığı gibi hata ile gözlenir. ML için $\delta_1, \dots, \delta_k$ hatalarının, her birinin bağımsız ve sıfır ortalama ile normal olduğu varsayılır. Burada kullanılan tanımlanabilirlik varsayımları, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 'nin bilinmesi ve

$$\frac{\sigma_{\delta_1}^2}{\lambda_1} = \frac{\sigma_{\delta_2}^2}{\lambda_2} = \dots = \frac{\sigma_{\delta_k}^2}{\lambda_k}$$

olmasıdır. Tekrar gözlenebilenler, $x_1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, x_k/\sqrt{\lambda_k}$ göz önünde tutularak standartlaştırılabilir ve λ 'ların tamamının 1'e eşit olduğu ve hataların tamamının aynı varyans σ_δ^2 'ya sahip olduğu varsayılabilir. Logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$\log L \propto -nk \log \sigma_\delta - \frac{1}{2\sigma_\delta^2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ji} - \zeta_{ji})^2. \quad (2.17)$$

Maksimize edilen logaritmik olabilirlik fonksiyonu, (2.17'deki çift toplamı minumuma indirmeye eşittir ve bu, veri noktasından hiper düzleme (2.16) olan dik uzaklıkların karelerinin toplamını minimize etmeye eşdeğerdir. Ayrıca, bu uzaklığı minimize eden tahmin edilmiş hiper düzlem, örneklem ortalamasından geçmelidir, yani,

$$\sum_{j=0}^k \hat{\alpha}_j \bar{x}_j = 0 \quad (2.18)$$

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

‘dir. Burada $\bar{x}_j = \sum_{i=1}^n x_{ji} / n$ ’dir. Minimize edilen hiper düzlemi bulmak, bilinen bir matematik problemidir. (2.18) kullanılarak, bir x_i noktasından tahmin edilmiş hiper düzleme karesel uzaklık,

$$\frac{\left(\sum_{j=0}^k \hat{\alpha}_j x_{ji}\right)^2}{\sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j^2} = \left(\sum_{j=0}^k \hat{\alpha}_j x_{ji}\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j \dot{x}_{ji}\right)^2$$

‘dir. Burada $\dot{x}_{ji} = x_{ji} - \bar{x}_j$, $j = 1, \dots, k$, örneklem ortalamalarından ölçülmüş değişkenlerdir. Bu yüzden, minimize edilecek olan miktar, $\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 = 1$ kısıtına tabi olan

$$W = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \dot{x}_{ji} \right)^2 \quad (2.19)$$

‘dir. Bu Lagrange çarpanları kullanılarak çözülebilir.

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \dot{x}_{ji} \right)^2 + \tau \left(1 - \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \right)$$

minimize edilmelidir. Burada τ , Lagrange çarpanıdır. α_j ’ye göre türev alınırsa,

$$\sum_{i=1}^n \dot{x}_{li} \left(\sum_{j=0}^k \hat{\alpha}_j \dot{x}_{ji} \right) = \tau \hat{\alpha}_l, \quad l = 1, \dots, k \quad (2.20)$$

eşitliği bulunur. $c_{lj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{x}_{li} \dot{x}_{ji}$, l’inci ve j’inci değişkenler arasındaki örneklem kovaryansı olsun. O halde denklemler,

$$\sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j c_{lj} - \frac{\tau}{n} \hat{\alpha}_l = 0, \quad l = 1, \dots, k \quad (2.21)$$

olur. Bu denklemlerdeki α_j ’lerin çıkartılması, τ için aşağıdaki determinant eşitliğini verir:

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \frac{\tau}{n} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1k} \\ c_{12} & c_{22} - \frac{\tau}{n} & c_{23} & \cdots & c_{2k} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} - \frac{\tau}{n} & \cdots & c_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1k} & c_{2k} & c_{3k} & \cdots & c_{kk} - \frac{\tau}{n} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

Bu, τ 'de k dereceli bir polinomdur. $\{c_{ij}\}$ matrisi negatif olmayan tanımlı olduğu için bu eşitlikteki k kökün tamamı gerçeldir. İstenilen kök en küçüğüdür. Bunu görmek için $\hat{\alpha}_l$ ile (2.20)'da l 'inci denklem çarpılır ve son k denklem eklenir, daha sonra bu toplamların sol tarafı (2.19) olur. Bu nedenle, minimize edilecek olan $W = \tau \sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j^2$ 'dir.

τ elde edilince $\hat{\alpha}_j$ için (2.21), lineer denklem sistemini çözebilir ve orijinal formüldeki $\hat{\alpha}_0$, (2.18)'den bulunur.

Örnek 2.2. Denklem hatasız normal fonksiyonel bir model üzerinde bu kısımdaki yöntemlerin kullanımını göstermek için Matlab R2014a programını kullanarak oluşturduğumuz yapay veri kümesini ele alalım. Dikkat edilmelidir ki modelimiz denklem hatasız bir modeldir.

$$\text{a. } \begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \\ \xi_{3,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_{1,36} \\ \xi_{2,36} \\ \xi_{3,36} \end{pmatrix} \text{ olmak üzere 36 sabit değer üretelim.}$$

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL
Caner İNCEKAŞ

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,j} \\ \xi_{2,j} \\ \xi_{3,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2(1 + (j)(\text{mod } 6)) \\ -6 + \frac{5}{3}(1 + (j-1)(\text{mod } 6)) \\ -5 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1 + (j-1)(\text{mod } 6)) \end{pmatrix},$$

Burada $(j)(\text{mod } 6)$ ve $(j-1)(\text{mod } 6)$, sırasıyla (j) ve $(j-1)$ 'in modüler aritmetik de mod 6'sıdır. Örneğin,

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \\ \xi_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4,33 \\ -4,83 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{1,18} \\ \xi_{2,18} \\ \xi_{3,18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} \xi_{1,36} \\ \xi_{2,36} \\ \xi_{3,36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b. $\begin{pmatrix} \delta_{1,1} \\ \delta_{2,1} \\ \delta_{3,1} \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \delta_{1,36} \\ \delta_{2,36} \\ \delta_{3,36} \\ \varepsilon_{36} \end{pmatrix}$ olmak üzere 36 bağımsız değer üretelim,

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ ve}$$

c. Veriden,

$$\begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{1,i} + \delta_{1,i} \\ \xi_{2,i} + \delta_{2,i} \\ \xi_{3,i} + \delta_{3,i} \\ 1 + 2\xi_{1,i} + 3\xi_{2,i} + 4\xi_{3,i} + \varepsilon_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 36, \text{ elde edilir.}$$

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

Böylece, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$ 'dür ve δ_1 , δ_2 , δ_3 ve ε bağımsızdır. Ürettiğimiz veri çizelge 2.2'de verilmiştir. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 'in bilindiğini varsayıldı. Veriden,

$$\bar{x}_1 = 4.0142, \quad \bar{x}_2 = -0.1841, \quad \bar{x}_3 = -4.6050, \quad \bar{x}_4 = -9.0141$$

ortalamalarını elde ederiz.

Çizelge 2.2. Üç açıklayıcı değişkenli 36 fonksiyonel model verisi $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$

	x_1	x_2	x_3	y
1	-0,0058	-7,2869	-4,1665	-29,7559
2	3,0941	-2,2742	-5,2613	-18,4874
3	7,2159	-2,4122	-2,1892	-10,2782
4	8,1032	0,8233	-4,3275	1,8954
5	9,5888	2,0851	-4,0460	8,9841
6	-0,3554	5,0029	-2,6665	-4,1192
7	0,9526	-3,3499	-5,9284	-30,0714
8	1,7451	-3,3368	-4,6986	-19,5211
9	5,3154	-1,2475	-6,2740	-9,8789
10	7,3656	-1,3102	-4,0350	-0,9898
11	10,1246	0,6300	-2,8438	11,3901
12	-0,2772	4,3422	-3,8194	-3,9259
13	-0,5668	-3,9240	-5,1800	-30,6417
14	4,1591	-1,7014	-6,3831	-21,6954
15	5,2355	-1,2822	-4,5318	-10,6040
16	5,8603	2,5137	-3,3346	-0,7833
17	7,8923	4,3508	-3,7209	8,9067
18	-1,1155	1,6406	-2,9818	-3,0268

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL
Caner İNCEKAŞ

Çizelge 2.2'nin devamı

	x_1	x_2	x_3	y
19	0,0899	-4,4683	-4,5809	-29,1285
20	2,7453	-2,9971	-6,2268	-19,1781
21	4,5431	0,6481	-5,1820	-10,2030
22	7,2267	2,1561	-4,6298	-1,1597
23	9,2942	1,6916	-4,7383	10,2325
24	-2,0649	4,9097	-4,7096	-5,7559
25	0,4774	-3,9337	-7,0936	-28,7226
26	3,5435	-3,4848	-4,1159	-19,7355
27	4,8703	-2,3241	-5,2706	-10,0304
28	5,9556	1,1740	-4,9815	-1,1438
29	8,5901	2,9705	-4,6713	10,4823
30	-0,5291	4,3616	-5,5303	-2,6551
31	1,7006	-5,5402	-4,8475	-28,4106
32	1,9607	-1,0213	-5,5862	-19,5661
33	6,5285	-2,3479	-4,7609	-11,6269
34	5,2386	1,2306	-4,6423	-0,5397
35	9,4857	2,3814	-5,0412	10,7321
36	0,5222	4,7060	-2,7832	-5,4961

Veri matrisinin uygun sütunundaki her bir elemandan bu ortalamaları çıkartır isek, $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ ve $\dot{x}_3$ için veri matrisini elde ederiz. Bu merkezleştirilmiş verinin,

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

$$\{c_{ij}\} = \begin{bmatrix} 13.0110 & 1.9289 & 0.5638 & 31.1897 \\ 1.9289 & 10.7291 & 1.3656 & 34.0124 \\ 0.5638 & 1.3656 & 1.2329 & 6.3772 \\ 31.1897 & 34.0124 & 6.3772 & 171.7978 \end{bmatrix}$$

kovaryans matrisini hesaplarız. Bu matris 0.7478, 1.2528, 10.2559 ve 184.5143 özdeğerlerine sahiptir. (2.21) denklemi,

$$\sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j c_{lj} - \tau \hat{\alpha}_l = 0, \quad l = 1, \dots, k$$

olur. Yani,

$$\begin{aligned} 13.0110\hat{\alpha}_1 + 1.9289\hat{\alpha}_2 + 0.5638\hat{\alpha}_3 + 31.1897\hat{\alpha}_4 - 0.7478\hat{\alpha}_1 &= 0, \\ 1.9289\hat{\alpha}_1 + 10.7291\hat{\alpha}_2 + 1.3656\hat{\alpha}_3 + 34.0124\hat{\alpha}_4 - 0.7478\hat{\alpha}_2 &= 0, \\ 0.5638\hat{\alpha}_1 + 1.3656\hat{\alpha}_2 + 1.2329\hat{\alpha}_3 + 6.3772\hat{\alpha}_4 - 0.7478\hat{\alpha}_3 &= 0, \\ 31.1897\hat{\alpha}_1 + 34.0124\hat{\alpha}_2 + 6.3772\hat{\alpha}_3 + 171.7978\hat{\alpha}_4 - 0.7478\hat{\alpha}_4 &= 0, \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri çözersek,

$$\hat{\beta}_1 = -\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_4} = 1.9746, \quad \hat{\beta}_2 = -\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_4} = 2.5069 \quad \text{ve} \quad \hat{\beta}_3 = -\frac{\hat{\alpha}_3}{\hat{\alpha}_4} = 3.7941$$

beta parametrelerini tahmin ederiz ve son olarak da $\hat{\beta}_0 = 0.9928$ 'ı elde ederiz.

Bunlar oldukça iyi tahminlerdir.

EKK tahmin yöntemi ise, gerçek parametre değerlerine ME model tahminlerinden daha az yakınlıktaki,

$$\hat{\beta}_R = \begin{pmatrix} 1.7572 \\ 2.4418 \\ 3.2992 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \hat{\beta}_{0R} = -0.4255$$

tahminlerini verir.

