

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPERATÖR SPLITTING B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE BAZI
KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİ

İhsan ÇELİKKAYA

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2018

Tezin Başlığı : OPERATÖR SPLITTING B-SPLINE KOLLOKASYON
YÖNTEMİ İLE BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan : İhsan ÇELİKKAYA

Sınav Tarihi : 05.07.2018

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Yusuf Uçar

İnönü Üniversitesi

Eş Danışman: Doç.Dr. Nuri Murat Yağmurlu

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. İdiris Dağ

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Prof.Dr. Alaattin Esen

İnönü Üniversitesi

Doç.Dr. M. Kemal Özdemir

İnönü Üniversitesi

Dr. Öğretim Üyesi Muaz Seydaoğlu

Muş Alparslan Üniversitesi

Prof.Dr. H. İbrahim Adıgüzel

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Operatör Splitting B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Bazı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

İhsan ÇELİKKAYA

ÖZET

Doktora Tezi

OPERATÖR SPLITTING B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE BAZI KISMI TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

İhsan ÇELİKKAYA

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

133+viii sayfa

2018

Danışman : Doç.Dr. Yusuf Uçar

Eş Danışman : Doç.Dr. Nuri Murat Yağmurlu

Bu doktora tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Tezin giriş bölümünde, kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilen çeşitli fiziksel olaylar, tezde kullanılan sonlu eleman ve operatör splitting yöntemlerinin kısa bir özetinin yanı sıra nümerik çözümleri elde edilen Burgers', modifiye edilmiş Burgers' (mBE), düzenli uzun dalga (RLW) ve coupled Burgers' denklemlerinin yapısı verildi.

İkinci bölümde, tezde kullanılacak olan sonlu eleman ve operatör splitting yöntemleri ile ilgili temel tanım ve kavramlar verildi. Sonlu eleman yöntemiyle birlikte kullanılan kollokasyon yöntemi, spline fonksiyonlar, B-spline fonksiyonlar ve kübik B-spline fonksiyonlar detaylı olarak sunuldu. Ayrıca splitting yöntemlerinin kısa bir literatür taraması, operatör splitting yöntemleri ve bunlarla birlikte Lie-Trotter splitting şeması, Strang ($S_{\Delta t}$) splitting şeması, Lie-Trotter ve Strang splitting yöntemlerinin lokal splitting hatası ve Strang yöntemi kullanılarak ekstrapolasyon tekniği ile elde edilen Ext4 ve Ext6 yöntemleri anlatıldı.

Üçüncü bölümde, lineer olmayan Burgers', modifiye edilmiş Burgers' (mBE) ve düzenli uzun dalga (RLW) denklemleri operatör splitting yoluyla biri lineer diğeri lineer olmayan iki alt denkleme split edildi. Daha sonra her bir denklem için elde edilen alt denklemlere kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile birlikte $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 splitting yöntemleri uygulandı. Burgers' denklemi için üç, mBE denklemi için bir ve RLW denklemi için üç test problemi göz önüne alındı. $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan nümerik sonuçlar tam sonuçlarla ve/veya literatürde mevcut olan çalışmaların L_2 , L_∞ ve $\|e_1\|$ hata normlarıyla karşılaştırıldı. Ayrıca her denklem için sonlu eleman ve operatör

splitting yöntemi ile elde edilen şemaların kararlılık analizleri von Neumann yöntemi ile incelendi.

Dördüncü bölümde, lineer olmayan coupled viskoz Burgers' denklemi her biri lineer ve lineer olmayan iki alt denklemden oluşmak üzere toplam dört alt denkleme split edildi. Daha sonra elde edilen alt denklemlere kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile beraber $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri uygulandı. Bu denklem için üç test problemi göz önüne alındı ve hesaplanan nümerik sonuçlar tam çözümle ve literatürdeki diğer çalışmaların L_2 ve L_∞ hata normlarıyla karşılaştırıldı. Yine bu bölümde elde edilen sonlu eleman şemalarının kararlılık analizleri yapıldı.

Son olarak beşinci sonuç bölümünde, tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerinde sonlu eleman kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile birlikte $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri kullanılarak nümerik çözümleri hesaplanan denklemler için genel bir değerlendirme yapıldı.



ANAHTAR KELİMELEER: Splitting Yöntemler, Operatör Splitting Yöntemleri, Strang ($S_{\Delta t}$) Splitting, Ekstrapolasyon Yöntemleri, Sonlu Eleman Yöntemi, Kübik B-Spline Fonksiyonlar, Kollokasyon Yöntemi, Burgers' Denklemi, Modifiye Edilmiş Burgers' Denklemi, RLW Denklemi, Coupled Viskoz Burgers' Denklemi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOLUTIONS OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY OPERATOR SPLITTING B-SPLINE COLLOCATION METHOD

İhsan ÇELİKKAYA

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

133+viii pages

2018

Supervisor : Assoc.Prof.Dr. Yusuf Uçar
Co-Supervisor : Assoc.Prof.Dr. Nuri Murat Yağmurlu

This thesis consists of five chapters. In the introduction chapter, the structure of Burgers', modified Burgers', regularized long wave (RLW) and coupled Burgers' equations of which numerical solutions are obtained as well as various physical phenomena expressed with partial differential equations, a brief summary of the finite element and operator splitting methods used in the thesis are presented.

In the second chapter, the fundamental definitions and concepts related to finite element and operator splitting methods to be used in the thesis are given. The collocation method used in conjunction with the finite elements method, Spline functions, B-spline functions and cubic B-spline functions are presented in detail. In addition, a short literature search of splitting methods, operator splitting methods and Lie-Trotter splitting scheme, Strang ($S_{\Delta t}$) splitting scheme, local splitting error of Lie-Trotter and Strang splitting methods and Ext4 and Ext6 methods obtained using Strang method via extrapolation technique are explained.

In the third chapter, nonlinear Burgers', modified Burgers' (mBE) and regularized long wave (RLW) equations are splitted via operator splitting into two equations, one linear and the other nonlinear equation. Then $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 splitting methods with cubic B-spline collocation finite element method are applied to the sub equations obtained for each equation. Three test problems for the Burgers' equation, one for the modified Burgers' equation and three for the RLW equation are considered. The numerical results calculated with $S_{\Delta t}$, Ext4 and Ext6 are compared with the exact results and / or the L_2 , L_∞ and $\|e_1\|$ error

norms of the studies available in the literature. In addition, the stability analysis of the schemes obtained by the finite element and operator splitting method for each equation is examined by von Neumann method.

In the fourth chapter, nonlinear coupled viscous Burgers' equation was splitted into two sub-equations, each linear and non-linear, resulting in a total of four sub-equations. Then $S_{\Delta t}$, Ext4 and Ext6 methods with cubic B-spline collocation finite element method are applied to the sub equations obtained. For the present equation, three test problems are considered and the calculated numerical results are compared with the exact solution and the error norms L_2 and L_∞ of the other studies in the literature. Again, in this section, stability analyses of the resulting finite element schemes are performed.

Finally, in the fifth and the last chapter of the thesis, a general evaluation is made for the equations of which the numerical solutions are calculated using the finite element cubic B-spline collocation method with $S_{\Delta t}$, Ext4 and Ext6 methods in the third and fourth sections of the thesis.

KEYWORDS: Splitting Methods, Operator Splitting Methods, Strang ($S_{\Delta t}$) Splitting, Extrapolation Methods, Finite Elements Method, Cubic B-Spline Functions, Collocation Method, Burgers' Equation, Modified Burgers' Equation, RLW Equation, Coupled Viscous Burgers' Equation.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde değerli bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan ve gelecekteki meslek hayatımda bana verdikleri değerli bilgilerin ışığında yoluma devam edebileceğimi düşündüğüm çok kıymetli danışman hocalarım Doç.Dr. Yusuf UÇAR ve Doç.Dr. Nuri Murat YAĞMURLU' ya, engin tecrübe ve deneyimleriyle tezime çok büyük katkılarda bulunan, bana yol gösteren ve üzerimde büyük emekleri olan saygıdeğer hocalarım Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY ve Prof.Dr. Alaattin ESEN' e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca doktora dönemi boyunca bana her türlü konuda yardımcı olan başta bölüm başkanımız sayın Prof.Dr. Sadık KELEŞ' e ve diğer bölüm hocalarıma, bu tezin yazım düzeninde fikirlerinden yararlandığım her zaman kıymetli zamanını bana ayıran sayın Doç.Dr. M. Kemal ÖZDEMİR' e, eğitim-öğretim sürecim boyunca sabır ve sevgiyle her zaman yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen değerli aileme sonsuz teşekkürler sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
TABLolar DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Sonlu Eleman Yöntemleri	4
2.2. Kollokasyon Yöntemi	7
2.3. Spline Fonksiyonlar	9
2.4. B-spline Fonksiyonlar	12
2.4.1. Kübik B-spline Fonksiyonlar	13
2.5. Splitting Yöntemler	15
2.5.1. Operatör Splitting Yöntemler	17
2.5.1.1. Lie-Trotter Splitting Şeması	23
2.5.1.2. Strang Splitting Şeması	24
2.5.2. Ekstrapolasyon ile Elde Edilen Yöntemler (Ext4, Ext6)	26
3. BAZI LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN OPERATÖR SPLITTING B-SPLİNE KOLLOKASYON SONLU ELEMAN ÇÖZÜMLERİ	33
3.1. Burgers' Denkleminin Operatör Splitting B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Çözümleri	33
3.1.1. Kararlılık Analizi	38
3.1.2. Model Problemler ve Nümerik Çözümleri	40
3.2. Modifiye Edilmiş Burgers' Denkleminin (mBE) Operatör Splitting B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Çözümleri	61
3.2.1. Kararlılık Analizi	66
3.2.2. Model Problem ve Nümerik Çözümleri	66
3.3. Düzenli Uzun Dalga (RLW) Denkleminin Operatör Splitting B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Çözümleri	75
3.3.1. Kararlılık Analizi	80
3.3.2. Model Problemler ve Nümerik Çözümleri	81

3.3.3.	Solitary Dalga Hareketi	81
3.3.4.	İki Solitary Dalganın Girişimi	83
3.3.5.	Ardışık Dalgaların Oluşumu	90
4.	COUPLED VİSKOZ BURGERS' DENKLEMİNİN OPERATÖR SPLITTING B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMEN ÇÖZÜMLERİ	95
4.1.	Giriş	95
4.1.1.	Kararlılık Analizi	101
4.1.2.	Model Problemler ve Nümerik Çözümleri	105
5.	SONUÇ	116
	KAYNAKLAR	121
	ÖZGEÇMİŞ	133

SİMGELER VE KISALTMALAR

$[\cdot]$	: Lie parantezleri,
Δt	: Zaman yönünde adım uzunluğu,
h	: Konum yönünde adım uzunluğu,
$\Psi_{\Delta t}$	: Bir nümerik yöntem,
$\Psi_{\Delta t}^*$	: Bir nümerik yöntemin adjointi,
$L_{\Delta t}$	: Lie-Trotter splitting yöntemi,
$S_{\Delta t}$	: Strang splitting yöntemi,
E_n	: Lokal kesme hatası,
Ext4	: Strang yöntemiyle elde edilen 4. mertebeden yöntem,
Ext6	: Strang yöntemiyle elde edilen 6. mertebeden yöntem,
I_1	: Kütle korunum sabiti,
I_2	: Enerji korunum sabiti,
I_3	: Momentum korunum sabiti.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	1. dereceden spline fonksiyon	10
Şekil 2.2	0. dereceden B-spline fonksiyon	12
Şekil 2.3	Kübik B-spline fonksiyonlar.	14
Şekil 3.1	Problem 1' in nümerik çözümünün farklı zamanlardaki davranışı a) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 1$. b) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.1$	46
Şekil 3.2	Problem 1' in nümerik çözümünün farklı zamanlardaki davranışı a) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.01$. b) $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.005$	47
Şekil 3.3	Problem 1' in $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$, $a = -1$ ve $b = 1$ değerleri için $t \leq 2$ boyunca nümerik çözümünün fiziksel davranışı.	47
Şekil 3.4	Problem 2' nin nümerik çözümünün farklı zamanlardaki davranışı a) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 1$. b) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.1$	53
Şekil 3.5	Problem 2' nin nümerik çözümünün farklı zamanlardaki davranışı a) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.001$ ve $\nu = 0.01$. b) $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.005$	53
Şekil 3.6	Problem 3' ün nümerik çözümünün fiziksel davranışı a) $h =$ 0.005 , $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$, $a = 0$ ve $b = 1$. b) aynı değerler için $t = 4$ ' deki hata grafiği.	57
Şekil 3.7	Problem 3' ün nümerik çözümünün fiziksel davranışı a) $h =$ 0.005 , $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$, $a = 0$ ve $b = 1.2$. b) aynı değerler için $t = 4$ ' deki hata grafiği.	59
Şekil 3.8	Problem 3' ün nümerik çözümünün fiziksel davranışı a) $h =$ 0.005 , $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.0005$, $a = 0$ ve $b = 1$. b) aynı değerler için $t = 4$ ' deki hata grafiği.	59
Şekil 3.9	Problem 3' ün nümerik çözümünün fiziksel davranışı a) $h =$ 0.005 , $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.00036$. b) aynı değerler için $t = 4$ ' deki hata grafiği.	60

Şekil 3.10	$\nu = 0.01$ ve $h = 0.005$ için farklı zamanlardaki nümerik çözüm ve $t = 10$ ' daki hata grafiği.	68
Şekil 3.11	$\nu = 0.01$ ve $h = 0.02$ için farklı zamanlardaki nümerik çözüm ve $t = 10$ ' daki hata grafiği.	69
Şekil 3.12	$\nu = 0.005$ ve $h = 0.005$ için farklı zamanlardaki nümerik çözüm ve $t = 10$ ' daki hata grafiği.	71
Şekil 3.13	$\nu = 0.001$ ve $h = 0.005$ için farklı zamanlardaki nümerik çözüm ve $t = 10$ ' daki hata grafiği	71
Şekil 3.14	Tek dalga hareketinin $t = 0$ ve $t = 20$ grafiği.	87
Şekil 3.15	İki solitary dalganın $0 \leq t \leq 400$ zaman aralığında girişimi.	89
Şekil 3.16	İki solitary dalganın $0 \leq t \leq 25$ zaman aralığında girişimi.	91
Şekil 3.17	Dalga oluşumu probleminin $d = 2, 5$ için $t = 100$ ve $t = 250$ zamanlarındaki simülasyonu.	93
Şekil 4.1	Problem 1' in $t = 0.1, 0.5$ ve 1 zamanlarında hesaplanan $U_N(x, t)$ nümerik çözümünün grafiği.	107
Şekil 4.2	Problem 3' ün $K = 0.1, 0.5, 1$ ve 5 değerleri için farklı zamanlarda çözüm grafiği.	114

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 3.1	Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ değerleri ve farklı h adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.	41
Tablo 3.2	Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.1$ değerleri ve farklı h adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.	42
Tablo 3.3	Problem 1' in $h = 0.0125$, $\nu = 1$ değerleri ve farklı Δt adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.	42
Tablo 3.4	Problem 1' in $h = 0.0125$, $\nu = 0.1$ değerleri ve farklı Δt adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.	43
Tablo 3.5	Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $h = 0.0125$ değerleri için $t = 0.1$ zamanındaki $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçlarının karşılaştırılması.	43
Tablo 3.6	Problem 1' in $S_{\Delta t}$ yöntemi ile $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ için noktasal değerleri ve farklı konum uzunlukları için $t = 0.1$ ' deki hata normlarının karşılaştırılması.	44
Tablo 3.7	Problem 1' in $S_{\Delta t}$ yöntemi ile $\Delta t = 0.001$, $h = 0.0125$, $\nu = 1$, 0.1 ve 0.01 değerleri için farklı t zamanlarındaki sonuçların karşılaştırılması.	45
Tablo 3.8	Problem 1' in $h = 0.0125$, $\nu = 1$ ve $t = 0.1$ için nümerik çözümünün farklı çalışmalarla karşılaştırılması.	45
Tablo 3.9	Problem 1' in $\nu = 1$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için sonuçlarının diğer çalışmalarla karşılaştırılması.	46
Tablo 3.10	Problem 2' nin $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ değerleri ve farklı h adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.	49
Tablo 3.11	Problem 2' nin $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.1$ değerleri ve farklı h adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.	50
Tablo 3.12	Problem 2' nin $h = 0.0125$, $\nu = 1$ değerleri ve farklı Δt adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.	50
Tablo 3.13	Problem 2' nin $h = 0.0125$, $\nu = 0.1$ değerleri ve farklı Δt adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.	51

Tablo 3.14	Problem 2' nin $S_{\Delta t}$ yöntemi ile $\Delta t = 0.001, h = 0.0125, \nu = 1, 0.1$ ve 0.01 değerleri için farklı t zamanlarındaki sonuçlarının karşılaştırılması.	51
Tablo 3.15	Problem 2' nin $\nu = 0.01$ için farklı zamanlarda nümerik çözümün bazı çalışmalarla karşılaştırılması.	52
Tablo 3.16	Problem 2' nin $\Delta t = 0.001, \nu = 0.01$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı zamanlardaki $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması.	52
Tablo 3.17	Problem 3' ün $\Delta t = 0.01, h = 0.005, \nu = 0.005, a = 0$ ve $b = 1$ değerleri için nümerik sonuçlar ve hata normlarının karşılaştırılması.	55
Tablo 3.18	Problem 3' ün $\Delta t = 0.001, h = 0.005, \nu = 0.005, a = 0$ ve $b = 1.2$ değerleri için nümerik sonuçlar ve hata normlarının karşılaştırılması.	55
Tablo 3.19	Problem 3' ün $\nu = 0.005, a = 0$ ve $b = 1.2$ değerleri için hata normlarının karşılaştırılması.	56
Tablo 3.20	Problem 3' ün $\nu = 0.0015, h = 0.005, \Delta t = 0.01, a = 0$ ve $b = 1$ değerleri için hata normlarının Ref. [95] ile karşılaştırılması.	56
Tablo 3.21	Problem 3' ün $\nu = 0.005, h = 0.02, \Delta t = 0.01, a = 0$ ve $b = 1$ değerleri için hata normlarının Ref. [95] ile karşılaştırılması.	57
Tablo 3.22	Problem 3' ün $\Delta t = 0.01, \nu = 0.005$ değerleri ve farklı zamanlardaki $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin hata normlarının karşılaştırılması.	57
Tablo 3.23	Problem 3' ün $\Delta t = 0.001, \nu = 0.005$ ve $h = 0.005$ değerleri için bazı zamanlardaki $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması.	58
Tablo 3.24	Problem 3' ün $\Delta t = 0.001, \nu = 0.005, h = 0.005, a = 0$ ve $b = 1.2$ değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.	58
Tablo 3.25	$h = 0.005, \Delta t = 0.01$ konum ve zaman adım uzunlukları için viskozitenin farklı değerlerinde hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	68
Tablo 3.26	Farklı viskozite ve zaman değerlerinde $h = 0.005, \Delta t = 0.01$ için nümerik ve tam çözümün karşılaştırılması.	69
Tablo 3.27	$h = 0.005, \Delta t = 0.01$ değerleri için farklı viskozite ve zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının literatürde bulunan çalışmalarla karşılaştırılması.	70
Tablo 3.28	$\nu = 0.001, h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri için farklı zamanlardaki L_2 ve L_∞ hata normları ile $h = 0.0625$ için Ref.[111]'deki sonuçlarla karşılaştırılması.	72
Tablo 3.29	$h = 0.005$ ve $\Delta t = 10^{-4}$ konum ve zaman adım uzunlukları için L_2 ve L_∞ hata normlarının farklı zamanlarda Ref.[116] ile karşılaştırılması.	72

Tablo 3.30	$h = 0.02, \nu = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri için farklı zamanlardaki L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.	73
Tablo 3.31	$h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.001$ için L_2 ve L_∞ hata normlarının farklı zamanlardaki değerlerinin Ref.[86] ile karşılaştırılması.	73
Tablo 3.32	$\Delta t = 0.01, h = 0.02, \nu = 0.01, 0.005, 0.001$ değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.	74
Tablo 3.33	$-40 \leq x \leq 60$ aralığında $h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.1, 0.03, \varepsilon = \mu = 1$ değerleri ile $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin tek dalga hareketi için farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.	84
Tablo 3.34	Tek dalga hareketinin $h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.1, 0.03, \varepsilon = \mu = 1$ değerleri için $-40 \leq x \leq 70$ aralığında üç yöntemin farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.	84
Tablo 3.35	$h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.1, \varepsilon = \mu = 1$ değerleri için tek dalga hareketinin $-40 \leq x \leq 60$ aralığında korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması.	85
Tablo 3.36	$\Delta t = 0.1, h = 0.125, 0.1, c = 0.1, 0.03$ değerleri için $t = 20$ ' deki L_2 ve L_∞ hata normlarının ve korunum sabitlerinin karşılaştırılması.	86
Tablo 3.37	İki solitary dalganın girişimi sonucunda farklı zamanlarda hesaplanan korunum sabitlerinin ve Ref. [122] ile karşılaştırılması.	88
Tablo 3.38	İkinci iki dalga girişim probleminin korunum sabitleri ve Ref.[121] ile karşılaştırılması.	88
Tablo 3.39	Ardışık dalga oluşumu probleminin korunum sabitleri, dalga pozisyonu ve genlikleri.	92
Tablo 4.1	Problem 1' in $\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.	106
Tablo 4.2	Problem 1' in $N = 100$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$ değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.	107
Tablo 4.3	Problem 1' in $\Delta t = 0.001, N = 200, 400$ değerleri için $U_N(x, t)$ ' nin farklı zamanlardaki L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [143], Ref. [149] ve Ref. [150] ile karşılaştırılması.	108
Tablo 4.4	Problem 1' in $\Delta t = 0.001$ ve farklı N değerleri için $U_N(x, t)$ ' nin $t = 0.1, 0.5$ zamanlarındaki L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [143] ve Ref. [144] ile karşılaştırılması.	108
Tablo 4.5	Problem 2' nin $N = 50, 100, 200$ ve $\Delta t = 0.01, \alpha = 0.1, \beta = 0.3$ değerleri için $U_N(x, t)$ ' nin $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle hesaplanan hata normlarının farklı zamanlardaki karşılaştırılması.	110

Tablo 4.6	Problem 2' nin $N = 50, 100, 200$ ve $\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$ değerleri için $V_N(x, t)$ ' nin $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle hesaplanan hata normlarının farklı zamanlardaki karşılaştırılması.	111
Tablo 4.7	Problem 2' nin $\Delta t = 0.01$, $N = 100$ değerleri için $U_N(x, t)$ ' nin farklı α ve β için $t = 0.1$ ve 0.5 zamanlarındaki L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [143, 147, 148, 149, 150, 154] ile karşılaştırılması.	111
Tablo 4.8	Problem 2' nin $\Delta t = 0.01$, $N = 100$ değerleri için $V_N(x, t)$ ' nin farklı α ve β için $t = 0.1$ ve 0.5 zamanlarındaki L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [143, 150, 149, 148, 147, 154] ile karşılaştırılması.	112
Tablo 4.9	Problem 3' n $\Delta t = 0.001$ ve $K = 0.1, 0.5, 1$ değerleri için $U_N(x, t)$ ' nin farklı zamanlardaki $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin L_2 ve L_∞ hata normları.....	113
Tablo 4.11	Problem 3' n $K = 1$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 320$ değerleri için $U_N(x, t)$ ' nin farklı zamanlardaki L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [152] ile karşılaştırılması.	113
Tablo 4.10	Problem 3' n $\Delta t = 0.001$ ve $K = 0.1, 0.5$ değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [152] ve Ref. [153] ile karşılaştırılması.	114

1. GİRİŞ

İster biyolojik ister jeolojik olsun doğadaki hemen hemen her olay veya mekanik olay çeşitli fiziksel niceliklere bağlı olarak cebirsel, diferansiyel veya integral denklemler açısından fiziksel kanunlar yardımıyla tanımlanabilir. Buna ek olarak, matematiksel fizik ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan birçok olay kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilebilir. Örneğin fizikte, ısı akışı, dalgaların yayılımı, akışkanlar dinamiği, kuantum mekaniği, elektrik akımı, plazma fiziği, sıg su dalgalarının yayılımı ve daha birçok fiziksel olay kendi geçerlilik alanı içinde kısmi diferansiyel denklemlerle modellenmektedir. Ortaya çıkan bu tip kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan geleneksel ve son zamanlarda geliştirilen yöntemler ve bu yöntemlerin uygulanması giderek önem kazanmaktadır. Bu tür diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek oldukça önemlidir. Ancak birçok problem için tam çözümü elde etmek bazen zor veya imkansız olabilir. Böyle durumlarda diferansiyel denklemlerin tam çözümleri yerine çeşitli nümerik yöntemlerle kabul edilebilir bir doğrulukta elde edilen yaklaşık çözümleri kullanılır. Bu nümerik yöntemlerden sonlu fark, varyasyonel ve sonlu eleman yöntemleri literatürde en sık kullanılan yöntemler arasındadır [1, 2]. Sonlu eleman yöntemi, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmekte kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntem, özellikle pratik uygulamalarda yaygın olarak görülen karmaşık geometriye sahip bölgeler üzerinde tanımlanan sınır koşullarının kullanılmasıyla oldukça etkili sonuçlar vermektedir. Ayrıca keyfi bölgelere uygulanabilme ve gelişmiş sonlu eleman yazılımlarının ortaya çıkmasıyla birlikte son yıllarda sonlu eleman yöntemi birçok problemin çözümünde tercih edilen pratik bir yöntem haline gelmiştir [3].

Nümerik hesaplamalar için etkili bir çözüm yönteminin geliştirilmesini gerektiren yeni ve kompleks denklemlerle sıklıkla karşılaşılır. Bu denklemlerin

çözümü için çoğu durumda iyi bir yöntem bulmak ve bu yöntemi uygulamak zor olabilir. Karmaşık problemlerle başa çıkmanın bir yolu “böl ve yönet” prensibidir. Bu prensibe uygun olan yöntemlerden biri olan operatör splitting (parçalama) fikri oldukça başarılı olmuştur. Bu tür bir yaklaşımın altında yatan temel fikir, modelin her biri için daha basit ve pratik algoritmaların mevcut olduğu alt denklemler kümesine parçalanmasıdır. Daha sonra her bir alt denkleme uygun nümerik şema seçilir ve bu şemalar operatör splitting yoluyla bir araya getirilir [4].

Literatürde birçok kısmi diferansiyel denklemin nümerik çözümleri için Lie-Trotter, Strang ve ekstrapolasyon teknikleri ile türetilen Ext4, Ext6 gibi operatör splitting yöntemler kullanılmaktadır. Örneğin Strang splitting yönteminde,

$$\frac{du(t)}{dt} = C(u(t)), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, T]$$

lineer veya lineerleştirilmiş problemi

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + Bu(t)$$

şeklinde ele alınır ve çözüm şeması

$$\begin{aligned} \frac{du^*(t)}{dt} &= Au^*(t), \quad u^*(t_n) = u_n^0, & t \in \left[t_n, t_{n+\frac{1}{2}}\right] \\ \frac{du^{**}(t)}{dt} &= Bu^{**}(t), \quad u^{**}(t_n) = u^*(t_{n+\frac{1}{2}}), & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \frac{du^{***}(t)}{dt} &= Au^{***}(t), \quad u^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) = u^{**}(t_{n+1}), & t \in \left[t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}\right] \end{aligned}$$

formunda verilir. Burada, $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ ve $t = t_{n+1}$ noktalarındaki yaklaşık çözüm $u(t_{n+1}) \cong u^{***}(t_{n+1})$ olup, bu şema $(A - B - A)$ splitting şeması olarak adlandırılır [5, 6].

Bu tezde $u = u(x, t)$, çözüm bölgesi üzerinde bilinmeyen bir fonksiyon, α , β , η , v , ε ve μ de birer reel sayı olmak üzere,

Burgers denklemi :

$$u_t + uu_x - vu_{xx} = 0,$$

Modifiye edilmiş Burgers' denklemi (mBE) :

$$u_t + u^2u_x - vu_{xx} = 0,$$

Düzenli Uzun Dalga (RLW) denklemi :

$$u_t - \mu u_{xxt} + \varepsilon uu_x + u_x = 0,$$

Coupled viskoz Burgers' denklemi :

$$u_t - u_{xx} + \eta uu_x + \alpha(uv)_x = 0, \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T],$$

$$v_t - v_{xx} + \eta vv_x + \beta(uv)_x = 0, \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T],$$

lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerinin verilen farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla birlikte operatör splitting ve kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanılarak nümerik çözümleri elde edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Sonlu Eleman Yöntemleri

Sonlu eleman yöntemlerinin modern gelişimi 1940' lı yıllarda Hrennikoff [7] ve McHenry [8]' nin yapısal mühendislik alanındaki çalışmalarına kadar dayanır. “Sonlu eleman” ifadesi 1960' da Clough [9] tarafından düzlem gerilme analizi için hem üçgensel hem de dörtgensel elemanlar kullandığı çalışmasında tanıtılmıştır. 1950' li yıllarda yüksek hızlı dijital bilgisayarların gelişimiyle o günden günümüze kadar karmaşık mühendislik problemlerini çözmek için sonlu eleman yöntemlerinde muazzam ilerlemeler kaydedilmiştir. Hala mühendisler, uygulamalı matematikçiler ve diğer bilim adamları yeni uygulamalar geliştirmeye devam etmektedir [10]. Sonlu eleman yöntemi, karmaşık bir problemin çözümünü bulmak yerine, bu problemin analizini daha iyi yapabilmek için problemin daha basit bir modelini oluşturma fikrine dayanır. Orijinal problemin yerine daha basit bir model kullanıldığından bulunacak çözüm, analitik çözümden ziyade yaklaşık bir çözüm olacaktır. Fiziksel bir problemin sonlu eleman formülasyonu, diferansiyel denklem çözümünden ziyade, bir cebirsel denklem sisteminin çözümüyle sonuçlanır. Sonlu eleman yöntemleri, çözüm bölgesi üzerindeki ayrık noktaların yanı sıra istenildiğinde ara noktalarındaki bilinmeyenlerin yaklaşık değerini verir. Bu yöntemlerde problemin çözüm bölgesi; sonlu elemanlar olarak adlandırılan (*iki veya daha fazla*) daha küçük geometrik şekillere ya da elemanlara bölünür. Bu geometrik şekillerin veya elemanların birbirleriyle bağlantı kurdukları noktalara *nodal noktalar* ya da *nodlar* denir. Daha basit parçalara ayırma işlemine ayrıklaştırma (*diskritizasyon*) denir. Sonlu eleman yöntemlerinde, tüm bölge üzerindeki problemi bir tek operasyonla çözmek yerine, her bir sonlu eleman için ayrıklaştırılmış daha basit bölgeler üzerinde denklemler oluşturulur ve tüm bölge

üzerindeki çözüme ulaşmak için bu denklemler bir araya getirilir [10, 11].

Sonlu eleman yöntemlerinin öne çıkan avantajları [10]:

1. Düzensiz bir şekile sahip olan yapıları kolayca modelleyebilmesi,
2. Eleman denklemleri ayrı ayrı hesaplandığından birkaç farklı malzemeden bir araya gelen yapıları modelleyebilmesi,
3. Birçok farklı türden sınır şartlarıyla birlikte kullanılabilmesi,
4. Gerektiğinde kullanılabilir hale getirmek için elemanların boyutlarının değiştirilebilmesi,
5. İstenildiğinde sonlu eleman modelinin kolay ve maliyetsiz bir şekilde değiştirilebilmesi,
6. Sonlu eleman modeli sonucunda elde edilen cebirsel denklemler sisteminin bilgisayarlar yardımıyla çözülebilmesi olarak sayılabilir.

Ayrıca bir nümerik hesaplama yönteminin etkili olabilmesi için aşağıdaki özellikleri sağlaması beklenir [1]:

1. Yöntem, fiziksel özellikleri sağlamasının yanı sıra matematiksel de olmalıdır. Yani, yakınsak çözümler vermeli ve fiziksel problemler için uygun olmalıdır.
2. Çözüm bölgesinin geometrik yapısından ve malzeme türünden bağımsız olmalıdır.
3. Fiziksel problem için matematiksel formülasyon, çözüm bölgesinin şeklinden ve sınır şartlarının özel formundan bağımsız olmalıdır.
4. Problemin tüm bölgesini kullanmadan farklı dereceden yaklaşımlar yapacak kadar esnek olmalıdır.
5. Bilgisayar algoritma mantığına uygun sistematik bir yapıya sahip olmalıdır.

Yukarıda verilen etkili bir hesaplama yönteminin bütün özelliklerine sahip olan sonlu eleman yöntemlerinin uygulanması aşağıdaki altı adımı içerir [1]:

1. Verilen bir bölgenin sonlu elemanlara ayrıştırılması (Bu adım denklemin sonlu eleman formülasyonu tamamlanana kadar ertelenebilir):

- a) Önceden belirlenen elemanların sonlu eleman ağının oluşturulması.
- b) Düğüm ve elemanların numaralandırılması.
- c) Problem için gerekli olan geometrik özelliklerin (koordinat ve kesit alanlarının) belirlenmesi.

2. Sonlu eleman ağındaki her tipik eleman için eleman denklemlerinin oluşturulması.

- a) Verilen diferansiyel denklemin tipik bir eleman üzerinde varyasyonel formülünün oluşturulması.
- b) Tipik bir “ u ” bağımlı değişkenin

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$

formunda olduğu kabul edilip Adım 2a’ da yerine yazılarak

$$[K^e] \{u^e\} = \{F^e\}$$

formunda eleman denklemlerinin oluşturulması.

- c) ψ_i yaklaşım fonksiyonlarının belirlenmesi ve eleman matrislerinin hesaplanması.

3. Ana problemin sistemini elde etmek için eleman denklemlerinin birleştirilmesi:

- a) Birincil değişkenler arasındaki süreklilik şartlarının belirlenmesi.
- b) İkincil değişkenler arasındaki denge şartlarının belirlenmesi.

c) Adım 3a ve 3b kullanılarak eleman denklemlerinin birleştirilmesi.

4. Problemin sınır şartlarının uygulanması:

a) Problemde verilen birincil değişkenlerin uygulanması.

b) Eğer Adım 3b de yapılmadıysa problemde verilen ikincil değişkenlerin uygulanması.

5. Bir araya getirilmiş denklemlerin çözülmesi.

6. Sonuçların değerlendirilmesi:

a) Adım 5' de elde edilen birincil değişkenlerden hareketle çözümlerin değişiminin incelenmesi.

b) Sonuçların grafik ve tablo şeklinde sunulması.

2.2 Kollokasyon Yöntemi

Bir Ω bölgesi üzerinde

$$A(u) = f \quad (2.2.1)$$

şeklinde operatör denklemi verilmiş olsun. Burada A lineer veya lineer olmayan bir operatör, u bağımlı değişken ve f ise bağımsız değişkenlerin bilinen bir fonksiyonudur. u tam çözümü yerine bir U_N yaklaşık çözümü, ϕ_j yaklaşım fonksiyonları ve c_j ' ler belirlenecek parametreler olmak üzere

$$U_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0$$

şeklinde verilsin. U_N yaklaşık çözümü (2.2.1) ifadesinde yerine yazılırsa genellikle f ye eşit olmayan $f_N = A(U_N)$ fonksiyonu elde edilir. $A(U_N) - f$ farkına yaklaşımın kalanı (*rezidüsü*) denir ve

$$R = A(U_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0$$

ile gösterilir [1, 12]. Ω iki boyutlu bir bölge, ψ_i genellikle ϕ_j yaklaşım fonksiyonlarından farklı alınan ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.2.2)$$

integral ifadesine ağırlıklı integral formu denir.

Kollokasyon yönteminde, Ω bölgesi üzerinde önceden seçilmiş $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) kollokasyon noktalarında kalanın sıfır olması beklenir. Bu yöntemde ψ_i ağırlık fonksiyonları $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ olarak alınır ve

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) dx dy = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. (2.2.2) denkleminde ψ_i ağırlık fonksiyonları yerine $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ yazılırsa

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) R(\mathbf{x}, c_j) dx dy = 0 \quad (2.2.3)$$

elde edilir. (2.2.3) ifadesi kapalı bir formda

$$R(\mathbf{x}_i, c_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.2.4)$$

biçiminde yazılabilir. (2.2.4) denkleminde N adet kollokasyon noktası bulunduğundan, c_j katsayıları için N — tane denklemden oluşan N — bilinmeyenli bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. İyi bir yaklaşık çözümün bulunmasında kollokasyon noktalarının seçiminin rolü büyüktür [1].

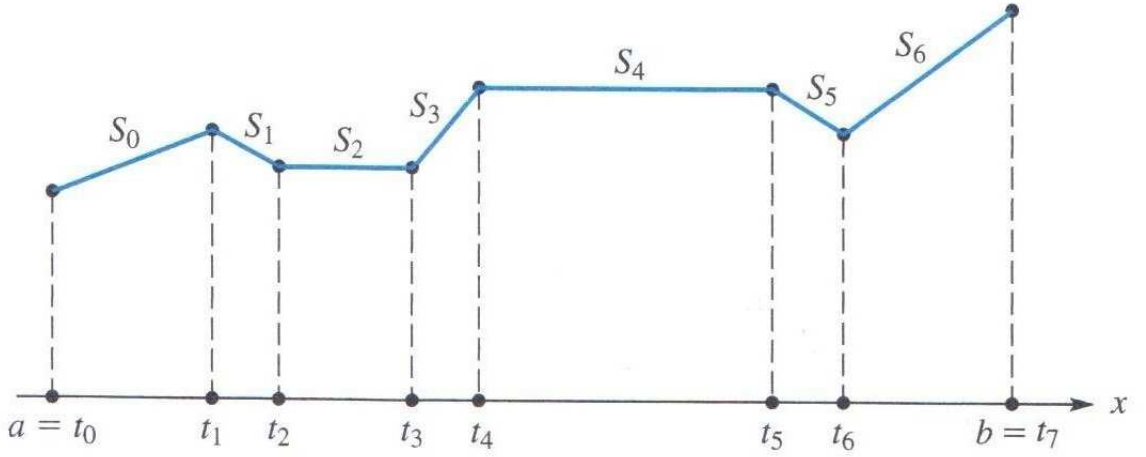
2.3 Spline Fonksiyonlar

Birçok fiziksel olayın matematiksel analizi ve incelenmesinde fonksiyonlar temel araçlardır. Yaklaşım fonksiyonları olarak kullanılan polinomlar, nümerik analizin ve yaklaşım teorisinin temel yapı taşıdır. Verilen bir probleme polinomlar yardımıyla iyi bir yaklaşım elde etmek için çok sayıda nokta veya fonksiyonun kullanılması gerekir. Fakat yüksek dereceden polinomlar büyük salınım davranışı gösterdiğinden dolayı arzu edilen yaklaşımı vermezler. Ayrıca, veri sayısı ya da fonksiyon sayısı çok olduğunda hesaplama sorunları ortaya çıkar. Bu zorlukların üstesinden gelmek için parçalı fonksiyonların bir sınıfı olan “Spline” fonksiyonlar tercih edilebilir. Belirli düzgünlük (*smoothness*) koşullarını sağlayan polinom parçalarının bir araya getirilmesiyle oluşan fonksiyonlara spline fonksiyonlar denir [13, 14].

Polinom spline fonksiyonların bazı özellikleri aşağıda verilmiştir [13, 14].

1. Polinom spline uzayları, uygun bazlarla birlikte sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
2. Polinom spline’ lar düzgün (*smooth*) fonksiyonlardır.
3. Dijital bilgisayarlarda kolayca depolanabilir, manipule edilebilir ve hesaplanabilirler.
4. Polinom spline’ ların türevleri ve integralleri de yine polinom spline dir.
5. $[a, b]$ kapalı aralığındaki her sürekli fonksiyona polinom spline’ lar yardımıyla iyi bir yaklaşım yapılabilir.
6. Düşük dereceden spline’ lar oldukça kullanışlıdır ve salınımlara neden olmazlar.

1. dereceden spline için basit bir örnek Şekil 2.1’ de verilmiştir. Spline teorisinde



Şekil 2.1: 1. dereceden spline fonksiyon

bu fonksiyonun karakter değiştirdiği $t_0, t_1, \dots, t_n$ noktalarına düğüm noktaları adı verilir. $S(x)$ fonksiyonunun her bir parçası $S_i(x) = a_i x + b_i$ biçiminde lineer polinom olduğundan

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [t_0, t_1] \\ S_1(x) & x \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases} \quad (2.3.1)$$

olarak yazılabilir. Bu türden bir $S(x)$ fonksiyonuna “parçalı lineer” dir denir. Eğer $t_0, t_1, \dots, t_n$ düğüm noktaları verilir ve $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$ katsayılarının hepsi bilinirse, özel bir x noktasında $S(x)$ in hesaplanması ilk olarak x ’ in bulunduğu aralığın belirlenmesi ve bu aralığa karşılık gelen lineer bir fonksiyonun kullanılması ile mümkün olur. Eğer (2.3.1) ile tanımlanan $S(x)$ fonksiyonu süreklirse birinci dereceden spline olarak tanımlanır [15].

Bir $S(x)$ fonksiyonunun birinci dereceden spline olması için aşağıdaki üç özelliği sağlaması gerekir [15].

a) $S(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı,

- b) $S(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli,
- c) $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ parçalanmış aralığının her bir $[t_i, t_{i+1}]$ alt aralıklarında $S(x)$ lineer polinom olmalıdır.

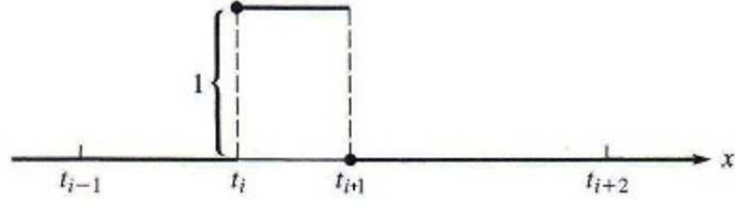
Derecesi 1' den büyük olan spline fonksiyonlar daha karmaşıktır. $Q(x)$ kuadratik parçalı fonksiyon olmak üzere, $Q(x)$ ' in ikinci dereceden spline fonksiyon olabilmesi için aşağıdaki şartları sağlaması gerekir [15].

- a) $Q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı,
- b) $Q(x)$ ve $Q'(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli,
- c) $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ aralığının her bir $[t_i, t_{i+1}]$ alt aralıklarında $Q(x)$ en fazla ikinci dereceden polinom olmalıdır.

Birinci ve ikinci dereceden spline fonksiyonlar bazı uygulamalar için kullanışlı olsa da yüksek mertebeden türevler bulunduran denklemlerin nümerik çözümlerinde pek kullanışlı değildir. Çünkü belirli bir mertebeden sonra bunların türevlerinde süreksizlik ortaya çıkar ve düğüm noktalarında aldıkları değerler aniden başka değerlere dönüşebilir. Bu sebeple yüksek mertebeden türevler içeren denklemlerde en az denklemin mertebesi kadar türevlenebilecek spline' lar tercih edilir [15].

Bir $S(x)$ fonksiyonunun k . dereceden spline olması için aşağıdaki şartları sağlaması gerekir [15].

- a) $S(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı,
- b) $S, S', S'', \dots, S^{(k-1)}$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde sürekli,
- c) $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ aralığının her bir $[t_i, t_{i+1}]$ alt aralıklarında $S(x)$ en fazla k . dereceden polinom.



