



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ON İKİ YÜZLÜ METRİĞİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve ÖZDEMİR BÜLBÜL

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 232342006 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Merve ÖZDEMİR BÜLBÜL** tarafından hazırlanan “**ON İKİ YÜZLÜ METRİĞİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Hidayet Hüda KÖSAL

Sakarya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 12/06/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Fazlıye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdür

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmada kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Merve ÖZDEMİR BÜLBÜL

TEŞEKKÜR

Tez sürecimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten, çalışmalarım boyunca anlayışını, desteğini ve danışmanlığını hiçbir zaman esirgemeyen, kendisiyle çalışmayı büyük bir şans olarak gördüğüm saygıdeğer ve kıymetli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN' a, çalışmam boyunca desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, sevgilerinden aldığım destekle ilerlediğim canım babam Mustafa ÖZDEMİR ve canım annem Fatma ÖZDEMİR' e, sevgili kardeşlerim Meryem ÖZDEMİR PETEK, Mehmet Akif Can ÖZDEMİR ve Osman PETEK' e, sonsuz sabrını, sevgisini ve saygısını asla esirgemeyen, anlayışıyla yolumu aydınlatıp her daim yanımda olduğunu hissettiren hayat arkadaşım, canım eşim İskender BÜLBÜL' e, sürecimin en sıkıntılı zamanlarında daima enerjimi yükselterek umudumu canlı tutan, kıymetli yavrularım Hilal Asya ve Süleyman Alp'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Merve ÖZDEMİR BÜLBÜL

AKSARAY, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLERİN DİZİNİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Konveks Çokyüzlüler ve On iki yüzlü	1
1.2 İnversiyon	2
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	4
3. ON İKİ YÜZLÜ DÜZLEM GEOMETRİSİ VE ON İKİ YÜZLÜ DÜZLEMİNDE BAZI GEOMETRİK YERLER	9
4. ON İKİ YÜZLÜ DÜZLEMİNDE ve ON İKİ YÜZLÜ UZAYINDA İNVERSİYON	26
4.1 On iki yüzlü Düzleminde Çembere Göre İnversiyon.....	26
4.2. $\mathbb{R}_D^2$ de Elipse Göre İnversiyon	30
4.3. $\mathbb{R}_D^3$ de Küreye Göre İnversiyon.....	38
5. $\mathbb{R}_D^2$ VE $\mathbb{R}_D^3$ DE $I_{C_D(0,r)}$, $I_{E_D(0,k)}$ ve $I_{S_D(0,r)}$ İNVERSİYONLARI İÇİN ÇAPRAZ ORAN VE HARMONİK EŞLENİKLER.....	41
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	58
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	62

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ON İKİ YÜZLÜ METRİĞİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Merve ÖZDEMİR BÜLBÜL

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

ÖZET

Bu tezde On İki Yüzlü (On iki yüzlü) metriği ile döşenmiş düzlem ve uzayda bazı geometrik yapılar ve bunların özellikleri üzerine çalışılmıştır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup bu bölümde tezin konusunun oluşmasına ışık tutan çalışmalar üzerine literatür araştırması verilmiştir. İkinci bölümde çalışılacak konuyla ilgili temel bazı tanım ve teoremlere kısaca değinilmiştir. Üçüncü bölümde düzlemde on iki yüzlü metriği, 3 boyutlu analitik uzayda tanımlanmış halinden izdüşüm yardımıyla elde edilmiş bu metriğin bazı özelliklere değinilmiş ve bu metrikle döşeli düzlemde konikler özel durumları göz önüne alınarak incelenmiştir. Dördüncü bölümde On iki yüzlü düzleminde çembere ve elipse göre inversiyonlar ile On iki yüzlü uzayında küreye göre inversiyon tanımlanmış olup bu dönüşümlere ait temel kavramlar verilip bazı özelliklere değinilmiştir. Beşinci bölümde çembere, elipse ve küreye göre inversiyonlar ile çapraz oran ve harmonik eşlenik kavramlarının ilişkileri üzerine çalışılmıştır. Son olarak altıncı bölümde tezde çalışılan konu sonucunda elde edilenler özetlenmiş ve bunlar yardımıyla yapılabilecek çalışmalara değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler : On iki yüzlü Düzlemi, On iki yüzlü Metriği, On iki yüzlü İnversiyon, On iki yüzlü Eliptik İnversiyon, On iki yüzlü Küresel İnversiyon

Haziran 2025; 62 sayfa

M.Sc. THESIS
ON THE GEOMETRY OF DODECAHEDRON METRIC

Merve ÖZDEMİR BÜLBÜL

Aksaray University
Graduate School Of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Zeynep CAN

ABSTRACT

This thesis has been studied on some geometric structures and their properties in the plane and space furnished with the dodecahedron metric.

This thesis consists of six sections. The first section is the introduction section and in this section, a literature review is given on the studies that shed light on the formation of the subject of the thesis. In the second section, some basic definitions and theorems related to the subject to be studied are briefly mentioned. In the third section, the dodecahedron metric in the plane is obtained by projection from its defined state in the 3-dimensional analytic space, some properties of this metric are mentioned and conics are examined in the plane furnished with this metric by considering their special cases. In the fourth section, inversions with respect to the circle and ellipse in the dodecahedron plane and inversion with respect to the sphere in the dodecahedron space are defined and the basic concepts of these transformations are given and some properties are mentioned. In the fifth section, inversions with respect to the circle, ellipse and sphere and the relations of the concepts of cross ratio and harmonic conjugate are studied. Finally, in the sixth chapter, the results obtained from the subject studied in the thesis are summarized and the studies that can be done with the help of these are mentioned.

Keywords: Dodecahedron Plane, dodecahedron Metric, Dodecahedron Inversion, Dodecahedron Elliptic Inversion, Dodecahedron Spherical Inversion

June, 2025; 62 pages

ŞEKİLLERİN DİZİNİ

Şekil 1.1. On İki Yüzlü	2
Şekil 1.2. Roma döneminden kalma On İki Yüzlü	2
Şekil 2.1. On İki Yüzlü metriğinin $O(0,0)$ merkezli birim küresi olan On İki Yüzlü .	5
Şekil 2.2. Harmonik küme	7
Şekil 3.1. $X = (3,3), Y = (-3, -3)$ noktaları için On İki Yüzlü minimum uzaklıklar kümesi	13
Şekil 3.2. $X = (3,3), Y = (-3, -3)$ noktaları için orta noktalar kümesi	14
Şekil 3.3. On İki Yüzlü çemberi	14
Şekil 3.4. Çemberin doğruya değdiği anda değme köşelerinin V_3 veya V_6 olma durumu.	16
Şekil 3.5. Çemberin doğruya değdiği anda değme köşelerinin V_1 veya V_4 olma durumu.	17
Şekil 3.6. Çemberin doğruya değdiği anda değme köşelerinin V_2 veya V_5 olma durumu.	18
Şekil 3.7. Ongen ve Onikigen On İki Yüzlü elipsleri.	20
Şekil 3.8. Odakları $F_1 = (2,3), F_2 = (2, -3)$ ve sabiti $k = 10$ olan On İki Yüzlü elipsi.	20
Şekil 3.9. Odakları $F_1 = (1,5), F_2 = (-1, -5)$ ve sabiti $k = 15$ olan On İki Yüzlü elipsi.	21
Şekil 3.10. On İki Yüzlü hiperbolü.	22
Şekil 3.11. Odakları $F_1 = (2,3), F_2 = (-2, -3)$ ve $k = 6$ olan On İki Yüzlü hiperbolü.	22
Şekil 3.12. Odakları $F_1 = (3,4), F_2 = (3, -4)$ ve $k = 5$ olan On İki Yüzlü hiperbolü.	23
Şekil 3.13. Beş parçalı On İki Yüzlü parabolü.	24
Şekil 3.14. Altı parçalı On İki Yüzlü parabolü.	24
Şekil 3.15. $d: -x + y - 4 = 0$ doğrultmanlı ve $F = (2,2)$ odaklı On İki Yüzlü parabolü.	25
Şekil 3.16. $d: 13(x + 1) = y$ doğrultmanlı ve $F = (1, -3)$ odaklı On İki Yüzlü parabolü.	25
Şekil 4.1. O merkezli On İki Yüzlü çemberinin $I_{C_D(O,R)}$ inveriyonu altındaki görüntüsü.	30
Şekil 4.2. $(1 - \lambda)x + by + c = 0$ doğrusunun $I_{C_D(O,R)}$ inversiyonu altındaki görüntüsü.	30
Şekil 4.3. On İki Yüzlü elipse göre bir N noktasının inversi	31
Şekil 4.4. Onikigen On İki Yüzlü elipsine göre bölgeler	32
Şekil 4.5. Ongen On İki Yüzlü elipsine göre bölgeler	34

SİMGELER VE KISALTMALAR

d_E	Öklidyen Uzaklık
d_D	On iki yüzlü Uzaklık
d_T	Taksicab Uzaklık
$\mathbb{R}^2$	Öklidyen Düzlem
$\mathbb{R}_D^2$	On iki yüzlü Düzlemi
$\mathbb{R}_D^3$	On iki yüzlü Uzay
$\mathcal{C}_D$	On iki yüzlü Çemberi
$\mathcal{E}_D$	On iki yüzlü Elipsi
$\mathcal{S}_D$	On iki yüzlü Küresi
$I_{\mathcal{C}_D(0,r)}$	Çembere Göre İnversiyon
$I_{\mathcal{E}_D(0,r)}$	Elipse Göre İnversiyon
$I_{\mathcal{S}_D(0,r)}$	Küreye Göre İnversiyon

1. GİRİŞ

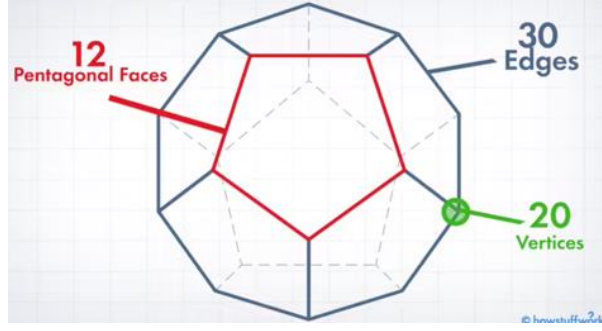
1.1 Konveks Çokyüzlüler ve On iki yüzlü

Üç boyutlu uzayda bir düzlem seçildiğinde, bu düzlem uzayı iki parçaya ayırır ve bu parçaların her birine yarı uzay denir. Eğer sonlu sayıda yarı uzayın kesişimi sınırlı bir küme oluşturuyorsa, bu kümeye çokyüzlü (polyhedron) denir. Konveks çokyüzlüler, her köşesinde aynı sayıda düzgün n -genin bir araya geldiği, yani eşkenar çokgenlerin oluşturduğu üç boyutlu katılardır. Konveks çokgenler temel olarak Arşimet, Katalan ve Platonik katılar olarak sınıflandırılır. Bir çokgenin yüzleri iki farklı tipte düzgün çokgenden oluşuyorsa, buna Arşimet katısı denir. Bir çokgenin yüzleri yalnızca tek tip çokgenden oluşuyorsa (düzgün olmak zorunda olmaksızın), buna Katalan katısı denir ve bir çokgenin yüzleri yalnızca tek tipte düzgün çokgenlerden oluşuyorsa, buna Platonik katı denir. Platonik katılar beş tanedir; tetrahedron, küp, oktahedron, dodekahedron ve ikosahedron.

Minkowski geometrisi Öklid dışı bir geometridir ve uzay-zaman açısından eliptik ve hiperbolik geometriden farklıdır. Bu geometride doğrusal yapı Öklid yapısıyla aynıdır ancak uzaklık yönlerine bağlı olarak değişir. Aslında nokta, doğru tipleri, koordinatlar ve açı ölçümleri açısından Öklid geometrisiyle aynıdır. Öklid uzayındaki küre yerine, birim küre genel, simetrik ve konveks bir kümedir.

Bazı matematikçiler metrik uzay geometrisini incelemiş, geliştirmiştir ve bu çalışmalar boyunca Minkowski geometrilerinin birim kürelerinin bazı konveks cisimlerle ilişkilendirildiği görülmüştür, bu çalışmaların bir kısmına [1-6] numaralı kaynaklarından ulaşılabilir. Örneğin maksimum geometrinin birim küresi Platonik bir cisim olan küptür ve Taxicab geometrisinin birim küresi de Platonik bir cisim olan Oktahedrondur.

Platonik katılardan biri olan dodekahedron düzgün beşgen yüzlerden oluşur. On iki yüzü, yirmi köşesi ve otuz ayrıtı vardır. dodekahedron; simetri grupları, altın oranla ilişkisi ve Euler'in çok yüzlü formülünü sağlayışı ile matematikte, evrenin bütünlüğünü ve düzenini temsil ettiğine inanılması nedeniyle felsefede, simetrisi ve estetiğiyle de mimari ve sanatta hayranlık uyandıran bir cisimdir.



Şekil 1.1. On İki Yüzlü

İngilterede Roma döneminden kalma on iki kenarlı içi boş bir nesne keşfedildi. (Şekil 1.2.) 1700lü yılların ilk yarısına denk gelen bu keşif Gallo- Roma dolaylarında yapılmıştı ve yüzden fazla aynı nesneye ulaşılmıştı ama amaçları bilinmiyordu. Bazıları taştan bazıları bronzdan yapılan bu nesneler delik ya da topuz olmayabilirdi. dodecahedron yükseklikleri 4-11 cm arasında değişen, delik boyutu 6-40 mm arasında olan, yumruk büyüklüğünde nesnelerdir.



Şekil 1.2. Roma döneminden kalma on iki yüzlü

1.2 İnversiyon

Bir düzlemde ya da uzayda sabit bir merkez ve sabit bir çember ya da küreye göre noktaların dönüşümüdür. Türkçeye “evritim” olarak da çevrilmiş olan bu kavram bazı çözülmesi zor soruların çözümüne olanak sağlasa da farklı zorlu problemleri de beraberinde getirir. İnversiyon soyut matematikten pratik mühendislik problemlerine geniş spektrumlu bir araçtır.

İnversiyon fikrinin temelleri 17.yyda Apollonius ve diğer antik matematikçilerin çemberler ve doğrular arasındaki ilişkiyi incelemesiyle atılmıştır. Bu çalışmalar çemberin bir merkez ve bir yarıçap ile tanımlanabileceği fikrini geliştirdi. 18. yyda Jean-Victor Poncelet projektif geometriyle ilgilenerak daha soyut dönüşümleri incelemeye başladı. İnversiyon kavramı, 19. yüzyılın başlarında Fransız matematikçi

Joseph-Diaz Gergonne ve İsviçreli matematikçi Jakob Steiner gibi isimler tarafından formülize edildi. Tarihsel gelişimi bir yana günümüzde hala ciddi merak konusu olan inversiyon kavramı ile ilgili literatürde pek çok çalışma mevcuttur.

İnversiyon düzlem ya da uzayın kendi kendisine bir dönüşüm olup bu dönüşüm klasik olarak çember kullanılarak yapılırsa da diğer koniklere göre de tanımlanabilmektedir. Ayrıca inversiyon üzerine çalışmalar Öklidyen geometrilerde başlamasına karşın Öklid dışı geometrilerde de ilginç özellikler keşfedilmiştir. İnversiyon ile ilgili çalışmaların bir kısmına [7-24] numaralı kaynaklarından ulaşılabilir.



2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölüm tezin tamamında kullanılacak olan tanım ve teoremleri içermektedir. Bölümde verilen tanımlar ve teoremler [25-28] kaynaklarından faydalanılarak özetlenmiştir.

Tanım 2.1: X boş olmayan bir küme olsun $\forall X_1, X_2, X_3 \in X$ için

$$\mathbf{M1)} \quad d(X_1, X_2) \geq 0, d(X_1, X_2) = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2$$

$$\mathbf{M2)} \quad d(X_1, X_2) = d(X_2, X_1)$$

$$\mathbf{M3)} \quad d(X_1, X_2) \leq d(X_1, X_3) + d(X_3, X_2)$$

özelliklerini sağlayan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metriktir denir.

Tanım 2.2: Öklid uzaklık fonksiyonu $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$d_E(X, Y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

biçiminde tanımlı $d_E: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonudur.

Teorem 2.1: $\mathbb{R}^2$ de d_E uzaklık fonksiyonu bir metriktir ve d_E metriği ile döşenmiş analitik düzlem $\mathbb{R}_E^2$ ile gösterilir.

Tanım 2.3: $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere düzlemdeki herhangi bir N noktası için $\{N | d_E(N, X) + d_E(N, Y) = d_E(X, Y)\}$ kümesine X ile Y nin minimum uzaklıklar kümesi adı verilir.

Tanım 2.4: $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere düzlemdeki herhangi bir N noktası için $\{N | d(N, X) = d(N, Y)\}$ kümesine X ile Y nin orta noktalar kümesi adı verilir.

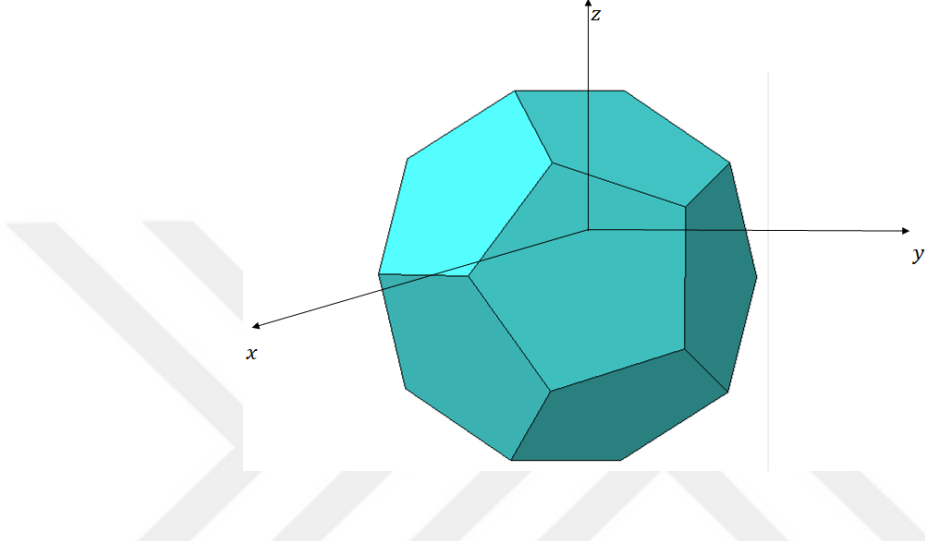
Tanım 2.5: $X = (x_1, y_1, z_1), Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3, \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran, $\lambda = \varphi - 1 \cong 0,618$ olmak üzere

$$d_D(X, Y) = \max\{\lambda|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \lambda|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|, \lambda|z_1 - z_2| + |x_1 - x_2|\}$$

biçiminde tanımlı $d_D: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow (0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna On iki yüzlü uzaklık fonksiyonu denir.

Tez boyunca notasyonel kolaylık sağlaması açısından formül isimlendirmelerinde on iki yüzlü yerine dodecahedron ismine atfen D harfi kullanılacaktır.

Teorem 2.2: d_D uzaklık fonksiyonu birim küresi on iki yüzlü olan bir metriktir.



Şekil 2.1. On iki yüzlü metriğinin $O(0,0)$ merkezli birim küresi olan on iki yüzlü

d_D uzaklık fonksiyonu ile döşenmiş $\mathbb{R}^3$ uzayına D-uzayı denir ve $\mathbb{R}_D^3$ ile gösterilir.

Tanım 2.6: Düzlemde M merkezli r yarıçaplı bir çember

$$\{X: (M, X) = r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

kümesinin geometrik yeridir.

Tanım 2.7: Düzlemde odakları F_1 ve F_2 , sabiti k olan elips

$$\{X: (X, F_1) + (X, F_2) = k, k \geq d(F_1, F_2)\}$$

kümesinin geometrik yeridir.

Tanım 2.8: Düzlemde odakları F_1 ve F_2 , sabiti k olan hiperbol

$$\{X: |(X, F_1) - (X, F_2)| = k, k \leq d(F_1, F_2)\}$$

kümesinin geometrik yeridir.

Tanım 2.9: Düzlemde odağı F , doğrultmanı d olan parabol

$$\{X: d(X, F) = d(X, d)\}$$

kümesinin geometrik yeridir.

Tanım 2.10: $\mathcal{C} = (O, r)$, O merkezli r yarıçaplı çember olmak üzere düzlemin bir kendi kendine dönüşümü olan $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon $I_{(O, r)}$ ile gösterilir. O merkezinden farklı her N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışını üzerinde bulunan, $I_{(O, r)}(N) = N'$ biçiminde gösterilen ve

$$d_E(O, N) \cdot d_E(O, N') = r^2 \quad (2.10)$$

koşulunu sağlayan N' noktasına N nin inversi denir. Ayrıca $\mathcal{C}$ inversiyon çemberi, O inversiyon merkezi ve r inversiyon yarıçapı olarak isimlendirilir.

Dikkat edilirse inversiyon tanımındaki (2.10) denklemine göre O noktasına karşılık gelen sonlu bir nokta olmadığından inversiyon düzlemin tamamında tanımlı değildir. Ayrıca herhangi bir sonlu noktaya karşılık O noktası da eşlenemediğinden inversiyon örten bir dönüşüm de değildir. Bu çeşit eksiklikleri giderebilmek için düzleme sonsuzdaki bir N_∞ noktası (ideal nokta) ilave edilerek düzlem genişletilebilir ve $I_{(O, r)}(O) = N_\infty$ ve $I_{(O, r)}(N_\infty) = O$ tanımlanarak inversiyon genişletilmiş düzlemin bir dönüşümü olarak elde edilir.

Tanım 2.10 ile verilen çembere göre inversiyon altında inversiyon merkezinden geçen doğrular sabit kalır, inversiyon merkezinden geçen çemberler inversiyon merkezinden geçmeyen doğrulara, tersine inversiyon merkezinden geçmeyen doğrular da inversiyon merkezinden geçen çemberlere dönüşürler. Ayrıca inversiyon merkezinden geçmeyen çemberler inversiyon merkezinden geçmeyen çemberlere dönüşürler. Çemberler ve doğrular arasındaki bu eşleştirilme çemberin doğrulaştırılması fikrinin ortaya çıkması yönüyle inversiyon dönüşümünün öneminin ortaya koymaktadır.