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

2.4.2. İlişkili Hatalar İle Fonksiyonel ve Yapısal Modeller

Yukarıdaki sonuçlar, genel bir hata kovaryans yapısına genelleştirilebilir (Fuller, 1987). Doğrusal ME modelleri için sabit terimi ayrı tahmin etmek genellikle uygundur. Notasyon biraz değiştirilip ve simetrik formdaki denklem hatasız model yazılırsa,

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \gamma_{ji} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Burada $k = p + 1$, $\gamma_i = (\gamma_{0i}, \dots, \gamma_{ki})' = (\eta_i, 1, \xi_{1i}, \dots, \xi_{pi})'$, $\alpha = (1, -\beta_0, \beta')'$ ve $z_i = (y_i, 1, x_{1i}, \dots, x_{pi})'$ 'dir. Hata kovaryans yapısının skaler bir katsayı kadar bilindiği varsayılır. Yani,

$$\begin{aligned} \Omega_{hata}^{((k+1) \times (k+1))} &= \text{var}((\varepsilon, 1, \delta')) = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \Sigma_{\varepsilon\delta} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}' \\ \Sigma_{\delta\varepsilon} & \mathbf{0} & \Sigma_{\delta\delta} \end{bmatrix} \\ &= \sigma_\delta^2 \Omega_0 = \sigma_\delta^2 \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \Sigma_{\varepsilon\delta} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}' \\ \Sigma_{\delta\varepsilon} & \mathbf{0} & \Sigma_{\delta\delta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

'dır ve Ω_0 biliniyor. Burada, hata varyans oranı λ 'nın 1'e eşit olduğu varsayılmaktadır. ML için hataların sıfır ortalama ile tekrar normal olduğu varsayılır. O halde fonksiyonel model için ML tahmin edicileri, matris tersinin var olması şartıyla,

$$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}')' = \left(M_{xx} - \hat{\tau} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\delta\delta} \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(M_{xy} - \hat{\tau} (0, \Sigma_{\varepsilon\delta})' \right) \quad (2.23)$$

ve

$$\hat{\sigma}_\delta^2 = \hat{\tau} / (p + 1)$$

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

olur. Burada,

$$M_{xx}^{((p+1) \times (p+1))} = \frac{1}{n} \sum (1, x_i')' (1, x_i'),$$

$$M_{xy}^{((p+1) \times 1)} = \frac{1}{n} \sum (1, x_i')' y_i,$$

dir ve $\hat{\tau}$, $|M_{zz} - \tau \Omega_0| = 0$ 'nin en küçük köküdür ve $M_{zz} = n^{-1} \sum z_i' z_i$ 'dir. γ_i 'nin, $i = 1, \dots, n$ ML tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_i = z_i - & \left((y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}' x_i) \left[(1, -\hat{\beta}_0, -\hat{\beta}') \Omega_0 (1, -\hat{\beta}_0, -\hat{\beta}')' \right] \right. \\ & \left. \times (1, -\hat{\beta}_0, -\hat{\beta}') \Omega_0 \right) \end{aligned}$$

'dir.

σ_δ^2 'nin tahmini tutarlı değildir: $n \rightarrow \infty$ iken $\hat{\sigma}_\delta^2 \rightarrow \frac{1}{p+1} \sigma_\delta^2$. Bazı

araştırmacılar, $\tilde{\sigma}_\delta^2 = n\hat{\tau}/(n-p-1)$ tahmininin bir serbestlik derecesi tartışmasına dayandığını öne sürmüşlerdir.

Normal yapısal model için β_0 ve β 'nın ML tahmin edicileri (2.23)'dür ve $\hat{\sigma}_\delta^2 = \hat{\tau}$ 'dir. Bu tahmin ediciler tutarlıdır (Chan ve Mak, 1984; Amemiya ve Fuller, 1984). (2.23)'teki tahmin ediciler, ultra yapısal model için de tutarlıdır.

Yukarıdaki formülasyonda, $\Sigma_{\delta\delta}$ 'nin tekil olduğu anlamına gelen, ξ_j 'nin bazılarının hatasız ölçülmesine izin verildiğine dikkat edilmelidir. Bu durumda, genel kabul görmüş bir ML tanımı bulunmadığı görülmektedir.

Örnek 2.3. Denklem hatasız normal fonksiyonel bir model üzerinde kısım 2.4.2'deki yöntemin kullanımını göstermek için Matlab R2014a programını kullanarak Örnek 2.2'de kullandığımız varsayımlara benzer varsayımlar ile

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

oluşturduğumuz yapay veri kümesini ele alalım. Bu yöntem, bir önceki alt bölümde verilen daha özel tahminlerin genel durumları olarak elde edilebilecek tahminleri vermektedir.

a. $\begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \\ \xi_{3,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_{1,36} \\ \xi_{2,36} \\ \xi_{3,36} \end{pmatrix}$ olmak üzere 36 sabit değer üretelim.

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,j} \\ \xi_{2,j} \\ \xi_{3,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 0.9(1 + (j)(\text{mod } 6)) \\ -6 + \frac{4}{3}(1 + (j-1)(\text{mod } 6)) \\ -2 + \left(\frac{4}{3}\right)(1 + (j-1)(\text{mod } 6)) \end{pmatrix},$$

Burada $(j)(\text{mod } 6)$ ve $(j-1)(\text{mod } 6)$, sırasıyla (j) ve $(j-1)$ 'in modüler aritmetikte mod 6'sıdır. Örneğin,

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \\ \xi_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,2 \\ -4,66 \\ -0,66 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{1,18} \\ \xi_{2,18} \\ \xi_{3,18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} \xi_{1,36} \\ \xi_{2,36} \\ \xi_{3,36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b. $\begin{pmatrix} \delta_{1,1} \\ \delta_{2,1} \\ \delta_{3,1} \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \delta_{1,36} \\ \delta_{2,36} \\ \delta_{3,36} \\ \varepsilon_{36} \end{pmatrix}$ olmak üzere 36 bağımsız değer üretelim,

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL
Caner İNCEKAŞ

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \right) \text{ ve}$$

c. Veriden,

$$\begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{1,i} + \delta_{1,i} \\ \xi_{2,i} + \delta_{2,i} \\ \xi_{3,i} + \delta_{3,i} \\ 1 + 2\xi_{1,i} + 3\xi_{2,i} + 4\xi_{3,i} + \varepsilon_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 36, \text{ elde edilir.}$$

Böylece, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$ 'dür ve δ_1 , δ_2 , δ_3 ve ε ilişkilidir.

Ürettiğimiz veri çizelge 2.3'te verilmiştir.

Çizelge 2.3. Üç açıklayıcı değişkenli ve ilişkili hatalar ile 36 fonksiyonel model verisi $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$

	x_1	x_2	x_3	y
1	-4,9112	-6,8552	-0,6944	-25,4642
2	-3,2335	-3,0481	0,3191	-12,5329
3	-0,8331	-2,6650	3,7289	-0,7666
4	-0,7199	-0,4021	3,5115	10,6108
5	-0,1837	0,5780	4,8037	20,5477
6	-4,6442	2,7860	7,1179	22,1090
7	-4,2335	-3,9921	-1,3079	-24,3162
8	-4,1873	-3,9751	0,3900	-13,6580
9	-2,1770	-2,1269	0,8041	-2,2304
10	-1,2415	-1,9846	3,3605	8,6690

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL
Caner İNCEKAŞ

Çizelge 2.3'ün devamı

11	0.1952	-0,3544	5,5327	21,4364
12	-4,5889	2,3393	6,2651	21,6412
13	-5,3079	-4,6047	-1,0778	-25,1334
14	-2,4804	-2,5006	-0,2305	-13,2956
15	-2,2334	-2,1622	1,9790	-2,0113
16	-2,3059	0,4518	4,0677	9,6299
17	-1,3832	1,9078	5,0475	20,6819
18	-5,1817	0,3490	6,4068	20,8988
19	-4,8336	-4,8889	-0,6385	-24,3564
20	-3,4801	-3,5983	-0,4732	-13,4474
21	-2,7231	-0,9228	1,6598	-1,6912
22	-1,3397	0,3973	3,3348	9,5793
23	-0,3920	0,2637	4,2437	20,5058
24	-5,8530	2,4797	5,4697	20,2000
25	-4,5695	-4,4637	-2,2385	-24,6052
26	-2,9157	-3,8267	1,0248	-12,8496
27	-2,4917	-2,9357	1,3023	-2,5496
28	-2,2385	-0,4628	2,8014	8,6023
29	-0,8898	1,0501	4,3375	20,7542
30	-4,7670	2,3171	5,0630	21,4698
31	-3,7046	-5,4037	-0,7166	-23,8797
32	-4,0349	-2,3403	0,0815	-13,0395
33	-1,3192	-2,7177	1,8823	-2,2448
34	-2,7455	-0,5240	2,9383	8,6212
35	-0,2566	0,7686	4,1435	20,9062
36	-4,0236	2,7044	7,1280	21,8789

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

Burada, hata varyans oranı $\lambda = 1$ olarak bilindiği varsayıldı. Veriden,

$$M_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & -2.8400 & -1.3434 & 2.5380 \\ -2.8400 & 10.9018 & 4.6585 & -6.1315 \\ -1.3434 & 4.6585 & 8.2702 & 2.6116 \\ 2.5380 & -6.1315 & 2.6116 & 13.2107 \end{bmatrix}, M_{xy} = \begin{bmatrix} 1.9631 \\ 5.4564 \\ 38.0307 \\ 47.3750 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmıştır ve $z_i = (y_i, 1, x_{1i}, \dots, x_{pi})'$ 'nin yardımıyla,

$$M_{zz} = \begin{bmatrix} 293.3489 & 1.9631 & 5.4564 & 38.0307 & 47.3750 \\ 1.9631 & 1 & -2.8400 & -1.3434 & 2.5380 \\ 5.4564 & -2.8400 & 10.9018 & 4.6585 & -6.1315 \\ 38.0307 & -1.3434 & 4.6585 & 8.2702 & 2.6116 \\ 47.3750 & 2.5380 & -6.1315 & 2.6116 & 13.2107 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiştir. Daha sonra, ölçüm hata kovaryansları ve hata kovaryans yapısının skaler bir katsayı kadar bilindiği genel hata kovaryansı aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\Sigma_{\delta\delta} = \begin{bmatrix} 0.4556 & -0.0734 & 0.1844 \\ -0.0734 & 0.6528 & -0.0487 \\ 0.1844 & -0.0487 & 0.4763 \end{bmatrix}, \Sigma_{\delta\epsilon} = \begin{bmatrix} 0.2828 \\ 0.1785 \\ 0.2766 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{hata}^{((5) \times (5))} = \sigma_{\delta}^2 \Omega_0 = \sigma_{\delta}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2828 & 0.1785 & 0.2766 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2828 & 0 & 0.4556 & -0.0734 & 0.1844 \\ 0.1785 & 0 & -0.0734 & 0.6528 & -0.0487 \\ 0.2766 & 0 & 0.1844 & -0.0487 & 0.4763 \end{bmatrix}.$$

$|M_{zz} - \lambda \Omega_0| = 0$ 'nin en küçük kökü $\hat{\lambda} = 0.7805$ olarak elde edilmiştir. Tüm hesaplamalar yapıldıktan sonra fonksiyonel model için parametre tahminleri,

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

$$\begin{aligned}
 (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}')' &= \begin{bmatrix} 1 & -2.8400 & -1.3434 & 2.5380 \\ -2.8400 & 10.9018 & 4.6585 & -6.1315 \\ -1.3434 & 4.6585 & 8.2702 & 2.6116 \\ 2.5380 & -6.1315 & 2.6116 & 13.2107 \end{bmatrix} \\
 &\quad -0.7805 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4556 & -0.0734 & 0.1844 \\ 0 & -0.0734 & 0.6528 & -0.0487 \\ 0 & 0.1844 & -0.0487 & 0.4763 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} 1.9631 \\ 5.4564 \\ 38.0307 \\ 47.3750 \end{bmatrix} -0.7805 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2828 \\ 0.1785 \\ 0.2766 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0181 \\ 1.9703 \\ 2.5253 \\ 3.9137 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ve hata varyansı $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 0.1951$ olarak tahmin edildi. Bu tahminler oldukça iyi tahminlerdir.

EKK tahmin yöntemi ise, gerçek parametre değerlerine ME model tahminlerinden daha az yakınlıktaki,

$$\hat{\beta}_R = \begin{pmatrix} 1.5899 \\ 2.4931 \\ 3.8312 \end{pmatrix} \text{ ve } \hat{\beta}_{0R} = 0.1043$$

tahminlerini verir.

2.5. Parametrelerin Tahminine Alternatif Yaklaşımlar

Bu bölümde, ML yönteminden ziyade parametrelerin tahmin edilmesinde bazı alternatif yaklaşımlar: araç değişken yöntemi, genelleştirilmiş EKK ve değiştirilmiş EKK yöntemi incelenecektir. Açıklayıcı değişkenlerin bazılarının

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

hatasız ölçülebildiğini hatırlayalım. Bu, kukla değişkeni ξ_0 dışındaki değişkenleri de içerebilir.

2.5.1. Araç Değişken Yöntemi

$$y = X\theta + e \quad (2.24)$$

regresyon modelini dikkate alalım. Burada y , $n \times 1$ boyutlu bir vektör, X , $(1, x_1, \dots, x_p)$ bağımsız değişkenler üzerindeki $n \times (p+1)$ boyutlu gözlemlerdir (sabit terim için kukla değişken dâhil) ve e , $n \times 1$ boyutlu hata vektörüdür ($n > k = p+1$). X 'in elemanları, hatalar ile asimptotik olarak ilişkisiz değilse, o halde θ 'nın EKK tahmin edicisi tutarlı değildir. Eğer bu olursa, $Z^{(n \times k)}$ veri matrisini sağlayan bir vektör araç değişkeni $z = (z_1, \dots, z_k)'$ var olabilir ve aşağıdaki özelliklere sahip olabilir:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z'e = 0$ veya $E(Z'e) = 0$ ve
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z'X$ veya $E(Z'X)$ sabitlerin tekil olmayan bir matrisidir.

O halde,

$$\hat{\theta} = (Z'X)^{-1} Z'y$$

olarak tanımlanan θ 'nın araç değişken tahmin edicisi, θ 'nın tutarlı bir tahmin edicisidir.

Şimdi (2.24)'nin özel bir durumu olarak yazılabilen,

$$x_i = \xi_i + \delta_i, \quad y_i = \beta' \xi_i + e_i$$

olası denklem hataları ile ME modelini dikkate alalım. Eğer

- (i) $Ez_i(\delta_i', e_i) = 0$ ve

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

- (ii) $\sum z'_i x_i$, $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p)'$ 'nın boyutu ile eşit rank'a sahiptir (bir olasılık ile)

böyle bir z araç değişkeni varsa, o halde

$$\hat{\beta}_{IV} = (Z'X)^{-1} Z'y$$

araç değişken tahmin edicisi, β 'nın tutarlı bir tahmin edicisi olacaktır.