Şekil 2.2: 0. dereceden B-spline fonksiyon

2.4 B-spline Fonksiyonlar

B-spline fonksiyonlar, nümerik analizde oldukça sık kullanılan spline fonksiyonların özel bir türüdür. B-spline' lar bütün spline' ların kümesi için bir baz oluşturduğundan bu isimle anılmaktadır. 0. dereceden B-spline

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Şekil 2.2' de görüldüğü gibi $B_i^0(x)$ ' in süreksiz olduğu görülmektedir. $B_i^0(x)$ parçalı sabit bir fonksiyon olduğundan, 0. dereceden bir spline fonksiyondur. Ayrıca her x ve i için

$$B_i^0(x) \geq 0$$

ve

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1 \quad (2.4.1)$$

olduğu görülür. (2.4.1) ifadesi sonsuz bir seri olmasına rağmen herhangi bir yakınsaklık sorunu söz konusu değildir. Çünkü her x için sadece serideki bir terim 0' dan farklıdır. Gerçekten de belirli bir x değeri için $t_m \leq x < t_{m+1}$ olmak üzere

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = B_m^0(x) = 1$$

olacak şekilde bir m tamsayısı vardır. 0. dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak diğer bütün yüksek dereceden B-spline' lar, $k = 1, 2, 3, \dots$ ve $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere

$$B_i^k(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1}(x)$$

özyineleme formülünden kolayca elde edilebilirler [14, 15]. Örneğin $B_i^1(x)$ spline fonksiyonu

$$B_i^1(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) B_i^0(x) + \left(\frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}} \right) B_{i+1}^0(x)$$

$$= \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i}, & t_i \leq x < t_{i+1} \\ \frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}}, & t_{i+1} \leq x < t_{i+2} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

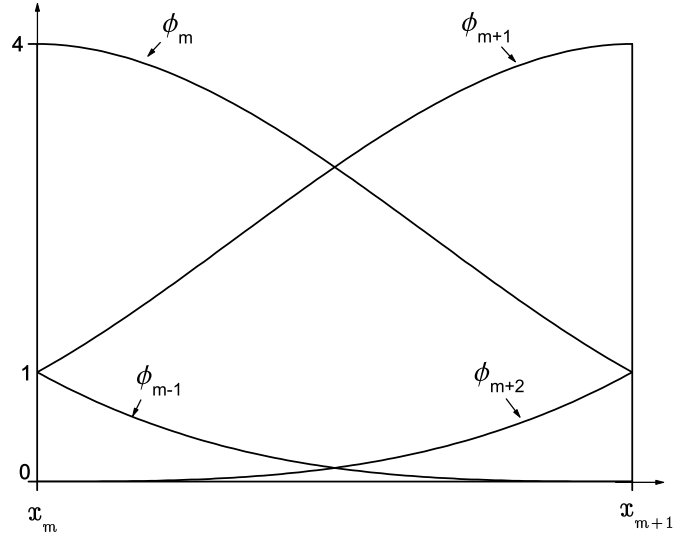
şeklinde hesaplanır.

2.4.1 Kübik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanması $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu, $h = x_{m+1} - x_m$ ve $m = -1, 0, \dots, N + 1$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (2.4.2)$$

şeklinde verilir [16]. $\phi_m(x)$ fonksiyonu ile 1. ve 2. mertebeden türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Böylece $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı, Şekil 2.3' de görüldüğü gibi $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ ve ϕ_{m+2} gibi dört tane kübik B-spline tarafından örtülmektedir. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $h\xi = x - x_m$ dönüşümüyle $[0, 1]$ aralığına dönüştürülürse



Şekil 2.3: Kübik B-spline fonksiyonlar.

$\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ ve ϕ_{m+2} fonksiyonları ξ türünden,

$$\phi_{m-1} = (1 - \xi)^3,$$

$$\phi_m = 1 + 3(1 - \xi) + 3(1 - \xi)^2 - 3(1 - \xi)^3,$$

$$\phi_{m+1} = 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3,$$

$$\phi_{m+2} = \xi^3$$

şeklinde elde edilir. U_N yaklaşık çözümü bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde,

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j \delta_j \quad (2.4.3)$$

olarak ifade edilir ve x_m düğüm noktalarında U_N , U'_N ve U''_N yaklaşımları δ_m parametreleri cinsinden

$$U_N(x_m, t) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \quad (2.4.4)$$

$$U'_N(x_m, t) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1})$$

$$U''_N(x_m, t) = \frac{3}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})$$

şeklinde elde edilir.

2.5 Splitting Yöntemler

Splitting yöntemlerde genel olarak verilen denklem parçalara ayrılır ve $[t_n, t_{n+1}]$ zaman aralıkları üzerinde her bir parça ana denklemden bağımsız olarak ardışık çözülür. Bu tür yöntemler genelde zaman parçalama (*time splitting*) ya da kesirli adım (*fractional step*) yöntemler ya da “operatör splitting” olarak da adlandırılır. Eğer çok boyutlu bir problem bir boyutlu alt problemlere indirgenecek şekilde parçalanıyorsa, boyutlu splitting (*dimensional splitting*) olarak adlandırılır [17].

Başlangıç veya sınır şartlarıyla verilen kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için geliştirilmiş yöntemlerden biri de operatör splitting yöntemleridir. Genellikle karmaşık fiziksel olayları temsil eden zamana bağlı bir kısmi diferansiyel denklem farklı fiziksel olaylara (konveksiyon, difüzyon, kimyasal olaylarda reaksiyon veya difüzyon gibi) karşılık gelen bir veya daha fazla operatörün kombinasyonundan oluşur. Son yıllarda bilgisayarların hesaplama gücünün hızlı artmasıyla birlikte, kısmi diferansiyel denklemlerle modellenen olaylar ve kısmi diferansiyel denklemlerin kendileri de daha karmaşık bir hal aldı. Bu tür karmaşık denklemler için geleneksel nümerik yöntemler kayda değer bir zaman harcanmasına rağmen iyi sonuçlar vermeyebilir. Operatör splitting yöntemler bu tür karmaşık ve çok boyutlu problemlerin nümerik çözümünde iyi bir yaklaşım olabilir. Splitting yöntemlerde verilen orijinal problem bir zaman adımı üzerinde iki veya daha fazla parçaya ayrılır. Bunun sonucunda daha basit bir yapıya sahip olan alt problemler elde edilir. Böylece orijinal problemin çözümü alt problemlerin çözümlerinden elde edilir. Ayrıca alt problemleri ayrı ayrı çözmek hesaplama maliyeti bakımından tüm problemi çözmekten daha avantajlıdır [18, 19].

1950’ li yıllarda ardışık splitting olarak adlandırılan operatör splitting düşüncesi ilk olarak Bagrinovsky ve Godunov [20] tarafından çok boyutlu hiperbolik sistemler için önerilmiştir. Bu alanda çalışan önemli isimlerden biri de

H.F. Trotter' dır. Trotter [21] Lie çarpım formülünü Banach uzayında matrisler için sınırsız operatörlere genişletmiştir. Douglas ve Rachford [22] ile Peaceman ve Rachford [23] Alternating Direction Implicit (ADI) metot olarak adlandırılan bir split yöntemle, çok boyutlu problemlerin çözümünü başarılı bir şekilde ardışık bir boyutlu problemlerin çözümüne indirgediler. ADI yönteminin, farklı algoritmaların kurulmasında önemli bir etkisi olmuştur. Daha sonra bu yöntem petrol rezervi simülasyonlarında uygulanmıştır [4].

Operatör splitting yöntemi, denklemdeki konum yönündeki diferansiyel operatörleri, daha basit alt operatörlerin toplamına indirger. Böylece, farklı fiziksel olayları temsil eden ve orijinal denklemden bağımsız olarak daha kolay çözülebilen alt problemler elde edilir. Splitting yöntemler, literatürde coupled olarak bilinen denklemler ve çok boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilen bir çok uygulamada kullanılmıştır. Bu uygulamalara örnek olarak, Sun [24] hava kalite modellenmesinde farklı işlemleri bir araya getiren pseudo-non-time-splitting yöntemini sunarken Kim ve Cho [25] time splitting metodunu hesapsal etkinlik ve doğruluğunu incelemek için basit/kompleks kimyasal reaksiyon mekanizmalarıyla birlikte atmosferik taşıma/kimyasal denklemlerini incelediler. Mcrae vd. [26] atmosferik difüzyon denkleminin çözümüne yönelik nümerik tekniklerin geniş çaplı bir çalışmasını rapor ettiler. Otey ve Dwyer [27] beş nümerik çözüm prosedürünün etkinliğini karakterize etmek için çoğu yanma olayının temel özelliklerini içeren bir model problem formüle ettiler. Caffisch vd. [28] rahatlama terimine sahip hiperbolik sistemler için yüksek çözünürlüklü şok yakalayıcı nümerik şemalar geliştirdiler. Jin [29] sürekli asimtotik limitin ayırık benzerine sahip ikinci mertebeden Runge-Kutta tipi bir split metodu tanımlayarak yüksek mertebeden doğrulukla problemin doğru fiziksel davranışını elde etti. LeVeque ve Yee [30] bir parametreye bağlı kaynak terime sahip model yayılım denklemi üzerinde tipik nümerik yöntemlerin davranışlarını incelediler. Forest [31]

çalışmasında Hamilton denklemlerinin integrasyonu için dördüncü mertebeden açık bir yöntem sunmuştur. McLachlan ve Atela [32] Hamilton fonksiyonunu temsil eden simplektik integratörlerin doğruluğunu değerlendirler. McLachlan [33] bir çalışmasında Lie-Poisson integratörlerinin oluşturulabileceği Lie-Poisson sistemler için geniş bir sınıfı sunarken; diğer bir çalışmasında [34] ise $\dot{x} = X = A + B$ formunda verilen diferansiyel denklemleri göz önüne almış ve mertebe, komplekslik ve tersine dönüştürülebilirlik için çeşitli simetrik bileşimleri incelemiştir. Leimkuhler vd. [35] uygun dinamik özelliklere ve dinamiğin en hızlı parçalarına karşı oldukça duyarsız olan alternatifler için yapılan son yaklaşımlar üzerine bir araştırma yapmışlardır. Raedet [36] lineer parabolik fark denklemlerini çözmek için açık ve şartsız kararlı algortimaların yeni bir ailesini sunmuştur. Sussman ve Wisdom [37] yeni bir bilgisayarla birlikte yeni bir integrasyon tekniğiyle yaklaşık 100 milyon yıllık bir süre için bütün gezegen sisteminin evrimini incelemişlerdir. McLachlan ve Quispel [38] adi diferansiyel denklemlerin sayısal integrasyonu için splitting yöntemleri üzerine bir araştırma yapmışlardır.

2.5.1 Operatör Splitting Yöntemler

Bu kısımda, yan şartlarla verilen kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için çeşitli splitting yöntemler ve bu yöntemlerin algoritmaları verildi. Ayrıca bu yöntemlerin yapısından dolayı $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ zaman adımına göre ortaya çıkan lokal kesme hatalarının mertebesi Taylor serisi yardımıyla gösterildi.

Aşağıdaki gibi verilen bir Cauchy problemini

$$\frac{du(t)}{dt} = C(u(t)), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, T] \quad (2.5.1)$$

göz önüne alalım. (2.5.1)' de $u(x, t)$ fonksiyonunun konum yönünde yarı ayrıklaştırıldığı (semi-discretization) kabul edilmiştir. Bu çalışmanın geri kalan

kısımında, $C = \hat{A}(u(t)) + \hat{B}(u(t))$ operatörünün iki lineer (veya lineer olmayan) operatörün toplamı şeklinde yazılabildiği durum üzerinde yoğunlaşıldı. Yani (2.5.1)

$$\frac{du(t)}{dt} = \hat{A}(u(t)) + \hat{B}(u(t)), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, T] \quad (2.5.2)$$

olarak yazılabilir. Burada $u_0 \in X$ başlangıç koşulundan elde edilen vektör, $u(t)$ çözüm vektörü, $C, \hat{A}, \hat{B}$ operatörleri sonlu ya da sonsuz bir X Banach uzayında sınırlı ya da sınırsız operatörlerdir. Operatörlerin sınırsız olması durumunda $C, \hat{A}, \hat{B}$ ve $\hat{A} + \hat{B}$ sonlu ya da sonsuz Banach uzayında C_0 yarı gruplar üretirler. Gücüyen [39] çalışmasında $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ operatörlerinin sınırsız operatörler oldukları durumda tutarlılık analizlerini incelemiştir. Ayrıca Pazy [40] C_0 yarı grup teorisini detaylı olarak ele aldı. Lie operatör formülasyonu yardımıyla, genel olarak (2.5.2) lineer biçimde

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + Bu(t) \quad (2.5.3)$$

olarak yazılabilir. Burada A ve B operatörleri aşağıdaki gibi $u(t)$ fonksiyonuna uygulanan

$$A = \hat{A}(u(t)) \frac{\partial}{\partial u}, \quad B = \hat{B}(u(t)) \frac{\partial}{\partial u}$$

Lie operatörleridir [41]. (2.5.3) denkleminin biçimsel (formal) çözümü $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ zaman adımı olmak üzere

$$u(t_{n+1}) = e^{\Delta t(A+B)} u(t_n) \quad (2.5.4)$$

olarak yazılır. Bu çözüm üstel fonksiyonun Taylor seri açılımı kullanılarak

$$u(t_{n+1}) = e^{\Delta t(A+B)} u(t_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \left(\hat{A}(u(t)) \frac{\partial}{\partial u} + \hat{B}(u(t)) \frac{\partial}{\partial u} \right)^k u(t_n)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bize bir yaklaşık çözüm verecek olan splitting yöntemlerle ilgilendiğimizden dolayı (2.5.4) ifadesini göz önüne alalım. $e^{\Delta t(A+B)}$ ifadesini analitik olarak hesaplanabilseydi, bu durumda (2.5.3) adi diferansiyel denklemi çözüldü ve bir splitting yaklaşımına ihtiyaç duyulmazdı. Ancak, uygulamada

$e^{\Delta t(A+B)}$ ifadesini doğrudan hesaplamak kolay değildir. Oysa ki, $e^{\Delta t A}$ ve $e^{\Delta t B}$ ifadelerinin her birini ayrı ayrı hesaplayan yöntemler mevcuttur. Örneğin (2.5.3) ifadesi, A difüzyon B konveksiyon teriminin sonlu fark yaklaşımına karşılık gelen bir kısmi diferansiyel denklemin method of lines (MOL) yaklaşımı olarak ortaya çıkmış olsun. Bu durumda Lie-Trotter

$$e^{\Delta t(A+B)} \approx e^{\Delta t A} e^{\Delta t B} \quad (2.5.5)$$

yaklaşımı yazılabilir. Bu işleme, çözümün splitting tekniğiyle yaklaşık olarak hesaplama yöntemi denir [18].

A ve B birer matris olabileceği gibi operatör de olabilir. Ayrıca A ve B nin operatör olması durumunda da aynı düşünceler geçerlidir. Dolayısıyla ortak terminoloji operatör splitting dir. A ve B matrislerinin değişmeli (*commute*) oldukları durumda, (2.5.5) yaklaşımı tam çözümü verir. Yani, eğer $[A, B] \equiv AB - BA = 0$ ise, o zaman $e^{\Delta t(A+B)} = e^{\Delta t A} e^{\Delta t B}$ olur. Aksi takdirde, $e^{\Delta t(A+B)} \approx e^{\Delta t A} e^{\Delta t B}$ yaklaşımı zaman adımına göre birinci mertebeden bir yaklaşım olur. (2.5.3) denklemini nümerik olarak çözmek için splitting yönteminin işleyişi öncelikle denklemi,

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) \quad \text{ve} \quad \frac{du(t)}{dt} = Bu(t) \quad (2.5.6)$$

şeklinde iki alt denkleme ayırıp her bir denklemin çözümlerini analitik ya da nümerik olarak elde etmektir.

Splitting yöntemler, aslında geleneksel nümerik yöntemlerin hızını, doğruluğunu ve karalılığını iyileştirmek için geliştirilmiştir. Daha yüksek mertebeden yöntemler $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ ve $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ reel sayılar ve n yaklaşımın mertebesi olmak üzere

$$\begin{aligned}
e^{\Delta t(A+B)} &= e^{c_1 \Delta t A} e^{d_1 \Delta t B} e^{c_2 \Delta t A} e^{d_2 \Delta t B} \dots e^{c_k \Delta t A} e^{d_k \Delta t B} + O(\Delta t^{n+1}) \\
&= \prod_{i=1}^k e^{c_i \Delta t A} e^{d_i \Delta t B} + O(\Delta t^{n+1})
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

olarak yazılabilir. (2.5.7) ifadesinin sol tarafı Δt nin kuvvetlerine açılır ve Δt 'lerin katsayıları Δt^n e kadar eşitlenirse, bilinmeyen c_i ve d_i katsayıları için cebirsel denklemler elde edilir. $n = 1$ (1. mertebeden integratör) için A ve B nin katsayıları için

$$c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1 \quad \text{ve} \quad d_1 + d_2 + \dots + d_k = 1 \tag{2.5.8}$$

olarak elde edilir. Böylece $k = 1$ için aşıkâr çözüm $c_1 = d_1 = 1$ ya da $c_1 = 0$, $d_1 = c_2 = 1$ olur. Yani

$$\begin{aligned}
e^{\Delta t(A+B)} &= e^{\Delta t A} e^{\Delta t B} + O(\Delta t^2) \\
e^{\Delta t(A+B)} &= e^{\Delta t B} e^{\Delta t A} + O(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

birinci mertebeden yaklaşımları elde edilir. $n = 2$ (2. mertebeden integratör) olduğunda (2.5.8) ifadesine ek olarak AB nin katsayılarından gelen

$$c_1(d_1 + d_2 + \dots + d_k) + c_2(d_2 + d_3 \dots + d_k) + \dots + c_k d_k = \frac{1}{2}$$

ifadesi elde edilir. Böylece $n = 2$, ($k = 2$) için $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ olur. Yani

$$\begin{aligned}
e^{\Delta t(A+B)} &= e^{\frac{\Delta t}{2} A} e^{\Delta t B} e^{\frac{\Delta t}{2} A} + O(\Delta t^3) \\
e^{\Delta t(A+B)} &= e^{\frac{\Delta t}{2} B} e^{\Delta t A} e^{\frac{\Delta t}{2} B} + O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

biçiminde ikinci mertebeden yaklaşımları elde edilir [42, 43].

Tanım 2.5.1 Bir $\Psi_{\Delta t}$ nümerik yönteminin adjointi $\Psi_{\Delta t}^*$, orijinal yöntemin ters zaman adım $-\Delta t$ ile ters dönüşümü alınarak

$$\Psi_{\Delta t}^* = [\Psi_{-\Delta t}]^{-1}$$

biçiminde tanımlanır [44].

Tanım 2.5.2 Δt zaman adımına bağlı Ψ yöntemi

$$\Psi_{-\Delta t} \Psi_{\Delta t} = 1$$

şartını sağlıyorsa simetriktir denir [34].

$\varphi_{\Delta t}^{[A]}$ ve $\varphi_{\Delta t}^{[B]}$ çözümleri sırasıyla (2.5.6) ifadesindeki A ve B operatörlerini bulunduran denklemlerin tam ya da nümerik çözümleri ve $\psi_{\Delta t}$ de (2.5.3) denkleminin tam çözümü olmak üzere, en basit splitting yöntemleri

$$L_{\Delta t} = \varphi_{\Delta t}^{[B]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[A]} \equiv e^{\Delta t B} e^{\Delta t A} \quad \text{veya} \quad L_{\Delta t}^* = \varphi_{\Delta t}^{[A]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[B]} \equiv e^{\Delta t A} e^{\Delta t B} \quad (2.5.9)$$

biçiminde tanımlanır ve literatürde *Lie-Trotter splitting* [21] yöntemi olarak bilinir.

Taylor serisi yardımıyla, bir u_0 başlangıç değeri için

$$\psi_{\Delta t}(u_0) = \left(\varphi_{\Delta t}^{[A]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[B]} \right) (u_0) + O(\Delta t^2)$$

şeklinde (2.5.3) denkleminin çözümüne birinci mertebeden bir yaklaşım olduğu görülür. Lie-Trotter splitting (2.5.9) her adımda B operatörünün uygulanmasıyla başlasın. Eğer A ve B operatörlerinin sırası değiştirilip yarım zaman adımı için bileşkesi (ya da Lie-Trotter ve adjointinin yarı adımda bileşkesi) alınır

$$S_{\Delta t} = \left(e^{\frac{\Delta t}{2} A} e^{\frac{\Delta t}{2} B} \right) \left(e^{\frac{\Delta t}{2} B} e^{\frac{\Delta t}{2} A} \right) = e^{\frac{\Delta t}{2} A} e^{\Delta t B} e^{\frac{\Delta t}{2} A}$$

veya

$$S_{\Delta t}^* = \left(e^{\frac{\Delta t}{2} B} e^{\frac{\Delta t}{2} A} \right) \left(e^{\frac{\Delta t}{2} A} e^{\frac{\Delta t}{2} B} \right) = e^{\frac{\Delta t}{2} B} e^{\Delta t A} e^{\frac{\Delta t}{2} B}$$

şeklinde “ $A - B - A$ ” ve “ $B - A - B$ ” şemasına sahip simetrik Marchuk [45] ya da daha çok Strang splitting [46] olarak bilinen yöntemler elde edilir. Yine Taylor serisi kullanılarak

$$\psi_{\Delta t}(u_0) = \left(\varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[A]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[B]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[A]} \right) (u_0) + O(\Delta t^3)$$

Strang splitting yönteminin ikinci mertebeden bir yaklaşım olduğu görülür [5, 44, 47]. Daha yüksek mertebeden splitting yöntemler daha hassas hesaplamalar

için kullanılır. Fakat daha çok hesaplama adımlarını kullanmayı gerektirir. Bu yöntemler genellikle kuantum dinamiğinde $e^{\Delta t(A+B)}$ operatörüne daha iyi bir yaklaşım için kullanılırlar [48]. Simetrik “ $B - A - B$ ” kalıbına sahip daha yüksek mertebeden splitting yöntemler

$$\Psi_{\Delta t} = \varphi_{d_1 \Delta t}^{[B]} \circ \varphi_{c_1 \Delta t}^{[A]} \circ \dots \circ \varphi_{d_s \Delta t}^{[B]} \circ \varphi_{c_s \Delta t}^{[A]} \varphi_{d_{s+1} \Delta t}^{[B]} \quad (2.5.10)$$

veya

$$\Psi_{\Delta t} = e^{d_{s+1} \Delta t B} e^{c_s \Delta t A} \dots e^{d_2 \Delta t B} e^{c_1 \Delta t A} e^{d_1 \Delta t B}$$

biçiminde yazılabilir. Burada s yöntemin adım sayısı, $c_1, c_2, \dots, c_s$ ve $d_1, d_2, \dots, d_{s+1}$ sayıları istenen yönteme göre belirlenen reel veya kompleks sayıdır. (2.5.10) ifadesinde $d_1 = d_{s+1} = 0$ alınırsa “ $B - A - B$ ” şemasından farklı hesaplama maliyetine sahip “ $A - B - A$ ” splitting şeması elde edilir.

2. mertebeden yüksek ve reel katsayılı splitting yöntemler negatif katsayılar içermektedir. Başka bir deyişle, bu yöntemler zamanda geriye doğru adım atmaya içermektedir. Bu durum, diferansiyel denklem bir yarı grup içinde tanımlandığında problem oluşturmaktadır [47]. Çünkü genel olarak yarı gruplar $(e^{\Delta t A}, e^{\Delta t B})$ negatif zaman adımları için iyi tanımlı değildir. Mertebesi 2 den büyük olan negatif katsayı içermeyen splitting yöntemler, düşük mertebeden splitting yöntemler kullanılarak ekstrapolasyon teknikleriyle elde edilebilirler. Yüksek mertebeden yöntemlerde karşılaşılan büyük ve/veya negatif katsayı problemini Castella vd. [49] çalışmalarında pozitif reel kısmı kompleks katsayılar elde ederek aşmışlardır. Hansen ve Ostermann [50] yarı gruplarda yakınsaklık mertebesi ikiden büyük olan splitting şemalarının olup olmadığına çözüm olarak kompleks katsayıya dayalı 3-14. mertebeden splitting şemaları geliştirdiler. Ayrıca, Strang splitting ve paralel splitting yöntemleri için Sheng [51] çalışmasında global bir hata analizi vermiştir. Operatörlerin sınırsız olduğu durumda Jahnke ve Lubich [52] Strang splitting yöntemi için hata sınırları elde etmişlerdir.

2.5.1.1 Lie-Trotter Splitting Şeması

Zamana göre birinci mertebeden olan Lie-Trotter splitting yöntemi ilk splitting yöntemlerinden biridir. Bu yöntem, (2.5.1) Cauchy probleminin çözümünü, iki alt problemin ardışık olarak çözümüne indirgeyen en basit splitting yöntemidir. Lie-Trotter şemasında, A operatörü ile verilen ilk alt problem, problemle birlikte verilen orijinal başlangıç şartı kullanılarak çözülür. Daha sonra, A operatörü ile elde edilen çözümler, B operatörü ile verilen ikinci alt problemin çözümü için başlangıç şartı olarak kullanılır ve ana problemin çözümü olarak verilir. Lie-Trotter yönteminin algoritması $t_0 = 0$ ve $t_N = T$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{du^*(t)}{dt} &= Au^*(t), \quad u^*(t_n) = u_n^0, \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \frac{du^{**}(t)}{dt} &= Bu^{**}(t), \quad u^{**}(t_n) = u^*(t_{n+1}), \quad t \in [t_n, t_{n+1}]\end{aligned}$$

biçiminde verilir. Burada, u_n^0 (2.5.1) ile verilen orijinal başlangıç şartı, Δt zaman adımı, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ ve $n = 0, 1, \dots, N-1$ dir. Böylece istenilen çözümler $u(t_{n+1}) = u^{**}(t_{n+1})$ ile elde edilir. Bu şema $(A - B)$ splitting şeması olarak adlandırılır. Lie-Trotter yönteminin adjointi olan $L_{\Delta t}^* = e^{\Delta t A} e^{\Delta t B}$ yöntemi de $(B - A)$ şemasını verir.

Daha önce bahsettiğimiz gibi (2.5.4)' de $e^{\Delta t(A+B)}$ ifadesinin yerine $e^{\Delta t B} e^{\Delta t A}$ ifadesini kullanmak splitting hatası (*splitting error*) olarak adlandırılan bir hataya neden olur. Şimdi bu hatayı Taylor serisi yardımıyla hesaplayalım.

Lie-Trotter Yönteminin Lokal Splitting Hatası

(2.5.4) ifadesini göz önüne alalım, E_n lokal kesme hatası olmak üzere,

$$u(t_{n+1}) = e^{\Delta t(A+B)} u(t_n) \approx e^{\Delta t B} e^{\Delta t A} u(t_n) + \Delta t E_n$$

olarak yazılabilir. Buradan E_n

$$E_n = \frac{1}{\Delta t} [e^{\Delta t(A+B)} - e^{\Delta t B} e^{\Delta t A}] u(t_n) \quad (2.5.11)$$

şeklinde elde edilir. E_n , üstel fonksiyonların Taylor seri açılımı kullanılarak aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}
e^{\Delta t(A+B)} &= I + \Delta t(A+B) + \frac{1}{2}\Delta t^2 [(A+B)(A+B)] + O(\Delta t^3) \\
&= I + \Delta t(A+B) + \frac{1}{2}\Delta t^2 [A^2 + AB + BA + B^2] + O(\Delta t^3), \\
e^{\Delta t A} &= I + \Delta t A + \frac{1}{2}\Delta t^2 A^2 + O(\Delta t^3) \\
e^{\Delta t B} &= I + \Delta t B + \frac{1}{2}\Delta t^2 B^2 + O(\Delta t^3) \\
e^{\Delta t B} e^{\Delta t A} &= I + \Delta t A + \Delta t B + \frac{1}{2}\Delta t^2 A^2 + \Delta t^2 BA + \frac{1}{2}\Delta t^2 B^2 + O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

hesaplanır ve (2.5.11)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{1}{\Delta t} [e^{\Delta t(A+B)} - e^{\Delta t B} e^{\Delta t A}] u(t_n) \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\Delta t^2}{2} (AB - BA) u(t_n) + O(\Delta t^3) \right] \\
&= \frac{\Delta t}{2} [A, B] u(t_n) + O(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada

$$[A, B] = AB - BA$$

iki operatörün komütatörü olarak tanımlanır ve köşeli parantezler de literatürde “*Lie bracket*” olarak bilinir [53]. Böylece, A ve B operatörleri değişmeli olmadıkları sürece (2.5.4) yaklaşımı birinci mertebeden bir yaklaşımdır. Başka bir ifadeyle, $e^{\Delta t(A+B)}$ ifadesinin Taylor seri açılımı, $e^{\Delta t B} e^{\Delta t A}$ ifadesinin seri açılımıyla birinci mertebeye kadar uyushmaktadır. Operatörlerin değişmeli (*commute*) oldukları durumda ise

$$e^{\Delta t B} e^{\Delta t A} = e^{\Delta t(B+A)} = e^C$$

olur. Yani, herhangi bir splitting hatası olmaz.

2.5.1.2 Strang Splitting Şeması

Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için kullanılan splitting yöntemlerinden biri de Strang splitting yöntemidir. Strang splitting

şemasında, A operatörü ile verilen ilk alt problem Lie-Trotter yönteminden farklı olarak, problemle verilen orijinal başlangıç şartı kullanılarak **yarım zaman** ($\Delta t/2$) adımı için çözülür. Daha sonra, A operatörü ile elde edilen çözümler, B operatörü ile verilen ikinci alt problemin çözümü için başlangıç şartı olarak kullanılıp **tam zaman** (Δt) adımı için çözülür. Son olarak, B operatörü ile tam zaman adımı için elde edilen çözümler, A operatörü ile verilen alt problemde başlangıç şartı olarak kullanılır ve tekrar **yarım zaman** ($\Delta t/2$) adımı için çözülerek sonuçlar alınır. Strang splitting ($S_{\Delta t} = e^{\frac{\Delta t}{2}A}e^{\Delta t B}e^{\frac{\Delta t}{2}A}$) yönteminin algoritması $t_0 = 0$ ve $t_N = T$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{du^*(t)}{dt} &= Au^*(t), \quad u^*(t_n) = u_n^0, & t \in \left[t_n, t_{n+\frac{1}{2}}\right] \\ \frac{du^{**}(t)}{dt} &= Bu^{**}(t), \quad u^{**}(t_n) = u^*(t_{n+\frac{1}{2}}), & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \frac{du^{***}(t)}{dt} &= Au^{***}(t), \quad u^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) = u^{**}(t_{n+1}), & t \in \left[t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}\right] \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

şeklinde verilir. Burada, $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ ve istenilen çözümler $u(t_{n+1}) = u^{***}(t_{n+1})$ ile elde edilir. Bu şema $(A - B - A)$ splitting şeması olarak adlandırılır. Strang splitting yönteminin adjointi olan $S_{\Delta t}^* = e^{\frac{\Delta t}{2}B}e^{\Delta t A}e^{\frac{\Delta t}{2}B}$ yöntemi benzer şekilde uygulandığında $(B - A - B)$ şemasını verir.

Şimdi Strang splitting yönteminin zaman adımına göre ikinci mertebeden bir yaklaşım olduğunu Taylor seri açılımıyla gösterelim.

Strang Splitting Yönteminin Lokal Splitting Hatası

(2.5.4) ifadesini göz önüne alalım, E_n lokal kesme hatası olmak üzere,

$$u(t_{n+1}) = e^{\Delta t(A+B)}u(t_n) \approx e^{\frac{\Delta t}{2}A}e^{\Delta t B}e^{\frac{\Delta t}{2}A}u(t_n) + \Delta t E_n$$

olarak yazılabilir. Buradan E_n ,

$$E_n = \frac{1}{\Delta t} \left[e^{\Delta t(A+B)} - e^{\frac{\Delta t}{2}A}e^{\Delta t B}e^{\frac{\Delta t}{2}A} \right] u(t_n) \quad (2.5.13)$$

şeklinde elde edilir. Üstel fonksiyonların Taylor seri açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
e^{\Delta t(A+B)} &= I + \Delta t(A+B) + \frac{\Delta t^2}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \\
&\quad \frac{\Delta t^3}{6}(A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3) + O(\Delta t^4) \\
e^{\frac{\Delta t}{2}A} &= I + \frac{\Delta t}{2}A + \frac{\Delta t^2}{8}A^2 + \frac{\Delta t^3}{48}A^3 + O(\Delta t^4) \\
e^{\Delta tB} &= I + \Delta tB + \frac{1}{2}\Delta t^2B^2 + \frac{\Delta t^3}{6}B^3 + O(\Delta t^4) \\
e^{\frac{\Delta t}{2}A}e^{\Delta tB}e^{\frac{\Delta t}{2}A} &= I + \Delta t(A+B) + \frac{\Delta t^2}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \\
&\quad \frac{\Delta t^3}{24}(4A^3 + 3BA^2 + 6B^2A + 6ABA + 6AB^2 + 3A^2B + 4B^3)
\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeler (2.5.13) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\Delta t^3}{24} (-A^2B + 2ABA - 4BAB + 2B^2A - BA^2 + 2AB^2) u(t_n) + O(\Delta t^4) \right] \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\Delta t^3}{24} (A(BA - AB) - (BA - AB)A - 2(B(AB - BA) - (AB - BA)B)) u(t_n) \right. \\
&\quad \left. + O(\Delta t^4) \right] \\
&= \frac{\Delta t^2}{24} ([A, [B, A]] - 2[B, [A, B]]) u(t_n) + O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, A ve B operatörleri değişmeli olmadıkları takdirde Strang splitting yöntemi ikinci mertebeden bir yöntemdir. (2.5.14) ifadesine de baktığımızda $e^{\Delta t(A+B)}$ ifadesinin seri yaklaşımı $e^{\frac{\Delta t}{2}A}e^{\Delta tB}e^{\frac{\Delta t}{2}A}$ ifadesinin seri yaklaşımıyla sadece Δt^2 'ye kadar uyuşmaktadır.

2.5.2 Ekstrapolasyon ile Elde Edilen Yöntemler (Ext4, Ext6)

Mertebesi 2 den büyük olan splitting yöntemlerde katsayıların negatif olma problemini aşmak için ekstrapolasyon teknikleri kullanılabilir. Ekstrapolasyon tekniklerinde, düşük mertebeden basit bir yöntem (temel yöntem) farklı Δt zaman adımları için uygulanır. Daha sonra elde edilen sonuçların uygun bir kombinasyonu

alınarak daha yüksek mertebeden yöntemlere ulaşılır [54]. Ekstrapolasyon yöntemleri, temel yöntemin lokal kesme hatası Δt ' nin çift kuvvetlerini içeren bir asimptotik genişlemeye sahip olduğu zaman başlangıç değer problemleri için etkisi yüksek şemalar oluşturmada güçlü bir araç olmaktadır [55]. Şimdi daha yüksek mertebeden bir yöntemin nasıl elde edildiğini açıklayalım. Bunun için temel yöntem olarak $2n$. mertebeden simetrik simplektik $R_{2n, \Delta t}$ şemasını göz önüne alalım. $\Psi_{\Delta t}$ bir nümerik yöntem olmak üzere

$$\Psi_{\Delta t} = e^{[\Delta t(A+B) + (\Delta t)^{2n+1} N(\Delta t)]} \quad (2.5.15)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$N(\Delta t) = \sum_{i=0}^{\infty} (\Delta t)^{2i} N_{2i} = N_0 + (\Delta t)^2 N_2 + (\Delta t)^4 N_4 + \dots$$

dır. $R_{2n, \Delta t}$ nin zaman simetrikliğinden dolayı $N(\Delta t)$ serisinde sadece çift kuvvetler bulunmaktadır. Eğer zaman adımı Δt , k alt adıma bölünürse o zaman temel yöntem k kez uygulanır, yani

$$(R_{2n, \Delta t/k})^k = R_{2n, \Delta t/k} \circ R_{2n, \Delta t/k} \circ \dots \circ R_{2n, \Delta t/k}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (2.5.15) ifadesi kullanılarak

$$(\Psi_{\Delta t/k})^k = e^{[\Delta t \left((A+B) + \left(\frac{\Delta t}{k} \right)^{2n} N\left(\frac{\Delta t}{k} \right) \right)]} \quad (2.5.16)$$

yazılabilir [56]. Böylece daha basit bir temel yöntem kullanılarak farklı k değerleri için çeşitli yaklaşımlar elde edilebilir.

Bu çalışmada daha yüksek mertebeden yöntemler elde etmek için temel yöntem olarak Strang splitting ($S_{\Delta t}$) yöntemi kullanıldı. Şimdi 4. mertebeden bir yöntem elde edelim, bu amaçla $n = 1$ alındığında

$$R_{2, \Delta t} = S_{\Delta t}$$

olacağı açıktır. Şimdi $n = 1$ için (2.5.16) ifadesinde $k = 1, 2$ alınırsa

$$\Psi_{\Delta t} = e^{[\Delta t(A+B) + (\Delta t)^3 N(\Delta t)]}$$

$$\begin{aligned}(R_{2, \Delta t/2})^2 &= R_{2, \Delta t/2} \circ R_{2, \Delta t/2} \\ (\Psi_{\Delta t/2})^2 &= e^{\left[\Delta t \left((A+B) + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 N\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\right)\right]}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler seriye açılıp düzenlenirse

$$\Psi_{\Delta t} = I + \Delta t (A + B) + (\Delta t)^3 N(\Delta t) + \dots$$

$$\Psi_{\Delta t} = I + \Delta t (A + B) + (\Delta t)^3 N_0 + (\Delta t)^5 N_2 + (\Delta t)^7 N_4 + \dots \quad (2.5.17)$$

ve

$$\begin{aligned}(\Psi_{\Delta t/2})^2 &= I + \Delta t \left((A + B) + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 N\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right) + \dots \\ (\Psi_{\Delta t/2})^2 &= I + \Delta t (A + B) + \frac{(\Delta t)^3}{4} N_0 + \frac{(\Delta t)^5}{16} N_2 + \frac{(\Delta t)^7}{64} N_4 + \dots \quad (2.5.18)\end{aligned}$$

olur. (2.5.17) ve (2.5.18) ifadeleri kullanılarak 4. mertebeden bir yöntem elde etmek için N_0 yok edilmelidir. Bunun için (2.5.18) denklemi -4 ile çarpılıp (2.5.17) ile toplanırsa

$$\begin{aligned}-3(I + \Delta t (A + B)) + O(\Delta t^5) &= -4(\Psi_{\Delta t/2})^2 + \Psi_{\Delta t} \\ I + \Delta t (A + B) + O(\Delta t^5) &= \frac{4}{3}(\Psi_{\Delta t/2})^2 - \frac{1}{3}\Psi_{\Delta t}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yaklaşım $S_{\Delta t} = e^{\frac{\Delta t}{2}A} e^{\Delta t B} e^{\frac{\Delta t}{2}A}$ Strang splitting yöntemine uygulanırsa $\varphi_{\Delta t}$ bir nümerik yöntem olmak üzere

$$\begin{aligned}\text{Ext4} &= \frac{4}{3} \left(S_{\frac{\Delta t}{2}} \right)^2 - \frac{1}{3} S_{\Delta t} \\ &= \frac{4}{3} \varphi_{\frac{\Delta t}{4}}^{[A]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[B]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[A]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[B]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{4}}^{[A]} - \frac{1}{3} \varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[A]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[B]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[A]}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi de 6. mertebeden bir yöntem elde etmek için (2.5.16) ifadesinde $n = 1$ için $k = 1, 2, 3$ alınırsa

$$\begin{aligned}\Psi_{\Delta t} &= e^{\left[\Delta t(A+B) + (\Delta t)^3 N(\Delta t)\right]} \\ (\Psi_{\Delta t/2})^2 &= e^{\left[\Delta t \left((A+B) + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 N\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\right)\right]} \\ (\Psi_{\Delta t/3})^3 &= e^{\left[\Delta t \left((A+B) + \left(\frac{\Delta t}{3}\right)^2 N\left(\frac{\Delta t}{3}\right)\right)\right]}\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeler yukarıdakine benzer şekilde seriye açılırsa

$$\Psi_{\Delta t} = I + \Delta t (A + B) + (\Delta t)^3 N_0 + (\Delta t)^5 N_2 + (\Delta t)^7 N_4 + \dots \quad (2.5.19)$$

$$(\Psi_{\Delta t/2})^2 = I + \Delta t (A + B) + \frac{(\Delta t)^3}{4} N_0 + \frac{(\Delta t)^5}{16} N_2 + \frac{(\Delta t)^7}{64} N_4 + \dots \quad (2.5.20)$$

$$(\Psi_{\Delta t/3})^3 = I + \Delta t (A + B) + \frac{(\Delta t)^3}{9} N_0 + \frac{(\Delta t)^5}{81} N_2 + \frac{(\Delta t)^7}{729} N_4 + \dots \quad (2.5.21)$$

olur. (2.5.19), (2.5.20) ve (2.5.21) ifadelerinden 6. mertebeden bir yöntem elde etmek için N_0 ve N_2 nin yok edilmesi gerekir. Bunun için (2.5.19) denklemi 5 ile, (2.5.20) denklemi -128 ile ve (2.5.21) denklemi de 243 ile çarpılıp toplanırsa

$$\begin{aligned} 5\Psi_{\Delta t} &= 5(I + \Delta t(A + B)) + 5(\Delta t)^3 N_0 + 5(\Delta t)^5 N_2 + 5(\Delta t)^7 N_4 + \dots \\ -128(\Psi_{\Delta t/2})^2 &= -128(I + \Delta t(A + B)) - 32(\Delta t)^3 N_0 - 8(\Delta t)^5 N_2 - 2(\Delta t)^7 N_4 - \dots \\ 243(\Psi_{\Delta t/3})^3 &= 243(I + \Delta t(A + B)) + 27(\Delta t)^3 N_0 + 3(\Delta t)^5 N_2 + \frac{1}{3}(\Delta t)^7 N_4 + \dots \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$I + \Delta t(A + B) + O(\Delta t^7) = \frac{81}{40} (\Psi_{\Delta t/3})^3 - \frac{16}{15} (\Psi_{\Delta t/2})^2 + \frac{1}{24} \Psi_{\Delta t}$$

elde edilir. Temel yöntem olarak Strang splitting yöntemi alınır

$$\begin{aligned} \text{Ext6} &= \frac{81}{40} \left(S_{\frac{\Delta t}{3}}\right)^3 - \frac{16}{15} \left(S_{\frac{\Delta t}{2}}\right)^2 + \frac{1}{24} S_{\Delta t} \\ &= \frac{81}{40} \varphi_{\frac{\Delta t}{6}}^{[A]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{3}}^{[B]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{3}}^{[A]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{3}}^{[B]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{3}}^{[A]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{3}}^{[B]} \varphi_{\frac{\Delta t}{6}}^{[A]} \\ &\quad - \frac{16}{15} \varphi_{\frac{\Delta t}{4}}^{[A]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[B]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[A]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[B]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{4}}^{[A]} + \frac{1}{24} \varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[A]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[B]} \circ \varphi_{\frac{\Delta t}{2}}^{[A]} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu yöntemler $-\frac{1}{3}$ ve $-\frac{16}{15}$ gibi negatif ağırlıklar içerdiklerinden dolayı ne tür problemler için kararlı olup olmadıkları tam olarak bilinmemektedir. Bununla birlikte, Ext4 yönteminin sonlu zaman aralıklarında lineer parabolik problemler için boyutlu splitting (*dimensional splitting*) ile kararlı olduğu Dia ve Schatzman [57] tarafından gösterilmiştir [5].