Tanım 2.11: Bir l doğrusu üzerindeki A ve B noktaları için $d_E[A, B]$ yönlendirilmiş uzaklığı gösterebilir. B yi kapsayan A başlangıç noktasına sahip ışın, yönlendirmenin

pozitif yönü ise $d_E[A, B] = d_E(A, B)$, yönlendirmenin negatif yönü ise $d_E[A, B] = -d_E(A, B)$ dir. Ayrıca $d_E[A, B] = d_E[B, A]$ dir.

Yardımcı Teorem 2.1: Bir l yönlendirilmiş doğrusu üzerindeki A, B ve C noktaları için $d_E[A, B] + d_E[B, C] + d_E[C, A] = 0$ dir.

Yardımcı Teorem 2.2: $\overline{AB}$, l doğrusunun bir parçası ve O , l nin herhangi bir noktası olsun. Bu durumda $d_E[A, B] = d_E[O, B] - d_E[O, A]$ dir.

Tanım 2.12: A, B, C ve D bir l yönlendirilmiş doğrusu üzerindeki dört farklı nokta olmak üzere

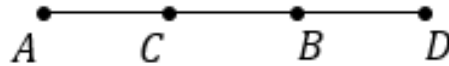
$$(AB, CD) = \frac{d_E[A, C].d_E[D, B]}{d_E[C, B].d_E[A, D]}$$

oranına bu noktaların çapraz oranı adı verilir.

Tanım 2.13: A, B, C ve D bir yönlendirilmiş doğrusu üzerindeki dört farklı nokta olmak üzere

$$(AB, CD) = -1$$

ise bu noktalara harmonik küme denir ve $H(AB, CD)$ ile gösterilir. Bu durumda C ve D , A ve B nin harmonik eşlenikleri olarak isimlendirilir ve şekil 2.2. deki gibi gösterilir.



Şekil 2.2. Harmonik küme

Teorem 2.3: $I_{(O,r)}$, O merkezli ve r yarıçaplı bir inversiyon olmak üzere $I_{(O,r)}(C) = D$, A ve B, C ile D den geçen çapın uç noktaları ise $(AB, CD) = -1$ dir. Tersine A ve B $I_{(O,r)}$ inversiyonunun çemberinin bir çapının uç noktaları ve $(AB, CD) = -1$ ise $I_{(O,r)}(C) = D$ dir.

Yardımcı Teorem 2.3: $I_{(O,r)}$, O merkezli ve r yarıçaplı bir inversiyon olmak üzere $I_{(O,r)}(N_1) = N_1'$ ve $I_{(O,r)}(N_2) = N_2'$ ise

$$d_E(N_1', N_2') = r^2 \frac{d_E(N_1, N_2)}{d_E(O, N_1)d_E(O, N_2)}$$

dir.

Teorem 2.4: A, B, C ve D, O inversiyon merkeziyle doğrudan dört nokta ve A', B', C' ve D' bu noktalara karşılık gelen invers noktalar olsun. Bu durumda $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ dir.



3. ON İKİ YÜZLÜ DÜZLEM GEOMETRİSİ VE ON İKİ YÜZLÜ DÜZLEMİNDE BAZI GEOMETRİK YERLER

Bu bölümde öncelikle On iki yüzlü düzlemi tanımlanarak bazı özellikleri verilecektir. Sonrasında On iki yüzlü düzlemindeki bazı geometrik yerlerin tanımları yapılarak bu geometrik yerlerin temel özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 3.1: $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran,

$\lambda = \varphi - 1 \cong 0,618$ olmak üzere

$$d_D(X, Y) = \max\{\lambda|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2|\}$$

biçiminde tanımlı $d_D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna düzlemde On iki yüzlü uzaklık fonksiyonu denir.

Yardımcı Teorem 3.1: $\mathbb{R}^2$ de tanımlı d_D uzaklık fonksiyonu bir metriktir ve bu metrik ile döşenmiş analitik düzlem $\mathbb{R}_D^2$ ile gösterilir.

İspat: $\forall N_1 = (x_1, y_1), N_2 = (x_2, y_2)$ ve $N_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}_D^2$ için $d_D(X, Y) = \max\{\lambda|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2|\}$ biçiminde tanımlı On iki yüzlü uzaklık fonksiyonunun bir metrik olduğunu göstermek için Tanım 2.1 deki aksiyomların sağlandığı gösterilmelidir.

M1) Mutlak değer fonksiyonu tanımı gereğince negatif değerler almadığından ve $\lambda = \varphi - 1 \cong 0,618$ olmak üzere $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$ ve $\lambda|x_1 - x_2| \geq 0$ olduğundan $d_D(N_1, N_2) \geq 0$ dır. Ayrıca $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ ise $d_D(N_1, N_2) = 0$ elde edilir. Tersine $d_D(N_1, N_2) = 0$ iken $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olup $N_1 = N_2$ elde edilir.

M2) Mutlak değer tanımı gereği $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ olduğundan $d_D(N_1, N_2) = d_D(N_2, N_1)$ olduğu açıktır.

M3) $N_1 = (x_1, y_1), N_2 = (x_2, y_2)$ ve $N_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}_D^2$ noktaları için

$$d_D(N_1, N_2) = \max\{\lambda|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2|\},$$

$$d_D(N_1, N_3) = \max\{\lambda|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|, |x_1 - x_3|\}$$

$$d_D(N_2, N_3) = \max\{\lambda|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|, |x_2 - x_3|\}$$

biçiminde olup $d_D(N_1, N_2) \leq d_D(N_1, N_3) + d_D(N_3, N_2)$ eşitsizliğinin sağlandığını kontrol etmek için sekiz durum incelenmelidir;

Durum 1: $d_D(N_1, N_2) = \lambda|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, $d_D(N_1, N_3) = \lambda|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|$ ve $d_D(N_2, N_3) = \lambda|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$ ise;

$$\begin{aligned} d_D(N_1, N_2) &= \lambda|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= \lambda|x_1 - x_3 + x_3 - x_2| + |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\ &\leq \lambda|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + \lambda|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2| \\ &= d_D(N_1, N_3) + d_D(N_3, N_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2: $d_D(N_1, N_2) = |x_1 - x_2|$, $d_D(N_1, N_3) = \lambda|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|$, $d_D(N_2, N_3) = |x_2 - x_3|$ ise;

$$\begin{aligned} d_D(N_1, N_2) &= |x_1 - x_2| \\ &= |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \\ &\leq \lambda|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + |x_3 - x_2| \\ &= d_D(N_1, N_3) + d_D(N_3, N_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 3: $d_D(N_1, N_2) = \lambda|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, $d_D(N_1, N_3) = \lambda|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|$ ve $d_D(N_2, N_3) = |x_2 - x_3|$ ise;

$$\begin{aligned} d_D(N_1, N_2) &= \lambda|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= \lambda|x_1 - x_3 + x_3 - x_2| + |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\ &\leq \lambda|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + \lambda|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3| \\ &= d_D(N_1, N_3) + d_D(N_3, N_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 4: $d_D(N_1, N_2) = \lambda|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, $d_D(N_1, N_3) = |x_1 - x_3|$ ve $d_D(N_2, N_3) = \lambda|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$ ise;

$$\begin{aligned} d_D(N_1, N_2) &= \lambda|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= \lambda|x_1 - x_3 + x_3 - x_2| + |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\ &\leq \lambda|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + \lambda|x_2 - x_3| + |y_3 - y_2| \\ &= d_D(N_1, N_3) + d_D(N_3, N_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 5: $d_D(N_1, N_2) = \lambda|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, $d_D(N_1, N_3) = |x_1 - x_3|$ ve $d_D(N_2, N_3) = |x_2 - x_3|$ ise;

$$\begin{aligned} d_D(N_1, N_2) &= |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3| \\ &\leq \lambda|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + \lambda|x_2 - x_3| + |y_3 - y_2| \\ &= d_D(N_1, N_3) + d_D(N_3, N_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 6: $d_D(N_1, N_2) = |x_1 - x_2|$, $d_D(N_1, N_3) = \lambda|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|$ ve $d_D(N_2, N_3) = \lambda|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$ ise;

$$\begin{aligned} d_D(N_1, N_2) &= |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3| \\ &\leq \lambda|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + |x_2 - x_3| \\ &= d_D(N_1, N_3) + d_D(N_3, N_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 7: $d_D(N_1, N_2) = |x_1 - x_2|$, $d_D(N_1, N_3) = |x_1 - x_3|$ ve $d_D(N_2, N_3) = \lambda|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$ ise;

$$\begin{aligned} d_D(N_1, N_2) &= |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3| \\ &= d_D(N_1, N_3) + d_D(N_3, N_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 8: $d_D(N_1, N_2) = |x_1 - x_2|$, $d_D(N_1, N_3) = |x_1 - x_3|$ ve $d_D(N_2, N_3) = |x_2 - x_3|$ ise;

$$\begin{aligned} d_D(N_1, N_2) &= |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \\ &= d_D(N_1, N_3) + d_D(N_3, N_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece **M1-M2-M3** aksiyomları sağlandığından d_D uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

Yardımcı Teorem 3.2: $\mathbb{R}_D^2$ de ötelemelerin her biri bir izometridir.

İspat: $M = (m_1, m_2)$, $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$T_M: \mathbb{R}_D^2 \rightarrow \mathbb{R}_D^2$, $T_M(X) = M + X$ olacak şekilde $\mathbb{R}_D^2$ de bir öteleme olsun.

$N_1 = (x_1, y_1)$, $N_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} d_D(T_M(N_1), T_M(N_2)) &= \max\{\lambda|x_1+a_1-x_2-a_1| + |y_1-a_2-y_2-a_2|, |x_1+a_1-x_2-a_1|\} \\ &= \max\{\lambda|x_1-x_2| + |y_1-y_2|, |x_1-x_2|\} \\ &= d_D(N_1, N_2) \end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 3.3: d_E Öklid uzaklık fonksiyonunu ifade etmek üzere l de analitik düzlemde N_1 ve N_2 noktalarından geçen bir doğru olsun. Bu l doğrusunun eğimi m ise

$$d_E(N_1, N_2) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{(\max\{\lambda + |m|, 1\})} d_D(N_1, N_2)$$

dir.

İspat: d_E ve d_D metriklerinin tanımları kullanılırsa düzlemdeki $N_1 = (x_1, y_1)$ ve $N_2 = (x_2, y_2)$ noktaları için

$$\begin{aligned} d_E(N_1, N_2) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = |x_1-x_2| \cdot \sqrt{1+m^2} \\ d_D(N_1, N_2) &= \max\{\lambda|x_1-x_2| + |y_1-y_2|, |x_1-x_2|\} \\ &= |x_1-x_2| \cdot \max\{\lambda + |m|, 1\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa oranlanırsa

$$d_E(N_1, N_2) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{(\max\{\lambda + |m|, 1\})} d_D(N_1, N_2)$$

elde edilir. Sonuç olarak iki nokta arasındaki Öklidyen uzaklık On iki yüzlü uzaklığının pozitif bir katıdır.

Aşağıdaki sonuçlar Yardımcı Teorem 3.3 den doğrudan elde edilen sonuçlardır.

Sonuç 3.1: N_1, N_2 ve X , $\mathbb{R}^2$ de doğrudan üç nokta olsunlar. Bu durumda

$$d_E(N_1, X) = d_E(X, N_2) \Leftrightarrow d_D(N_1, X) = d_D(X, N_2)$$

dir.

Sonuç 3.2: N_1, N_2 ve X , $\mathbb{R}^2$ de doğrudan üç farklı nokta olsunlar. Bu durumda

$$d_E(N_1, X)/d_E(X, N_2) \Leftrightarrow d_D(N_1, X)/d_D(X, N_2)$$

dir.

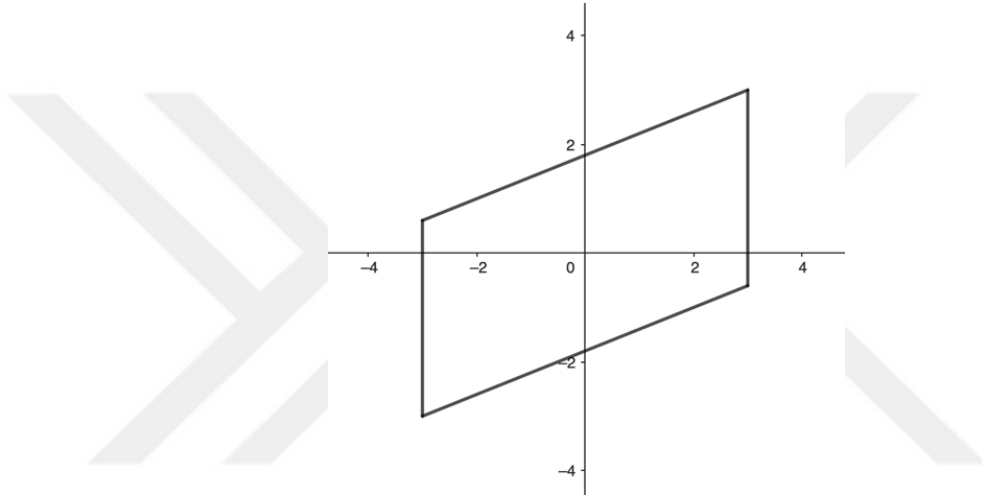
Tanım 3.2: $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}_D^2$ olmak üzere

$$\mathcal{M}_D = \{N | d_D(N, X) + d_D(N, Y) = d_D(X, Y)\}$$

kümesi on iki yüzlü minimum uzaklıklar kümesi olarak isimlendirilir.

Örnek 3.1: $X = (3, 3), Y = (-3, -3) \in \mathbb{R}_D^2$ olmak üzere

$\mathcal{M}_D = \{N | d_D(N, X) + d_D(N, Y) = d_D(X, Y)\}$ on iki yüzlü minimum uzaklıklar kümesinin geometrik yeri Şekil 3.1 deki gibidir.



Şekil 3.1. $X = (3, 3), Y = (-3, -3)$ noktaları için On iki yüzlü minimum uzaklıklar kümesi

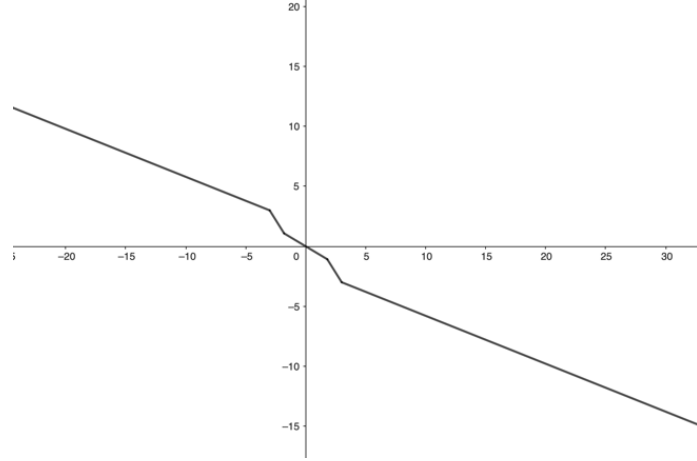
Tanım 3.3: $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\mathcal{O}_D = \{N | d_D(N, X) = d_D(N, Y)\}$$

kümesine on iki yüzlü orta noktalar kümesi denir.

Örnek 3.2: $X = (3, 3), Y = (-3, -3) \in \mathbb{R}_D^2$ olmak üzere

$\mathcal{O}_D = \{N | d_D(N, X) = d_D(N, Y)\}$ on iki yüzlü orta noktalar kümesinin geometrik yeri Şekil 3.2 deki gibidir.

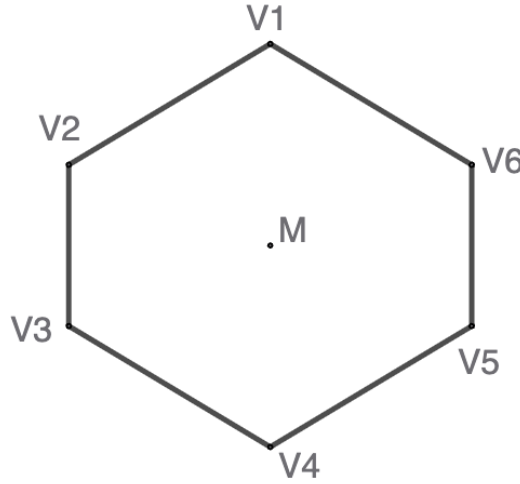


Şekil 3.2. $X = (3,3), Y = (-3, -3)$ noktaları için orta noktalar kümesi

Tanım 3.4: On iki yüzlü düzlemde merkezi $M(x_0, y_0)$ ve yarıçapı r olan bir on iki yüzlü çember

$$\mathcal{C}_D = \{N = (x_0, y_0) | \max\{\lambda|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|, |x_1 - x_0|\} = r\}$$

kümesinin geometrik yeridir.



Şekil 3.3. On iki yüzlü Çember

$M(x_0, y_0)$ merkezli r yarıçaplı On iki yüzlü çemberinin köşe koordinatları Şekil 3.3 'deki gibi isimlendirilirse bu koordinatlar sırasıyla; $N_1 = (x_0, y_0 + r)$, $N_2 = (x_0 - r, y_0 + (1 - \lambda)r)$, $N_3 = (x_0 - r, y_0 + (\lambda - 1)r)$, $N_4 = (x_0, y_0 - r)$, $N_5 = (x_0 + r, y_0 + (\lambda - 1)r)$, $N_6 = (x_0 + r, y_0 + (1 - \lambda)r)$ biçiminde olur.

Teorem 3.5: $\mathbb{R}_D^2$ bir $M = (x_0, y_0)$ noktasının bir $l: ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı

$$d_D(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a+b(1-\lambda)|, |a-b(1-\lambda)|, |b|\}}$$

biçimindedir.

İspat: $M = (x_0, y_0)$ ve $l: ax + by + c = 0$ on iki yüzlü düzleminde verilmiş sırasıyla, bir nokta ve doğru olsun. M noktasının l doğrusuna uzaklığını bulmak için M noktasını merkez kabul eden bir on iki yüzlü çemberi ele alınsın. Bu çemberin yarıçapının yavaş yavaş büyütüldüğü düşünülürse çemberin doğruya değdiği ilk andaki yarıçap uzunluğu M noktasının l doğrusuna uzaklığını verecektir. Çemberin doğruya bir köşe noktasında temas edeceği göz önüne alınırsa bu yarıçap üç farklı durum için hesaplanabilir.

Durum 1: Yarıçapı büyütülen $M = (x_0, y_0)$ merkezli çemberin l doğrusuna ilk değdiği andaki değme köşeleri Şekil 3.4 teki gibi V_3 veya V_6 ve yarıçapı r olsun. Bu durumda V_3 , V_6 ve M den geçen l' doğrusunun eğimi $(1 - \lambda)$ olacağından l' doğrusunun denklemi $(1 - \lambda)x - y - (1 - \lambda)x_0 + y_0 = 0$ biçimindedir. V_3 veya V_6 noktası l ve l' doğrularının kesişim noktası olacağından l ve l' birlikte çözülürse;

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x - y - (1 - \lambda)x_0 + y_0 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

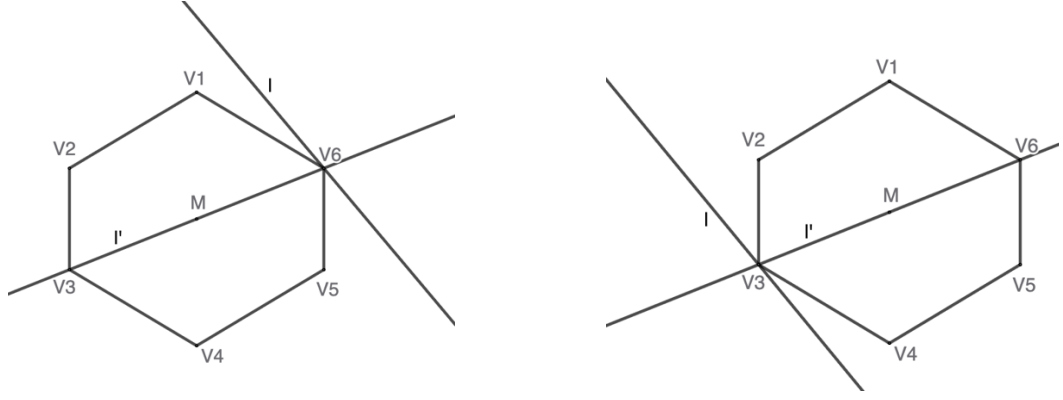
denklem sisteminden

$$x = \frac{(1-\lambda)bx_0 - by_0 - c}{a + (1-\lambda)b} \text{ ve } y = \frac{-a(1-\lambda)^2x_0 + ay_0 - (1-\lambda)c}{a + (1-\lambda)b}$$

elde edilir ki bunlar V_3 ve V_6 nın koordinatlarıdır. Bu durumda çemberin yarıçapı bu koordinatlara sahip nokta ile M arasındaki uzaklık kadar olduğundan

$$\begin{aligned} r_1 = d_D(M, l) &= \max\{\lambda|x - x_0| + |y - y_0|, |x - x_0|\} \\ &= \max\left\{\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a + (1-\lambda)b|}, (1 - \lambda)\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a + (1-\lambda)b|}\right\} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a + (1-\lambda)b|} \end{aligned} \quad (3.1)$$

elde edilir.



Şekil 3.4. Çemberin doğruya değdiği anda değme köşelerinin V_3 veya V_6 olma durumu.