Z araç değişkeninin boyutunun x 'in boyutundan daha büyük olması mümkündür. Bu durumda, araç değişken tahmin edicisi başka bir form alır (Fuller (1987), Bowden ve Turkington (1984)).

Örnek 2.4. Araç değişkeni yönteminin kullanımını göstermek için Matlab R2014a programını kullanarak oluşturduğumuz yapay veri kümesini ele alalım.

a. $\begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \\ \xi_{3,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_{1,36} \\ \xi_{2,36} \\ \xi_{3,36} \end{pmatrix}$ olmak üzere 36 bağımsız değer üretelim.

$$\xi \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 0.995 & 0.004 & 0.009 \\ 0.004 & 0.953 & -0.014 \\ 0.009 & -0.014 & 0.990 \end{bmatrix} \right)$$

b. $\begin{pmatrix} \delta_{1,1} \\ \delta_{2,1} \\ \delta_{3,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \delta_{1,36} \\ \delta_{2,36} \\ \delta_{3,36} \end{pmatrix}$ olmak üzere 36 bağımsız değer üretelim,

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 0.252 & 0.003 & 0.002 \\ 0.003 & 0.252 & 0.005 \\ 0.002 & 0.005 & 0.253 \end{bmatrix} \right) \text{ ve}$$

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{36}$ olmak üzere 36 bağımsız değer üretelim,

$$\varepsilon \sim N(0, 0.5).$$

c. $\begin{pmatrix} \gamma_{1,1} \\ \gamma_{2,1} \\ \gamma_{3,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \gamma_{1,36} \\ \gamma_{2,36} \\ \gamma_{3,36} \end{pmatrix}$ olmak üzere 36 bağımsız değer üretelim.

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 0.252 & 0.003 & 0.002 \\ 0.003 & 0.252 & 0.005 \\ 0.002 & 0.005 & 0.253 \end{bmatrix} \right).$$

d. Veriden,

$$\begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \\ y_i \\ z_{1,i} \\ z_{2,i} \\ z_{3,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{1,i} + \delta_{1,i} \\ \xi_{2,i} + \delta_{2,i} \\ \xi_{3,i} + \delta_{3,i} \\ 1 + 2\xi_{1,i} + 3\xi_{2,i} + 4\xi_{3,i} + \varepsilon_i \\ \xi_{1,i} + \gamma_{1,i} \\ \xi_{2,i} + \gamma_{2,i} \\ \xi_{3,i} + \gamma_{3,i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 36, \text{ elde edilir.}$$

Böylece, araç değişken Z , ξ_1 , ξ_2 ve ξ_3 ilişkilidir ancak δ_1 , δ_2 , δ_3 ve ε ölçüm hataları ile ilişkili değildir. Ürettiğimiz veri çizelge 2.4’de verilmiştir.

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL
Caner İNCEKAŞ

Çizelge 2.4. Araç değişkenli 36 ölçüm hatalı model verisi, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$,
 $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$

	x_1	x_2	x_3	y	z_1	z_2	z_3
1	-1,2154	-3,3911	-0,0079	-6,8366	-1,4473	-3,5396	0,5215
2	0,6859	0,0918	-0,2605	-0,2767	-0,8572	0,6976	-0,6784
3	2,0707	-1,5263	2,1869	10,8200	3,1262	-1,1833	2,8171
4	2,2193	0,2495	0,2646	3,9807	1,0090	0,4707	0,4450
5	0,4120	-0,3545	1,0662	0,9963	1,0025	-0,6092	-0,2343
6	1,0851	0,4166	1,2740	10,5549	0,6300	1,4748	0,0924
7	-0,4178	0,4344	-1,4776	-0,6967	0,1933	1,3761	-1,0227
8	-1,1787	-0,0987	0,4237	-3,2620	-1,5412	-0,4857	0,4778
9	0,3754	-0,2632	-1,1717	-6,4341	0,5445	0,1592	-2,3993
10	0,0351	-1,5067	-0,3394	-1,8092	0,5110	-2,3050	-0,0848
11	2,1543	-2,0788	0,8840	2,9453	0,2555	-1,5056	1,1594
12	1,2602	0,3411	0,2171	4,4298	1,0932	1,2161	0,5833
13	-2,2196	-0,5782	0,0117	-1,8575	-1,9798	0,1512	-0,1655
14	0,1378	1,0246	-2,2959	-0,5130	1,3109	0,8136	-1,1673
15	-0,0682	-0,1342	-0,2212	0,7334	-0,0728	0,3466	0,0915
16	-1,3627	1,9429	0,1189	7,9158	-1,3111	1,7195	1,5123
17	-1,3190	1,6564	0,1285	6,0661	-1,2908	1,8686	-0,1293
18	0,8753	-1,6990	1,7815	-2,2308	0,0800	-2,2777	0,6797
19	-0,8050	-0,4131	0,3926	0,6080	-1,7217	0,8803	0,7960
20	-0,0088	0,5283	-1,5549	-7,9077	0,4193	-0,9918	-1,0269
21	-0,5577	1,8752	-0,4863	1,3860	-1,3631	2,1637	-0,7010
22	-0,1887	1,3088	-0,6467	5,2372	-0,0782	1,0915	-0,1401

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL
Caner İNCEKAŞ

Çizelge 2.4'ün devamı

	x_1	x_2	x_3	y	z_1	z_2	z_3
23	0,7448	-0,3950	0,0216	-3,3392	0,0165	-1,0024	-0,9678
24	-1,4417	1,4520	-0,6959	-1,4228	-0,4781	0,5884	-0,7851
25	-0,2147	0,0168	-3,1958	-8,3213	0,1502	0,5048	-2,1685
26	0,5076	-1,4089	1,3262	1,6242	1,0212	-1,0186	0,9605
27	-0,1446	-2,2334	-0,4184	-5,5939	1,5060	-1,6109	-0,1029
28	-1,4486	0,0777	-1,0261	-1,7427	-1,3413	1,2293	-1,0193
29	0,1679	1,0545	-0,0174	0,4521	-0,3783	0,9201	-0,9049
30	1,6469	0,1491	-1,7712	-2,9911	0,1609	-0,1090	-2,2941
31	1,1620	-1,7944	0,5740	-1,4657	0,8882	-1,8088	-1,0822
32	-0,9862	1,0815	-0,8428	0,1753	-0,7504	1,3952	-0,9507
33	0,7080	-1,6328	-0,3635	-0,9495	1,8946	-1,1755	-0,0378
34	-1,8605	1,0840	-0,0643	-2,5414	-1,5340	1,5309	-0,4200
35	1,1866	-0,2919	-0,4876	-0,9089	0,9290	0,0523	-1,7438
36	1,2694	0,5789	1,6939	10,9777	1,0005	1,5566	1,3562

Veriden,

$$\mu_x = \begin{pmatrix} 0.0910 \\ -0.1232 \\ -0.1383 \end{pmatrix}, \mu_y = 0.2167 \text{ ve } \mu_z = \begin{pmatrix} 0.0444 \\ 0.0718 \\ -0.2426 \end{pmatrix}$$

ortalamaları elde edildi. Daha sonra $\hat{\beta}_{IV} = (Z'X)^{-1} Z'y$ formülü ile araç değişken tahmin edicisi,

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

$$\hat{\beta}_{IV} = \begin{pmatrix} 1.9666 \\ 3.3358 \\ 4.0959 \end{pmatrix} \text{ ve } \hat{\beta}_{0V} = 1.0159$$

olarak tahmin edildi. EKK tahmin yöntemi ise,

$$\hat{\beta}_R = \begin{pmatrix} 1.2442 \\ 2.2689 \\ 2.9391 \end{pmatrix} \text{ ve } \hat{\beta}_{0R} = 0.7900$$

parametre tahminlerini verir. ME model verisinde araç değişken yöntemiyle hesaplanan parametre tahminlerinin, EKK yöntemi ile hesaplanan parametre tahminlerinden çok daha iyi sonuç verdiği açıktır. Ayrıca, Z , ölçüm hataları (δ, ε) ile ilişkisizdir ve ξ ile Z arasındaki korelasyon 0.9147 olarak bulundu, güçlü bir ilişki olduğu açıktır.

2.5.2. Genelleştirilmiş ve Değiştirilmiş EKK Tahmin Edicileri

Genelleştirilmiş EKK ve değiştirilmiş EKK yaklaşımları, vektör açıklayıcı değişkenlere kolayca genişletilebilir. Hem Sprent (1966) hem de Gleser (1981), vektör açıklayıcı değişkenli fonksiyonel model için genelleştirilmiş EKK tahminini incelemiştir. Daha sonra genelleştirilmiş EKK tahmin edicisinin büyük örneklem özellikleri de incelenmiştir. Bu bölümde, genelleştirilmiş EKK tahmin edici biraz farklı bir şekilde ele alınacak ve değiştirilmiş EKK yöntemi vektör açıklayıcı değişken modeline genişletilecektir.

Genelleştirilmiş EKK

(2.1)-(2.2) modelini ele alalım ve

$$y_i = \beta_0 - \beta' x_i + (\varepsilon_i - \beta' \delta_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.25)$$

2. VEKTÖR AÇIKLAYICI DEĞİŞKENLERİ İLE DOĞRUSAL ME MODEL

Caner İNCEKAŞ

yazılsın. $v_i = \varepsilon_i - \beta' \delta_i$, $i = 1, \dots, n$, modelin fonksiyonel, yapısal ve ultra yapısal olup olmadığına bakılmaksızın, sıfır ortalama ve $\sigma_v^2 = \sigma_\varepsilon^2 - 2\beta' \Sigma_{\delta\varepsilon} + \beta' \Sigma_{\delta\delta} \beta$ varyanslı, bağımsız ve aynı dağılımlı olan rezidüler olsun. Genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi,

$$Q(\beta_0, \beta') = n^{-1} \sum \frac{(y_i - \beta_0 - \beta' x_i)^2}{\sigma_v^2} \quad (2.26)$$

'i minimize eden $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}')$ olarak tanımlanır. Burada, σ_v^2 'nin bilinmesi gerekir. Gleser (1981), $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}')$ tahmin edicisinin sonucunun normallik varsayımı altında (2.23) ML tahmin edicisi ile aynı olduğunu göstermiştir.

Değiştirilmiş EKK

Bu kısımda, değiştirilmiş EKK yaklaşımı ele alınacaktır. Denklem hatalı model (2.4) için ($q_i \equiv 0$) değiştirilmiş EKK tahmin edicisi,

$$Q(\beta_0, \beta') = n^{-1} \sum \left\{ (y_i - \beta_0 - \beta' x_i)^2 + 2\beta' \Sigma_{\delta\varepsilon} - \beta' \Sigma_{\delta\delta} \beta \right\} \quad (2.27)$$

'i minimize eder. Doğal olarak, $\Sigma_{\delta\delta}$ ve $\Sigma_{\delta\varepsilon}$ 'nin bilgisi gereklidir. (2.27)'ün minimize edilmesinden kaynaklanan tahmin edici, normal yapısal modelin ML tahmin edicisi (2.6) ile aynıdır.

$Q(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}') \geq 0$ kısıtlaması, Q hata varyans tahmini olduğu için hem (2.25) hem de (2.27)'de gereklidir. Böyle bir kısıtlamanın (2.26)'de otomatik olarak sağlandığı ancak (2.27) için $S_{xx} - \Sigma_{\delta\delta}$ pozitif tanımına ve $\hat{\sigma}_e^2 \geq \Sigma_{e\delta} \Sigma_{\delta\delta}^+ \Sigma_{\delta e}$ ihtiyaç duyulduğu görülmektedir.

3. ME MODELLERE YANLI TAHMİN YAKLAŞIMI

Bu bölümde regresyon parametrelerinin tahmin edilmiş kovaryans matrisinin kötü koşullu olması durumundaki ölçüm hatalı modellerin parametrelerinin tahmini ele alınacaktır.

3.1. Giriş ve Önceki Çalışmalar

Veri analizinde, ölçüm hataları çok fazla görülür. Veride ölçüm hatalarının varlığında, klasik istatistiksel yöntemler geçerliliğini kaybetme eğilimine girer ve parametrelerin EKK tahmin edicileri, yanlı ve tutarsız olur. Parametrelerin tutarlı tahmin edicilerini bulmak için, ölçüm hatalarının bilinen kovaryans matrisi ve bilinen güvenilirlik oranı matrisi gibi bazı ilave bilgiler gereklidir (Schneeweiss (1976), Fuller (1987), Gleser (1992), Cheng and Van Ness (1999)).

Lineer regresyon analizindeki temel varsayımlardan biri, açıklayıcı değişkenlerin tamamının lineer bağımsız olmasıdır. Yani, gözlenen açıklayıcı değişkenlerin matrisinin rankı, tam sütun rankı olmalıdır. Bu, ihmal edildiği zaman, veride çoklu iç ilişki problemi ortaya çıkar. Bazı yöntemler kullanılmasına rağmen, veride ölçüm hataları ile birleşen çoklu iç ilişkinin varlığında bu yöntemlerin performansları yetersizdir. Bu nedenle, araştırmacılar, son zamanlarda çoklu iç ilişkinin varlığında ME modellerin parametrelerinin tahminini araştırdılar. Özellikle, ME modeller için çoklu iç ilişkinin varlığında yanlı tahmin yöntemlerini incelediler. Bu kısımda, çoklu iç ilişkinin varlığında ME modellere ridge ve Liu tahmin yaklaşımları incelendi. Yanlı tahmin edicilerin performanslarının karşılaştırılması, teorik ve sayısal değerlendirmeler ile analiz edildi.