Splitting yöntemlerin bazı avantajları aşağıdaki gibi sıralanabilir [58]:

- Genelde uygulanması kolay olan yöntemlerdir.
- Genel olarak açık (*explicit*) yöntemlerdir.
- Bilgisayarda depolanma gerekliliği bakımından oldukça uygun yöntemlerdir. Algoritmaları ardışıktır ve orta aşamadaki çözümler çözüm vektörlerinde depolanır. Bu özellik, önceden yarı-diskretizasyonu (*semi-discretized*) yapılmış kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde oldukça önemlidir.
- Literatürde birçok farklı yapılaraya uyarlanmış çok sayıda özel yöntemler bulunabilir.
- Tam çözümün yapısal özelliklerini korurlar. Böylece, özellikle uzun zaman aralıkları göz önüne alındığında, nümerik şemalarda diğer standart integratörlere göre üstünlük sağlarlar. Bu yapısal özelliklere örnek olarak, hacim korunumu, zaman simetrikliği ve simplektiklik olarak verilebilir. Bu açıdan splitting yöntemler geometrik nümerik integratörlerin önemli bir sınıfını oluştururlar.

Operatör splitting yöntemlerinin avantajlarının yanı sıra yüksek mertebeden yöntemler elde edilirken negatif katsayılarla karşılaşılması durumu dezavantajı olarak söylenebilir.

Operatör splitting yöntemleri literatürde kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde oldukça sık kullanılmaktadır. Jain ve Raja [59] Burger's denklemini bir ve iki boyutlu uzaylarda çözmek için splitting up tekniğini kullandılar ve Reynold sayılarının ara değerleri için bu tekniğin tatmin edici nümerik sonuçlar verdiğini buldular. Jain vd. [60] çalışmalarında Burger's denklemini üç zaman adımli split tekniğini kullanarak üç alt probleme split edip nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Burger's ve modifiye edilmiş Burger's denklemleri, Saka ve Dağ [61] tarafından konuma ve zamana göre split edilip kuintik B-spline kollokasyon yöntemiyle çözülmüştür. Bu çalışmaların yanı sıra

Bao vd. [62] Planck sabitinin küçük olduğu durumlarda yarı klasik rejimde lineer Schrödinger denklemleri için time-splitting spectral yaklaşımlarını incelediler. Shen ve Wang [63] zamana bağlı Gross-Pitaevskii denklemleri için Strang splitting Laguerre-Hermite/Hermite kollokasyon metodları için güçlü bir hata analizi yapmayı amaçladılar. Thalhammer [64] çalışmasında spectral ve splitting yöntemlere dayanan yüksek doğruluklu diskretizasyonların kararlılık ve hata analizlerini sunmayı amaçlamıştır. Lubich [65] lineer olmayan Schrödinger denklemleri için Strang tipi split integratörlerinin hata analizini verdi. Cristov ve Marinova [66] her bir kesirli zaman adımında sistemin bir bütün olarak kalması için vektör operatörlerinin split edilmesini ve yapay bir zamanın eklenmesini öne sürdüler. Ayrıca son zamanlarda, Holden vd. [67] $u_t = Au + uu_x$ tipinde denklemler için operatör splitting yaklaşımına yeni bir analitik yaklaşım sağladılar. Holden vd. [68] bir başka çalışmalarında $u_t = Au + B(u)$ tipinde, burada A lineer ve B ise kuadratik operatördür, denklemler için yeni bir analitik yaklaşım sundular. Holden vd. [69] bir diğer çalışmalarında ise genelleştirilmiş KdV denklemleri için Godunov ve Strang splitting yöntemlerini uygulayıp her iki yönteminde yakınsaklık özelliklerini araştırdılar. Zhang vd. [70] çalışmalarında ikinci mertebeden operatör splitting yöntemini “good” Boussinesq denklemlerine uygulayarak lineer olmayan kararlılık ve yakınsaklık analizlerini uyguladılar. Lee ve Lee [71] çalışmalarında lineer olmayan bir kaynak terimi içeren Allen–Cahn tipi denklemler için basit ve kararlı ikinci mertebeden operatör splitting yöntemini önerdiler. Jain ve Holla [72] bir boyutlu Burger ve iki boyutlu coupled Burger denklemlerini split ederek çözmek için kübik spline tekniğine dayalı yeni algoritmalar sundular. Bhardwaj ve Shankar [73] çalışmalarında kuintik spline tekniğini ve split yöntemini kullanarak RLW denklemlerini çözmek için yeni bir fark yöntemi geliştirdiler. Dehghan ve Abbaszadeh [74] radyal baz fonksiyonlar kullanarak lokal kollokasyon metoduyla konum splitting tekniğini birleştirerek bu yöntemin kabul

edilebilir olduğunu bir takım örnekler üzerinde gösterdiler. Bahar ve Gürarslan [75] çalışmalarında Lie-Trotter ve Strang splitting yöntemlerinin adveksiyon-difüzyon denkleminde etkilerini incelediler. Feng vd. [76] operatör splitting yoluyla iki ve üç boyutlu parabolik denklemleri bir boyutlu parabolik denklemler dizisine split ederek sonlu eleman yöntemiyle çözümleridir. Kao vd. [77] üçüncü mertebeden türev içeren modifiye Buckley–Leverett denklemlerinin nümerik çözümleri için hızlı ve açık bir operatör splitting yöntemi önermişlerdir. Seydaoğlu ve Blanes [78] otonom olmayan ayrılabilir parabolik denklemler için yüksek mertebeden kompleks katsayılar içeren splitting yöntemlerini göz önüne aldılar. Bu çalışmaya ek olarak, Seydaoglu vd. [41] periyodik, Dirichlet, Neumann ve Robin sınır şartları ile verilen bir boyutlu Burgers’ denkleminin nümerik çözümleri için yüksek mertebeden splitting yöntemlerini kullandılar.

Bu tezde ele alınan kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri elde etmek için Strang splitting ($S_{\Delta t}$) yöntemi, bu yöntemin Richardson ekstrapolasyon tekniği uygulanmasıyla elde edilen 4. mertebeden (Ext4) ve 6. mertebeden (Ext6) yöntemleri kullanıldı. Tezde ele alınan ana denklemler biri lineer ve diğeri lineer olmayan iki alt probleme split edildi. Bu alt problemleri ardışık olarak çözmek için her bir alt problem için kübik B-spline fonksiyonlar ve türevleri kullanılarak kollokasyon yöntemi ile nümerik şemalar oluşturuldu. Daha sonra, ana problemin çözümüne ulaşmak için, önce lineer alt problemler orijinal başlangıç şartı kullanılarak çözüldü ve elde edilen çözümler ardışık olarak sonraki problemlerin çözümü için başlangıç şartı olarak kullanıldı.

3. BAZI LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN OPERATÖR SPLITTING B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMEN ÇÖZÜMLERİ

3.1 Burgers' Denkleminin Operatör Splitting B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Çözümleri

Lineer olmayan Burgers denklemi,

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad a < x < b, \quad t \geq t_0 \quad (3.1.1)$$

formunda olup burada $u = u(x, t)$ yeterince diferansiyellenebilen x konum, t zaman değişkenlerine bağlı bir fonksiyon ve $\nu > 0$ kinematik viskozite katsayısıdır. Burgers denklemi ilk olarak, iki temel denge çözümü türeten Bateman [79] tarafından akışkanların hareketini incelerken ortaya atılmıştır. Bu denklem konveksiyon ve difüzyon arasındaki denge kapışmasını ifade eden en basit matematiksel model olarak bilinir. Daha sonra (3.1.1) denklemi Burgers' [80, 81] tarafından çalışıldı ve bu çalışmadan sonra Burgers' denklemi olarak anıldı. Bu denklem mümkün olan en basit yolla hem lineer olmamayı hem de yayılmayı birlikte içerir ve ısı denkleminin lineer olmayan bir türü olarak düşünülebilir. Eğer (3.1.1) denkleminde $\nu = 0$ alınırsa, şok dalgalarını ifade eden ve fizikte birçok önemli uygulamaya sahip viskoz olmayan Burgers denklemi elde edilir [82]. Burgers' denkleminin birçok araştırmacı tarafından ilgi görmesinin nedenlerinden bazıları, en basit formda uu_x lineer olmayan adveksiyon terimini içermesi, fiziksel dalga olaylarını modelleyen νu_{xx} yayılma terimini bulundurması, ν kinematik viskozite katsayısının küçük değerleri için şok dalga özelliğini sergilemesi ve

nümerik olarak çözüldükten sonra Cole [83] tarafından elde edilmiş olan tam çözümüyle karşılaştırma yapılabilmesidir [84]. Burgers' denklemi matematiksel fizikte oldukça yaygın kullanıma sahip olan önemli bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bilim insanlarının lineer olmayan bilime olan ilgisinin artması bu denklemi bilim insanlarının gözdesi haline getirmektedir. Çünkü bu denklem, birçok gaz dinamiği, ısı iletimi, trafik akışı ve şok dalga modellerini oldukça iyi bir şekilde tanımlamaktadır [85]. Geçmiş yıllarda ve yakın zamanlarda Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek hem analitik çözümüyle hem de nümerik çözümleriyle karşılaştırma yapmak için birçok matematiksel teknikler ve yöntemler geliştirildi. Birçok çalışmanın arasından örnek olarak, Haq vd. [86] çeşitli radyal baz fonksiyonlarını kullanarak meshless method of lines (MMOL) ile denklemi çözdüler. Dağ vd. [87] kübik B-spline bazlarla Rubin ve Graves tarafından sunulan bir lineerleştirme tekniği uygulayarak kollokasyon sonlu eleman yöntemini uyguladılar. Ali vd. [88] kübik kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle ve Kutluay vd. [89] üç test problemini ele alarak en küçük kareler kuadratik B-spline sonlu eleman yöntemiyle çözümleri elde ettiler. Mittal ve Jain [90] SSP-RK43 veya SSP-RK54 şema tekniklerini kullanarak modifiye edilmiş kübik B-spline kollokasyon metoduyla denklemi çözerken, Arora ve Singh [91] modifiye edilmiş kübik B-spline diferansiyel kuadratur (MCB-DQM) yöntemiyle çözüm buldular. Zhu ve Wang [92] kübik B-spline kuazi-interpolasyon yöntemini kullanarak ve Dağ vd. [93] hem zaman hem de konum açısından split edilen Burgers' denklemini konum split için kuadratik B-spline, zaman split için ise kübik B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak çözüm yoluna gittiler. Bunlardan başka, Dağ ve Korkmaz [94] zaman açısından dördüncü mertebe Runge-Kutta yöntemiyle kübik B-spline diferansiyel kuadratur yöntemini kullanırken, Ramadan vd. [95] sonlu elemanlar üzerinde septik B-spline' ların kollokasyonuna dayalı bir yöntemi uygulayarak çözüm aradılar. Jiwari [96] düzgün dağılımlı Haar dalgacıkları ile kuazi

lineerleştirme işlemleriyle çözümler buldular. Ganaie ve Kukreja [97] kübik hermit kollokasyon (CHCM) yöntemiyle çözüm ararken, Kutluay ve Esen [98] kuadratik B-spline sonlu elemanlarla lumped Galerkin yöntemini kullanarak Burgers' denkleminin çözümlerini elde ettiler. Kutluay vd. [99] matematiksel modellemede sıklıkla ortaya çıkan bir boyutlu Burgers' denkleminin sonlu fark çözümlerini standart açık yonteme dayalı olarak sundular. Asai [100] zaman açısından Taylor seri açılımını kullanarak, lineer veya lineer olmayan cebirsel denklem sistemlerinin çözümüne gerek duymadan bir boyutlu Burgers' denkleminin çözümüne adım adım ilerlemişlerdir. Gülsu [101] başlangıç ve sınır şartları ile verilen Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için klasik açık sonlu fark Pade yaklaşımını uygulamıştır. Gülsu ve Özış [102] çalışmalarında Burgers' denklemine klasik sonlu fark Taylor yaklaşımını uygulayarak nümerik sonuçlar elde etmişlerdir. Xu vd. [103] kübik spline kuazi interpolant ve çok düğümlü yüksek mertebeden açılıma dayalı yeni bir nümerik şema ile Burgers' denklemine çözüm önerdiler. Xie vd. [104] Hopf-Cole dönüşümünü ve yeniden üretici çekirdek fonksiyonunu (RKF) kullanarak Burgers' denkleminin çözümü için nümerik bir yöntem sundular.

Tezin bu bölümünde, (3.1.1) ile verilen Burgers' denklemi

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

$$u_{xx}(a, t) = u_{xx}(b, t) = 0$$

sınır şartları ile üç farklı başlangıç şartı için ele alındı ve uygulanması kolay ve etkin bir teknik olan splitting tekniği sonlu eleman kollokasyon yöntemiyle birleştirilerek denklemin nümerik çözümleri elde edildi. Bunun için (3.1.1) denklemi zamana göre split edilip daha basit bir yapıya sahip olan, biri konveksiyon terimini ve diğeri ise difüzyon terimini içeren iki alt probleme dönüştürüldü. Daha sonra her bir alt problem kübik B-spline bazlar kullanılarak kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle çözüldü. Burgers' (3.1.1) denklemi zamana göre split edilirse

$$u_t - \nu u_{xx} = 0, \quad (3.1.2)$$

$$u_t + uu_x = 0 \quad (3.1.3)$$

biçiminde iki denklem elde edilir. Şimdi (3.1.2) ve (3.1.3) denklemlerine kübik B-spline kollokasyon yöntemini uygulayalım. Bunun için u yerine, $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde (2.4.3) ile verilen U_N yaklaşımı kullanılır ve x_m düğüm noktalarında (2.4.4) ile verilen U_N, U'_N ve U''_N noktasal değerleri (3.1.2) ve (3.1.3) denklemlerinde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki gibi birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemleri

$$\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + 4\overset{\circ}{\delta}_m + \overset{\circ}{\delta}_{m+1} - \frac{6\nu}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + 4\overset{\circ}{\delta}_m + \overset{\circ}{\delta}_{m+1} + \frac{3z_m}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) = 0 \quad (3.1.5)$$

elde edilir. Burada “ $\circ$ ” sembolü zamana göre birinci mertebeden türevi ifade etmektedir ve

$$z_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}$$

dir. (3.1.4) ve (3.1.5) denklemlerinde δ_m parametreleri yerine $(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n)/2$ Crank-Nicolson, $\overset{\circ}{\delta}_m$ parametreleri yerine de $(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)/\Delta t$ zamana göre ileri fark yaklaşımları yazılırsa sırasıyla

$$k_1\delta_{m-1}^{n+1} + k_2\delta_m^{n+1} + k_1\delta_{m+1}^{n+1} = k_3\delta_{m-1}^n + k_4\delta_m^n + k_3\delta_{m+1}^n, \quad m = 0(1)N \quad (3.1.6)$$

$$k_5\delta_{m-1}^{n+1} + k_6\delta_m^{n+1} + k_7\delta_{m+1}^{n+1} = k_7\delta_{m-1}^n + k_6\delta_m^n + k_5\delta_{m+1}^n, \quad m = 0(1)N \quad (3.1.7)$$

denklem sistemleri elde edilir. Burada

$$k_1 = 1 - \frac{3\nu\Delta t}{h^2}, \quad k_2 = 4 + \frac{6\nu\Delta t}{h^2}, \quad k_3 = 1 + \frac{3\nu\Delta t}{h^2}, \quad k_4 = 4 - \frac{6\nu\Delta t}{h^2},$$

$$k_5 = 1 - \frac{3z_m\Delta t}{2h}, \quad k_6 = 4, \quad k_7 = 1 + \frac{3z_m\Delta t}{2h}$$

dir. (3.1.6) ve (3.1.7) denklem sistemleri $(N+1)$ tane denklem ve $(N+3)$ tane de bilinmeyen zamana bağlı parametrelerden meydana gelir. Bu sistemlere sınır şartlarını uygulayıp çözülebilir hale getirmek için δ_{-1} ve δ_{N+1} parametrelerinin yok edilmesi gerekir. Bu amaçla, (3.1.6) sistemi için $U_N(a, t) = U_N(b, t) = 0$,

(3.1.7) sistemi için ise $U_N''(a, t) = U_N''(b, t) = 0$ sınır şartlarının kullanılmasıyla sırasıyla,

$$\delta_{-1} = -4\delta_0 - \delta_1, \quad \delta_{N+1} = -4\delta_N - \delta_{N-1} \quad (3.1.8)$$

ve

$$\delta_{-1} = 2\delta_0 - \delta_1, \quad \delta_{N+1} = 2\delta_N - \delta_{N-1} \quad (3.1.9)$$

bağıntıları elde edilir. (3.1.8) ve (3.1.9) bağıntıları sırasıyla (3.1.6) ve (3.1.7) denklem sistemlerinde kullanılırsa $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu denklem sistemleri bulunur. Daha sonra bu sistemler (2.5.12) ile verilen Strang splitting algoritmasına uygun olarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned} k_1\delta_{m-1}^*(t_{n+\frac{1}{2}}) + k_2\delta_m^*(t_{n+\frac{1}{2}}) + k_1\delta_{m+1}^*(t_{n+\frac{1}{2}}) &= k_3\delta_{m-1}^*(t_n) + k_4\delta_m^*(t_n) + k_3\delta_{m+1}^*(t_n), \\ \delta_m^*(t_n) &= \delta_m^0, \quad t \in [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}], \\ k_5\delta_{m-1}^{**}(t_{n+1}) + k_6\delta_m^{**}(t_{n+1}) + k_7\delta_{m+1}^{**}(t_{n+1}) &= k_7\delta_{m-1}^{**}(t_n) + k_6\delta_m^{**}(t_n) + k_5\delta_{m+1}^{**}(t_n), \\ \delta_m^{**}(t_n) &= \delta_m^*(t_{n+\frac{1}{2}}), \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \\ k_1\delta_{m-1}^{***}(t_{n+1}) + k_2\delta_m^{***}(t_{n+1}) + k_1\delta_{m+1}^{***}(t_{n+1}) &= k_3\delta_{m-1}^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) + k_4\delta_m^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) + k_3\delta_{m+1}^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}), \\ \delta_m^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) &= \delta_m^{**}(t_{n+1}), \quad t \in [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

formunda gösterilen şemalar elde edilir. Burada $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ ve bilinmeyen δ parametreleri $\delta(t_{n+1}) = \delta^{***}(t_{n+1})$ ile hesaplanır.

Bu Strang algoritmasının uygulanabilmesi için öncelikle bir δ_m^0 başlangıç vektörüne ihtiyaç vardır. Bu başlangıç vektörü, problemle birlikte verilen

$$u(x, 0) = f(x)$$

başlangıç şartı kullanılarak

$$u(x_m, 0) = f(x_m) = U_N(x_m, 0), \quad m = 0(1)N$$

$$u_m = \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0$$

$$u_0 = \delta_{-1}^0 + 4\delta_0^0 + \delta_1^0$$

$$u_1 = \delta_0^0 + 4\delta_1^0 + \delta_2^0$$

$$\vdots$$

$$u_N = \delta_{N-1}^0 + 4\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0$$

şeklinde yine $(N+1)$ tane denklem ve $(N+3)$ tane bilinmeyen içeren bu sistemin çözülmesiyle elde edilir. Bu sistemin çözülebilmesi için δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri $U_N''(a, 0) = U_N''(b, 0) = 0$ sınır şartlarının uygulanmasıyla yok edilir. Böylece

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ & & \ddots \\ & 1 & 4 & 1 \\ & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}$$

$(N+1) \times (N+1)$ boyutlu üçlü bant matris sistemi elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle δ_m^0 vektörü bulunur. Bu başlangıç parametreleri yukarıda (3.1.10) ile verilen Strang splitting şemasında kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iterasyonla bulunur. (3.1.10) sistemindeki lineer olmayan terim için her bir zaman adımında

$$\delta_m = \delta_m^n + (\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) / 2 \quad (3.1.11)$$

ile tanımlanan iterasyon formülü 3-5 kez uygulanarak yaklaşık çözümler iyileştirildi.

3.1.1 Kararlılık Analizi

Bu kısımda, (3.1.6) ve (3.1.7) sistemlerinin kararlılığı von-Neumann [105] yöntemiyle incelendi. Bu yöntemde $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ olarak alınır, burada $i =$

$\sqrt{-1}$, β mod sayısı, ξ büyütme faktörü ve h konum adım uzunluğudur. $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ ifadesi yarım zaman adımı için (3.1.6) denkleminde kullanılırsa, ρ_A (3.1.6) sisteminin kararlılık durumunu temsil eden bir gösterim olmak üzere,

$$(k_1 e^{-i\beta h} + k_2 + k_1 e^{i\beta h}) \xi^{n+1/2} = \xi^n (k_3 e^{-i\beta h} + k_4 + k_3 e^{i\beta h})$$

$$\rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) = \frac{2k_3 \cos \beta h + k_4}{2k_1 \cos \beta h + k_2}$$

$$k_1 = 1 - \frac{3\nu\Delta t}{h^2}, k_2 = 4 + \frac{6\nu\Delta t}{h^2}, k_3 = 1 + \frac{3\nu\Delta t}{h^2}, k_4 = 4 - \frac{6\nu\Delta t}{h^2}$$

ifadesi elde edilir. k_1, k_2, k_3 ve k_4 değerleri yerine yazılırsa

$$\rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}$$

$$A_1 = 2 \cos \beta h + 4, A_2 = \frac{6\nu\Delta t}{h^2} (1 - \cos \beta h)$$

olur. Burada $\left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \leq 1$ koşulunun sağlanması için paydanın paydan büyük olması gerekir yani

$$A_1 + A_2 \geq A_1 - A_2 \Rightarrow A_2 \geq 0$$

şartına ulaşılır. $A_2 = \frac{6\nu\Delta t}{h^2} (1 - \cos \beta h) \geq 0$ olduğundan $\left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \leq 1$ sağlanır.

(3.1.7) sistemine von-Neumann yönteminin uygulanması için önce sistemin lineerleştirilmesi gerekir. Bunun için lineer olmayan uu_x teriminde, u yerine z_m gibi bir lokal sabit alındı. Daha sonra, $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ ifadesi (3.1.7) sisteminde kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa, ρ_B (3.1.7) sisteminin kararlılık durumunu temsil eden bir gösterim olmak üzere,

$$\rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) = \frac{k_7 e^{-i\beta h} + k_6 + k_5 e^{i\beta h}}{k_5 e^{-i\beta h} + k_6 + k_7 e^{i\beta h}}$$

$$k_5 = 1 - \frac{3z_m\Delta t}{2h}, k_6 = 4, k_7 = 1 + \frac{3z_m\Delta t}{2h}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) = \frac{X - iY}{X + iY}$$

$$X = k_6 + (k_5 + k_7) \cos \beta h, \quad Y = (k_7 - k_5) i \sin \beta h$$

olur. Böylece

$$\left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{X^2 + Y^2}} \leq 1$$

elde edilir. O halde Strang splitting yöntemi ile elde edilen şema

$$\rho(\xi) = \rho_A^{n+1/2} \rho_B^{n+1} \rho_A^{n+1/2}$$

$$|\rho(\xi)| \leq \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \leq 1$$

olduğundan şartsız kararlıdır.

3.1.2 Model Problemler ve Nümerik Çözümleri

Burgers' denkleminin nümerik çözümleri literatürde oldukça sık karşılaşılan üç tane test problemi için elde edildi. Uygulanan nümerik yöntemin etkinliğini göstermek için test problemlerinin tam ve nümerik çözümleri arasındaki fark aşağıdaki gibi verilen

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N \left| (u_j^{tam} - U_j^{nümerik})^2 \right|}, \quad L_\infty = \max_j |u_j^{tam} - U_j^{nümerik}| \quad \text{ve}$$

$$\|e\|_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{|u_j^{tam} - U_j^{nümerik}|}{|u_j^{tam}|}.$$

hata normları ile incelendi.

Problem 1: İlk problem olarak, Burgers' denklemini aşağıdaki başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ve sınır koşullarıyla

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

ele alındı. Bu problemin tam çözümü sonsuz bir seri toplamı olarak D. Cole [83] tarafından

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_j^\infty j a_j \sin(j\pi x) \exp(-j^2\pi^2\nu t)}{a_0 + \sum_j^\infty a_j \cos(j\pi x) \exp(-j^2\pi^2\nu t)} \quad (3.1.12)$$

Tablo 3.1: Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ değerleri ve farklı h adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.

h	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	2.134684	3.120196	2.129718	3.113333	2.116879	3.095841
0.05	0.537097	0.782520	0.532055	0.775620	0.518991	0.758004
0.025	0.134897	0.196568	0.129841	0.189660	0.116749	0.172014
0.0125	0.034241	0.049987	0.029187	0.043083	0.016230	0.025523
0.00625	0.009076	0.013366	0.004074	0.006479	0.001380	0.002327
	$\ e_1\ $		$\ e_1\ $		$\ e_1\ $	
0.1	0.007253		0.007235		0.007189	
0.05	0.001920		0.001901		0.001851	
0.025	0.000495		0.000475		0.000424	
0.0125	0.000127		0.000107		0.000055	
0.00625	0.000034		0.000014		0.000006	

şeklinde verilmiştir. Burada a_0 ve a_j aşağıdaki gibi verilen

$$a_0 = \int_0^1 e^{-(2\pi\nu)^{-1}(1-\cos(\pi x))} dx,$$

$$a_j = 2 \int_0^1 e^{-(2\pi\nu)^{-1}(1-\cos(\pi x))} \cos(j\pi x) dx, \quad j = 1, 2, \dots$$

Fourier katsayılarıdır. Tablo 3.1' de Problem 1'in $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ için farklı h adım uzunlukları alınarak $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki L_2 , L_∞ ve $\|e_1\|$ hata normlarının karşılaştırılması verildi. Tablodan görüldüğü gibi h konum adım uzunluğu küçüldükçe her üç hata normunun da küçüldüğü açıktır. Ayrıca yöntemler kendi arasında karşılaştırıldığında Ext4 yönteminin $S_{\Delta t}$ yöntemine göre, Ext6 yönteminin de Ext4 yöntemine göre iyi sonuçlar verdiği tablodan anlaşılmaktadır. Viskozitenin $\nu = 0.1$ değeri için $\Delta t = 0.001$ ve farklı h değerlerine karşılık üç yöntemin hata normları Tablo 3.2' de verildi. Tablodan h konum adım uzunluğu küçüldükçe her bir yöntemin hata normlarının da kayda değer ölçüde küçüldüğü görülmektedir. Bunun yanında beklendiği gibi aynı tabloda Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $S_{\Delta t}$ yöntemine göre daha düşük hata normları verdiği açıktır. Tablo 3.3' de ise $h = 0.0125$, $\nu = 1$ için farklı Δt adım uzunlukları alınarak

Tablo 3.2: Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.1$ değerleri ve farklı h adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.

h	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	0.831953	1.721309	0.783795	1.620067	0.748832	1.544715
0.05	0.209573	0.442029	0.163712	0.331611	0.136602	0.253919
0.025	0.052625	0.111730	0.033702	0.063922	0.029598	0.046891
0.0125	0.003506	0.007491	0.003239	0.006872	0.009229	0.017607
0.00625	0.009076	0.013366	0.004074	0.006479	0.002121	0.004025
	$\ e_1\ $		$\ e_1\ $		$\ e_1\ $	
0.1	0.000921		0.000886		0.000871	
0.05	0.000262		0.000240		0.000233	
0.025	0.000070		0.000059		0.000058	
0.0125	0.000018		0.000018		0.000017	
0.00625	0.000005		0.000004		0.000004	

Tablo 3.3: Problem 1' in $h = 0.0125$, $\nu = 1$ değerleri ve farklı Δt adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.

Δt	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.02	0.328066	0.565870	0.076813	0.138378	0.044802	0.067345
0.01	0.105318	0.174878	0.022570	0.039726	0.016821	0.026979
0.005	0.050848	0.078863	0.018128	0.030116	0.011847	0.019043
0.0025	0.037773	0.055991	0.012521	0.020775	0.009035	0.015476
	$\ e_1\ $		$\ e_1\ $		$\ e_1\ $	
0.02	0.001104		0.000313		0.000165	
0.01	0.000368		0.000095		0.000056	
0.005	0.000185		0.000059		0.000049	
0.0025	0.000140		0.000040		0.000037	

Tablo 3.4: Problem 1' in $h = 0.0125$, $\nu = 0.1$ değerleri ve farklı Δt adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.

Δt	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.02	0.107490	0.233567	0.015087	0.033529	0.013298	0.028403
0.01	0.035936	0.078896	0.013537	0.029123	0.011394	0.023341
0.005	0.018534	0.040352	0.013196	0.028122	0.010541	0.019365
0.0025	0.014429	0.030952	0.012944	0.027435	0.007382	0.010817
	$\ e_1\ $		$\ e_1\ $		$\ e_1\ $	
0.02	0.000158		0.000021		0.000018	
0.01	0.000051		0.000019		0.000017	
0.005	0.000025		0.000018		0.000016	
0.0025	0.000019		0.000018		0.000015	

Tablo 3.5: Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $h = 0.0125$ değerleri için $t = 0.1$ zamanındaki $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçlarının karşılaştırılması.

x	$S_{\Delta t}$	Ext4	Ext6	Tam
0.1	0.10953	0.10953	0.10954	0.10954
0.2	0.20977	0.20978	0.20979	0.20979
0.3	0.29187	0.29187	0.29189	0.29190
0.4	0.34788	0.34789	0.34791	0.34792
0.5	0.37153	0.37154	0.37155	0.37158
0.6	0.35900	0.35900	0.35902	0.35905
0.7	0.30986	0.30986	0.30988	0.30991
0.8	0.22778	0.22779	0.22780	0.22782
0.9	0.12067	0.12067	0.12068	0.12069

Tablo 3.6: Problem 1' in $S_{\Delta t}$ yöntemi ile $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ için noktasal değerleri ve farklı konum uzunlukları için $t = 0.1$ ' deki hata normlarının karşılaştırılması.

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	Tam
0.1	0.10889	0.10938	0.10950	0.10953	0.10954	0.10954
0.2	0.20849	0.20947	0.20971	0.20977	0.20979	0.20979
0.3	0.28995	0.29141	0.29178	0.29187	0.29189	0.29190
0.4	0.34540	0.34729	0.34777	0.34788	0.34791	0.34792
0.5	0.36862	0.37084	0.37139	0.37153	0.37157	0.37158
0.6	0.35593	0.35826	0.35885	0.35900	0.35903	0.35905
0.7	0.30699	0.30917	0.30972	0.30986	0.30989	0.30991
0.8	0.22554	0.22724	0.22767	0.22778	0.22781	0.22782
0.9	0.11943	0.12037	0.12061	0.12067	0.12068	0.12069
$S_{\Delta t} - L_2 \times 10^3$	2.134684	0.537097	0.134897	0.034241	0.009076	
$S_{\Delta t} - L_\infty \times 10^3$	3.120196	0.782520	0.196568	0.049987	0.013366	
Ext4 - $L_2 \times 10^3$	2.129718	0.532055	0.129841	0.029187	0.004074	
Ext4 - $L_\infty \times 10^3$	3.113333	0.775620	0.189660	0.043083	0.006479	
Ext6 - $L_2 \times 10^3$	2.116879	0.518991	0.116749	0.016230	0.001380	
Ext6 - $L_\infty \times 10^3$	3.095841	0.758004	0.172014	0.025523	0.002327	
$\Delta t = 0.001$						
$\ e\ _1(S_{\Delta t})$	0.007253	0.001920	0.000495	0.000127	0.000034	
$\ e\ _1(\text{Ext4})$	0.007235	0.001901	0.000475	0.000107	0.000014	
$\ e\ _1(\text{Ext6})$	0.007189	0.001851	0.000424	0.000055	0.000006	
$\Delta t = 0.00001$						
$\ e\ _1[87]$	0.00734	0.00095	0.00014	0.00003	0.00001	
$\ e\ _1[89]$	0.012165	0.006941	0.003651	0.001858	0.000928	
$\ e\ _1[92]$	0.01025	0.00383	0.00082	0.00027	—	
$\ e\ _1[99]\text{-exp.}$	0.007571	0.002025	0.000555	0.000177	—	
$\ e\ _1[99]\text{exact-exp.}$	0.007278	0.001885	0.000448	0.000077	—	

$S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki L_2 , L_∞ ve $\|e_1\|$ hata normlarının karşılaştırılması verildi. Tablo 3.3' e baktığımızda Δt küçüldükçe $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile elde edilen hata normlarının küçüldüğü, ayrıca Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle hesaplanan hata normlarının $S_{\Delta t}$ yönteminden daha iyi olduğu görülmektedir. Tablo 3.4' de $h = 0.0125$, $\nu = 0.1$ ve farklı Δt değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile bulunan hata normları verildi. Bu tabloya da bakıldığında Δt zaman adım uzunluğu küçüldükçe hataların düştüğü ve Ext4' ün $S_{\Delta t}$ ' den ve Ext6' nın da Ext4' den daha iyi hata normları verdiği görülmektedir. Ayrıca Tablo 3.5' de $\Delta t = 0.001$, $h = 0.0125$ ve $\nu = 1$ değerleri için $t = 0.1$ de $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle hesaplanan bazı noktasal değerler verildi. Tablodan noktasal değerlerin birbiriyle ve tam çözüm ile uyumlu olduğu ve Ext6 yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçların tam çözüme daha yakın olduğu görülmektedir. Tablo 3.6' da Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ değerleri ve farklı konum uzunlukları için $t = 0.1$ zamanındaki nümerik çözümünün tam

Tablo 3.7: Problem 1' in $S_{\Delta t}$ yöntemi ile $\Delta t = 0.001$, $h = 0.0125$, $\nu = 1, 0.1$ ve 0.01 değerleri için farklı t zamanlarındaki sonuçların karşılaştırılması.

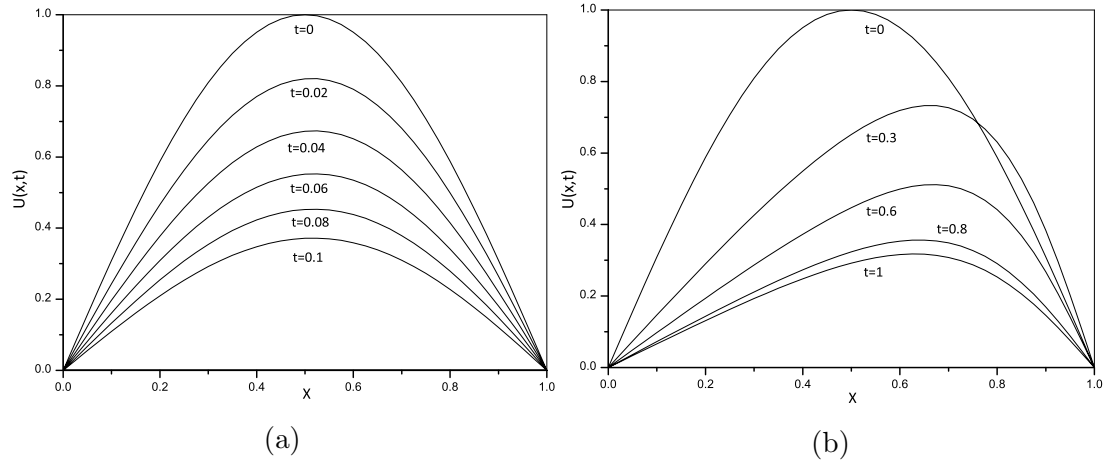
x	t	$\nu = 1$	$\nu = 1$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.01$
		Numerik	Tam	Numerik	Tam	Numerik	Tam
0.25	0.4	0.01357	0.01357	0.30890	0.30889	0.34192	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24075	0.24074	0.26896	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19569	0.19568	0.22148	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16258	0.16256	0.18819	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02720	0.02720	0.07511	0.07511
0.5	0.4	0.01923	0.01924	0.56965	0.56963	0.66071	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44723	0.44721	0.52942	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35925	0.35924	0.43914	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29192	0.29192	0.37442	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04019	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01362	0.01363	0.62538	0.62544	0.91027	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48715	0.48721	0.76725	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37385	0.37392	0.64740	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28741	0.28747	0.55605	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02976	0.02977	0.22483	0.22481

Tablo 3.8: Problem 1' in $h = 0.0125$, $\nu = 1$ ve $t = 0.1$ için numerik çözümünün farklı çalışmalarla karşılaştırılması.

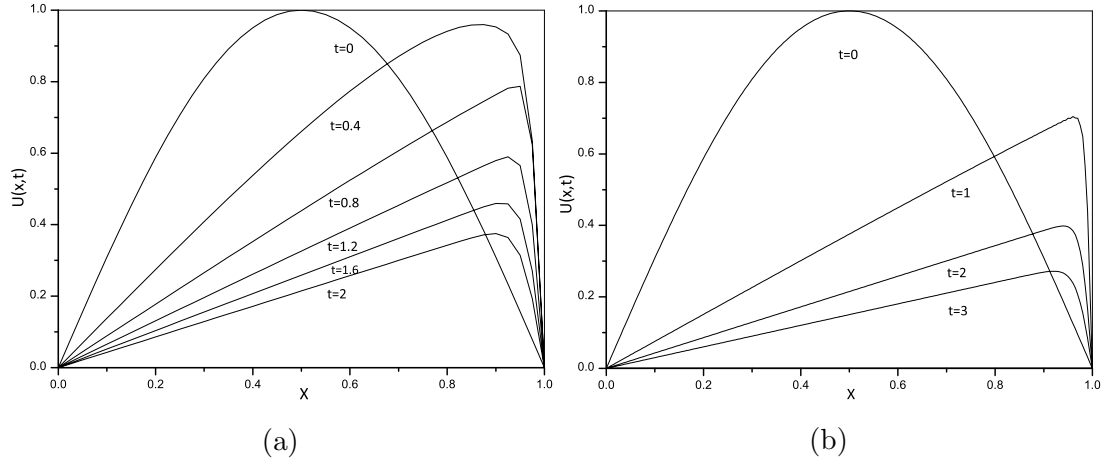
x	Tam	$S_{\Delta t}$	Ref. [87]	Ref. [89]	Ref. [91]	Ref. [92]	Ref. [100]
		$\Delta t = 10^{-3}$	$\Delta t = 10^{-5}$	$\Delta t = 10^{-5}$	$\Delta t = 10^{-5}$	$\Delta t = 10^{-5}$	$\Delta t = 10^{-4}$
0.1	0.10954	0.10953	0.10952	0.10978	0.109526	0.10951	0.10955
0.2	0.20979	0.20977	0.20975	0.21019	0.209766	0.20974	0.20981
0.3	0.29190	0.29187	0.29184	0.29238	0.291855	0.29182	0.29193
0.4	0.34792	0.34788	0.34785	0.34845	0.347869	0.34783	0.34796
0.5	0.37158	0.37153	0.37149	0.37212	0.371512	0.37147	0.37163
0.6	0.35905	0.35900	0.35896	0.35960	0.358975	0.35894	0.35910
0.7	0.30991	0.30986	0.30983	0.31044	0.309839	0.30981	0.30995
0.8	0.22782	0.22778	0.22776	0.22827	0.227766	0.22775	0.22786
0.9	0.12069	0.12067	0.12065	0.12097	0.120659	0.12065	0.12071

Tablo 3.9: Problem 1' in $\nu = 1$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için sonuçlarının diğer çalışmalarla karşılaştırılması.

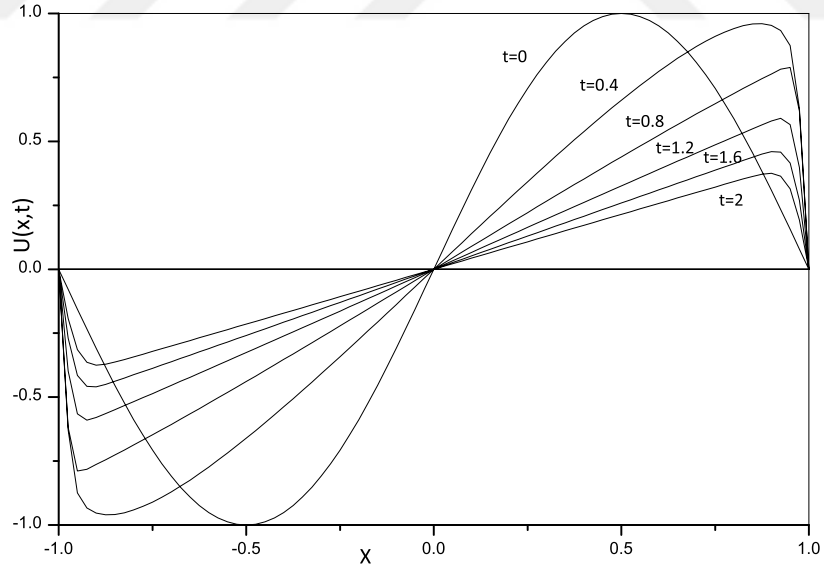
x	t	Tam	$S_{\Delta t}$ $\Delta t = 10^{-3}$	Ref.[101] $\Delta t = 10^{-5}$	Ref.[102]-DE $\Delta t = 10^{-5}$	Ref.[102]-HC $\Delta t = 10^{-5}$	Ref.[102]-RHC $\Delta t = 10^{-5}$
0.25	0.1	0.25364	0.25361	0.252875	0.263624	0.252942	0.264126
	0.15	0.15660	0.15657	0.155447	0.161000	0.156059	0.165683
	0.20	0.09644	0.09642	0.094289	0.098311	0.095889	0.101617
	0.25	0.05922	0.05920	0.055674	0.060052	0.056174	0.059113
0.5	0.1	0.37158	0.37153	0.373085	0.372799	0.376474	0.393354
	0.15	0.22682	0.22678	0.228940	0.227657	0.235875	0.251788
	0.20	0.13847	0.13844	0.142127	0.138972	0.153645	0.163931
	0.25	0.08454	0.08451	0.091944	0.084942	0.112810	0.120967
0.75	0.1	0.27258	0.27254	0.272368	0.263624	0.271517	0.285579
	0.15	0.16437	0.16433	0.163628	0.160973	0.162739	0.176957
	0.20	0.09944	0.09941	0.098656	0.098305	0.098431	0.111020
	0.25	0.06035	0.06033	0.059343	0.060051	0.057394	0.068569



Şekil 3.1: Problem 1' in nümerik çözümünün farklı zamanlardaki davranışı a) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 1$. b) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.1$.



Şekil 3.2: Problem 1' in nümerik çözümünün farklı zamanlardaki davranışı a) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.01$. b) $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.005$.



Şekil 3.3: Problem 1' in $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$, $a = -1$ ve $b = 1$ değerleri için $t \leq 2$ boyunca nümerik çözümünün fiziksel davranışı.

