



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SABİT NOKTA TEORİSİNDE KÜME DEĞERLİ OPERATÖRLER
ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Demet KORKMAZGÖZ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Samet MALDAR

AKSARAY, 2024

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342414 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Demet KORKMAZGÖZ tarafından hazırlanan “**SABİT NOKTA TEORİSİNDE KÜME DEĞERLİ OPERATÖRLER ÜZERİNE**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Samet MALDAR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN

Trakya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 27/09/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Demet KORKMAZGÖZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca paha biçilmez rehberliği, teşviki ve geri bildirimleri ile bu araştırmanın başarısına aracı olan danışmanım Doç. Dr. Samet MALDAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gözleriyle yolculuğuma her daim ışık olan babam Esat KARACAOĞLU'na, hayatımın her anında tez çalışmalarımda sevgi ve yardımları ile yanımda olan kıymetli annem ve kardeşlerime, eşimin kıymetli anne ve babasına, çalışmalarım boyunca her an moral ve motivasyon kaynağım olan sevgili eşim Emrah KORKMAZGÖZ ve bu süreç boyunca desteğini hiç esirgemeyip kızlarımla ilgilenen kıymetli dostum Gamze ERCAN ÖNER ile oyunlarından eksik kaldığım minik kızlarım Asel, Minel, Deren'e içtenlikle teşekkür ederim.

Son olarak, bu çalışmanın amacı doğrultusunda zamanlarını, bilgilerini ve deneyimlerini cömertçe paylaşan tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Demet KORKMAZGÖZ
AKSARAY, 2024

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Tekil Değerli Dönüşümler ve Sabit Nokta Kavramı için Tanımlar	4
2.2 Tekil Değerli Dönüşümler için İterasyon Yöntemleri.....	9
2.3 Küme Değerli Dönüşümler ve Sabit Nokta Kavramı.....	11
2.4 İterasyon Yöntemlerinin Küme Değerli Versiyonları	14
2.5 Bazı Sabit Nokta Teoremleri	16
2.6. Bazı Sabit Nokta Tanımları ve Lemmaları.....	18
3. YENİ İTERASYON YÖNTEMİNİN YAKINSAKLIK, KARARLILIK VE VERİ BAĞLILIĞI	20
3.1 Yeni İterasyon Yönteminin Yakınsaklığı.....	20
3.2 Yeni İterasyon Yönteminin Kararlılığı.....	29
3.3 Yeni İterasyon Yönteminin Veri Bağlılığı	34
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	44
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ.....	51

YÜKSEK LİSANS TEZİ
SABİT NOKTA TEORİSİNDE KÜME DEĞERLİ OPERATÖRLER
ÜZERİNE

Demet KORKMAZGÖZ

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Samet MALDAR

ÖZET

Sabit nokta teorisindeki bazı kavramların ve teoremlerin genelleştirilmesi önemli bir yer tutmaktadır. Bu genelleştirmelerden biri de küme değerli operatörler üzerine yapılan çalışmalardan oluşmaktadır. Bu doğrultuda bu tez, sabit nokta teorisinin küme değerli operatörler üzerindeki uygulamalarını incelemektedir.

Tez, öncelikle sabit nokta teorisi ve küme değerli operatörler konusundaki temel kavramları ve tanımları ele almaktadır. Ardından, bu operatörler için çeşitli sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Bu bağlamda, teorik sonuçların pratik problemlere nasıl uygulanabileceği örneklerle açıklanmıştır. Daha sonra yeni tanımlanan dört adımlı iterasyon yöntemi için yakınsaklık ve veri bağıllığı sonuçları ile bu iterasyon yönteminin küme değerli versiyonu için belirli şartlar altında zayıf, kuvvetli yakınsaklık, kararlılık ve veri bağıllık sonuçları gibi sabit nokta kavramları ispatlanmıştır. Bu ispatların önemli kısımları örneklerle birlikte MATHEMATICA ve MATLAB programları kullanılarak gösterilmiştir.

Tez, sabit nokta teorisinin ve küme değerli operatörlerin matematiksel analizdeki önemini vurgulayarak, bu konuda mevcut literatüre katkı sağlamayı amaçlamaktadır. Bu çalışmanın, matematiksel teorilerin pratik uygulamalarına yönelik yeni perspektifler sunarak, bu alandaki araştırmalara ilham vereceği umulmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta Teorisi, Küme Değerli Operatörler, İterasyon Yöntemleri, Kararlılık, Veri Bağıllığı, Yakınsaklık.

Eylül, 2024; 51 sayfa

M.Sc. THESIS
ON SET VALUED OPERATORS IN FIXED POINT THEORY

Demet KORKMAZGÖZ

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Samet MALDAR

ABSTRACT

Generalization of some concepts and theorems in fixed point theory has an important place. One of these generalizations consists of studies on set-valued operators. Accordingly, this thesis examines the applications of fixed point theory on set-valued operators.

The thesis primarily addresses the basic concepts and definitions of fixed-point theory and set-valued operators. Then, various fixed-point theorems for these operators are examined. In this context, how theoretical results can be applied to practical problems is explained with examples. Then, convergence and data dependency results for the newly defined four-step iteration method and fixed-point concepts such as weak, strong convergence, stability and data dependency results under certain conditions for the set-valued version of this iteration method were proven. Important parts of these proofs are demonstrated with examples using MATHEMATICA and MATLAB programs.

The thesis aims to contribute to the existing literature on this subject by emphasizing the importance of fixed-point theory and set-valued operators in mathematical analysis. It is hoped that this study will inspire research in this field by providing new perspectives on the practical applications of mathematical theories.

Keywords: Fixed Point Theory, Set-Valued Operators, Iteration Methods, Stability, Data Dependency, Convergence.

September, 2024; 51 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Bazı iterasyon yöntemleri için yakınsaklık davranışını gösteren grafik....	29
Şekil 3.2. (2.28) ve (3.68) iterasyon yöntemleri için yakınsaklık davranışı	43



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. (2.22), (2.23), (2.24) ve (2.28) ile verilen iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık davranışı.....	27
Çizelge 3.2. (2.28) ve (3.68) iterasyon yöntemleri için yakınsaklık davranışı.....	42



SİMGELER VE KISALTMALAR

$(K, \ \cdot\)$	K normlu uzay
(U, h)	h metrik uzayı
$\ \cdot\ : K \rightarrow \mathbb{R}$	K üzerinde tanımlı norm fonksiyonu
$\{x_k\}$	$\{x_k\}$ dizisi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$P_T(X)$	X in boştan farklı, kapalı bütün alt kümelerinin ailesi
$[a, b]$	Kapalı aralık
$h: U \times U \rightarrow \mathbb{R}^+$	U üzerine tanımlı metrik fonksiyonu
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$CB(X)$	X in kapalı sınırlı alt kümelerinin ailesi
$F(T)$	T nin tüm sabit noktalarının kümesi
$T: U \rightarrow U$	U kümesinden U kümesine tanımlı T dönüşümü
$T: K \rightarrow P(K)$	T küme değerli dönüşüm
$\mathbb{F}$	Cisim($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$)

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, matematiğin önemli bir dalı olup, birçok farklı alanda geniş uygulamalara sahiptir. Bu teori, bir f fonksiyonu için $f(x) = x$ eşitliğini sağlayan x değerlerini hesaplamak üzere kullanılır. Bu x değerlerine f fonksiyonun sabit noktası denir [1,2].

Sabit nokta teorisinin tarihçesi ve gelişimi, 19. yüzyılın sonlarından itibaren birçok matematikçinin çalışmaları ile zenginleşmiştir. Bu teorisin kökleri, diferansiyel denklemler, integral denklemler, fonksiyonel analiz ve topoloji gibi çeşitli matematiksel disiplinlere dayanır. Ayrıca, günlük hayatta karşılaşılan birçok problem de sabit nokta teorisi kullanılarak çözülebilir hale gelmiştir. Örneğin, ekonomi, oyun teorisi, mühendislik ve biyoloji gibi alanlarda sabit nokta teoremleri uygulanarak problemler çözülmüştür [3-7].

Küme değerli sabit nokta teorisi ise tekil değerli sabit nokta teorisinin genişletilmiş bir versiyonudur. Bu teori küme operatörlerinin sabit noktalarını inceler. Daha açık bir ifade ile küme değerli operatörler teorisi, tanım kümesindeki her bir elemanı değer kümesinin bir alt kümesine eşleyen dönüşümlerdir [8]. İlk önemli çalışmalardan biri, John Von Neumann tarafından 1937 yılında yapılmıştır [9]. Von Neumann, cebirsel topoloji ve fonksiyonel analiz konularını kullanarak, sabit noktaların varlığını ve özelliklerini incelemiştir. Bu çalışma, matematiksel ekonomi ve oyun teorisindeki uygulamalarıyla literatüre katkı sağlamıştır [10]. Daha sonra, 1941'de Shizuo Kakutani [11], tek değerli dönüşümler üzerine yapılan çalışmalara ek olarak, sonlu boyutlu Banach uzaylarında küme değerli dönüşümler için sabit nokta teorisini geliştirmiştir. Bu çalışmanın, sonsuz boyutlu Banach uzaylarına genişletilmesi Bohnenblust ve Karlin tarafından gerçekleştirilmiştir [12,13]. İlk olarak Nadler tarafından, küme değerli contraction dönüşüm tanımı verilmiş olup bu çalışmadan sonra, küme değerli dönüşümler ve küme değerli iterasyonlar üzerine geniş bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır [14-17]. 1946'da Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane Montgomery küme değerli sabit nokta teorisini homoloji teorisinin bir parçası olarak geliştirmişlerdir [18]. Bu çalışma, sabit nokta teorisi ile cebirsel topoloji arasındaki derin bağlantıları vurgulamıştır [19]. 1952'de Ky Fan [20], küme değerli sabit nokta teorisini bir dizi ekonomik modelde uygulamış olup, oyun teorisi ve matematiksel ekonomi alanlarında sabit nokta teorisinin önemli bir araç olduğunu göstermiştir. Son

olarak, 1979'da Jean-Pierre Aubin, ekonomik çalışmalar üzerine küme değerli sabit nokta teorisini daha da geliştirmiştir [21]. Bu çalışmalar ile görülüyor ki küme değerli sabit nokta teorisinin birçok farklı alandaki uygulamalarında önemli bir rol oynadığı görülmektedir [22,23].

Bu çalışmalara ek olarak küme değerli dönüşümler ve bunların sabit nokta teoremleri, Markin'in 1968'deki çalışması ve Nadler'in 1969'daki çalışmasıyla araştırmacıların ilgisini fazlasıyla çekmiştir [14, 24]. Nadler, bu çalışmasında, Banach Sabit Nokta Teoremi'nin bir genellemesini ortaya koymuştur [25]. Bu nedenle, daha sonraki araştırmacılar için ilham kaynağı olmuştur. Banach Sabit nokta teoremi ile Nadler'in teoremi arasındaki en önemli fark, Nadler'in teoreminde sabit noktanın tek olmamasıdır [8]. Ayrıca, Nadler'in bu çalışması küme değerli iterasyon yöntemlerinin tanımlanabilmesi için yol gösterici olmuştur. Küme değerli dönüşümlerin genel özelliklerinin belirlenmesi, belirli dönüşümler için sabit noktaların varlığının ortaya konması ve bu özelliklerin anlaşılabilmesi için önemli bir temel oluşturmuştur [26-30].

Son yıllarda, Banach Daralma Prensipleri üzerinde çeşitli genelleştirmeler gerçekleştirilmiştir [25]. Metrik uzaylarda iki küme arasında tanımlanan geleneksel mesafe kavramı, küme ailesi üzerinde metriğin ilk koşulunu sağlamamaktadır [27]. Bu nedenle Pompeiu, iki küme arasındaki mesafe tanımı olan Hausdorff-Pompeiu metriğini tanımlamıştır [31]. Bu mesafe, metriğin ilk iki koşulunu karşılarken, Pompeiu kendi çalışmalarında metriğin üçgen eşitsizliği koşulunu dikkate almamaktadır [28]. Bu nedenle Hausdorff, Pompeiu'in vermiş olduğu bu tanımı geliştirerek Hausdorff metriğini ortaya koymuştur [31, 32]. Bu doğrultuda küme değerli sabit nokta teoremlerinin elde edilebilmesi için temel bir kaynak oluşturmuştur [33,34]. Ayrıca Nadler, ile belirtilen çalışmasında Hausdorff metriği ile küme değerli contraction dönüşümünü kullanarak sabit nokta teorisinin küme değerli dönüşümlere ve daha genel yapılar üzerine genişletilmesinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. Banach tarafından ortaya konulan contraction prensibinin ise tam metrik uzaylarda sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti etmesinden dolayı literatürde geniş çalışma alanları ortaya konmuş ve genellemeleri araştırmacıların dikkatini çekmiştir [35,36].