Çoklu iç ilişki, lineer regresyon modellerindeki en popüler problemlerden biridir ve detaylı olarak incelenmiştir. Çoklu iç ilişki problemine çare bulmak için EKK tahmin edicisine alternatif tahmin yöntemleri araştırmacılar tarafından önerilmiştir. Hoerl ve Kennard (1970) tarafından önerilen ridge regresyon ve Liu

(1993) tarafından önerilen Liu tahmin edici, lineer regresyon analizinde çoklu iç ilişkinin varlığında kullanılan en popüler yöntemlerdir.

3.2. Ridge Tahmin Edicisi

Saleh ve Shalabh (2014), ME modelleri için lineer regresyonda Hoerl ve Kennard tarafından önerilen ridge regresyon tahmin yaklaşımını incelediler ve

$$\left(\beta_{0n}^* j_n + x K_{xx} \beta - y \right)' \left(\beta_{0n}^* j_n + x K_{xx} \beta - y \right) + k \beta' \beta, \quad (3.1)$$

'i minimize ederek bilinen güvenilirlik matrisi K_{xx} ile ME modeller için ridge tahmin edicisini elde ettiler. Burada, $K_{xx} = \Sigma_{xx}^{-1} \Sigma_{\xi\xi} = \left(\Sigma_{\xi\xi} + \Sigma_{\delta\delta} \right)^{-1} \Sigma_{\xi\xi}$, k lagrange çarpanıdır ve j_n , 2. bölümde tanımlandığı gibidir. (3.1)'nin çözülmesiyle, ridge tahmin edici elde edilir,

$$\hat{\beta}(k) = (C + kI)^{-1} C \tilde{\beta}, \quad (3.2)$$

burada, $k \geq 0$ yanlılık parametresidir. Daha sonra, sırasıyla (2.13) ve (2.15) ile verilen $\tilde{\beta}_n$ ve C_n tutarlı tahmin edicileri yerlerine konularak, ME modeller için β 'nin ridge tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_n(k) = (C_n + kI)^{-1} C_n \tilde{\beta}_n, \quad (3.3)$$

olarak verilir. Burada, $\tilde{\beta}_n$ ve C_n sırasıyla, (2.13) ve (2.15) olarak verilmiştir ve $(C_n + kI)^{-1} C_n$, $C = K_{xx}' \Sigma_{xx} K_{xx}$ ile $(C + kI)^{-1} C$ 'nin tutarlı bir tahmin edicisidir. Ridge tahmin edici pratikte etkili olmasına rağmen, yanlılık parametresinin karmaşık bir fonksiyonudur.

3.3. Liu Tahmin Edicisi

Üstündağ Şiray (2019), lineer regresyonda Liu (1993) tarafından önerilen Liu tahmin yaklaşımını, çoklu iç ilişkinin varlığında, ME modellere taşımıştır ve modele $d\tilde{\beta} = \beta + \varepsilon'$ genişletmesini düşünmüştür, yeni model,

$$\begin{pmatrix} y - \beta_0^* j_n \\ d\tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xK_{xx} \\ I \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{pmatrix}, \quad 0 < d < 1, \quad (3.4)$$

'dir. Burada, d bir sabittir.

(3.4) modeline EKK yöntemi uygulanırsa ve bazı cebirsel işlemlerden sonra ME modelleri için Liu tahmin edici,

$$\hat{\beta}(d) = (K'_{xx}x'xK_{xx} + I)^{-1} (K'_{xx}x'xK_{xx} + dI) \tilde{\beta} \quad (3.5)$$

olarak elde edilir. Böylece, sırasıyla (2.13) ve (2.15) tarafından verilen $\tilde{\beta}_n$ ve C_n 'nın tutarlı tahmin edicileri yerine konularak, ME modeller için β 'nın Liu tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_n(d) = (C_n + I)^{-1} (C_n + dI) \tilde{\beta}_n \quad (3.6)$$

ile verilir, burada, $0 < d < 1$ ve $C = K'_{xx}\Sigma_{xx}K_{xx}$ ile $(C + I)^{-1} (C + dI)$ 'nin tutarlı bir tahmin edicisi $(C_n + I)^{-1} (C_n + dI)$ 'dir. Liu tahmin edicisi, d 'nin doğrusal bir fonksiyonu olduğu için ridge tahmin edicisine göre avantajlıdır ve bu nedenle, d yanlılık parametresinin seçimi daha uygundur.

3.4. Ridge ve Liu Tahmin Edicilerinin MSE Karşılaştırması

3.4.1. Ridge ve Liu Tahmin Edicilerinin MSE'si

β 'nın bir tahmin edicisi $\hat{\beta}$ 'nin asimptotik hata kareler ortalaması matrisinin (asymptotic matrix mean squared error: MMSE),

$$\begin{aligned}
M(\hat{\beta}) &= E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' \right\} \right) \\
&= \text{cov}(\hat{\beta}) + \text{bias}(\hat{\beta}) \text{bias}(\hat{\beta})'
\end{aligned} \tag{3.7}$$

olduğu çok iyi bilinmektedir. Burada $\text{cov}(\hat{\beta})$, $\hat{\beta}$ 'nin asimptotik kovaryans matrisidir ve $\text{bias}(\hat{\beta})$, $\hat{\beta}$ 'nin asimptotik yanlılığıdır.

Ayrıca, asimptotik skaler hata kareler ortalaması (asymptotic scalar mean squared error: SMSE), MMSE'nin izi (trace) alınarak elde edilir:

$$m(\hat{\beta}) = \text{tr}(\text{cov}(\hat{\beta}) + \text{bias}(\hat{\beta}) \text{bias}(\hat{\beta})'). \tag{3.8}$$

$\hat{\beta}$ 'nin $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ gibi iki tahmin edicisi olduğu varsayalım, $\hat{\beta}_2$ tahmin edicisinin, MMSE kriteri açısından $\hat{\beta}_1$ 'den daha üstün olduğu söylenir, ancak ve ancak $M(\hat{\beta}_1) - M(\hat{\beta}_2)$ farkı negatif olmayan tanımlı matris olmalıdır. Eğer $m(\hat{\beta}_1) \geq m(\hat{\beta}_2)$ ise, $\hat{\beta}_2$ tahmin edicisi SMSE kriteri açısından $\hat{\beta}_1$ tahmin edicisinden üstündür.

Bu kısımda, ridge ve Liu tahmin edicilerinin MMSE ve SMSE'lerini karşılaştıracacağız. β parametresinin tanımlanabilir ve $n \rightarrow \infty$ iken C_n 'in limitinin var olduğunu varsayıyoruz. Saleh ve Shalabh (2014) tarafından verilen ridge tahmin edicisinin ($n \rightarrow \infty$) MMSE'si,

$$\begin{aligned}
M(\hat{\beta}_n(k)) &= \sigma_{\varepsilon}^{*2} C'(C + kI)^{-1} C^{-1} (C + kI)^{-1} C \\
&\quad + k^2 (C + kI)^{-1} \beta \beta' (C + kI)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak yazılır. $\sigma_{\varepsilon}^{*2}$ daha önce (2.9)'da verilmiştir.

Ayrıca, $n \rightarrow \infty$ iken ridge tahmin edicinin SMSE'si,

$$m(\hat{\beta}_n(k)) = \sigma_\varepsilon^{*2} \text{tr}[(C + kI)^{-2} C] + k^2 \beta'(C + kI)^{-2} \beta. \quad (3.10)$$

olarak elde edilir.

$\tilde{\beta}_n$ 'in asimptotik kovaryans matrisi $\sigma_\varepsilon^{*2} C^{-1}$ 'dir, burada $C = K'_{xx} \Sigma_{xx} K_{xx}$ pozitif tanımlı bir matristir. Böylece,

$$\Gamma' C \Gamma = \Gamma' (K'_{xx} \Sigma_{xx} K_{xx}) \Gamma = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p), \quad (3.11)$$

gibi bir Γ ortogonal matrisi vardır, burada $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$, C matrisinin özdeğerleridir. Bu nedenle, ridge tahmin edicisinin SMSE'si,

$$m(\hat{\beta}_n(k)) = \sigma_\varepsilon^{*2} \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} + k^2 \sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + k)^2}, \quad (3.12)$$

olarak elde edilir, burada $\theta = \Gamma' \beta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ 'dir.

Üstündağ Şiray (2019) tarafından verilen Liu tahmin edicinin ($n \rightarrow \infty$) MMSE'si,

$$\begin{aligned} M(\hat{\beta}_n(d)) &= \sigma_\varepsilon^{*2} (C + I)^{-1} (C + dI) C^{-1} (C + dI) (C + I)^{-1} \\ &\quad + (d - 1)^2 (C + I)^{-1} \beta \beta' (C + I)^{-1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

olarak ifade edilir.

Ayrıca, $n \rightarrow \infty$ iken Liu tahmin edicisinin SMSE'si,

$$\begin{aligned} m(\hat{\beta}_n(d)) &= \sigma_\varepsilon^{*2} \text{tr}((C + I)^{-1} (C + dI) C^{-1} (C + dI) (C + I)^{-1}) \\ &\quad + (d - 1)^2 \beta' (C + I)^{-2} \beta \end{aligned} \quad (3.14)$$

olarak ifade edilir.

(3.11)'de verilen ortogonal ayrışım kullanılarak, Liu tahmin edicisinin SMSE'si,

$$m(\hat{\beta}_n(d)) = \sigma_{\varepsilon}^{*2} \sum_{i=1}^p \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} + (d-1)^2 \sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \quad (3.15)$$

olarak elde edilmiştir, burada $\theta = \Gamma' \beta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ dir.

3.4.2. Ridge ve Liu Tahmin Edicilerinin MMSE Karşılaştırılmaları

Bu kısımda, ridge ve Liu tahmin edicilerinin karşılaştırılmasının MMSE kriteri açısından çok zor olduğunu belirtiyoruz. Karşılaştırma yapılmış olmasına rağmen, elde edilen koşulları sağlamak oldukça zordur. Dolayısıyla, karşılaştırma sonuçlarını teorem olarak göstermiyoruz. MMSE'nin karşılaştırmalarını yapmak için kullandığımız Lemma 1 aşağıda verilmiştir.

Lemma 1. M pozitif tanımlı bir matris olsun, yani $M > 0$, α herhangi bir vektör olsun, o halde ancak ve ancak $\alpha' M^{-1} \alpha \leq 1$ sağlanırsa $M - \alpha \alpha' \geq 0$ olur (Farebrother, 1976).

$$\Delta_1 = C'(C + kI)^{-1} C^{-1} (C + kI)^{-1} C - (C + I)^{-1} (C + dI) C^{-1} (C + dI) (C + I)^{-1}$$

pozitif tanımlı matris olsun.

$$M(\hat{\beta}_n(k)) - M(\hat{\beta}_n(d)) = \sigma_{\varepsilon}^{*2} \Delta_1 + k^2 (C + kI)^{-1} \beta \beta' (C + kI)^{-1} \\ - (d-1)^2 (C + I)^{-1} \beta \beta' (C + I)^{-1}$$

'dir, burada Δ_1 yukarıda tanımlandığı gibidir. $k^2 (C + kI)^{-1} \beta \beta' (C + kI)^{-1}$ 'nin pozitif tanımlı matris olduğu açıktır. Dolayısıyla

$\sigma_{\varepsilon}^{*2} \Delta_1 - (d-1)^2 (C + I)^{-1} \beta \beta' (C + I)^{-1}$ ile ilgileniyoruz. Eğer, $\sigma_{\varepsilon}^{*2} \Delta_1$ pozitif tanımlı bir matris ise, o halde Lemma 1 kullanılarak $M(\hat{\beta}_n(k)) - M(\hat{\beta}_n(d))$

farkı ancak ve ancak $(\sigma_{\varepsilon}^{*2})^{-1} (d-1)^2 \beta' (C + I)^{-1} \Delta_1^{-1} (C + I)^{-1} \beta < 1$ ise negatif olmayan tanımlıdır. Cebirsel basitleştirmelerden sonra,

$\beta'[(C+I)\Delta_1(C+I)]^{-1}\beta < \frac{\sigma_\varepsilon^{*2}}{(d-1)^2}$ olur. Dolayısıyla, $\hat{\beta}_n(d)$, MMSE

kriterine göre ancak ve ancak $\beta'[(C+I)\Delta_1(C+I)]^{-1}\beta < \frac{\sigma_\varepsilon^{*2}}{(d-1)^2}$ olursa,

$\hat{\beta}_n(k)$ 'den üstündür.