Durum 2: Yarıçapı büyütülen $M = (x_0, y_0)$ merkezli çemberin l doğrusuna ilk değdiği andaki değme köşeleri Şekil 3.5 teki gibi V_1 veya V_4 ve yarıçapı r olsun. Bu durumda V_1 , V_4 ve M den geçen l' doğrusu $x = x_0$ biçimindedir. V_1 veya V_4 noktası l ve l' doğrularının kesişim noktası olacağından l ve l' birlikte çözülürse;

$$\begin{cases} x = x_0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

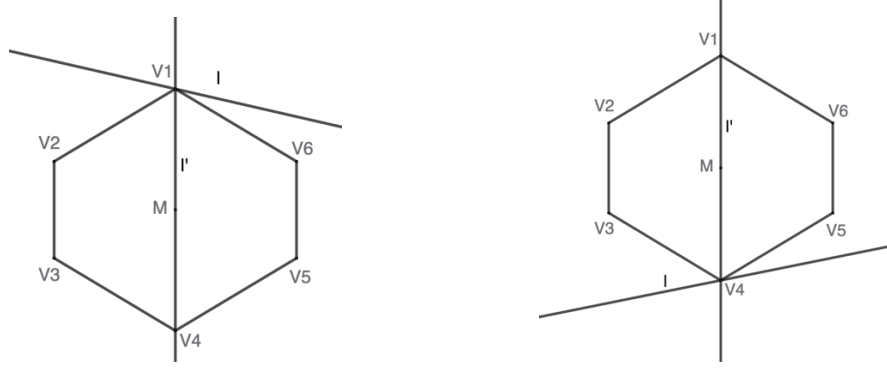
denklem sisteminden

$$x = x_0 \text{ ve } y = \frac{-ax_0 - c}{b}$$

elde edilir ki bunlar V_1 ve V_4 nın koordinatlarıdır. Bu durumda çemberin yarıçapı bu koordinatlara sahip nokta ile M arasındaki uzaklık kadar olduğundan

$$\begin{aligned} r_2 = d_D(M, l) &= \max\{\lambda|x - x_0| + |y - y_0|, |x - x_0|\} \\ &= \max\left\{\lambda|x - x_0| + \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}, |x - x_0|\right\} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|} \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir.



Şekil 3.5. Çemberin doğruya değdiği anda değme köşelerinin V_1 veya V_4 olma durumu.

Durum 3 Yarıçapı büyütülen $M = (x_0, y_0)$ merkezli çemberin l doğrusuna ilk değdiği andaki değme köşeleri Şekil 3.6 daki gibi V_2 veya V_5 ve yarıçapı r olsun. Bu durumda V_2 , V_5 ve M den geçen l' doğrusunun eğimi $(1 - \lambda)$ biçiminde olacağından l' doğrusunun denklemi $(\lambda - 1)x - y - (\lambda - 1)x_0 + y_0 = 0$ biçimindedir. V_2 veya V_5 noktası l ve l' doğrularının kesişim noktası olacağından l ve l' birlikte çözülürse;

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x - y - (\lambda - 1)x_0 + y_0 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

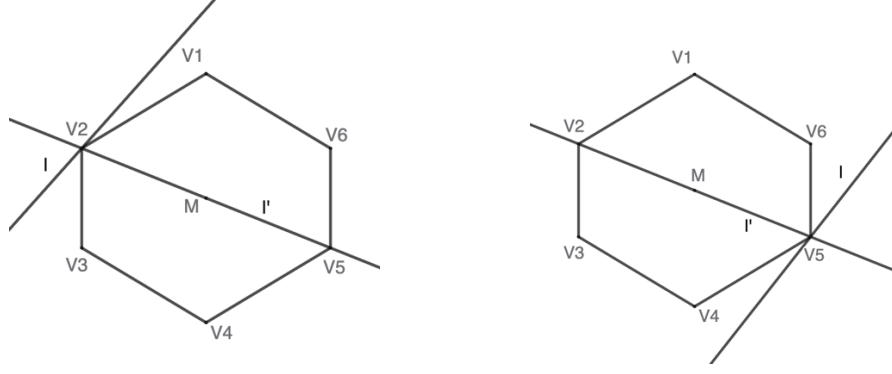
denklem sisteminden

$$x = \frac{-b(1-\lambda)x_0 - by_0 - c}{a - (1-\lambda)b} \text{ ve } y = \frac{-a(1-\lambda)x_0 + ay_0 + (1-\lambda)c}{a - (1-\lambda)b}$$

elde edilir ki bunlar V_2 ve V_5 in koordinatlarıdır. Bu durumda çemberin yarıçapı bu koordinatlara sahip nokta ile M arasındaki uzaklık kadar olduğundan

$$\begin{aligned} r_3 = d_D(M, l) &= \max\{\lambda|x - x_0| + |y - y_0|, |x - x_0|\} \\ &= \max\left\{\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a - (1-\lambda)b|}, \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a - (1-\lambda)b|}\right\} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a - (1-\lambda)b|} \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir.



Şekil 3.6. Çemberin doğruya değdiği anda değme köşelerinin V_2 veya V_5 olma durumu.

Böylece (3.1), (3.2), (3.3) denklemleri ile $d_D(M, l) = \min\{r_i | i = 1, 2, 3\}$ olduğu kullanılırsa

$$d_D(M, l) = \min \left\{ \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a - (1 - \lambda)b} \right|, \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{|b|} \right|, \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a + (1 - \lambda)b} \right| \right\}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a - (1 - \lambda)b|, |a + (1 - \lambda)b|, |b|\}}$$

elde edilir.

Tanım 3.5: $F_1, F_2 \in \mathbb{R}_D^2$, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere odakları F_1, F_2 ve sabiti k olan $\mathcal{E}_D$ on iki yüzlü elipsi;

$$\mathcal{E}_D = \{P(x, y) | d_D(N, F_1) + d_D(N, F_2) = k, N \in \mathbb{R}_D^2, k \geq d_D(F_1, F_2)\}$$

kümesinin geometrik yeridir.

On iki yüzlü elipsi, elipsin odaklarından geçen doğrunun eğimine göre iki tiptedir; F_1 ve F_2 odaklarından geçen doğrunun eğimi $(1 - \lambda)$ veya ∞ değil ise elips bir onikigendir ve bu durumda elips $\mathcal{E}_{D_{\Delta_1}}$ ile gösterilip I. tip on iki yüzlü elips olarak isimlendirilir, F_1 ve F_2 odaklarından geçen doğrunun eğimi $(1 - \lambda)$ veya ∞ ise elips bir ongendir ve bu elips $\mathcal{E}_{D_{\Delta_2}}$ ile gösterilip II. Tip on iki yüzlü elips olarak isimlendirilir.

Odakları $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ ve sabiti k olan Dodecahen ongen elipsi Şekil 3.7(a) daki gibi olup bu elipsin köşe koordinatları sırasıyla;

$$V_1 = \left(x_1, \frac{y_1+y_2+k}{2}\right), V_2 = \left(\frac{(\lambda+2)x_1-y_1+y_2-k}{(\lambda+2)}, \frac{y_1+(\lambda+1)y_2+k}{(\lambda+2)}\right),$$

$$V_3 = \left(\frac{\lambda x_1+y_1-y_2-k}{\lambda}, \frac{(2\lambda+1)y_1-(\lambda+1)y_2-k}{\lambda}\right), V_4 = \left(\frac{\lambda x_1+y_1-y_2-k}{\lambda}, \frac{-y_1+(\lambda+1)y_2+k}{\lambda}\right),$$

$$V_5 = \left(\frac{(\lambda+2)x_1-y_1+y_2-k}{(\lambda+2)}, \frac{(\lambda+3)y_2-y_1-k}{(\lambda+2)}\right), V_6 = \left(x_1, \frac{-y_1-y_2-k}{2}\right)$$

$$V_7 = \left(-\frac{(\lambda+2)x_1-y_1+y_2-k}{(\lambda+2)}, -\frac{y_1+(\lambda+1)y_2+k}{(\lambda+2)}\right), V_8 = \left(-\frac{\lambda x_1+y_1-y_2-k}{\lambda}, -\frac{(2\lambda+1)y_1-(\lambda+1)y_2-k}{\lambda}\right),$$

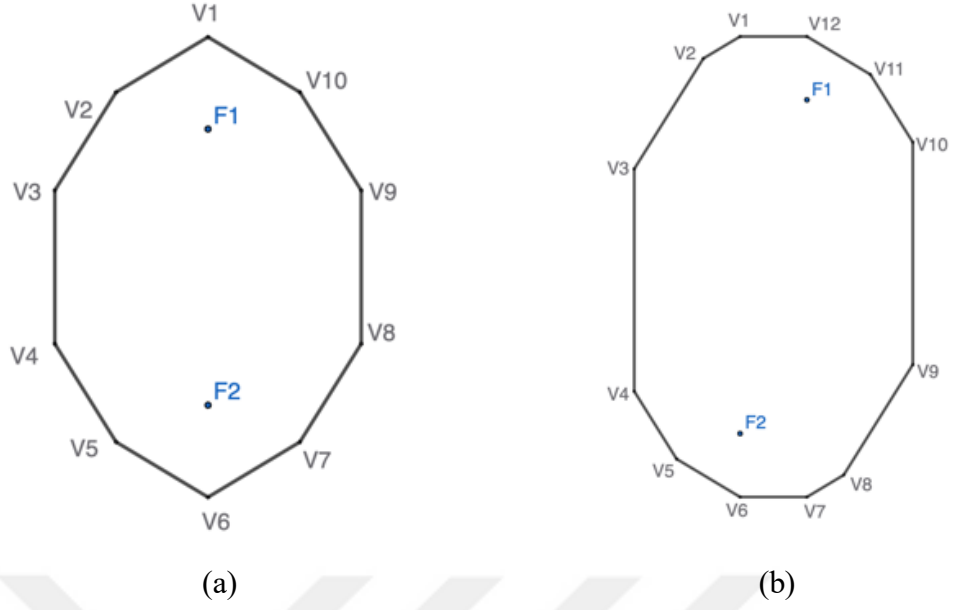
$$V_9 = \left(-\frac{\lambda x_1+y_1-y_2-k}{\lambda}, -\frac{-y_1+(\lambda+1)y_2+k}{\lambda}\right), V_{10} = \left(-\frac{(\lambda+2)x_1-y_1+y_2-k}{(\lambda+2)}, -\frac{(\lambda+3)y_2-y_1-k}{(\lambda+2)}\right)$$

biçimindedir.

Benzer şekilde odakları $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ ve sabiti k olan on iki yüzölçüm onikigen elipsi Şekil 3.7(b) deki gibi olup bu elipsin köşeler koordinatları sırasıyla;

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(x_2, \frac{\lambda(x_2-x_1)+y_1+y_2+k}{2}\right), \\ V_2 &= \left(\frac{\lambda(x_2-x_1)+2x_1+y_1-y_2-k}{2}, \frac{(1-2\lambda)(x_2-x_1)+(\lambda+1)y_1-(\lambda-1)(y_2+k)}{2}\right), \\ V_3 &= \left(\frac{-\lambda(x_1+x_2)+y_1-y_2-k}{2\lambda}, \frac{(1-2\lambda)(x_1-x_2)-\lambda(y_1+y_2)+(y_1-y_2)-(1-\lambda)k}{2\lambda}\right), \\ V_4 &= \left(\frac{\lambda(x_1+x_2)+y_1+y_2-k}{2\lambda}, \frac{(2\lambda-1)(x_1-x_2)+\lambda(y_1+y_2)-(y_1-y_2)-(\lambda-1)k}{2\lambda}\right), \\ V_5 &= \left(\frac{\lambda(x_1-x_2)-2x_1+y_1-y_2-k}{2}, \frac{(2\lambda-1)(x_1-x_2)-\lambda(y_1-y_2)-(y_1+y_2)+(\lambda-1)k}{2}\right), \\ V_6 &= \left(x_2, \frac{\lambda(x_1-x_2)-y_1-y_2-k}{2}\right), V_7 = \left(-x_1, \frac{\lambda(x_2-x_1)-y_1-y_2-k}{2}\right), \\ V_8 &= \left(\frac{\lambda(x_1-x_2)-2x_1-y_1+y_2+k}{2}, \frac{(2\lambda-1)(x_2-x_1)-(\lambda+1)y_1+(\lambda-1)(y_2+k)}{2}\right), \\ V_9 &= \left(\frac{\lambda(x_1+x_2)-y_1+y_2+k}{2\lambda}, \frac{(2\lambda-1)(x_1-x_2)+\lambda(y_1+y_2)-(y_1-y_2)+(1-\lambda)k}{2\lambda}\right), \\ V_{10} &= \left(\frac{\lambda(x_1+x_2)-(y_1-y_2)+k}{2\lambda}, \frac{(1-2\lambda)(x_1-x_2)-\lambda(y_1+y_2)+(y_1-y_2)+(\lambda-1)k}{2\lambda}\right), \\ V_{11} &= \left(\frac{\lambda(x_2-x_1)+2x_1-y_1+y_2+k}{2}, \frac{(2\lambda-1)(x_2-x_1)-\lambda(y_2-y_1)+(y_1+y_2)+(1-\lambda)k}{2}\right), \\ V_{12} &= \left(x_1, \frac{-\lambda(x_1-x_2)+y_1+y_2+k}{2}\right) \end{aligned}$$

biçimindedir.

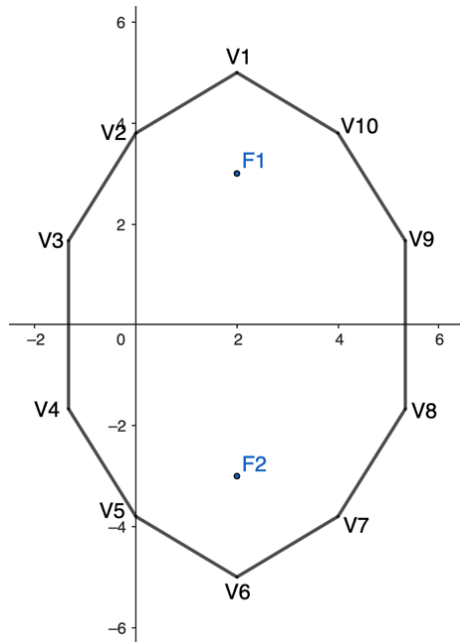


Şekil 3.7. Ongen ve onikigen on iki yüzlü elipsleri.

Örnek 3.3: Odakları $F_1 = (2,3)$, $F_2 = (2,-3)$ ve sabiti $k = 10$ olan on iki yüzlü elipsi

$$\mathcal{E}_{D_2} = \{N(x, y) | d_D(N, F_1) + d_D(N, F_2) = 10, N \in \mathbb{R}_D^2\}$$

kümesinin geometrik yeri olup Şekil 3.8 deki gibidir.

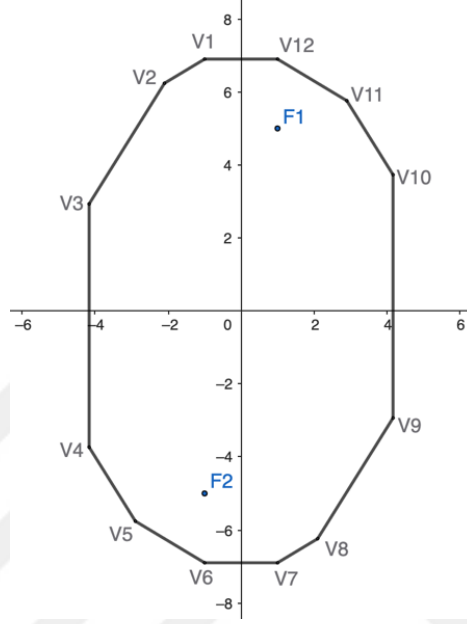


Şekil 3.8. Odakları $F_1 = (2,3)$, $F_2 = (2,-3)$ ve sabiti $k = 10$ olan on iki yüzlü elipsi.

Örnek 3.4: Odakları $F_1 = (1,5)$, $F_2 = (-1,-5)$ ve sabiti $k = 15$ olan on iki yüzlü elipsi

$$\mathcal{E}_{D_1} = \{N(x,y) | d_D(N, F_1) + d_D(N, F_2) = 15, N \in \mathbb{R}_D^2\}$$

kümesinin geometrik yeri olup Şekil 3.9 deki gibidir.



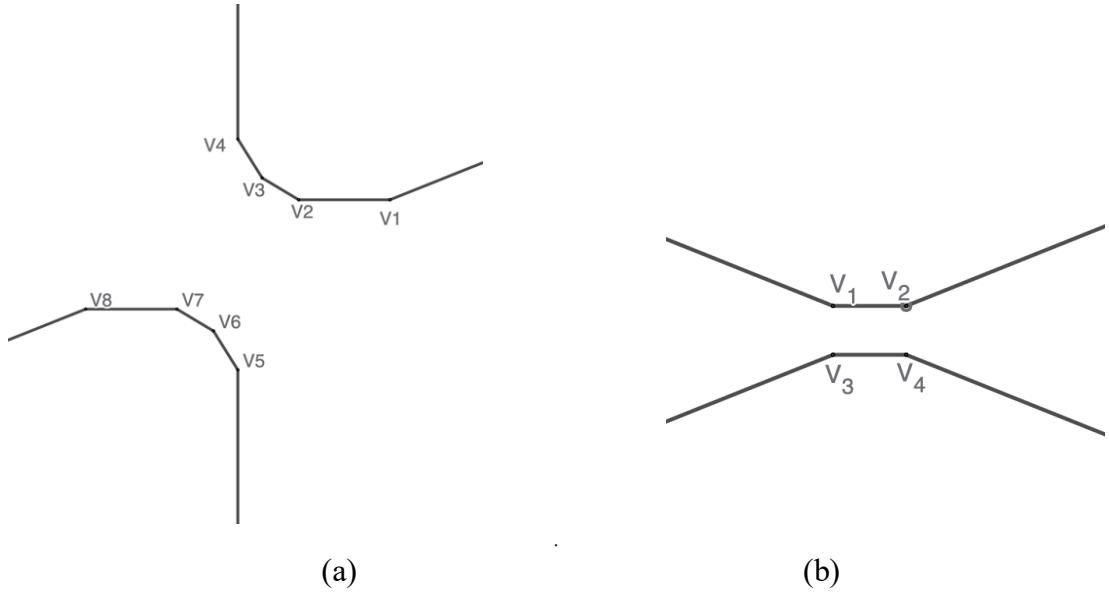
Şekil 3.9. Odakları $F_1 = (1,5)$, $F_2 = (-1,-5)$ ve sabiti $k = 15$ olan on iki yüzlü elipsi.

Tanım 3.6: $F_1, F_2 \in \mathbb{R}_D^2$, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere F_1, F_2 odaklı ve sabiti k olan $\mathcal{H}_D$ on iki yüzlü hiperbolü, F_1 ve F_2 ye uzaklıkları farkının mutlak değeri k olan noktaların kümesi yani;

$$\mathcal{H}_D = \{N = (x,y) | d_D(N, F_1) - d_D(N, F_2) = k, N \in \mathbb{R}_D^2, k \leq d_D(F_1, F_2)\}$$

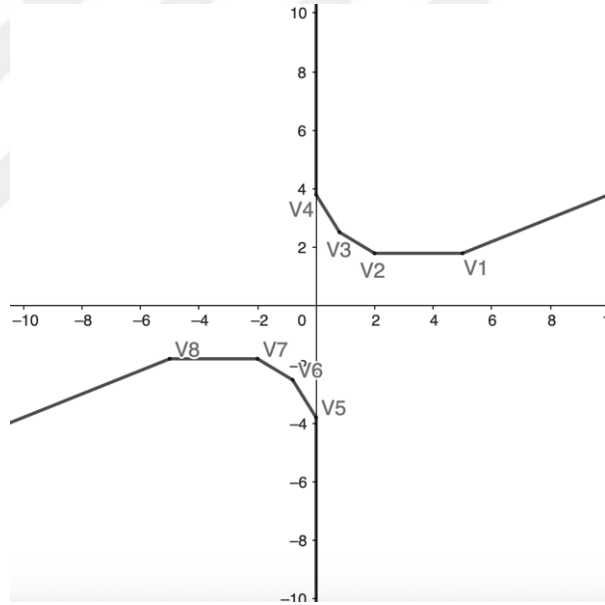
kümesinin geometrik yeridir.

Odakları $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ ve sabiti k olan on iki yüzlü hiperbolü iki tipte olabilir. Bir kolu beş parçalı olan bir on iki yüzlü hiperbolü Şekil 3.10(a) daki gibi, bir kolu üç parçalı olan bir on iki yüzlü hiperbolü Şekil 3.10(b) deki gibidir.



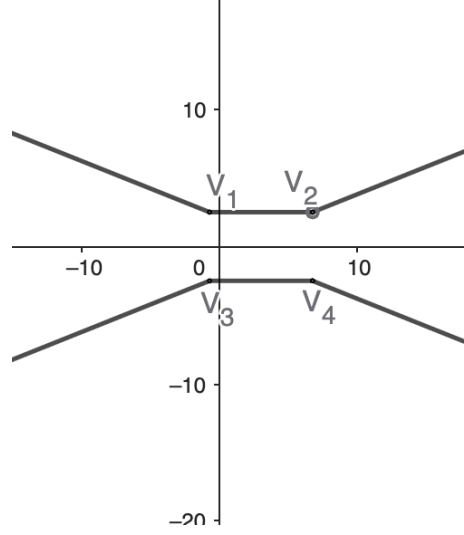
Şekil 3.10. On iki yüzlü hiperbolü.

Örnek 3.5: Odakları $F_1 = (2,3)$, $F_2 = (-2,-3)$ ve $k = 6$ olan on iki yüzlü hiperbol şekil 3.11. deki gibidir.



Şekil 3.11. Odakları $F_1 = (2,3)$, $F_2 = (-2,-3)$ ve $k = 6$ olan on iki yüzlü hiperbolü.

Örnek 3.6: Odakları $F_1 = (3,4)$, $F_2 = (3,-4)$ ve $k = 5$ olan on iki yüzlü hiperbol şekil 3.12. da verilen hiperboldür.



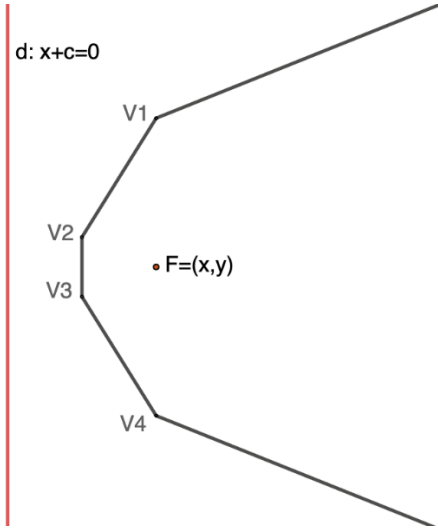
Şekil 3.12. Odakları $F_1 = (3, 4)$, $F_2 = (3, -4)$ ve $k = 5$ olan on iki yüzlü hiperbolü.