Geniş bir araştırmacı kitlesi tarafından çalışılan, tekil değerli iterasyon yöntemlerinin ve tekil değerli dönüşüm sınıflarının küme değerli hallerinin yeniden tanımlanması

araştırmacılar için farklı bir alan açmıştır. Bu küme değerli yapılar kullanılarak, yakınsaklığın sağlanması gibi sabit nokta teorisinin birçok kavramı için gerekli sonuçlar elde edilmiştir [37-41].

Bu tez çalışmasında, tekil değerli bir dört adımlı iterasyon yöntemi tanımlanarak bunun için bazı tekil değerli sonuçlar elde edilmiş, bu iterasyon yönteminin küme değerli versiyonu yeniden ortaya konularak Banach uzayında tanımlı bazı küme değerli dönüşüm sınıfları için yakınsaklık, kararlılık ve veri bağlılığı kavramları incelenerek ispat edilmiştir. Son olarak be teoremlerin uygulanabilir olduğunu gösteren örnekler verilip tez çalışması bu örneklerle desteklenmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Çalışmanın bu kısmında sabit nokta teorisine ilişkin temel kavramlar incelenecektir.

2.1 Tekil Değerli Dönüşümler ve Sabit Nokta Kavramı için Tanımlar

Tanım 2.1.1: U boş olmayan bir küme ve $h: U \times U \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in U$ için;

$$i) h(x, y) \geq 0$$

$$ii) h(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$iii) h(x, y) = h(y, x) \quad (\text{simetri})$$

$$iv) h(x, y) \leq h(x, z) + h(z, y) \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

şartlarını sağlayan h fonksiyonuna U kümesi üzerinde bir metrik fonksiyon denir. (U, h) ikilisine ise metrik uzay adı verilir [42].

Tanım 2.1.2: (U, h) metrik uzay ve $\{x_k\}$ bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $z > z_0$ olduğunda

$$h(x_k, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $z_0 = z_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisi $x \in U$ noktasına yakınsaktır denir ve $x_k \rightarrow x$ ile gösterilir [42].

Tanım 2.1.3: (U, h) metrik uzay ve $\{x_k\}$ bu uzayda bir dizi olmak üzere her bir $\varepsilon > 0$ için $k, l \geq l_0$ olduğunda

$$h(x_k, x_l) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $l_0 = l_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [42].

Tanım 2.1.4: (U, h) bir metrik uzay olmak üzere U uzayındaki her $\{x_k\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise U uzayına tam metrik uzay denir [43].

Tanım 2.1.5: (U, h) metrik uzayındaki K kümesinin her G açık örtüsünün bir sonlu G_1 alt örtüsü varsa K kümesine kompakttır denir [42].

Tanım 2.1.6: U boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. $+: U \times U \rightarrow U$ ve $\cdot: \mathbb{F} \times U \rightarrow U$ toplama ve skalerle çarpma işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa U 'e $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzay) denir.

A) U kümesi $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Her $m_1, m_2, m_3 \in U$ için

i) $m_1 + m_2 \in U$

ii) $m_1 + (m_2 + m_3) = (m_1 + m_2) + m_3$

iii) $m_1 + \theta = \theta + m_1 = m_1$; olacak şekilde $\theta \in U$ vardır.

iv) $m_1 + (-m_1) = (-m_1) + m_1 = \theta$; olacak şekilde $-m_1 \in U$ ve $\theta \in U$ vardır.

B) Her $m_1, m_2 \in U$ ve her $v_1, v_2 \in \mathbb{F}$ için

i) $v_1 m_1 \in U$

ii) $v_1(m_1 + m_2) = v_1 m_1 + v_1 m_2$

iii) $(v_1 + v_2)m_1 = v_1 m_1 + v_2 m_1$

iv) $v_1(v_2 m_1) = (v_1 v_2)m_1$

v) $1 \cdot m_1 = m_1$ ($1, \mathbb{F}$ 'nin birim elemanıdır)

v) $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$

özelliklerini sağlıyorsa L 'ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzay denir [44].

Tanım 2.1.7: K bir vektör uzay ve $B \subseteq K$ olmak üzere $\forall x, y \in B$ için

$$C = \{\rho \in K: \rho = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq B$$

ise, B kümesine konveks küme denir [45].

Tanım 2.1.8: K bir vektör uzay olsun. $\mathbb{F}$ cismi $\mathbb{R}$ olmak üzere, $\|\cdot\|: K \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun m_1 noktasındaki değeri $\|m_1\|$ ile verilsin. Her $m_1, m_2 \in K$ ve $v_1 \in \mathbb{F}$ için;

$$i) \|m_1\| \geq 0$$

$$ii) \|m_1\| \geq 0 \Leftrightarrow m_1 = 0$$

$$iii) \|v_1 m_1\| = |v_1| \cdot \|m_1\|$$

$$iv) \|m_1 + m_2\| \leq \|m_1\| + \|m_2\|$$

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna K üzerinde bir norm, $(K, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [46]. K normlu uzay üzerinde bir norm tarafından üretilen metrik aşağıdaki gibidir;

$$\rho(m_1, m_2) = \|m_1 - m_2\|, (m_1, m_2 \in K) \quad (2.1)$$

ve bu metrik norm tarafından üretilen metriktir. (2.1) metriği, vektör uzay yapısı ile uyum gösteren aşağıdaki özelliklere sahiptir;

$$\rho(m_1 + m_3, m_2 + m_3) = \rho(m_1, m_2), (m_3 \in K) \quad (2.2)$$

$$\rho(v_1 \cdot m_1, v_1 \cdot m_2) = |v_1| \cdot \rho(m_1, m_2), (v_1 \in K) \quad (2.3)$$

Dolayısıyla bir normlu uzay için hem bir vektör uzayının hem de bir metrik uzayın özelliklerini taşıyor diyebiliriz.

Tanım 2.1.9: K normlu vektör uzay olsun. K uzayı, $h(p, q) = \|p - q\|$, $(p, q \in K)$ ile verilen norm tarafından üretilen metriğe göre tam ise K uzayına Banach uzayı denir [47].

Tanım 2.1.10: $K, L: U \rightarrow U$ iki operatör olsun. Her $x \in U$ ve uygun bir $\varepsilon > 0$ için $\|Kx - Lx\| \leq \varepsilon$ ise L, K 'nın bir yaklaşım operatörü olarak adlandırılır [48].

Tanım 2.1.11: U boş olmayan bir küme $T: U \rightarrow U$ keyfi bir dönüşüm olsun.

$$Tx = x \quad (2.4)$$

olacak şekilde bir $x \in U$ var ise bu x noktasına T 'nin sabit noktası denir ve T 'nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile belirtilir [49].

Örnek 2.1.12:

- 1) $U = [0,1]$ reel vektör uzayı ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm $Tx = 5x$ olmak üzere $F(T) = \{0\}$.
- 2) $U = \mathbb{R}$ ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm $Tx = x - 8$ olmak üzere $F(T) = \emptyset$.
- 3) $U = \mathbb{R}$ ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm $Tx = x/5$ olmak üzere $F(T) = \{0\}$.
- 4) $U = [0,1]$ reel vektör uzayı ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm $Tx = x^3 - x^2$ olmak üzere $F(T) = \{0\}$.

Tanım 2.1.13: (U, h) bir metrik uzay olmak üzere $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $m, n \in U$ için

$$\rho(Tm, Tn) = \varphi \cdot \rho(m, n) \quad (2.5)$$

olacak şekilde bir $\varphi > 0$ sayısı var ve mevcut ise T 'ye bir Libschitzian dönüşüm denir. Buradan;

- i) Eğer $0 \leq \varphi < 1$ ise T dönüşümüne daraltan(contraction) dönüşüm
- ii) Eğer $\varphi = 1$ ise T dönüşümüne genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm

denir [49]. Bu durumda her T Libschitzian dönüşüm düzgün süreklidir.

Örnek 2.1.14:

i) $X = \mathbb{R}$ ve $h(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \rightarrow X, Tx = 5x - 12$ şeklinde tanımlansın. Her $x, y \in X$ için;

$$h(x, y) = |x - y| = |5x - 12 - (5y - 12)| = |5x - 5y| \leq 5 \cdot |x - y|$$

olup $L = 5 \geq 0$ için T Libschitzian dönüşümdür.

ii) $X = (0,1]$ uzayı ve $h(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \rightarrow X$ olmak üzere $Tx = \frac{x}{7}$ olsun.

$$h(x, y) = \left| \frac{x}{7} - \frac{y}{7} \right| = \frac{|x - y|}{7} \leq \frac{1}{7} |x - y|$$

olup $0 < \frac{1}{7} \leq 1$ olduğundan T dönüşümü daraltan (contraction) dönüşümdür fakat sabit noktası yoktur.

Teorem 2.1.15: (U, h) tam metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Her $m, n \in U$ için;

$$h(Tm, Tn) \leq \varphi h(m, n) \quad (2.6)$$

olacak şekilde bir $0 \leq \varphi < 1$ sabiti varsa o zaman T tek bir sabit noktaya sahiptir. Literatürde bu teoreme Banach contraction prensibi veya Banach sabit nokta teoremi olarak adlandırılır [25].

Tanım 2.1.16: Bir U kümesi içinde tanımlı $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri verildiğinde, bu dizilerin her bir terimi sıfıra yaklaşırsa, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0 \quad (2.7)$$

şartı sağlanıyorsa, bu iki dizi denk olarak kabul edilir [50].

Tanım 2.1.17: Bir U kümesi içinde tanımlı $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri verildiğinde, her $k \in \mathbb{N}$ için bir $\varepsilon(k)$ değeri varsa ve $n \geq k$ olduğunda

$$\|x_n - y_n\| \leq \varepsilon(k) \quad (2.8)$$

şartı sağlanıyorsa $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin yaklaşık dizisi olarak adlandırılır [49].

Tanım 2.1.18: L Banach uzayında $x_n \rightarrow x$ zayıf yakınsama ve $y \neq x$ olmak üzere her $y \in L$ için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|x_n - x\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|x_n - y\| \quad (2.9)$$

olmasını gerektiriyorsa, bu durumda x Opial şartını sağlıyor demektir. Hilbert uzayları Opial şartını sağlayan Banach uzayları örnekleridir [51].

Tanım 2.1.19: L bir Banach uzayı olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve $\|m\| \leq 1$, $\|n\| \leq 1$ ve $\|m - n\| \geq \varepsilon$ koşulunu sağlayan her $m, n \in L$ için; $\frac{1}{2}\|m + n\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ mevcutsa L için düzgün (uniformly) konveks uzay denir [52].

2.2 Tekil Değerli Dönüşümler için İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktası bulunurken çeşitli iterasyon yöntemleri kullanılır. İterasyonlar belirli bir dönüşüm ve şartlar altında sabit noktasını bulmak için kullanılan yöntemlerdir. Bu yöntemlerden ilki Picard iterasyon yöntemidir [49]. Bazı durumlarda bu yöntem yeterince hızlı veya etkili olmayabilir. Bu nedenle, farklı iterasyon yöntemlerine ihtiyaç duyulmuştur. Bu yöntemlerden bazıları şunlardır:

Tanım 2.2.1: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{n+1} = f(T, x_n) = Tx_n \end{cases} \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Picard iterasyon yöntemi denir [49].

Tanım 2.2.2: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in [0,1]$ belirli koşulları karşılayan bir reel sayı dizisi olmak üzere

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTx_n \end{cases} \quad (2.11)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine Mann iterasyon yöntemi denir [53].

Tanım 2.2.3: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ belirli koşulları karşılayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTx_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n \end{cases} \quad (2.12)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine Ishikawa iterasyon yöntemi denir [54].

Tanım 2.2.4: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli koşulları karşılayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (2.13)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine Noor iterasyon yöntemi denir [55].

Tanım 2.2.5: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ belirli koşulları karşılayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \quad (2.14)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine S-iterasyon yöntemi denir [56].

Tanım 2.2.6: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli koşulları karşılayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tz_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (2.15)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine Thakur iterasyon yöntemi denir [57].

Tanım 2.2.7: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli koşulları karşılayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)Tx_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (2.16)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine S* iterasyon yöntemi denir [58].