$\Delta_2 = (C+I)^{-1}(C+dI)C^{-1}(C+dI)(C+I)^{-1} - C'(C+kI)^{-1}C^{-1}(C+kI)^{-1}C$ pozitif tanımlı matris olsun.

$$M(\hat{\beta}_n(d)) - M(\hat{\beta}_n(k)) = \sigma_\varepsilon^{*2}\Delta_2 - k^2(C+kI)^{-1}\beta\beta'(C+kI)^{-1} \\ + (d-1)^2(C+I)^{-1}\beta\beta'(C+I)^{-1}$$

olur. Δ_2 yukarıda tanımlandığı gibidir. $(d-1)^2(C+I)^{-1}\beta\beta'(C+I)^{-1}$ 'nin pozitif tanımlı matris olduğu açıktır. Bu nedenle $\sigma_\varepsilon^{*2}\Delta_2 - k^2(C+kI)^{-1}\beta\beta'(C+kI)^{-1}$ ile ilgileneceğiz. Eğer $\sigma_\varepsilon^{*2}\Delta_2$ ise, o halde Lemma 1 kullanılarak $M(\hat{\beta}_n(d)) - M(\hat{\beta}_n(k))$ farkı ancak ve ancak $(\sigma_\varepsilon^{*2})^{-1}k^2\beta'(C+kI)^{-1}\Delta_1^{-1}(C+kI)^{-1}\beta < 1$ olursa negatif olmayan tanımlıdır.

Cebirsel basitleştirmelerden sonra, $\beta'[(C+kI)\Delta_2(C+kI)]^{-1}\beta < \frac{\sigma_\varepsilon^{*2}}{k^2}$ olur.

Dolayısıyla $\hat{\beta}_n(k)$, MMSE kriteri açısından ancak ve ancak

$\beta'[(C+kI)\Delta_2(C+kI)]^{-1}\beta < \frac{\sigma_\varepsilon^{*2}}{k^2}$ ise, $\hat{\beta}_n(d)$ 'den üstündür.

Eğer dikkat edilirse, sırasıyla $\sigma_\varepsilon^{*2}\Delta_1$ ridge ve Liu tahmin edicilerinin kovaryans matrisleri arasındaki fark ve $\sigma_\varepsilon^{*2}\Delta_2$ Liu ve ridge tahmin edicilerinin kovaryans matrisleri arasındaki fark anlamına gelmektedir. Burada verilen karşılaştırmalar,

tahmin edicilerin kovaryans matrisleri arasındaki farkın pozitif tanımlılığına dayanır.

3.4.3. Ridge ve Liu Tahmin Edicilerinin SMSE Karşılaştırmaları

Bu kısımda, ridge ve Liu tahmin edicileri arasında karşılaştırma yapılabileceğini gösterdik, bununla birlikte koşulları sağlamak oldukça zordur. Karşılaştırma sonuçlarını teorem olarak ifade ediyoruz, ancak pratik olmadığı görülebilir. Bu tahmin edicilerin performanslarını karşılaştırırken teoremleri kullanmak yerine, SMSE kriteri ile kısım 3.5'te bir simülasyon çalışması yapıldı.

Şimdi, SMSE kriteri ile ME modeller için ridge ve Liu tahmin edicilerini karşılaştıralım. Bu amaç için ilk olarak d 'nin sabit olduğunu varsayıp karşılaştırmayı yapalım. Daha sonra k 'yı sabit varsayıp karşılaştırmayı yapalım. Karşılaştırma sonuçları aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 3.1. d sabit olsun.

$$i. \quad \frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} - \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{(d-1)^2} \quad \text{ise, o halde } \hat{\beta}_n(d),$$

$$0 < k < \frac{\lambda_i(1-d)}{\lambda_i + d}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \text{için SMSE kriterine göre } \hat{\beta}_n(k) \text{ 'den üstündür.}$$

$$ii. \quad \frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + k)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} - \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{k^2} \quad \text{ise, o halde } \hat{\beta}_n(k),$$

$$0 < \frac{\lambda_i(1-d)}{\lambda_i + d} < k, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \text{için SMSE kriterine göre } \hat{\beta}_n(d) \text{ 'den üstündür.}$$

İspat: i. (3.12) ve (3.15) kullanılarak,

$$m(\hat{\beta}_n(k)) - m(\hat{\beta}_n(d)) = \sigma_{\varepsilon}^{*2} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} - \sum_{i=1}^p \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} \right) + k^2 \sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + k)^2} - (d-1)^2 \sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \quad (3.16)$$

olur. $k^2 \sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + k)^2}$ 'nin pozitif olduğunu görmek kolaydır. Böylece, eğer

$$\sigma_{\varepsilon}^{*2} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} - \sum_{i=1}^p \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} \right) - (d-1)^2 \sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} > 0 \quad (3.17)$$

olursa $m(\hat{\beta}_n(k)) - m(\hat{\beta}_n(d))$ pozitif olacaktır.

İlk olarak,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} - \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{[-k(\lambda_i + d) + \lambda_i(1-d)][\lambda_i(\lambda_i + 1) + (\lambda_i + d)(\lambda_i + k)]}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2 (\lambda_i + k)^2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

'nin pozitifliğini düşünelim. (3.18), $0 < k < \frac{\lambda_i(1-d)}{\lambda_i + d}$, $i = 1, 2, \dots, p$ için pozitiftir.

(3.18) pozitif olduğu için, (3.17) eşitsizliği,

$$\frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} - \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{(d-1)^2} \quad \text{olarak ifade edilir. Böylece ispat}$$

tamamlanmış olur.

ii. (3.12) ve (3.15) kullanılarak,

$$m(\hat{\beta}_n(d)) - m(\hat{\beta}_n(k)) = \sigma_{\varepsilon}^{*2} \left(\sum_{i=1}^p \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} \right) - k^2 \sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + k)^2} + (d-1)^2 \sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \quad (3.19)$$

olur. $(d-1)^2 \sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}$ 'nin pozitif olduğunu görmek kolaydır. Böylece, eğer,

$$\sigma_{\varepsilon}^{*2} \left(\sum_{i=1}^p \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} \right) - k^2 \sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + k)^2} > 0 \quad (3.20)$$

olursa, $m(\hat{\beta}_n(d)) - m(\hat{\beta}_n(k))$ pozitif olacaktır. İlk olarak,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \left(\frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2} - \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{[k(\lambda_i + d) - \lambda_i(1-d)][\lambda_i(\lambda_i + 1) + (\lambda_i + d)(\lambda_i + k)]}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2(\lambda_i + k)^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

'nın pozitifliğini düşünelim. (3.21), $0 < \frac{\lambda_i(1-d)}{\lambda_i + d} < k$, $i = 1, 2, \dots, p$ için pozitifdir.

$$(3.21) \text{ pozitif olduğu için, (3.20) eşitsizliği, } \frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + k)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2} - \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{k^2}$$

olarak ifade edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2. k , $0 < k < 1$ aralığında sabit olsun.

$$i. \quad \frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} - \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{(d-1)^2} \quad \text{ise, o halde } \hat{\beta}_n(d),$$

$0 < d < \frac{\lambda_i(1-k)}{\lambda_i + k} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, p$ için SMSE kriterine göre $\hat{\beta}_n(k)$ 'den üstündür.

$$ii. \quad \frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + k)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} - \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{k^2} \quad \text{ise, o halde } \hat{\beta}_n(k),$$

$0 < \frac{\lambda_i(1-k)}{\lambda_i + k} < d < 1, \quad i = 1, 2, \dots, p$ için SMSE kriterine göre $\hat{\beta}_n(d)$ 'den üstündür.

İspat: i. (3.17)'i kullanarak,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} - \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{[-d(\lambda_i + k) + \lambda_i(1-k)][\lambda_i(\lambda_i + 1) + (\lambda_i + d)(\lambda_i + k)]}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2(\lambda_i + k)^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

'nin pozitifliği ile ilgilenelim. (3.22), $0 < d < \frac{\lambda_i(1-k)}{\lambda_i + k} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, p$ için pozitifdir. (3.22) pozitif olduğu için, (3.17) eşitsizliği,

$$\frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} - \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{(d-1)^2} \quad \text{olarak ifade edilir. Böylece ispat}$$

tamamlanmış olur.

ii. (3.19)'u kullanarak,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \left(\frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} - \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{[d(\lambda_i + k) - \lambda_i(1-k)][\lambda_i(\lambda_i + 1) + (\lambda_i + d)(\lambda_i + k)]}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2 (\lambda_i + k)^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

'nın pozitifliği ile ilgilenelim. (3.23), $0 < \frac{\lambda_i(1-k)}{\lambda_i + k} < d < 1$, $i = 1, 2, \dots, p$ için pozitifdir. (3.23) pozitif olduğu için, (3.20) eşitsizliği,

$$\frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + k)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} - \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{k^2} \quad \text{olarak ifade edilir. Böylece ispat}$$

tamamlanmış olur.

3.5. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, ME modeller için ridge ve Liu tahmin edicilerinin performanslarını karşılaştırmak amacıyla Matlab R2014a programını kullanarak bir simülasyon çalışması yapacağız. Regresör değişkenler, McDonald ve Galarneau (1975) tarafından verilen

$$x_{ij} = (1 - \rho^2)^{1/2} z_{ij} + \rho z_{ip+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

aracılığıyla hesaplanmıştır, burada z_{ij} bağımsız, standart normal sözde-rasgele (yalancı) sayılardır. ρ , ρ^2 tarafından verilen herhangi iki regresör değişken arasındaki korelasyon olacak şekilde belirtilir. Bu değişkenler, daha sonra $X'X$ 'in korelasyon formunda olması için standartlaştırılır. Tahmin ediciler üzerinde çoklu iç ilişkinin farklı derecelerinin etkilerini analiz etmek için $\rho = 0.85, 0.95$ ve 0.99 olarak alalım. Örneklem büyüklüğünü $n = 100$, açıklayıcı değişken sayısını ise $p = 5$ olarak belirledik.

Deney üzerindeki her bir tekrar, bağımsız ε_i 'lerin ($i = 1, 2, \dots, n$), 0 ortalamalı ve $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ varyanslı normal dağılımından üretilmiştir. ε_i 'lerin varyansları simülasyon çalışmasında $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 1, 5$ ve 10 olarak alınmıştır. Parametre vektörü, $\beta'\beta = 1$ kısıtından sağlanan $X'X$ matrisinin en büyük öz değerine karşılık gelen normalize edilmiş öz vektörler olarak alındı. Ayrıca, bağımsız δ_i 'ler ($i = 1, 2, \dots, n$) 0 ortalama vektörü ve $\sigma_{\delta\delta}I$ varyans-kovaryans matrisi ile normal dağılımdan üretildi. δ_i 'lerin varyansları, simülasyon çalışmasında $\sigma_{\delta\delta} = 1, 3$ ve 5 olarak düşünüldü. k ve d 'nin değerleri $(0, 1)$ aralığında alındı.

Bağımlı değişkenler üzerindeki gözlemler,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \xi_{i1} + \beta_2 \xi_{i2} + \dots + \beta_p \xi_{ip} + \varepsilon_i$$

$$x_i = \xi_i + \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ile üretilir, burada $y_k = (y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk})'$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ 'dir.

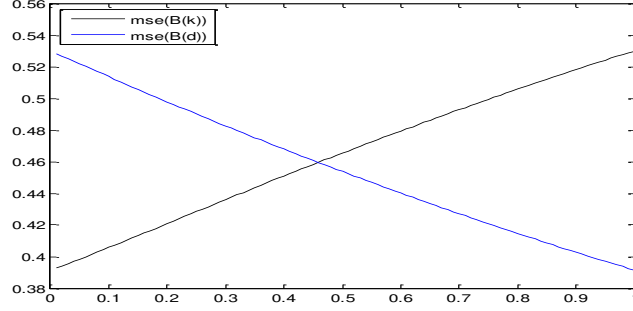
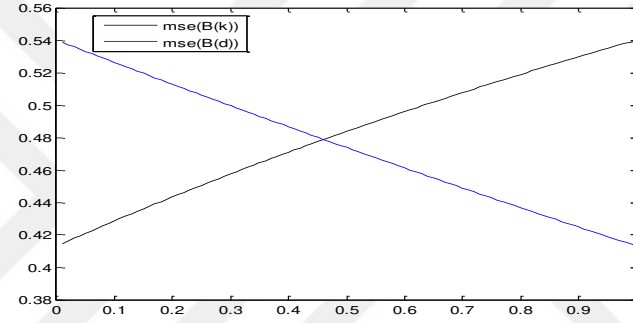
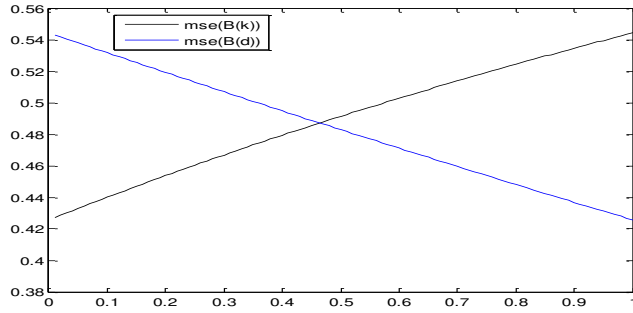
Herhangi bir $\hat{\beta}^*$ tahmin edicisi için tahmin edilmiş mse aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$mse(\hat{\beta}^*) = \frac{1}{MCN} \sum_{i=1}^{MCN} (\hat{\beta}_i^* - \beta)' (\hat{\beta}_i^* - \beta),$$

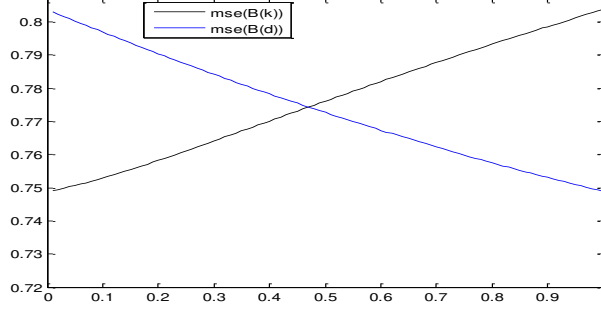
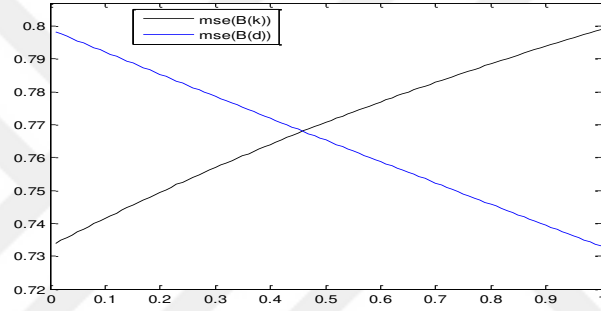
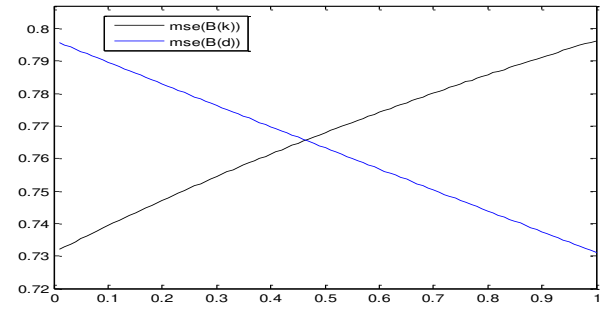
Burada $\hat{\beta}_i^*$, deneyin i 'inci tekrarı için $\hat{\beta}^*$ 'ın hesaplanmış değeridir ve MCN bu deney için 3000 olarak alınan tekrarların sayısıdır. Simülasyon çalışmasının sonuçları şekil 3.1a-3.9c'de özetlenmiştir.