çözümle noktasal karşılaştırılması verildi. Buna ek olarak L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı ve $\|e\|_1$ hata normu bazı çalışmalarla karşılaştırıldı. Tablo 3.6' da h küçüldükçe nümerik değerlerin tam değerlere yakınsadığı görülmektedir. Ayrıca $\|e\|_1$ hata normlarına bakıldığında Ref. [87, 92, 89, 99] çalışmalarının sonuçları $\Delta t = 10^{-5}$ ile hesaplanırken, $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinde $\Delta t = 10^{-3}$ seçilmesine rağmen verilen referansların birçoğundan iyi olduğu, bir kısmı ile de uyumlu olduğu görülmektedir. Tablo 3.7' de $\Delta t = 0.001$, $h = 0.0125$ ve $\nu = 1, 0.1, 0.01$ değerleri için x ' in 0.25, 0.5 ve 0.75 noktalarındaki nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda tam çözümle karşılaştırılması verildi. Bu tablodan görüldüğü gibi sonuçlarımız tam çözüme oldukça yakındır. Tablo 3.8 ve 3.9' da $\nu = 1, h = 0.0125$ için sırasıyla Ref. [87, 89, 91, 92, 100] ve Ref. [101, 102] çalışmalarında verilenlerle $S_{\Delta t}$ yöntemiyle elde edilenler tam çözümle karşılaştırıldı. Bu tablolardan da görüldüğü gibi çok daha büyük Δt zaman adım uzunluğu kullanmış olmamıza rağmen sonuçlarımız oldukça tatmin edicidir. Problem 1' in Fourier seri çözümü ν nün küçük değerleri için yavaş yakınsamaya neden olduğundan tam çözüm ve nümerik çözüm karşılaştırılması yapılamamaktadır. Ancak Figure 3.1 ve 3.2' de $\nu = 1, 0.1, 0.01$ ve 0.005 değerlerine karşılık gelen nümerik çözümlerin grafikleri verildi ve görüldüğü gibi ν küçüldükçe nümerik çözüm sağa doğru keskinleşerek yatmaktadır. Ayrıca $\nu = 0.01, h = 0.025, a = -1$ ve $b = 1$ için Problem 1' in nümerik çözümü hesaplandı ve bu çözümün farklı t değerleri için problemin fiziksel davranışı Figure 3.3' de gösterildi.

Problem 2: İkinci problem olarak Burgers' denklemi, Ref. [90, 98, 100]' deki gibi verilen aşağıdaki başlangıç

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ve

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

Tablo 3.10: Problem 2' nin $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ değerleri ve farklı h adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.

h	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	2.214512	3.236722	2.214083	3.236015	2.213776	3.235529
0.05	0.555140	0.808757	0.554718	0.808062	0.554415	0.807583
0.025	0.139310	0.202976	0.138890	0.202285	0.138588	0.201808
0.0125	0.035363	0.051627	0.034943	0.050921	0.034640	0.050444
0.00625	0.009383	0.013814	0.008959	0.013093	0.008656	0.012610
	$\ e_1\ $		$\ e_1\ $		$\ e_1\ $	
0.1	0.007294		0.007293		0.007292	
0.05	0.001925		0.001923		0.001922	
0.025	0.000496		0.000494		0.000493	
0.0125	0.000127		0.000126		0.000125	
0.00625	0.000034		0.000032		0.000031	

sınır şartları ile ele alındı. Bu problemin tam çözümü, (3.1.12) ile verilen eşitlikte Fourier katsayılarının

$$a_0 = \int_0^1 e^{-x^2(3\nu)^{-1}(3-2x)} dx,$$

$$a_j = 2 \int_0^1 e^{-x^2(3\nu)^{-1}(3-2x)} \cos(j\pi x) dx, \quad j = 1, 2, \dots$$

biçiminde alınmasıyla elde edilir. Tablo 3.10 ve 3.11' de $\Delta t = 0.001$ için sırasıyla $\nu = 1$ ve 0.1 değerlerine karşılık farklı h uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin hata normları verildi. Her iki tablodan da görüldüğü gibi h küçüldükçe hata normlarının da küçüldüğü ve Ext4 yönteminin $S_{\Delta t}$ dan, Ext6' nın da Ext4 den daha düşük hata normlarına sahiptir. Ayrıca Tablo 3.12 ve 3.13' de $h = 0.0125$ için sırasıyla $\nu = 1$ ve 0.1 değerlerine karşılık farklı Δt uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin hata normları karşılaştırıldı. İki tabloya da baktığımızda Δt küçüldükçe hata normlarının da düştüğü ve beklendiği gibi Ext4 ve Ext6' nın daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Tablo 3.14' de Problem 2' nin $\Delta t = 0.001$, $h = 0.0125$, $\nu = 1$, 0.1, 0.01 değerleri

Tablo 3.11: Problem 2' nin $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.1$ değerleri ve farklı h adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.

h	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.1	1.400997	3.629516	1.375639	3.577697	1.349990	3.524883
0.05	0.361491	0.954198	0.335850	0.900486	0.310613	0.845672
0.025	0.091048	0.241399	0.066854	0.187136	0.050058	0.131734
0.0125	0.022969	0.061323	0.016298	0.026040	0.012195	0.030637
0.00625	0.005927	0.015782	0.005656	0.015137	0.003151	0.008311
	$\ e_1\ $		$\ e_1\ $		$\ e_1\ $	
0.1	0.001898		0.001854		0.001809	
0.05	0.000580		0.000531		0.000484	
0.025	0.000159		0.000112		0.000085	
0.0125	0.000042		0.000028		0.000022	
0.00625	0.000011		0.000011		0.000006	

Tablo 3.12: Problem 2' nin $h = 0.0125$, $\nu = 1$ değerleri ve farklı Δt adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.

Δt	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.02	0.361782	0.698196	0.177571	0.681654	0.090651	0.679935
0.01	0.112075	0.182399	0.064759	0.100836	0.036644	0.053691
0.005	0.052946	0.081834	0.041942	0.062497	0.035150	0.051268
0.0025	0.039073	0.057890	0.036443	0.053377	0.034782	0.050664
	$\ e_1\ $		$\ e_1\ $		$\ e_1\ $	
0.02	0.002276		0.001432		0.001034	
0.01	0.000598		0.000240		0.000146	
0.005	0.000209		0.000154		0.000127	
0.0025	0.000140		0.000131		0.000125	

Tablo 3.13: Problem 2' nin $h = 0.0125$, $\nu = 0.1$ değerleri ve farklı Δt adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $t = 0.1$ ' deki sonuçlarının karşılaştırılması.

Δt	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.02	0.132523	0.315853	0.031208	0.093471	0.030076	0.084327
0.01	0.049277	0.123336	0.024586	0.067187	0.024365	0.065383
0.005	0.029152	0.076143	0.023171	0.062250	0.023113	0.061849
0.0025	0.024298	0.064555	0.022823	0.061080	0.022806	0.060973
	$\ e_1\ $		$\ e_1\ $		$\ e_1\ $	
0.02	0.000227		0.000065		0.000049	
0.01	0.000088		0.000046		0.000043	
0.005	0.000053		0.000042		0.000042	
0.0025	0.000044		0.000042		0.000041	

Tablo 3.14: Problem 2' nin $S_{\Delta t}$ yöntemi ile $\Delta t = 0.001$, $h = 0.0125$, $\nu = 1, 0.1$ ve 0.01 değerleri için farklı t zamanlarındaki sonuçlarının karşılaştırılması.

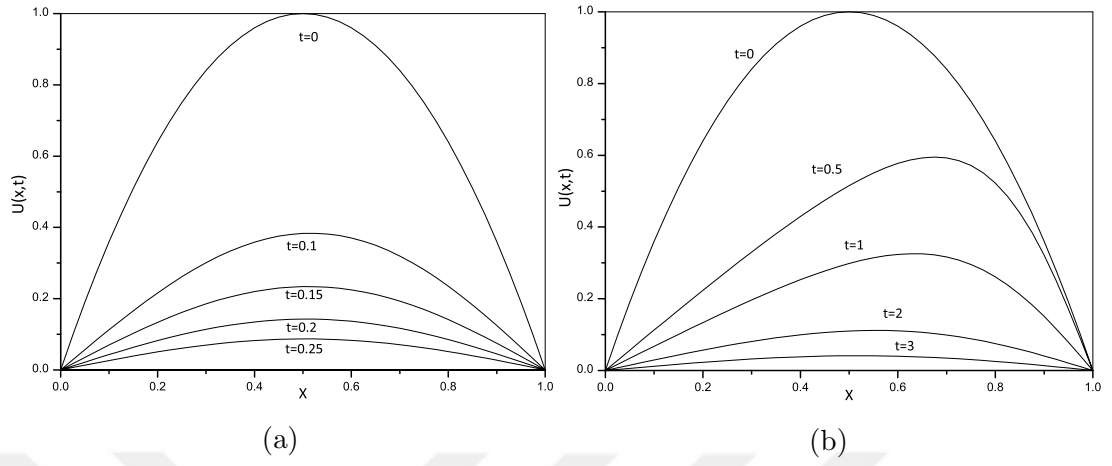
x	t	$v = 1$		$v = 0.1$		$v = 0.01$	
		Numerik	Tam	Numerik	Tam	Numerik	Tam
0.25	0.4	0.01400	0.01400	0.31752	0.31752	0.36226	0.36226
	0.6	0.00195	0.00195	0.24615	0.24614	0.28203	0.28204
	0.8	0.00027	0.00027	0.19957	0.19956	0.23045	0.23045
	1.0	0.00004	0.00004	0.16561	0.16560	0.19469	0.19469
	3.0	0.00000	0.00000	0.02775	0.02776	0.07613	0.07613
0.5	0.4	0.01984	0.01985	0.58455	0.58454	0.68368	0.68368
	0.6	0.00276	0.00276	0.45800	0.45798	0.54832	0.54832
	0.8	0.00038	0.00038	0.36742	0.36740	0.45371	0.45371
	1.0	0.00005	0.00005	0.29835	0.29834	0.38567	0.38568
	3.0	0.00000	0.00000	0.04105	0.04106	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.01406	0.01407	0.64556	0.64562	0.92051	0.92050
	0.6	0.00195	0.00195	0.50261	0.50268	0.78300	0.78299
	0.8	0.00027	0.00027	0.38527	0.38534	0.66272	0.66272
	1.0	0.00004	0.00004	0.29580	0.29586	0.56932	0.56932
	3.0	0.00000	0.00000	0.03043	0.03044	0.22776	0.22774

Tablo 3.15: Problem 2' nin $\nu = 0.01$ için farklı zamanlarda nümerik çözümün bazı çalışmalarla karşılaştırılması.

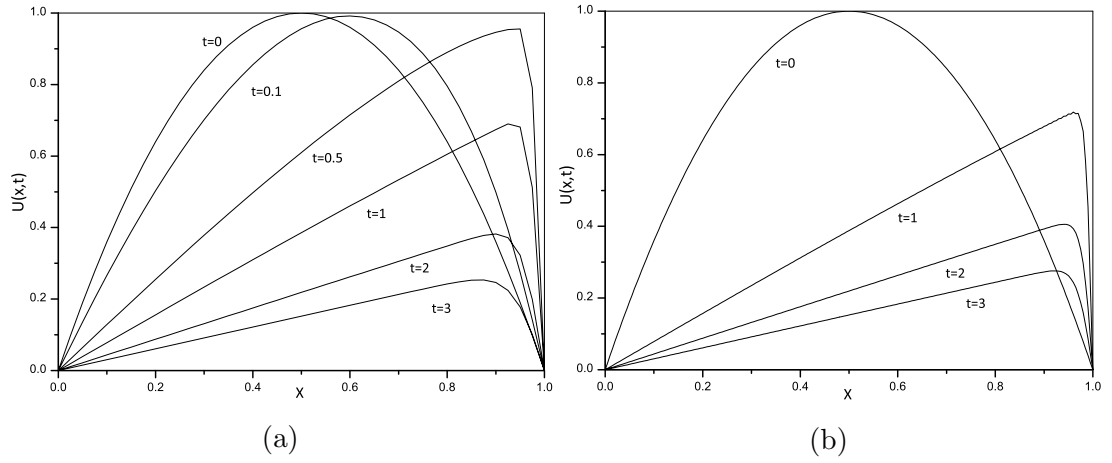
x	t	[90]	[98]	[103]	$S_{\Delta t}$	Tam
		$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta t = 0.01$	-
		$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.0125$	$h = 0.0125$	-
0.25	0.4	0.36225	0.36218	0.3622	0.36225	0.36226
	0.6	0.28202	0.28197	0.2820	0.28202	0.28204
	0.8	0.23044	0.23040	0.2304	0.23044	0.23045
	1.0	0.19468	0.19465	0.1947	0.19468	0.19469
	3.0	0.07613	0.07613	0.0761	0.07613	0.07613
0.5	0.4	0.68368	0.68364	0.6836	0.68370	0.68368
	0.6	0.54832	0.54829	0.5483	0.54832	0.54832
	0.8	0.45371	0.45368	0.4537	0.45371	0.45371
	1.0	0.38567	0.38564	0.3856	0.38567	0.38568
	3.0	0.15218	0.15217	0.1522	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.92052	0.92047	0.9205	0.92059	0.92050
	0.6	0.78300	0.78297	0.7830	0.78304	0.78299
	0.8	0.66272	0.66270	0.6627	0.66274	0.66272
	1.0	0.56932	0.56930	0.5693	0.56932	0.56932
	3.0	0.22782	0.22773	0.2277	0.22776	0.22774

Tablo 3.16: Problem 2' nin $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı zamanlardaki $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması.

x	t	$S_{\Delta t}$	Ext4	Ext6	Tam
0.25	0.4	0.36225	0.36226	0.36226	0.36226
	0.6	0.28202	0.28203	0.28204	0.28204
	0.8	0.23044	0.23045	0.23045	0.23045
	1.0	0.19468	0.19469	0.19469	0.19469
	3.0	0.07613	0.07613	0.07613	0.07613
0.5	0.4	0.68370	0.68368	0.68368	0.68368
	0.6	0.54832	0.54832	0.54832	0.54832
	0.8	0.45371	0.45371	0.45372	0.45371
	1.0	0.38567	0.38567	0.38568	0.38568
	3.0	0.15218	0.15218	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.92059	0.92051	0.92051	0.92050
	0.6	0.78304	0.78300	0.78300	0.78299
	0.8	0.66274	0.66272	0.66273	0.66272
	1.0	0.56932	0.56932	0.56932	0.56932
	3.0	0.22776	0.22776	0.22776	0.22774



Şekil 3.4: Problem 2' nin nümerik çözümünün farklı zamanlardaki davranışı a) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 1$. b) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.1$.



Şekil 3.5: Problem 2' nin nümerik çözümünün farklı zamanlardaki davranışı a) $h = 0.025$, $\Delta t = 0.001$ ve $\nu = 0.01$. b) $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.005$.

için farklı zaman ve konumlardaki nümerik ve tam çözümünün karşılaştırılması verildi. Bu tablodan da görüldüğü üzere elde edilen sonuçlar tam çözümle oldukça iyi uyum içindedir. Tablo 3.15’ de ise Problem 2’ nin $\nu = 0.01$ değeri için Ref. [90, 98, 103] çalışmalarında verilen sonuçlarla $S_{\Delta t}$ ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu tablodan, Ref. [98, 103]’ deki çalışmalarda Δt zaman adımının daha küçük seçilmesine rağmen, $S_{\Delta t}$ ile elde edilen sonuçların daha iyi olduğu görülmektedir. Mittal ve Jain [90] daha küçük Δt ve daha büyük h değerleriyle hesaplama yapmışlardır. Tablo 3.15’ den sonuçlarımızın bu çalışma ile de oldukça iyi bir uyum içinde olduğu görülmektedir. Bunların yanında Tablo 3.16’ da $\Delta t = 0.001$, $h = 0.0125$ ve $\nu = 0.01$ için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle hesaplanan farklı konum ve zamanlardaki noktasal değerler karşılaştırıldı. Bu tablodan da görüldüğü gibi Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle elde edilen sonuçlar Tablo 3.15’ de verilen Ref. [90, 98, 103]’ deki sonuçlara göre tam çözüme oldukça yakındır.

Problem 3: Son problem olarak Burgers’ denklemi, Ref. [90, 98]’ da verildiği gibi $t = 1$ zamanındaki başlangıç koşulu

$$u(x, t) = \frac{x}{1 + \exp \left[\frac{1}{4\nu} \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) \right]}$$

ve sınır şartları $u(a, t) = u(b, t) = 0$ olarak ele alındı. Bu problemin tam çözümü $t_0 = \exp(\frac{1}{8\nu})$ olmak üzere,

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{t/t_0} \exp \left[\frac{1}{4\nu} \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) \right]} \quad \text{ve} \quad t \geq 1$$

dir. Problem 3’ ün çözümü zaman ilerledikçe pürüzsüzleşen şok dalgaların ilerlemesi olayına karşılık gelmektedir [92]. Tablo 3.17’ de $\Delta t = 0.01$, $h = 0.005$, $\nu = 0.005$, $a = 0$ ve $b = 1$ değerleri için problemin farklı zaman ve konumlardaki noktasal değerleri verildi. Bu tablodan görüldüğü gibi mevcut yöntemle hesaplanan nümerik sonuçlar tam sonuçlarla uyum içindedir. Tablo 3.18’ de $\Delta t = 0.01$, $h = 0.005$, $\nu = 0.005$, $a = 0$ ve $b = 1.2$ değerleri için Xie vd. [104] ile Mittal ve Jain

Tablo 3.17: Problem 3' ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.005$, $\nu = 0.005$, $a = 0$ ve $b = 1$ değerleri için nümerik sonuçlar ve hata normlarının karşılaştırılması.

x	$S_{\Delta t}$	Exact	$S_{\Delta t}$	Exact	$S_{\Delta t}$	Exact
	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.5$	$t = 2.5$	$t = 3.25$	$t = 3.25$
0.1	0.05882	0.05882	0.04000	0.04000	0.03077	0.03077
0.2	0.11764	0.11765	0.08000	0.08000	0.06154	0.06154
0.3	0.17646	0.17646	0.12000	0.12000	0.09230	0.09231
0.4	0.23517	0.23517	0.15998	0.15998	0.12307	0.12307
0.5	0.29193	0.29190	0.19983	0.19983	0.15380	0.15380
0.6	0.29585	0.29591	0.23814	0.23812	0.18430	0.18430
0.7	0.04197	0.04193	0.25312	0.25310	0.21271	0.21270
0.8	0.00064	0.00065	0.10212	0.10210	0.21844	0.21844
0.9	0.00000	0.00000	0.00553	0.00554	0.10093	0.10126

Tablo 3.18: Problem 3' ün $\Delta t = 0.001$, $h = 0.005$, $\nu = 0.005$, $a = 0$ ve $b = 1.2$ değerleri için nümerik sonuçlar ve hata normlarının karşılaştırılması.

x	t	[90] $h = 0.005$ $\Delta t = 0.001$	[104]($\beta = 1$) $h = 10^{-4}$ $\Delta t = 0.01$	[104]($\beta = 0.5$) $h = 10^{-4}$ $\Delta t = 0.01$	$S_{\Delta t}$ $h = 0.005$ $\Delta t = 0.001$	Exact
0.2	1.7	0.1176452	0.1176565	0.1174841	0.1176452	0.1176452
	2.5	0.0799990	0.0800527	0.0798389	0.0799990	0.0799989
	3.0	0.0666658	0.0667147	0.0665176	0.0666658	0.0666658
	3.5	0.0571422	0.0571820	0.0570060	0.0571422	0.0571422
0.4	1.7	0.2351690	0.2332111	0.2348504	0.2351690	0.2351677
	2.5	0.1599771	0.1591735	0.1596608	0.1599771	0.1599769
	3.0	0.1333211	0.1328314	0.1330273	0.1333211	0.1333209
	3.5	0.1142780	0.1139606	0.1140077	0.1142780	0.1142779
0.6	1.7	0.2958570	0.2940048	0.2961269	0.2958570	0.2959097
	2.5	0.2381299	0.2347876	0.2376699	0.2381300	0.2381207
	3.0	0.1994839	0.1973222	0.1990478	0.1994839	0.1994805
	3.5	0.1712257	0.1697753	0.1708231	0.1712257	0.1712242
0.8	1.7	0.0006381	0.0008917	0.0006640	0.0006381	0.0006465
	2.5	0.1021325	0.1103866	0.1036067	0.1021324	0.1020957
	3.0	0.2088032	0.2088346	0.2093735	0.2088032	0.2088359
	3.5	0.2145938	0.2119293	0.2143409	0.2145939	0.2145869

Tablo 3.19: Problem 3' ün $\nu = 0.005$, $a = 0$ ve $b = 1.2$ değerleri için hata normlarının karşılaştırılması.

	[90] $h = 0.005$ $\Delta t = 0.001$	[104] ($\beta = 1$) $h = 10^{-4}$ $\Delta t = 0.01$	[104] ($\beta = 0.5$) $h = 10^{-4}$ $\Delta t = 0.01$	$S_{\Delta t}$ $h = 0.005$ $\Delta t = 0.01$	$S_{\Delta t}$ $h = 0.005$ $\Delta t = 0.001$
$t = 1.7$					
$L_2 \times 10^3$	0.0252	3.08966	0.384209	0.03565	0.02531
$L_\infty \times 10^3$	0.0994	10.40404	1.347279	0.16110	0.10003
$t = 2.5$					
$L_2 \times 10^3$	0.0151	2.72048	0.491345	0.01927	0.01508
$L_\infty \times 10^3$	0.0549	8.29747	1.554700	0.07719	0.05517
$t = 3.0$					
$L_2 \times 10^3$	0.0118	2.39922	0.515077	0.01451	0.01185
$L_\infty \times 10^3$	0.0414	6.98801	1.552891	0.05464	0.04150
$t = 3.5$					
$L_2 \times 10^3$	0.0117	2.12110	0.525855	0.01328	0.01175
$L_\infty \times 10^3$	0.0486	5.94321	1.521961	0.04858	0.04858

Tablo 3.20: Problem 3' ün $\nu = 0.0015$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$, $a = 0$ ve $b = 1$ değerleri için hata normlarının Ref. [95] ile karşılaştırılması.

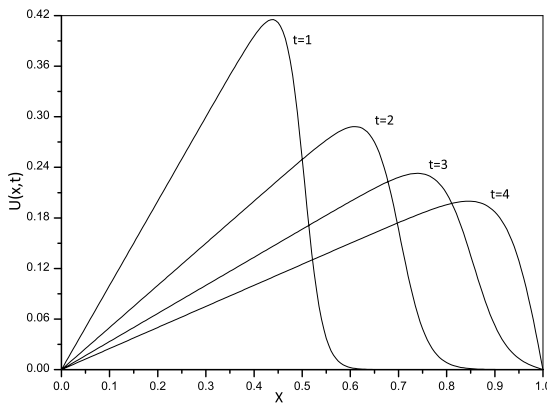
	[95]		$S_{\Delta t}$	
t	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
1.2	0.3853879498	3.2368476652	0.3718509991	3.1646275222
1.4	0.4644348073	3.3488926879	0.2863329944	2.4415417573
1.6	0.4964749406	3.1923238319	0.2288596826	1.8783862136
1.8	0.5092790346	2.9867895721	0.1887021734	1.4497813951
2.0	0.5125147492	2.7831501328	0.1593751139	1.1782635194
2.2	0.5105961277	2.5951212085	0.1371827934	1.0357077227
2.4	0.5058011505	2.4255446546	0.1199015172	0.8279599830
2.8	0.4921096936	2.1380460738	0.0949225040	0.6403753054
3.0	0.4843911639	2.0164737965	0.0856621454	0.5858051083
3.4	0.4687308313	1.8086943377	0.0717301538	0.4764481427
3.7	0.6446318395	4.7081914051	0.2791695008	3.0371207632

Tablo 3.21: Problem 3' ün $\nu = 0.005$, $h = 0.02$, $\Delta t = 0.01$, $a = 0$ ve $b = 1$ değerleri için hata normlarının Ref. [95] ile karşılaştırılması.

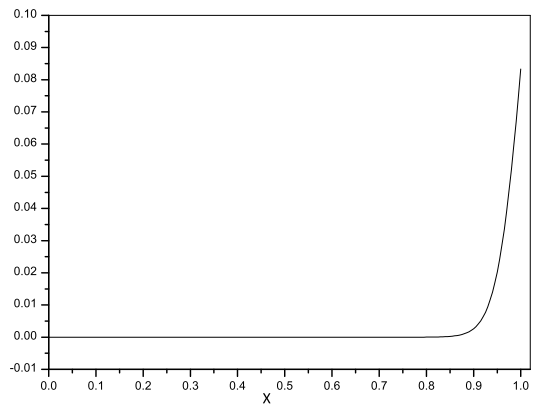
t	[95]		$S_{\Delta t}$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
1.2	0.5814317166	3.1354062730	0.5537663018	2.1699139717
1.4	0.6467617678	2.9313488434	0.4921119039	1.8710420482
1.6	0.6760951564	2.6922645525	0.4184750799	1.6238728732
1.8	0.6876183734	2.4718915438	0.3592643498	1.4099229281
2.0	0.6895350821	2.3766574001	0.3129510874	1.1485717697
2.2	0.6860166616	2.2731921896	0.2762460981	1.0081759068
2.4	0.6794328066	2.1678477506	0.2467279685	0.8919346792
2.8	0.6830706255	1.9689522786	0.2228476846	0.6805470080
3.0	0.8295132819	2.9572472407	0.3106757860	1.5961621658
3.2	1.4855981917	7.4914648713	0.6551177234	4.0139480396

Tablo 3.22: Problem 3' ün $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ değerleri ve farklı zamanlardaki $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin hata normlarının karşılaştırılması.

t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
1.7	0.03565	0.16110	0.02566	0.10105	0.02527	0.09931
2.4	0.02167	0.08346	0.01706	0.05876	0.01691	0.05832
2.5	0.02436	0.11560	0.01965	0.09564	0.01954	0.09565
3.1	0.55501	4.10425	0.47261	3.51153	0.47108	3.51014
3.25	1.10263	7.99529	0.94609	6.89869	0.94365	6.89623
	Ref. [88]		Ref. [93]		Ref. [104]	
1.7	0.857	2.576	0.07215	0.31153	0.02681	0.09174
2.4	0.423	1.242	—	—	—	—
2.5	—	—	0.05103	0.18902	0.03135	0.11515
3.1	0.235	0.688	—	—	—	—
3.25	—	—	1.24901	8.98390	1.11149	8.00069



(a)



(b)

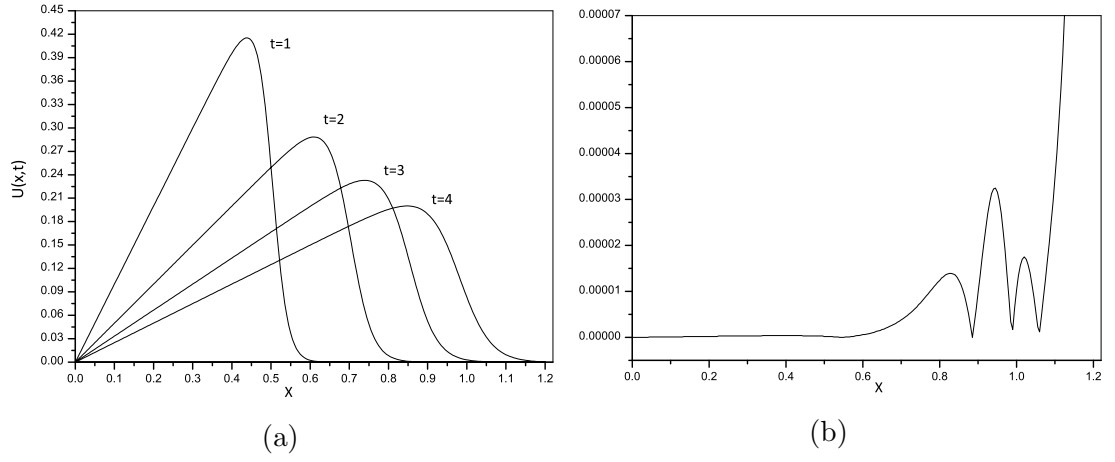
Şekil 3.6: Problem 3' ün nümerik çözümünün fiziksel davranışı a) $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$, $a = 0$ ve $b = 1$. b) aynı değerler için $t = 4$ ' deki hata grafiği.

Tablo 3.23: Problem 3' ün $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.005$ ve $h = 0.005$ değerleri için bazı zamanlardaki $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması.

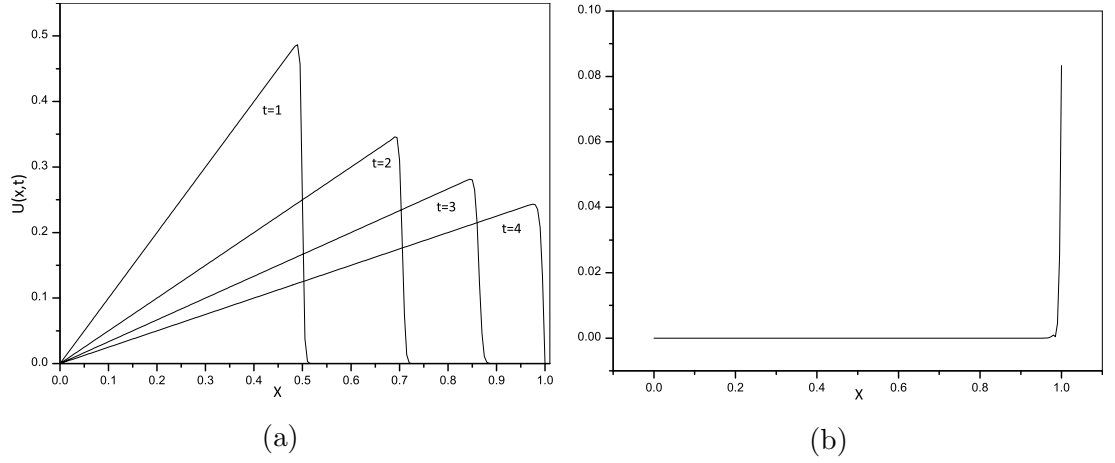
x	t	$S_{\Delta t}$	Ext4	Ext6	Exact
0.2	1.7	0.1176452	0.1176452	0.1176452	0.1176452
	2.5	0.0799990	0.0799990	0.0799990	0.0799989
	3.0	0.0666658	0.0666658	0.0666658	0.0666658
	3.5	0.0571422	0.0571422	0.0571422	0.0571422
0.4	1.7	0.2351690	0.2351690	0.2351690	0.2351677
	2.5	0.1599771	0.1599771	0.1599771	0.1599769
	3.0	0.1333211	0.1333211	0.1333211	0.1333209
	3.5	0.1142780	0.1142780	0.1142780	0.1142779
0.6	1.7	0.2958570	0.2958572	0.2958572	0.2959097
	2.5	0.2381300	0.2381299	0.2381299	0.2381207
	3.0	0.1994839	0.1994839	0.1994839	0.1994805
	3.5	0.1712257	0.1712257	0.1712257	0.1712242
0.8	1.7	0.0006381	0.0006381	0.0006381	0.0006465
	2.5	0.1021324	0.1021329	0.1021328	0.1020957
	3.0	0.2088032	0.2088027	0.2088027	0.2088359
	3.5	0.2145939	0.2145883	0.2145883	0.2145869

Tablo 3.24: Problem 3' ün $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.005$, $h = 0.005$, $a = 0$ ve $b = 1.2$ değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.

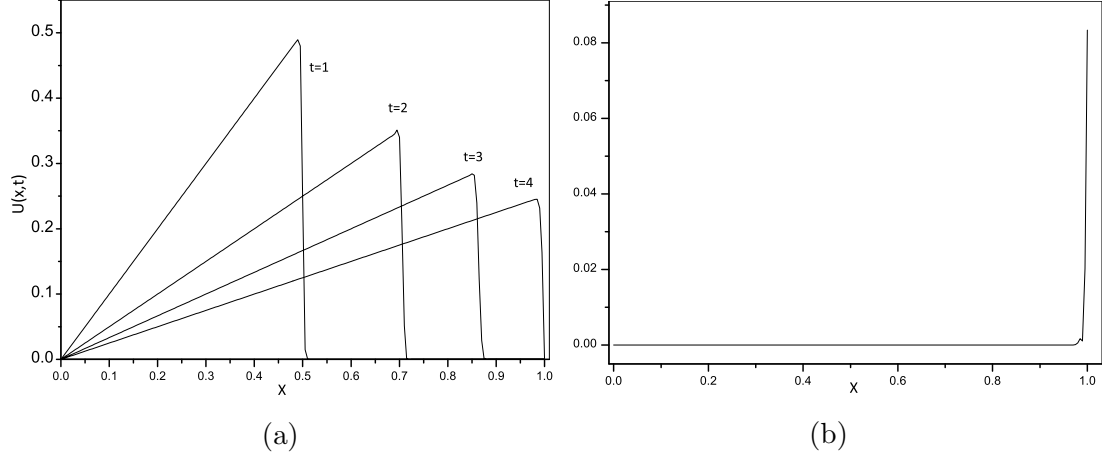
t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
1.7	0.02531	0.10003	0.02523	0.09902	0.02523	0.09910
2.5	0.01508	0.05517	0.01504	0.05457	0.01504	0.05467
3.0	0.01185	0.04150	0.01181	0.04099	0.01181	0.04109
3.5	0.01175	0.04858	0.01121	0.04126	0.01122	0.04126
		[90]	[104] ($\beta = 0.5$)		[104] ($\beta = 1$)	
	$h = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	$h = 10^{-4}$	$\Delta t = 0.01$	$h = 10^{-4}$	$\Delta t = 0.01$
1.7	0.0252	0.0996	0.384209	1.347279	3.08966	10.40404
2.5	0.0151	0.0549	0.491345	1.554700	2.72048	8.29747
3.0	0.0118	0.0414	0.515077	0.525855	2.39922	6.98801
3.5	0.0117	0.0486	1.552891	1.521961	2.12110	5.94321



Şekil 3.7: Problem 3' ün nümerik çözümünün fiziksel davranışı a) $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$, $a = 0$ ve $b = 1.2$. b) aynı değerler için $t = 4$ ' deki hata grafiği.



Şekil 3.8: Problem 3' ün nümerik çözümünün fiziksel davranışı a) $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.0005$, $a = 0$ ve $b = 1$. b) aynı değerler için $t = 4$ ' deki hata grafiği.



Şekil 3.9: Problem 3' ün nümerik çözümünün fiziksel davranışı a) $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.00036$. b) aynı değerler için $t = 4$ ' deki hata grafiği.

[90] çalışmalarındaki farklı konum ve zamanlarda noktasal değerler karşılaştırıldı. Tablodan görüldüğü gibi sonuçlar Ref. [104]' inkinden oldukça iyi ve Ref. [90] ile uyum içindedir. Tablo 3.19' da Ref. [104] ve Ref. [90] çalışmalarıyla L_2 ve L_∞ hata normlarının farklı zamanlardaki değerleri karşılaştırıldı. Görüldüğü gibi daha büyük h değeri için bile hata normlarımız Ref. [104]' den oldukça iyi ve Ref. [90] ile uyum içindedir. Tablo 3.20 ve 3.21' de Ref. [95] ile L_2 ve L_∞ hata normlarının farklı t değerleri için karşılaştırılması verildi. Bu iki tablodan da görüldüğü gibi $S_{\Delta t}$ ile hesaplanan hata normları septik B-spline kollokasyon yöntemi kullanan Ref. [95]' ninkinden oldukça düşüktür. Tablo 3.22' de $\Delta t = 0.01$, $h = 0.005$, $\nu = 0.005$, $a = 0$ ve $b = 1$ değerleriyle $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları verildi ve Ref. [88, 93, 104] çalışmalarıyla karşılaştırıldı. Tablodan $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının birçok t değeri için Ref. [88, 93, 104] çalışmalarındakilerden daha iyi olduğu görülmektedir. Tablo 3.23' de $\Delta t = 0.001$, $h = 0.005$, $\nu = 0.005$ değerleri için tam çözüm ve nümerik çözümün farklı zaman ve konumlarda karşılaştırılması verildi. Tabloda nümerik sonuçlarla tam çözümün noktasal değerlerinin oldukça iyi uyum içinde olduğu görülmektedir. Tablo 3.24' de ise $\Delta t = 0.001$, $h = 0.005$, $\nu = 0.005$ ve $a = 0$ ve $b = 1.2$ değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin kendi arasında

kıyaslanması ve Ref. [90, 104] çalışmalarıyla karşılaştırılması verildi. Tablodan görüldüğü gibi elde ettiğimiz L_2 ve L_∞ hata normları Ref. [104]' dekilerden oldukça iyi ve Ref. [90]' dekilerle uyum içindedir. Ayrıca Problem 3' ün $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ için farklı viskozite değerlerinde $[0, 1]$ ve $[0, 1.2]$ aralıklarındaki fiziksel davranışları grafiksel olarak Şekil 3.6-3.9' da gösterilmiştir. Bu grafiklerden de görüldüğü gibi ν viskozite değeri küçüldükçe çözüm eğrileri de artan bir şekilde keskinleşmekte ve hata değerleri sağ sınıra doğru yaklaşıldığında en büyük değerini almaktadır. Problemin çözüm aralığı $[0, 1]$ ' den $[0, 1.2]$ ' ye genişletildiğinde sağ sınırdaki yapılan hata değerinin oldukça düştüğü hata grafiklerinden görülmektedir.

3.2 Modifiye Edilmiş Burgers' Denkleminin (mBE) Operatör Splitting B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Çözümleri

Tezin bu kısmında

$$u_t + u^2 u_x - \nu u_{xx} = 0; \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq t_0 \quad (3.2.1)$$

biçiminde verilen modifiye edilmiş Burgers' (mBE) denklemi ele alındı. mBE denklemi hemen hemen dikey şoklarda iyon yansıması, türbülans taşınması, nehirde kirleticilerin taşınması ve yayılımı, çökelti taşınması ve termoelastik ortamlarda dalga işlemleri gibi birçok pratik taşıma problemlerinde kullanılan yüksek nonlineerliğe sahip bir denklemdir [82]. mBE denkleminin teorik çözümlerini çalışanlar arasında İnan ve Ugurlu [106], Harris [107], Sachdev vd. [108] ile Sachdev ve Rao [109] verilebilir. (3.2.1) denkleminin analitik çözümlerini elde etmek karmaşık ve zahmetli bir iş olduğundan, bunun yerine birçok matematikçi (3.2.1) denkleminin kabul edilebilir bir doğruluk ile nümerik çözümlerini elde etmeye çalışmaktadır. Bu nümerik çalışmalar arasından örnek olarak diğerlerinin yanında aşağıdakiler gösterilebilir. Ramadan ve El-Danaf [110]

kuintik B-spline kollokasyon yöntemi ile modifiye edilmiş Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Oruç vd. [111] modifiye edilmiş Burgers' denklemini sonlu fark ile birlikte Haar dalgacıklar metodunu kullanarak nümerik çözümlerini bulmuşlardır. Karakoç vd. [112] mBE denklemini kuartik B-spline baz fonsiyonları kullanarak hem subdomain sonlu eleman hem de diferansiyel kuadratür yöntemi ile çözmüşlerdir. Kutluay vd. [113] mBE denklemindeki lineer olmayan terimi bir lineerleştirme tekniği kullanarak kübik B-spline kollokasyon yöntemiyle, Başhan vd. [114] ise kuintik B-spline baz fonsiyonlar kullanarak diferansiyel kuadratür yöntemi ile denklemin çözümlerini elde etmişlerdir. Irk [115] altıncı dereceden B-spline kollokasyon metodunu kullanarak hem Burgers' hem de mBE denklemlerini çözmüştür. Bratsos ve Petrakis [116] matris-üstel terime ikinci mertebeden rasyonel yaklaşımlara dayalı açık sonlu fark şeması yöntemini mBE denklemini nümerik olarak çözmek için önermişlerdir. Bratsos [82] iki zaman seviyeli özyinelemeli bağıntıda matris üstel terimi dördüncü mertebe rasyonel yaklaşımlara dayalı sonlu fark yöntemiyle yöntemiyle mBE denkleminin nümerik çözümlerini elde etmiştir. Ramadan vd. [95] septik B-spline ile kollokasyon yöntemini kullanarak mBE denklemini çözmüşlerdir. Saka ve Dağ [61] zamana ve konuma göre mBE denklemini split edip kuintik B-spline kollokasyon metodu ile nümerik çözümler sunmuşlardır. Roshan ve Bhamra [117] çalışmalarında modifiye edilmiş Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini Petrov-Galerkin yöntemi ile bulmuşlardır.

Bu kısımda, (3.2.1) ile verilen mBE denklemi

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

$$u_{xx}(a, t) = u_{xx}(b, t) = 0$$

sınır şartları ile bir başlangıç şartı için ele alındı ve sonlu eleman kollokasyon yöntemiyle ile splitting yöntemi birlikte kullanılarak denklemin nümerik çözümleri

elde edildi. Bunun için önce mBE (3.2.1) denklemi zamana göre

$$u_t - \nu u_{xx} = 0 \quad (3.2.2)$$

$$u_t + u^2 u_x = 0 \quad (3.2.3)$$

formunda split edildikten sonra elde edilen (3.2.2) ve (3.2.3) denklemlerine kübik B-spline kollokasyon yöntemi uygulanacaktır. Bunun için u yerine, $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde (2.4.3) ile verilen U_N yaklaşımı kullanılır ve x_m düğüm noktalarında (2.4.4) ile verilen U_N, U'_N ve U''_N noktasal değerleri (3.2.2) ve (3.2.3) denklemlerinde yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki gibi birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemleri

$$\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + 4\overset{\circ}{\delta}_m + \overset{\circ}{\delta}_{m+1} - \frac{6\nu}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) = 0, \quad (3.2.4)$$

$$\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + 4\overset{\circ}{\delta}_m + \overset{\circ}{\delta}_{m+1} + \frac{3z_m}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) = 0 \quad (3.2.5)$$

bulunur. Burada “ $\circ$ ” sembolü t ye göre birinci mertebeden türevi ifade etmektedir ve

$$z_m = (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^2$$

dir. δ_m parametreleri yerine $(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n)/2$ Crank-Nicolson yaklaşımı, $\overset{\circ}{\delta}_m$ zaman parametreleri yerine de $(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)/\Delta t$ zamana göre ileri fark yaklaşımı (3.2.4) ve (3.2.5)’ da yerlerine yazılırsa sırasıyla,

$$k_1 \delta_{m-1}^{n+1} + k_2 \delta_m^{n+1} + k_3 \delta_{m+1}^{n+1} = k_3 \delta_{m-1}^n + k_4 \delta_m^n + k_5 \delta_{m+1}^n, \quad m = 0(1)N \quad (3.2.6)$$

$$k_5 \delta_{m-1}^{n+1} + k_6 \delta_m^{n+1} + k_7 \delta_{m+1}^{n+1} = k_7 \delta_{m-1}^n + k_6 \delta_m^n + k_5 \delta_{m+1}^n, \quad m = 0(1)N \quad (3.2.7)$$

$$k_1 = 1 - \frac{3\nu\Delta t}{h^2}, \quad k_2 = 4 + \frac{6\nu\Delta t}{h^2}, \quad k_3 = 1 + \frac{3\nu\Delta t}{h^2}, \quad k_4 = 4 + \frac{6\nu\Delta t}{h^2}$$

$$k_5 = 1 - \frac{3z_m\Delta t}{2h}, \quad k_6 = 4, \quad k_7 = 1 + \frac{3z_m\Delta t}{2h}$$

sistemleri elde edilir. (3.2.6) ve (3.2.7) sistemleri $(N+1)$ tane denklem ve $(N+3)$ tane de bilinmeyen zaman parametrelerinden meydana gelir. Bu sistemlere sınır

şartlarını uygulayıp çözülebilir hale getirmek için δ_{-1} ve δ_{N+1} parametrelerinin yok edilmesi gerekir. Bu amaçla, (3.2.6) sisteminde $U_N(a, t) = 0$ ve $U_N(b, t) = 0$ sınır koşullarının, (3.2.7) sisteminde ise $U_N''(a, t) = 0$ ve $U_N''(b, t) = 0$ sınır koşullarının kullanılmasıyla sırasıyla,

$$\delta_{-1} = -4\delta_0 - \delta_1, \quad \delta_{N+1} = -4\delta_N - \delta_{N-1} \quad (3.2.8)$$

ve

$$\delta_{-1} = 2\delta_0 - \delta_1, \quad \delta_{N+1} = 2\delta_N - \delta_{N-1} \quad (3.2.9)$$

bağıntıları elde edilir. (3.2.8) ve (3.2.9) bağıntılarını sırasıyla (3.2.6) ve (3.2.7) denklemlerinde kullanılıp δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri yok edilirse $(N+1) \times (N+1)$ -boyutlu çözülebilir üçlü bant matris sistemleri elde edilir, yani bilinmeyen sayısı ve denklem sayısı eşitlenmiş olur. Şimdi (3.2.6) ve (3.2.7) sistemleri (2.5.12) ile verilen Strang splitting algoritmasına uygun biçimde düzenlenirse yani,

$$\begin{aligned} k_1\delta_{m-1}^*(t_{n+\frac{1}{2}}) + k_2\delta_m^*(t_{n+\frac{1}{2}}) + k_1\delta_{m+1}^*(t_{n+\frac{1}{2}}) &= k_3\delta_{m-1}^*(t_n) + k_4\delta_m^*(t_n) + k_3\delta_{m+1}^*(t_n), \\ \delta_m^*(t_n) &= \delta_m^0, \quad t \in [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}], \\ k_5\delta_{m-1}^{**}(t_{n+1}) + k_6\delta_m^{**}(t_{n+1}) + k_7\delta_{m+1}^{**}(t_{n+1}) &= k_7\delta_{m-1}^{**}(t_n) + k_6\delta_m^{**}(t_n) + k_5\delta_{m+1}^{**}(t_n), \\ \delta_m^{**}(t_n) &= \delta_m^*(t_{n+\frac{1}{2}}), \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \\ k_1\delta_{m-1}^{***}(t_{n+1}) + k_2\delta_m^{***}(t_{n+1}) + k_1\delta_{m+1}^{***}(t_{n+1}) &= k_3\delta_{m-1}^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) + k_4\delta_m^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) + k_3\delta_{m+1}^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}), \\ \delta_m^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) &= \delta_m^{**}(t_{n+1}), \quad t \in [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

şeklinde ifade edilen şemalar elde edilir. Burada $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ ve bilinmeyen δ parametreleri $\delta(t_{n+1}) = \delta^{***}(t_{n+1})$ ile hesaplanır.