Bu tez konusunun temelini oluşturan dört adımlı iterasyon yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.8: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere;

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n T w_n \\ w_n = (1 - \mu_n)x_n + \mu_n T x_n \end{cases} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2.3 Küme Değerli Dönüşümler ve Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.3.1: X, Y boştan farklı kümeler olmak üzere X 'in her elemanını Y 'nin bir alt kümesine eşleyen T dönüşümüne küme değerli (çoğul değerli) dönüşüm denir ve $T: X \rightarrow 2^Y$ şeklinde gösterilir. Burada 2^Y , Y nin bütün alt kümelerinin ailesidir [59]. Yani belirli bir kümenin her bir elemanına diğer bir kümenin belirli bir alt kümesini karşılık getirmektedir.

Tanım 2.3.2: $T: X \rightarrow 2^X$ şeklinde verilen küme değerli dönüşüm için

$$x_1 \in T(x_1) \quad (2.18)$$

koşulunu sağlayan $x_1 \in X$ varsa bu noktaya T küme değerli dönüşümünün bir sabit noktası denir [14].

Örnek 2.3.3:

i) $K = \{1,2,3\}$ ve $L = \{3,6,9,16\}$ olmak üzere $T: K \rightarrow L$ verilsin. $Tm = 3m$ olacak şekilde tanımlansın.

T operatörü $T: K \rightarrow 2^L$ ve $T = \{T(m)\}$ olarak verilirse;

$$T1 = \{T(1)\} = \{3\}$$

$$T2 = \{T(2)\} = \{6\}$$

$$T3 = \{T(3)\} = \{9\}$$

olur. O halde T küme değerli operatördür ve sabit noktaları $\{3,6,9\}$ dur.

ii) $T: [0, \infty) \rightarrow 2^{[0, \infty)}$ $T(\alpha) = [0, \alpha]$ fonksiyonu için her bir $\alpha \in [0, \infty)$ için sabit noktadır.

iii) $T: \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ $T(\rho) = \begin{cases} [-1, 1]; & \rho \neq 0 \\ \{0\}; & \rho = 0 \end{cases}$ operatörü için $\rho = 0$ ve her bir $\rho \in [-1, 1]$ bir sabit noktadır.

Tanım 2.3.4: (U, h) bir metrik uzay ve S, U 'nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere bir $\alpha \in U$ için;

$$h(\alpha, S) = \inf \{h(\alpha, \beta): \beta \in S\} \quad (2.19)$$

değerine α 'nın S kümesine olan uzaklığı denir [59].

Tanım 2.3.5: (U, h) bir metrik uzay, $A, B \in P(U)$ olsun. Bu durumda

$$D(A, B) = \sup \{h(\alpha, \beta): \alpha \in A\} \quad (2.20)$$

değerine A kümesinin B kümesine olan uzaklığı,

$$H(A, B) = \max \{D(A, B), D(B, A)\} \quad (2.21)$$

değerine de iki küme arasındaki uzaklık denir [59]. Burada H uzaklık fonksiyonu $P(U)$ üzerinde bir metriktir ve bu metriğe Hausdorff metriği denir.

Örnek 2.3.6:

i) $U = \mathbb{R}$ $m, n \in X$ için $\rho(m, n) = |m - n|$ olsun. $A = [1, 7]$ ve $B = [6, 8]$ olmak üzere; $5 \in U$ 'nun A kümesine olan uzaklığı;

$$\begin{aligned} \rho(5, A) &= \inf \{\rho(5, A), 5 \in S\} \\ &= \inf \{\rho(5, 1), \rho(5, 7)\} \\ &= \inf \{4, 2\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$5 \in U$ 'in B kümesine olan uzaklığı;

$$\rho(5, B) = \inf \{\rho(5, B), 5 \in S\}$$

$$\begin{aligned}
&= \inf \{\rho(5,6), \rho(5,8)\} \\
&= \inf \{(1,3)\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $U = \mathbb{R}^2, (m,n)(m',n') \in U$ ve $\rho((m,n), (m',n')) = \sqrt{(m-m')^2 + (n-n')^2}$ olmak üzere $A = \{(m,n) \in \mathbb{R}^2, m^2 + n^2 \leq 4\}$ ve $B = \{(m,n) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq m \leq 4, 0 \leq n \leq 3\}$ kümeleri alındığında; $D(A,B) = \sup_{\alpha \in A} p(\alpha, B) = 2$ ve $D(B,A) = \sup_{b \in B} p(b, A), a \in A = 5$ olup buradan $H(A,B) = \max \{D(A,B), D(B,A)\} = 5$ olur. Alınan keyfi m 'lere göre mesafe için infimumları $\sup D(A,B)$ verir. Keyfi m 'lerin supremumu yani $(1-0)$ olup 1 olur.

Tanım 2.3.7: (U, h) bir metrik uzay ve $T: U \rightarrow P(U)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Her $m, n \in U$ için; $H(Tm, Tn) \leq \varphi h(m, n)$ olacak şekilde bir $\varphi > 0$ sayısı mevcut ise T 'ye küme değerli Libschitzian dönüşüm denir. Burada özel olarak;

- 1) Eğer $0 \leq \varphi < 1$ ise T 'ye küme değerli contraction (daraltan),
- 2) Eğer $\varphi = 1$ ise T 'ye küme değerli nonexpansive (genişlemeyen) dönüşüm denir [59].

Tanım 2.3.8: (U, h) bir metrik uzay, H 'da $P(U)$ üzerinde Hausdorff metriği olmak üzere $T: U \rightarrow P(U)$ bir küme değerli dönüşümü için U 'daki her yakınsak $\{m_n\}$ dizisi $m_n \rightarrow m$ iken $H(Tm_n, Tm) \rightarrow 0$ oluyorsa T 'ye U üzerinde süreklidir denir [14].

Tanım 2.3.9: L bir Banach uzayı ve K 'da L 'nin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere $T: K \rightarrow P(K)$ küme değerli dönüşümü verilsin. K 'daki $\{x_n\}$ dizisi x noktasına zayıf ve $y_n \in Tx_n$ olmak üzere $\{y_n\}$ dizisi y 'ye güçlü yakınsadığında $y \in Tx$ oluyorsa T dönüşümüne $y \in K$ da demiclosed denir [60].

Tanım 2.3.10: $T: K \rightarrow P(K)$ küme değerli dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere eğer her $m > 0$ için $f(0) = 0, f(r) > 0$ olup azalmayan bir $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ var ve her $x \in K$ için $h(x, Tx) \geq fh(x, F(T))$ ise T 'ye (I) koşulunu sağlıyor denir [61].

Tanım 2.3.11: L Opial koşulunu sağlayan düzgün konveks Banach uzayı ve K, L nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olmak üzere $T: K \rightarrow P(K)$ küme değerli dönüşümü için $F(T) \neq \emptyset$ ve P_T genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Eğer $I - P_T$ sıfırda demiclosed ise bu durumda (2.28) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına zayıf yakınsar [62].

Tanım 2.3.12: L bir Banach uzayı ve $K \subseteq L$ kapalı bir küme olsun. $x \in L$ için K 'nin x için metrik fonksiyonu $h(x, L) = \inf \{\|x - k\|: k \in K\}$ 'dur. x 'in K üzerine metrik izdüşümü $P_K(x) = \{k \in K: \|x - k\| = d(x, K)\}$ olur. Burada K kümesine proksimal denir [63].

2.4 İterasyon Yöntemlerinin Küme Değerli Versiyonları

Mann iterasyonu küme değerli dönüşümler için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.4.1: $T: U \rightarrow P(U)$ küme değerli bir dönüşüm $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ belirli koşulları karşılayan bir reel sayı dizisi olsun ve $p \in F(T)$ için

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n u_n \end{cases} \quad (2.22)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine küme değerli Mann iterasyon yöntemi denir. Burada $u_n \in P_T(x_n)$ dir [64].

Ishikawa iterasyonu küme değerli dönüşümler ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.4.2: $T: U \rightarrow P(U)$ küme değerli dönüşüm $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve belirli koşulları karşılayan reel sayı dizileri olmak üzere;

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n v_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n u_n \end{cases} \quad (2.23)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine küme değerli Ishikawa iterasyon yöntemi denir. Burada $u_n \in P_T(x_n), v_n \in P_T(y_n)$ dir [64].

Küme değerli Noor iterasyon yöntemi ise:

Tanım 2.4.3: $T: U \rightarrow P(U)$ küme değerli dönüşüm $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ belirli koşulları karşılayan reel sayı dizileri olmak üzere;

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nv_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nw_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_nu_n \end{cases} \quad (2.24)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine küme değerli Noor iterasyon yöntemi denir. Burada $u_n \in P_T(x_n)$, $v_n \in P_T(y_n)$, $w_n \in P_T(z_n)$ 'dir [56].

S-iterasyon yönteminin küme değerli versiyonu:

Tanım 2.4.4: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ belirli koşulları karşılayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_nv_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nu_n \end{cases} \quad (2.25)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine küme değerli S-iterasyon yöntemi denir. Burada $u_n \in P_T(x_n)$, $v_n \in P_T(y_n)$ 'dir [65].

Tanım 2.4.5: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ belirli koşulları karşılayan reel sayı dizileri olmak üzere;

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)v_n + \alpha_nw_n \\ y_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_nw_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_nu_n \end{cases} \quad (2.26)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine küme değerli S^* iterasyon yöntemi denir. Burada $u_n \in P_T(x_n)$, $v_n \in P_T(y_n)$, $w_n \in P_T(z_n)$ 'dir [66].

Tanım 2.4.6: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ belirli koşulları karşılayan reel sayı dizileri olmak üzere;

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)w_n + \alpha_nv_n \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_nw_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_nu_n \end{cases} \quad (2.27)$$

şeklinde verilen iterasyon yöntemine küme değerli Thakur iterasyon yöntemi denir. Burada $u_n \in P_T(x_n)$, $v_n \in P_T(y_n)$, $w_n \in P_T(z_n)$ 'dir [67].

Tanım 2.2.8 de (2.17) ile verilen yeni iterasyon yönteminin küme değerli versiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 2.4.7:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n a_n, & a_n \in P_T(y_n) \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n b_n, & b_n \in P_T(z_n) \\ z_n = (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n c_n, & c_n \in P_T(w_n) \\ w_n = (1 - \mu_n)x_n + \mu_n d_n, & d_n \in P_T(x_n) \end{cases} \quad (2.28)$$

2.5 Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 2.5.1: $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olduğu kabul edilirse f 'nin $[a, b]$ aralığında bir sabit noktası vardır [49].

Teorem 2.5.2: (U, d) bir tam metrik uzay ve $T: U \rightarrow 2^U$ küme değerli bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in U$ için;

$$H(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y) \quad (2.29)$$

olsun. O halde $k \in [0, 1)$ varsa T 'nin U uzayında bir sabit noktası vardır. Burada H , Hausdorff metriği anlamına gelir [14].

İspat: T operatörünün Lipschitz sabiti $k \in [0, 1)$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in U$ alırsak ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. (U, d) metrik uzayında $k > 0$, $x \in A$ için öyle bir $y \in B$ vardır ki $d(x, y) \leq H(A, B) + k$ olmak üzere $d(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + k$ olacak biçimde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. $d(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + k^2$ olacak şekilde bir $x_3 \in Tx_2$ vardır. Bu şekilde devam edersek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in Tx_n$ ve $d(x_n, x_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilebilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n) + k^n \\ &\leq k[H(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + k^{n-1}] + k^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq kH(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + 2k^n \\
&\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2k^n \\
&\leq k^n d(x_0, x_1) + nk^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ olup $\sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} [k^n d(x_0, x_1) + nk^n] \\
&= d(x_0, x_1) \sum_{n=0}^{\infty} k^n + \sum_{n=0}^{\infty} nk^n \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\{x_n\}$ 'nin bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. U tamdır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ olacak şekilde bir $x^* \in U$ vardır. O halde

$$D(x_{n+1}, Tx^*) \leq H(Tx_n, Tx^*) \leq kd(x_n, x^*) \quad (2.30)$$

iken $n \rightarrow \infty$ alınırsa $D(x^*, Tx^*) = 0$ olup $x^* \in Tx^*$ dır. Yani x^* , T 'nin bir sabit noktasıdır.

Teorem 2.5.3: $(U, \|\cdot, \cdot\|)$ normlu bir lineer uzay olsun ve iki nokta arasındaki mesafe $h(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlansın. Ayrıca $T: U \rightarrow CB(U)$ küme değerli bir Kannan dönüşümü olsun. Eğer $S: U \rightarrow CB(U)$ ve $F(S) \neq \emptyset$ ise ve $H(Tx, Sx) \leq \gamma$, $\forall x \in U$ şartı sağlanıyorsa o zaman $z \in F(T)$ için

$$h(z, z^*) \leq \frac{1}{1-k} \vartheta \gamma, \quad \sup_{z^* \in F(S)} h(z^*, F(T)) \leq \frac{1}{1-k} \vartheta \gamma \quad (2.31)$$

ifadesi bulunabilir. Burada $k = \frac{\theta}{1-\theta}$ ve $z^* \in F(S)$, S 'nin sabit noktalar kümesinde rastgele bir noktadır. Eğer S , küme değerli bir Kannan dönüşümü ise;

$$H(F(S), F(T)) \leq \frac{1}{1-k} \vartheta \gamma \quad (2.32)$$

eşitsizliği geçerli olur [68].