Tanım 3.7: $F = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_D^2$ ve d , $\mathbb{R}_D^2$ de verilen bir doğru olsun. Bu durumda F noktası ve d doğrusuna eşit uzaklıktaki noktaların kümesi yani;

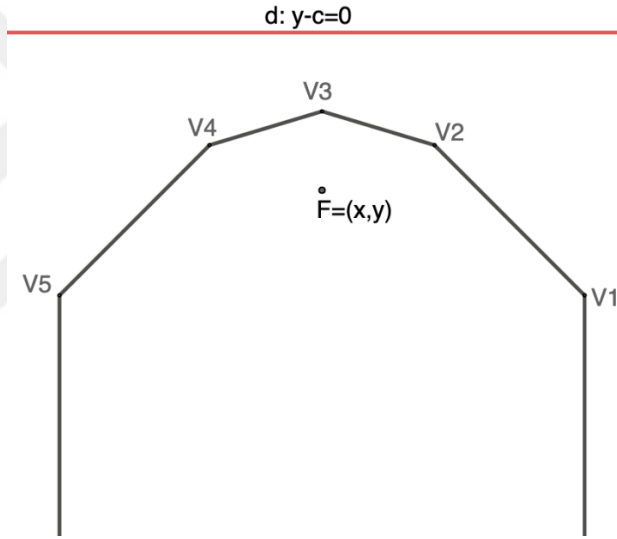
$$\mathcal{P}_D = \{N = (x, y) | d_D(N, d) = d_D(N, F), N \in \mathbb{R}_D^2\}$$

kümesinin geometrik yeri on iki yüzlü parabolüdür. F noktasına parabolün odağı, d dorusunu parabolün doğrultmanı denir.

Parabolün doğrultmanının yani d doğrusunun eğimi m olsun. $m \in (1 - \lambda, \infty)$ ise parabol beş parçalı, $m \in (-\infty, 1 - \lambda]$ ise parabol altı parçalıdır. Buna göre beş parçalı bir on iki yüzlü parabolü Şekil 3.13. daki gibi, altı parçalı on iki yüzlü parabol de Şekil 3.14 teki gibidir.

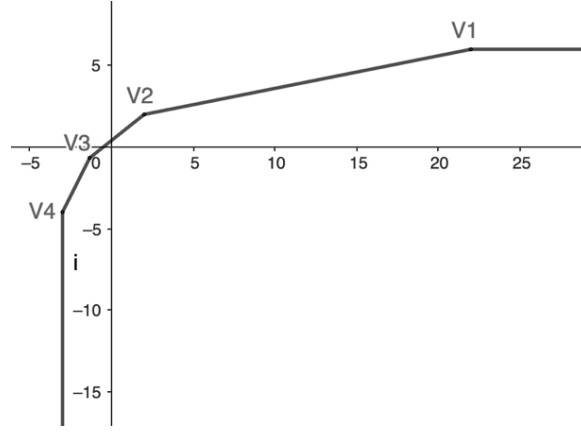


Şekil 3.13. Beş parçalı on iki yüzlü parabolü.



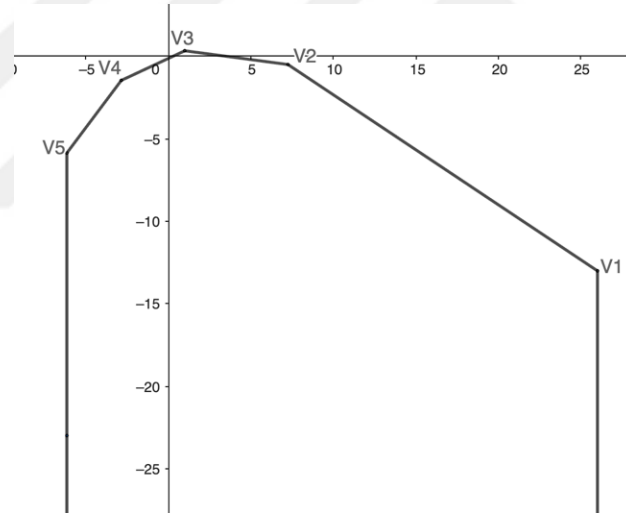
Şekil 3.14. Altı parçalı on iki yüzlü parabolü.

Örnek 3.7: Doğrultmanı $d: -x + y - 4 = 0$ ve odağı $F = (2,2)$ olan on iki yüzlü parabolü Şekil 3.15 daki paraboldür.



Şekil 3.15. $d: -x + y - 4 = 0$ doğrultmanlı ve $F = (2, 2)$ odaklı on iki yüzlü parabolü.

Örnek 3.8: Doğrultman doğrusu $d: \frac{1}{3}(x + 1) = y$ ve odağı $F = (1, -3)$ olan on iki yüzlü parabolü Şekil 3.11 daki paraboldür.



Şekil 3.16. $d: \frac{1}{3}(x + 1) = y$ doğrultmanlı ve $F = (1, -3)$ odaklı on iki yüzlü parabolü.

4. ON İKİ YÜZLÜ DÜZLEMİNDE ve ON İKİ YÜZLÜ UZAYINDA İNVERSİYON

Bu bölümde öncelikle On iki yüzlü düzleminde çembere ve elipse göre inversiyonlar tanımlanarak bazı özellikleri değerlendirilecektir. Daha sonrasında ise On iki yüzlü uzayında bir küreye göre inversiyon tanımlanıp bazı özellikleri incelenecektir. Bu bölümdeki tanımlamaların yapılması ve özelliklerin incelenmesi [29-31] kaynaklarının ışığında gerçekleştirilmiştir.

4.1 On iki yüzlü Düzleminde Çembere Göre İncersiyon

Tanım 4.1.1: N_∞ sonsuzdaki bir ideal nokta olmak üzere $\mathbb{R}_D^2 \cup \{N_\infty\}$ genişletilmiş on iki yüzlü düzleminde merkezi O , yarıçapı r olan $\mathcal{C}_D$ on iki yüzlü çemberine göre

$$I_{\mathcal{C}_D(O,r)}: \mathbb{R}_D^2 \cup \{N_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_D^2 \cup \{N_\infty\}$$

inversiyonu, her $N \in \mathbb{R}_D^2$ için $N' \in \overrightarrow{ON}$ ışını üzerinde bir nokta olmak üzere

$$d_D(O, N) \cdot d_D(O, N') = r^2 \quad (4.1)$$

koşulunu sağlayan ve $I_{\mathcal{C}_D(O,r)}(N) = N'$, $I_{\mathcal{C}_D(O,r)}(N_\infty) = O$, $I_{\mathcal{C}_D(O,r)}(O) = N_\infty$ biçiminde tanımlanan genişletilmiş on iki yüzlü düzleminin kendi kendisine bir dönüşümüdür. $\mathcal{C}_D$ inversiyon çemberi, O inversiyon merkezi, N' , N nin inversi ve r inversiyon yarıçapı olarak isimlendirilir.

Yardımcı Teorem 4.1.1: $\mathcal{C}_D$, $\mathbb{R}_D^2$ de merkezi O ve yarıçapı r olan bir inversiyon çemberi olsun. Bu durumda N noktası çemberin iç bölgesindeyse N' noktası çemberin dış bölgesindedir. Tersine N noktası $\mathcal{C}_D$ çemberinin dış bölgesindeyse N' noktasının çemberin iç bölgesindedir.

İspat: N , $\mathcal{C}_D$ çemberinin iç bölgesindeki bir nokta olsun. $d_D(O, N) < r$ ise Tanım 4.1.1 den

$$d_D(O, N) \cdot d_D(O, N') = r^2$$

olduğuna göre

$$r^2 = d_D(O, N) \cdot d_D(O, N') < r \cdot d_D(O, N')$$

Bu durumda $d_D(O, N') > r$ elde edilip N' noktası çemberin dış bölgesindedir.

Önerme 4.1.1: $\mathcal{C}_D$, merkezi O , yarıçapı r olan bir on iki yüzlü çemberi olmak üzere $I_{\mathcal{C}_D(O,r)}$ inversiyonuna göre $N = (x, y)$ noktasının inversi olan $N' = (x', y')$ nün koordinatları;

$$x' = \frac{r^2 x}{(\max\{\lambda|x|+|y|, |x|\})^2} \text{ ve } y' = \frac{r^2 y}{(\max\{\lambda|x|+|y|, |x|\})^2} \quad (4.2)$$

biçimindedir.

İspat: $I_{\mathcal{C}_D(O,r)}$ merkezi O , yarıçapı r olan $\mathcal{C}_D$ on iki yüzlü çemberine göre inversiyon olmak üzere O, N ve N' noktaları için $\overrightarrow{ON}$ ve $\overrightarrow{ON'}$ aynı doğrultulu ışınlar olduklarından $\overrightarrow{ON} = k \cdot \overrightarrow{ON'}$, $k \in \mathbb{R}^+$ olup $N = (x, y)$ için $N' = (x', y') = (kx, ky)$ dir. (4.1) denkleminde $(x', y') = (kx, ky)$ olduğu kullanılırsa

$$k = \frac{r^2}{(\max\{\lambda|x|+|y|, |x|\})^2}$$

olup k nın bu değeri $N' = (x', y') = (kx, ky)$ ifadesinde yerine yazılırsa (4.2) deki eşitlikler elde edilir.

Sonuç 4.1.1: $\mathcal{C}_D$ merkezi $O = (a, b)$, yarıçapı r olan bir on iki yüzlü çemberi olmak üzere $I_{\mathcal{C}_D(O,r)}$ inversiyonuna göre $N = (x, y)$ noktasının inversi olan nokta $N' = (x', y')$ nün koordinatları

$$x' = a + \frac{r^2(x-a)}{(\max\{\lambda|x-a|+|y-b|, |x-a|\})^2}$$

ve

$$y' = b + \frac{r^2(y-b)}{(\max\{\lambda|x-a|+|y-b|, |x-a|\})^2}$$

biçimindedir.

Sıradaki teorem Öklidyen düzlemde çembere göre inversiyon altında çember ve doğrular arasındaki ilişkilere benzer ilişkileri $\mathbb{R}_D^2$ de tanımlanan çembere göre inversiyon için ifade etmektedir.

Teorem 4.1.1: $I_{\mathcal{C}_D(O,r)}$ merkezi O yarıçapı r olan $\mathcal{C}_D$ on iki yüzlü çemberine göre inversiyon olmak üzere

- i) on iki yüzlü inversiyon merkezi O dan geçen doğrular $I_{\mathcal{C}_D(O,r)}$ altında kendisine dönüşürler.
- ii) on iki yüzlü inversiyon merkezi O dan geçmeyen doğrular $I_{\mathcal{C}_D(O,r)}$ altında ya bir doğru parçası ve iki parabolik yaydan oluşan kapalı bir eğriye ya da üç parabolik yaydan oluşan kapalı bir eğriye dönüşür. (Bknz Şekil 4.1.1)
- iii) on iki yüzlü inversiyon merkezi O yu merkez kabul eden on iki yüzlü çemberleri $I_{\mathcal{C}_D(O,r)}$ altında O merkezli on iki yüzlü çemberlerine dönüşürler. (Bknz Şekil 4.1.2)

- iv) on iki yüzlü inversiyon merkezi O dan geçmeyen on iki yüzlü çemberleri $I_{C_D(O,r)}$ altında kapalı bir eğriye dönüşürler ancak bu eğri bir on iki yüzlü çemberi değildir.
- v) on iki yüzlü inversiyon merkezi O dan geçen on iki yüzlü çemberleri $I_{C_D(O,r)}$ altında kapalı olmayan bir eğriye dönüşürler ancak bu eğri O dan geçmeyen bir doğru değildir.

İspat: Teoremin ifadesindeki yalnızca (i) ve (ii) şıkları için ispat verilecektir. Diğer durumların ispatı benzer şekilde kolaylıkla elde edilir.

$l, \mathbb{R}_D^2$ de $ax + by + c = 0$ denklemi ile verilen doğru ve $I_{C_D(O,r)}$ merkezi O yarıçapı r olan C_D on iki yüzlü çemberine göre inversiyon olsun. Bu durumda l doğrusunun $I_{C_D(O,r)}$ altındaki görüntüsü denklem (4.2) kullanılarak

$$\frac{a r^2 x'}{(\max\{\lambda |x'| + |y'|, |x'|\})^2} + \frac{b r^2 y'}{(\max\{\lambda |x'| + |y'|, |x'|\})^2} + c = 0$$

biçiminde ya da bu denklem düzenlenirse

$$a r^2 x' + b r^2 y' + c(\max\{\lambda |x'| + |y'|, |x'|\})^2 = 0 \quad (4.3)$$

biçiminde olacaktır. (4.3) denklemi a, b, c katsayılarının seçimi ve maksimum ifadesinin sonucuna göre aşağıdaki durumlardan biri olarak elde edilir.

Durum 1: $\lambda |x'| + |y'| \geq |x'|$ ise (4.3) denklemi

$$a r^2 x' + b r^2 y' + c(\lambda |x'| + |y'|)^2 = 0 \quad (4.4)$$

biçiminde olup

Durum 1.1: $c = 0$ ve $\exists a, b \neq 0$ ise (4.4) denklemi $ax' + by' = 0$ olup l doğrusunun kendisidir.

Durum 1.2: $c \neq 0, a = 0$ ve $b \neq 0$ ise $by + c = 0$ doğrusunun inversi

$$b r^2 y' + c \lambda^2 x'^2 + c y'^2 + 2c \lambda |x'| |y'| = 0$$

parabolüdür. Bu durumda bu parabol

- i) $x' \geq 0, y' \geq 0$ veya $x' \leq 0, y' \leq 0$ ise $b r^2 y' + c \lambda^2 x'^2 + c y'^2 + 2c \lambda x' y' = 0$
- ii) $x' \geq 0, y' \leq 0$ veya $x' \leq 0, y' \geq 0$ ise $b r^2 y' + c \lambda^2 x'^2 + c y'^2 - 2c \lambda x' y' = 0$

biçimindedir.

Durum 1.3: $c \neq 0, b = 0$ ve $a \neq 0$ ise $ax + c = 0$ doğrusunun inversi

$$a r^2 x' + c y'^2 + 2c \lambda |x'| |y'| = 0$$

parabolüdür. Bu durumda bu parabol

- i) $x' \geq 0, y' \geq 0$ veya $x' \leq 0, y' \leq 0$ ise $ar^2x' + c\lambda^2x'^2 + cy'^2 + 2c\lambda x'y' = 0$
- ii) $x' \geq 0, y' \leq 0$ veya $x' \leq 0, y' \geq 0$ ise $ar^2x' + c\lambda^2x'^2 + cy'^2 - 2c\lambda x'y' = 0$

biçimindedir.

Durum 1.4: $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ ise $ax + by + c = 0$ doğrusunun inversi

$$ar^2x' + br^2y' + c(\lambda|x'| + |y'|)^2 = 0$$

denklemine sahiptir. Bu durumda bu denklem

- i) $x' \geq 0, y' \geq 0$ veya $x' \leq 0, y' \leq 0$ ise $r^2x' + br^2y' + c\lambda^2x'^2 + cy'^2 + 2c\lambda x'y' = 0$
- ii) $x' \geq 0, y' \leq 0$ veya $x' \leq 0, y' \geq 0$ ise $ar^2x' + br^2y' + c\lambda^2x'^2 + cy'^2 - 2c\lambda x'y' = 0$

olup bir doğru veya parabol belirtir.

Durum 2: $\lambda|x'| + |y'| \leq |x'|$ ise (4.3) denklemi

$$cx'^2 + br^2y' + ar^2x' = 0 \quad (4.5)$$

biçiminde olup

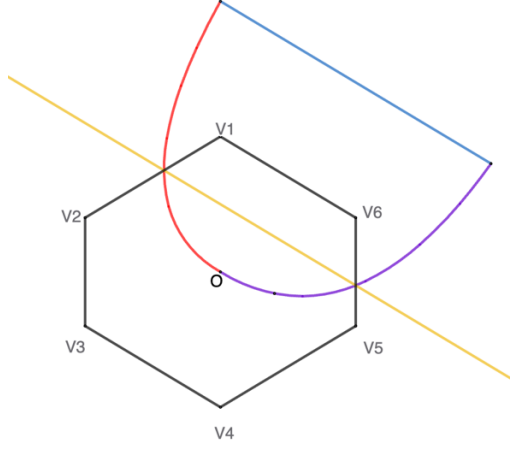
Durum 2.1: $c = 0$ ve $\exists a, b \neq 0$ ise (4.5) denklemi $ax' + by' = 0$ olup l doğrusunun kendisidir.

Durum 2.2: $c = 0$ ve $a = 0, b \neq 0$ ise (4.5) denklemi $cx'^2 + br^2y' = 0$ parabolüdür.

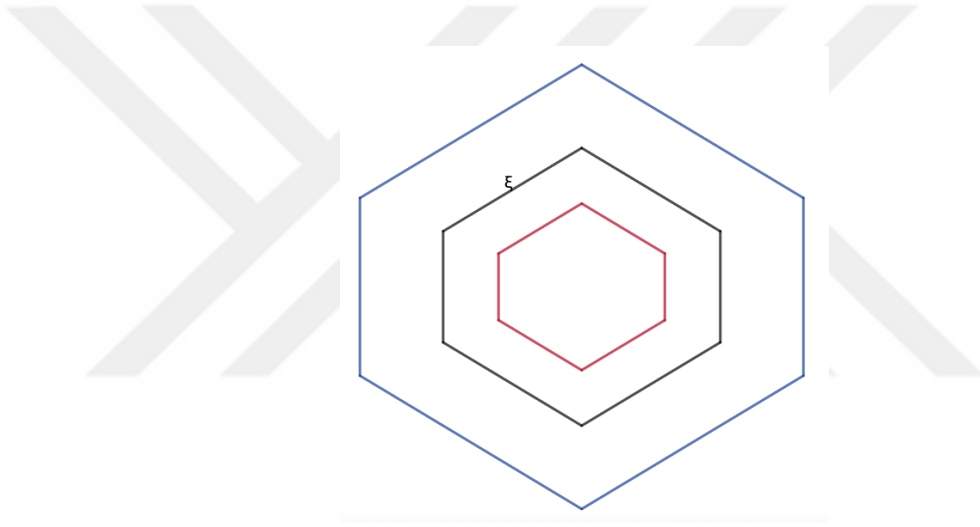
Durum 2.3: $c \neq 0, a \neq 0$ ve $b = 0$ ise (4.5) denklemi $ar^2x' + cx'^2 = 0$

doğrusudur.

Durum 2.4: $c \neq 0, a \neq 0$ ve $b \neq 0$ ise (4.5) denklemi $ar^2x' + br^2y' + cx'^2 = 0$ parabolüdür.



Şekil 4.1. O merkezli on iki yüzlü çemberinin $I_{C_D(O,r)}$ inveriyonu altındaki görüntüsü.



Şekil 4.2. $(1 - \lambda)x + by + c = 0$ doğrusunun $I_{C_D(O,r)}$ inveriyonu altındaki görüntüsü.

4.2. $\mathbb{R}_D^2$ de Elipse Göre İnverson

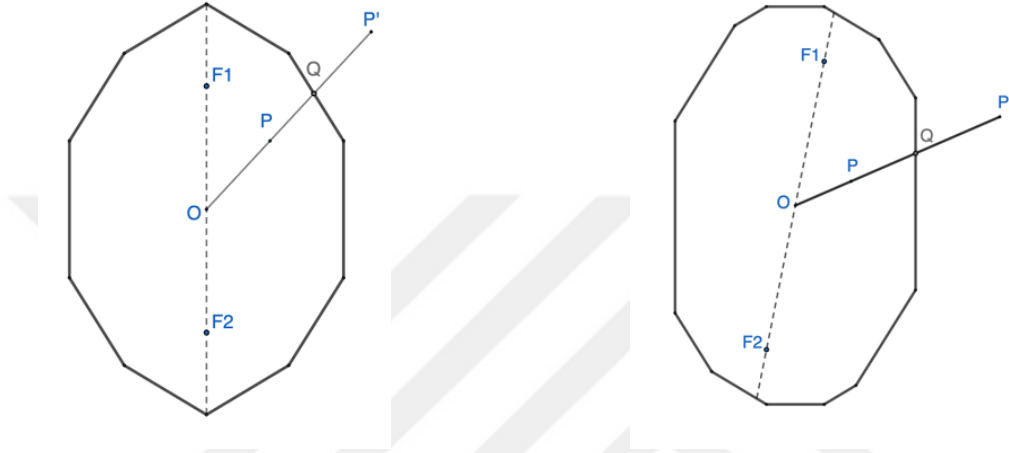
Tanım 4.2.1: N_∞ , sonsuzdaki bir ideal nokta olmak üzere $\mathbb{R}_D^2 \cup N_\infty$ genişletilmiş on iki yüzlü düzleminde merkezinde merkezi O , sabiti k olan $\mathcal{E}_D$ on iki yüzlü elipsine göre

$$I_{\mathcal{E}_D(O,k)}: \mathbb{R}_D^2 \cup \{N_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_D^2 \cup \{N_\infty\}$$

inveriyonu, her $N \in \mathbb{R}_D^2$ için $N', \overrightarrow{ON}$ ışını üzerinde bir nokta ve $Q, \overrightarrow{ON}$ ışını ile $\mathcal{E}_D$ nin kesim noktası olmak üzere

$$d_D(O, N) \cdot d_D(O, N') = [d_D(O, Q)]^2$$

koşulunu sağlayan ve $I_{\mathcal{E}_D(O,k)}(N) = N'$, $I_{\mathcal{E}_D(O,k)}(N_\infty) = O$, $I_{\mathcal{E}_D(O,k)}(O) = N_\infty$ biçiminde tanımlanan, genişletilmiş on iki yüzlü düzleminin kendi kendisine bir dönüşümüdür. $\mathcal{E}_D$ inversiyon elipsi, O inversiyon merkezi N' N nin inversi ve $\varepsilon: d_D(O, Q)$ inversiyon yarıçapı olarak isimlendirilir.



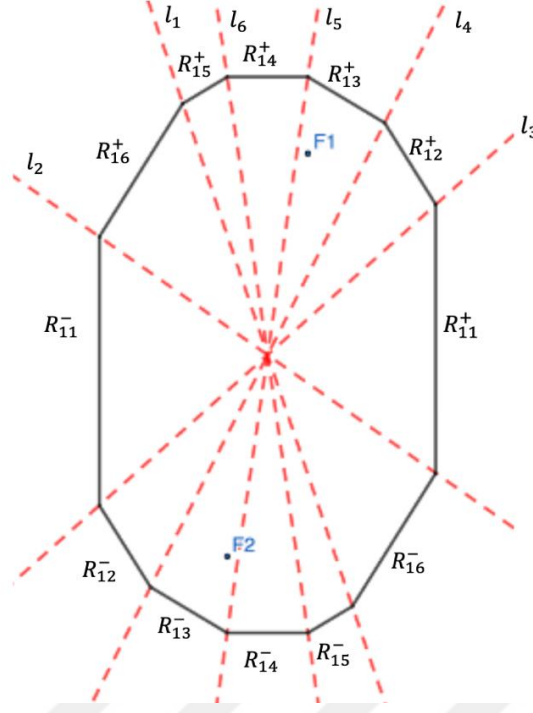
Şekil 4.3. On iki yüzlü Elipse göre bir N noktasının inversi.