Bu Strang algoritmasının çözülebilmesi için öncelikle bir δ_m^0 başlangıç vektörüne ihtiyacımız vardır ve bu vektör $u(x, t_0) = f(x)$ başlangıç şartından elde edilir. Eğer A operatörü ile elde edilen sisteme (3.2.6) ve B operatörü ile elde edilen sisteme de (3.2.7) sisteminin karşılık geldiği düşünülürse $(A - B - A)$ şeması kullanılarak nümerik sonuçlar hesaplanacaktır.

(3.2.10) Strang algoritmasının çözümüne başlayabilmek için δ_m^0 başlangıç vektörü

$$u(x_m, t_0) = f(x_m) = U_N(x_m, t_0), \quad m = 0(1)N$$

$$\begin{aligned} u_m &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 \\ u_0 &= \delta_{-1}^0 + 4\delta_0^0 + \delta_1^0 \\ u_1 &= \delta_0^0 + 4\delta_1^0 + \delta_2^0 \\ &\vdots \\ u_N &= \delta_{N-1}^0 + 4\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

sisteminden elde edilir. Bu sistem görüldüğü gibi $(N + 1) \times (N + 3)$ boyutlu bir matris sistemidir ve bunun lineer bağımsız çözümlerini elde etmemiz için bilinmeyen sayısı ile denklem sayısını eşitlememiz gerekir. Sistemdeki δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 parametrelerinden kurtulmak için $U_N''(a, t_0) = U_N''(b, t_0) = 0$ sınır koşullarının uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned} m = 0 \text{ için } \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1}^0 - 2\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0) &= 0 \Rightarrow \delta_{-1}^0 = 2\delta_0^0 - \delta_1^0 \\ m = N \text{ için } \frac{6}{h^2} (\delta_{N-1}^0 - 2\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0) &= 0 \Rightarrow \delta_{N+1}^0 = 2\delta_N^0 - \delta_{N-1}^0 \end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılar (3.2.11) sisteminde kullanırsa δ_m^0 parametreleri için $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu çözülebilen bir üçlü bant matris sistemi

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle elde edilen δ_m^0 vektörü (3.2.10) ile verilen Strang splitting şemasında kullanılarak istenilen t zamanındaki nümerik çözümler iterasyon ile hesaplanır. (3.2.10) sistemindeki lineer olmayan terime (3.1.11) ile verilen iterasyon formülü 3-5 defa uygulanarak nümerik çözümler iyileştirildi.

3.2.1 Kararlılık Analizi

(3.2.6) ve (3.2.7) denklemlerinin kararlı olup olmadıklarını kontrol etmek için Fourier seri yöntemi veya von Neumann [105] yöntemi kullanıldı. Bu bölümün (3.1.1) kısmında (3.2.6) şeması için $\left| \rho_A^{n+1/2} \right| \leq 1$ olduğunu göstermiştik. (3.2.7) sistemine von Neumann yönteminin uygulanması için önce sistemin lineerleştirilmesi gerekir. Bunun için lineer olmayan $u^2 u_x$ teriminde u^2 yerine z_m gibi bir lokal sabit alındı. Daha sonra, $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ ifadesi (3.2.7) sisteminde yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa, ρ_B (3.2.7) sisteminin kararlılık durumunu temsil eden bir gösterim olmak üzere,

$$\rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) = \frac{k_7 e^{-i\beta h} + k_6 + k_5 e^{i\beta h}}{k_5 e^{-i\beta h} + k_6 + k_7 e^{i\beta h}}$$

$$k_5 = 1 - \frac{3z_m \Delta t}{2h}, k_6 = 4, k_7 = 1 + \frac{3z_m \Delta t}{2h}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) = \frac{X - Yi}{X + Yi}$$

$$X = k_6 + (k_5 + k_7) \cos \beta h, Y = (k_7 - k_5) i \sin \beta h$$

olur. Böylece

$$\left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{X^2 + Y^2}} \leq 1$$

elde edilir. O halde Strang splitting yöntemi ile elde edilen şema

$$\rho(\xi) = \rho_A^{n+1/2} \rho_B^{n+1} \rho_A^{n+1/2}$$

$$|\rho(\xi)| \leq \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \leq 1$$

olduğundan şartsız kararlıdır.

3.2.2 Model Problem ve Nümerik Çözümleri

Bu kısımda, (3.2.1) ile verilen mBE denkleminin nümerik çözümleri $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle elde edilip literatürde daha önce yapılan çalışmalarla

karşılaştırıldı. Model problem olarak, (3.2.1) denklemi

$$u(x, t_0 = 1) = \frac{x}{1 + \frac{1}{c_0} e^{\frac{x^2}{4\nu}}}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0,$$

$$u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0$$

sınır şartları ile ele alındı. Burada $0 \leq c_0 \leq 1$ aralığında bir sabittir. Bu problemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{t}/c_0 e^{x^2/4\nu t}}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

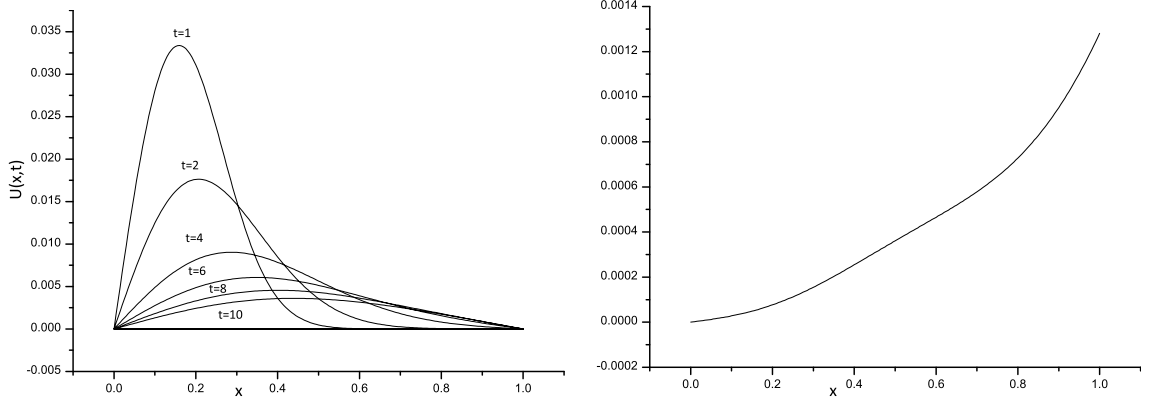
dir [95, 113].

Model probleme $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin uygulanmasıyla elde edilen nümerik sonuçları literatürde mevcut olan çalışmalarla karşılaştırmak için $\nu = 0.001, 0.005, 0.01$ viskozite değerleri, $h = 0.005, 0.0625, 0.02, 0.01$, $\Delta t = 0.01, 0.0001$, $c_0 = 0.5$ ve çözüm bölgesi $[0, 1]$ olarak alındı. Hesaplanan sonuçlar tablo ve grafiklerle sunuldu. Tablo 3.25' de $t = 1 - 11$ ' e kadar L_2 ve L_∞ hata normları farklı viskozite değerleri için verildi. Tablodan vizkozitenin küçülen değerleri için hata normlarının da küçüldüğü görülmektedir. Tablo 3.26' da ise farklı zaman ve viskozite değerleri için $[0, 1]$ ve $[0, 1.3]$ aralıklarında nümerik ve tam çözümün noktasal değerleri karşılaştırıldı. Tablodan nümerik ve tam çözümün uyum içinde olduğu açıktır. Tablo 3.27' de farklı zaman ve viskozite değerlerinde elde edilen hata normları ile literatürde mevcut olan çalışmalar karşılaştırıldı. Tablodan görüldüğü gibi sonuçlar iyi uyum içindedir.

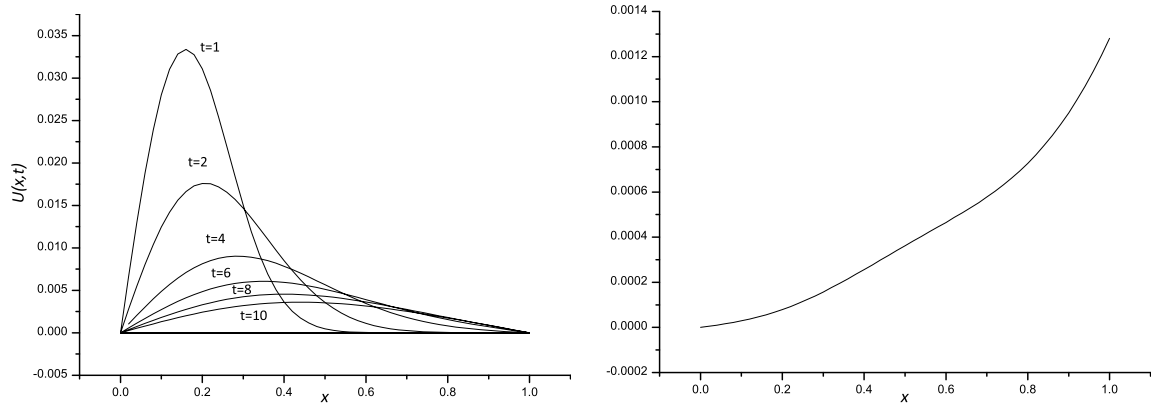
Tablo 3.28' de farklı zaman, konum ve viskozite değerleri için $S_{\Delta t}$ ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları literatürde bulunan birçok çalışma ile karşılaştırıldı. Tablodan $\nu = 0.001$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ değerleri için $S_{\Delta t}$ ile elde edilen L_2

Tablo 3.25: $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ konum ve zaman adım uzunlukları için viskozitenin farklı değerlerinde hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

$S_{\Delta t}$	$v = 0.01$		$v = 0.005$		$v = 0.001$	
t	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.378872	0.816308	0.225963	0.579181	0.067290	0.259060
3	0.344565	0.709969	0.205434	0.503516	0.061410	0.225365
4	0.317053	0.605200	0.188056	0.429117	0.056346	0.192216
5	0.307162	0.526346	0.175034	0.372676	0.052504	0.166927
6	0.323876	0.511298	0.164588	0.329767	0.049394	0.147827
7	0.366065	0.737778	0.155881	0.296210	0.046765	0.132819
8	0.737778	0.944593	0.148657	0.269279	0.044486	0.120756
9	0.482464	1.120233	0.143048	0.247220	0.042478	0.110820
10	0.539465	1.261995	0.139404	0.228838	0.040688	0.102585
11	0.590589	1.371775	0.138091	0.213415	0.039078	0.095516



Şekil 3.10: $\nu = 0.01$ ve $h = 0.005$ için farklı zamanlardaki nümerik çözüm ve $t = 10$ 'daki hata grafiği.



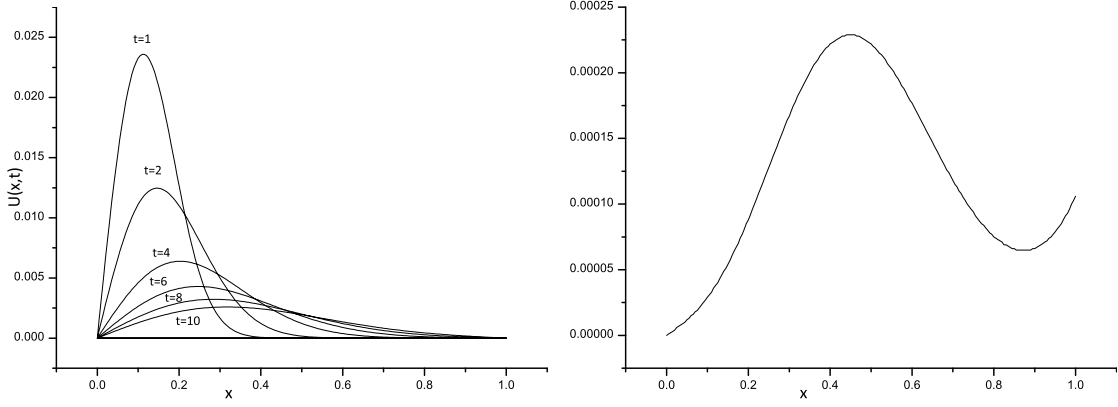
Şekil 3.11: $\nu = 0.01$ ve $h = 0.02$ için farklı zamanlardaki nümerik çözüm ve $t = 10$ 'daki hata grafiği.

Tablo 3.26: Farklı viskozite ve zaman değerlerinde $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ için nümerik ve tam çözümün karşılaştırılması.

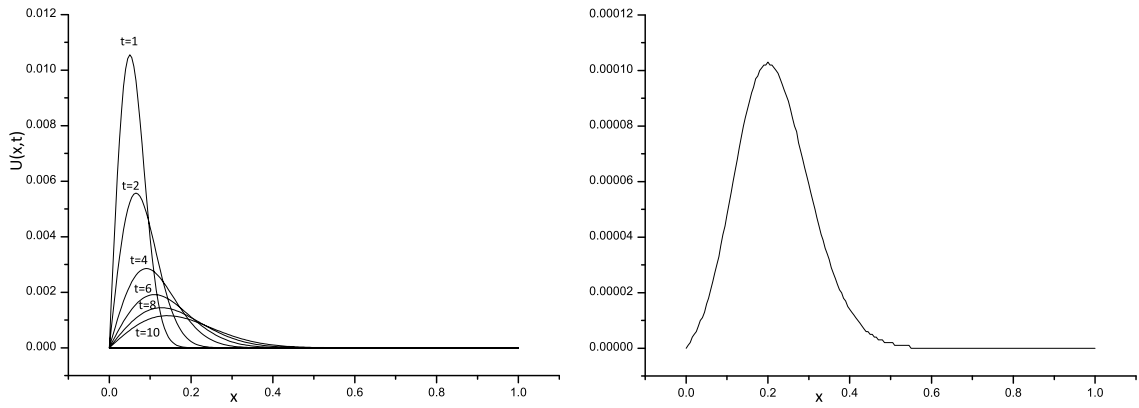
$S_{\Delta t}$	x	$t = 2$	$t = 2$	$t = 6$	$t = 6$	$t = 10$	$t = 10$
		$U(x, t)$	$u(x, t)$	$U(x, t)$	$u(x, t)$	$U(x, t)$	$u(x, t)$
$v = 0.01$	$[0, 1]$						
	0.2	0.017612	0.017658	0.004863	0.004911	0.002426	0.002503
	0.4	0.008484	0.009133	0.005945	0.006324	0.003579	0.003833
	0.6	0.001116	0.001174	0.003911	0.004356	0.003159	0.003624
	0.8	0.000047	0.000047	0.001562	0.001865	0.001747	0.002475
	1.0	0.000000	0.000001	0.000000	0.000526	0.000000	0.001281
	$[0, 1.3]$						
	0.2	0.017612	0.017658	0.004863	0.004911	0.002434	0.002503
	0.4	0.008484	0.009133	0.005946	0.006324	0.003616	0.003833
	0.6	0.001116	0.001174	0.003923	0.004356	0.003303	0.003624
	0.8	0.000047	0.000047	0.001653	0.001865	0.002192	0.002475
$v = 0.005$	1.0	0.000001	0.000001	0.000468	0.000526	0.001089	0.001281
	1.3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000039	0.000000	0.000300
	$[0, 1]$						
	0.2	0.011006	0.011510	0.004127	0.004253	0.002204	0.002292
	0.4	0.001215	0.001287	0.003082	0.003404	0.002432	0.002653
	0.6	0.000013	0.000013	0.000892	0.001006	0.001352	0.001528
$v = 0.001$	0.8	0.000000	0.000000	0.000118	0.000131	0.000437	0.000512
	1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000008	0.000000	0.000106
	$[0, 1]$						
	0.2	0.000227	0.000238	0.001109	0.001237	0.000997	0.001099
	0.4	0.000000	0.000000	0.000016	0.000017	0.000102	0.000116
	0.6	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000001
	0.8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 3.27: $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ değerleri için farklı viskozite ve zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının literatürde bulunan çalışmalarla karşılaştırılması.

	$t = 2$	$t = 2$	$t = 6$	$t = 6$	$t = 10$	$t = 10$
$\nu = 0.01$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$S_{\Delta t}$	0.378872	0.816308	0.323876	0.511298	0.539465	1.261995
[61](QBCA1)	0.37932	0.81680	0.32602	0.52579	0.54701	1.28125
[61](QBCA2)	0.37951	0.82212	0.32427	0.52579	0.54354	1.28125
[110]	0.523081	1.216987	0.490236	0.722492	0.640074	1.281248
[112]	0.09785	0.28062	—	—	0.48711	1.34692
[113]	0.37885	0.81626	0.32600	0.52579	0.54702	1.28125
[115](SBCM1)	0.38489	0.82934	—	—	0.54826	1.28127
[115](SBCM2)	0.39078	0.82734	—	—	0.54612	1.28127
[117]	0.37552	0.81766	0.27492	0.46752	0.19391	0.23074
$S_{\Delta t}, x \in [0, 1.3]$	0.378872	0.816308	0.276242	0.465147	0.253076	0.324493
[113]	0.37885	0.81626	0.27626	0.46514	0.25396	0.32449
[115](SBCM1)	0.38489	0.82934	—	—	0.25586	0.32723
[115](SBCM2)	0.39078	0.82734	—	—	0.25259	0.32337
$\nu = 0.005$						
$S_{\Delta t}$	0.225963	0.579181	0.164588	0.329767	0.139404	0.228838
[61](QBCA1)	0.22651	0.57998	0.16460	0.32987	0.13959	0.22885
[61](QBCA2)	0.22697	0.58660	0.16428	0.33654	0.13792	0.23506
[113]	0.22595	0.57915	0.16459	0.32977	0.13961	0.22884
[117]	0.22332	0.58081	0.16635	0.33260	0.13659	0.23074
$\Delta t = 0.001$						
$\nu = 0.005$						
$S_{\Delta t}$	0.225967	0.579192	0.164588	0.329768	0.139404	0.228838
[110]	0.257860	0.722646	0.225696	0.430821	0.187352	0.300062
[112]	0.02469	0.08456	—	—	0.12326	0.41604
[113]	0.22597	0.57919	0.16459	0.32977	0.13961	0.22884
[115](SBCM1)	0.22890	0.58623	—	—	0.14042	0.23019
[115](SBCM2)	0.23397	0.58424	—	—	0.13747	0.22626



Şekil 3.12: $\nu = 0.005$ ve $h = 0.005$ için farklı zamanlardaki nümerik çözüm ve $t = 10$ 'daki hata grafiği.



Şekil 3.13: $\nu = 0.001$ ve $h = 0.005$ için farklı zamanlardaki nümerik çözüm ve $t = 10$ 'daki hata grafiği .

Tablo 3.28: $\nu = 0.001$, $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri için farklı zamanlardaki L_2 ve L_∞ hata normları ile $h = 0.0625$ için Ref.[111]'deki sonuçlarla karşılaştırılması.

	$t = 2$		$t = 6$		$t = 10$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$S_{\Delta t}$	0.067290	0.259060	0.049394	0.147827	0.040688	0.102585
[61]QBCA1	0.06811	0.26094	0.04942	0.14810	0.04067	0.10264
[61]QBCA2	0.06953	0.27283	0.04917	0.15656	0.04000	0.10835
[95]	0.183549	0.818521	0.081417	0.213484	0.055115	0.139431
[110]	0.067039	0.279670	0.060462	0.171765	0.050108	0.121299
[112]SFEM	0.00549	0.02820	—	—	0.02743	0.13913
[112]QBDQM	0.13707	0.44538			0.06803	0.17110
[113]	0.06729	0.25905	0.04939	0.14783	0.04069	0.10259
[115]SBCM1	0.06843	0.26233	—	—	0.04080	0.10295
[115]SBCM2	0.07220	0.25975	—	—	0.03871	0.09882
[117]	0.066071	0.261856	0.0506308	0.150895	0.0416037	0.104701
$h = 0.0625$						
$\nu = 0.01, \Delta t = 0.01$						
$S_{\Delta t}$	0.320330	0.747418	0.310164	0.459398	0.496778	1.058110
[111]	0.34748	0.75978	0.32246	0.46335	0.54160	1.16480
$S_{\Delta t}, [0, 1.3]$	0.320330	0.747418	0.276358	0.456168	0.246756	0.322444
[111][0, 1.3]	0.29252	0.72890	0.24311	0.45606	0.22321	0.32374
$\nu = 0.005, \Delta t = 0.001$						
$S_{\Delta t}$	0.180242	0.512246	0.167275	0.318918	0.141169	0.227881
[111]	0.19508	0.54059	0.16489	0.32340	0.14055	0.22598
$\nu = 0.001, \Delta t = 0.01$						
$S_{\Delta t}$	0.139803	0.537001	0.064971	0.186797	0.046181	0.118351
[111]	0.11093	0.43656	0.06151	0.16468	0.04816	0.11807

Tablo 3.29: $h = 0.005$ ve $\Delta t = 10^{-4}$ konum ve zaman adım uzunlukları için L_2 ve L_∞ hata normlarının farklı zamanlarda Ref.[116] ile karşılaştırılması.

$\Delta t = 10^{-4}$	$t = 2$	$t = 2$	$t = 6$	$t = 6$	$t = 10$	$t = 10$
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$\nu = 0.005$						
$S_{\Delta t}$	0.225967	0.579192	0.164588	0.329768	0.139404	0.228838
[116]	0.22848	0.58038	0.16377	0.32872	0.13435	0.22763
$\nu = 0.001$						
$S_{\Delta t}$	0.067292	0.259065	0.049394	0.147827	0.040688	0.102585
[116]	0.06184	0.26277	0.04932	0.14808	0.04053	0.10245
$\nu = 0.01$						
$S_{\Delta t}$	0.378880	0.816323	0.323877	0.511298	0.539465	1.261995
[116]	0.38319	0.81637	0.27096	0.46224	0.19088	0.29908

Tablo 3.30: $h = 0.02$, $\nu = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri için farklı zamanlardaki L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3[95]$	$L_\infty \times 10^3[95]$
$h = 0.02$				
$\Delta t = 0.01, \nu = 0.01$				
$t = 2$	0.371810	0.804714	0.790430	1.703092
$t = 3$	0.341297	0.703483	0.655193	1.183270
$t = 4$	0.315501	0.602125	0.557679	0.996452
$t = 5$	0.305465	0.524320	0.510562	0.856134
$t = 6$	0.320382	0.470989	0.516723	0.761053
$t = 7$	0.360057	0.688973	0.567744	1.065455
$t = 8$	0.414215	0.890769	0.642754	1.358111
$t = 9$	0.472394	1.064227	0.723643	1.604831
$t = 10$	0.528176	1.205894	0.800256	1.802394

Tablo 3.31: $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.001$ için L_2 ve L_∞ hata normlarının farklı zamanlardaki değerlerinin Ref.[86] ile karşılaştırılması.

	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$\nu = 0.01$	$t = 2$	$t = 2$	$t = 6$	$t = 6$	$t = 10$	$t = 10$
$S_{\Delta t}$	0.377447	0.814588	0.322750	0.497355	0.535696	1.243026
[86]MQ	1.11964	0.81703	2.13574	0.46512	1.64297	0.30187
[86]GA	1.11477	0.82143	2.16663	0.52212	1.70474	0.34412
[86] r^3	1.10798	0.81433	2.12143	0.46350	1.63067	0.30045
$\nu = 0.005$						
$S_{\Delta t}$	0.224272	0.576517	0.164547	0.329422	0.139337	0.228775
[86]MQ	0.56600	0.57976	1.13718	0.33040	1.11044	0.22915
[86]GA	0.56249	0.58195	1.13520	0.32260	1.11617	0.25074
[86] r^3	0.55580	0.57618	1.12512	0.32866	1.09932	0.22781
$\nu = 0.001$						
$S_{\Delta t}$	0.064880	0.252902	0.049352	0.146938	0.040753	0.102467
[86]MQ	0.11581	0.25857	0.22997	0.14823	0.22887	0.10313
[86]GA	0.11467	0.25842	0.22878	0.14725	0.22789	0.10304
[86] r^3	0.11536	0.25244	0.22546	0.14603	0.22421	0.10175

Tablo 3.32: $\Delta t = 0.01$, $h = 0.02$, $\nu = 0.01, 0.005, 0.001$ değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.

ν	t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.01	2	0.371810	0.804714	0.371814	0.804706	0.371818	0.804704
	4	0.315501	0.602125	0.315487	0.602100	0.315478	0.602086
	6	0.320382	0.470989	0.320368	0.470989	0.320360	0.470988
	8	0.414215	0.890769	0.414205	0.890768	0.414199	0.890767
	10	0.528175	1.205894	0.528168	1.205893	0.528163	1.205892
0.005	2	0.217737	0.562575	0.217739	0.562573	0.217741	0.562574
	4	0.186489	0.423559	0.186483	0.423547	0.186480	0.423541
	6	0.164421	0.327889	0.164414	0.327877	0.164410	0.327871
	8	0.148752	0.268232	0.148746	0.268223	0.148743	0.268217
	10	0.139281	0.228440	0.139276	0.228432	0.139273	0.228427
0.001	2	0.057423	0.238088	0.057423	0.238088	0.057423	0.238090
	4	0.054883	0.183209	0.054882	0.183206	0.054881	0.183205
	6	0.049463	0.145079	0.049462	0.145076	0.049462	0.145075
	8	0.044846	0.119706	0.044845	0.119704	0.044844	0.119703
	10	0.041080	0.102051	0.041079	0.102049	0.041079	0.102048

ve L_∞ hata normlarının diğer çalışmalardan genel olarak daha iyi olduğu açıktır ve $h = 0.0625$ değeri için Ref. [111] ile yapılan karşılaştırmada $\nu = 0.01, 0.005$ değerleri için $S_{\Delta t}$ ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının birçok zaman değeri için daha iyi olduğu görülmektedir. Fakat zm bölgesi $[0, 1.3]$ ' e genişletildiğinde Ref. [111]' deki sonuçlarla büyük ölçüde uyum içindedir. Tablo 3.29–3.31' de sırasıyla Ref. [116], Ref. [95] ve Ref. [86] ile farklı h ve Δt değerleri için ayrıca karşılaştırma tabloları verildi. Tablo 3.29' da L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [116]' dekilerle uyum içinde olduğu görülmektedir. Tablo 3.30' da ise $S_{\Delta t}$ ile elde edilen hata normlarının tüm zamanlarda Ref. [95]' da verilenlerden iyi olduğu açıktır. Son olarak Tablo 3.31' e bakıldığında $S_{\Delta t}$ ile hesaplanan sonuçlarla Ref. [86]' de verilenler farklı zamanlar için aralarında stnlkler göstermesine rağmen genel olarak uyum içindedir. $h = 0.02$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01, 0.005, 0.001$ değerleriyle $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri Tablo 3.32' de karşılaştırıldı. Bu tabloya da baktığımızda ilerleyen zamanlarda Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin daha düşük hata normları verdikleri görülmektedir.

3.3 Düzenli Uzun Dalga (RLW) Denkleminin Operatör Splitting B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Çözümleri

Genellikle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler belirli fiziksel başlangıç/sınır koşulları tarafından motive edilen dalga olaylarını temsil ederler [118]. Tezin bu kısmında, aşağıdaki gibi fiziksel sınır şartlarıyla verilen

$$u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (3.3.1)$$

bir boyutlu RLW denklemi göz önüne alındı. Burada $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u \rightarrow 0$ ’dır. (3.3.1)’de t zaman, x konum, $u(x, t)$ dalga genliğini gösterirken ε ve μ de pozitif parametrelerdir.

RLW denklemi ilk olarak Peregrine tarafından “undular bore” probleminin gelişimini incelerken ortaya çıkmıştır. RLW denklemi lineer olmayan yayılan dalgaları gözlemlemede KdV denkleminde daha bilindik bir denklemdir. Bu denklem en çok sığ su dalgaları ve plazma dalgaları gibi fiziksel olayları modellemek için yaygın olarak kullanılır [119].

RLW denkleminin nümerik çözümleri birçok araştırmacı tarafından farklı yöntemler ve tekniklerle elde edilmiştir. Bunlara örnek olarak, Gardner vd. [120] RLW denklemini Galerkin kuadratik B-spline sonlu eleman yöntemi ile çözmüşlerdir. Kutluay [121] ve Esen [122] denklemin nümerik çözümlerini, hem sonlu fark hem de sonlu eleman yöntemleriyle elde etmişlerdir. Mei ve Chen [123] explicit multistep yöntem kullanarak denklemi çözmüşlerdir. Oruç vd. [124] Haar wavelet dalgacıkları ile sonuçlar bulmuşlardır. Islam vd. [125] meshfree tekniğiyle bazı radyal baz fonksiyonlarını (RBFs) kullanarak denklemi nümerik olarak çözmüşlerdir. Dağ vd. [126, 127] çalışmalarında sırasıyla kübik B-Spline kollokasyon ve kuintik B-Spline Galerkin sonlu eleman yöntemleriyle sonuçlar elde etmişlerdir. Bu çalışmaların dışında, Zaki [128] denklemi split ederek kübik B-Spline kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle çözerken, Raslan [129] denkleme

direkt kübik B-Spline kollokasyon sonlu eleman yöntemini uygulayarak nümerik sonuçlar bulmuştur. Doğan [130] lineer baz fonksiyonları kullanarak Galerkin yöntemi ile RLW denkleminin nümerik çözümlerini elde etti. Saka ve Dağ [131] RLW denkleminin nümerik çözümlerini bulmak için kuartik B-spline Galerkin yöntemini kullandılar. Dağ ve Özer [132] kübik B-spline baz fonksiyonları kullanarak denklemin nümerik çözümlerini en küçük kareler yöntemiyle elde ettiler. Saka vd. [133] RLW denklemini bir konum split tekniği kullanarak kuadratik B-spline Galerkin sonlu eleman yöntemiyle çözdüler. Mokhtari ve Mohammadi [134] Sinc baz fonksiyonları kullanarak RLW denkleminin nümerik çözümleri için kollokasyon yöntemini sundular. Saka ve Dağ [135] denklemin nümerik çözümlerini elde etmek için kuartik B-spline kollokasyon yöntemini çalıştılar. Saka vd. [136] altıncı ve yedinci dereceden B-spline kollokasyon yöntemleriyle RLW denkleminin çözümlerini sundular.

Son zamanlarda, solitary dalgalar, özellikle de soliton dalgalar hem deneysel hem de teorik olarak oldukça ilgi gören ve çalışılan konulardır. Bir soliton sürekli bir forma sahip, bir bölgede yerleşebilen, başka bir solitonla çarpışabilen ve çarpışma olayından faz değişimi dışında değişmeden ayrılabilen solitary dalgaanın çok özel bir türüdür [137]. Bu kısımda RLW denklemi zamana göre split edilip diskretizasyon işlemi uyguladıktan sonra Strang splitting [46] tekniği kullanılarak sonlu eleman kübik B-Spline kollokasyon yöntemiyle tek solitary dalga hareketi, iki solitary dalgaanın girişimi, “Undular Bore” problemleri ve bu problemlerin her biri için RLW denkleminin sağladığı üç korunum kanunu ve dalga genlikleri incelendi. (3.3.1) RLW denkleminin fiziksel davranışını incelemek için çözüm bölgesi bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde kısıtlanmıştır. RLW denklemi

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

başlangıç koşulu ve

$$\begin{aligned} u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u_{xx}(a, t) = 0, \quad u_{xx}(b, t) = 0 \end{aligned}$$

homojen sınır şartlarıyla birlikte ele alındı. Burada $f(x)$ verilen bir fonksiyondur. RLW denklemi

$$u_t - \mu u_{xxt} + u_x = 0 \quad (3.3.2)$$

$$u_t - \mu u_{xxt} + uu_x = 0. \quad (3.3.3)$$

formunda split edildi. Şimdi (3.3.2) ve (3.3.3) denklemlerine kübik B-spline kollokasyon yöntemini uygulayalım. Bunun için u yerine, $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde (2.4.3) ile verilen U_N yaklaşımı kullanılır ve x_m düğüm noktalarında (2.4.4)' de verilen U_N , U'_N ve U''_N noktasal değerleri (3.3.2) ve (3.3.3) denklemlerinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki gibi birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemleri

$$\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + 4\overset{\circ}{\delta}_m + \overset{\circ}{\delta}_{m+1} - \frac{6\mu}{h^2}(\overset{\circ}{\delta}_{m-1} - 2\overset{\circ}{\delta}_m + \overset{\circ}{\delta}_{m+1}) + \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) = 0, \quad (3.3.4)$$

$$\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + 4\overset{\circ}{\delta}_m + \overset{\circ}{\delta}_{m+1} - \frac{6\mu}{h^2}(\overset{\circ}{\delta}_{m-1} - 2\overset{\circ}{\delta}_m + \overset{\circ}{\delta}_{m+1}) + \frac{3z_m\varepsilon}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) = 0, \quad (3.3.5)$$

elde edilir. Burada “ $\circ$ ” sembolü t ye göre türevi ifade etmektedir ve burada

$$z_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}$$

dir. δ_m parametreleri yerine $(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n)/2$ Crank-Nicolson, $\overset{\circ}{\delta}_m$ yerine de zamana göre ileri fark $(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)/\Delta t$ yaklaşımı (3.3.4) ve (3.3.5) denklemlerinde yerlerine yazılırsa sırasıyla,

$$a_1\delta_{m-1}^{n+1} + b_1\delta_m^{n+1} + c_1\delta_{m+1}^{n+1} = c_1\delta_{m-1}^n + b_1\delta_m^n + a_1\delta_{m+1}^n \quad (3.3.6)$$

$$a_2\delta_{m-1}^{n+1} + b_2\delta_m^{n+1} + c_2\delta_{m+1}^{n+1} = c_2\delta_{m-1}^n + b_2\delta_m^n + a_2\delta_{m+1}^n \quad (3.3.7)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{6\mu}{h^2} - \frac{3\Delta t}{2h}, \quad b_1 = 4 + \frac{12\mu}{h^2}, \quad c_1 = 1 - \frac{6\mu}{h^2} + \frac{3\Delta t}{2h} \\ a_2 &= 1 - \frac{6\mu}{h^2} - \frac{3z_m\Delta t\epsilon}{2h}, \quad b_2 = 4 + \frac{12\mu}{h^2}, \quad c_2 = 1 - \frac{6\mu}{h^2} + \frac{3z_m\Delta t\epsilon}{2h} \end{aligned}$$

dir. (3.3.6) ve (3.3.7) denklemleri $(N+1)$ denklem ve $(N+3)$ tane de bilinmeyen δ_m parametrelerinden oluşur. $U_N(a, t) = 0$ ve $U_N(b, t) = 0$ sınır koşullarının kullanılmasıyla δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri için aşağıdaki bağıntılar

$$\delta_{-1} = -4\delta_0 - \delta_1, \quad \delta_{N+1} = -4\delta_N - \delta_{N-1} \quad (3.3.8)$$

bulunur. Eğer δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri (3.3.8) bağıntıları kullanılarak (3.3.6) ve (3.3.7) sistemlerinden yok edilirse $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu karesel matris sistemleri elde edilir. Daha sonra (3.3.6) ve (3.3.7) sistemleri bölüm 2' de (2.5.12) ile verilen Strang splitting algoritmasına uygun olarak düzenlenirse,

$$a_1\delta_{m-1}^*(t_{n+\frac{1}{2}}) + b_1\delta_m^*(t_{n+\frac{1}{2}}) + c_1\delta_{m+1}^*(t_{n+\frac{1}{2}}) = c_1\delta_{m-1}^*(t_n) + b_1\delta_m^*(t_n) + a_1\delta_{m+1}^*(t_n),$$

$$\delta_m^*(t_n) = \delta_m^0, \quad t \in [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}],$$

$$a_2\delta_{m-1}^{**}(t_{n+1}) + b_2\delta_m^{**}(t_{n+1}) + c_2\delta_{m+1}^{**}(t_{n+1}) = c_2\delta_{m-1}^{**}(t_n) + b_2\delta_m^{**}(t_n) + a_2\delta_{m+1}^{**}(t_n),$$

$$\delta_m^{**}(t_n) = \delta_m^*(t_{n+\frac{1}{2}}), \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad (3.3.9)$$

$$a_1\delta_{m-1}^{***}(t_{n+1}) + b_1\delta_m^{***}(t_{n+1}) + c_1\delta_{m+1}^{***}(t_{n+1}) = c_1\delta_{m-1}^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) + b_1\delta_m^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) + a_1\delta_{m+1}^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}),$$

$$\delta_m^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) = \delta_m^{**}(t_{n+1}), \quad t \in [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}]$$

biçiminde gösterilen şemalar elde edilir. Burada $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ ve zamana bağlı bilinmeyen δ parametreleri $\delta(t_{n+1}) = \delta^{***}(t_{n+1})$ ile hesaplanır. Bu Strang algoritmasının çözümüne başlamak için δ_m^0 başlangıç parametreleri $u(x, 0) = f(x)$ başlangıç koşulu kullanılarak oluşturulduktan sonra çözüme geçilir.

δ_m^0 başlangıç vektörü $U_N(x, 0) = f(x)$ başlangıç koşulu kullanılarak

$$u(x_m, t_0) = f(x_m) = U_N(x_m, t_0), \quad m = 0(1)N$$

$$\begin{aligned} u_m &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 \\ u_0 &= \delta_{-1}^0 + 4\delta_0^0 + \delta_1^0 \\ u_1 &= \delta_0^0 + 4\delta_1^0 + \delta_2^0 \\ &\vdots \\ u_N &= \delta_{N-1}^0 + 4\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

sisteminden elde edilir. Bu sistem $(N + 1)$ denklem ve $(N + 3)$ tane bilinmeyen δ_m^0 parametrelerinden oluşur. δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 parametreleri için $U_N''(a, 0) = 0$ ve $U_N''(b, 0) = 0$ sınır koşullarının uygulanmasıyla

$$\delta_{-1}^0 - 2\delta_0^0 + \delta_1^0 = 0$$

ve

$$\delta_{N-1}^0 - 2\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0 = 0$$

bağıntıları elde edilir. δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 (3.3.10) da yerine yazılırsa $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu δ_m^0 parametreleri için çözülebilen bir matris sistemi

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle δ_m^0 başlangıç vektörü bulunur. Bu başlangıç vektörü (3.3.9) ile verilen Strang splitting şemasında kullanılarak istenilen zamandaki nümerik çözümler hesaplanır. (3.3.9) sistemindeki lineer olmayan terim için (3.1.11) ile verilen iterasyon formülünün 3-5 kere uygulanmasıyla yaklaşık çözümler iyileştirildi.

3.3.1 Kararlılık Analizi

(3.3.6) ve (3.3.7) denklemlerinin kararlı olup olmadıklarını kontrol etmek için Fourier seri yöntemi veya von Neumann yöntemi kullanıldı. $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ ifadesi yarım zaman adımı için (3.3.6) denkleminde kullanılırsa, ρ_A (3.3.6) sisteminin kararlılık durumunu temsil eden bir gösterim olmak üzere,

$$(a_1 e^{-i\beta h} + b_1 + c_1 e^{i\beta h}) \xi^{n+1/2} = \xi^n (c_1 e^{-i\beta h} + b_1 + a_1 e^{i\beta h}),$$

$$\rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) = \frac{(a_1 + c_1) \cos \beta h + b_1 - i(c_1 - a_1) \sin \beta h}{(a_1 + c_1) \cos \beta h + b_1 + i(c_1 - a_1) \sin \beta h},$$

$$a_1 = 1 - \frac{6\mu}{h^2} - \frac{3\Delta t}{2h}, \quad b_1 = 4 + \frac{12\mu}{h^2}, \quad c_1 = 1 - \frac{6\mu}{h^2} + \frac{3\Delta t}{2h}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) = \frac{X - iY}{X + iY}$$

$$X = (a_1 + c_1) \cos \beta h + b_1, \quad Y = (c_1 - a_1) \sin \beta h$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$\left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{X^2 + Y^2}} \leq 1$$

sonucuna ulaşılır. (3.3.7) şemasının kararlılığını araştırmak için ise uu_x lineer olmayan terimindeki u lineerleştirildikten sonra z_m lokal bir sabit gibi davranacaktır ve von Neumann yöntemi uygulanabilir hale gelecektir. Benzer şekilde $\delta_m^n = e^{i\beta m h} \xi^n$ ifadesi (3.3.7) de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa, ρ_B (3.3.7) sisteminin kararlılık durumunu temsil eden bir gösterim olmak üzere,

$$\rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) = \frac{P - iQ}{P + iQ}, \quad P = (a_2 + c_2) \cos \beta h + b_2, \quad Q = (c_2 - a_2) \sin \beta h.$$

$$a_2 = 1 - \frac{6\mu}{h^2} - \frac{3z_m \Delta t \varepsilon}{2h}, \quad b_2 = 4 + \frac{12\mu}{h^2}, \quad c_2 = 1 - \frac{6\mu}{h^2} + \frac{3z_m \Delta t \varepsilon}{2h}$$

elde edilir. Böylece

$$\left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| = \sqrt{\frac{P^2 + Q^2}{P^2 + Q^2}} \leq 1$$

olur. O halde Strang splitting yöntemi ile elde edilen şema

$$\rho(\xi) = \rho_A^{n+1/2} \rho_B^{n+1} \rho_A^{n+1/2}$$

$$|\rho(\xi)| \leq \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \leq 1$$

olduğundan şartsız kararlıdır.