Şekillerden, tahmin edicilerin performansını etkileyen en önemli faktörün ME'lerin varyansları olduğu sonucuna varabiliriz. Bu nedenle, ME'lerin varyanslarına göre yorum yapabiliriz.

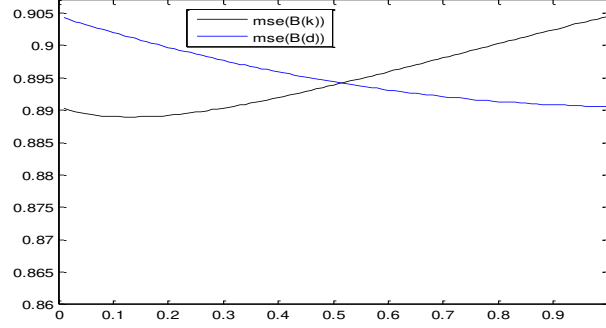
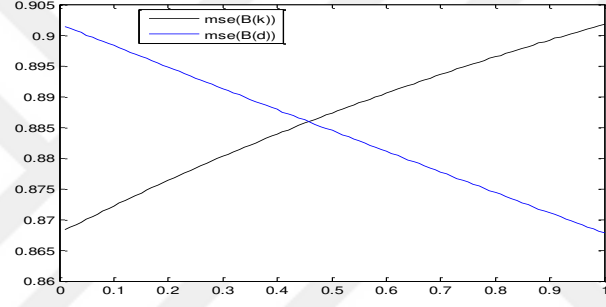
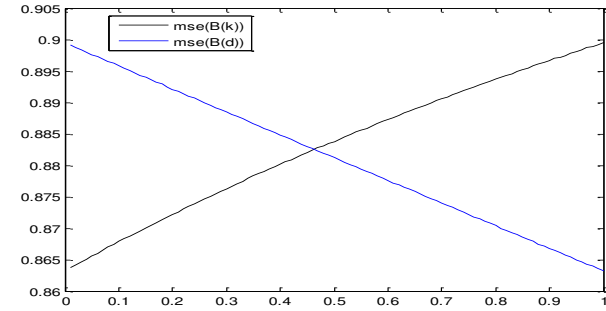


Şekil 3.1.a. $\rho = 0.85$ içinŞekil 3.1.b. $\rho = 0.95$ içinŞekil 3.1.c. $\rho = 0.99$ için

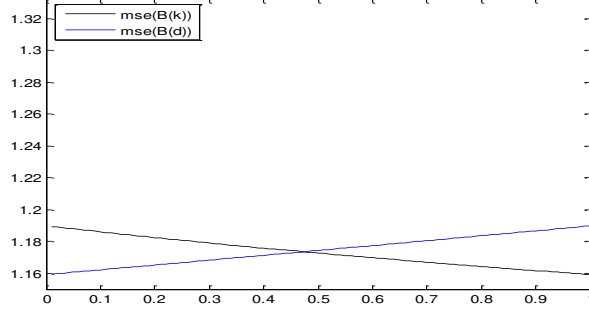
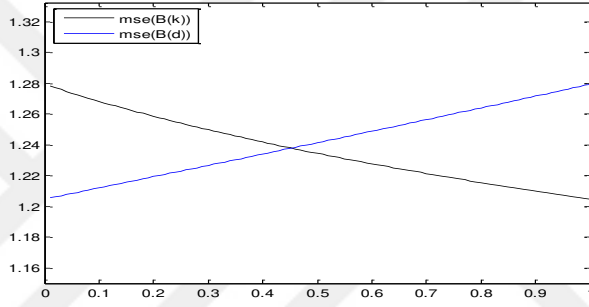
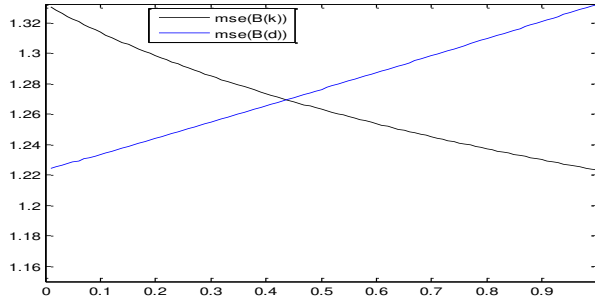
Şekil 3.1. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 1$, $\Sigma_{\delta\delta} = I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri

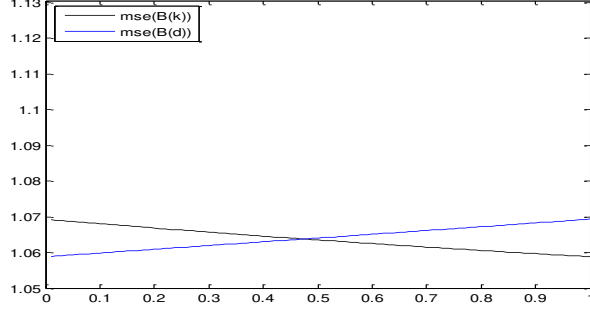
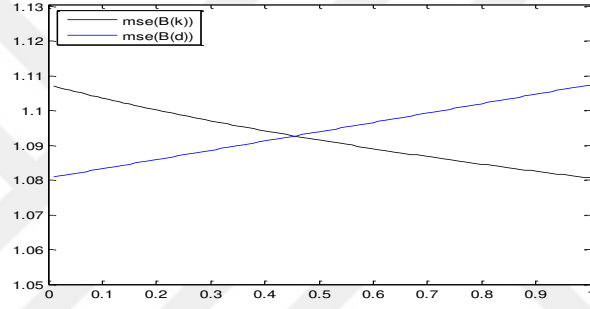
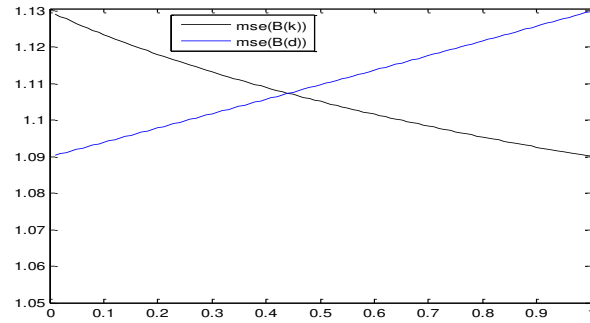
Şekil 3.2.a. $\rho = 0.85$ içinŞekil 3.2.b. $\rho = 0.95$ içinŞekil 3.2.c. $\rho = 0.99$ için

Şekil 3.2. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 5$, $\Sigma_{\delta\delta} = I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri

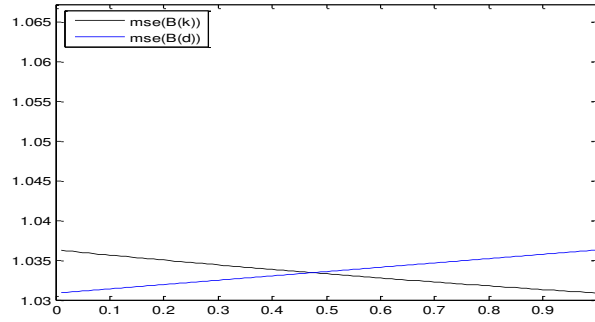
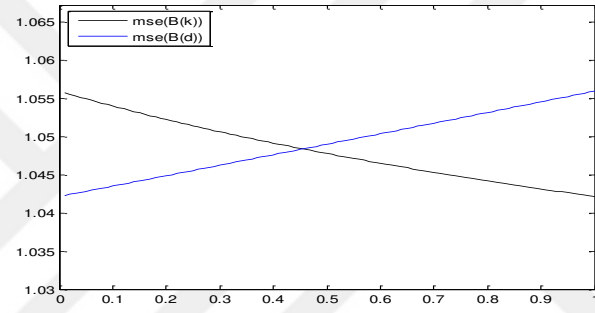
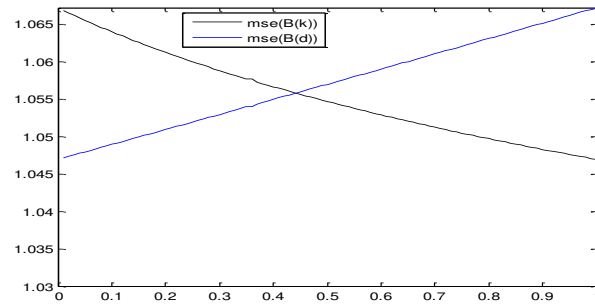
Şekil 3.3.a. $\rho = 0.85$ içinŞekil 3.3.b. $\rho = 0.95$ içinŞekil 3.3.c. $\rho = 0.99$ için

Şekil 3.3. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 10$, $\Sigma_{\delta\delta} = I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri

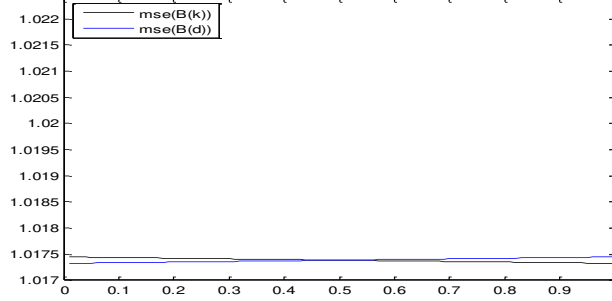
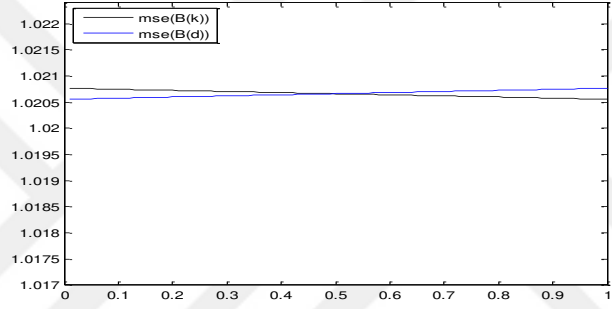
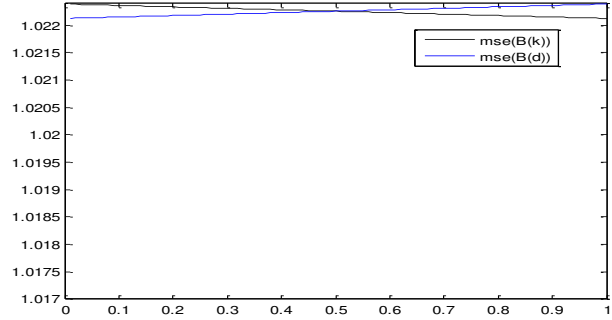
Şekil 3.4.a. $\rho = 0.85$ içinŞekil 3.4.b. $\rho = 0.95$ içinŞekil 3.4.c. $\rho = 0.99$ içinŞekil 3.4. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 1$, $\Sigma_{\delta\delta} = 3I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri

Şekil 3.5.a. $\rho = 0.85$ içinŞekil 3.5.b. $\rho = 0.95$ içinŞekil 3.5.c. $\rho = 0.99$ için