Dikkat edilirse bir elipse göre inversiyonun bir çembere göre inversiyondan en büyük farkı yarıçapın sabit olmamasıdır.

Yardımcı Teorem 4.2.1: $\mathcal{E}_D$ on iki yüzlü düzlemde F_1 ve F_2 odaklı, k sabitli ve merkezi $O = (a, b)$ olan bir elips olsun. Bu durumda N noktası elipsin iç bölgesindeyse N' noktası elipsin dış bölgesinde olup tersi de geçerlidir.

İspat: İspat Yardımcı Teorem 4.1.1 in ispatına benzer biçimde kolaylıkla yapılabilir.

Tanım 4.2.2: O merkezli, sabiti k olan, $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ odaklı I. tip yani on iki yüzlü onikigen elipsi $\mathcal{E}_D$ ve bu elipsin köşe koordinatları Şekil 4.4 de verildiği gibi olsun. $i = 1, 2 \dots 6$ olmak üzere l_i doğruları V_i köşelerinden geçen doğrulardır.



Şekil 4.4. Onikigen On İki Yüzlü elipsine göre bölgeler.

$R_{11}^+ \cup R_{11}^-$ bölgesi l_3 ve l_4 doğruları ile sınırlandırılan bölge olup bu bölgedeki bir N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi;

$$\frac{(2\lambda - 1)(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 + y_2) - (y_1 - y_2) + (1 - \lambda)k}{\lambda(x_1 + x_2) - y_1 + y_2 + k} < m < \frac{(1 - 2\lambda)(x_1 - x_2) - \lambda(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2) + (\lambda - 1)k}{\lambda(x_1 + x_2) - (y_1 - y_2) + k}$$

dır.

$R_{12}^+ \cup R_{12}^-$ bölgesi l_4 ve l_5 doğruları ile sınırlandırılan bölge olup bu bölgedeki bir N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi;

$$\frac{(1 - 2\lambda)(x_1 - x_2) - \lambda(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2) + (\lambda - 1)k}{\lambda(x_1 + x_2) - (y_1 - y_2) + k} < m < \frac{(2\lambda - 1)(x_2 - x_1) - \lambda(y_2 - y_1) + (y_1 + y_2) + (1 - \lambda)k}{\lambda(x_2 - x_1) + 2x_1 - y_1 + y_2 + k}$$

dır.

$R_{13}^+ \cup R_{13}^-$ bölgesi l_5 ve l_6 doğruları ile sınırlandırılan bölge olup bu bölgedeki bir N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi;

$$\frac{(2\lambda - 1)(x_2 - x_1) - \lambda(y_2 - y_1) + (y_1 + y_2) + (1 - \lambda)k}{\lambda(x_2 - x_1) + 2x_1 - y_1 + y_2 + k} < m < \frac{-\lambda(x_1 - x_2) + y_1 + y_2 + k}{x_1}$$

dır.

$R_{14}^+ \cup R_{14}^-$ bölgesi l_6 ve l_1 doğruları ile sınırlandırılan bölge olup bu bölgedeki bir N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi;

$$m < \frac{\lambda(x_2 - x_1) + y_1 + y_2 + k}{x_2} \text{ ve } \frac{-\lambda(x_1 - x_2) + y_1 + y_2 + k}{x_1} < m$$

dır.

$R_{15}^+ \cup R_{15}^-$ bölgesi l_1 ve l_2 doğruları ile sınırlandırılan bölge olup bu bölgedeki bir N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi;

$$\frac{-\lambda(x_1 - x_2) + y_1 + y_2 + k}{x_1} < m < \frac{\lambda(x_2 - x_1) + y_1 + y_2 + k}{x_2}$$

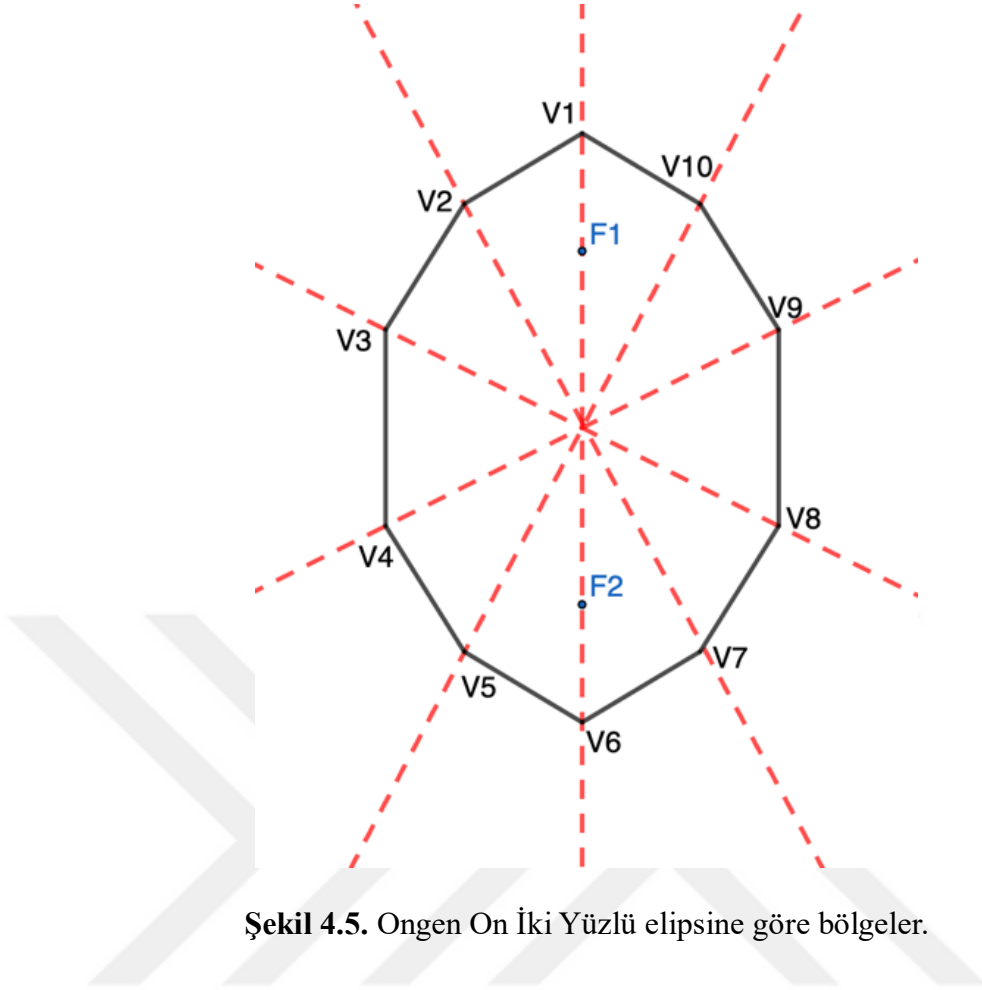
dır.

$R_{16}^+ \cup R_{16}^-$ bölgesi l_2 ve l_3 doğruları ile sınırlandırılan bölge olup bu bölgedeki bir N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi;

$$\frac{\lambda(x_2 - x_1) + y_1 + y_2 + k}{x_2} < m < \frac{(1 - 2\lambda)(x_1 - x_2) - \lambda(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2) - (1 - \lambda)k}{-\lambda(x_1 + x_2) + y_1 - y_2 - k}$$

dır.

Tanım 4.2.3: $O = (0,0)$ merkezli, sabiti k olan, $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ odaklı II. tip yani on iki yüzlü ongen elipsi $\mathcal{E}_D$ ve bu elipsin köşe koordinatları Şekil 4.5 de verildiği gibi olsun. $i = 1, 2 \dots 5$ olmak üzere l_i doğruları V_i köşelerinden geçen doğrulardır.



Şekil 4.5. Ongen On İki Yüzlü elipsine göre bölgeler.

$R_{21}^+ \cup R_{21}^-$ bölgesi l_3 ve l_4 doğruları ile sınırlandırılan bölge olup bu bölgedeki bir N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi;

$$\frac{(2\lambda + 1)y_1 - (\lambda + 1)y_2 - k}{\lambda x_1 + y_1 - y_2 - k} < m < \frac{-y_1 + (\lambda + 1)y_2 + k}{\lambda x_1 + y_1 - y_2 - k}$$

dır.

$R_{22}^+ \cup R_{22}^-$ bölgesi l_4 ve l_5 doğruları ile sınırlandırılan bölge olup bu bölgedeki bir N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi;

$$\frac{-y_1 + (\lambda + 1)y_2 + k}{\lambda x_1 + y_1 - y_2 - k} < m < \frac{(\lambda + 3)y_2 - y_1 - k}{(\lambda + 2)x_1 - y_1 + y_2 - k}$$

dır.

$R_{23}^+ \cup R_{23}^-$ bölgesi l_5 ve l_1 doğruları ile sınırlandırılan bölge olup bu bölgedeki bir N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi;

$$\frac{(\lambda + 3)y_2 - y_1 - k}{(\lambda + 2)x_1 - y_1 + y_2 - k} < m$$

dır.

$R_{24}^+ \cup R_{24}^-$ bölgesi l_1 ve l_2 doğruları ile sınırlandırılan bölge olup bu bölgedeki bir N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi;

$$m < \frac{y_1 + (\lambda + 1)y_2 + k}{(\lambda + 2)}$$

dır.

$R_{25}^+ \cup R_{25}^-$ bölgesi l_2 ve l_3 doğruları ile sınırlandırılan bölge olup bu bölgedeki bir N noktası için $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi;

$$\frac{y_1 + (\lambda + 1)y_2 + k}{(\lambda + 2)x_1 - y_1 + y_2 - k} < m < \frac{(2\lambda + 1)y_1 - (\lambda + 1)y_2 - k}{\lambda x_1 + y_1 - y_2 - k}$$

dır.

Önerme 4.2.1: $I_{\mathcal{E}_D}(O, k)$, odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$, merkezi $O = (0,0)$ ve sabiti k olan $\mathcal{E}_D$ elipsine göre on iki yüzlü inversiyon olsun. $\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_{D\Delta_1}$, $N' = (x', y')$ noktası $N = (x, y)$ nin $I_{\mathcal{E}_D(O, k)}$ ya göre inversi, $x_1 > x_2$, $y_1 > y_2$ ve m $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi olmak üzere

$$N' = (x', y') = \begin{cases} \left(\frac{(k+x_1+x_2)^2}{4x}, \frac{(k+x_1+x_2)^2}{4x^2}y \right) & , N \in R_{11}^+ \cup R_{11}^- \text{ ise} \\ \left(\frac{(\lambda x_2 + y_2 + x_1 + k)^2}{(m+\lambda+1)^2 x}, \frac{(\lambda x_2 + y_2 + x_1 + k)^2 y}{(m+\lambda+1)^2 x^2} \right) & , N \in R_{12}^+ \cup R_{12}^- \text{ ise} \\ \left(\frac{(\lambda(x_1+x_2) + y_1 + y_2 + k)^2}{4(m+\lambda)^2 x}, \frac{(\lambda(x_1+x_2) + y_1 + y_2 + k)^2 y}{4(m+\lambda)^2 x^2} \right) & , N \in R_{13}^+ \cup R_{13}^- \text{ ise} \\ \left(\frac{(-\lambda(x_1+x_2) + (y_1+y_2) - k)^2}{m^2 x}, \frac{(-\lambda(x_1+x_2) + (y_1+y_2) - k)^2 y}{m^2 x^2} \right) & , N \in R_{14}^+ \cup R_{14}^- \text{ ise} \\ \left(\frac{(-\lambda(x_1+x_2) + y_1 + y_2 + k)^2}{4(m-\lambda)^2 x}, \frac{(-\lambda(x_1+x_2) + y_1 + y_2 + k)^2 y}{4(m-\lambda)^2 x^2} \right) & , N \in R_{15}^+ \cup R_{15}^- \text{ ise} \\ \left(\frac{(-\lambda x_2 + y_2 - x_1 + k)^2}{(m-\lambda-1)^2 x}, \frac{(-\lambda x_2 + y_2 - x_1 + k)^2 y}{(m-\lambda-1)^2 x^2} \right) & , N \in R_{16}^+ \cup R_{16}^- \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

Eğer $\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_{D_{\Delta 2}}$, $N' = (x', y')$ noktası $N = (x, y)$ nin $I_{\mathcal{E}_D(O, k)}$ ya göre inversi, $x_1 > x_2, y_1 > y_2$ ve $m \overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi ise

$$N' = (x', y') = \begin{cases} \left(\frac{(x_2 - x_1 + k)^2}{4x}, \frac{(x_2 - x_1 + k)^2 y}{4x^2} \right) & N \in R_{21}^+ \cup R_{21}^- \text{ ise} \\ \left(\frac{[k + y_1 - y_2 + \lambda(x_1 + x_2)]^2}{4x(m+\lambda)^2}, \frac{[k + y_1 - y_2 + \lambda(x_1 + x_2)]^2 y}{4x^2(m+\lambda)^2} \right) & N \in R_{22}^+ \cup R_{22}^- \text{ ise} \\ \left(\frac{[(y_1 + y_2) + k - 2\lambda(x_1 + x_2)]^2}{4(m+\lambda)^2 x}, \frac{[(y_1 + y_2) + k - 2\lambda(x_1 + x_2)]^2 y}{4(m+\lambda)^2 x^2} \right) & N \in R_{23}^+ \cup R_{23}^- \text{ ise} \\ \left(\frac{[y_1 + y_2 + k - \lambda(x_1 + x_2)]^2}{(m-\lambda)^2 x}, \frac{[y_1 + y_2 + k - \lambda(x_1 + x_2)]^2 y}{(m-\lambda)^2 x^2} \right) & N \in R_{24}^+ \cup R_{24}^- \text{ ise} \\ \left(\frac{(y_2 - x_1 + \lambda x_2)^2}{(m-1-\lambda)^2 x}, \frac{(y_2 - x_1 + \lambda x_2)^2 y}{(m-1-\lambda)^2 x^2} \right) & N \in R_{25}^+ \cup R_{25}^- \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

İspat: Odakları $F_1 = (x_1, y_1), F_2 = (x_2, y_2)$ ve sabiti k olan on iki yüzlü elipsi $\mathcal{E}_D$

$$\mathcal{E}_D = \{Q \in \mathbb{R}_D^2 : |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = k, Q = (x, y), k \geq d_D(F_1, F_2)\}.$$

denklemini sağlayan noktalar kümesidir. $N = (x, y)$ ve $N' = (x', y')$ $\mathcal{E}_D(O, k)$ ye göre invers noktalar ise O, N ve N' doğrudadır ve $\overrightarrow{ON}$ ile $\overrightarrow{ON'}$ ışınları aynı doğrultuya sahiptir. Böylece herhangi bir $t \in \mathbb{R}^+$ için $\overrightarrow{ON'} = t\overrightarrow{ON}$ dir. $d_D(O, N).d_D(O, N') = [d_D(O, Q)]^2$ olduğundan

$$t = \frac{[d_D(O, Q)]^2}{(|x|)^2}$$

bulunur. t nin bu değeri $(x', y') = (tx, ty)$ ifadesinde yerine yazılarak istenilen sonuçlar elde edilir. Örneğin; $N \in R_{11}^+ \cup R_{11}^-$ ise

$$d_D(O, Q) = \left(\frac{(\lambda(x_1+x_2)-y_1+y_2+k)^2}{4\lambda^2} \right) \max\{\lambda + |m|, 1\}.$$

Böylece

$$(x', y') = \left(\frac{(\lambda(x_1+x_2)-y_1+y_2+k)^2}{4\lambda^2 x}, \frac{(\lambda(x_1+x_2)-y_1+y_2+k)^2 y}{4\lambda^2 x^2} \right)$$

elde edilir.

Önerme 4.2.2: $I_{\mathcal{E}_D}(O, k)$ odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$, merkezi $M = (a, b)$ ve sabiti k olan $\mathcal{E}_D$ elipsine göre on iki yüzlü eliptik inversiyon olsun. $N' = (x', y')$ noktası $N = (x, y)$ nin $I_{\mathcal{E}_D}(O, k)$ ya göre inversi

$$N' = (x', y') = \begin{cases} \left(a + \frac{(\lambda(x_1+x_2-2a)-(y_1-y_2+2b)+k)^2}{4\lambda^2(x-a)}, b + \frac{(\lambda(x_1+x_2-2a)-(y_1-y_2+2b)+k)^2(y-b)}{4\lambda^2(x-a)^2} \right) & N \in R_{11}^+ \cup R_{11}^- \text{ ise} \\ \left(a + \frac{(\lambda x_2 + y_2 + x_1 + k - 2a - b)^2}{(m+\lambda+1)^2(x-a)}, b + \frac{(\lambda x_2 + y_2 + x_1 + k - 2a - b)^2(y-b)}{(m+\lambda+1)^2(x-a)^2} \right) & N \in R_{12}^+ \cup R_{12}^- \text{ ise} \\ \left(a + \frac{(\lambda(x_1+x_2-2a)+y_1+y_2-2b-k)^2}{4(m+\lambda)^2(x-a)}, b + \frac{(\lambda(x_1+x_2-2a)+y_1+y_2-2b-k)^2 y}{4(m+\lambda)^2(x-a)^2} \right) & N \in R_{13}^+ \cup R_{13}^- \text{ ise} \\ \left(a + \frac{(\lambda(x_1+x_2-2a)+y_1+y_2-2b-k)^2}{4(m+\lambda)^2(x-a)}, b + \frac{(\lambda(x_1+x_2-2a)+y_1+y_2-2b-k)^2 y}{4(m+\lambda)^2(x-a)^2} \right) & N \in R_{14}^+ \cup R_{14}^- \text{ ise} \\ \left(a + \frac{(-\lambda(x_1+x_2-2a)+y_1+y_2-2b+k)^2}{4(m-\lambda)^2(x-a)}, b + \frac{(-\lambda(x_1+x_2-2a)+y_1+y_2-2b+k)^2 y}{4(m-\lambda)^2(x-a)^2} \right) & N \in R_{15}^+ \cup R_{15}^- \text{ ise} \\ \left(a + \frac{(-\lambda x_2 - 2a + y_2 - b - x_1 + k)^2}{(m-\lambda-1)^2(x-a)}, b + \frac{(-\lambda x_2 - 2a + y_2 - b - x_1 + k)^2 y}{(m-\lambda-1)^2(x-a)^2} \right) & N \in R_{16}^+ \cup R_{16}^- \text{ ise} \end{cases}$$

Eğer $\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_{D_{\Delta 2}}$, $N' = (x', y')$ noktası $N = (x, y)$ nin $I_{\mathcal{E}_D}(O, k)$ ya göre inversi, $x_1 > x_2, y_1 > y_2$ ve m $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi ise

$$N' = (x', y') = \begin{cases} \left(a + \frac{(x_2-x_1-2a+k)^2}{4(x-a)}, b + \frac{(x_2-x_1-2a+k)^2(y-b)}{4(x-a)^2} \right) & N \in R_{21}^+ \cup R_{21}^- \text{ ise} \\ \left(a + \frac{[k+y_1-y_2-2b+\lambda(x_1+x_2-2a)]^2}{4(x-a)(m+\lambda)^2}, b + \frac{[k+y_1-y_2-2b+\lambda(x_1+x_2-2a)]^2(y-b)}{4(x-a)^2(m+\lambda)^2} \right) & N \in R_{22}^+ \cup R_{22}^- \text{ ise} \\ \left(a + \frac{[(y_1+y_2-2b)+k-2\lambda(x_1+x_2-2a)]^2}{4(m+\lambda)^2(x-a)}, b + \frac{[(y_1+y_2-2b)+k-2\lambda(x_1+x_2-2a)]^2(y-b)}{4(m+\lambda)^2(x-a)^2} \right) & N \in R_{23}^+ \cup R_{23}^- \text{ ise} \\ \left(a + \frac{[y_1+y_2-2b+k-\lambda(x_1+x_2-2a)]^2}{(m-\lambda)^2(x-a)}, b + \frac{[y_1+y_2-2b+k-\lambda(x_1+x_2-2a)]^2(y-b)}{(m-\lambda)^2(x-a)^2} \right) & N \in R_{24}^+ \cup R_{24}^- \text{ ise} \\ \left(a + \frac{(y_2-b-x_1-a+\lambda(x_2-a))^2}{(m-1-\lambda)^2(x-a)}, b + \frac{(y_2-b-x_1-a+\lambda(x_2-a))^2(y-b)}{(m-1-\lambda)^2(x-a)^2} \right) & N \in R_{25}^+ \cup R_{25}^- \text{ ise} \end{cases}$$

İspat: Tüm ötelemelerin on iki yüzlü düzleminin izometrilere olmalarından dolayı elde edilen bu önermenin ispatı açıktır.

Öklidyen düzlemde elipse göre inversiyon altında çember ve doğrular arasındaki ilişkilere benzer ilişkiler $\mathbb{R}_D^2$ de tanımlanan elipse göre inversiyon için sıradaki teoremlerle verilmektedir.

Teorem 4.2.1:

- i) İversiyon merkezi O dan geçen bir doğru $I_{\mathcal{E}_D}(O, k)$ altında kendisine dönüşür.

- ii) İnverson merkezinden geçmeyen bir doğru $I_{\mathcal{E}_D(O,k)}$ altında $\mathcal{E}_D(O,k) = \mathcal{E}_{D_{\Delta_1}}(O,k)$ ise 6 parabolik yay ya da 5 parabolik yay ile bir doğru parçasından oluşan kapalı bir eğriye, $\mathcal{E}_D(O,k) = \mathcal{E}_{D_{\Delta_2}}(O,k)$ ise 5 parabolik yay ya da 4 parabolik yay ile bir doğru parçasından oluşan kapalı bir eğriye dönüşür.
- iii) İnverson merkezini merkez kabul eden ve inverson elipsi ile aynı tipte olan bir on iki yüzlü elips $I_{\mathcal{E}_D(O,k)}$ altında inverson merkezini merkez kabul eden yine aynı tipten bir on iki yüzlü elipsine dönüşürler.
- iv) İnverson merkezini merkez kabul eden ve inverson elipsi ile aynı tipte olmayan bir on iki yüzlü elips $I_{\mathcal{E}_D(O,k)}$ altında kapalı bir eğriye dönüşür.
- v) İnverson merkezinden geçmeyen bir on iki yüzlü elips $I_{\mathcal{E}_D(O,k)}$ altında kapalı bir eğriye dönüşür ancak bu eğri bir on iki yüzlü elips değildir.
- vi) İnverson merkezi O dan geçen bir on iki yüzlü elipsi $I_{\mathcal{E}_D(O,k)}$ altında kapalı olmayan bir eğriye dönüşür ancak bu eğri merkezden geçmeyen bir doğru değildir.