3.3.2 Model Problemler ve Nümerik Çözümleri

$S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin etkinliğini test etmek için, RLW denklemini üç farklı başlangıç ve sınır şartı ile birlikte ele alındı. Nümerik çözüm ve analitik çözüm arasındaki farkı ölçmek, dalga pozisyonu ve genlik tahmininin ne kadar iyi olduğunu görmek için literatürde

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=1}^N [u_j^{tam} - U_j^{nümerik}]^2},$$

$$L_\infty = \max_j |u_j^{tam} - U_j^{nümerik}|.$$

olarak tanımlanan hata normları kullanıldı. (3.3.1) RLW denklemini sırasıyla kütle, momentum ve enerjisi

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u dx \cong h \sum_{j=1}^N U_j^n,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [u^2 + \mu(u_x)^2] dx \cong h \sum_{j=1}^N [(U_j^n)^2 + \mu((U_x)_j^n)^2],$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} [u^3 + 3(u)^2] dx \cong h \sum_{j=1}^N [(U_j^n)^3 + 3(U_j^n)^2].$$

olarak tanımlanan üç korunum kanununu sağlar.

3.3.3 Solitary Dalga Hareketi

RLW denkleminin tek dalga hareketi olayını modelleyen analitik çözümü

$$u(x, t) = 3c \sec h^2 [k(x - x_0 - \nu t)]$$

formunda verilir [119]. Burada $k = \frac{1}{2}(\frac{\varepsilon c}{\mu(1+\varepsilon c)})$, $\nu = 1 + \varepsilon c$ dalga hızı ve $3c$ de dalga genliğidir. Başlangıç şartı

$$u(x, 0) = 3c \sec h^2 [k(x - x_0)]$$

ve sınır şartları

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

olarak alındı. Bu problem için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$I_1 = \frac{6c}{k}, \quad I_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \quad I_3 = \frac{36c^2}{k}(1 + \frac{4c}{5})$$

olarak verilmiştir [128]. Bu korunum sabitlerinin $c = 0.1$ için analitik değerleri

$I_1 = 3.979949$, $I_2 = 0.810462$, $I_3 = 2.57900$, $c = 0.03$ için ise $I_1 = 2.109410$, $I_2 = 0.127302$, $I_3 = 0.38880$ dir. Daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için bütün hesaplamalarda $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $x_0 = 0$ ve $\Delta t = 0.1$ olarak alındı. Tablo 3.33' de $c = 0.1$ ve 0.03 için $-40 \leq x \leq 60$ aralığında $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin farklı zamanlardaki L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Bu tabloya bakıldığında $c = 0.1$ için Ext4' ün $S_{\Delta t}$ dan, Ext6' nın da Ext4' den daha küçük hatalar verdiği görülmektedir. Fakat $c = 0.03$ için bu üç yöntem ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının arasında az da olsa fark olmasına rağmen kayda değer bir farklılık yoktur. Tablo 3.34' de $c = 0.1$ ve 0.03 için çözüm aralığı $-40 \leq x \leq 70$ olarak genişletildiğinde $c = 0.03$ için L_2 ve L_∞ hata normlarının daha da küçüldüğü görülmektedir. Tablo 3.35' de $-40 \leq x \leq 60$ aralığı içinde L_2 ve L_∞ hata normları, korunum sabitlerinin farklı zamanlardaki değerleri ve bunların literatürdeki bazı çalışmalarla karşılaştırılması verildi. Tablo 3.35 $-40 \leq x \leq 60$ aralığında $c = 0.1$, yani genlik 0.3 için hesaplanan korunum sabitlerinin ve L_2 , L_∞ hata normlarının farklı zamanlarda literatürde bulunan bazı çalışmalarla karşılaştırılmasını göstermektedir. Tablo 3.35' den açıkça görüldüğü gibi korunum sabitleri zaman ilerledikçe neredeyse değişmemektedir. Ayrıca $S_{\Delta t}$ yöntemiyle

hesaplanan L_2 hata normu Ref. [132]' dekinden büyük olmasına rağmen, daha yüksek dereceden spline kullanan çalışmalarda verilen L_2 hata normlarından çok daha küçüktür. $S_{\Delta t}$ ile hesaplanan L_∞ hata normu ise karşılaştırma yapılan bütün çalışmalarda hesaplananlardan oldukça iyidir. Tablo 3.36' da $t = 20$ zamanında, $c = 0.1$ ve $c = 0.03$ değerlerine karşılık gelen sırasıyla 0.3 ve 0.09 genlikleri için $h = 0.125$ ve $h = 0.1$ konum adım uzunluklarında literatürde bulunan birçok çalışma ile karşılaştırma yapıldı. Bu tablodan da açıkça görülmektedir ki $c = 0.1$ ve $h = 0.125$ değerleri için genel olarak $S_{\Delta t}$ ile elde edilen hata normları birçok çalışmada daha yüksek dereceden spline kullanılmış olmasına rağmen kayda değer ölçüde daha küçüktür. $c = 0.03$ için verdiğimiz L_2 , L_∞ hata normları Ref. [128]' unkinden daha büyük olmasına rağmen diğer çalışmalarla uyum içindedir. $c = 0.03$ ve $h = 0.1$ değerleri için tabloya baktığımızda korunum sabitlerinde hemen hemen hiç değişim olmadığını ve L_2 normunun diğer çalışmalara göre az da olsa daha büyük olduğunu fakat L_∞ normunun ise uyumlu olduğu görülür. Şekil 3.14' de $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$ ve $c = 0.1$ için $t = 0$ dan $t = 20$ zamanına kadar tek dalga'nın hareketi verildi. Şekilden $t = 0$ zamanında $x = 0$ konumunda genliği 0.3 iken zaman ilerledikçe tek dalga'nın şeklini koruyarak sağa doğru hareket ettiği ve $t = 20$ zamanına gelindiğinde en yüksek genliğinin $x = 22$ konumunda 0.299988 olduğu görüldü.

3.3.4 İki Solitary Dalga'nın Girişimi

Bu kısımda iki farklı çarpışma problemi ele alındı. İlk olarak, iki pozitif solitary dalga'nın girişimini gözlemlemek için, RLW denklemi $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u \rightarrow 0$ sınır koşulları ve

$$k_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon c_1/(1 + \varepsilon c_1)}, \quad k_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon c_2/(1 + \varepsilon c_2)}$$

olmak üzere

$$u(x, 0) = 3c_1 \sec h^2 [k_1(x - x_1)] + 3c_2 \sec h^2 [k_2(x - x_2)] \quad (3.3.11)$$

Tablo 3.33: $-40 \leq x \leq 60$ aralığında $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1, 0.03$, $\varepsilon = \mu = 1$ değerleri ile $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin tek dalga hareketi için farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.

	t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$c = 0.1$	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	4	0.016917	0.007210	0.014207	0.006082	0.012284	0.005196
	8	0.032897	0.014087	0.027417	0.011731	0.023502	0.009876
	12	0.047378	0.019864	0.039039	0.016303	0.033018	0.013491
	16	0.060388	0.024692	0.049136	0.019985	0.040918	0.016257
	20	0.072292	0.028834	0.058157	0.023049	0.047731	0.018453
$c = 0.03$	4	0.130897	0.106959	0.130898	0.106959	0.130899	0.106960
	8	0.276784	0.141677	0.276785	0.141677	0.276786	0.141677
	12	0.395207	0.151388	0.395207	0.151388	0.395208	0.151388
	16	0.472613	0.155237	0.472611	0.155237	0.472611	0.155237
	20	0.525073	0.198401	0.525069	0.198404	0.525069	0.198406

Tablo 3.34: Tek dalga hareketinin $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1, 0.03$, $\varepsilon = \mu = 1$ değerleri için $-40 \leq x \leq 70$ aralığında üç yöntemin farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.

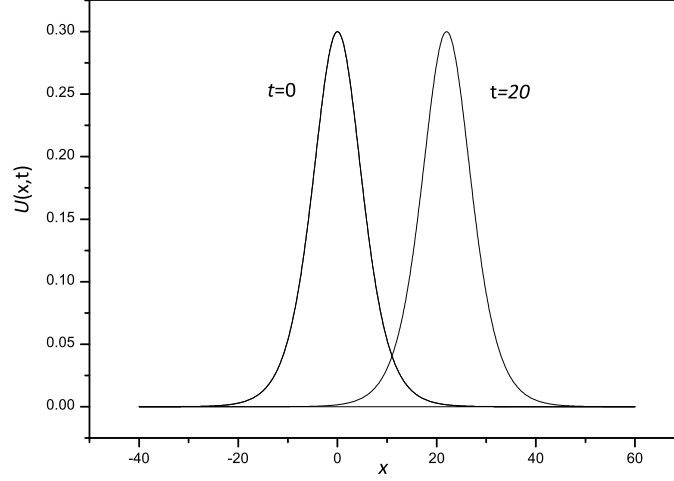
	t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$c = 0.1$	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	4	0.016917	0.007210	0.014207	0.006082	0.012284	0.005196
	8	0.032897	0.014087	0.027417	0.011731	0.023502	0.009876
	12	0.047378	0.019864	0.039038	0.016303	0.033017	0.013491
	16	0.060379	0.024692	0.049125	0.019985	0.040905	0.016257
	20	0.072187	0.028834	0.058026	0.023049	0.047571	0.018453
$c = 0.03$	4	0.130842	0.106959	0.130843	0.106959	0.130844	0.106960
	8	0.276631	0.141677	0.276633	0.141677	0.276634	0.141677
	12	0.394745	0.151388	0.394745	0.151388	0.394746	0.151388
	16	0.471014	0.155237	0.471012	0.155237	0.471012	0.155237
	20	0.519175	0.157084	0.519171	0.157084	0.519171	0.157084

Tablo 3.35: $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$, $\varepsilon = \mu = 1$ değerleri için tek dalga hareketinin $-40 \leq x \leq 60$ aralığında korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması.

Time	Method	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$t = 0$	$S_{\Delta t}$	3.979927	0.810462	2.579007	0.000	0.000
	[130]	3.97993	0.810461	2.57901	0.002	0.007
	[127]	3.9799271	0.8104625	2.5790075	0.000	0.000
	[123]	3.9799	0.8104	2.5790	0.000	0.000
	[131]	3.9799271	0.8104625	2.5790075	0.000	0.000
	[132]	3.979927	0.810463	2.579007	0.000	0.000
$t = 4$	$S_{\Delta t}$	3.979954	0.810462	2.579007	0.016917	0.007210
	[130]	3.98039	0.810610	2.57950	0.116	0.054
	[127]	3.9799290	0.8104622	2.5790066	0.04084	0.01560
	[123]	3.9800	0.8104	2.5790	0.36556	0.14725
	[131]	3.9799299	0.8104624	2.5790073	0.04080	0.01563
	[132]	3.977092	0.809641	2.576296	0.0006	0.1458
$t = 8$	$S_{\Delta t}$	3.979971	0.810462	2.579007	0.032897	0.014087
	[130]	3.98083	0.810752	2.57996	0.224	0.100
	[127]	3.9799262	0.8104620	2.5790057	0.08054	0.03148
	[123]	3.9800	0.8104	2.5791	0.73694	0.30090
	[131]	3.9799282	0.8104624	2.5790070	0.08049	0.03152
	[132]	3.973316	0.808320	2.571938	0.0026	0.5786
$t = 12$	$S_{\Delta t}$	3.979984	0.810462	2.579007	0.047378	0.019864
	[130]	3.98125	0.810884	2.58041	0.325	0.139
	[127]	3.9799229	0.8104617	2.5790048	0.11917	0.04658
	[123]	3.9800	0.8104	2.5791	1.0940	0.44214
	[131]	3.9799259	0.8104623	2.5790068	0.11909	0.04663
	[132]	3.979106	0.806774	2.566836	0.0064	0.9223
$t = 16$	$S_{\Delta t}$	3.979987	0.810462	2.579007	0.060388	0.024692
	[130]	3.98165	0.811014	2.58083	0.417	0.171
	[127]	3.9799144	0.8104614	2.5790040	0.15641	0.06054
	[123]	3.9800	0.8104	2.5791	1.4340	0.56944
	[131]	3.9799182	0.8104622	2.5790065	0.15629	0.06060
	[132]	3.965344	0.805461	2.562505	0.0115	1.2148
$t = 20$	$S_{\Delta t}$	3.979962	0.810462	2.579007	0.072292	0.028834
	[130]	3.98206	0.811164	2.58133	0.511	0.198
	[127]	3.9798832	0.8104612	2.5790031	0.19215	0.07337
	[123]	3.9800	0.8104	2.5791	1.4340	0.56944
	[131]	3.9798879	0.8104622	2.5790063	0.19199	0.07344
	[132]	3.961597	0.804185	2.558292	0.0184	1.5664

Tablo 3.36: $\Delta t = 0.1$, $h = 0.125, 0.1$, $c = 0.1, 0.03$ değerleri için $t = 20$ ' deki L_2 ve L_∞ hata normlarının ve korunum sabitlerinin karşılaştırılması.

Yöntem	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
$S_{\Delta t}$	0.072292	0.028834	3.979962	0.810462	2.579007
[125]MQ	0.206910	0.078027	3.9798831	0.81046248	2.5790074
[125]IMQ	0.206912	0.078027	3.9798725	0.81046248	2.5790074
[125]IQ	0.206913	0.078027	3.9798824	0.81046248	2.5790074
[125]GA	0.206911	0.078027	3.9798831	0.81046248	2.5790074
[125]TPS	0.207147	0.078152	3.9798826	0.81046247	2.5790073
[126]	0.30	0.116	3.979883	0.81027618	2.57839258
[132]	0.0184	1.5664	3.961597	0.804185	2.558292
[133]	0.192	0.073	3.97989	0.81046	2.57901
[134]	0.1797446	0.06.799314	3.979913	0.810462	2.579007
[135](QBCM1)	0.215	0.083	3.97995	0.81046	2.57901
[135](QBCM2)	0.357	0.129	3.97995	0.81046	2.57901
[122]	0.219	0.086	3.97988	0.810465	2.57901
[136](SBCM1)	0.220	0.084	3.97995	0.81046	2.57901
$c = 0.03$					
$S_{\Delta t}$	0.525073	0.198401	2.109010	0.127302	0.388806
[126]	0.57	0.432	2.104584	0.12729366	0.3887776
[130]	0.535	0.198	2.10906	0.127305	0.388815
[127](QBGM1)	0.558	0.205	2.10460	0.12730	0.38880
[127](QBGM2)	0.566	0.207	2.10457	0.12730	0.38880
[128]	0.24185	0.12464	2.10741	0.127230	0.38856
[124]	0.550	0.234	2.10461	0.12730	0.38880
[135]	0.356	0.295	2.10831	0.12913	0.38881
[136](SBCM1)	0.444	0.419	2.10849	0.12730	0.38881
$h = 0.1(S_{\Delta t})$					
[127](QBGM1)	0.560	0.205	2.10459	0.12730	0.38880
[127](QBGM2)	0.567	0.208	2.10456	0.12730	0.38880
[131]	0.539	0.198	2.10770	0.12730	0.38880
[133]	0.541	0.199	2.10707	0.12730	0.38880
[129]	0.57247	0.36498	2.103622	0.127184	0.3884398
[136](SBCM1)	0.556	0.419	2.10904	0.12730	0.38881



Şekil 3.14: Tek dalga hareketinin $t = 0$ ve $t = 20$ grafiği.

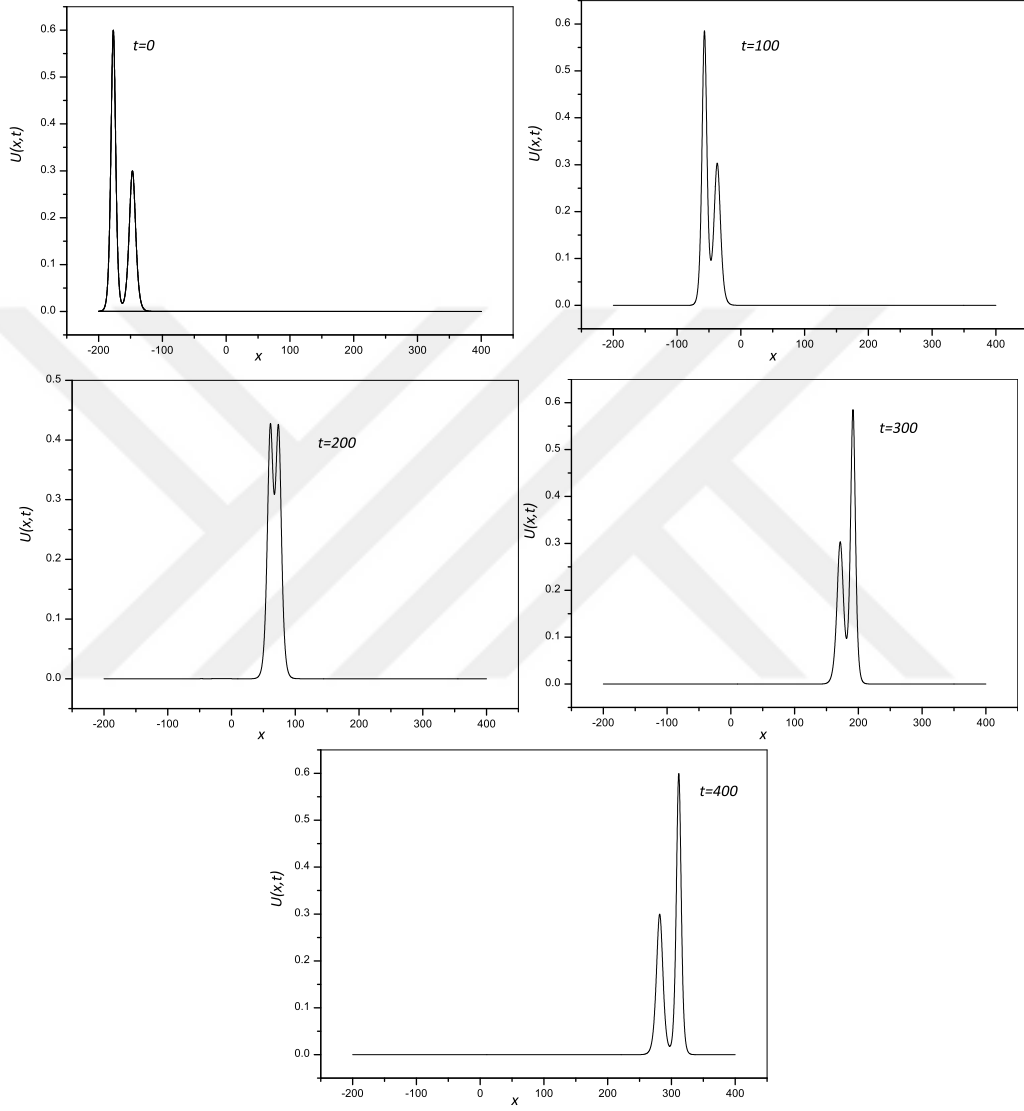
başlangıç koşulu ile ele alındı [130]. (3.3.11) denklemi $3c_1$ genliğe sahip $x = x_1$ de yerleştirilmiş bir dalgayı ve $3c_2$ genliğe sahip $x = x_2$ de yerleştirilmiş ikinci bir dalgayı ifade etmektedir. Bilindiği gibi daha büyük genliğe sahip olan dalganın hızı da daha büyüktür. Sonuç olarak, $x_1 < x_2$ ve $c_2 < c_1$ olarak seçilmesi zaman ilerledikçe iki dalganın çarpışmasını garanti edecektir. Bu olayı gözlemlemek için, $-200 \leq x \leq 400$ aralığında parametreler $x_1 = -177$, $x_2 = -147$, $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.1$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $h = 0.12$ ve $\Delta t = 0.1$ olarak alındı. Zaman $t = 0$ dan $t = 400$ e kadar çalıştırıldığında iki dalganın girişimi ve ayrılması olayı gerçekleşmektedir. Şekil 3.15' den görüldüğü gibi, $t = 0$ zamanında büyük genliğe sahip olan dalga küçük genliğe sahip olan dalganın solunda yer almaktadır. Zaman ilerledikçe genliğe büyük olan doğal olarak da hızı büyük olan dalganın, küçük dalgayı $t = 100$ civarında yakaladığı ve $t = 200 - 300$ arasında küçük dalgayı içerdiği ve sonra ayrıldığı görülmektedir. Başlangıçta büyük dalganın genliği 0.6 ve küçük dalganın genliği 0.3 iken çarpışmadan sonra $t = 400$ anında, $x = 311.44$ noktasında büyük dalganın genliği 0.599797, küçük dalganın genliği ise $x = 281.560$ noktasında 0.299904 olduğu görüldü.

Tablo 3.37: İki solitary dalganın girişimi sonucunda farklı zamanlarda hesaplanan korunum sabitlerinin ve Ref.[122] ile karşılaştırılması.

t	I_1	I_2	I_3	$I_1[122]$	$I_2[122]$	$I_3[122]$
0	9.858245	3.244789	10.778329	9.85825	3.24481	10.77833
40	9.861351	3.244790	10.778328	9.85833	3.24482	10.77836
80	9.861624	3.244790	10.778323	9.85832	3.24482	10.77834
120	9.861648	3.244791	10.778314	9.85833	3.24486	10.77843
160	9.861650	3.244794	10.778300	9.85833	3.24491	10.77852
200	9.861650	3.244796	10.778290	9.85830	3.24492	10.77851
240	9.861650	3.244794	10.778299	9.85830	3.24489	10.77846
280	9.861650	3.244790	10.778312	9.85829	3.24484	10.77834
320	9.861649	3.244788	10.778319	9.85832	3.24482	10.77833
360	9.861649	3.244798	10.778320	9.85829	3.24479	10.77823
400	9.861648	3.244787	10.778320	9.85830	3.24478	10.77819

Tablo 3.38: İkinci iki dalga girişim probleminin korunum sabitleri ve Ref.[121] ile karşılaştırılması.

t	I_1	I_2	I_3	$I_1[121]$	$I_2[121]$	$I_3[121]$
0	37.916522	120.522769	744.081209	37.91648	120.35150	744.08140
2	37.910586	120.486493	744.079530	37.91682	120.35710	744.03870
4	37.904506	120.449938	744.079734	37.91697	120.35840	744.01100
6	37.898508	120.413763	744.078250	37.91709	120.35830	743.97960
8	37.892728	120.379162	744.067803	37.91719	120.35700	743.86790
10	37.887731	120.353147	744.019816	37.91727	120.36380	743.42020
12	37.884625	120.350565	743.886930	37.91733	120.39150	742.33870
14	37.883441	120.357086	743.792636	37.91736	120.41560	741.57810
16	37.882139	120.333975	743.919530	37.91740	120.38860	742.48890
18	37.878825	120.300550	744.034627	37.91741	120.36530	743.47520
20	37.873716	120.266184	744.074575	37.91744	120.35990	743.86380
22	37.867862	120.230706	744.086166	37.91745	120.35940	743.97500
24	37.861791	120.194639	744.090269	37.91746	120.35950	744.00370
25	37.858731	120.176525	744.091498	37.91745	120.35950	744.00850



Şekil 3.15: İki solitary dalganın $0 \leq t \leq 400$ zaman aralığında girişimi.

İkinci olarak ise $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u \rightarrow 0$ sınır koşulları ve

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^2 3A_j \sec h^2 [k_j(x - x_j)], \quad A_j = \frac{4k_j^2}{(1 - 4k_j^2)}, \quad j = 1, 2$$

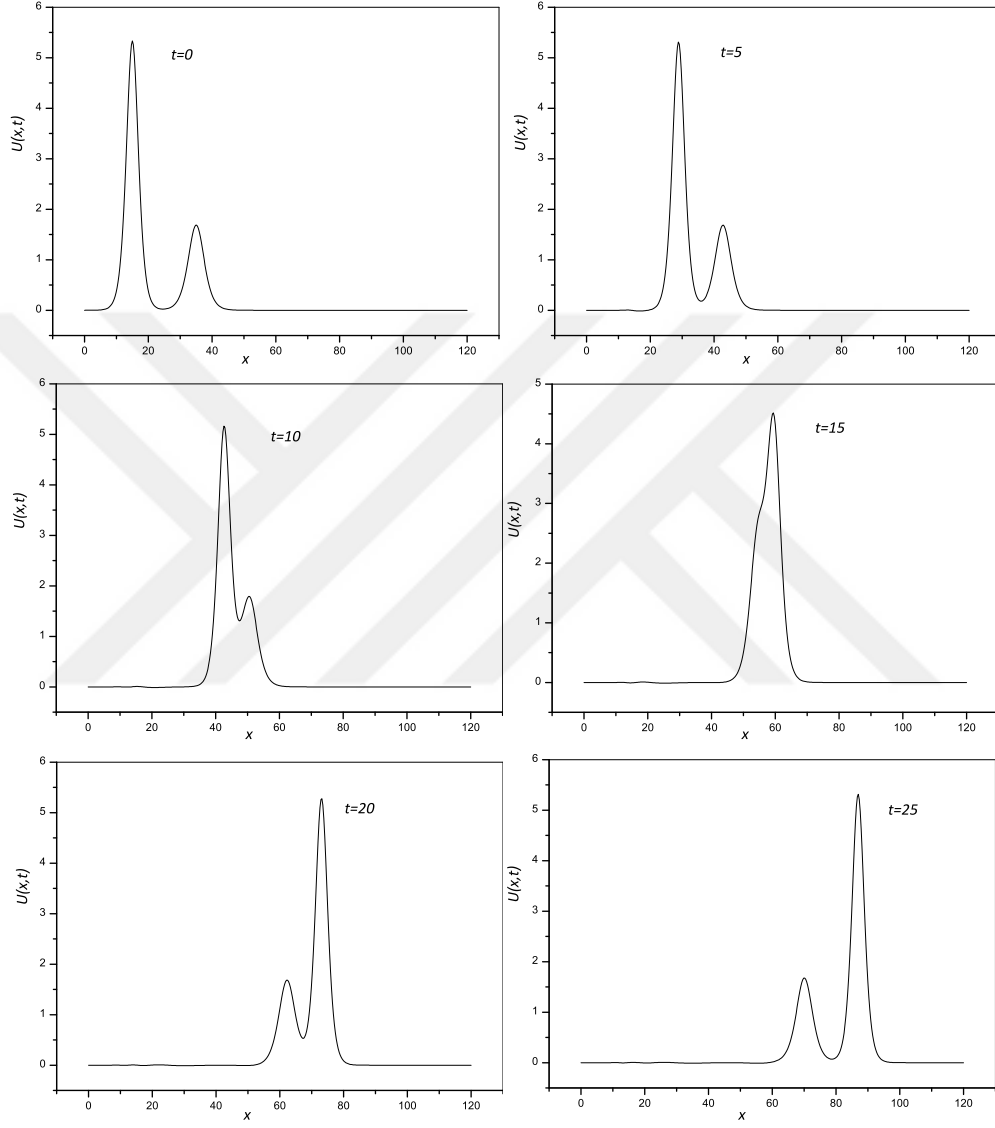
başlangıç şartına sahip çarpışma problemi ele alındı. Bu çarpışma olayını görmek için ise, $0 \leq x \leq 120$ aralığında $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.3$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $h = 0.3$ ve $\Delta t = 0.1$ değerleri kullanıldı. $t = 0$ ' da büyük genlikli dalga küçük dalganın solunda yer almaktadır. Fakat zaman ilerledikçe $t = 10 - 15$ arasında büyük dalganın küçük dalgayı yakalayıp içerdği ve sonra ayrılarak yoluna devam ettiği görülmektedir. Çarpışmadan önce büyük dalganın genliği 5.33338, küçük dalganınki ise 1.68598 iken $t = 25$ de ölçülen genlikleri sırasıyla $x = 87.0$ da 5.301403 ve $x = 70.2$ de 1.676635 olduğu görüldü. Tablo 3.37 ve 3.38' de sırasıyla her iki çarpışma probleminin korunum sabitleri Ref. [122] ve Ref. [121]' de verilenlerle karşılaştırıldı. Bu tablolardan görüldüğü gibi sonuçlar iyi bir uyum içindedir.

3.3.5 Ardışık Dalgaların Oluşumu

Bu kısımda ise RLW denkleminin $x \rightarrow \infty$ iken $u \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow -\infty$ iken $u \rightarrow u_0$ fiziksel sınır koşulları ve

$$u(x, 0) = \frac{u_0}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{x - x_0}{d}\right) \right]$$

başlangıç şartı ile göz önüne alındı. Burada $u(x, 0)$, $t = 0$ zamanındaki su yüzeyinin yüksekliğini, u_0 ise $x = x_0$ da merkezlenen su seviyesindeki değişim büyüklüğünü ve d değişimin dikliğini göstermektedir. Yukarıdaki fiziksel şartlar altında I_1 , I_2 ve



Şekil 3.16: İki solitary dalganın $0 \leq t \leq 25$ zaman aralığında girişimi.

Tablo 3.39: Ardışık dalga oluşumu probleminin korunum sabitleri, dalga pozisyonu ve genlikleri.

d=2					
t	I_1	I_2	I_3	x	genlik
0	3.612000	0.351478	1.088220	—	—
50	8.987000	0.901476	2.793248	48.9600	0.139631
100	14.362000	1.451475	4.498036	102.7200	0.159078
150	19.737000	2.001473	6.202710	156.9600	0.170753
200	25.112000	2.551471	7.907342	211.2000	0.177385
250	30.486999	3.101469	9.611957	265.9200	0.181884
$d = 5$					
0	3.612000	0.336311	1.040970	—	—
50	8.987000	0.886311	2.746457	48.4800	0.110283
100	14.362000	1.436310	4.451662	102.2400	0.136901
150	19.737000	1.986309	6.156542	156.2400	0.157464
200	25.112000	2.536307	7.861249	210.7200	0.170243
250	30.487000	3.086305	9.565893	264.9600	0.177727
[122] $d = 2$					
0	3.6120001	0.35148	1.08822	—	—
50	8.9869997	0.90144	2.79314	48.96000	0.13960
100	14.3619987	1.45140	4.49778	102.72000	0.15900
150	19.7369989	2.00134	6.20229	156.96000	0.17065
200	25.1119971	2.55128	7.90675	211.20000	0.17735
250	30.4869971	3.10123	9.61118	265.92000	0.18177
[122] $d = 5$					
0	3.6120002	0.33631	1.04097	—	—
50	8.9870004	0.88630	2.74643	48.48000	0.11028
100	14.3619996	1.43628	4.45156	102.24000	0.13686
150	19.7369994	1.98624	6.15631	156.24000	0.15741
200	25.1119996	2.53618	7.86086	210.72000	0.17012
250	30.4869998	3.08613	9.56533	264.96000	0.17767

I_3 ' ün sabit kalmadığı simülasyonlar boyunca aşağıdaki oranlarda

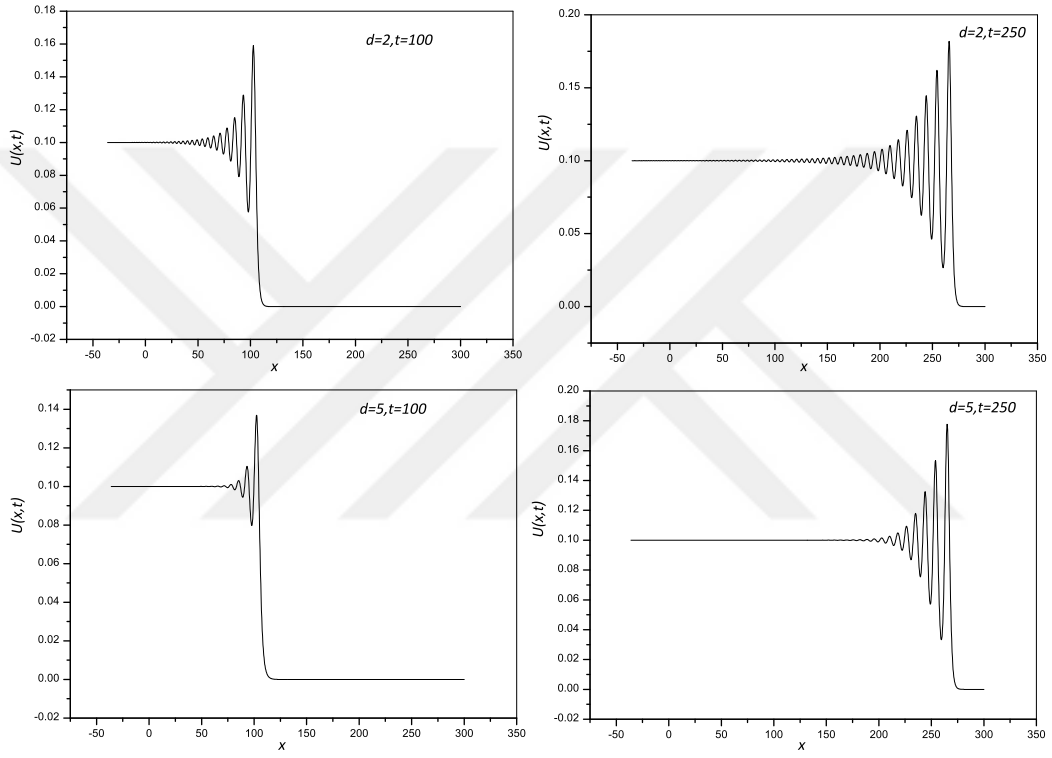
$$M_1 = \frac{d}{dt} I_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = u_0 + \frac{\varepsilon}{2} u_0^2,$$

$$M_2 = \frac{d}{dt} I_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u + \mu (u_x)^2\} dx = u_0^2 + \frac{2\varepsilon}{3} u_0^3,$$

$$M_3 = \frac{d}{dt} I_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 + 3u^2) dx = 3u_0^2 + (1 + 2\varepsilon)u_0^3 + \frac{3\varepsilon}{4} u_0^4$$

lineer olarak arttığı görülmektedir [128].

Bu problem için bütün hesaplamalar $\varepsilon = 1.5$, $\mu = \frac{1}{6}$, $u_0 = 0.1$, $x_0 = 0$,



Şekil 3.17: Dalga oluşumu probleminin $d = 2, 5$ için $t = 100$ ve $t = 250$ zamanlarındaki simülasyonu.

$h = 0.24$, $\Delta t = 0.1$, $d = 2, 5$ ve $-36 \leq x \leq 300$ değerleri için yapıldı. $t = 250$ zamanına kadar problem incelendi ve $d = 2$ ve 5 için ilk dalga oluşumunun I_1, I_2, I_3 değerleri, dalga pozisyonu ve genlikleri Tablo 3.39' da verildi. Tablodan I_1, I_2, I_3 değerlerindeki nümerik değişim $d = 2$ için

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{30.486999 - 3.612000}{250} = 0.10750 \\ M_2 &= \frac{3.101469 - 0.351478}{250} = 0.0109 \\ M_3 &= \frac{9.611957 - 1.088220}{250} = 0.0341 \end{aligned}$$

ve $d = 5$ için

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{30.487000 - 3.612000}{250} = 0.1075 \\ M_2 &= \frac{3.086305 - 0.336311}{250} = 0.011 \\ M_3 &= \frac{9.565893 - 1.040970}{250} = 0.0341 \end{aligned}$$

olarak hesaplandı. Bu değerler $M_1 = 0.1075$, $M_2 = 0.0109$, $M_3 = 0.034113$ teorik değerleri ile uyum içindedir. I_1, I_2, I_3 değerlerinin sırasıyla M_1, M_2, M_3 oranlarında lineer olarak arttığı gözlemlendi.

4. COUPLED VİSKOZ BURGERS' DENKLEMİNİN OPERATÖR SPLITTING B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMEN ÇÖZÜMLERİ

4.1 Giriş

Bu bölümde, yerçekimi etkisi altında iki tür partikülün ölçekli hacim konsantrasyonlarının sıvı süspansiyonlarda veya kolloidlerde sedimentasyonu veya gelişiminin basit bir modeli olan ve Episov [138] tarafından türetilen coupled viskoz Burgers' denkleminin nümerik çözümleri ele alındı. Episov, eğer parçacıkların ağırlıkları kendisini sarmalayan sıvıdan ağır ise parçacıkların hareketinin sedimentasyon ile hafif ise parçacıkların su içinde askıda kalması veya yüzeyde yoğunlaşması ile sonuçlanacağını söylemiştir.

Tezin bu bölümünde

$$u_t - u_{xx} + \eta uu_x + \alpha(uv)_x = 0, \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T], \quad (4.1.1)$$

$$v_t - v_{xx} + \eta vv_x + \beta(uv)_x = 0, \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T], \quad (4.1.2)$$

coupled viskoz Burgers' denklemi,

$$u(x, 0) = \phi_1(x), \quad v(x, 0) = \phi_2(x)$$

başlangıç koşulları

$$u(a, t) = f_1(t), \quad u(b, t) = f_2(t)$$

$$v(a, t) = g_1(t), \quad v(b, t) = g_2(t)$$

ve sınır şartları ile birlikte ele alındı. Burada η bir reel sabit, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ verilen fonksiyonlar, α ve β Brownian difüzyon sabiti,

parçacıkların yerçekiminden kaynaklı Stokes hızı ya da Peclet sayısı gibi sistem parametreleridir [139].

Son yıllardaki çalışmalar, akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, biyoloji, hidrodinamik, katı hal fiziği ve optik fiberler gibi çeşitli alanlarda ortaya çıkan lineer olmayan dinamik sistemler üzerine odaklandı. Bu lineer olmayan olaylar sıklıkla lineer olmayan dalga olayları olarak adlandırılır [140]. Böylece bu lineer olmayan dalga denklemlerinin analitik ya da nümerik olarak çözümlerinin elde edilmesi akışkanların yaklaşım teorisinde oldukça önemli bir hal almaktadır. Coupled Burgers' denkleminin çözümleri farklı araştırmacılar tarafından çeşitli yöntemlerle bulunmuştur. Jain ve Kadalbajoo [141] lineer yaklaşım ve invariant embedding tabanlı bir tekniği düzensiz bölgeler üzerinde coupled Burgers' denkleminin çözümü için önerdiler. Dehghan vd. [142] coupled Burgers' denkleminin Adomian ayrışım yöntemi ve Pade yaklaşımının bir kombinasyonu ile nümerik çözümlerini elde ettiler. Mittal ve Arora [143] uygun başlangıç ve sınır koşulları altında coupled sistem viskoz Burgers' denkleminin nümerik çözümleri için düzgün mesh noktaları üzerinde kübik B-spline kollokasyon şeması önerdiler. Mittal ve Tripathi [144] coupled Burgers' denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için modifiye edilmiş kübik B-spline kollokasyon yöntemini kullandılar. İslam vd. [145] transient ve lineer olmayan coupled Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini büyük Reynold sayıları için yerel radyal baz fonksiyonları kullanarak kollokasyon yöntemi ile elde ettiler. Rashid vd. [146] coupled viskoz Burgers' denklemini çözmek için Chebyshev–Legendre Pseudo-Spectral (CLPS) yöntemini göz önüne aldılar. Rashid ve İsmail [147] Fourier pseudo-spectral yöntemini, bir boyutlu coupled viskoz Burgers' denklem sisteminin nümerik çözümleri için kullandılar. Khater vd. [148] farklılaştırılmış Chebyshev polinomlarına dayalı bir spektral kollokasyon yöntemi ile Burgers' tipi denklemleri çözmüşlerdir. Kutluay ve Uçar [149] coupled Burgers' denkleminin nümerik çözümleri için kuadratik

B-spline Galerkin sonlu eleman yöntemini kullandılar. Ayrıca Uçar [150] doktora tezinde coupled Burgers' denklemini farklı dereceden B-spline baz fonksiyonları kullanarak Petrov-Galerkin, kollokasyon ve subdomain sonlu eleman yöntemleriyle çözdü. Srivastava vd. [151] bir kapalı logaritmik sonlu fark yöntemini bir boyutlu coupled Burgers' denkleminin nümerik çözümleri için uyguladılar. Li vd. [152] uygun dağılım fonksiyonlarının seçimiyle yeni bir lattice Boltzmann modelini coupled Burgers' denklemini için önerdiler. Lai ve Ma [153] çift evrimsel denklemler kullanarak lineer olmayan coupled viskoz Burgers' denklemler sistemi için lattice Boltzmann modelini öne sürdüler. Mokhtari vd. [154] coupled Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemini uyguladılar. Mittal ve Jiwari [155] diferansiyel kuadratür yöntemi ile coupled viskoz Burgers' denklemini çözdüler. Denklemin tam çözümü Kaya [156] tarafından Adomian ayrışım yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Soliman [157] coupled Burgers' denkleminin tam çözümü için modifiye edilmiş genişletilmiş tanh-function yöntemi sundu. Abazari ve Borhanifar [158] Burgers' ve coupled Burgers' denklemlerinin hem nümerik hem de analitik çözümlerini Differential Transformation Method (DTM) yöntemiyle elde ettiler.

Bu bölümde splitting yöntemlerini uygulamak için sistemdeki her bir denklem biri lineer ve diğeri lineer olmayan iki alt denkleme split edildi. Elde edilen her alt denklemdeki $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ bağımlı değişkenleri için kübik B-spline fonksiyonlar ve türevleri kullanıldı. Kollokasyon sonlu eleman yönteminin her alt denkleme uygulanmasıyla nümerik şemalar elde edildi ve kararlılık analizleri von-Neumann yöntemi ile araştırıldı.