Teorem 2.5.4: L bir düzgün konveks Banach uzayı ve U, L uzayının kapalı, konveks, sınırlı ve boş olmayan bir alt kümesi olarak alınsın. $T: U \rightarrow P_k(L)$ genişleme olmayan bir operatör olsun. O halde T 'nin bir sabit noktası vardır [49].

Teorem 2.5.5: L bir Banach uzayı, G , L 'nin kompakt, konveks alt kümesi ve $f: G \rightarrow G$ sürekli ve kompakt bir dönüşüm olmak üzere f , G 'de en az bir sabit noktaya sahiptir [49].

2.6. Bazı Sabit Nokta Tanımları ve Lemmaları

Bu bölümde yakınsaklık, kararlılık ve veri bağıllığı teoremlerinin ispatı için gerekli lemmalara yer verilmiştir.

Tanım 2.6.1: (U, h) bir metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ dönüşüm ve $x_0 \in U$ olsun. Picard iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin T 'nin p sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, U uzayında keyfi bir dizi olmak üzere;

$$\varepsilon_n = h(u_{n+1}, f(T, u_n)), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

olarak alalım. Bu iterasyon yönteminin T 'ye göre kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p \quad (2.34)$$

olmasıdır [69].

Tanım 2.6.2: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ herhangi bir sabit nokta iterasyon dizisi olsun. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin T 'nin p sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. Eğer $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine denk bir dizi ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n+1} - f(T, u_n)\| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p \quad (2.35)$$

olur. O halde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine zayıf w^2 – kararlılık denir [70].

Lemma 2.6.3: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan iki dizi olsun.

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n)a_n + b_n \quad (2.36)$$

olacak şekilde $n \geq n_0$ için $\mu_n \in (0, 1)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $n \rightarrow \infty$ için $\frac{b_n}{\mu_n} \rightarrow 0$ dır. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dır [71].

Lemma 2.6.4: Her $n \geq n_0$ için $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ negatif olmayan reel sayı dizisi verilsin.

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n)a_n + \mu_n\eta_n \quad (2.37)$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcut olsun. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $\eta_n \geq 0$ dır. Bu durumda

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_n \quad (2.38)$$

eşitsizliği sağlanır [48].

Lemma 2.6.5: L bir Banach uzayı olmak üzere $p > 0$ sayısı için L 'nin $\|\cdot\|^2$ kare normu p yarıçaplı orijin merkezli kapalı küre olan β_n üzerinde kapalı ve konvektir. Bu durumda $\varphi(0) = 0$ olacak şekilde $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli artan bir fonksiyon vardır. Öyle ki

$$\|ax + (1 - a)y\| \leq \alpha\|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2 - \alpha \cdot (1 - \alpha)\varphi\|x - y\| \quad (2.39)$$

eşitliği sağlanır [72].

Lemma 2.6.6: S bir Banach uzayı olsun. S içerisinde $\{w_n\}$ ve $\{g_n\}$ öyle diziler olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|w_n\| \leq 1$, $\|g_n\| \leq 1$ olacak şekilde S içinde $z_n = (1 - t_n)w_n + t_ng_n$ şeklinde tanımlansın. O halde $0 < a < b < 1$ olmak üzere $\{t_n\}$, $[a, b]$ aralığında bir dizidir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| = 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - g_n\| = 0$ olur [73].

Lemma 2.6.7: $T: K \rightarrow P(K)$ küme değerli dönüşümü ve $P_T(u) = \{v \in Tu: \|u - v\| = d(u, Tu)\}$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) $u \in F(T)$,
 - ii) $P_T(u) = \{u\}$,
 - iii) $u \in F(P_T)$,
- (2.40)

olur ve $F(T) = F(P_T)$ dir [74].

3. YENİ İTERASYON YÖNTEMİNİN YAKINSAKLIK, KARARLILIK VE VERİ BAĞLILIĞI

Bu bölümde ele alınacak (2.28) ile verilmiş olan yeni iterasyon yöntemi için yakınsaklık teoremleri, kararlılık ve veri bağılılığı ispatlanacaktır.

3.1 Yeni İterasyon Yönteminin Yakınsaklığı

Lemma 3.1.1 L düzgün konveks Banach uzayının alt kümesi K olsun. $T: K \rightarrow P(K)$ şeklinde tanımlansın, P_T ise Tanım 2.3.7 şartını sağlayan nonexpansive dönüşüm ve sabit nokta kümesi $F(T) \neq \emptyset$ olsun. p noktası T dönüşümünün bir sabit noktası ise (2.28) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır.

İspat: $p \in F(T)$ olsun. Lemma 2.6.7 ve $a_n \in P_T(y_n)$ kullanılarak

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n a_n - p\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n \|a_n - p\| \\ &= (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n H(P_T(y_n), P_T(p)) \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n \|y_n - p\| \end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. O halde $b_n \in P_T(z_n)$ kullanılarak

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n b_n - p\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \|b_n - p\| \\ &= (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n H(P_T(z_n), P_T(p)) \\ &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \|z_n - p\| \end{aligned} \tag{3.2}$$

ve $c_n \in P_T(w_n)$ kullanılarak

$$\begin{aligned} \|z_n - p\| &= \|(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n c_n - p\| \\ &\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n \|c_n - p\| \\ &= (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n H(P_T(w_n), P_T(p)) \\ &\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n \|w_n - p\| \\ &= \|w_n - p\| \end{aligned} \tag{3.3}$$

olur. Benzer şekilde işlemler yapılır ve $d_n \in P_T(x_n)$ kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|w_n - p\| &= \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n d_n - p\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n\|d_n - p\| \\
&= (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n H(P_T(x_n), P_T(p)) \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n\|x_n - p\| \\
&= \|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4), (3.3), (3.2) ve (3.1) eşitsizlikleri gözönüne alındığında

$$\begin{aligned}
\|w_n - p\| &\leq \|x_n - p\| \\
\|z_n - p\| &\leq \|x_n - p\| \\
\|y_n - p\| &\leq \|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. Böylece

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\| \tag{3.6}$$

olur. Sonuç olarak $\{\|x_n - p\|\}_{n=1}^{\infty}$ azalan ve sınırlı olur. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limiti elde edilir.

Lemma 3.1.2 L, K, T ve P_T Lemma 3.1.1 ile aynı şartlar altında verilsin. Bu durumda (2.28) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, P_T(x_n)) = 0$ olur.

İspat: Lemma 3.1.1 elde edilen $p \in F(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ var olduğundan $r \geq 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $d_n \in P_T(x_n)$, (2.28) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi ve Hausdorff metriği tanımı gereğince;

$$\|d_n - p\| \leq H(P_T(x_n), P_T(p)) \leq \|x_n - p\| \tag{3.7}$$

olur. O halde

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|d_n - p\| \leq r \tag{3.8}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Lemma 3.1.1 ile verilen (3.5) ve (3.6) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|a_n - p\| &\leq H(P_T(y_n), P_T(p)) \leq \|y_n - p\| \\
\|b_n - p\| &\leq H(P_T(z_n), P_T(p)) \leq \|z_n - p\| \\
\|c_n - p\| &\leq H(P_T(w_n), P_T(p)) \leq \|w_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olur. (3.9) eşitsizliği ile $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n - p\| &\leq r \\
\limsup_{n \rightarrow \infty} \|b_n - p\| &\leq r \\
\limsup_{n \rightarrow \infty} \|c_n - p\| &\leq r
\end{aligned} \tag{3.10}$$

yazılabilir.

$$\|x_{n+1} - p\| = \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n a_n - p\| \leq \|x_n - p\| \tag{3.11}$$

olur. Bu durum Lemma 3.1.1 den görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n a_n - p\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r
\end{aligned} \tag{3.12}$$

olduğundan dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n a_n - p\| = r \tag{3.13}$$

elde edilir. Lemma 2.6.7 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a_n\| = 0 \tag{3.14}$$

olduğu görülür. (2.28) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - a_n\| &= \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n a_n - a_n\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - a_n\|
\end{aligned} \tag{3.15}$$

(3.15) eşitsizliğinin her iki tarafının limiti alınıp ve (3.14) eşitsizliği kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - a_n\| = 0 \quad (3.16)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &= \|x_{n+1} - a_n\| + \|a_n - p\| \\ &\leq \|x_{n+1} - a_n\| + H(P_T(y_n), P_T(p)) \\ &\leq \|x_{n+1} - a_n\| + \|y_n - p\| \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.16) eşitsizliği ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r$ eşitliği kullanılarak

$$r \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \quad (3.18)$$

böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| = r \quad (3.19)$$

olur. Ayrıca benzer şekilde Lemma 3.1.1 de verilen (3.2) eşitsizliği ve (3.19) limiti kullanılarak .

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n b_n - p\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r \quad (3.20)$$

olduğundan dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n b_n - p\| = r \quad (3.21)$$

elde edilir. Lemma 2.6.3 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - b_n\| = 0 \quad (3.22)$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \|y_n - b_n\| &= \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n b_n - b_n\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - b_n\| \end{aligned} \quad (3.23)$$

(3.23) eşitsizliğinin her iki tarafının limiti alınıp ve (3.22) eşitsizliği kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - b_n\| = 0 \quad (3.24)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|y_n - b_n\| + \|b_n - p\| \\ &\leq \|x_{n+1} - b_n\| + H(P_T(z_n), P_T(p)) \\ &\leq \|y_n - b_n\| + \|z_n - p\| \end{aligned} \quad (3.25)$$

(3.25) eşitsizliği ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r$ eşitliği kullanılarak

$$r \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| \quad (3.26)$$

ve böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| = r \quad (3.27)$$

olur. Bu aşama için benzer işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned} \|z_n - p\| &= \|(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n c_n - p\| \leq \|x_n - p\| \\ r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n c_n - p\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n c_n - p\| &= r \end{aligned} \quad (3.28)$$

elde edilip

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\| = r \quad (3.29)$$

sonucuna ulaşılır. Böyle devam edilirse

$$\begin{aligned} \|w_n - p\| &= \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n d_n - p\| \leq \|x_n - p\| \\ r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n d_n - p\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n d_n - p\| &= r \end{aligned} \quad (3.30)$$

olur. Buradan son olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - d_n\| = 0 \quad (3.31)$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, P_T(x_n)) = 0$ sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.3 L , Opial şartını sağlayan düzgün konveks Banach uzayı ve K , L nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T: K \rightarrow P(K)$ şeklinde tanımlansın, P_T ise Tanım 2.3.7 şartını sağlayan nonexpansive dönüşüm ve sabit nokta kümesi $F(T) \neq \emptyset$ olsun. $I - P_T$ sıfırda demiclosed ise bu durumda (2.28) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: Lemma 3.1.1 elde edilen $p \in F(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ var olduğu gösterilmişti.

$T: K \rightarrow P(K)$ şeklinde tanımlanan dönüşümünün sabit nokta kümesinde tek zayıf alt limite sahip olduğu gösterilmelidir. Bunun için öncelikle $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = r_1$ ve $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = r_2$ alt limitlerine sahip $\{x_n\}$ dizisinin birer alt dizileri olduğunu kabul edelim. Lemma 3.1.2 nin (3.31) eşitliğinden $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - d_n\| = 0$ olacak şekilde $d_n \in P_T(x_n)$ vardır. $I - P_T$ sıfırda demiclosed olduğu için ayrı ayrı $r_1, r_2 \in F(P_T)$ olur.

Sabit noktanın tekliğini göstermek için $r_1 \neq r_2$ olduğunu kabul edelim. Opial'in şartından dolayı

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - r_1\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - r_1\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - r_2\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - r_2\| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - r_2\| < \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - r_1\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - r_1\| \end{aligned} \quad (3.32)$$

elde edilen bu çelişki ile $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ deki bir noktaya zayıf yakınsar.

Teorem 3.1.4 L , düzgün konveks Banach uzayı ve K , L nin boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $T: K \rightarrow P(K)$ şeklinde tanımlansın ve (I) şartını sağlasın, P_T ise Tanım 2.3.7 şartını sağlayan nonexpansive dönüşüm ve sabit nokta kümesi $F(T) \neq \emptyset$ olsun p bir sabit nokta olmak üzere (2.28) ile tanımladığımız $\{x_n\}$ iterasyon dizisinin T bir sabit noktasına yakınsar.