İspat: Teoremin ifadesindeki her durum eliptik inversonun tanımını kullanarak kolaylıkla gösterilebilir.

4.3. $\mathbb{R}_D^3$ de Küreye Göre İnverson

Bu bölümde d_D , $\mathbb{R}^3$ de tanımlanmış, Tanım 2.5 te verilen on iki yüzlü metriğini göstermek üzere bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzay olan $\mathbb{R}_D^3$ de on iki yüzlü küresine göre inverson tanımlamakta ve bu dönüşüme ait temel kavram ve özellikler verilmektedir.

Tanım 4.3.1: On iki yüzlü uzayında O merkezli ve r yarıçaplı bir $\mathcal{S}$ küresine göre inverson $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}$ şeklinde gösterilsin. N_∞ on iki yüzlü düzlemine eklenmiş ideal nokta olsun. Bu durumda $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}: \mathbb{R}_D^3 \cup \{N_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_D^3 \cup \{N_\infty\}$ ve her $N \neq O$ için $d_D(O,N).d_D(O,N') = r^2$ koşulunu sağlayan ON ışını üzerindeki N' noktasına N nin inverson denir ve $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}(N) = N'$, $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}(O) = N_\infty$ ve $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}(N_\infty) = O$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.3.1: $\mathcal{S}$ on iki yüzölçümde merkezi O ve yarıçapı r olan bir küre olsun. Bu durumda $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}$ inversiyonu için N noktası kürenin iç bölgesindeyse N' noktası kürenin dış bölgesinde olup bu ifadenin tersi de geçerlidir.

İspat: N , $\mathcal{S}$ küresinin iç bölgesindeki bir nokta olsun. $d_D(O, N) < r$ ise inversiyon tanımından

$$d_D(O, N) \cdot d_D(O, N') = r^2$$

olup

$$r^2 = d_D(O, N) \cdot d_D(O, N') < r \cdot d_D(O, N').$$

dir. Bu durumda $d_D(O, N') > r$ elde edilir. Yani N' noktası kürenin dış bölgesindedir. Ters ifadesi de yani N noktası kürenin dış bölgesindeyse N' noktasının kürenin iç bölgesinde olduğu benzer şekilde ispatlanabilir.

Sonuç 4.3.1: $\mathbb{R}_D^3$ deki bir $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}$ küresel inversiyonu altında $\mathcal{S}$ nin kendisi nokta nokta sabit kalır.

Teorem 4.3.2: N ve N' , O merkezli r yarıçaplı $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}$ inversiyonuna göre invers noktalar ise $\lambda = \frac{r^2}{d_D(O, N)^2}$ olmak üzere

$$N' = \lambda N$$

dır.

İspat: $N = (x, y, z)$ ve $N' = (x', y', z')$ $O = (0,0,0)$ merkezli ve r yarıçaplı $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}$ inversiyonuna göre invers noktalar olsunlar. N ve N' , O noktasından çıkan aynı $\overrightarrow{ON}$ ışını üzerindeki noktalar olduklarından

$$\overrightarrow{ON'} = \lambda \overrightarrow{ON}, \lambda \in \mathbb{R}^+$$

ve buradan $(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ dir. Böylece $d_D(O, N) \cdot d_D(O, N') = r^2$ denklemi de kullanılırsa $\lambda = \frac{r^2}{d_D(O, N)^2}$ elde edilir ki bu da istenilen sonucu verir.

Dikkat edilirse N ve N' , $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}$ inversiyonuna göre invers noktalar olduklarından N nin koordinatları da N' nün koordinatları cinsinden Teorem 4.3.2 deki benzer yolla, $\lambda = \frac{r^2}{d_D(O, N)^2}$ olmak üzere $N = \lambda N'$ biçiminde elde edilebilir.

Teorem 4.3.3: $\mathcal{S}$ on iki yüzölçümde merkezi O ve yarıçapı r olan bir inversiyon küresi olsun. İversiyon merkezinden geçen herhangi bir doğru ya da inversiyon merkezini içeren herhangi bir düzlem $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}$ altında invaryanttır.

İspat: İncersiyon merkezinden geçen doğrunun $I_{D_D(O,r)}$ altında invarsyant olduğu Tanım 4.3.1 den açıktır. $Ax + By + Cz = 0$ düzleminin $I_{S_D(O,r)}$ altındaki incersi

$$A \frac{r^2 x'}{(d_D(O,N'))^2} + B \frac{r^2 y'}{(d_D(O,N'))^2} + C \frac{r^2 z'}{(d_D(O,N'))^2} = 0$$

Yani; $Ax' + By' + Cz' = 0$ dır.

Teorem 4.3.4: $\mathcal{S}$ on iki yüzlü uzayında merkezi O ve yarıçapı r olan bir incersiyon küresi olsun. Merkezi O olan bir on iki yüzlü kürenin $I_{S_D(O,r)}$ altındaki incersi yine bir on iki yüzlü küredir.

İspat: İncersiyon $\mathbb{R}_D^3$ de uzaklığı koruyan bir dönüşüm olduğundan merkezi $O = (0,0,0)$ ve yarıçapı r olan küre; $\mathcal{S} = \{N = (x, y, z): d_D(O, N) = r\}$ kümesinin elemanlarıdır.

$\mathcal{S}_1 = \{N = (x, y, z): d_D(O, N) = r_1\}$ şeklinde ifade edilen $\mathcal{S}_1$ küresinin $I_{S_D(O,r)}$ altında incersi;

$\mathcal{S}_1' = \{N = (x', y', z'): d_D(O, N') = \frac{r^2}{r_1}\}$ olur, yani yine bir on iki yüzlü küredir.

Teorem 4.3.5: $\mathcal{S}$ on iki yüzlü uzayında merkezi O ve yarıçapı r olan bir incersiyon küresi olsun. Bu durumda $I_{S_D(O,r)}$ küresel incersiyonuna göre $\mathcal{S}$ nin her bir köşesi, kenarı ve yüzü kendisine eşlenir. Yani $I_{S_D(O,r)}$ küresel incersiyonu altında $\mathcal{S}$ invarsyanttır.

İspat: Sonuç 4.3.1den $\mathcal{S}$ nin kendisi $I_{S_D(O,r)}$ altında nokta nokta sabit kalır. Dolayısıyla $\mathcal{S}$ nin her bir köşesi kenarı ve yüzü $I_{S_D(O,r)}$ altında invarsyanttır.

Sonuç 4.3.2: $N = (x, y, z)$ ve $N' = (x', y', z')$ merkezi $O = (x_0, y_0, z_0)$ ve yarıçapı r olan $I_{S_D(O,r)}$ incersiyonuna göre incers bir nokta çifti olsun. Bu durumda $\lambda = \frac{r^2}{d_D(O,N)^2}$ olmak üzere

$$N' - O = \lambda(N - O)$$

dır.

İspat: Ötelemeler $\mathbb{R}_D^3$ de izometrilere olduklarından, $\mathbb{R}_D^3$ de $(0,0,0)$ noktasını (x_0, y_0, z_0) noktasına öteleyerek istenen sonuç kolaylıkla elde edilir.

5. $\mathbb{R}_D^2$ VE $\mathbb{R}_D^3$ DE $I_{C_D(O,r)}$, $I_{E_D(O,k)}$ ve $I_{S_D(O,r)}$ İNVERSİYONLARI İÇİN ÇAPRAZ ORAN VE HARMONİK EŞLENİKLER

$I_{C_D(O,r)}$, $I_{E_D(O,k)}$ inversiyonu $\mathbb{R}_D^2$ de ve $I_{S_D(O,r)}$ inversiyonu $\mathbb{R}_D^3$ de birer izometri değildirler. Bu nedenle uzaklık fonksiyonu bu inversiyonlar altında korunmaz. Ancak çapraz oran uzaklık fonksiyonu içermesine rağmen bazı şartlarda inversiyon altında korunur. Bu nedenle bu bölümde sırasıyla on iki yüzlü düzlemde ve on iki yüzlü uzayda çapraz oran ve harmonik eşlenikler incelenecektir. Bölüm boyunca $i = 1,2$ olmak üzere $\mathbb{R}_D^{\Delta_i} = \{\mathbb{R}_D^{\Delta_1} = \mathbb{R}_D^2, \mathbb{R}_D^{\Delta_2} = \mathbb{R}_D^3\}$ şeklinde ifade edilecektir. Bu bölümdeki çalışmalar [29-31] numaralı kaynaklar ışığında gerçekleştirilmiştir.

Tanım 5.1: Bir l yönlü doğrusu üzerindeki herhangi iki nokta N_1 ve N_2 olmak üzere $\overline{N_1 N_2}$ doğru parçasının yönlendirilmiş on iki yüzlü uzunluğu $d_D[N_1, N_2]$ ile gösterilir. $\overline{N_1 N_2}$ doğru parçasını l ile aynı yöne sahipse $d_D[N_1, N_2] = d_D(N_1, N_2)$ aksi halde $d_D[N_1, N_2] = -d_D(N_1, N_2)$ dir.

Tanım 5.2: Yönlü bir doğru üzerindeki dört farklı nokta $N_1, N_2, N_3, N_4 \in \mathbb{R}_D^{\Delta_i}$ olsun. On iki yüzlü çapraz oranı

$$(N_1 N_2, N_3 N_4)_D = \frac{d_D[N_1, N_3]d_D[N_2, N_4]}{d_D[N_1, N_4]d_D[N_2, N_3]}$$

biçimindedir.

Sonuç 5.1 Yönlü bir doğru üzerindeki dört farklı nokta $N_1, N_2, N_3, N_4 \in \mathbb{R}_D^{\Delta_i}$ olsun. Hem N_3 hem de N_4 , N_1 ile N_2 arasındaysa veya N_3 ile N_4 ün hiçbiri N_1 ve N_2 nin arasında değilse $(N_1 N_2, N_3 N_4)_D$ pozitifdir.

İspat: N_3 ve N_4 ikisi birden, N_1 ile N_2 noktaları arasında olsun. $\overline{N_1 N_2}$ yönlü doğru parçası için on iki yüzlü çapraz oranı

$$(N_1 N_2, N_3 N_4)_D = \frac{d_D[N_1, N_3]d_D[N_2, N_4]}{d_D[N_1, N_4]d_D[N_2, N_3]}$$

olup $d_D[N_1, N_2] = d_D(N_1, N_2)$ olarak seçilirse

$$(N_1 N_2, N_3 N_4)_D = \frac{d_D(N_1, N_3)(-d_D(N_2, N_4))}{d_D(N_1, N_4)(-d_D(N_2, N_3))} = \frac{d_D(N_1, N_3)d_D(N_2, N_4)}{d_D(N_1, N_4)d_D(N_2, N_3)}$$

elde edilir, ve $(N_1 N_2, N_3 N_4)_D$ pozitiftir. N_3 ve N_4 ten hiçbirisi N_1 ve N_2 nin arasında olmaması halinde dört durum söz konusudur. Örneğin $N_4 - N_1 - N_2 - N_3$ sıralaması seçilsin Bu durumda on iki yüzlü çapraz oranı

$$\begin{aligned} (N_1 N_2, N_3 N_4)_D &= \frac{d_D[N_1, N_3]d_D[N_2, N_4]}{d_D[N_1, N_4]d_D[N_2, N_3]} \\ &= \frac{d_D(N_1, N_3)(-d_D(N_2, N_4))}{-d_D(N_1, N_4)d_D(N_2, N_3)} \\ &= \frac{d_D(N_1, N_3)d_D(N_2, N_4)}{d_D(N_1, N_4)d_D(N_2, N_3)} \end{aligned}$$

Sonuç 5.2: N_1, N_2, N_3 ve N_4 , $\mathbb{R}_D^{\Delta_i}$ deki yönlü bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $\{N_1, N_2\}$ ve $\{N_3, N_4\}$ nokta çiftleri birbirini ayırırsa, on iki yüzlü çapraz oranı $(N_1 N_2, N_3 N_4)_D$ negatiftir.

İspat: $\{N_1, N_2\}$ ve $\{N_3, N_4\}$ nokta çiftlerinin birbirini ayırması durumunda N_3 ve N_4 için; $N_3 - N_1 - N_4 - N_2$, $N_4 - N_1 - N_3 - N_2$, $N_1 - N_3 - N_2 - N_4$, $N_1 - N_4 - N_2 - N_3$ biçiminde dört farklı sıralı durum mevcuttur. Tüm sıralı durumların ispatı Tanım 5.1 ve Tanım 5.2 kullanılarak benzer şekilde yapılabileceğinden yalnızca $N_4 - N_1 - N_3 - N_2$ için inceleme yapılacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} (N_1 N_2, N_3 N_4)_D &= \frac{d_D[N_1, N_3]d_D[N_2, N_4]}{d_D[N_1, N_4]d_D[N_2, N_3]} \\ &= \frac{d_D(N_1, N_3)(-d_D(N_2, N_4))}{-d_D(N_1, N_4)d_D(N_2, N_3)} = -\frac{d_D(N_1, N_3)d_D(N_2, N_4)}{d_D(N_1, N_4)d_D(N_2, N_3)} \end{aligned}$$

olup $(N_1 N_2, N_3 N_4)_D$ negatiftir.

Önerme 5.1: $I_{\mathcal{C}_D(O, r)}$, $\mathbb{R}_D^2$ de merkezi $O = (0,0)$ ve yarıçapı r olan $\mathcal{C}_D(O, r)$ on iki yüzlü çemberine göre inversiyon olsun. N , Q ve O , $\mathbb{R}_D^2$ de doğrudan, farklı üç nokta olsun. Eğer N' ve Q' $I_{\mathcal{C}_D(O, r)}$ inversiyonuna göre sırasıyla N ve Q nun inversleri ise

$$d_D(N', Q') = \frac{r^2 d_D(N, Q)}{d_D(O, N) d_D(O, Q)}$$

dır.

İspat: İnverson tanımları kullanılırsa;

$$\begin{aligned} d_D(N', Q') &= |d_D(O, N') - d_D(O, Q')| \\ &= \left| \frac{r^2}{d_D(O, N)} - \frac{r^2}{d_D(O, Q)} \right| \\ &= r^2 \left| \frac{d_D(O, Q) - d_D(O, N)}{d_D(O, Q) d_D(O, N)} \right| \\ &= \frac{r^2 d_D(N, Q)}{d_D(O, N) \cdot d_D(O, Q)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 5.2: $\mathcal{C}$, merkezi orijinde olan on iki yüzlü inverson çemberi olsun. N, Q ve $O, \mathbb{R}_D^2$ deki doğrudan olmayan herhangi farklı üç nokta ve N' ve Q' sırasıyla N ve Q nun $I_{\mathcal{C}_D(O, r)}$ inversonuna göre inversonları olsun. $\overrightarrow{ON}$ nin eğimi m_1 , $\overrightarrow{OQ}$ nin eğimi m_2 olmak üzere $m_1 \in \{\lambda - 1, 1 - \lambda\}$, $m_2 \in \{\lambda - 1, 1 - \lambda\} \setminus m_1$ ya da $m_1 \in \{-\lambda, \lambda\}$, $m_2 \in \{-\lambda, \lambda\} \setminus m_1$ ise

$$d_D(N', Q') = \frac{r^2 d_D(N, Q)}{d_D(O, N) d_D(O, Q)} \quad (5.1)$$

dır.

İspat: $\overrightarrow{ON}$ nin eğimi m_1 , $\overrightarrow{OQ}$ nin eğimi m_2 olmak üzere $m_1 \in \{\lambda - 1, 1 - \lambda\}$, $m_2 \in \{\lambda - 1, 1 - \lambda\} \setminus m_1$ ya da $m_1 \in \{-\lambda, \lambda\}$, $m_2 \in \{-\lambda, \lambda\} \setminus m_1$ olsun.

Durum 1: $m_1 = (1 - \lambda)$ ve $m_2 = (\lambda - 1)$ seçilsin. Bu durumda $N = (n, (1 - \lambda)n)$ ve $Q = (q, (\lambda - 1)q)$ biçimindedir. Ayrıca $N' = \left(\frac{r^2}{n}, \frac{r^2(1-\lambda)n}{n}\right)$, $Q' = \left(\frac{r^2}{q}, \frac{r^2(\lambda-1)}{q}\right)$ olup

$$d_D(N, Q) = \max\{\lambda|n - q| + (1 - \lambda)|n + q|, |n - q|\}$$

$$d_D(O, N) = \max\{\lambda|n| + (1 - \lambda)|n|, |n|\} = |n|$$

$$d_D(O, Q) = \max\{\lambda|q| + (\lambda - 1)|q|, |q|\} = |q|$$

$d_D(N', Q') = \max \left\{ \lambda r^2 \frac{|q-n|}{|n||q|} + \frac{(1-\lambda)r^2}{|n||q|} |n+q|, \left| r^2 \frac{|q-n|}{|n||q|} \right| \right\}$ elde edilir. Bu ifadeler kullanılırsa (5.1) denkleminin sağlandığı görülür.

Durum 2: $m_1 = (\lambda - 1)$ ve $m_2 = (1 - \lambda)$ olması durumu da benzer şekilde görülür. $m_1 = (\lambda - 1)$ ve $m_2 = (1 - \lambda)$ seçilsin. Bu durumda $N = (n, (\lambda - 1)n)$ ve $Q = (q, (1 - \lambda)q)$ biçimindedir. Ayrıca $N' = \left(\frac{r^2}{n}, \frac{r^2(\lambda-1)}{n} \right)$, $Q' = \left(\frac{r^2}{q}, \frac{r^2(1-\lambda)}{q} \right)$ olup $d_D(N, Q) = \max \{ \lambda |n - q| + (\lambda - 1) |n + q|, |n - q| \}$

$$d_D(O, N) = \max \{ \lambda |n| + (1 - \lambda) |n|, |n| \} = |n|$$

$$d_D(O, Q) = \max \{ \lambda |q| + (\lambda - 1) |q|, |q| \} = |q|$$

$d_D(N', Q') = \max \left\{ \lambda r^2 \frac{|q-n|}{|n||q|} + \frac{(\lambda-1)r^2}{|n||q|} |n+q|, \left| r^2 \frac{|q-n|}{|n||q|} \right| \right\}$ elde edilir. Bu ifadeler kullanılırsa (5.1) denkleminin sağlandığı görülür.

Durum 3: $m_1 = -\lambda$ ve $m_2 = \lambda$ olması durumu da benzer şekilde görülür. $m_1 = -\lambda$ ve $m_2 = \lambda$ seçilsin. Bu durumda $N = (n, -\lambda n)$ ve $Q = (q, \lambda q)$ biçimindedir. Ayrıca $N' = \left(\frac{r^2}{4\lambda^2 n}, \frac{-r^2}{4\lambda n} \right)$, $Q' = \left(\frac{r^2}{4\lambda^2 q}, \frac{r^2}{4\lambda q} \right)$ olup

$$d_D(N, Q) = \max \{ \lambda |n - q| + \lambda |n + q|, |n - q| \}$$

$$d_D(O, N) = \max \{ \lambda |n| + \lambda |n|, |p| \} = 2 \lambda |n|$$

$$d_D(O, Q) = \max \{ \lambda |q| + \lambda |q|, |q| \} = 2 \lambda |q|$$

$d_D(N', Q') = \frac{r^2}{4\lambda^2 |n||q|} \max \{ \lambda |n - q| + \lambda |n + q|, |n - q| \}$ elde edilir. Bu ifadeler kullanılırsa (5.1) denkleminin sağlandığı görülür.

Durum 4: $m_1 = \lambda$ ve $m_2 = -\lambda$ olması durumu da benzer şekilde görülür. $m_1 = \lambda$ ve $m_2 = -\lambda$ seçilsin. Bu durumda $N = (n, \lambda n)$ ve $Q = (q, -\lambda q)$ biçimindedir.

Ayrıca $N' = \left(\frac{r^2}{4\lambda^2 n}, \frac{r^2}{4\lambda n} \right)$, $Q' = \left(\frac{r^2}{4\lambda^2 q}, \frac{-r^2}{4\lambda q} \right)$ olup

$$d_D(N, Q) = \max \{ \lambda |n - q| + \lambda |n + q|, |n - q| \}$$

$$d_D(O, N) = \max \{ \lambda |n| + \lambda |n|, |p| \} = 2 \lambda |n|$$

$$d_D(O, Q) = \max\{\lambda|q| + \lambda|q|, |q|\} = 2\lambda|q|$$

$d_D(N', Q') = \frac{r^2}{4\lambda^2|n||q|} \max\{\lambda|n - q| + \lambda|n + q|, |n - q|\}$ elde edilir. Bu ifadeler kullanılırsa (5.1) denkleminin sağlandığı görülür.

Önerme 5.3: $I_{\mathcal{E}_{D_{\Delta i}}(O, k)}$, $\mathbb{R}_D^2$ de odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$, merkezi $O = (0, 0)$ ve sabiti k olan $\mathcal{E}_{D_{\Delta i}}$ $i = 1, 2$ on iki yüzölçüm elipslerine göre inversiyon olsun.