Coupled viskoz Burgers' denklemini

$$u_t = u_{xx} \quad (4.1.3)$$

$$u_t = -\eta uu_x - \alpha(uv)_x \quad (4.1.4)$$

$$v_t = v_{xx} \quad (4.1.5)$$

$$v_t = -\eta vv_x - \beta(uv)_x \quad (4.1.6)$$

şeklinde split edildi. Daha sonra yöntemi uygulamak için (4.1.3), (4.1.5), (4.1.4) ve (4.1.6) denklemlerinin her birinde konum yönündeki türevler için Crank-Nicolson $(u_m^{n+1} + u_m^n)/2$ ve zaman yönündeki türev için ise ileri $(u_m^{n+1} - u_m^n)/\Delta t$ sonlu fark yaklaşımları kullanılırsa sırasıyla

$$\left[\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right] - \left[\frac{u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^n}{2} \right] = 0 \quad (4.1.7)$$

$$\left[\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right] + \eta \left[\frac{(uu_x)^{n+1} + (uu_x)^n}{2} \right] + \alpha \left[\frac{(vu_x)^{n+1} + (vu_x)^n}{2} \right] + \alpha \left[\frac{(uv_x)^{n+1} + (uv_x)^n}{2} \right] = 0 \quad (4.1.8)$$

ve

$$\left[\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} \right] - \left[\frac{v_{xx}^{n+1} + v_{xx}^n}{2} \right] = 0 \quad (4.1.9)$$

$$\left[\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} \right] + \eta \left[\frac{(vv_x)^{n+1} + (vv_x)^n}{2} \right] + \beta \left[\frac{(vu_x)^{n+1} + (vu_x)^n}{2} \right] + \beta \left[\frac{(uv_x)^{n+1} + (uv_x)^n}{2} \right] = 0 \quad (4.1.10)$$

elde edilir. (4.1.8) ve (4.1.10) denklemlerinde lineer olmayan terimler için Rubin ve Graves [159] tarafından önerilen

$$(uu_x)^{n+1} = u^{n+1}u_x^n + u^n u_x^{n+1} - (uu_x)^n$$

$$(vu_x)^{n+1} = v^{n+1}u_x^n + v^n u_x^{n+1} - (vu_x)^n$$

$$(uv_x)^{n+1} = u^{n+1}v_x^n + u^n v_x^{n+1} - (uv_x)^n$$

yaklaşımları kullanıldı. Şimdi (4.1.7) ve (4.1.9) ile (4.1.8) ve (4.1.10) denklemlerine kübik B-spline kollokasyon yöntemini uygulayalım. Bunun için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarına (2.4.2) ile verilen kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak zamana bağlı $\delta_m(t)$ ve $\gamma_m(t)$ parametreleri cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) \Phi_m(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \gamma_m(t) \Phi_m(x) \quad (4.1.11)$$

şeklinde bir yaklaşım yapıldı. (2.4.2) ve (4.1.11) ifadeleri kullanılarak $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının ve onların birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin bir

$[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde x_m düğüm noktalarındaki değerleri

$$U_N = U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \quad (4.1.12)$$

$$V_N = V(x_m) = \gamma_{m-1} + 4\gamma_m + \gamma_{m+1}$$

$$U'_N = U'(x_m) = \frac{3}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1})$$

$$V'_N = V'(x_m) = \frac{3}{h} (\gamma_{m+1} - \gamma_{m-1})$$

$$U''_N = U''(x_m) = \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})$$

$$V''_N = V''(x_m) = \frac{6}{h^2} (\gamma_{m-1} - 2\gamma_m + \gamma_{m+1})$$

olarak elde edilir. (4.1.12) ifadesindeki yaklaşımlar (4.1.7) ve (4.1.9) ile (4.1.8) ve (4.1.10) denklemlerinde ilgili terimler yerine yazılırsa aşağıdaki gibi $\delta_m(t)$ ve $\gamma_m(t)$ parametrelerine bağlı fark denklemleri

$$a_1\delta_{m-1}^{n+1} + a_2\delta_m^{n+1} + a_3\delta_{m+1}^{n+1} = a_3\delta_{m-1}^n + a_4\delta_m^n + a_5\delta_{m+1}^n, \quad (4.1.13)$$

$$a_5\delta_{m-1}^{n+1} + a_6\delta_m^{n+1} + a_7\delta_{m+1}^{n+1} + a_8\gamma_{m-1}^{n+1} + a_9\gamma_m^{n+1} + a_{10}\gamma_{m+1}^{n+1} = \delta_{m-1}^n + \delta_m^n + \delta_{m+1}^n, \quad (4.1.14)$$

$$a_1\gamma_{m-1}^{n+1} + a_2\gamma_m^{n+1} + a_3\gamma_{m+1}^{n+1} = a_3\gamma_{m-1}^n + a_4\gamma_m^n + a_5\gamma_{m+1}^n \quad (4.1.15)$$

$$b_1\gamma_{m-1}^{n+1} + b_2\gamma_m^{n+1} + b_3\gamma_{m+1}^{n+1} + b_4\delta_{m-1}^{n+1} + b_5\delta_m^{n+1} + b_6\delta_{m+1}^{n+1} = \gamma_{m-1}^n + \gamma_m^n + \gamma_{m+1}^n \quad (4.1.16)$$

elde edilir ve burada

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{3\Delta t}{h^2}, \quad a_2 = 4 + \frac{6\Delta t}{h^2}, \quad a_3 = 1 + \frac{3\Delta t}{h^2}, \quad a_4 = 4 - \frac{6\Delta t}{h^2}, \\ a_5 &= 1 + \eta \frac{\Delta t u_x^n}{2} - \eta \frac{3\Delta t u^n}{2h} - \alpha \frac{3\Delta t v^n}{2h} + \frac{\alpha \Delta t v_x^n}{2}, \quad a_6 = 4 + 2\eta \Delta t u_x^n + 2\alpha \Delta t v_x^n \\ a_7 &= 1 + \eta \frac{\Delta t u_x^n}{2} + \eta \frac{3\Delta t u^n}{2h} + \alpha \frac{3\Delta t v^n}{2h} + \frac{\alpha \Delta t v_x^n}{2}, \quad a_8 = \frac{\alpha \Delta t u_x^n}{2} - \alpha \frac{3\Delta t u^n}{2h}, \\ a_9 &= 2\alpha \Delta t u_x^n, \quad a_{10} = \frac{\alpha \Delta t u_x^n}{2} + \alpha \frac{3\Delta t u^n}{2h}, \quad b_1 = 1 + \eta \frac{\Delta t v_x^n}{2} - \eta \frac{3\Delta t v^n}{2h} - \beta \frac{3\Delta t u^n}{2h} + \frac{\beta \Delta t u_x^n}{2}, \\ b_2 &= 4 + 2\eta \Delta t v_x^n + 2\beta \Delta t u_x^n, \quad b_3 = 1 + \eta \frac{\Delta t v_x^n}{2} + \eta \frac{3\Delta t v^n}{2h} + \beta \frac{3\Delta t u^n}{2h} + \frac{\beta \Delta t u_x^n}{2}, \\ b_4 &= \frac{\beta \Delta t v_x^n}{2} - \beta \frac{3\Delta t v^n}{2h}, \quad b_5 = 2\beta \Delta t v_x^n, \quad b_6 = \frac{\beta \Delta t v_x^n}{2} + \frac{3\beta \Delta t v^n}{2h} \end{aligned}$$

dir. Bu sistemlerde $m = 0(1)N$ olmak üzere sol taraftaki terimler $(n+1)$ -inci zaman adımını ve sağ taraftaki terimler ise n -inci zaman adımını göstermektedir.

(4.1.13) ve (4.1.15) sistemleri sırasıyla $(\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)$, $(\gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N)$ olmak üzere $(N+1)$ tane denklem ve $(N+3)$ tane de bilinmeyen parametre içermektedir. (4.1.13) ve (4.1.15) sistemlerini çözebilmek için sınır şartları kullanılarak sırasıyla δ_{-1} , δ_{N+1} ve γ_{-1} , γ_{N+1} parametreleri yok edilirse $(N+1) \times (N+1)$ -boyutlu sistemler elde edilir. (4.1.14) ve (4.1.16) sistemleri birlikte göz önüne alındığından $(2N+2)$ tane denklem ve $(\delta_{-1}, \gamma_{-1}, \delta_0, \gamma_0, \delta_1, \gamma_1, \dots, \delta_N, \gamma_N)$ olmak üzere $(2N+6)$ tane de bilinmeyen parametreden meydana gelir. Elde edilen denklem sistemini çözebilmek için δ_{-1} , γ_{-1} , δ_{N+1} ve γ_{N+1} parametreleri sınır şartları kullanılarak yok edilirse $(2N+2) \times (2N+2)$ -boyutlu sistemler elde edilir. Daha sonra (4.1.13)-(4.1.16) sistemleri bölüm 2' de (2.5.12) ile verilen Strang splitting algoritmasına uygun biçimde düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
a_1 \delta_{m-1}^*(t_{n+\frac{1}{2}}) + a_2 \delta_m^*(t_{n+\frac{1}{2}}) + a_1 \delta_{m+1}^*(t_{n+\frac{1}{2}}) &= a_3 \delta_{m-1}^*(t_n) + a_4 \delta_m^*(t_n) + a_3 \delta_{m+1}^*(t_n), \\
a_1 \gamma_{m-1}^*(t_{n+\frac{1}{2}}) + a_2 \gamma_m^*(t_{n+\frac{1}{2}}) + a_1 \gamma_{m+1}^*(t_{n+\frac{1}{2}}) &= a_3 \gamma_{m-1}^*(t_n) + a_4 \gamma_m^*(t_n) + a_3 \gamma_{m+1}^*(t_n), \\
\delta_m^*(t_n) &= \delta_m^0, \quad \gamma_m^*(t_n) = \gamma_m^0, \quad t \in [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}], \\
a_5 \delta_{m-1}^{**}(t_{n+1}) + a_6 \delta_m^{**}(t_{n+1}) + a_7 \delta_{m+1}^{**}(t_{n+1}) + a_8 \gamma_{m-1}^{**}(t_{n+1}) + a_9 \gamma_m^{**}(t_{n+1}) + a_{10} \gamma_{m+1}^{**}(t_{n+1}) \\
&= \delta_{m-1}^{**}(t_n) + \delta_m^{**}(t_n) + \delta_{m+1}^{**}(t_n), \\
b_1 \gamma_{m-1}^{**}(t_{n+1}) + b_2 \gamma_m^{**}(t_{n+1}) + b_3 \gamma_{m+1}^{**}(t_{n+1}) + b_4 \delta_{m-1}^{**}(t_{n+1}) + b_5 \delta_m^{**}(t_{n+1}) + b_6 \delta_{m+1}^{**}(t_{n+1}) \\
&= \gamma_{m-1}^{**}(t_n) + \gamma_m^{**}(t_n) + \gamma_{m+1}^{**}(t_n), \tag{4.1.17} \\
\delta_m^{**}(t_n) &= \delta_m^*(t_{n+\frac{1}{2}}), \quad \gamma_m^{**}(t_n) = \gamma_m^*(t_{n+\frac{1}{2}}), \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \\
a_1 \delta_{m-1}^{***}(t_{n+1}) + a_2 \delta_m^{***}(t_{n+1}) + a_1 \delta_{m+1}^{***}(t_{n+1}) &= a_3 \delta_{m-1}^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) + a_4 \delta_m^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) + a_3 \delta_{m+1}^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}), \\
a_1 \gamma_{m-1}^{***}(t_{n+1}) + a_2 \gamma_m^{***}(t_{n+1}) + a_1 \gamma_{m+1}^{***}(t_{n+1}) &= a_3 \gamma_{m-1}^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) + a_4 \gamma_m^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) + a_3 \gamma_{m+1}^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}), \\
\delta_m^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) &= \delta_m^{**}(t_{n+1}), \quad \gamma_m^{***}(t_{n+\frac{1}{2}}) = \gamma_m^{**}(t_{n+1}), \quad t \in [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}]
\end{aligned}$$

formunda gösterilen şemalar elde edilir. Burada $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ ve bilinmeyen δ parametreleri $\delta(t_{n+1}) = \delta^{***}(t_{n+1})$ ile hesaplanır. Bu Strang splitting algoritmasını çözebilmek için öncelikle δ^0 ve γ^0 başlangıç vektörlerine ihtiyacımız vardır ve bu vektörler $u(x, 0) = \phi_1(x)$ ve $v(x, 0) = \phi_2(x)$ başlangıç

koşullarından bulunacaktır. Bu amaçla

$$u(x_m, 0) = \phi_1(x_m) = U_N(x_m, 0), \quad v(x_m, 0) = \phi_2(x_m) = V_N(x_m, 0), \quad m = 0(1)N$$

$$\begin{aligned} u_m &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0, & v_m &= \gamma_{m-1}^0 + 4\gamma_m^0 + \gamma_{m+1}^0 \\ u_0 &= \delta_{-1}^0 + 4\delta_0^0 + \delta_1^0, & v_0 &= \gamma_{-1}^0 + 4\gamma_0^0 + \gamma_1^0 \\ u_1 &= \delta_0^0 + 4\delta_1^0 + \delta_2^0, & v_1 &= \gamma_0^0 + 4\gamma_1^0 + \gamma_2^0 \\ &\vdots & &\vdots \\ u_N &= \delta_{N-1}^0 + 4\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0, & v_N &= \gamma_{N-1}^0 + 4\gamma_N^0 + \gamma_{N+1}^0 \end{aligned}$$

sistemleri elde edilir. Bu sistemlerin çözülebilmesi için δ_{-1}^0 , γ_{-1}^0 , δ_{N+1}^0 ve γ_{N+1}^0 parametreleri $U_N''(a, 0) = U_N''(b, 0) = V_N''(a, 0) = V_N''(b, 0) = 0$ sınır şartlarının kullanılmasıyla yok edilir. Böylece uygun bir algoritma ile çözülebilen $(N+1) \times (N+1)$ –boyutlu üçlü bant matris sistemleri aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ & \ddots & \\ & 1 & 4 & 1 \\ & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ & \ddots & \\ & 1 & 4 & 1 \\ & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0^0 \\ \gamma_1^0 \\ \vdots \\ \gamma_{N-1}^0 \\ \gamma_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu sistemlerin çözülmesiyle δ^0 ve γ^0 başlangıç vektörleri bulunur. Bu başlangıç vektörleri yukarıda (4.1.17) ile elde edilen Strang splitting şemasında kullanılarak istenilen t zamanındaki nümerik çözümler iterasyon ile hesaplanır.

4.1.1 Kararlılık Analizi

Burada, Strang splitting şeması uygulanırken (4.1.13) ve (4.1.15) sistemleri $\Delta t/2$ ile çözüldükten sonra elde edilen çözümler, Δt adım uzunluğu ile (4.1.14) ve (4.1.16) sistemlerinde kullanıldığından dolayı sistemlerin kararlılık analizi birlikte göz önüne alındı. (4.1.13) ve (4.1.15) sistemlerinde sırasıyla, $i = \sqrt{-1}$, A ve B harmonik genlikler, β mod sayısı, h eleman boyu olmak üzere $\delta_m^n = A\xi^n e^{i\beta m h}$ ve

$\gamma_m^n = B\xi^n e^{i\beta mh}$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} [(2a_1\xi^{n+1/2} - 2a_3\xi^n) \cos \beta h + a_2\xi^{n+1/2} - a_4\xi^n] A &= 0 \\ [(2a_1\xi^{n+1/2} - 2a_3\xi^n) \cos \beta h + a_2\xi^{n+1/2} - a_4\xi^n] B &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

elde edilir. (4.1.18) denklem sisteminin aşıkâr olmayan çözümünün olması için katsayılar determinantı sıfıra eşitlenirse

$$[(2a_1\xi^{n+1/2} - 2a_3\xi^n) \cos \beta h + a_2\xi^{n+1/2} - a_4\xi^n]^2 = 0$$

bulunur. Bu denklem ξ için çözülürse

$$\rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right)_{1,2} = \frac{2a_3 \cos \beta h + a_4}{2a_1 \cos \beta h + a_2}$$

olarak bulunur. Şimdi yukarıda verilen a_1 , a_2 , a_3 ve a_4 ' ün değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right)_{1,2} &= \frac{P - Q}{P + Q} \\ P &= 2 \cos \beta h + 4, \quad Q = \frac{6\Delta t}{h^2}(1 - \cos \beta h) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right)_{1,2} \right| \leq 1$ koşulunun sağlanması için paydanın paydan büyük olması şartı aranır yani,

$$P + Q \geq P - Q \Rightarrow Q \geq 0$$

şartına ulaşılır. $Q = \frac{6\Delta t}{h^2}(1 - \cos \beta h) \geq 0$ olduğundan $\left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right)_{1,2} \right| \leq 1$ sağlanır. Benzer şekilde (4.1.4) ve (4.1.6) denklemleri birlikte çözüldüğünden dolayı bu denklemlerin standart sonlu fark yöntemleriyle diskretizasyonu yapıldıktan sonra kararlılık analizleri birlikte göz önüne alındı. Bunun için, (4.1.4) ve (4.1.6) denklemleri

$$u_t + \eta uu_x + \alpha v u_x + \alpha u v_x = 0 \quad (4.1.19)$$

$$v_t + \eta v v_x + \beta u v_x + \beta v u_x = 0$$

formunda yazıldı. Şimdi, (4.1.19) denklem sisteminde lineer olmayan uu_x , vv_x ve $(uv)_x = uv_x + vu_x$ terimlerimlerinde u ve v yerine sırasıyla z_1 ve z_2 alınır ve standart sonlu fark yöntemleriyle diskretizasyon yapılırsa

$$\begin{aligned} \theta_1 \delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + \theta_2 \delta_{m+1}^{n+1} + (-\theta_3) \gamma_{m-1}^{n+1} + \theta_3 \gamma_{m+1}^{n+1} &= \theta_2 \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \theta_1 \delta_{m+1}^n + \\ \theta_3 \gamma_{m-1}^n + (-\theta_3) \gamma_{m+1}^n \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

ve

$$\begin{aligned} \theta_4 \gamma_{m-1}^{n+1} + 4\gamma_m^{n+1} + \theta_5 \gamma_{m+1}^{n+1} + (-\theta_6) \delta_{m-1}^{n+1} + \theta_6 \delta_{m+1}^{n+1} &= \theta_5 \gamma_{m-1}^n + 4\gamma_m^n + \theta_4 \gamma_{m+1}^n + \\ \theta_6 \delta_{m-1}^n + (-\theta_6) \delta_{m+1}^n \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

sistemleri elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 1 - \frac{3\Delta t(\eta z_1 + \alpha z_2)}{2h}, \theta_2 = 1 + \frac{3\Delta t(\eta z_1 + \alpha z_2)}{2h}, \theta_3 = \frac{3\Delta t \alpha z_1}{2h} \\ \theta_4 &= 1 - \frac{3\Delta t(\eta z_2 + \beta z_1)}{2h}, \theta_5 = 1 + \frac{3\Delta t(\eta z_2 + \beta z_1)}{2h}, \theta_6 = \frac{3\Delta t \beta z_2}{2h} \end{aligned}$$

dir. (4.1.20) ve (4.1.21) sistemlerinde

$$\sigma_1 = \max \{(\eta z_1 + \alpha z_2), (\eta z_2 + \beta z_1)\} \text{ ve } \sigma_2 = \max \{\alpha z_1, \beta z_2\}$$

olarak alınırsa $\lambda = 3\Delta t \sigma_1 / 2h$ ve $\mu = 3\Delta t \sigma_2 / 2h$ olmak üzere, sırasıyla

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) \delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + (1 + \lambda) \delta_{m+1}^{n+1} + (-\mu) \gamma_{m-1}^{n+1} + \mu \gamma_{m+1}^{n+1} &= (1 + \lambda) \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \\ (1 - \lambda) \delta_{m+1}^n + \mu \gamma_{m-1}^n + (-\mu) \gamma_{m+1}^n \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) \gamma_{m-1}^{n+1} + 4\gamma_m^{n+1} + (1 + \lambda) \gamma_{m+1}^{n+1} + (-\mu) \delta_{m-1}^{n+1} + \mu \delta_{m+1}^{n+1} &= (1 + \lambda) \gamma_{m-1}^n + 4\gamma_m^n + \\ (1 - \lambda) \gamma_{m+1}^n + \mu \delta_{m-1}^n + (-\mu) \delta_{m+1}^n \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

bulunur. Şimdi (4.1.22) ve (4.1.23) sistemlerinde gerekleri terimler yerine $\delta_m^n = A\xi^n e^{i\beta m h}$ ve $\gamma_m^n = B\xi^n e^{i\beta m h}$ ifadeleri yazılır ve Euler formülü kullanılırsa,

$$a = 2 \cos \beta h + 2i\lambda \sin \beta h + 4$$

$$b = 2 \cos \beta h - 2i\lambda \sin \beta h + 4$$

$$c = 2i\mu \sin \beta h$$

$$x = \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right)$$

olmak üzere,

$$(ax - b)A + (cx + c)B = 0$$

$$(cx + c)A + (ax - b)B = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin A ve B için aşıkâr olmayan çözümünün olması için gerek ve yeter şart katsayılar determinantının sıfır olmasıdır. Bu determinant hesaplanırsa

$$(a^2 - c^2)x^2 - (2ab + c^2)x + b^2 - c^2 = 0$$

bulunur ve bu denklemin kökleri

$$x_1 = \frac{b - c}{a + c},$$

$$x_2 = \frac{b + c}{a - c}$$

şeklinde elde edilir. Kararlılık için $|x_1| \leq 1$ ve $|x_2| \leq 1$ olmalıdır. a , b ve c değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\lambda_1 = 2 \cos \beta h + 4, \quad \lambda_2 = i(2\lambda + 2\mu) \sin \beta h, \quad \lambda_3 = i(2\lambda - 2\mu) \sin \beta h$$

olmak üzere

$$x_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 i}{\lambda_1 + \lambda_2 i} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_3 i}{\lambda_1 + \lambda_3 i}$$

bulunur. Buradan $|x_1| \leq 1$ ve $|x_2| \leq 1$ şartları sağlandığından $\left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right)_{1,2} \right| \leq 1$ olduğu açıktır. O halde coupled viskoz Burgers' denklemleri için elde edilen Strang splitting şeması

$$|\rho(\xi)| \leq \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right)_{1,2} \right| \left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right)_{1,2} \right| \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right)_{1,2} \right| \leq 1$$

olduğundan şartsız kararlıdır.

4.1.2 Model Problemler ve Nümerik Çözümleri

(4.1.3)-(4.1.6) ile verilen coupled Burgers' denkleminin split haline $A - B - A$ Strang splitting şeması uygulanırken, (4.1.13) ve (4.1.15) sistemleri öncelikle $\Delta t/2$ zaman adımıyla çözüldü. Buradan elde edilen çözüm vektörleri (4.1.14) ve (4.1.16) sistemlerinin oluşturduğu $(2N+2) \times (2N+2)$ -boyutlu sistemin çözümünde başlangıç vektörü olarak kullanıldı ve Δt zaman adımıyla çözüldü. Son olarak istenilen çözümleri elde etmek için Δt zaman adımıyla çözülen sistemden elde edilen çözüm vektörleri tekrar (4.1.13) ve (4.1.15) sistemleri için başlangıç şartı olarak alındı ve $\Delta t/2$ zaman adımıyla çözüldü. $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin etkinliğini gözlemlemek için üç test problemi ele alındı ve aşağıdaki gibi verilen L_2 ve L_∞ hata normlarıyla

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^N |u_i^{tam} - U_i^{nümerik}|^2} / \sqrt{\sum_{i=0}^N |u_i^{tam}|^2}$$

$$L_\infty = \max_i |u_i^{tam} - U_i^{nümerik}|$$

test edildi.

Problem 1

Bu problemde (4.1.1) ve (4.1.2) lineer olmayan coupled viskoz Burgers' denklemleri $\alpha = \beta = 1$ ve $\eta = -2$ için aşağıdaki başlangıç şartı

$$u(x, 0) = v(x, 0) = \sin x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Tablo 4.1: Problem 1' in $\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.

N	t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
50	0.1	0.131863	0.119079	0.131728	0.118958	0.131629	0.118868
	0.5	0.659148	0.399004	0.658596	0.398670	0.658144	0.398397
	1.0	1.317861	0.483857	1.316787	0.483463	1.315896	0.483136
	1.5	1.976140	0.440066	1.974545	0.439711	1.973215	0.439415
	2.0	2.633986	0.355768	2.631870	0.355482	2.630102	0.355243
	2.5	3.291397	0.269641	3.288762	0.269425	3.286556	0.269245
	3.0	3.948376	0.196190	3.945221	0.196033	3.942578	0.195902
100	0.1	0.033110	0.029959	0.032975	0.029837	0.032876	0.029748
	0.5	0.165544	0.100408	0.164993	0.100073	0.164543	0.099800
	1.0	0.331061	0.121790	0.329989	0.121396	0.329100	0.121069
	1.5	0.496550	0.110795	0.494957	0.110440	0.493629	0.110144
	2.0	0.662012	0.089594	0.659898	0.089307	0.658132	0.089068
	2.5	0.827446	0.067921	0.824812	0.067705	0.822607	0.067524
	3.0	0.992853	0.049431	0.989698	0.049274	0.987056	0.049143
200	0.1	0.008432	0.007629	0.008298	0.007508	0.008199	0.007419
	0.5	0.042166	0.025575	0.041615	0.025241	0.041165	0.024968
	1.0	0.084330	0.031023	0.083258	0.030629	0.082370	0.030302
	1.5	0.126492	0.028224	0.124899	0.027869	0.123572	0.027573
	2.0	0.168652	0.022825	0.166539	0.022539	0.164773	0.022300
	2.5	0.210811	0.017304	0.208177	0.017088	0.205973	0.016907
	3.0	0.252968	0.012595	0.249813	0.012437	0.247170	0.012306

ve

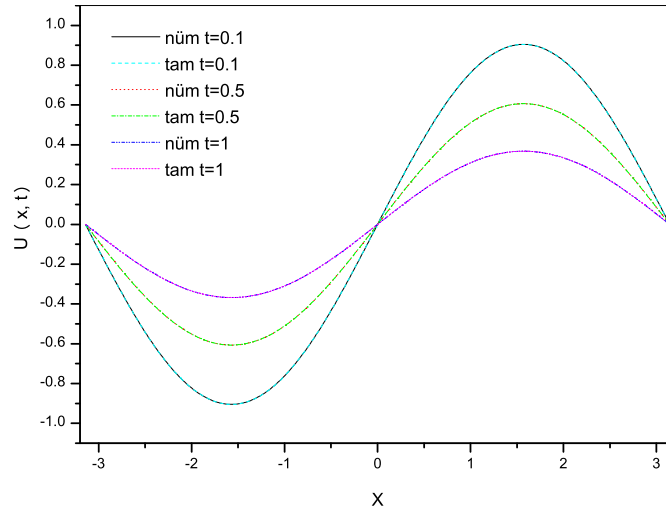
$$u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$v(-\pi, t) = v(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

sınır koşullarıyla birlikte ele alındı. Bu problemin tam çözümü Kaya [156] tarafından $u(x, t) = v(x, t) = e^{-t} \sin x$ olarak verilmiştir. Problem 1' de $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ aynı başlangıç, sınır koşulları ve tam çözüme sahip oldukları için nümerik sonuçlar ve grafikler $u(x, t)$ fonksiyonu için verildi. Tablo 4.1' de $\Delta t = 0.01$ için Problem 1' in $N = 50, 100$ ve 200 değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Bu tablodan konum adım uzunluğu küçüldükçe hata normlarının da küçüldüğü ve Ext4' ün $S_{\Delta t}$ ' dan, Ext6' nın da Ext4 den daha küçük hatalar verdiği açıktır. Tablo 4.2' de ise $N = 100$ için

Tablo 4.2: Problem 1' in $N = 100$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$ değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin farklı zamanlardaki hata normlarının karşılaştırılması.

Δt	t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.01	0.1	0.033110	0.029959	0.032975	0.029837	0.032876	0.029748
	0.5	0.165544	0.100408	0.164993	0.100073	0.164543	0.099800
	1.0	0.331061	0.121790	0.329989	0.121396	0.329100	0.121069
	1.5	0.496550	0.110795	0.494957	0.110440	0.493629	0.110144
	2.0	0.662012	0.089594	0.659898	0.089307	0.658132	0.089068
	2.5	0.827446	0.067921	0.824812	0.067705	0.822607	0.067524
	3.0	0.992853	0.049431	0.989698	0.049274	0.987056	0.049143
0.005	0.1	0.032953	0.029817	0.032897	0.029767	0.032869	0.029741
	0.5	0.164762	0.099933	0.164602	0.099836	0.164504	0.099777
	1.0	0.329497	0.121215	0.329207	0.121108	0.329021	0.121040
	1.5	0.494205	0.110272	0.493784	0.110178	0.493512	0.110117
	2.0	0.658886	0.089170	0.658335	0.089096	0.657976	0.089047
	2.5	0.823539	0.067600	0.822858	0.067544	0.822412	0.067508
	3.0	0.988166	0.049198	0.987355	0.049157	0.986821	0.049131
0.001	0.1	0.032903	0.029772	0.032872	0.029744	0.032866	0.029739
	0.5	0.164512	0.099782	0.164477	0.099760	0.164491	0.099769
	1.0	0.328997	0.121031	0.328957	0.121016	0.328996	0.121031
	1.5	0.493455	0.110105	0.493409	0.110094	0.493474	0.110109
	2.0	0.657885	0.089035	0.657835	0.089028	0.657925	0.089041
	2.5	0.822289	0.067498	0.822233	0.067493	0.822349	0.067503
	3.0	0.986666	0.049123	0.986605	0.049120	0.986746	0.049127



Şekil 4.1: Problem 1' in $t = 0.1, 0.5$ ve 1 zamanlarında hesaplanan $U_N(x, t)$ nümerik çözümünün grafiği.

Tablo 4.3: Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $N = 200, 400$ değerleri için $U_N(x, t)$ ' nin farklı zamanlardaki L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [143], Ref. [149] ve Ref. [150] ile karşılaştırılması.

t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
$N = 200$	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.1	$8.226E-6$	$7.443E-6$	$8.195E-6$	$7.415E-6$	$8.189E-6$	$7.409E-6$
0.5	$4.113E-5$	$2.495E-5$	$4.110E-5$	$2.493E-5$	$4.111E-5$	$2.494E-5$
1	$8.227E-5$	$3.026E-5$	$8.223E-5$	$3.025E-5$	$8.227E-5$	$3.026E-5$
$N = 400$						
0.1	$2.057E-6$	$1.861E-6$	$2.026E-6$	$1.833E-6$	$2.020E-6$	$1.828E-6$
0.5	$1.029E-5$	$6.242E-6$	$1.026E-5$	$6.221E-6$	$1.027E-5$	$6.229E-6$
1	$2.058E-5$	$7.572E-6$	$2.054E-5$	$7.557E-6$	$2.058E-5$	$7.572E-6$
$N = 200$	[143]		[150]		[149]	
0.1	$8.21E-06$	$7.45E-06$	$1.47E-06$	$4.06E-06$	$0.17E-06$	$0.52E-06$
0.5	$2.49E-05$	$4.10E-05$	$2.46E-06$	$2.78E-06$	$0.27E-06$	$0.36E-06$
1	$3.00E-05$	$8.21E-05$	$3.45E-06$	$1.70E-06$	$0.36E-06$	$0.22E-06$
$N = 400$						
0.1	$2.05E-06$	$1.86E-06$	$0.69E-06$	$1.99E-06$	$0.07E-06$	$0.14E-06$
0.5	$1.02E-05$	$6.22E-06$	$1.17E-06$	$1.35E-06$	$0.16E-06$	$0.14E-06$
1	$2.04E-05$	$7.56E-06$	$1.66E-06$	$0.82E-06$	$0.15E-06$	$0.10E-06$

Tablo 4.4: Problem 1' in $\Delta t = 0.001$ ve farklı N değerleri için $U_N(x, t)$ ' nin $t = 0.1, 0.5$ zamanlarındaki L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [143] ve Ref. [144] ile karşılaştırılması.

N	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
$t = 0.1$	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
32	$3.2164E-4$	$2.9103E-4$	$3.2161E-4$	$2.9100E-4$	$3.2160E-4$	$2.9100E-4$
64	$8.0342E-5$	$7.2697E-5$	$8.0311E-5$	$7.2669E-5$	$8.0305E-5$	$7.2663E-5$
128	$2.0082E-5$	$1.8171E-5$	$2.0051E-5$	$1.8143E-5$	$2.0045E-5$	$1.8137E-5$
256	$0.5021E-5$	$0.4543E-5$	$0.4990E-5$	$0.4515E-5$	$0.4984E-5$	$0.4509E-5$
512	$1.2556E-6$	$1.1361E-6$	$0.1225E-6$	$1.1082E-6$	$0.1219E-6$	$0.1103E-6$
$t = 0.5$						
32	$16.0715E-4$	$9.7479E-4$	$16.0712E-4$	$9.7477E-4$	$16.0713E-4$	$9.7478E-4$
64	$4.0165E-4$	$2.4362E-4$	$4.0162E-4$	$2.4359E-4$	$4.0163E-4$	$2.4360E-4$
128	$10.0412E-5$	$6.0903E-5$	$10.0377E-5$	$6.0882E-5$	$10.0392E-5$	$6.0891E-5$
256	$2.5110E-5$	$1.5230E-5$	$2.5075E-5$	$1.5209E-5$	$2.5090E-5$	$1.5218E-5$
512	$0.6285E-5$	$0.3812E-5$	$0.6250E-5$	$0.3791E-5$	$0.6265E-5$	$0.3800E-5$
[143]			[144]			
$t = 0.1$			$t = 0.5$		$t = 0.1$	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_∞	L_∞
32	—	$2.9104E-04$	—	$9.7478E-04$	$3.0973141E-04$	$1.0373845E-04$
64	—	$7.2704E-05$	—	$2.4361E-04$	$7.4999576E-05$	$2.5132688E-04$
128	—	$1.8178E-05$	—	$6.0896E-05$	$1.8456076E-05$	$6.1854865E-05$
256	—	$4.5497E-05$	—	$1.5223E-05$	—	—
512	—	$1.1430E-06$	—	$3.8052E-05$	—	—

$\Delta t = 0.01, 0.005$ ve 0.001 zaman adım uzunlukları için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin hata normları verildi. Bu tablodan genel olarak Δt küçüldükçe hata normlarının da küçüldüğü ve Ext4'ün $S_{\Delta t}$ 'dan, Ext6'nın da Ext4'den daha küçük hatalar verdiği görülmektedir. Tablo 4.3' de $N = 200$ ve 400 değerleri için $t = 0.1, 0.5$ ve 1 zamanlarındaki $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları verildi ve Ref. [143, 149, 150] çalışmalarıyla karşılaştırıldı. Tablo 4.3' den görüldüğü gibi elde ettiğimiz L_2 ve L_∞ hata normları Ref. [143] çalışmasıyla uyum içinde olup, Galerkin ve kuintik kollokasyon yöntemi kullanan Ref. [149, 150] çalışmalarında hesaplananlardan ise daha büyüktür. Tablo 4.4' de ise $\Delta t = 0.001$ için $t = 0.1$ ve 0.5 zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile Ref. [143, 144]' de verilen L_∞ hata normu ile karşılaştırıldı. Bu tabloya baktığımızda $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile elde edilen L_∞ normunun Ref. [143, 144]' dekilerden daha iyi olduğu açıktır. Ayrıca bu problemin Şekil 4.1' de $u(x, t)$ için $t = 0.1, 0.5$ ve 1 zamanlarındaki nümerik çözüm ve tam çözüm grafiği verildi. Şekil 4.1' den görüldüğü gibi nümerik çözüm ve tam çözüm birbirine çok yakındır.

Problem 2

İkinci problem olarak (4.1.1) ve (4.1.2) lineer olmayan coupled viskoz Burgers' denklemleri $\eta = 2$ alınarak farklı α ve β değerleri için $t = 0.5$ ve 1 zamanlarındaki çözümleri incelendi. Bu problemin tam çözümü

$$a_0 = 0.05 \quad \text{ve} \quad A = \frac{1}{2}a_0 \left(\frac{4\alpha\beta - 1}{2\alpha - 1} \right)$$

olmak üzere Soliman [157] tarafından

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a_0 (1 - \tanh(A(x - 2At))) \\ v(x, t) &= a_0 \left(\left(\frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - \tanh(A(x - 2At)) \right) \end{aligned}$$

olarak verilmiştir. Problemin başlangıç ve sınır şartları $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ için tam çözümden elde edildi. Bu problem için çözüm bölgesi $[-10, 10]$ olarak alındı. $S_{\Delta t}$,

Tablo 4.5: Problem 2' nin $N = 50, 100, 200$ ve $\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$ değerleri için $U_N(x, t)$ ' nin $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle hesaplanan hata normlarının farklı zamanlardaki karşılaştırılması.

N	t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
50	0.1	0.135750	0.008507	0.135251	0.008499	0.134809	0.008509
	0.5	0.667366	0.041835	0.665073	0.041794	0.663110	0.041779
	1.0	1.314375	0.082730	1.310039	0.082632	1.307230	0.082583
	1.5	1.946679	0.122964	1.940229	0.122860	1.937020	0.122793
	2.0	2.566627	0.162675	2.557980	0.162508	2.554617	0.162430
	2.5	3.175607	0.201890	3.164698	0.201668	3.161336	0.201591
	3.0	3.774557	0.240647	3.761344	0.240379	3.758089	0.240310
100	0.1	0.137469	0.008494	0.137287	0.008492	0.137086	0.008492
	0.5	0.673675	0.041873	0.672914	0.041859	0.672425	0.041850
	1.0	1.325186	0.082797	1.323692	0.082766	1.323132	0.082751
	1.5	1.961433	0.123062	1.959175	0.123012	1.958651	0.123000
	2.0	2.584972	0.162760	2.581947	0.162691	2.581504	0.162684
	2.5	3.197277	0.201991	3.193507	0.201891	3.193158	0.201889
	3.0	3.799335	0.240801	3.794864	0.240675	3.794601	0.240681
200	0.1	0.138139	0.008495	0.138101	0.008495	0.138052	0.008495
	0.5	0.676129	0.041883	0.675891	0.041879	0.675804	0.041878
	1.0	1.329501	0.082811	1.329002	0.082801	1.328939	0.082801
	1.5	1.967424	0.123076	1.966684	0.123058	1.966654	0.123059
	2.0	2.592517	0.162786	2.591579	0.162760	2.591567	0.162764
	2.5	3.206283	0.202013	3.205209	0.201978	3.205185	0.201985
	3.0	3.809728	0.240806	3.808594	0.240758	3.808517	0.240770

Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile $\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$ için $N = 50, 100$ ve 200 alınarak $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sırasıyla Tablo 4.5 ve Tablo 4.6' da verildi. Tablolardan h konum adımı küçüldükçe hata normlarında azalma olmadığı ancak $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin kendi içinde uyumlu olduğu görülmektedir.

Bu problemin $N = 100$, $\Delta t = 0.01$ için $t = 0.1$ ve 0.5 zamanlarında $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonları için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [143, 150, 149, 148, 147, 154] ile karşılaştırılması sırasıyla Tablo 4.7 ve Tablo 4.8' de verildi. Tablo 4.7' de $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 ile elde edilen sonuçların Ref. [149, 150, 154] çalışmalarında elde edilen sonuçlarından daha iyi ve Ref. [143] ile ise uyum

Tablo 4.6: Problem 2' nin $N = 50, 100, 200$ ve $\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$ değerleri için $V_N(x, t)$ ' nin $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle hesaplanan hata normlarının farklı zamanlardaki karşılaştırılması.

N	t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
50	0.1	0.101426	0.004574	0.101480	0.004565	0.102461	0.004551
	0.5	0.494114	0.021635	0.490690	0.021534	0.488787	0.021478
	1.0	0.967049	0.041810	0.959313	0.041628	0.955981	0.041472
	1.5	1.425080	0.061066	1.412699	0.060774	1.408968	0.060583
	2.0	1.870880	0.079551	1.853518	0.079173	1.849984	0.078982
	2.5	2.306081	0.097603	2.283453	0.096951	2.280524	0.096720
	3.0	2.731817	0.115019	2.703686	0.114329	2.701663	0.114137
100	0.1	0.103270	0.004572	0.103030	0.004569	0.102870	0.004564
	0.5	0.501393	0.021794	0.499955	0.021753	0.499325	0.021719
	1.0	0.978921	0.042051	0.975824	0.041970	0.975261	0.041930
	1.5	1.440529	0.061366	1.435583	0.061237	1.435367	0.061200
	2.0	1.889269	0.079939	1.882343	0.079773	1.882631	0.079746
	2.5	2.326937	0.097925	2.317949	0.097687	2.318837	0.097675
	3.0	2.754761	0.115362	2.743663	0.115054	2.745213	0.115062
200	0.1	0.104046	0.004587	0.103961	0.004583	0.103891	0.004581
	0.5	0.503954	0.021830	0.503426	0.021817	0.503343	0.021811
	1.0	0.983040	0.042099	0.981850	0.042071	0.981933	0.042066
	1.5	1.445875	0.061420	1.443965	0.061373	1.444283	0.061373
	2.0	1.895624	0.080001	1.892978	0.079931	1.893560	0.079938
	2.5	2.334142	0.097971	2.330766	0.097881	2.331619	0.097895
	3.0	2.762693	0.115400	2.758609	0.115294	2.759729	0.115316

Tablo 4.7: Problem 2' nin $\Delta t = 0.01$, $N = 100$ değerleri için $U_N(x, t)$ ' nin farklı α ve β için $t = 0.1$ ve 0.5 zamanlarındaki L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref.[143, 147, 148, 149, 150, 154] ile karşılaştırılması.

t	α	β	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
			L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.5	0.1	0.3	$6.737E-4$	$4.187E-5$	$6.729E-4$	$4.186E-5$	$6.724E-4$	$4.185E-5$
		0.03	$7.411E-4$	$4.591E-5$	$7.387E-4$	$4.591E-5$	$7.375E-4$	$4.591E-5$
	1	0.1	$1.325E-3$	$8.280E-5$	$1.324E-3$	$8.277E-5$	$1.323E-3$	$8.275E-5$
		0.03	$1.463E-3$	$9.182E-5$	$1.457E-3$	$9.182E-5$	$1.456E-3$	$9.182E-5$
0.5	0.1	0.3	[143]		[150]		[149]	
		0.03	$6.736E-4$	$4.167E-5$	$6.732E-4$	$4.187E-5$	$6.783E-4$	$4.208E-5$
	1	0.1	$7.326E-4$	$4.590E-5$	$7.430E-4$	$4.591E-5$	$7.609E-4$	$4.703E-5$
		0.03	$1.325E-3$	$8.258E-5$	$1.323E-3$	$8.277E-5$	$1.334E-3$	$8.320E-5$
1	0.1	0.3	$1.452E-3$	$9.182E-5$	$1.464E-3$	$9.183E-5$	$1.500E-3$	$9.409E-5$
		0.03	[148]		[147]		[154]	
	0.5	0.1	$1.44E-3$	$4.38E-5$	$3.2453E-5$	$9.6185E-4$	$2.02E-3$	$1.00E-4$
		0.03	$6.68E-4$	$4.58E-5$	$2.7326E-5$	$4.3102E-4$	$5.07E-3$	$2.52E-4$
1	0.1	0.3	$1.27E-3$	$8.66E-5$	$2.4054E-5$	$1.1529E-3$	$4.03E-3$	$2.01E-4$
		0.03	$1.30E-3$	$9.16E-5$	$2.8316E-5$	$1.2684E-3$	$1.00E-2$	$5.04E-4$

Tablo 4.8: Problem 2' nin $\Delta t = 0.01$, $N = 100$ değerleri için $V_N(x, t)$ ' nin farklı α ve β için $t = 0.1$ ve 0.5 zamanlarındaki L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref.[143, 150, 149, 148, 147, 154] ile karşılaştırılması.

t	α	β	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
			L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.5	0.1	0.3	$5.014E-4$	$0.218E-4$	$5.000E-4$	$0.218E-4$	$4.993E-4$	$0.217E-4$
	0.3	0.03	$1.319E-3$	$1.809E-4$	$1.318E-3$	$1.809E-4$	$1.318E-3$	$1.809E-4$
	0.1	0.3	$0.979E-3$	$4.205E-5$	$0.976E-3$	$4.197E-5$	$0.975E-3$	$4.193E-5$
1	0.3	0.03	$2.603E-3$	$3.618E-4$	$2.601E-3$	$3.618E-4$	$2.600E-3$	$3.618E-4$
			[143]		[150]		[149]	
0.5	0.1	0.3	$9.057E-4$	$1.480E-4$	$5.015E-4$	$0.218E-4$	$5.101E-4$	$0.221E-4$
	0.3	0.03	$1.591E-3$	$5.729E-4$	$1.319E-3$	$1.809E-4$	$1.327E-3$	$1.818E-4$
	0.1	0.3	$1.251E-3$	$4.770E-5$	$0.977E-3$	$4.205E-5$	$0.995E-3$	$4.255E-5$
1	0.3	0.03	$2.250E-3$	$3.617E-4$	$2.600E-3$	$3.618E-4$	$2.617E-3$	$3.636E-4$
			[148]		[147]		[154]	
0.5	0.1	0.3	$5.42E-4$	$4.99E-5$	$2.746E-5$	$3.332E-4$	$1.56E-3$	$3.80E-5$
	0.3	0.03	$1.20E-3$	$1.81E-4$	$2.454E-4$	$1.148E-3$	$1.59E-3$	$1.85E-4$
	0.1	0.3	$1.29E-3$	$9.92E-5$	$3.745E-5$	$1.162E-3$	$3.10E-3$	$7.58E-5$
1	0.3	0.03	$2.35E-3$	$3.62E-4$	$4.525E-4$	$1.638E-3$	$3.15E-2$	$3.67E-4$

içinde olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra Ref. [147, 148] çalışmalarındaki L_∞ normu $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 ile hesaplanan L_∞ normundan büyük L_2 normu ise daha küçüktür. Tablo 4.8' e baktığımızda ise $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile elde edilen sonuçların genel olarak karşılaştırma yapılan çalışmaların çoğundan daha iyi olduğu açıktır.