İspat: Lemma 3.1.1 ve Lemma 3.1.2'den dolayı $\{x_n\}$ dizisi sınırlı ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, P_T(x_n)) = 0$ olduğu gösterilmiştir. Bu nedenle bir alt dizi seçebiliriz $\{x_{n_k}\}$, $\{x_n\}$ dizisinin her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_{n_k} - y_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\{y_k\} \subset F(T)$ vardır. $\{x_n\}$

dizisi bir Cauchy dizisidir. Ayrıca Lemma 3.1.1 ve Lemma 3.1.2 ve (I) şartı kullanılarak $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\|x_{n_{k+1}} - y_k\| \leq \|x_{n_k} - y_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.33)$$

olur. Ayrıca

$$\|y_{k+1} - y_k\| \leq \|x_{n_{k+1}} - y_{k+1}\| + \|x_{n_{k+1}} - y_k\| \leq \varepsilon \quad (3.34)$$

$\{y_k\}$ Cauchy dizisi olup p noktasına yakınsar. Çünkü

$$d(y_k, T(p)) \leq H(T(p), T(y_k)) \leq \|y_k - p\| \quad (3.35)$$

ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k - p\| = 0$, $d(p, T(p)) = 0$ ve böylece $p \in F(T)$ ve $\{x_{n_k}\}$ dizisi güçlü olarak p noktasına yakınsar. Çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır ve $\{x_n\}$ dizisi güçlü olarak p noktasına yakınsar.

Örnek 3.1.5 $K = [0,1] \subset B = \mathbb{R}$ olmak üzere ve $T: K \rightarrow P(K)$ operatörü

$$Tx = \left[\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right]$$

olsun. Burada P_T 'nin $\delta = \frac{1}{2}$ olduğundan küme değerli daraltan dönüşüm olduğu aşağıdaki işlemler ile görülebilir.

$$\begin{aligned} P_T &= \left\{ y \in T(x): |x - y| = d\left(x, \left[\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right]\right) \right\} \\ &= \left\{ y \in T(x): |x - y| = \left| x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) \right| \right\} \\ &= \left\{ y \in T(x): |x - y| = \left| x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right| \right\} \\ &= \left\{ y \in T(x): |x - y| = \left| \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right| \right\} \\ &= \left\{ y \in T(x): x - y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right\} \\ &= \left\{ y \in T(x): y = x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right\} \\ &= \left\{ y \in T(x): y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right\} \end{aligned}$$

ve

$$H(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2} \|x - y\|$$

$$H(Tx, Ty) \leq \|x - y\|$$

olur. Her daraltan dönüşüm aynı zamanda genişlemeyen dönüşümdür. O halde (2.28) ile verilen iterasyon yöntemi:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n \left(\frac{y_n}{2} + \frac{1}{4} \right) \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n \left(\frac{z_n}{2} + \frac{1}{4} \right) \\ z_n = (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n \left(\frac{w_n}{2} + \frac{1}{4} \right) \\ w_n = (1 - \mu_n)x_n + \mu_n \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{4} \right) \end{cases}$$

elde edilir.

Aşağıdaki Çizelge 3.1 yukarıdaki iterasyon yöntemleri için, yani küme değerli Mann iterasyon yöntemini, Ishikawa iterasyon yöntemini, Noor iterasyon yöntemini ve (2.28) ile verilen iterasyon yöntemlerinin 1 başlangıç koşulu altında

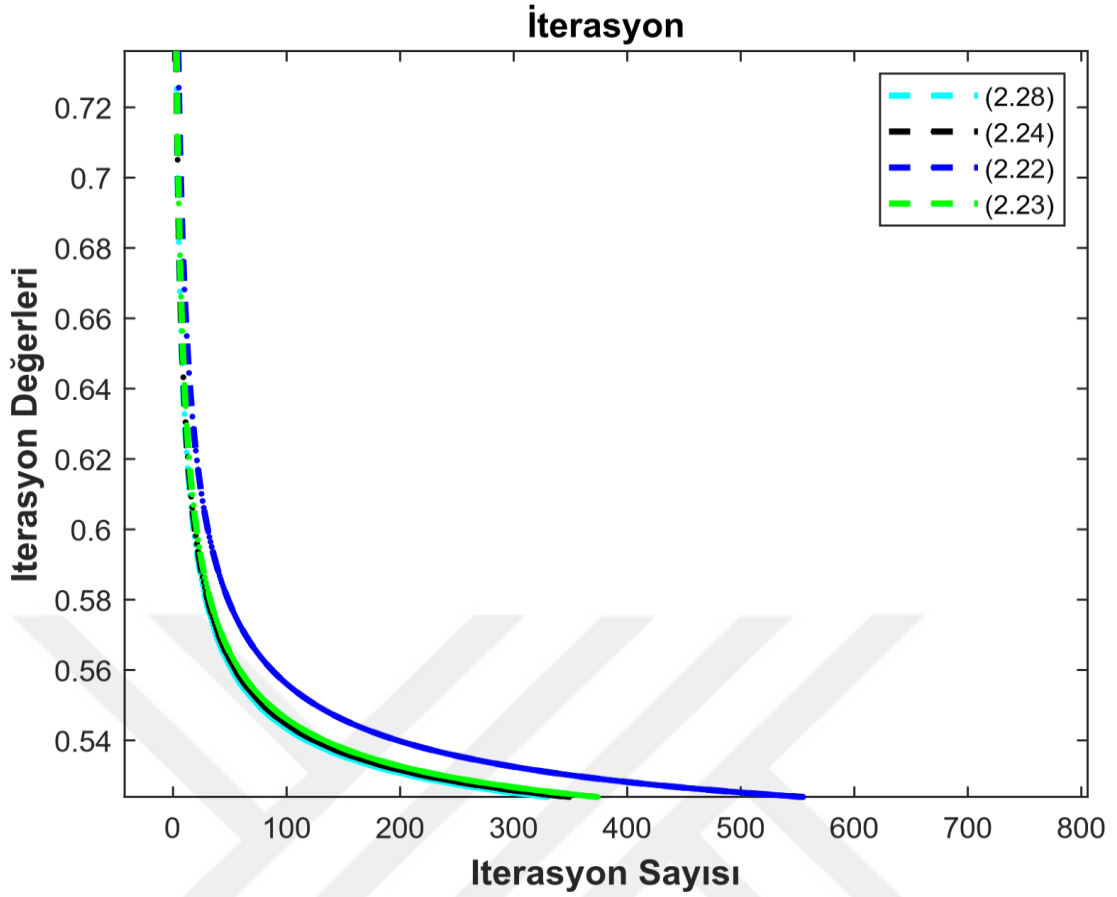
$$\{\alpha_n\} = \frac{1}{n+1}, \{\beta_n\} = \frac{1}{n+1}, \{\gamma_n\} = \frac{1}{n+1}, \{\mu_n\} = \frac{1}{n+1} \in (0,1) \quad (3.36)$$

seçimleri için $p = 0.5$ sabit noktasına yakınsamalarını göstermektedir.

Buradaki amaç verilen şartlar altında kullandığımız 4 adımlı iterasyon yönteminin, küme değerli Mann iterasyon yöntemini, Ishikawa iterasyon yöntemini, Noor iterasyon yöntemlerinin T dönüşümünün sabit noktasına kaçınıcı adımda yakınsadığını göstermektir. Ek olarak diğer iterasyonlarla ilgili davranışı Şekil 3.1’de görülmektedir.

Çizelge 3.1. (2.22), (2.23), (2.24) ve (2.28) ile verilen iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık davranışı.

	İterasyon (2.28)	İterasyon (2.24)	İterasyon (2.22)	İterasyon (2.23)
0	1	1	1	1
1	0,830078125	0,8359375	0,875	0,84375
2	0,763094678	0,769061053	0,8125	0,776909722
3	0,725133508	0,730698833	0,7734375	0,737969293
4	0,699941068	0,705091262	0,74609375	0,71179267
5	0,681669062	0,686457392	0,725585938	0,692672499
6	0,667638134	0,672119743	0,709472656	0,677927154
7	0,656426618	0,660647894	0,696380615	0,666111679
8	0,647201298	0,651199639	0,685470581	0,656370562
9	0,63943735	0,643242758	0,676197052	0,648161108
10	0,632785599	0, 636422314	0, 66818809	0, 641120394
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
500	0,519449334	0,519991442	0,525199844	0,520689956
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
1001	0,513751038	0,514134321	0,517821203	0,514628186
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.



Şekil 3.1. Bazı iterasyon yöntemleri için yakınsaklık davranışını gösteren grafik.

3.2 Yeni İterasyon Yönteminin Kararlılığı

Ana teoremlerimi vermeden önce, ispatında kullanılacak olan aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 3.2.1 L düzgün konveks bir Banach uzayı olmak üzere, K, L 'nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T: K \rightarrow P(K)$ ve P_T , küme değerli $\delta \in [0,1)$ olan contraction dönüşümleri olsun. (2.28) ile verilen $\{x_n\}$ dizisi $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\mu_n\} \in (0,1)$ ve $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \infty$ şartı altında, T 'nin sabit noktası olan p noktasına yakınsar.

İspat: $p \in F(T)$ ve (2.2) ile verilen iterasyon yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n a_n - p\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n H(P_T(y_n), P_T(p)) \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n \delta \|y_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.37}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n b_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n H(P_T(z_n), P_T(p)) \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \delta \|z_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.38}$$

elde edilir. Benzer işlemlere devam edilirse

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \|(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n c_n - p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n H(P_T(w_n), P_T(p)) \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n \delta \|w_n - p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n(1 - \delta))\|w_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.39}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|w_n - p\| &= \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n d_n - p\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n H(P_T(x_n), P_T(p)) \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n \delta \|x_n - p\| \\
&\leq (1 - \mu_n(1 - \delta))\|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.40}$$

sonucuna ulaşılır. $(1 - \mu_n(1 - \delta)) \leq 1$, $(1 - \gamma_n(1 - \delta)) \leq 1$ ve $(1 - \beta_n(1 - \delta)) \leq 1$ eşitsizlikleri kullanılır ve (3.40), (3.39) ve (3.38) eşitsizlikleri (3.37) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 - \alpha_n(1 - \delta))\|x_n - p\| \tag{3.41}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|x_n - p\| &\leq (1 - \alpha_{n-1}(1 - \delta))\|x_{n-1} - p\| \\
\|x_{n-1} - p\| &\leq (1 - \alpha_{n-2}(1 - \delta))\|x_{n-2} - p\| \\
&\dots \dots \dots \\
\|x_2 - p\| &\leq (1 - \alpha_1(1 - \delta))\|x_1 - p\|
\end{aligned} \tag{3.42}$$

yazılabilir.

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i(1 - \delta)) \|x_1 - p\| \tag{3.43}$$

sonucuna ulaşılır. $\alpha \in (0,1)$ olduğundan $(1 - \alpha_n(1 - \delta)) \leq 1$ dir. $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \infty$ şartından dolayı $\|x_{n+1} - p\| \leq e^{(1-\delta)\sum \alpha_i} \|x_1 - p\|$ olur. (3.43) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınacak olursa $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow p$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.2 L düzgün konveks bir Banach uzayı olmak üzere, K, L 'nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T: K \rightarrow P(K)$ ve P_T küme değerli $\delta \in [0,1)$ olan contraction dönüşümü olsun. (2.28) ile verilen $\{x_n\}$ dizisi $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\mu_n\} \in (0,1)$ ve $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \infty$ şartı altında, T 'nin sabit noktası olan p noktasına yakınsak olduğu kabul edilirse bu iterasyon yöntemi w^2 -kararlıdır.