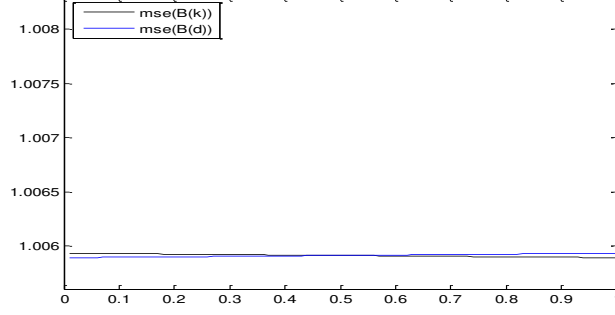
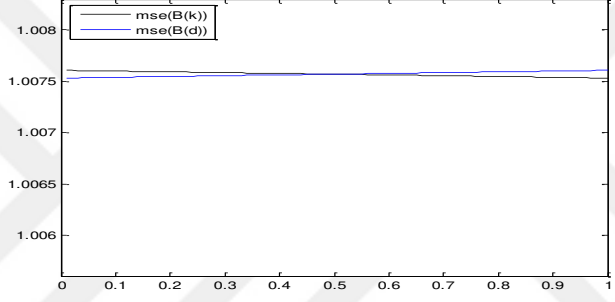
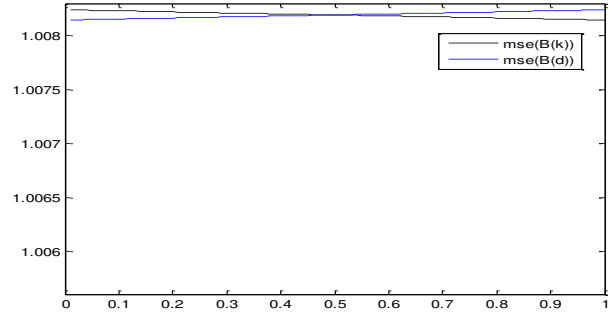
Şekil 3.5. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 5$, $\Sigma_{\delta\delta} = 3I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri

Şekil 3.6.a. $\rho = 0.85$ içinŞekil 3.6.b. $\rho = 0.95$ içinŞekil 3.6.c. $\rho = 0.99$ için

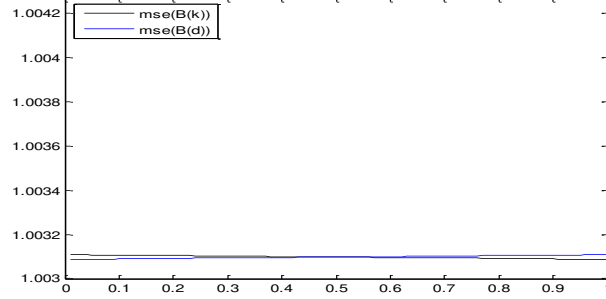
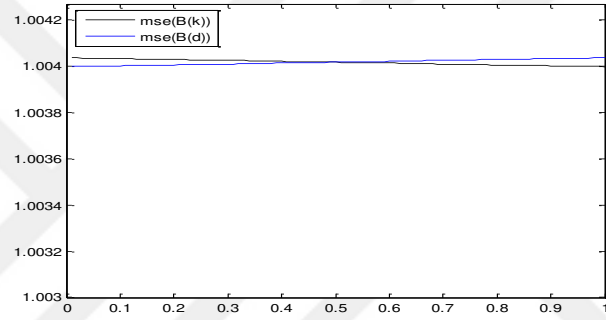
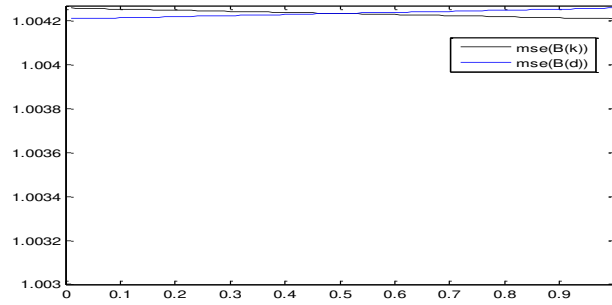
Şekil 3.6. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 10$, $\Sigma_{\delta\delta} = 3I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri

Şekil 3.7.a. $\rho = 0.85$ içinŞekil 3.7.b. $\rho = 0.95$ içinŞekil 3.7.c. $\rho = 0.99$ için

Şekil 3.7. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 1$, $\Sigma_{\delta\delta} = 5I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri

Şekil 3.8.a. $\rho = 0.85$ içinŞekil 3.8.b. $\rho = 0.95$ içinŞekil 3.8.c. $\rho = 0.99$ için

Şekil 3.8. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 5$, $\Sigma_{\delta\delta} = 5I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri

Şekil 3.9.a. $\rho = 0.85$ içinŞekil 3.9.b. $\rho = 0.95$ içinŞekil 3.9.c. $\rho = 0.99$ için

Şekil 3.9. ME modelleri için $\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 10$, $\Sigma_{\delta\delta} = 5I$ olduğunda ridge ve Liu tahmin edicilerinin tahmini mse değerleri

$\Sigma_{\delta\delta} = I$ durumunda, $(0,1)$ aralığında, yanalılık parametreleri artarken, Liu tahmin edicisinin tahmin edilmiş mse değerleri azalır ve ridge tahmin edicisinin tahmin edilmiş mse değerleri genellikle artar. $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ ’deki artış tahmin edicilerin performans karşılaştırmasını değiştirmez, ancak tahmin edicilerin tahmin edilmiş mse değerlerini arttırır. İlginçtir ki, ρ ’daki artış tahmin edicilerin tahmin edilmiş mse değerlerini azaltır.

$\Sigma_{\delta\delta} = 3I$ ve $\Sigma_{\delta\delta} = 5I$ olması durumunda, $(0,1)$ aralığında, yanalılık parametreleri artarken ridge tahmin edicisinin tahmin edilmiş mse değerleri azalır ve Liu tahmin edicisinin tahmin edilmiş mse değerleri artar. $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ ’deki artış performans karşılaştırmalarını değiştirmez, ancak tahmin edicilerin tahmin edilmiş mse değerlerini azaltır. Benzer şekilde, ρ ’daki artış tahmin edicilerin karşılaştırma performanslarını değiştirmez, ancak tahmin edicilerin tahmin edilmiş mse değerlerini arttırır.

Simülasyon çalışmasının sonucu olarak, ME’lerin varyansı yaklaşık 1 olduğunda, d ’nin 1’e yakın değerlerini ve k ’nın 0’a yakın değerlerini tercih etmemiz gerektiğini ifade edebiliriz. Ayrıca, ME’lerin 1’den daha büyük varyansları için d ’nin 0’a yakın değerlerini ve k ’nın 1’e yakın değerlerini tercih etmeliyiz.

3.6. Sayısal Örnek

Teorik sonuçları göstermek için Longley veri kümesini ele aldık. Longley veri kümesi, yüksek çoklu iç ilişki olduğu bilinen çeşitli makroekonomik değişkenleri içerir. Beaton, Rubin ve Barone (1976), regresyon katsayıları üzerinde ölçüm hatalarının etkilerinin bir tartışmasında Longley (1967) verisini kullandılar. Longley (1967), ilk olarak regresyon programlarının hesaplama doğruluğunu test etmek için kullanıldı. Bu nedenle modelin ekonomik içeriği ile fazlasıyla ilgilenilmemelidir. Beaton, Rubin ve Barone modeli, (2.3)-(2.4)

$$\eta_i = \beta_0 + \beta_i \xi_i + q_i,$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_i \xi_i + e_i, \quad x_i = \xi_i + \delta_i, \quad e_i = \varepsilon_i + q_i$$

olarak yazılabilir. Longley verisi, (1947-1962) yılları arasında 16 yıl boyunca elde edilen bilgiler üzerinden oluşturuldu. Longley (1967) verisi çizelge 3.1’de verildi.

Longley verisinde değişkenler, y toplam sağlanan istihdam (bin), x_1 gayrisafi milli hasıla (GSMH) örtülü fiyat deflatörü (onbin), x_2 gayri safi milli hasıla (milyon), x_3 işsizlik, x_4 silahlı kuvvetlerin büyüklüğü (bin), x_5 kurumsal olmayan nüfus (14 yaş ve üstü)’dir. Bu model, ME ve denklem hatası içeren bir modeldir. Longley verisinde yıl değişkeni de bulunmaktadır, örneğimizde yıl değişkenini almayacağız, çünkü hata kovaryans matrisinde bu değişkeni ölçüm hatalı ya da ölçüm hatasız almamız parametre tahminlerimizi etkilemiyor.

Longley verisi ne kadar doğru bir veridir? Örneğin, GSMH örtülü fiyat deflâtörü (x_1) değişkeninin ilk değerinin tam olarak 83.0 olmadığı, 82.5 ve 83.499 arasında bir sayı olabileceği veya GSMH (x_3)’ün ilk değerinin tam olarak 234.289 milyon olmadığı, 234.288,500(milyon) ve 234.289,499,999,99 (milyon) arasında bir sayı olduğu ihtimalinden kaçınamayız. Verimizdeki değişkenlerin tümü bu tür sapmalara tabidir.

Çizelge 3.1. Longley verisi (Longley, 1967)

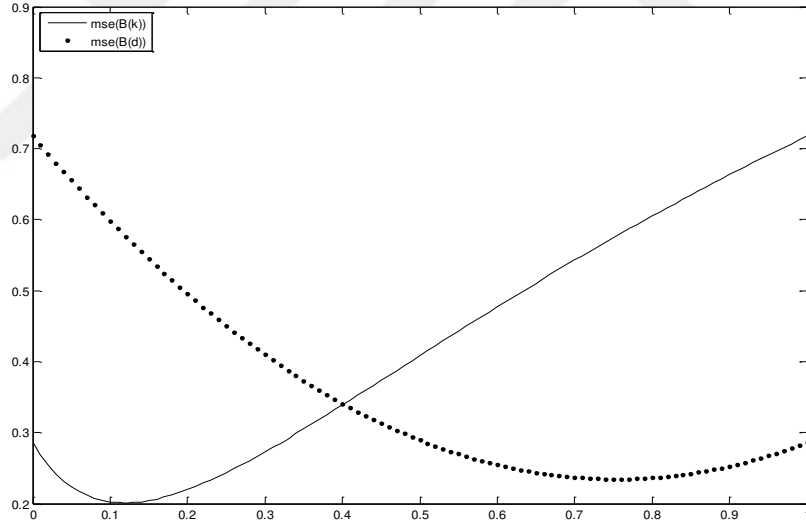
	Toplam Sağlanan İstihdam	GSMH Örtülü Fiyat Deflâtörü	GSMH	İşsizlik	Silahlı Kuvvetlerin Büyükülüğü	Kurumsal olmayan nüfus (14 yaş ve üstü)
1	60.323	83.0	234.289	2.356	1.590	107.608
2	61.122	88.5	259.426	2.325	1.456	108.632
3	60.171	88.2	258.054	3.682	1.616	109.773
4	61.187	89.5	284.599	3.351	1.650	110.929
5	63.221	96.2	328.975	2.099	3.099	112.075
6	63.639	98.1	346.999	1.932	3.594	113.270
7	64.989	99.0	365.385	1.870	3.547	115.094
8	63.761	100.0	363.112	3.578	3.350	116.219
9	66.019	101.2	397.469	2.904	3.048	117.388
10	67.857	104.6	419.180	2.822	2.857	118.734
11	68.169	108.4	442.769	2.936	2.798	120.445
12	66.513	110.8	444.546	4.681	2.637	121.950
13	68.655	112.6	482.704	3.813	2.552	123.366
14	69.564	114.2	502.601	3.931	2.514	125.368
15	69.331	115.7	518.173	4.806	2.572	127.852
16	70.551	116.9	554.894	4.007	2.827	130.081

Bu özel veriler, devlet kurumlarından ve özel kaynaklardan toplanan diğer bilgi kaynaklarının yanı sıra, hanelerden, üreticilerden veya benzeri örneklemelerden gelir. Bu tür kaynaklardan gelen veriler, birçok farklı türde hatalara maruz kalabilir. Örneğin, bağımlı değişken (toplam sağlanan istihdam), 1957’de kabul edilen istihdam tanımındaki bir değişiklik için sadece dördü ayarlanmış olan yedi alt tahminden oluşur.

Beaton, Rubin ve Barone (1976), yuvarlama hatasının ME modeller için düşük bir sınır oluşturduğunu savundu. Beaton ve ark. (1976) tarafından elde edilmiş ölçüm hatası için olası kovaryans matrisi,

$$\Sigma_{\delta\delta} = \frac{1}{12} \text{diag} \{1, 10^{-2}, 1, 1, 1, 1\} \text{ 'dir.}$$

ME modellerde, ridge ve Liu tahmin edicilerini karşılaştırmak amacıyla, SMSE kriterini kullandık. Söz konusu tahmin ediciler için Matlab R2014a programında SMSE değerlerini elde ettik. SMSE değerleri şekil 3.10'da verildi. Şekil 3.10'da görüldüğü gibi k 'nın $[0, 0.4]$ arasındaki değerleri için ridge tahmin edici ve d 'nin $[0.4, 1]$ arasındaki değerleri için Liu tahmin edici, bu veri kümesi için SMSE kriterine göre iyi performans gösterir.