$N' = (x', y')$, $N = (x, y)$ noktasının $I_{\mathcal{E}_{D_{\Delta i}}(O, k)}$ inversiyonuna göre inversi ve O , N ve N' doğrudan olmak üzere

$$d_D(N'_1, N'_2) = \frac{d_D(O, Q)^2 d_D(N_1, N_2)}{d_D(O, N_1) d_D(O, N_2)} \quad (5.2)$$

dır. Burada Q , $\overrightarrow{ON}$ ışını ile $\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}$ elipsinin kesişim noktası, $x_i \neq 0$, $y_i \neq 0$, $x_1 > y_1$ ve m , $\overrightarrow{ON}$ ışınının eğimi olmak üzere;

$$d_D(O, Q) = \begin{cases} \left| \frac{k + x_1 + x_2}{2} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\} & N \in R_{11}^+ \cup R_{11}^- \text{ ise} \\ \left| \frac{(k + \lambda x_1 + x_2 + y_1)}{(\lambda + m + 1)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\} & N \in R_{12}^+ \cup R_{12}^- \text{ ise} \\ \left| \frac{k + \lambda(x_1 + x_2) + y_1 + y_2}{2(\lambda + m)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\} & N \in R_{13}^+ \cup R_{13}^- \text{ ise} \\ \left| \frac{-k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{2} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\} & N \in R_{14}^+ \cup R_{14}^- \text{ ise} \\ \left| \frac{-\lambda(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 + k}{2(m - \lambda)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\} & N \in R_{15}^+ \cup R_{15}^- \text{ ise} \\ \left| \frac{k - \lambda x_2 - x_1 + y_2}{(m - 1 - \lambda)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\} & N \in R_{16}^+ \cup R_{16}^- \text{ ise} \end{cases}$$

biçimindedir. Benzer şekilde Q , $\overrightarrow{OP}$ ışını ile $\mathcal{E}_{D_{\Delta 2}}$ elipsinin kesişim noktası, $x_i \neq 0$, $y_i \neq 0$, $x_1 > y_1$ ve m , $\overrightarrow{OP}$ ışınının eğimi olmak üzere;

$$d_D(O, Q) = \begin{cases} \left| \frac{k + \lambda x_1 + x_2 + y_1}{\lambda + m + 1} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\} & N \in R_{21}^+ \cup R_{21}^- \text{ ise} \\ \left| \frac{k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{2(\lambda + m)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\} & N \in R_{22}^+ \cup R_{22}^- \text{ ise} \\ \left| \frac{-k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{m} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\} & N \in R_{23}^+ \cup R_{23}^- \text{ ise} \\ \left| \frac{-\lambda(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 + k}{2(m - \lambda)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\} & N \in R_{24}^+ \cup R_{24}^- \text{ ise} \\ \left| \frac{(k - \lambda x_2 - x_1 + y_2)}{(m - 1 - \lambda)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\} & N \in R_{25}^+ \cup R_{25}^- \text{ ise} \end{cases}$$

İspat: $\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}$ elipsi için $d_D(O, Q)$ nun hesaplanabilmesi için 6 farklı durumun incelenmesi gerekir.

Durum 1: $\left| \frac{(1-\lambda)(k-x_1+x_2)+2y_1}{k+x_1+x_2} \right| < m < \left| \frac{((\lambda-1)^2 x_2 + \lambda x_1 + y_1 + k)}{k + \lambda x_1 + (2-\lambda)x_2 + y_1 - y_2} \right|$ olması durumunda Q noktası $y = mx$ ile $(\lambda + 1)x + y = k + \lambda x_1 + x_2 + y_1$ doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{(k + \lambda x_1 + x_2 + y_1)x}{\lambda + m + 1}, \frac{(k + \lambda x_1 + x_2 + y_1)y}{\lambda + m + 1} \right)$ ve böylece

$$d_D(O, Q) = \left| \frac{k + \lambda x_1 + x_2 + y_1}{\lambda + m + 1} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\}$$

elde edilir.

Durum 2: $\left| \frac{((\lambda-1)^2 x_2 + \lambda x_1 + y_1 + k)}{k + \lambda x_1 + (2-\lambda)x_2 + y_1 - y_2} \right| < m < \left| \frac{-k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{2x_1} \right|$ olması durumunda Q noktası $y = mx$ ile $2\lambda x - y = k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$ doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{(k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2))x}{2(\lambda + m)}, \frac{(k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2))y}{2(\lambda + m)} \right)$ dır ve böylece

$$d_D(O, Q) = \left| \frac{k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{2(\lambda + m)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\}$$

elde edilir.

Durum 3: $\left| \frac{((\lambda-1)^2 x_2 + \lambda x_1 + y_1 + k)}{k + \lambda x_1 + (2-\lambda)x_2 + y_1 - y_2} \right| < m < \left| \frac{-k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{2x_1} \right|$ olması durumunda Q noktası $y = mx$ ile $x - y = -k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$ doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{(-k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2))x}{m}, \frac{(-k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2))y}{m} \right)$ dır ve böylece

$$d_D(O, Q) = \left| \frac{-k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{m} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\}$$

elde edilir.

Durum 4: $\left| \frac{-k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{2x_1} \right| < m$ ve $m < \left| \frac{-k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{2x_2} \right|$ olması durumunda Q noktası $y = mx$ ile $2\lambda x + y = \lambda(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 + k$ doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{-\lambda(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 + k}{2(m - \lambda)}, \frac{-\lambda(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 + k}{2(m - \lambda)} \right)$ dır ve böylece

$$d_D(O, Q) = \left| \frac{-\lambda(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 + k}{2(m - \lambda)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\}$$

elde edilir.

Durum 5: $\left| \frac{-k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{2x_2} \right| < m < \left| \frac{(1 - \lambda)(k + y_2 + \lambda x_1) + (1 + \lambda)(y_1 + \lambda x_2)}{2x_1 + \lambda(x_2 - x_1) + (y_1 - y_2) - k} \right|$ olması durumunda Q noktası $y = mx$ ile $y - \lambda x = (k - \lambda x_2 - x_1 + y_2)$ doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{(k - \lambda x_2 - x_1 + y_2)x}{(m - 1 - \lambda)}, \frac{(k - \lambda x_2 - x_1 + y_2)y}{(m - 1 - \lambda)} \right)$ dır ve böylece

$$d_D(O, Q) = \left| \frac{(k - \lambda x_2 - x_1 + y_2)}{(m - 1 - \lambda)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\mathcal{E}_{D_{\Delta 2}}$ elipsi için $d_D(O, Q)$ nun hesaplanması için 5 farklı durumun incelenmesi gerekir.

Durum 1: $\left| \frac{(\lambda - 1)(k - x_1 + x_2) - 2y_1}{k + x_1 + x_2} \right| < m < \left| \frac{(1 - \lambda)(k - x_1 + x_2) + 2y_1}{k + x_1 + x_2} \right|$ olması durumunda Q noktası $y = mx$ ile $2x + y = k + x_1 + x_2$ doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{(k + x_1 + x_2)x}{2}, \frac{(k + x_1 + x_2)y}{2} \right)$ ve böylece

$$d_D(O, Q) = \left| \frac{k + x_1 + x_2}{2} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\}$$

elde edilir.

Durum 2: $\left| \frac{(1-\lambda)(k-x_1+x_2)+2y_1}{k+x_1+x_2} \right| < m < \left| \frac{((\lambda-1)^2x_2+\lambda x_1+y_1+k)}{k+\lambda x_1+(2-\lambda)x_2+y_1-y_2} \right|$ olması durumunda Q noktası $y = mx$ ile $(\lambda + 1)x + y = k + \lambda x_1 + x_2 + y_1$ doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{(k+\lambda x_1+x_2+y_1)x}{\lambda+m+1}, \frac{(k+\lambda x_1+x_2+y_1)y}{\lambda+m+1} \right)$ ve böylece

$$d_D(O, Q) = \left| \frac{(k + \lambda x_1 + x_2 + y_1)}{(\lambda + m + 1)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\}$$

elde edilir.

Durum 3: $\left| \frac{((\lambda-1)^2x_2+\lambda x_1+y_1+k)}{k+\lambda x_1+(2-\lambda)x_2+y_1-y_2} \right| < m < \left| \frac{-k+\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)}{2x_1} \right|$ olması durumunda Q noktası $y = mx$ ile $\lambda x + y = \frac{k+\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)}{2}$ doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{(k+\lambda(x_1+x_2)+y_1+y_2)x}{2(\lambda+m)}, \frac{(k+\lambda(x_1+x_2)+y_1+y_2)y}{2(\lambda+m)} \right)$ ve böylece

$$d_D(O, Q) = \left| \frac{k + \lambda(x_1 + x_2) + y_1 + y_2}{2(\lambda + m)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\}$$

elde edilir.

Durum 4: $\left| \frac{-k+\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)}{2x_1} \right| < m$ ve $m < \left| \frac{-k+\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)}{2x_2} \right|$ olması

durumunda Q noktası $y = mx$ ile $y = \frac{-k+\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)}{2}$ doğrularının kesişimi

olup $Q = \left(\frac{(-k+\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2))x}{2}, \frac{(-k+\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2))y}{2} \right)$ ve böylece

$$d_D(O, Q) = \left| \frac{-k + \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{2} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\}$$

elde edilir.

Durum 5: $\left| \frac{-k+\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)}{2x_2} \right| < m < \left| \frac{(1-\lambda)(k+y_2+\lambda x_1)+(1+\lambda)(y_1+\lambda x_2)}{2x_1+\lambda(x_2-x_1)+(y_1-y_2)-k} \right|$ olması

durumunda Q noktası $y = mx$ ile $-\lambda x + y = \frac{k-\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)}{2}$ doğrularının

kesişimi olup $Q = \left(\frac{(-\lambda(x_1+x_2)+y_1+y_2+k)x}{2(m-\lambda)}, \frac{(-\lambda(x_1+x_2)+y_1+y_2+k)y}{2(m-\lambda)} \right)$ ve böylece

$$d_D(O, Q) = \left| \frac{-\lambda(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 + k}{2(m - \lambda)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\}$$

elde edilir.

Durum 6: $\left| \frac{(1-\lambda)(k+y_2+\lambda x_1)+(1+\lambda)(y_1+\lambda x_2)}{2x_1+\lambda(x_2-x_1)+(y_1-y_2)-k} \right| < m < \left| \frac{(1-\lambda)(x_2-x_1+k)+2y_2}{-k+x_1+x_2} \right|$ olması

durumunda Q noktası $y = mx$ ile $(-\lambda - 1)x + y = k - \lambda x_2 - x_1 + y_2$

doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{(k-\lambda x_2-x_1+y_2)x}{(m-1-\lambda)}, \frac{(k-\lambda x_2-x_1+y_2)y}{(m-1-\lambda)} \right)$ ve böylece

$$d_D(O, Q) = \left| \frac{k - \lambda x_2 - x_1 + y_2}{(m - 1 - \lambda)} \right| \max\{\lambda + |m|, 1\}$$

elde edilir.

Böylece durum 1-6 dan (5.2) denkleminin sağlandığı görülür.

Dikkat edilirse O , N_1 ve N_2 aynı doğru üzerinde noktalar değilse Önerme 5.3 deki eşitlik $\mathbb{R}_D^2$ deki her nokta için geçerli değildir. Buradan sonraki iki önerme ile Önerme 5.3 deki eşitliğin noktalar aynı doğru üzerinde olmasa bile sağlandığı bazı durumlar verilmektedir.

Önerme 5.4: $O = (0,0)$ olmak üzere O , N_1 ve N_2 $\mathbb{R}_D^2$ deki farklı, doğrudan olmayan üç nokta, N_1' ve N_2' $I_{\mathcal{E}_{D_{\Delta 2}}}(O, k)$ ya göre sırasıyla N_1 ve N_2 noktalarının inversleri olsunlar. $m_{\overrightarrow{ON_1}}$, $m_{\overrightarrow{ON_2}}$ ve $m_{\overrightarrow{N_1 N_2}}$ sırasıyla $\overrightarrow{ON_1}$, $\overrightarrow{ON_2}$ ve $\overrightarrow{N_1 N_2}$ 'nin eğimleri olmak üzere

$$m_{\overrightarrow{ON_1}}, m_{\overrightarrow{ON_2}} \in \left\{ m: \frac{(2\lambda-1)(x_1-x_2)+\lambda(y_1+y_2)-(y_1-y_2)+(1-\lambda)k}{\lambda(x_1+x_2)-y_1+y_2+k} < m < \frac{(1-2\lambda)(x_1-x_2)-\lambda(y_1+y_2)+(y_1-y_2)+(\lambda-1)k}{\lambda(x_1+x_2)-(y_1-y_2)+k} \right\}$$

ve $m_{\overrightarrow{N_1 N_2}} \rightarrow \infty$ ise

$$d_D(N_1', N_2') = \frac{d_D(O, Q_1)d_D(O, Q_2)d_D(N_1, N_2)}{d_D(O, N_1)d_D(O, N_2)} \quad (5.3)$$

dir. Burada $\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}$ elipsinin odakları $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ ve sabiti k dir. Ayrıca $Q_1, \overrightarrow{ON_1}$ ışını ile $\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}$ elipsinin kesişim noktası, $Q_2, \overrightarrow{ON_2}$ ışını ile $\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}$ elipsinin kesişim noktasıdır.

İspat: $N_1 = (n_1, n_2)$ ve $N_1 = (n_1, n_4)$ noktaları $\mathbb{R}_{11}^+ \cup \mathbb{R}_{11}^-$ bölgesinde bulunan iki nokta olsun. Bu durumda $Q_1, \overrightarrow{ON_1}$ ışını ile $\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}$ elipsinin kesişim noktası, $Q_2, \overrightarrow{ON_2}$

ışını ile $\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}$ elipsinin kesişim noktası olmak üzere; $N'_1 = \left(\frac{(x_1+x_2+k)^2}{4n_1}, \frac{(x_1+x_2+k)^2 n_2}{4n_1^2} \right)$,
 $N'_2 = \left(\frac{(x_1+x_2+k)^2}{4n_1}, \frac{(x_1+x_2+k)^2 n_2}{4n_1^2} \right)$, $d_D(O, Q_1) = \frac{|x_1+x_2+k|}{2} \max \left\{ \lambda + \left| \frac{n_2}{n_1} \right|, 1 \right\}$,
 $d_D(O, Q_2) = \frac{|x_1+x_2+k|}{2} \max \left\{ \lambda + \left| \frac{n_4}{n_1} \right|, 1 \right\}$, $d_D(N_1, N_2) = |n_2 - n_4|$,
 $d_D(O, N_1) = \max \{ \lambda |n_1| + |n_2|, |n_1| \}$, $d_D(O, N_2) = \max \{ \lambda |n_1| + |n_4|, |n_1| \}$,
 $d_D(N'_1, N'_2) = \frac{(x_1+x_2+k)^2}{4n_1^2} |n_2 - n_4|$ olup bulunan bu ifadeler (5.3) denkleminde
yerine yazılırsa bu denklemin sağladığı kolaylıkla görülür.

Önerme 5.5: $O = (0,0)$ olmak üzere O, N_1 ve N_2 $\mathbb{R}_D^2$ deki farklı, doğrudan olmayan üç nokta, P'_1 ve P'_2 $I_{\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}}(O, k)$ ya göre sırasıyla N_1 ve N_2 noktalarının inversleri olsunlar. $\overrightarrow{m_{ON_1}}, \overrightarrow{m_{ON_2}}$ ve $\overrightarrow{m_{N_1N_2}}$ sırasıyla $\overrightarrow{ON_1}, \overrightarrow{ON_2}$ ve $\overrightarrow{N_1N_2}$ nin eğimleri olmak üzere $\overrightarrow{m_{ON_1}}, \overrightarrow{m_{ON_2}} \in \left\{ m : m < \frac{\lambda(x_2-x_1)+y_1+y_2+k}{x_2} \text{ veya } \frac{-\lambda(x_1-x_2)+y_1+y_2+k}{x_1} < m \right\}$ ve $\overrightarrow{m_{N_1N_2}} = 0$ ise

$$d_D(N'_1, N'_2) = \frac{d_D(O, Q_1) d_D(O, Q_2) d_D(N_1, N_2)}{d_D(O, N_1) d_D(O, N_2)}$$

dir. Burada $\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}$ elipsinin odakları $F_1 = (x_1, y_1), F_2 = (x_2, y_2)$ ve sabiti k dır. Ayrıca $Q_1, \overrightarrow{ON_1}$ ışını ile $\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}$ elipsinin kesişim noktası, $Q_2, \overrightarrow{ON_2}$ ışını ile $\mathcal{E}_{D_{\Delta 2}}$ elipsinin kesişim noktasıdır.

İspat: $N_1 = (n_1, n_2)$ ve $N_1 = (n_3, n_2)$ noktaları $\mathbb{R}_{14}^+ \cup \mathbb{R}_{14}^-$ bölgesinde bulunan iki nokta olsun. Bu durumda $Q_1, \overrightarrow{ON_1}$ ışını ile $\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}$ elipsinin kesişim noktası, $Q_2, \overrightarrow{ON_2}$ ışını ile $\mathcal{E}_{D_{\Delta 1}}$ elipsinin kesişim noktası olmak üzere;

$$N'_1 = \left(\frac{(\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-k)^2 n_1}{4n_2^2}, \frac{(\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-k)^2}{4n_2} \right),$$

$$N'_2 = \left(\frac{(\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-k)^2 n_3}{4n_2^2}, \frac{(\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-k)^2}{4n_2} \right),$$

$$d_D(O, Q_1) = \frac{|(\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-k)n_1|}{|2n_2|} \max \left\{ \lambda + \left| \frac{n_2}{n_1} \right|, 1 \right\},$$

$$d_D(O, Q_2) = \frac{|(\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-k)n_1|}{|2n_2|} \max \left\{ \lambda + \left| \frac{n_2}{n_3} \right|, 1 \right\}, \quad d_D(N_1, N_2) = |n_1 - n_3|,$$

$$d_D(O, N_1) = \max \{ \lambda |n_1| + |n_2|, |n_1| \}, \quad d_D(O, N_2) = \max \{ \lambda |n_3| + |n_2|, |n_3| \},$$

$$d_D(N'_1, N'_2) = \frac{(\lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-k)^2}{4n_2^2} |n_1 - n_3|$$
 olup bulunan bu ifadeler (5.3)

denkleminde yerine yazılırsa bu denklemin sağladığı kolaylıkla görülür.

Teorem 5.1: On iki yüzlü çapraz oranı $\mathbb{R}_D^2$ de $I_{C_D(O,r)}$ ve $I_{E_D(O,k)}$ inversiyonları altında altında değişmez.

İspat: $I_{C_D(O,r)}$, merkezi O ve yarıçapı r olan on iki yüzlü çembere göre inversiyonu, $I_{E_D(O,k)}$ merkezi O ve sabiti k olan on iki yüzlü elipse göre inversiyon ve O dan geçen yönlü bir l doğrusu üzerindeki dört nokta N_1, N_2, N_3 ve N_4 olsun. N_1, N_2, N_3 ve N_4 noktalarının $I_{C_D(O,r)}$ ve $I_{E_D(O,k)}$ altında inversi olan noktalar sırasıyla N_1', N_2', N_3' ve N_4' noktaları olsunlar.

Dikkat edilirse on iki yüzlü çembere göre ve on iki yüzlü elipse göre inversiyonu, $\{N_1, N_2\}$ ve $\{N_3, N_4\}$ nokta çiftlerinin ayrılmasını veya ayrılmamasını korumaktadır. Ayrıca on iki yüzlü çembere göre ve elipse göre inversiyonları N noktasından Q noktasına on iki yüzlü yönlü uzaklığının bir l doğrusu boyunca inversiyonunu gözlemleyin. Q' noktasından N' noktasına l doğrusu boyunca yönlü uzaklığını Q' noktasından N' noktasına on iki yüzlü yönlü uzaklığına çevirir. Böylece Önerme 5.1 den

$$\begin{aligned} (N_1' N_2', N_3' N_4')_D &= \frac{d_D[N_1', N_3'] \cdot d_D[N_2', N_4']}{d_D[N_1', N_4'] \cdot d_D[N_2', N_3']} \\ &= \frac{\frac{[d_D(O, Q)]^2 d_D(N_1, N_3)}{d_D(O, N_1) d_D(O, N_3)} \cdot \frac{[d_D(O, Q)]^2 d_D(N_2, N_4)}{d_D(O, N_2) d_D(O, N_4)}}{\frac{[d_D(O, Q)]^2 d_D(N_1, N_4)}{d_D(O, N_1) d_D(O, N_4)} \cdot \frac{[d_D(O, Q)]^2 d_D(N_2, N_3)}{d_D(O, N_2) d_D(O, N_3)}} \\ &= \frac{d_D(N_1, N_3) d_D(N_2, N_4)}{d_D(N_1, N_4) d_D(N_2, N_3)} \\ &= (N_1 N_2, N_3 N_4)_D \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.2: On iki yüzlü çapraz oranı $\mathbb{R}_D^3$ de $I_{S_D(O,r)}$ küresel inversiyonu altında altında değişmezdir.

İspat: $I_{D_D(O,r)}$, merkezi O ve yarıçapı r olan on iki yüzlü küreye göre inversiyonu, $I_{D_D(O,r)}$ O dan geçen yönlü bir l doğrusu üzerindeki dört nokta N_1, N_2, N_3 ve N_4 olsun.

N_1, N_2, N_3 ve N_4 noktalarının $I_{D_D(O,r)}$ altında inversi olan noktalar sırasıyla N_1', N_2', N_3' ve N_4' noktaları olsunlar.

Dikkat edilirse on iki yüzlü küreye göre inversiyonu, $\{N_1, N_2\}$ ve $\{N_3, N_4\}$ nokta çiftlerinin ayrılmasını veya ayrılmamasını korumaktadır ve ayrıca on iki yüzlü küreye göre inversiyonu bir l doğrusu boyunca on iki yüzlü yönlü uzaklığını N noktasından Q noktasına inversiyonunu gözlemleyin. l doğrusu boyunca Q' noktasından N' noktasına yönlü uzaklığını Q' noktasından N' noktasına on iki yüzlü yönlü uzaklığına çevirir. Böylece Önerme 4.1 den

$$\begin{aligned}
 (N_1' N_2', N_3' N_4')_D &= \frac{d_D[N_1', N_3'] \cdot d_D[N_2', N_4']}{d_D[N_1', N_4'] \cdot d_D[N_2', N_3']} \\
 &= \frac{\frac{[d_D(O,Q)]^2 d_D(N_1, N_3)}{d_D(O, N_1) d_D(O, N_3)} \cdot \frac{[d_D(O,Q)]^2 d_D(N_2, N_4)}{d_D(O, N_2) d_D(O, N_4)}}{\frac{[d_D(O,Q)]^2 d_D(N_1, N_4)}{d_D(O, N_1) d_D(O, N_4)} \cdot \frac{[d_D(O,Q)]^2 d_D(N_2, N_3)}{d_D(O, N_2) d_D(O, N_3)}} \\
 &= \frac{d_D(N_1, N_3) d_D(N_2, N_4)}{d_D(N_1, N_4) d_D(N_2, N_3)} \\
 &= (N_1 N_2, N_3 N_4)_D
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 5.3: $l \mathbb{R}_D^2$ de bir doğru olsun. l üzerindeki dört noktanın N_1, N_2, N_3 ve N_4 noktaları olduğunu varsayalım. $(N_1 N_2, N_3 N_4)_D = -1$ ise N_1, N_2, N_3 ve N_4 bir harmonik küme oluşturur denir ve $H(N_1 N_2, N_3 N_4)_D$ ile gösterilir. Yani l üzerindeki herhangi bir N_3 ve N_4 çifti

$$\frac{d_D[N_1, N_3] d_D[N_2, N_4]}{d_D[N_1, N_4] d_D[N_2, N_3]} = -1$$

ise N_1 ve N_2 yi harmonik olarak böldüğü söylenir. N_3 ve N_4 noktaları, N_1 ve N_2 a göre on iki yüzlü harmonik eşlenikler olarak adlandırılır.