İspat: (2.26) ile verilen iterasyon yöntemi $\{x_n\}$ dizisi olmak üzere; $\{u_n\}$ dizisi ise aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{cases}
u_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n e_n, & e_n \in P_T(v_n) \\
v_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_n f_n, & f_n \in P_T(r_n) \\
r_n = (1 - \gamma_n)s_n + \gamma_n g_n, & g_n \in P_T(s_n) \\
s_n = (1 - \mu_n)u_n + \mu_n h_n, & h_n \in P_T(u_n)
\end{cases} \tag{3.44}$$

$\varepsilon_n = \|u_{n+1} - f(T, u_n)\|$ ile ifade edilirse; $n \rightarrow \infty$ için $\varepsilon_n \rightarrow 0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ olduğunu gösterilmelidir. P_T contraction olduğundan; $H(P_T(v_n), P_T(y_n)) \leq \delta \|v_n - y_n\|$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - p\| &\leq \|u_{n+1} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - p\| \\
&\leq \|u_{n+1} - (1 - \alpha_n)u_n - \alpha_n e_n\| + \|x_{n+1} - p\| \\
&\quad + \|(1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n e_n - x_{n+1}\| \\
&\leq \varepsilon_n + \|(1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n e_n - (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n a_n\| \\
&\quad + \|x_{n+1} - p\| \\
&\leq \varepsilon_n + (1 - \alpha_n)\|u_n - x_n\| + \alpha_n\|e_n - a_n\| + \|x_{n+1} - p\| \\
&\leq \varepsilon_n + (1 - \alpha_n)\|u_n - x_n\| + \alpha_n H(P_T(v_n), P_T(y_n)) \\
&\quad + \|x_{n+1} - p\| \\
&\leq \varepsilon_n + (1 - \alpha_n)\|u_n - x_n\| + \alpha_n \delta \|v_n - y_n\| + \|x_{n+1} - p\|
\end{aligned} \tag{3.45}$$

elde edilir. $H(P_T(r_n), P_T(z_n)) \leq \delta \|r_n - z_n\|$ dönüşümü kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\|v_n - y_n\| &= \|(1 - \beta_n)u_n + \beta_n f_n - (1 - \beta_n)x_n - \beta_n b_n\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n\|f_n - b_n\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n H((P_T(r_n), P_T(z_n))) \\
&\leq (1 - \beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n \delta \|r_n - z_n\|
\end{aligned} \tag{3.46}$$

olur. $H(P_T(s_n), P_T(w_n)) \leq \delta \|s_n - w_n\|$ özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|r_n - z_n\| &= \|(1 - \gamma_n)s_n + \gamma_n g_n - (1 - \gamma_n)w_n - \gamma_n c_n\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|s_n - w_n\| + \gamma_n\|g_n - c_n\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|s_n - w_n\| + \gamma_n H((P_T(s_n), P_T(w_n))) \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|s_n - w_n\| + \gamma_n \delta \|s_n - w_n\| \\
&\leq (1 - \gamma_n(1 - \delta))\|s_n - w_n\|
\end{aligned} \tag{3.47}$$

elde edilir. Son olarak $H(P_T(u_n), P_T(x_n)) \leq \delta \|u_n - x_n\|$ kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|s_n - w_n\| &= \|(1 - \mu_n)u_n + \mu_n h_n - (1 - \mu_n)x_n - \mu_n d_n\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|u_n - x_n\| + \mu_n\|h_n - d_n\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|u_n - x_n\| + \mu_n H((P_T(u_n), P_T(x_n))) \\
&\leq (1 - \mu_n)\|u_n - x_n\| + \mu_n \delta \|u_n - x_n\| \\
&\leq (1 - \mu_n(1 - \delta))\|u_n - x_n\|
\end{aligned} \tag{3.48}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlikler düzenlenip (3.45) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - p\| &\leq \varepsilon_n + (1 - \alpha_n)\|u_n - x_n\| + \|x_{n+1} - p\| \\
&\quad + \alpha_n[(1 - \beta_n(1 - \delta))\|u_n - x_n\|] \\
&\leq \varepsilon_n + (1 - \alpha_n\beta_n(1 - \delta))\|u_n - x_n\| + \|x_{n+1} - p\|
\end{aligned} \tag{3.49}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $(1 - \alpha_n\beta_n(1 - \delta)) < 1$ dir.

$\{u_n\}$ ve $\{x_n\}$ denk diziler olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - x_n\| = 0$ olur. Ayrıca Teorem 3.2.1 gereğince $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ dır. Buradan yukarıdaki (3.49) ile verilen eşitsizliğin her iki tarafında limit alırsak; $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n+1} - p\| = 0$ elde ederiz. Sonuç olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ olur.

Böylece (2.28) ile tanımlanan iterasyon yöntemi w^2 kararlı olur.

Yakınsaklık örneği olan Örnek 3.1.5 şartlar kullanılarak aşağıda verilen kararlılık örneği oluşturulmuştur.

Örnek 3.2.3 $B = \mathbb{R}$ kümesi ve $K = [0,1] \subset B$ olmak üzere $T: K \rightarrow P(K)$ dönüşümü için $Tx = \left[\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right]$ şeklinde tanımlansın. (2.28) ile verilen $\{x_n\}$ dizisi ve $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \mu_n = \frac{1}{n+1}$ şartları altında $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.5 = p \in Tx$ elde edilir. Eğer diziyi $\{u_n\}$ olarak tanımlarsak ve $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$ olacak şekilde $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0$ olur ve buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0$ elde edilir. Yani $\{x_n\}$ ve $\{u_n\}$ dizileri denk dizilerdir. Aşağıdaki formül ve işlemlerle gösterecek olursak (3.44) ve (2.28) ile verilen $\{u_n\}$ ve $\{x_n\}$ dizileri için;

$$\begin{aligned}
w_n &= (1 - \mu_n)x_n + \mu_n d_n, d_n \in P_T x_n \\
w_n &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)u_n + \frac{1}{n+1}\left(\frac{u_n}{2} + \frac{1}{4}\right) \\
w_n &= \frac{4n^2 + 8n + 5}{8n^2 + 20n + 12} \\
z_n &= (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n c_n, c_n \in P_T w_n \\
z_n &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)w_n + \frac{1}{n+1}\left(\frac{w_n}{2} + \frac{1}{4}\right) \\
z_n &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{4n^2 + 8n + 5}{8n^2 + 20n + 12}\right) + \frac{1}{n+1}\left(\frac{w_n}{2} + \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$z_n = \frac{8n^3 + 24n^2 + 28n + 11}{8(1+n)^2(3+2n)}$$

$$y_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)x_n + \frac{1}{n+1}b_n, b_n \in P_T z_n$$

$$y_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)u_n + \frac{1}{n+1}\left(\frac{z_n}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$y_n = \frac{16n^4 + 64n^3 + 100n^2 + 76n + 23}{16(1+n)^3(3+2n)}$$

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n a_n, a_n \in P_T y_n$$

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)u_n + \frac{1}{n+1}\left(\frac{y_n}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$x_{n+1} = \frac{32n^5 + 160n^4 + 328n^3 + 348n^2 + 196n + 47}{32(1+n)^4(3+2n)}$$

elde edilir. Biliyoruz ki $\varepsilon_n = \|u_{n+1} - f(T, u_n)\|$ olup eşitsizlikler uygulanırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \|u_{n+1} - f(T, u_n)\| \\ &= \frac{16n^4 + 32n^3 - 20n^2 - 82n - 43}{32(1+n)^4(3+2n)(5+2n)} \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak (2.28) ile verilen $\{x_n\}$ dizisi w^2 kararlıdır.

3.3 Yeni İterasyon Yönteminin Veri Bağıllığı

İlk olarak Teorem 3.3.1 ile (2.17) ile tanımlanan dört adımlı iterasyon yönteminin yakınsaklık davranışı incelenip, veri bağılı olduğu gösterilmiştir. Daha sonra (2.17) ile verilen iterasyon yöntemin küme değerli versiyonu (2.28) kullanılarak belirli şartlar altında veri bağıllığı incelenmiştir.

Teorem 3.3.1: L düzgün konveks bir Banach uzayı ve K bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda $T: K \rightarrow K$, p sabit noktasına sahip Tanım (2.3.7) şartını sağlayan contraction dönüşüm olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı sağlansın. T dönüşüm sınıfı için (2.17) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T operatörünün p sabit noktasına kuvvetli yakınsar. Ayrıca, S ise x^* sabit noktasına sahip T 'nin yaklaşım operatörü olarak kabul edilirse, S operatörü için aşağıda belirtilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n S v_n \\
v_n &= (1 - \beta_n)u_n + \beta_n S k_n \\
k_n &= (1 - \gamma_n)h_n + \gamma_n S h_n \\
h_n &= (1 - \mu_n)u_n + \mu_n S u_n
\end{aligned} \tag{3.50}$$

burada $\forall n \in N$ için $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty, \{\beta_n\}_{n=1}^\infty, \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty, \{\mu_n\}_{n=1}^\infty \in [0,1]$ ve $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ olup $\varepsilon > 0$ olmak koşuluyla $n \rightarrow \infty$ için $u_n \rightarrow x^*$ ise ;

$$\|p - x^*\| = \frac{4\varepsilon}{1-\delta}$$

eşitsizliği geçerli olur.

İspat: $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi T dönüşüm sınıfı için (2.17) ile verilen iterasyon yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|w_n - p\| &= \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n T x_n - p\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n \|T x_n - p\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n \|T x_n - T p\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n \delta \|x_n - p\| \\
&\leq [1 - \mu_n(1 - \delta)]\|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \|(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n T w_n - p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n \|T w_n - p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n \|T w_n - T p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n \delta \|w_n - p\| \\
&\leq [1 - \gamma_n(1 - \delta)]\|w_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.52}$$

olur. (3.51) eşitsizliği (3.52) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|z_n - p\| \leq [1 - \gamma_n(1 - \delta)][1 - \mu_n(1 - \delta)]\|x_n - p\| \tag{3.53}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tz_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|Tz_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|Tz_n - Tp\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\delta\|z_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.54}$$

elde edilir. (3.53) eşitsizliği (3.54) eşitsizliğinde yerine yazılıp
 $[1 - \mu_n(1 - \delta)] \leq 1$ ve $[1 - \gamma_n(1 - \delta)] \leq 1$ olduğu kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n(1 - \delta))\|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.55}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n - p\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\|Ty_n - p\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\|Ty_n - Tp\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\delta\|y_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.56}$$

olur. (3.55) eşitsizliği (3.56) eşitsizliğinde yazılırsa

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 - \alpha_n(1 - \delta))\|x_n - p\| \tag{3.57}$$

elde edilir. (3.57) eşitsizliğinde tümevarım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)]\|x_n - p\| \\
\|x_n - p\| &\leq [1 - \alpha_{n-1}(1 - \delta)]\|x_{n-1} - p\| \\
\|x_{n-1} - p\| &\leq [1 - \alpha_{n-2}(1 - \delta)]\|x_{n-2} - p\| \\
&\vdots \\
\|x_2 - p\| &\leq [1 - \alpha_1(1 - \delta)]\|x_1 - p\| \\
\|x_1 - p\| &\leq [1 - \alpha_0(1 - \delta)]\|x_0 - p\|
\end{aligned} \tag{3.58}$$

elde edilir. $\delta \in (0,1)$ olduğundan $[1 - \alpha_n(1 - \delta)] \leq 1$ dir. $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty$ şartından

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \|x_0 - p\| \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_i(1 - \delta)] \\
&\leq \|x_0 - p\| e^{-(1-\delta) \sum_{i=0}^n \alpha_i}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

olur. (3.59) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow p$ olduğu görülür.

Verilen koşullar doğrultusunda;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n - [(1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n Sv_n]\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n\|Ty_n - Sv_n\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n\|Ty_n - Tv_n\| + \alpha_n\|Tv_n - Sv_n\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n\delta\|y_n - v_n\| + \alpha_n\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.60}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\| &= \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tz_n - [(1 - \beta_n)u_n + \beta_n Sk_n]\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tz_n - Sk_n\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tz_n - Tk_n\| + \beta_n\|Tk_n - Sk_n\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\delta\|z_n - k_n\| + \beta_n\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.61}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|z_n - k_n\| &= \|(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n Tw_n - (1 - \gamma_n)h_n + \gamma_n Sh_n\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - h_n\| + \gamma_n\|Tw_n - Th_n\| + \gamma_n\|Th_n - Sh_n\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - h_n\| + \gamma_n\delta\|w_n - h_n\| + \gamma_n\varepsilon \\
&\leq (1 - \gamma_n(1 - \delta))\|w_n - h_n\| + \gamma_n\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.62}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|w_n - h_n\| &= \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n Tx_n - (1 - \mu_n)u_n + \mu_n Su_n\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Tu_n\| + \mu_n\|Tu_n - Su_n\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\delta\|x_n - u_n\| + \mu_n\varepsilon \\
&\leq (1 - \mu_n(1 - \delta))\|x_n - u_n\| + \mu_n\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.63}$$

elde edilir. Ayrıca biliyoruz ki;

$(1 - \gamma_n(1 - \delta)) \in (0,1)$ ve $(1 - \mu_n(1 - \delta)) \in (0,1)$ ‘dir.