Şekil 3.10: k ve d değerleri için ridge ve Liu tahmin edicilerinin SMSE değerleri

Şimdi, şekil 3.10'a göre Teorem 3.1 ve 3.2'nin koşullarını kontrol edelim. İlk olarak, d 'yi sabit alalım ve sabit d değerine göre k değerini seçelim, daha sonra k 'yı sabit alalım ve sabit k değerine göre d değerini seçelim. d , sabit

olarak 0.75 olsun. $k = \min \left\{ \frac{\lambda_i(1-d)}{\lambda_i + d} \right\} - 0.01 \cong 0.001$ olarak k 'nın değerini

seçelim. Bu durumda,
$$\frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} - \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{(d-1)^2}$$
 sağlanır. Bu

yanlılık parametrelerinin kullanılması ile Liu tahmin edicinin, ridge tahmin edicisinden üstün olduğu anlamına gelen $m(\hat{\beta}_n(d)) = 0.2381$ ve $m(\hat{\beta}_n(k)) \cong 0.28$ değerlerini elde ederiz. Bu sonuç, Teorem 3.1.i'yi

doğrulamaktadır. İkinci olarak, $k = \max \left\{ \frac{\lambda_i(1-d)}{\lambda_i + d} \right\} + 0.01 \cong 0.26$ olarak k 'nın

değerini seçelim. Bu durumda,
$$\frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + k)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2} - \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{k^2}$$
 sağlanır. Bu

yanlılık parametrelerinin kullanılması ile ridge tahmin edicinin, Liu tahmin edicisinden üstün olduğu anlamına gelen $m(\hat{\beta}_n(d)) = 0.2437$ ve $m(\hat{\beta}_n(k)) \cong 0.2348$ değerlerini elde ederiz. Bu sonuç, Teorem 3.1.ii'yi desteklemektedir.

k , sabit 0.013 olsun ve $\frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} - \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{(d-1)^2}$ koşulunu

sağlayacak şekilde $d = \min \left\{ \frac{\lambda_i (1-k)}{\lambda_i + k} \right\} - 0.01 \cong 0.8097$ olarak d 'nin değerini

seçelim. Bu yanlılık parametreleri kullanılarak, Liu tahmin edicinin Ridge tahmin ediciden üstün olduğu anlamına gelen $m(\hat{\beta}_n(d)) \cong 0.2365$ ve $m(\hat{\beta}_n(k)) \cong 0.27$ değerlerini elde ederiz. Bu sonuç, Teorem 3.2.i'yi doğrulamaktadır. Tekrar, k 'yı

sabit 0.013 alalım ve $\frac{\sum_{i=1}^p \frac{\theta_i^2}{(\lambda_i + k)^2}}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)^2} - \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} \right)} < \frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{k^2}$ koşulunu sağlayacak

şekilde $d = \max \left\{ \frac{\lambda_i (1-k)}{\lambda_i + k} \right\} + 0.01 \cong 0.9969$ olarak d değerini seçelim. Bu

yanlılık parametreleri kullanılarak, ridge tahmin edicisi, Liu tahmin edicisinden üstün olduğu anlamına gelen $m(\hat{\beta}_n(d)) \cong 0.28$ ve $m(\hat{\beta}_n(k)) \cong 0.27$ değerlerini elde ederiz. Bu sonuç, Teorem 3.2.ii'yi desteklemektedir.



4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, değişkenlerde ölçüm hatası olması durumunda, yanlış ve tutarsız tahminler veren EKK yöntemi yerine kullanılabilecek bazı parametre tahmin yöntemleri incelendi.

Vektör açıklayıcı değişkenlerde ME olması durumunda model, denklem hatalı model ve denklem hatasız model olmak üzere ele alındı.

Denklem hatalı, normal yapısal bir model üzerinde ML tahmin yöntemi kullanıldığında EKK yönteminden daha tutarlı tahminler elde edilmiştir. Bu yöntemde, klasik tanımlanabilirlik varsayımının kullanıldığına ve ölçüm hatalarının ilişkili olduğuna dikkat edilmelidir.

Denklem hatasız, normal fonksiyonel bir model üzerinde ML tahmin yöntemi kullanıldığında EKK yöntemine göre daha tutarlı tahminler bulunmuştur. Ancak, model fonksiyonel bir model olduğu için ξ gerçek değerinin sabit bir vektör olarak alınması çok önemlidir. Ayrıca, ölçüm hataları bağımsızdır ve tanımlanabilirlik varsayımı hata varyans oranıdır.

Denklem hatasız, normal fonksiyonel bir model üzerinde ve daha genel bir hata kovaryans yapısı ile elde edilen tahminler EKK yönteminden daha tutarlı tahminlerdir. Ayrıca, hata kovaryans yapısının skaler bir katsayı kadar bilindiği varsayılır ve hatalar ilişkilidir. Normal yapısal model için ve ultra yapısal model için de bu tahminler tutarlıdır.

Araç değişken yöntemini kullanarak ME model verisi üzerinde elde ettiğimiz tahminler ise EKK tahminlerinden daha tutarlı tahminlerdir. Herhangi bir değişken üzerinde normallik varsayımı yapılmamıştır. Ayrıca, hatalar ilişkili olabilir.

Genelleştirilmiş EKK yöntemi ME modellerde kullanılabilir, ancak bazı kısıtlayıcı varsayımlar gerektirir. Ayrıca normallik varsayımı altında

genelleştirilmiş EKK yöntemi denklem hatasız fonksiyonel model (ilişkili hatalar) için ML yöntemi ile aynı sonucu vermektedir.

Değiştirilmiş EKK yöntemi, normal yapısal modelin ML tahmin edicisi ile aynıdır.

Sonuç olarak, ML yöntemi, bilinen hata varyans oranı durumunda tutarlı tahminler vermektedir, ancak bilinmeyen hata varyansı için ML tahmin edicisi tutarlı değildir. Araç değişken yöntemi de tutarlı tahminler sağlamaktadır, fakat araç değişken tahmin edicisinin (asimptotik) varyansının olabildiğince küçük olması için Z araç değişkeni, ölçüm hataları ile ilişkisiz ve ξ_i gerçek değeri ile güçlü bir ilişki içerisinde olmalıdır. Böyle bir araç değişken bulmak bu yöntemin en önemli zorluklarından birisidir. Bir diğer zorluk ise, tutarlı tahminler sağlayan birden fazla araç değişken var olabilir. Bu sebeplerden dolayı uygulamalarda çok fazla tercih edilmemektedir.

Bu çalışmada, ayrıca verideki çoklu iç ilişki varlığında ME modellere yanlış tahmin yaklaşımını incelendi. Teorik ve sayısal değerlendirmeler ile ridge ve Liu tahmin edicileri olmak üzere iki tahmin edici karşılaştırıldı. Karşılaştırmalar, MMSE kriteri ile teorik olarak yapılmasına rağmen elde edilen koşulları sağlamanın oldukça zor olduğunu gösterildi. Ayrıca, yukarıda sözü edilen tahmin edicilerin SMSE kriterine göre karşılaştırılmasından elde edilen teoremler verildi. Ancak, bu teoremler, koşulları sağlamadaki zorlukları nedeniyle pratik değildir. Buna rağmen, teoremin koşullarının sağlandığını sayısal bir örnek ile gösterildi.

Ayrıca, SMSE kriteri açısından ridge ve Liu tahmin edicilerinin karşılaştırmasını sağlayan bir simülasyon çalışması yürütüldü. Sonuç olarak, tahmin edicilerin performanslarını etkileyen en önemli faktörün ME'lerin varyansı olduğu belirlendi. Ek olarak, ME'lerin varyansı 1'e yakın olduğunda, d 'nin 1'e yakın değerlerini ve k 'nin 0'a yakın değerlerini tercih etmemiz gerektiğini ve ME'lerin 1'den daha büyük varyansları için d 'nin 0'a yakın değerlerini ve k 'nin 1'e yakın değerlerini tercih etmemiz gerektiğini ifade edebiliriz.

Bu tezde kullanılan ME modeller için yansız ve yanlı tahmin yöntemleri araştırmacılar için önemli sonuçlara sahiptir. İlerleyen zamanlarda bu yöntemler geliştirilebilir ve daha iyi tahminler veren yeni yöntemler elde edilebilir.





KAYNAKLAR

- Adcock, R. J., 1877. Note on the method of least squares. *The Analyst*, 4(6): 183-184.
- Adcock, R. J., 1878. A problem in least squares. *The Analyst*, 5(2): 53-54.
- Amemiya, Y., Fuller, W. A., 1984. Estimation for the Multivariate Errors in Variables Model with Estimated Error Covariance Matrix. *The Annals of Statistics*, 12(2): 497-509.
- Amemiya, Y., Fuller, W. A., 1988. Estimation for the Nonlinear Functional Relationship. *The Annals of Statistics*, 16(1): 147-160.
- Anderson, T. W., Rubin, H., 1956. Statistical inference in factor analysis. In *Proceedings of the third Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, 5: 111-150.
- Beaton, A. E., Rubin, D. B., and Barone, J. L., 1976. The acceptability of regression solutions: Another look at computational accuracy. *Journal of the American Statistical Association*, 71(353): 158-168.
- Bekker, P. A., 1986. Comment on Identification in the Linear Errors in Variables Model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 54(1): 215-217.
- Birch, M. W., 1964. A note on the maximum likelihood estimation of a linear structural relationship. *Journal of the American Statistical Association*, 1175-1178.
- Bowden, R.J. and Turkington, D.A., 1984. *Instrumental Variables*, Cambridge University Press, Cambridge, MA.
- Buonaccorsi, J.P., 2010. *Measurement Error: Models, Methods and Applications*. Taylor and Francis Group, 428.
- Carroll, R. J., Ruppert, D., and Stefanski, L. A., 1995. *Measurement Error in Nonlinear Models*. Chapman & Hall, London.
- Casella, G., and Berger, R. L., 2002. *Statistical Inference*. Duxbury Press.

- Chan, N. N., Mak, T. K., 1984. Heteroscedastic errors in a linear functional relationship. *Biometrika*, 71(1): 212-215.
- Cheng, C-L., and Van Ness, J. W., 1991. On the unreplicated ultrastructural model. *Biometrika*, 78(2): 442-445 .
- Cheng, C.-L., and Van Ness, J.W., 1999. *Statistical Regression with Measurement Error*. Arnold, London.
- Cramer, H., 1946. *Mathematical methods of statistics*. Princeton: Princeton University Press.
- Dolby, G. R., 1976. The ultrastructural relation: a synthesis of the functional and structural relations. *Biometrika*, 63(1): 39-50.
- Farebrother, R.W., 1976. Further Results on the Mean Square Error of Ridge Regression. *Journal of the Royal Statistical Society*, 38: 248-250.
- Fuller, W. A., 1987. *Measurement error models*. Wiley, New York.
- Gleser, L. J., 1981. Estimation in a multivariate "Errors in variables" regression model: Large sample results. *Purdue University, The Annals of Statistics*, 9(1): 24-44.
- Gleser, L. J., 1985. A note on G. R. Dolby's unreplicated ultrastructural model. *Biometrika*, 72(1): 117-124.
- Gleser, L. J., 1992. The importance of assessing measurement reliability in multivariate regression. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419): 696-707.
- Hoerl, A.E., and Kennard, R.W., 1970. 'Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems'. *Technometrics*, 12: 55-67.
- Kendall, M. G., and Stuart, A., 1979. *The Advanced Theory of Statistics*. Charles Griffin, London.
- Lindley, D. V., 1947. Regression lines and the linear functional relationship. *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, 218-244.

- Liu, K., 1993. A new class of biased estimate in linear regression. *Commun. Statist. Theor. Meth.*, 22: 393-402.
- Longley, J. W., 1967. An appraisal of least squares programs for the electronic computer from the point of view of the user. *Journal of the American Statistical Association*, 62, 819-841.
- McDonald, G.C., Galarneau D.I., 1975. A Monte Carlo evaluation of some ridge-type estimators. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 20: 407-416.
- Moberg, L., Sundberg, R., 1978. Maximum likelihood estimation of a linear functional relationship when one of the departure variances is known. *Scandinavian Journal of Statistics*, 61-64.
- Moran, P. A., 1971. Maximum-likelihood estimation in non-standard conditions. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press, 70(3): 441-450.
- Neyman, J., and Scott, E. L., 1948. Consistent estimates based on partially consistent observations. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1-32.
- Pal, M., 1980. Consistent moment estimators of regression coefficients in the presence of errors in variables. *Journal of Econometrics*, 14(3): 349-364.
- Saleh, A.K.M.D., and Shalabh., 2014. A ridge regression estimation approach to the measurement error model. *Journal of Multivariate Analysis*, 123: 68-84.
- Schneeweiss, H., 1976. Consistent estimation of a regression with errors in the variables. *Metrika*, 23(1): 101-115.
- Shalabh., 2019. Measurement Error Models. Indian Institute of Technology, Department of Mathematics and Statistics, Lecture Notes 16, Econometrics (yayınlanmamış).

- Soları, M. E., 1969. The “maximum likelihood solution” of the problem of estimating a linear functional relationship. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 372-375.
- Sprent, P., 1966. A generalized least-squares approach to linear functional relationship. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 278-297.
- Üstündağ Şiray, G., 2019. Liu estimation approach to the measurement error models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 89(18): 3453-3496.
- Willassen, Y., 1979. Two clarifications on the likelihood surface in functional models. *Journal of Multivariate Analysis*, 9(1): 138-149. Learning.
- Zamar, R. H., 1989. Robust estimation in the errors in variables model. *Biometrika*, 76(1): 149-160.

ÖZGEÇMİŞ

22/08/1993 yılında Adana’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladı. 2012 yılında başladığı Çukurova Üniversitesi, İstatistik Bölümü’nden 2016 yılında fakülte ve bölüm 4’üncüsü olarak mezun oldu. 2017 yılında Çukurova Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı’nda yüksek lisansa başladı.