Teorem 5.3: $\mathcal{E}_D$ merkezi O olan bir on iki yüzlü elipsi olmak üzere N_1 ve N_2 , elipsin üzerindeki noktalar olacak şekilde $\mathbb{R}_D^2$ de aynı doğru üzerindeki O, N_1 ve N_2 noktaları verilsin. N_3 ve N_4 , $[N_1 N_2]$ doğru parçasını içerden ve dışardan bölecek biçimde $\overrightarrow{ON_1}$

ışını üzerindeki farklı noktalar olsunlar. Böylece N_3 ve N_4 ün N_1 ve N_2 nin on iki yüzlü harmonik eşlenikleri olması için gerek ve yeter koşul N_3 ve N_4 ün $I_{\mathcal{E}_D(O,k)}$ inversiyonu altında invers noktalar olmalarıdır.

İspat: N_3 ve N_4 , N_1 ve N_2 ya göre on iki yüzlü harmonik eşleniği olsun. Bu durumda

$$(N_1 N_2, N_3 N_4)_D = -1 \Rightarrow \frac{d_D[N_1, N_3] d_D[N_2, N_4]}{d_D[N_1, N_4] d_D[N_2, N_3]} = -1$$

dır. N_3 , $\overline{NQ}$ doğru parçasını içerden böldüğünden ve N_3 , $\overrightarrow{OQ}$ ışını üzerinde olduğundan $d_D(O, Q) = d_D(O, N_1) = d_D(O, N_2)$ olduğundan

$d_D(N_3, N_2) = d_D(O, Q) - d_D(O, N_3)$ ve $d_D(N_1, N_3) = d_D(O, Q) + d_D(O, N_3)$ dir.

N_4 , $\overline{NQ}$ doğru parçasını dışardan böldüğünden, N_4 $\overrightarrow{OQ}$ ışını üzerinde olduğundan ve $d_D(O, Q) = d_D(O, N_1) = d_D(O, N_2)$ olup

$d_D(N_1, N_4) = d_D(O, Q) + d_D(O, N_4)$ ve $d_D(N_2, N_4) = d_D(O, Q) - d_D(O, N_3)$ dir.

Böylece

$$\frac{(d_D(O, Q) + d_D(O, N_3))(d_D(O, Q) - d_D(O, N_4))}{(d_D(O, Q) + d_D(O, N_4))(d_D(O, Q) - d_D(O, N_3))} = -1$$

elde edilir ki

$$(d_D(O, Q) + d_D(O, N_3))(d_D(O, Q) - d_D(O, N_4)) = (d_D(O, Q) + d_D(O, N_4))(d_D(O, N_3) - d_D(O, Q))$$

demektir. Son eşitlik sadeleştirilirse $d_D(O, N_3) \cdot d_D(O, N_4) = (d_D(O, Q))^2$ elde edilir.

Yani N_3 ve N_4 $I_{\mathcal{E}_D(O,k)}$ on iki yüzlü elipse göre inversiyonuna göre on iki yüzlü elipse göre invers noktalar. N_4 ve N_3 ün $\overrightarrow{ON}$ ışını üzerinde olması durumu için de $\overrightarrow{ON}$ de benzer hesaplamalarla aynı sonuç elde edilir. Tersine eğer N_3 ve N_4 , $I_{\mathcal{E}_D(O,k)}$ on iki yüzlü elipse göre inversiyonuna göre inversi noktalarsa, ispat benzerdir.

Sonuç 5.3: $\mathbb{R}_D^2$ deki yönlü bir doğru üzerindeki dört farklı N_1, N_2, N_3 ve N_4 nokta olsun. $(N_1 N_2, N_3 N_4)_D$, hem N_3 hem de N_4 , N_1 ile N_2 arasındaysa veya N_3 ile N_4 ün hiçbiri N_1 ve N_2 nin arasında değilse pozitifdir.

İspat: Hem N_3 hem de N_4 , N_1 ile N_2 noktaları arasında olsun. $\overline{N_1 N_2}$ yönlü doğru parçası için on iki yüzlü çapraz oranı

$$(N_1 N_2, N_3 N_4)_D = \frac{d_D(N_1, N_3)d_D(N_2, N_4)}{d_D(N_1, N_4)d_D(N_2, N_3)}$$

olup

$$(N_1 N_2, N_3 N_4)_D = \frac{d_D(N_1, N_3)(-d_D(N_2, N_4))}{d_D(N_1, N_4)(-d_D(N_2, N_3))} = \frac{d_D(N_1, N_3)d_D(N_2, N_4)}{d_D(N_1, N_4)d_D(N_2, N_3)}$$

elde edilir, dolayısıyla $(N_1 N_2, N_3 N_4)_D$ pozitifdir. N_3 ile N_4 ten hiçbiri N_1 ve N_2 nin arasında değilse bu durumda oluşabilecek altı farklı sıralı durum vardır. Tüm olası sıralamaların ispatı benzer şekilde yapılacağından $N_4 - N_2 - N_1 - N_3$ yöneliminin ispatını veriyoruz. Bu durumda on iki yüzlü çapraz oranı

$$\begin{aligned} (N_1 N_2, N_3 N_4)_D &= \frac{d_D(N_2, N_4)d_D(N_1, N_3)}{d_D(N_1, N_4)d_D(N_2, N_3)} = \frac{-d_D(N_2, N_4)d_D(N_1, N_3)}{d_D(N_1, N_4)(-d_D(N_2, N_3))} \\ &= \frac{d_D(N_2, N_4)d_D(N_1, N_3)}{d_D(N_1, N_4)d_D(N_2, N_3)} \end{aligned}$$

elde edilir, dolayısıyla $(N_1 N_2, N_3 N_4)_D$ pozitifdir.

Sonuç 5.4: $\mathbb{R}_D^2$ deki yönlü bir doğru üzerindeki dört farklı nokta N_1, N_2, N_3 ve N_4 olsun. $\{N_1 N_2\}$ ve $\{N_3 N_4\}$ nokta çiftleri birbirini ayırırsa, on iki yüzlü çapraz oranı $(N_1 N_2, N_3 N_4)_D$ negatiftir. Bu durum $\mathbb{R}_D^3$ de de geçerlidir.

İspat: (N_1, N_2) ve (N_3, N_4) nokta çiftlerinin birbirini ayırması durumunda N_3 ve N_4 için dört farklı sıralı durum vardır. Tüm sıralı durumların ispatları benzer olduğundan yalnızca $N_4 - N_2 - N_1 - N_3$ için inceleme yapılacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} (N_1 N_2, N_3 N_4)_D &= \frac{d_D(N_1, N_3)d_D(N_2, N_4)}{d_D(N_1, N_4)d_D(N_2, N_3)} = \frac{(-d_D(N_1, N_3))(-d_D(N_2, N_4))}{d_D(N_1, N_4)(-d_D(N_2, N_3))} \\ &= -\frac{d_D(N_1, N_3)d_D(N_2, N_4)}{d_D(N_1, N_4)d_D(N_2, N_3)} \end{aligned}$$

olup $(N_1 N_2, N_3 N_4)_D$ negatiftir.

Teorem 5.4: $\mathcal{S}$, $\mathbb{R}_D^3$ de merkezi O ve yarıçapı r olan bir on iki yüzlü küre olsun ve $[NQ]$ küre üzerinde bir doğru parçası olsun. $[NQ]$ yu içten ve dıştan ayıran $\overrightarrow{ON}$ ışının farklı noktaları N_3 ve N_4 olsun. O halde N_3 ve N_4 , N_1 ve N_2 ye göre on iki yüzlü harmonik eşleniklerdir ancak ve ancak N_3 ve N_4 on iki yüzlü küreye göre inversiyonu yani $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}$ ye göre invers noktaldır.

İspat: N_3 ve N_4, N_1 ve N_2 ye göre on iki yüzlü harmonik eşleniği olsun. O zaman

$$(N_1 N_2, N_3 N_4)_D = -1 \Rightarrow \frac{d_D[N_1, N_3] d_D[N_2, N_4]}{d_D[N_1, N_4] d_D[N_2, N_3]} = -1$$

N_3 doğru parçasını $[NQ]$ dahili olarak böldüğünden ve N_3 ışını üzerinde olduğundan $\overrightarrow{OQ}$,

$$d_D(N_3, N_1) = r - d_D(O, N_3) \text{ ve } d_D(N_1, N_3) = r + d_D(O, N_3)$$

N_4 doğru parçasını $[NQ]$ harici olarak böldüğünden ve N_4 ışını üzerinde olduğundan $\overrightarrow{OQ}$,

$$d_D(N_1, N_4) = r + d_D(O, N_4) \text{ ve } d_D(Q, N_4) = d_D(O, N_4) - r$$

Böylece

$$\frac{(r + d_D(O, N_3)).(d_D(O, N_4) - r)}{(r + d_D(O, N_4)).(r - d_D(O, N_3))} = -1$$

$$\Rightarrow (r + d_D(O, N_3)).(d_D(O, N_4) - r) = (r + d_D(O, N_4)).(d_D(O, N_3) - r)$$

Son eşitlik sadeleştirilerek $d_D(O, N_3).d_D(O, N_4) = r^2$ elde edilir. Yani N_3 ve N_4 $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}$ inversiyonu altında invers noktaldır. N_4 ve N_3 ün $\overrightarrow{ON}$ ışını üzerinde olması durumu için de $\overrightarrow{ON}$ de benzer hesaplamalarla aynı sonuç elde edilir.

Tersine, eğer N_3 ve N_4 $I_{\mathcal{S}_D(O,r)}$ inversiyonuna göre invers noktalarsa N_3 ve N_4 , N_1 ve N_2 nin harmonik eşlenikleri olması da benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 5.5: $\mathcal{D}$ on iki yüzölçümde merkezi O ve yarıçapı r olan bir inversiyon küresi, O, N ve Q $\mathbb{R}_D^3$ de doğrudan üç nokta olsun. $I_{S_D(O,r)}(N) = N'$ ve $I_{S_D(O,r)}(Q) = Q'$ olsun. Bu durumda;

$$d_D(N', Q') = \frac{r^2 d_D(N, Q)}{d_D(O, N) \cdot d_D(O, Q)} \text{ dır.}$$

İspat: $\mathbb{R}_D^3$ de merkezi O ve yarıçapı r olan bir küreye göre $I_{S_D(O,r)}$ inversiyonu ele alınsın. İversiyon tanımından

$$d_D(O, N) \cdot d_D(O, N') = r^2 = d_D(O, Q) \cdot d_D(O, Q')$$

dır.

O, N ve Q doğrudan noktalar olduğundan bir doğru boyunca Öklidyen ve On iki yüzölçüm uzaklıklarının birbirlerine oranı aynı olduğundan;

$$d_D(N', Q') = |d_D(O, N') - d_D(O, Q')| = \left| \frac{r^2}{d_D(O, N)} - \frac{r^2}{d_D(O, Q)} \right| = \frac{r^2 d_D(N, Q)}{d_D(O, N) \cdot d_D(O, Q)}$$

elde edilir.

Teorem 5.6: O, N ve Q , $\mathbb{R}_D^3$ de herhangi üç nokta olsun. $I_{S_D(O,r)}$ merkezi O ve yarıçapı r olan küreye göre inversiyon olsun. $I_{S_D(O,r)}(N) = N'$, $I_{S_D(O,r)}(Q) = Q'$, u ve v sırasıyla $\overrightarrow{ON}$ ve $\overrightarrow{OQ}$ ışınlarının doğrultu vektörleri ve

$$\Delta = \{(1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1), (-1,-1,-1)\}$$

olmak üzere $u \in \Delta$, $v \in \Delta / \{u\}$ iken

$$d_D(N', Q') = \frac{r^2 d_D(N, Q)}{d_D(O, N) \cdot d_D(O, Q)}$$

dir.

İspat: Tüm ötelemeler on iki yüzölçümde uzayının izometri grubunun elemanları olduğundan inversiyon merkezi orijin olarak düşünülebilir. $\mathbb{R}_D^3$ deki merkezi $O = (0,0,0)$ ve yarıçapı r olan küreye göre $I_{S_D(O,r)}$ inversiyonu ele alınsın. N ve Q , $\mathbb{R}_D^3$ de herhangi iki nokta, u ve v sırasıyla $\overrightarrow{ON}$ ve $\overrightarrow{OQ}$ ışınlarının doğrultu vektörleri ve $u = (1,1,1)$, $v = (1,-1,1)$ olsun. Bu durumda $N = (n,n,n)$ ve $Q = (q,-q,q)$ noktalarının inversleri sırasıyla; $N' = (\frac{r^2}{n}, \frac{r^2}{n}, \frac{r^2}{n})$ ve $Q' = (\frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q})$ olup

$$\begin{aligned} d_D(N', Q') &= \max \left\{ \lambda \left| \frac{r^2}{n} - \frac{r^2}{q} \right| + \left| \frac{r^2}{n} + \frac{r^2}{q} \right|, \lambda \left| \frac{r^2}{n} + \frac{r^2}{q} \right| + \left| \frac{r^2}{n} - \frac{r^2}{q} \right|, \lambda \left| \frac{r^2}{n} - \frac{r^2}{q} \right| + \left| \frac{r^2}{n} - \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|nq|} \max \{ \lambda |q - n| + |q + n|, \lambda |q + n| + |q - n|, (\lambda + 1) |q - n| \} \end{aligned}$$

Biçiminde olup iki alt durum söz konusudur.

Durum 1: $\max\{\lambda|q - n| + |q + n|, \lambda|q + n| + |q - n|, (\lambda + 1)|q - n|\} = \lambda|q - n| + |q + n|$ yani $|q + n| > |q - n|$ ise $d_D(N', Q') = \frac{r^2 \lambda |n - q|}{(\lambda + 1)|n|.(\lambda + 1)|q|} = \frac{r^2 d_D(N, Q)}{d_D(O, N).d_D(O, Q)}$

Durum 2: $\max\{\lambda|q - n| + |q + n|, \lambda|q + n| + |q - n|, (\lambda + 1)|q - n|\} = (\lambda + 1)|q - n|$ yani $|n - q| < |n + q|$ ise $d_D(N', Q') = \frac{r^2 \lambda |n + q|}{(\lambda + 1)|n|.(\lambda + 1)|q|} = \frac{r^2 d_D(N, Q)}{d_D(O, N).d_D(O, Q)}$

elde edilir.

Benzer şekilde geriye kalan 55 durum da incelendiğinde teorem ifadesindeki istenilen sonuç elde edilir.



6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İlk iki bölüm teze konu olan problemin ortaya konulması ve çözümünde ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremlerin ifadesine ayrılmıştır. Üç, dört ve beşinci bölümler ise tezde orijinal olarak ortaya konulan problemi ve çözümlerini içermektedir. Bu bölümlerde bir Minkowski tipi geometri olan On iki yüzlü metriği ile döşenmiş analitik 3-uzay yani on iki yüzlü uzayı öncelikle izdüşüm dönüşümü yardımıyla düzleme taşınmış ve düzlemde bu geometriye ait bazı özellikler ve yapılar üzerine çalışılmıştır. Daha sonrasında geometride çeşitli problemler sunan ve zor sorunlara kolay çözümler getiren inversiyon dönüşümü bu düzlem geometrisinde çember ve elipse göre incelenmiştir. Ayrıca on iki yüzlü uzayında da küreye göre tanımlanıp özellikleri verilmiştir. Son olarak on iki yüzlü düzlem ve uzayında verilen bu inversiyon dönüşümleri ile çapraz oran ve harmonik eşlenikler arasındaki ilişki incelenmiştir.

Sonuç olarak bu çalışmada Öklid dışı geometrilere bir örnek olan Minkowski tipi bir geometri ve bu geometride çember, elips ve küreye göre inversiyon incelenmiştir, bu inceleme yöntemleri bu tip çalışmalar yapacak araştırmacılara yol gösterici olmuştur.

Ayrıca Öklid geometrisindeki problemlerin benzerleri on iki yüzlü düzlem ve uzay geometrisindeki benzerlerinin incelenmesi açık bir problem olarak durmaktadır.

KAYNAKLAR

1. Martin, G.E., 1991. The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane. New York: Springer.
2. Ermiş, T., 2014. Düzgün Çokyüzlülerin Metrik Geometrilerle İlişkileri Üzerine. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
3. Gelişgen, Ö. and Can, Z., 2015. On the Family of Metrics for Some Platonic and Archimedean Polyhedra. ESOGU Preprint, 1–9.
4. Gelişgen, Ö. and Çolak, Z., 2015. A Family of Metrics for Some Polyhedra. Automation Computers Applied Mathematics Scientific Journal, 24(1), 3–15.
5. Can, Z., Gelişgen, Ö. and Kaya, R., 2015. On the Metrics Induced by Icosidodecahedron and Rhombic Triacanthedron. Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), 19, 17–23.
6. Can, Z., Çolak, Z. and Gelişgen, Ö., 2015. A Note On The Metrics Induced By Triakis Icosahedron And Disdyakis Triacanthedron. Eurasian Academy of Sciences Eurasian Life Sciences / Avrasya Fen Bilimleri Dergisi, 1, 1–11.
7. Childress, N., 1964. Inversion with Respect to the Central Conics. Mathematics Magazine, 38(3), 147–149.
8. Nickel, J.A., 1995. A Budget of Inversion. Mathematical and Computer Modelling, 21, 87–93.
9. Gdawiec, K., 2014. Star-shaped Set Inversion Fractals. Fractals, 22(4), 1–7.
10. Ramirez, J.L. and Rubiano, G.N., 2014. Elliptic Inversion of Two Dimensional Objects. International Journal of Geometry, 3(1), 12–27.
11. Ramirez, J.L. and Rubiano, G.N., 2016. A Generalization of the Spherical Inversion. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48(1), 132–149.
12. Ramirez, J.L., 2014. Inversions in an Ellipse. Forum Geometricorum, 14, 107–115.
13. Ramirez, J.L. and Rubiano, G.N., 2014. A Geometrical Construction of Inverse Points with Respect to an Ellipse. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(8), 1254–1259.
14. Yüca, G., Can, Z., 2020. On the Circular Inversion in Maximum Plane. Ikonion Journal of Mathematics, 2(2).

15. Pekzorlu, A. and Bayar, A., 2020. Taxicab Spherical Inversions in Taxicab Space. *Journal of Mahani Mathematical Research Center*, 9(1–2), 45–54.
16. Pekzorlu, A. and Bayar, A., 2020. On the Chinese Checkers Spherical Inversions in Three Dimensional Chinese Checkers Space. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(2), 1498–1507.
17. Pekzorlu, A., 2019. On Inversions in Non-Euclidean Geometries. PhD Thesis, Eskişehir Osmangazi University, Eskişehir.
18. Bayar, A. and Ekmekçi, S., 2014. On circular inversions in taxicab plane. *Journal of Advanced Research in Pure Mathematics*, 6(4), 33–39. Arslaner, R., 2011. *Analitik Geometri*, Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., S. 225.
19. Gelişgen, Ö. and Ermiş, T., 2019. Some Properties of Inversions in Alpha Plane. *Forum Geometricorum*, 19, 1–9.
20. Cırık, Y. and Ekmekçi, S., 2022. On The Maximum Spherical Inversions. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 15(1), 360–371.
21. Bozan, E., 2019. Çember ve Kürede Evritimin Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Kars.
22. Can, Z., 2022. On Spherical Inversions in Three Dimensional Tetrakis Hexahedron Space. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 38(1), 100–108.
23. Can, Z., 2024. Elliptic Inversions in Taxicab Geometry. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 24(2), 266–272.
24. Can, Z. and Aygün, E., 2024. Elliptic inversion in l_∞ -plane. *International Journal of Geometry*, 4, 84–95.
25. Millman, R.S. and Parker, G.D., 1991. *Geometry: A Metric Approach with Models*. Springer.
26. Salihova, S., 2006. On the Geometry of Maximum Metric. Doktora Tezi, Department of Mathematics, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
27. Ermiş, T., 2014. Düzgün çokyüzlülerin metriklerle ilişkileri üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
28. Blair, D.E., 2000. *Inversion Theory and Conformal Mapping*. Student Mathematical Library, 9.

29. Can, Z. and Özdemir Bülbül, M., 2024. On Spherical Inversions In Dodecahedron Space, 6th Başkent International Conference on Multidisciplinary Studies, Ankara, Proceedings Book, 662-670.
30. Can, Z. and Özdemir Bülbül, M., 2024. Elliptic Inversion In The Dodecahedron Plane, International EuroAsia Congress on Scientific Researches and Recent Trends XIII, İstanbul, Proceedings Book, 521-529.
31. Can, Z. and Özdemir Bülbül, M., 2024. Dodecahedron Düzleminde Çembersel İnversiyonlar Üzerine 1st International İyonya Scientific Research Congress, İzmir, Proceedings Book, 449-460.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Merve ÖZDEMİR BÜLBÜL

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Necmettin Erbakan Üniversitesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, 2011-2015

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2022-2025

MESLEKİ DENEYİM

Milli Eğitim Bakanlığında Öğretmenlik. 2016 – 2023

Milli Eğitim Bakanlığında Yöneticilik. 2023 -

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Tam Metinler

1. Can, Z. and Özdemir Bülbül, M., 2024. On Spherical Inversions In Dodecahedron Space, *6th Başkent International Conference on Multidisciplinary Studies*, Ankara, Proceedings Book, 662-670.
2. Can, Z. and Özdemir Bülbül, M., 2024. Elliptic Inversion In The Dodecahedron Plane, *International EuroAsia Congress on Scientific Researches and Recent Trends XIII*, İstanbul, Proceedings Book, 521-529.
3. Can, Z. and Özdemir Bülbül, M., 2024. Dodecahedron Düzleminde Çembersel İnversiyonlar Üzerine *1st International İyonya Scientific Research Congress*, İzmir, Proceedings Book, 449-460.