Buradan; $\|w_n - h_n\| \leq \|x_n - u_n\| + \mu_n \varepsilon$ olur ve

$$\|z_n - k_n\| \leq \|x_n - u_n\| + \mu_n \varepsilon + \gamma_n \varepsilon \quad (3.64)$$

elde edilir. Burada bulduğumuz (3.64) numaralı eşitsizliğini (3.61) eşitsizliğinde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} \|y_n - v_n\| &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n \delta [\|x_n - u_n\| + \mu_n \varepsilon + \gamma_n \varepsilon] + \beta_n \varepsilon \\ &\leq \|x_n - u_n\| + \beta_n \delta \|x_n - u_n\| + \beta_n \delta \mu_n \varepsilon + \beta_n \delta \gamma_n \varepsilon + \beta_n \varepsilon \\ &\leq \|x_n - u_n\| + \beta_n \delta \mu_n \varepsilon + \beta_n \delta \gamma_n \varepsilon + B_n \varepsilon \end{aligned} \quad (3.65)$$

elde edilir ve (3.65) numaralı eşitsizliğimizi (3.60) de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n \delta [\|x_n - u_n\| + \beta_n \delta \mu_n \varepsilon \\ &\quad + \beta_n \delta \gamma_n \varepsilon + \beta_n \varepsilon] + \alpha_n \varepsilon \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n \delta \|x_n - u_n\| \\ &\quad + \alpha_n \delta^2 \beta_n \mu_n \varepsilon + \alpha_n \delta^2 \beta_n \gamma_n \varepsilon + \alpha_n \delta \beta_n \varepsilon + \alpha_n \varepsilon \\ &\leq (1 - \alpha_n(1 - \delta))\|x_n - u_n\| + \alpha_n [\delta^2 \beta_n \mu_n \varepsilon \\ &\quad + \delta^2 \beta_n \gamma_n \varepsilon + \delta \beta_n \varepsilon + \varepsilon] \end{aligned} \quad (3.66)$$

Şimdi lemma (2.6.3) şartlarını sağlamak için

$$\alpha_n = \|x_n - u_n\|,$$

$$\mu_n = \alpha_n(1 - \delta), \quad (3.67)$$

$$\eta_n = \delta^2 \beta_n \mu_n \varepsilon + \delta^2 \beta_n \gamma_n \varepsilon + \delta \beta_n \varepsilon + \varepsilon$$

İfadeleri tanımlanırsa Lemma 2.6.4’ten

$$\|p - x^*\| \leq \frac{4\varepsilon}{1-\delta} \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3.3.2: L bir Banach uzayı ve K bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda $T: K \rightarrow P(K)$ ve P_T küme değerli $\delta \in [0,1)$ olan contraction dönüşümü olsun. S ise x^* sabit noktasına sahip T 'nin yaklaşım operatörü olsun. T dönüşüm sınıfı için (2.28) ile belirtilen dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin. S operatörü için ise aşağıda belirtilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n S v_n & k_n &\in P_S(v_n) \\
v_n &= (1 - \beta_n)u_n + \beta_n S k_n & m_n &\in P_S(k_n) \\
k_n &= (1 - \gamma_n)h_n + \gamma_n S h_n & g_n &\in P_S(h_n) \\
h_n &= (1 - \mu_n)u_n + \mu_n S u_n & f_n &\in P_S(u_n)
\end{aligned} \tag{3.68}$$

burada $\forall n \in N$ için

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \in [0,1] \text{ ve } \frac{1}{2} \leq \alpha_n \text{ olup } \varepsilon > 0$$

olmak koşuluyla $n \rightarrow \infty$ için

$$u_n \rightarrow x^* \text{ ise ; } \|p - x^*\| = \frac{4\varepsilon}{1-\delta} \text{ eşitsizliği geçerli olur.}$$

İspat: Yukarıda verilen bilgiler kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n a_n - [(1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n k_n]\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n H(P_T(y_n), P_S(v_n)) \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n H(P_T(y_n), P_T(v_n)) \\
&\quad + \alpha_n H(P_T(v_n), P_S(v_n)) \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - u_n\| + \alpha_n \delta \|y_n - v_n\| + \alpha_n \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.69}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\| &= \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n P_T(z_n) - [(1 - \beta_n)u_n + \beta_n P_S(k_n)]\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n H(P_T(z_n), P_S(k_n)) \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n H(P_T(z_n), P_T(k_n)) \\
&\quad + \beta_n H(P_T(k_n), P_S(k_n)) \\
&\leq (1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n \delta \|z_n - k_n\| + \beta_n \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.70}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|z_n - k_n\| &= \|(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n P_T(w_n) - (1 - \gamma_n)h_n + \gamma_n P_S(h_n)\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - h_n\| + \gamma_n H(P_T(w_n), P_S(h_n)) \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n H(P_T(w_n), P_T(h_n)) \\
&\quad + \gamma_n H(P_T(h_n), P_S(h_n)) \\
&\leq (1 - \gamma_n(1 - \delta))\|w_n - h_n\| + \gamma_n \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.71}$$

ve son olarak;

$$\begin{aligned}
\|w_n - h_n\| &= \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n P_T(x_n) - (1 - \mu_n)u_n + \mu_n P_S(u_n)\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n H(P_T(x_n), P_T(u_n)) \\
&\quad + \mu_n H(P_T(u_n), P_S(u_n)) \\
&\leq (1 - \mu_n(1 - \delta))\|x_n - u_n\| + \mu_n \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.72}$$

elde edilir.

Yukarıdaki teoremin ispatı gereğince (3.72) ve diğer eşitsizlikler sırasıyla yerine yazılırsa yine bir önceki Teorem 3.3.2 ispatında olduğu gibi benzer işlemler yapılarak

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \leq \frac{4\varepsilon}{(1-\delta)}$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla ispatımız bu şekilde tamamlanır.

Örnek 3.3.3: $A = \mathbb{R}$ ve $K: [0,1] \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde $d(x, y) = |x - y|$ standart metriği tanımlı olmak üzere $T: K \rightarrow K$ için $Tx = \left[\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right]$ şeklinde seçilirse T 'nin $\delta = 0.5$ için Tanım (2.3.7) şartını sağlayan contraction dönüşüm olduğu Örnek 3.1.5 te gösterilmiştir. T dönüşümünün sabit noktası $p = 0,5$ 'tir. S operatörü $S: K \rightarrow K$ ve

$S(x) = \left[\frac{x}{5}, \frac{x}{5} + \frac{5}{12} \right]$ şeklinde seçilirse S dönüşümünün sabit noktası $x^* = 0,5208333333333333$ olup buradan her $x \in K$ için $\max_{x \in K} H(Tx, Sx) = 0,166666666667$ elde edilir. Dolayısıyla $\varepsilon > 0$ için $H(Tx, Sx) \leq 0,166666666667$ olur. Burada P_S 'nin $\delta = \frac{1}{6}$ olduğundan küme değerli daraltan dönüşüm olduğu aşağıdaki işlemler ile görülebilir.

$$\begin{aligned}
P_S &= \left\{ y \in S(x): |x - y| = d \left(x, \left[\frac{x}{5} + \frac{5}{12} \right] \right) \right\} \\
&= \left\{ y \in S(x): |x - y| = \left| x - \left(\frac{x}{5} + \frac{5}{12} \right) \right| \right\} \\
&= \left\{ y \in S(x): |x - y| = \left| x - \frac{x}{5} - \frac{5}{12} \right| \right\} \\
&= \left\{ y \in S(x): |x - y| = \left| \frac{4x}{5} - \frac{5}{12} \right| \right\} \\
&= \left\{ y \in S(x): x - y = \frac{4x}{5} - \frac{5}{12} \right\} \\
&= \left\{ y \in T(x): y = x - \frac{4x}{5} + \frac{5}{12} \right\} \\
&= \left\{ y \in T(x): y = \frac{x}{5} + \frac{5}{12} \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$H(Sx, Sy) \leq \frac{1}{6} \|x - y\|$$

olur. Her daraltan dönüşüm aynı zamanda genişlemeyen dönüşümdür. O halde (3.68) ile verilen iterasyon yöntemi:

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n \left(\frac{v_n}{5} + \frac{5}{12} \right) \\ v_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_n \left(\frac{k_n}{5} + \frac{5}{12} \right) \\ k_n = (1 - \gamma_n)h_n + \gamma_n \left(\frac{h_n}{5} + \frac{5}{12} \right) \\ h_n = (1 - \mu_n)u_n + \mu_n \left(\frac{u_n}{5} + \frac{5}{12} \right) \end{cases}$$

elde edilir. Eğer $x_1 = 0,65$ başlangıç noktası ile birlikte $\delta = 0.5$ ve $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \mu_n = \frac{n}{3n+1}$ olarak seçildiğinde (3.68) ile verilen iterasyon yönteminin MATLAB programı yardımıyla 117. adımda $x^* = 0,5208333333333333$ sabit noktasına ulaştığı

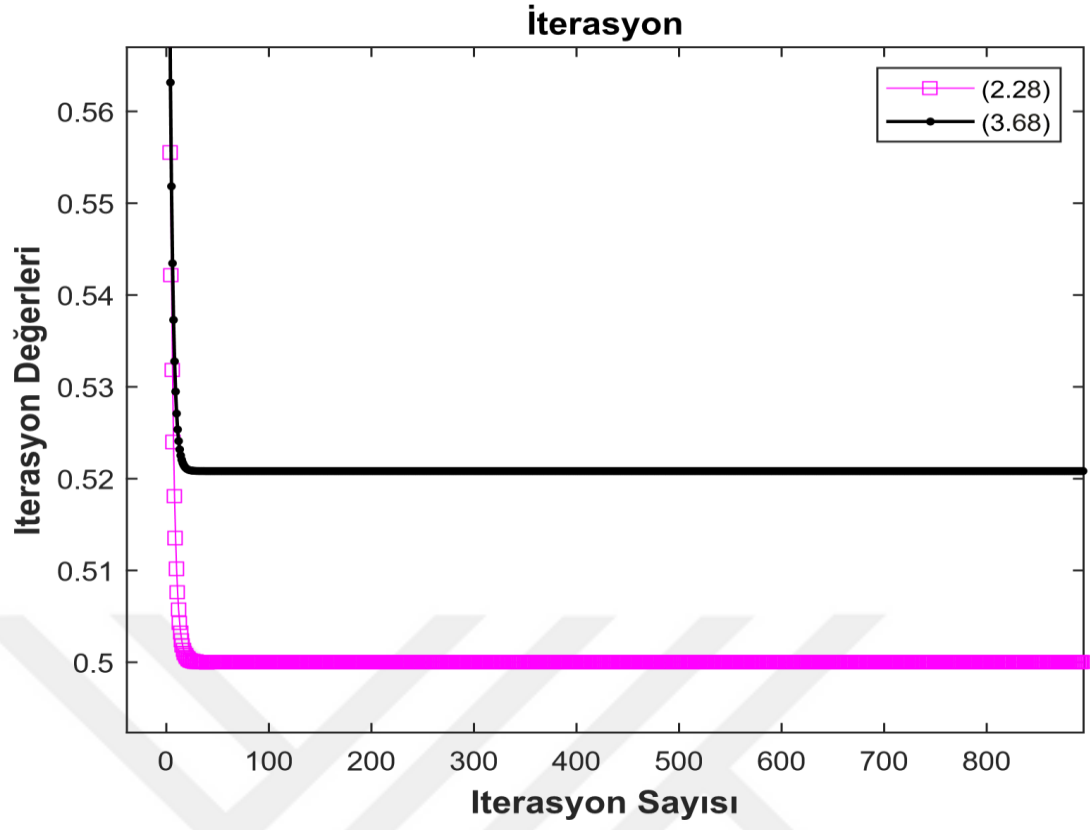
Çizelge 3.2’te görülür. Ayrıca bu iki iterasyon yönteminin yakınsaklık davranışı Şekil 3.2 de görülmektedir.

Çizelge 3.2. (2.28) ve (3.68) iterasyon yöntemleri için yakınsaklık davranışı

x_n	İterasyon Yöntemi (3.68)	İterasyon Yöntemi (2.28)
x_2	0.65000000000000	0.65000000000000
x_3	0,62275875	0,62132568359375
x_4	0,597995483954186	0,594670415748809
x_{10}	0,532777801008004	0,518053118292743
x_{20}	0,521288374567868	0,50099547197253
x_{30}	0,520849872140796	0,500052718295469
x_{40}	0,520833923543864	0,500002748328602
x_{50}	0,52083335418995	0,500000142073997
x_{60}	0,520833334065845	0,500000007305872
x_{70}	0,520833333358952	0,500000000374337
x_{80}	0,520833333334227	0,50000000001913
x_{90}	0,520833333333364	0,500000000000976
x_{106}	0,520833333333333	0,500000000000008
x_{117}	0,520833333333333	0,5

Buradan

$$0.208333333333 = |p - q| \leq \frac{0.666666666668}{1-0.5} \text{ elde edilir.}$$



Şekil 3.2. (2.28) ve (3.68) iterasyon yöntemleri için yakınsaklık davranışı

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Picard iterasyonu ile başlayan iterasyon süreçleri literatürde birçok iterasyon yöntemi tanımlanmasına yol açmıştır. Benzer teknikler kullanılarak, yeni bir dört adımlı iterasyon yöntemi tanımlanmış ve bu iterasyon yönteminin yakınsaklığı ve veri bağıllığı incelenerek ispat edilmiştir

Banach sabit nokta teoremi, contraction dönüşümleri altında tam metrik uzaylarda tek bir sabit nokta bulunmasını sağlayan temel bir matematik teoremidir. Bu teorem, çeşitli matematiksel ve bilimsel alanlarda geniş bir kullanım alanına sahiptir, çünkü birçok problemin çözümünde temel bir araç olarak hizmet etmektedir. Burada Picard iterasyon yöntemi kullanılmıştır. Bu ve bu benzeri teoremler ya da farklı sebeplerden dolayı literatürde birçok iterasyon yöntemi tanımlanmıştır. İterasyon yöntemleri, bazı sabit nokta dönüşüm sınıfları için farklı problemlere uygulanabilir.

Bu çalışmada, (2.17) ile verilen iterasyon yöntemi için belirli şartlar altında yakınsaklık ve veri bağıllığı sonuçları incelenmiştir. Ayrıca bu iterasyon yönteminin küme değerli versiyonu ortaya konulmuştur. Daha sonra küme değerli bu iterasyon yöntemi kullanılarak zayıf, kuvvetli yakınsaklık, karalılık ve veri bağıllık sonuçları gibi sabit nokta kavramları ispatlanmıştır. Bu ispatların önemli kısımları örneklerle desteklenmiştir. Bu çalışmadan da anlaşılabacağı üzere küme değerli veya tekil değerli olarak iterasyonlar tanımlanabilir. Ek olarak yeni sabit nokta teoremleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Agarwal, R., O Regan, D. ve Sahu, D., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 8, 1, 61-79.
2. Berinde, V., 2003. On the approximation of fixed points of weak contractive mappings, *Carpathian Journal of Mathematics*, 19,1,7-22.
3. Itoh, S. ve Takahashi, W., 1978. The common fixed point theory of singlevalued mappings and multivalued mappings, *Pacific Journal of Mathematics*, 79, 2, 493-508.
4. Collatz, L., 2014. *Functional analysis and numerical mathematics*, 1. Edt., New York: Academic Press.
5. Kubiak, T., 1985. Fixed point theorems for contractive type multivalued mappings, *Mathematica Japonica*, 30, 1, 89-101.
6. Premyuda, D., Poom, K. ve Wiyada, K., 2019. A survey of fixed point and economic game theory, *Asian Journal of Economics and Banking*, 3, 2, 41-49.
7. Wiecezorek, A., 1988. Applications of fixed-point theorems in game theory and mathematical economics, *Wisdom Mathematics*, 28, 25-34.
8. Aktay, M., 2022. Metrik ve modüler metrik uzaylarda daraltan tipli dönüşümler için sabit nokta teoremleri, *Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum*.
9. Neumann, V., 1937. Über ein okonomisches gleichungssystem und eine verallgemeinerung des brouwerschen fixpunktsatzes, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 8, 78-83.
10. Franklin, J. ve Franklin, J., 1980. Fixed-point theorems, *Methods of Mathematical Economics: Linear and Nonlinear Programming*, Fixed-Point Theorems, 224-292.
11. Kakutani, S., 1941. A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Mathematical Journal*, 8, 3, 457-459.
12. Bohnenblust, H. F. ve Karlin, S., 1950. On a theorem of Ville, *Contributions to the Theory of Games*, 1, 155-160.
13. Karlin, S., 2003. *Mathematical methods and theory in games, programming, and economics*, Vol. 2. Mineola, NY: Courier Corporation.
14. Nadler, S. B., 1969. Multi-valued contraction mappings, *Pacific Journal of Mathematics*, 30, 2, 475-488.

15. Ćirić, L., 2009. Multi-valued nonlinear contraction mappings, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71, 2716-2723.
16. Brown, A. L., 1989. Set valued mappings, continuous selections, and metric projections, *Journal of Approximation Theory*, 57, 1, 48-68.
17. Borisovich, Y. G. E., Gel'man, B. D., Myshkis, A. D. ve Obukhovskii, V. V., 1982. Multivalued mappings, *Itogi Nauki i Tekhniki Seriya, Matematicheskii Analiz*, 19, 127-230.
18. Eilenberg, S. ve Montgomery, D., 1946. Fixed point theorems for multi-valued transformations, *American Journal of Mathematics*, 68, 2, 214-222.
19. Shulman, M., 2018. Brouwer's fixed-point theorem in real-cohesive homotopy type theory, *Mathematical Structures in Computer Science*, 28, 6, 856-941.
20. Fan, K., 1952. Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38, 2, 121-126.
21. Aubin, J. P., 1979. *Mathematical methods of game and economic theory*, ser, *Studies in Mathematics and its Applications*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 7.
22. Kaczynski, T. ve Zeidan, V., 1989. An application of Ky-fan fixed point theorem to an optimization problem, *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications*, 13, 3, 259-261.
23. Nash, J., 1951. Non-Cooperative games, *Annals of Mathematics*, 54, 286-295.
24. Markin, J. T., 1968. A fixed point theorem for set-valued mappings, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 74, 5, 639-640.
25. Banach, S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fundamenta Mathematicae*, 3, 1, 133-181.
26. Shimizu, T. ve Takahashi, W., 1996. Fixed points of multivalued mappings in certain convex metric spaces, *Journal of the Juliusz Schauder Center*, 8, 197-203.
27. Hitzler, P. ve Seda, A. K., 1999. July. Multivalued mappings, fixed-point theorems and disjunctive databases, In *3rd Irish Workshop on Formal Methods*. BCS Learning & Development, Ireland, 1-18.
28. Kaneko, H., 1988. A common fixed point of weakly commuting multi-valued mappings, *Mathematica Japonica*, 33, 5, 741-744.
29. Popa, V., 2000. A general coincidence theorem for compatible multivalued mappings satisfying an implicit relation, *Demonstratio Mathematica*, 33, 1, 159-164.

30. Maia, M. G., 1968. Un'osservazione sulle contrazioni metriche, *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 40, 139-143.
31. Pompeiu, D., 1905. Sur la continuité des fonctions de variables complexes. *Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques*, 7, 3, 265-315.
32. Hausdorff, F., 1949. *Grundzüge der mengenlehre*, Leipzig, Veit and Company.
33. Henrikson, J., 1999. Completeness and total boundedness of the Hausdorff metric, *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*, 1, 69-80, 10.
34. Berinde, V. ve Pacurar, M., 2013. The role of the Pompeiu-Hausdorff metric in fixed point theory, *Creative Mathematics and Informatics*, 22, 2, 143-150.
35. Mizoguchi, N. ve Takahashi, W., 1989. Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 141, 1, 177-188.
36. Saint Raymond, J., 1994. Multivalued contractions, *Set-Valued Analysis*, 2, 559-571.
37. Chang, S. S., Wang, G., Wang, L., Tang, Y. K. ve Ma, Z. L., 2014. Δ -convergence theorems for multi-valued nonexpansive mappings in hyperbolic spaces, *Applied Mathematics and Computation*, 249, 535-540.
38. Del Prete, I., Di Iorio, M. ve Holá, L., 2000. Graph convergence of set-valued maps and its relationship to other convergences, *Journal of Applied Analysis*, 6, 2, 213-226.
39. Bagh, A. ve Wets, R. J., 1996. Convergence of set-valued mappings: equi-outer semicontinuity, *Set-Valued Analysis*, 4, 333-360.
40. Chuadchawna, P., Farajzadeh, A. ve Kaewcharoen, A., 2021. Convergence theorems for total asymptotically nonexpansive single-valued and quasi nonexpansive multi-valued mappings in hyperbolic spaces, *Journal of Applied Analysis*, 27, 1, 129-142.
41. Zaslavski, A. J., 2024. Convergence results for contractive type set-valued mappings, *Axioms*, 13, 2, 112.
42. Kreyszig, E., 1991. *Introductory functional analysis with applications*, Vol. 17. New York: John Wiley & Sons.
43. Maddox, I. J., 1988. *Elements of functional analysis*, CUP Archive.
44. Pugachev, V. S. ve Sinitsyn, I. N., 1999. *Lectures on functional analysis and applications*, World Scientific, 3-8.

45. Brown, A. L. ve Page, A., 1970. Elements of functional analysis, Van Nostrand Reinhold, 10-15.
46. Moore, R. E. ve Cloud, M. J., 2007. Computational functional analysis, 1. Edt., Elsevier, New York.
47. Curtain, R. F. ve Pritchard, A. J., 1977. Functional analysis in modern applied mathematics, 1. Edt., Academic Press, New York.
48. Şoltuz, Ş. M. ve Grosan, T., 2008. Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive-like operators, Fixed Point Theory and Applications, 2008, 242916.
49. Berinde, V., 2007. Iterative approximation of fixed points, 1. Edt., Springer, Berlin.
50. Cardinali, T. ve Rubbioni, P., 2010. A generalization of the Caristi fixed point theorem in metric spaces, Fixed Point Theory, 11, 1, 3-10.
51. Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, Bulletin of the American Mathematical Society, 73, 4, 591-597.
52. Aksoy, A. G., Khamsi, M. A., Aksoy, A. G. ve Khamsi, M. A., 1990. Schauder bases, Nonstandard Methods in Fixed Point Theory, 1-9.
53. Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, Proceedings of the American Mathematical Society, 4, 3, 506-510.
54. Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, Proceedings of the American Mathematical Society, 44, 1, 147-150.
55. Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251, 1, 217-229.
56. Agarwal, R. P., O'Regan, D. ve Sahu, D., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, Journal of Nonlinear and convex Analysis, 8, 1, 61-79.
57. Thakur, B. S., Thakur, D. ve Postolache, M., 2016. A new iteration scheme for approximating fixed points of nonexpansive mappings, Filomat, 30, 10, 2711-2720.
58. Karahan, I. ve Ozdemir, M., 2013. A general iterative method for approximation of fixed points and their applications, Advances in Fixed Point Theory, 3, 3, 510-526.
59. Sahu, D. R., O'Regan, D. ve Agarwal, R. P., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, Springer, New York.

60. Gordji, M. E., Baghani, H., Khodaei, H. ve Ramezani, M., 2010. A generalization of Nadler's fixed point theorem, *Journal of Nonlinear Sciences and its Applications*, 3, 2, 148-151.
61. Khan, A. R., Akbar, F. ve Sultana, N., 2008. Random coincidence points of subcompatible multivalued maps with applications, *Carpathian Journal of Mathematics*, 24, 2, 63-71.
62. Senter, H. F. ve Dotson, W., 1974. Approximating fixed points of nonexpansive mappings, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44, 2, 375-380.
63. Schu, J., 1991. Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 43, 1, 153-159.
64. Sastry, G., 2005. Convergence of Ishikawa iterates for a multi-valued mapping with a fixed point, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 55, 4, 817-826.
65. Shahzad, N. ve Zegeye, H., 2009. On Mann and Ishikawa iteration schemes for multi-valued maps in Banach spaces, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71, 3-4, 838-844.
66. Abbas, M. ve Nazir, T., 2014. Some new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems, *Matematiski Vesnik*, 66, 2, 223-234.
67. Sahu, D. R., O'Regan, D. ve Agarwal, R. P., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, 1. Edt., Springer-Verlag, New York, 85-103.
68. Hacıoğlu, E. ve Gürsoy, F., 2021. Existence and data dependence results for the fixed points of multivalued mappings, *arXiv preprint arXiv:2108.06811*.
69. Harder, A. M. ve Hicks, T. L., 1988. Stability results for fixed point iteration procedures, *Mathematica Japonica*, 33, 693-706.
70. Timis, I., 2010. On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings, *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 37, 2, 106-114.
71. Weng, X., 1991. Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 113, 3, 727-731.
72. Panyanak, B., 2007. Mann and Ishikawa iterative processes for multivalued mappings in Banach spaces, *Computers & Mathematics with Applications*, 54, 6, 872-877.
73. Dotson, W. G., 1970. On the Mann iterative process, *Transactions of the American Mathematical Society*, 149, 1, 65-73.

74. Song, Y. ve Cho, Y. J., 2011. Some notes on Ishikawa iteration for multi-valued mappings, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 48, 3, 575-584.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Demet KORKMAZGÖZ

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2010-2016

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, 2021-2024

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Korkmazgöz, D. ve Maldar, S., 2024. A new iteration process and fixed point theorems for set-valued mappings, International Symposium on Innovations in Scientific Areas, SISA 2024 Bildiri Kitabı, 978-605-69925-9-9, 12.