Problem 3

Son problem olarak (4.1.1) ve (4.1.2) lineer olmayan coupled viskoz Burgers' denklemleri $\eta = 2$ ve $\alpha = \beta = 5/2$ parametreleri için $[-20, 20]$ aralığı üzerinde incelendi. Bu problemin başlangıç şartı

$$u(x, 0) = K \left(1 - \tanh\left(\frac{3Kx}{2}\right) \right), \quad x \in [-20, 20]$$

$$v(x, 0) = K \left(1 - \tanh\left(\frac{3Kx}{2}\right) \right), \quad x \in [-20, 20]$$

olmak üzere problemin tam çözümü Abazari [158] tarafından

$$u(x, t) = K \left(1 - \tanh\left(\frac{3K}{2}(x - 3Kt)\right) \right), \quad x \in [-20, 20]$$

$$v(x, t) = K \left(1 - \tanh\left(\frac{3K}{2}(x - 3Kt)\right) \right), \quad x \in [-20, 20]$$

olarak verilmiştir. Problemin sınır şartları tam çözümden alındı. Burada başlangıç şartı K parametresine bağlı olduğundan farklı K değerleri için çeşitli anti-kink

Tablo 4.9: Problem 3' ün $\Delta t = 0.001$ ve $K = 0.1, 0.5, 1$ değerleri için $U_N(x, t)$ 'nin farklı zamanlardaki $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin L_2 ve L_∞ hata normları.

K	N	t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
			L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.1	320	1	$1.0283E-6$	$0.6902E-6$	$1.1765E-6$	$0.7641E-6$	$0.9540E-6$	$0.4694E-6$
		2	$1.7781E-6$	$0.7829E-6$	$1.8199E-6$	$0.7648E-6$	$1.5650E-6$	$0.5264E-6$
		3	$2.3353E-6$	$0.7425E-6$	$2.3347E-6$	$0.7140E-6$	$2.1065E-6$	$0.6131E-6$
		4	$2.7935E-6$	$0.7536E-6$	$2.7634E-6$	$0.7557E-6$	$2.5753E-6$	$0.7556E-6$
		5	$3.1816E-6$	$0.8758E-6$	$3.1268E-6$	$0.8780E-6$	$2.9831E-6$	$0.8777E-6$
0.5	200	1	$1.5432E-4$	$5.4661E-4$	$1.5430E-4$	$5.4664E-4$	$1.5431E-4$	$5.4661E-4$
		2	$1.6042E-4$	$5.7424E-4$	$1.6041E-4$	$5.7403E-4$	$1.6041E-4$	$5.7416E-4$
		3	$1.5517E-4$	$5.7845E-4$	$1.5516E-4$	$5.7857E-4$	$1.5517E-4$	$5.7844E-4$
		4	$1.4936E-4$	$5.6625E-4$	$1.4935E-4$	$5.6600E-4$	$1.4936E-4$	$5.6624E-4$
		5	$1.4442E-4$	$5.6815E-4$	$1.4428E-4$	$5.6832E-4$	$1.4428E-4$	$5.6810E-4$
1	320	1	$0.1736E-3$	$1.7595E-3$	$0.1736E-3$	$1.7615E-3$	$0.1736E-3$	$1.7611E-3$
		2	$0.1611E-3$	$1.7281E-3$	$0.1610E-3$	$1.7306E-3$	$0.1610E-3$	$1.7298E-3$
		3	$0.1522E-3$	$1.7247E-3$	$0.1521E-3$	$1.7273E-3$	$0.1521E-3$	$1.7261E-3$
		4	$0.1448E-3$	$1.7243E-3$	$0.1447E-3$	$1.7271E-3$	$0.1447E-3$	$1.7255E-3$
		5	$0.1384E-3$	$1.7243E-3$	$0.1383E-3$	$1.7273E-3$	$0.1383E-3$	$1.7252E-3$

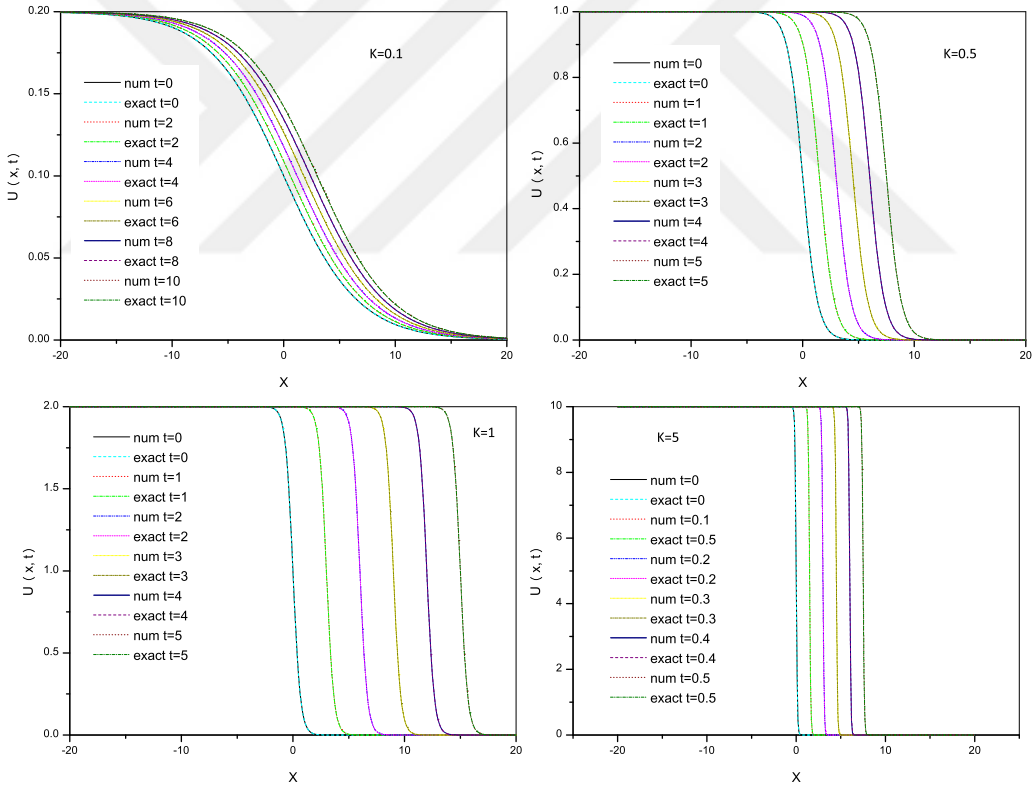
dalga çözümleri elde edilir [153]. Tablo 4.9' da $K = 0.1, 0.5$ ve 1 değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Bu tabloda $K = 0.1$ ve 1 değerleri için $N = 320$ ile ideal sonuçlar elde edilirken $K = 0.5$ için $N = 200$ de ideal sonuçlar hesaplandı. Ayrıca Tablo 4.9' da $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle hesaplanan sonuçların kendi içinde az da olsa iyileştiği fakat genel olarak uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.11: Problem 3' ün $K = 1$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 320$ değerleri için $U_N(x, t)$ 'nin farklı zamanlardaki L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [152] ile karşılaştırılması.

t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6		[152]
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2
1	$1.7369E-4$	$1.7595E-3$	$1.7360E-4$	$1.7615E-3$	$1.7359E-4$	$1.7611E-3$	$1.7416E-4$
2	$1.6108E-4$	$1.7281E-3$	$1.6100E-4$	$1.7306E-3$	$1.6100E-4$	$1.7298E-3$	$1.6157E-4$
3	$1.5221E-4$	$1.7247E-3$	$1.5213E-4$	$1.7273E-3$	$1.5213E-4$	$1.7261E-3$	$1.5268E-4$
4	$1.4482E-4$	$1.7243E-3$	$1.4474E-4$	$1.7271E-3$	$1.4474E-4$	$1.7255E-3$	$1.4525E-4$
5	$1.3842E-4$	$1.7243E-3$	$1.3835E-4$	$1.7273E-3$	$1.3834E-4$	$1.7252E-3$	$1.3883E-4$

Tablo 4.10: Problem 3'ün $\Delta t = 0.001$ ve $K = 0.1, 0.5$ değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [152] ve Ref. [153] ile karşılaştırılması.

K	N	t	$S_{\Delta t}$		Ext4		Ext6	
			L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.1	320	1	$1.0283E-6$	$0.6902E-6$	$1.1765E-6$	$0.7641E-6$	$0.9540E-6$	$0.4694E-6$
		2	$1.7781E-6$	$0.7829E-6$	$1.8199E-6$	$0.7648E-6$	$1.5650E-6$	$0.5264E-6$
		3	$2.3353E-6$	$0.7425E-6$	$2.3347E-6$	$0.7140E-6$	$2.1065E-6$	$0.6131E-6$
		4	$2.7935E-6$	$0.7536E-6$	$2.7634E-6$	$0.7557E-6$	$2.5753E-6$	$0.7556E-6$
		5	$3.1816E-6$	$0.8758E-6$	$3.1268E-6$	$0.8780E-6$	$2.9831E-6$	$0.8777E-6$
0.5	200	1	$1.5432E-4$	$5.4661E-4$	$1.5430E-4$	$5.4664E-4$	$1.5431E-4$	$5.4661E-4$
		2	$1.6042E-4$	$5.7424E-4$	$1.6041E-4$	$5.7403E-4$	$1.6041E-4$	$5.7416E-4$
		3	$1.5517E-4$	$5.7845E-4$	$1.5516E-4$	$5.7857E-4$	$1.5517E-4$	$5.7844E-4$
		4	$1.4936E-4$	$5.6625E-4$	$1.4935E-4$	$5.6600E-4$	$1.4936E-4$	$5.6624E-4$
		5	$1.4442E-4$	$5.6815E-4$	$1.4428E-4$	$5.6832E-4$	$1.4428E-4$	$5.6810E-4$
0.1	320	1	$1.4829E-6$	$5.7788E-7$	$2.7344E-5$	—	—	—
		2	$2.7955E-6$	$1.0754E-6$	$6.4798E-5$	—	—	—
		3	$3.9298E-6$	$1.4861E-6$	$1.0832E-4$	—	—	—
		4	$4.9434E-6$	$1.8800E-6$	$1.5709E-4$	—	—	—
		5	$5.8615E-6$	$2.2034E-6$	$2.1113E-4$	—	—	—
0.5	320	1	$1.6362E-4$	$6.7505E-4$	$6.6534E-5$	—	—	—
		2	$1.9746E-4$	$8.1705E-4$	$6.3686E-5$	—	—	—
		3	$2.0557E-4$	$8.6375E-4$	$6.0667E-5$	—	—	—
		4	$2.0543E-4$	$8.8160E-4$	$5.8210E-5$	—	—	—
		5	$2.0231E-4$	$8.9060E-4$	$5.6210E-5$	—	—	—



Şekil 4.2: Problem 3'ün $K = 0.1, 0.5, 1$ ve 5 değerleri için farklı zamanlarda çözüm grafiği.

$K = 0.1$ ve 0.5 değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 4.10' da Ref. [152, 153] çalışmalarıyla karşılaştırıldı. Tablo 4.10' dan görüldüğü gibi $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle elde edilen sonuçlar genel olarak daha iyidir. $K = 1$ değeri için hesaplanan sonuçlar Ref. [152] alışmasıyla Tablo 4.11' de karşılaştırıldı. Tablodan $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle elde edilen L_2 hata normunun Ref. [152]' de verilenlerden daha iyi olduğu görülmektedir. Ayrıca tabloya bakıldığında, $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle hesaplanan sonuçların kendi içinde uyumlu olduğu görülmektedir. Bu problemin $K = 0.1, 0.5, 1$ ve 5 değerleri için hesaplanan çözümlerinin farklı zamanlardaki grafikleri şekil 4.2' de verildi. şekil 4.2' de görüldüğü gibi K değeri bydk çözüm eğrilerinin de dikleştiği ve nümerik çözümün tam çözüm ile uyum içinde olduğu görülmektedir.

5. SONUÇ

Bu bölümde, tezin orijinal kısmını oluşturan üçüncü ve dördüncü bölümlerinde ele alınan Burgers', modifiye edilmiş Burgers' (mBE), düzenli uzun dalga (RLW) ve coupled viskoz Burgers' denklemlerinin $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleriyle elde edilen çözümlerinin genel bir değerlendirilmesi yapıldı.

Tezin üçüncü bölümünde lineer ve lineer olmayan iki alt denkleme split edilen sırasıyla, Burgers', mBE ve RLW denklemlerinin kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile elde edilen şemaları $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile birleştirilerek çözümleri verildi. Burgers' denkleminin nümerik çözümleri üç farklı problem için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan L_2 , L_∞ ve $\|e_1\|$ hata normları tablolar halinde literatürde mevcut olan bazı çalışmalarla ve üç yöntem kendi içinde karşılaştırıldı. mBE denklemi için bir model problem göz önüne alındı ve L_2 , L_∞ hata normları $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplandı. Hesaplanan hata normları ve noktasal değerler literatürdeki çalışmaların yanı sıra üç yöntem kendi içinde birbirleri ile de karşılaştırıldı. RLW denklemi yine üç farklı test problemi ile incelendi ve $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan L_2 , L_∞ hata normları verildi. Ayrıca denklemlerin split edilmesi sonucunda ortaya çıkan her bir alt denkleme kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yönteminin uygulanmasıyla elde edilen şemaların kararlık analizleri von Neumann yöntemiyle yapıldı.

Burgers' denkleminin nümerik çözümleri farklı h , Δt ve ν değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan L_2 , L_∞ ve $\|e_1\|$ hata normları ve elde edilen nümerik çözümlerin bazı noktasal değerleri tam çözüm ile karşılaştırıldı. Ayrıca Burgers' denkleminin literatürde farklı yöntemlerle elde edilen sonuçları ile de karşılaştırma yapıldı. Karşılaştırma yaptığımız diğer çalışmaların çoğunda bizim seçtiğimiz Δt zaman adım uzunluğundan daha küçük Δt zaman adım

uzunluğu kullanılmasına rağmen sonuçlarımızın daha iyi veya uyum içinde olduğu görüldü. Bu denklem için verilen tablolara bakıldığında her üç test problem için de, Ext6 yöntemiyle hesaplanan hata normlarının Ext4' den ve Ext4 yöntemiyle hesaplanan hata normlarının da $S_{\Delta t}$ yöntemi ile hesaplanandan daha düşük olduğu görülmektedir. Ayrıca Problem 1 ve 2 için farklı h ve Δt değerlerinde verilen tablolar incelendiğinde h ve Δt küçüldükçe elde edilen L_2 , L_∞ ve $\|e_1\|$ hata normlarının da küçüldüğü görüldü. Bunlara ek olarak tam ve nümerik çözümlerin noktasal değerlerini karşılaştırdığımız tablolardan Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan noktasal değerlerin tam çözüme oldukça yakın olduğu açıktır. Her üç yöntemle hesaplanan nümerik çözümlerin grafikleri ayırt edilemeyecek kadar birbirine yakın olduğundan çizimler $S_{\Delta t}$ yöntemiyle elde edilen sonuçlar kullanılarak yapıldı.

Modifiye edilmiş Burgers' denklemi için elde edilen tablolarda $S_{\Delta t}$ yöntemi ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları literatürde mevcut olan birçok çalışma ile karşılaştırıldı. Bu çalışmalar arasında yüksek dereceden spline' lar kullananlar da olmasına rağmen $S_{\Delta t}$ ile hesaplanan hata normlarının genel olarak daha iyi olduğu söylenebilir. Bu problemin, $\Delta t = 0.01$, $h = 0.02$, $\nu = 0.01, 0.005, 0.001$ değerleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan hata normlarının kendi arasında karşılaştırılmasını gösteren Tablo 3.32 incelendiğinde, $t = 2$ dışında diğer zamanlarda Ext4' ün $S_{\Delta t}$ ' dan, Ext6' nında Ext4' den daha küçük hata normlarına sahip olduğu görüldü. Bu problemin $S_{\Delta t}$ yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri farklı ν değerleri için çeşitli zamanlarda grafiksel olarak sunuldu. Grafiklerden ν küçüldükçe hatanın sol sınıra doğru büyüdüğü anlaşılmaktadır.

Bölüm üç de son olarak RLW denkleminin tek solitary dalga, iki solitary dalganın girişimi ve ardışık dalgaların oluşumu problemleri ele alındı. Tek solitary dalga probleminin tam çözümü mevcut olduğundan $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile bulunan L_2 ve L_∞ hata normları $c = 0.1, 0.03$ için kendi içinde $[-40, 60]$ ve

$[-40, 70]$ aralıklarında karşılaştırıldı. Bu problem için verilen tablolara bakıldığında $c = 0.1$ için üç yöntemin birbirinden daha düşük hata normları verdikleri ve çözüm aralığı genişletildiğinde hata normlarında kayda değer bir değişim olmadığı gözlemlendi. Fakat $c = 0.03$ için hesaplama yapılan zamanlarda bu üç yöntem arasındaki üstünlük sırası kaydedilemedi. Ayrıca $S_{\Delta t}$ ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları ve korunum sabitleri literatürdeki birçok çalışma ile karşılaştırıldı. İki solitary dalganın çarpışması ve ardışık dalgaların oluşumu problemleri için ise $S_{\Delta t}$ ile hesaplanan korunum sabitleri incelendi ve literatürdeki bazı çalışmalarla karşılaştırıldı. Bu iki problem için verilen tablolardan $S_{\Delta t}$ ile hesaplanan korunum sabitlerinin zaman ilerledikçe neredeyse sabit kaldığı ve literatürdeki çalışmalarla uyum içinde olduğu görüldü. Bunlara ek olarak grafik çizimleri $S_{\Delta t}$ ile elde edilen nümerik sonuçlar kullanılarak çizildi.

Tezin dördüncü bölümünde, lineer olmayan coupled viskoz Burgers' denklemi her biri lineer ve lineer olmayan iki alt denklemden oluşmak üzere toplam dört alt denkleme split edildi. Split sonucunda elde edilen alt denklemlerin her birine kübik B-spline kollokasyon yöntemi uygulandı ve şemalar elde edildi. Bu şemalar kullanılarak $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile coupled viskoz Burgers' denklemi üç farklı model problem için nümerik olarak çözüldü ve hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları literatürde mevcut olan çalışmalar ile karşılaştırıldı. Ayrıca $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile elde edilen hata normları farklı h ve Δt değerleri için farklı zamanlarda kendi içinde karşılaştırıldı. Bununla birlikte, alt denklemler için elde edilen şemalar birbirini etkilediğinden dolayı şemalara von Neumann kararlılık analizi uygulanırken birlikte göz önüne alındı.

Problem 1 için $\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ değerleri için verilen Tablo 4.1 incelendiğinde N büyüdükçe $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan hata normlarının da düştüğü açıktır. Ayrıca aynı tablodan Ext6 yöntemiyle hesaplanan hata normlarının Ext4' den ve Ext4 yöntemiyle hesaplanan hata normlarının da

$S_{\Delta t}$ yöntemi ile hesaplananlardan daha düşük olduğu görülmektedir. $N = 100$ için ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$ değerleri ile verilen Tablo 4.2' ye bakıldığında Δt zaman adım uzunluğu küçüldükçe $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan hata normları da küçülmektedir. Buna ek olarak her üç yöntem için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları beklendiği gibi kendi içinde azalmaktadır. Problem 1 için literatürde bulunan çalışmalar ile yapılan karşılaştırmalarda $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan hata normlarının genel olarak iyi uyum içinde olduğu söylenebilir.

Problem 2' de $\Delta t = 0.01$ ve $N = 50, 100, 200$ için farklı zamanlarda $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonları için kendi arasında karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma tablolarına bakıldığında N büyüdükçe hata normlarının çok az da olsa arttığı fakat $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin kendi içinde iyileştiği görülmektedir. Ayrıca Problem 2' de aralarında kuadratik Galerkin ve kuintik kollokasyon gibi yöntemlerinde bulunduğu çalışmalarla karşılaştırma yapıldığında, $u(x, t)$ için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının uyumlu olduğu, fakat $v(x, t)$ için yapılan karşılaştırmalarda $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan hata normlarının genel olarak daha iyi olduğu görüldü.

Son olarak coupled viskoz Burgers' denklemi için verilen Problem 3' de başlangıç şartı bir K parametresine bağlı olan bir problem incelendi. Bu problemde $\Delta t = 0.001$ alınarak literatürde bulunan $K = 0.1, 0.5$ ve 1 parametreleri için $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları kendi içinde ve diğer çalışmalarla karşılaştırıldı. $K = 0.1$ ve 1 değerleri için $N = 320$ alınarak sonuçlar elde edilirken $K = 0.5$ için ise ideal sonuçlar $N = 200$ de hesaplandı. Üç yöntem kendi içinde karşılaştırıldığında yöntemler arasında çok iyi bir iyileşme olmamasıyla birlikte genel olarak Ext4 ve Ext6 yöntemlerinin $S_{\Delta t}$ ' ye göre daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. $S_{\Delta t}$, Ext4 ve Ext6 yöntemleri

ile hesaplanan hata normları literatürdeki çalışmalarla karşılaştırıldığında daha küçük hata normlarına sahip oldukları görüldü. Ayrıca bu problem için $S_{\Delta t}$ ile hesaplanan nümerik sonuçlar kullanılarak grafik çizimleri yapıldı ve grafiklerden görüldüğü gibi problemin fiziksel davranışına uygun olarak K parametresi büyüdükçe çözüm eğrilerinin de dikleştiği açıktır.

Sonuç olarak, operatör splitting yöntemleri Burgers', modifiye edilmiş Burgers' (mBE), düzenli uzun dalga (RLW) ve coupled viskoz Burgers' denklemlerine başarılı bir şekilde uygulandığı gibi literatürde mevcut olan birçok farklı yapıdaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde de etkili bir yöntem olacağı anlaşılmaktadır. Bu çalışmanın literatürde operatör splitting yöntemleri ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine çalışacak araştırmacılara iyi bir kaynak olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] J. N. Reddy, *An introduction to the fininite element method*, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1993.
- [2] A. M. Wazwaz, *Partial differential equations and solitary waves theory*, Higher Education Press, Springer, Berlin Heidelberg, 2009.
- [3] M. A. Bhatti, *Fundamental Finite Element Analysis and Applications with Mathematica and Matlab Computations*, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.
- [4] H. Holden, K. H. Karlsen, K. A. Lie, N. H. Risebro, *Splitting Methods for Partial Differential Equations with Rough Solutions*, European Mathematical Society, Switzerland, 2010.
- [5] W. Hundsdorfer, J. Verwer, *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations (First Edition)*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2003.
- [6] B. Sportisse, *An analysis of operator splitting techniques in the stiff case*, **J. Comput. Phys.** 161 (2000) 140–168.
- [7] A. Hrennikoff, *Solution of Problems in Elasticity by the Frame Work Method*, **J. Appl. Mech.**, 8:4 (1941) 169-175.
- [8] D. McHenry, *A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems*, **J.Inst.Civ.Eng.**, 21 (1943) 59-82 .
- [9] R. W. Clough, "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis" Proceedings, American Society of Civil Engineers, 2nd Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA, Sept. 1960, pp, 345-378.
- [10] D. L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method (Fourth Edition)*, Thomson, 2007.
- [11] Singiresu S. Rao, *The Finite Element Method in Engineering (Fifth Edition)*, Elsevier/Butterworth Heinemann, 2011.
- [12] F. L. Stasa, *Applied Finite Element Analysis for Engineers*, CBS College Publishing, New York, 1985.
- [13] Larry L. Schumaker, *Spline Functions: basic theory*, Cambridge University Press, New York, 2007.
- [14] İ. Dağ, "Studies of B-spline Finite Elements", Ph. D. Thesis, University College of North Wales, Bangor, Gwynedd (UK), 1994.

- [15] W. Cheney, D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing (Sixth Edition)*, Thomson, 2008, 2004.
- [16] P.M. Prenter, *Splines and Variational Methods*, Wiley, New York, 1975.
- [17] W. Hundsdorfer, *Numerical Solution of Advection-Diffusion-Reaction Equations*, Lecture notes for PH.D. course, Thomas Stieltjes Institute, Amsterdam, 2000.
- [18] S. Macnamara and G. Strang, *Operator Splitting*. In: Splitting Methods in Communication, Imaging, Science, and Engineering, Editors: R. Glowinski, S. J. Osher, W. Yin, Springer, New York, 2017.
- [19] X. Xiao, D. Gui, X. Feng, *A highly efficient operator-splitting finite element method for 2D/3D nonlinear Allen–Cahn equation*, **Internat. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow**, 27 (2017) 530-542.
- [20] K. A. Bagrinovskii, S. K. Godunov, *Difference schemes for multidimensional problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (NS), 115 (1957) 431-433.
- [21] H. F. Trotter, *On the product of semi-groups of operators*, **Proc. American Math. Society**, 10 (1959) 545-551.
- [22] J. Douglas, H. H. Rachford JR, *On the numerical solution of heat conduction problems in two or three space variables*, **Trans. Amer. Math. Soc.**, 82 (1956) 421-439.
- [23] D. W. Peaceman, H. H. Rachford JR, *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*, **J. Scott. Indust. Appl. Math.**, 3 (1955) 28-41.
- [24] P. Sun, *A pseudo non-time splitting method in air quality modeling*, **J. Comp. Phys.**, 127 (1996) 152-157.
- [25] J. Kim, S.Y. Cho, *Computation accuracy and efficiency of the time-splitting method in solving atmospheric transport-chemistry equations*, **Atmos. Environ.**, 31:15 (1997) 2215-2224.
- [26] G. J. McRae, W. R. Goodin, J. H. Seinfeld, *Numerical solution of the atmospheric diffusion equation for chemically reacting flows*, **J. Comp. Phys.**, 45 (1982) 1-42.
- [27] G. R. Otey, H. A. Dywer, *Numerical study of the interaction of fast chemistry and diffusion*, **AIAA J.**, 17(6) (1978) 606-613.
- [28] R. E. Caflish, Shi Jin, G. Russo, *Uniformly accurate schemes for hyperbolic systems with relaxation*, **SIAM J. Numer. Anal.**, 34:1 (1997) 246-281.

- [29] S. Jin, *Runge–Kutta methods for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms*, **J. Comp. Phys.**, 122 (1995) 51–88.
- [30] R. J. LeVeque, H. C. Yee, *A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms*, **J. Comp. Phys.**, 86 (1990) 187–211.
- [31] E. Forest, R. D. Ruth, *Fourt order symplectic integration*, **Physica D.**, 43 (1990) 105–117.
- [32] R. I. McLachlan, P. Atela, *The accuracy of symplectic integrators*, **Nonlinearity**, 5 (1992) 541–562.
- [33] R.I. McLachlan, *Explicit Lie-Poisson integration and the Euler equations*, **Phys. Rev. Lett.**, 71 (1993) 3043–3046.
- [34] R. I. McLachlan, *On the numerical integration of ordinary differential equations by symmetric composition methods*, **SIAM J. Sci. Comput.**, 16(1) (1995) 151–168.
- [35] B.J. Leimkuhler, S. Reich, R.D. Skeel, “Mathematical Approaches to Biomolecular Structure and Dynamics”, in The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, *Integration Methods for Molecular Dynamic*, Springer, 1996.
- [36] H. De Raedt, *Product Formula Algorithms for Solving the Time Dependent Schrödinger Equation*, **Comp. Phys. Rep.**, 7 (1987) 1–72.
- [37] G. J. Sussman, J. Wisdom, *Chaotic Evolution of the Solar System*, **Science**, 257 (1992) 56–62.
- [38] R. I. McLachlan, G. Reinout. W. Quispel, *Splitting methods*, **Acta Numer.**, 11 (2002) 341–434.
- [39] N. Gücüyenlen, ” *Operator Splitting Method For Parabolic Partial Differential Equations: Analyses And Applications*”, Ph. D. Thesis, İzmir Institute of Technology, İzmir, 2013.
- [40] A. Pazy, “Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations”, in Applied mathematical sciences, Vol. 44., Springer, New York, 1983.
- [41] M. Seydaoğlu, U. Erdoğan, T. Öziş, *Numerical solution of Burgers’ equation with high order splitting methods*, **J. Comput. Appl. Math.**, 291 (2016) 410–421.
- [42] H. Yoshida, *Construction of higher order symplectic integrators*, **Phys. Lett. A**, 150 (1990) 262–268.

- [43] S. Descombes, M. Thalhammer, *An exact local error representation of exponential operator splitting methods for evolutionary problems and applications to linear Schrödinger equations in the semi-classical regime*, **BIT. Numer. Math.**, 50 (2010) 729–749.
- [44] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations (Second edition)*, Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [45] G.I. Marchuk, *Some application of splitting-up methods to the solution of mathematical physics problems*, **Applik. Mat.**, 13 (1968) 103–132.
- [46] G. Strang, *On The Construction And Comparison Of Difference Schemes*, **SIAM J. Numer. Anal.**, 5:3 (1968) 506–517.
- [47] S. Blanes, F. Casas, *On the necessity of negative coefficients for operator splitting schemes of order higher than two*, **Appl. Numer. Math.**, 54 (2005) 23–37.
- [48] S. A. Chin, C. R. Chen, *Gradient symplectic algorithms for solving the Schrödinger equation with time-dependent potentials*, **J. Chem. Phys.**, 117 (2002) 1409–1425.
- [49] F. Castella, P. Chartier, S. Descombes, G. Vilmart, *Splitting methods with complex times for parabolic equations*, **BIT. Numer. Math.**, 49 (2009) 487–508.
- [50] E. Hansen, A. Ostermann, *High order splitting methods for analytic semigroups exist*, **BIT Numer Math.**, 49 (2009) 527–542.
- [51] Q. Sheng, *Global error estimates for exponential splitting*, **IMA J. Numer. Anal.**, 14 (1993) 27–56.
- [52] T. Jahnke, C. Lubich, *Error Bounds For Exponential Operator Splittings*, **BIT. Numer. Math.**, 40:4 (2000) 735–744.
- [53] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations (First Edition)*, Springer-Verlag New York, 1985.
- [54] S. Blanes, F. Casas, J. Ros, *Extrapolation Of Symplectic Integrators*, **Celest. Mech. & Dyn. Astron.**, 75 (1999) 149–161.
- [55] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer–Verlag, 1980.
- [56] S. Blanes, F. Casas, *A Concise Introduction to Geometric Numerical Integration*, CRC Press LLC, 2016.

- [57] B. O. Dia, M. Schatzman, *Commutateurs De Certains Semi-Groupes Holomorphes Et Applications Aux Directions Alternees*, **Math. Modelling Num. Anal.**, 30:3 (1996) 343-383.
- [58] S. Blanes, F. Casas, A. Murua, *Splitting and composition methods in the numerical integration of differential equations*, **Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.**, 45 (2008) 89-145.
- [59] P. C. Jain, M. Raja, *Splitting-up Technique For Burger's Equations*, **Indian J. pure appl. math.**, 10:12 (1979) 1543-1551.
- [60] P.C. Jain, R. Shankar, T.V. Singh, *Cubic Spline Technique For Solution Of Burgers' Equation With A Semi-Linear Boundary Condition*, **Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.**, 8 (1992) 235-242.
- [61] B. Saka, İ. Dağ, *A numerical study of the Burgers' equation*, **J. Franklin Inst.**, 345 (2008) 328-348.
- [62] W. Bao, S. Jin, P. A. Markowich, *On Time-Splitting Spectral Approximations for the Schrödinger Equation in the Semiclassical Regime*, **J. Comput. Phys.**, 175 (2002) 487-524.
- [63] J. Shen, Z.-Q. Wang, *Error Analysis of the Strang Time-Splitting Laguerre-Hermite/Hermite Collocation Methods for the Gross-Pitaevskii Equation*, **Found. Comput. Math.**, 13 (2013) 99-137.
- [64] M. Thalhammer, *Convergence analysis of high-order time-splitting pseudo-spectral methods for nonlinear Schrödinger equations*, **SIAM J. Numer. Anal.**, 50 (2012) 3231-3258.
- [65] C. Lubich, *On splitting methods for Schrödinger-Poisson and cubic nonlinear Schrödinger equations*, **Math. Comput.**, 77 (2008) 2141-2153.
- [66] C. I. Christov, R. S. Marinova, *Implicit vectorial operator splitting for incompressible Navier - Stokes equations in primitive variables*, **J. Comput. Technologies**, 6:4 (2001) 92-120.
- [67] H. Holden, C. Lubich, N. H. Risebro, *Operator splitting for partial differential equations with Burgers nonlinearity*, **Math. Comp.**, 82 (2013), 173-185.
- [68] H. Holden, K. H. Karlsen, N. H. Risebro, T. Tao, *Operator splitting for the KdV equation*, **Math. Comp.**, 80 274 (2011) 821-846.
- [69] H. Holden, K. H. Karlsen, N. H. Risebro, *Operator Splitting Methods for Generalized Korteweg-De Vries Equations*, **J. Comput. Phys.**, 153 (1999) 203-222.

- [70] C. Zhang, H. Wang, J. Huang, C. Wang, X. Yue, *A second order operator splitting numerical scheme for the “good” Boussinesq equation*, **Appl. Numer. Math.**, 119 (2017) 179–193.
- [71] H. G. Lee, J.-Y. Lee, *A second order operator splitting method for Allen–Cahn type equations with nonlinear source terms*, **Phys. A**, 432 (2015) 24–34.
- [72] P. C. Jain and D. N. Holla, *Numerical Solution Of Coupled Burgers’ Equation*, **Internat. J. Non-Linear Mech.**, 13 (1978) 213–222.
- [73] D. Bhardwaj, R. Shankar, *A Computational Method for Regularized Long Wave Equation*, **Comput. Math. Appl.**, 40 (2000) 1397–1404.
- [74] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, *The space-splitting idea combined with local radial basis function meshless approach to simulate conservation laws equations*, **Alexandria Eng. J.**, (2017), . <https://doi.org/10.1016/j.aej.2017.02.024>
- [75] E. Bahar, G. Gurarslan, *Numerical Solution of Advection-Diffusion Equation Using Operator Splitting Method*, **Int J Eng Appl Sci.**, 9 (2017) 76–88.
- [76] G. Peng, J. Zhao, X. Feng, *Operator-Splitting Method For High-Dimensional Parabolic Equation Via Finite Element Method*, **MATH. REPORTS**, 19(69), 4 (2017), 381–397.
- [77] C.Y. Kao, A. Kurganov, Z. Qu, Y. Wang, *A Fast Explicit Operator Splitting Method for Modified Buckley–Leverett Equations*, **J. Sci. Comput.**, 64 (2015) 837–857.
- [78] M. Seydaoglu, S. Blanes, *High-order splitting methods for separable non-autonomous parabolic equations*, **Appl. Numer. Math.**, 84 (2014) 22–32.
- [79] H. Bateman, *Some recent researches on the motion of fluids*, **Mon. Weather Rev.**, 43 (1915) 163–170.
- [80] J.M. Burgers, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, **Adv. Appl. Mech.**, 1 (1948) 171–199.
- [81] J.M. Burgers, *Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion*, **Trans. R. Neth. Acad. Sci. Amst.** 17 (1939) 1–53.
- [82] A.G. Bratsos, *A fourth-order numerical scheme for solving the modified Burgers equation*, **Comput. Math. Appl.**, 60 (2010) 1393–1400.

- [83] J.D. Cole, *On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics*, **Quart. Appl. Math.**, 9 (1951) 225-236.
- [84] M. Xu, Ren-Hong Wang, Ji-Hong Zhang and Qin Fang, *A novel numerical scheme for solving Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.**, 217 (2011) 4473–4482.
- [85] Yun Gao, Li-Hua Le, Bao-Chang Shi, *Numerical solution of Burgers' equation by lattice Boltzmann method*, **Appl. Math. Comput.**, 219 (2013) 7685–7692.
- [86] S. Haq, A. Hussain, M. Uddin, *On the numerical solution of nonlinear Burgers'-type equations using meshless method of lines*, **Appl. Math. Comput.**, 218 (2012) 6280-6290.
- [87] İ. Dağ, D. Irk, B. Saka, *A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines*, **Appl. Math. Comput.**, 163 (2005) 199-211.
- [88] A.H.A. Ali, G.A. Gardner, L.R.T. Gardner, *A collocation solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements*, **Comput. Methods Appl. Mech.Eng.**, 100 (1992) 325-337.
- [89] S. Kutluay, A. Esen, İ. Dağ, *Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method*, **J. Comput. Appl. Math.**, 167 (2004) 21–33.
- [90] R.C. Mittal, R.K. Jain, *Numerical solutions of nonlinear Burgers' equation with modified cubic B-splines collocation method*, **Appl. Math. Comput.**, 218 (2012) 7839–7855.
- [91] G. Arora, B. K. Singh, *Numerical solution of Burgers' equation with modified cubic B-spline differential quadrature method*, **Appl. Math. Comput.**, 224 (2013) 166-177.
- [92] C.G. Zhu, R.H. Wang, *Numerical solution of Burgers' equation by cubic B-spline quasi-interpolation*, **Appl. Math. Comput.**, 208 (2009) 260-272.
- [93] İ. Dağ, D. Irk, A. Şahin, *B-spline collocation methods for numerical solutions of the Burgers' equation*, **Math. Probl. Eng.**, 2005:5 (2005) 521-538.
- [94] A. Korkmaz, İ. Dağ, *Cubic B-spline differential quadrature methods and stability for Burgers' equation*, **International J. Computer-Aided Eng. Softw.**, 30:3 (2013) 320-344.
- [95] M. A. Ramadan, T. S. El-Danaf, F.E.I. Abd Alaal, *A numerical solution of the Burgers equation using septic B-splines*, **Chaos Solitons Fractals**, 26 (2005) 795–804.

- [96] R. Jiware, *A Haar wavelet quasilinearization approach for numerical simulation of Burgers' equation*, **Comput. Phys. Comm.**, 183 (2012) 2413-2423.
- [97] I.A. Ganaie, V.K. Kukreja, *Numerical solution of Burgers' equation by cubic Hermite collocation method*, **Appl. Math. Comput.**, 237 (2014) 571-581.
- [98] S. Kutluay, A. Esen, *A Lumped galerkin method for solving the Burgers equation*, **Int. J. Comput. Math.**, 81 (2004) 1433-1444.
- [99] S. Kutluay, A.R. Bahadir, A. Özdeş, *Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods*, **J. Comput. Appl. Math.**, 103 (1999) 251-261.
- [100] Asai Asaithambi, *Numerical solution of the Burgers' equation by automatic differentiation*, **Appl. Math. Comput.**, 216 (2010) 2700-2708.
- [101] M. Gulsu, *A finite difference approach for solution of Burgers equation*, **Appl. Math. Comput.**, 175 (2006) 1245-1255.
- [102] M. Gulsu, T. Öziş, *Numerical solution of Burgers equation with restrictive Taylor approximation*, **Appl. Math. Comput.**, 171 (2005) 1192-1200.
- [103] M. Xu, R.H. Wang, J.H. Zhang, Q. Fang, *A novel numerical scheme for solving Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.**, 217 (2011) 4473-4482.
- [104] S.S. Xie, S. Heo, S. Kim, G. Woo, S. Yi, *Numerical solution of one-dimensional Burgers' equation using reproducing kernel function*, **J. Comput. Appl. Math.**, 214 (2008) 417 - 434.
- [105] J. VonNeumann and R. D. Richtmyer, *A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks*, **J. Appl. Phys.**, 21 (1950) 232-237.
- [106] İ.E. İnan, Y. Ugurlu, *Exp-function method for the exact solutions of fifth order KdV equation and modified Burgers equation*, **Appl. Math. Comput.**, 217 (2010) 1294-1299.
- [107] S.E. Harris, *Sonic shocks governed by the modified Burgers' equation*, **Eur. J. Appl. Math.**, 7:2 (1996) 201 222.
- [108] P.L. Sachdev, Ch. Srinivasa Rao, B.O. Enflo, *Large-time asymptotics for periodic solutions of the modified Burgers equation*, **Stud. Appl. Math.**, 114 (2005) 307 323.
- [109] P.L. Sachdev, Ch. Srinivasa Rao, *N-wave solution of modified Burgers equation*, **Appl. Math. Lett.**, 13 (2000) 1-6.
- [110] M.A. Ramadan, T.S. El-Danaf, *Numerical treatment for the modified Burgers equation*, **Math. Comput. Simul.**, 70 (2005) 90-98.

- [111] Ö. Oruc, F. Bulut, A. Esen, *A Haar wavelet-finite difference hybrid method for the numerical solution of the modified Burgers equation*, **J. Math. Chem.**, 53 (2015) 1592-1607.
- [112] S.B. Gazi Karakoç, A. Başhan and T. Geyikli, *Two Different Methods for Numerical Solution of the Modified Burgers' Equation*, Hindawi Publishing Corporation, **Sci. World J.**, (2014) 1-13.
- [113] S. Kutluay, Y. Uçar, N. Murat Yagmurlu, *Numerical Solutions of the Modified Burgers Equation by a Cubic B-spline Collocation Method*, **Bull. Malays. Math. Sci.**, 39 (2016) 1603-1614.
- [114] A. Başhan, S.B. Gazi Karakoç, T. Geyikli, *B-spline Differential Quadrature Method for the Modified Burgers Equation*, **Çankaya Univ. J. Sci. Eng.**, 12 (2015) 001-013.
- [115] D. İrk, *Sextic B-spline collocation method for the modified Burgers' equation*, **Kybernetes**, 38 (2009) 1599-1620.
- [116] A.G. Bratsos, L.A. Petrakis, *An explicit numerical scheme for the modified Burgers' equation*, **Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.**, 27 (2011) 232-237.
- [117] T. Roshan, K.S. Bhamra, *Numerical solutions of the modified Burgers' equation by Petrov-Galerkin method*, **Appl. Math. Comput.**, 218 (2011) 3673-3679.
- [118] P. C. Jain, Rama Shankar and T. V. Singh, *Numerical Solution Of Regularized Long-Wave Equation*, **Comm. Numer. Methods Engrg.**, 9 (1993) 579-586 .
- [119] D. H. Peregrine, *Calculations of the development of an undular bore*, **J. Fluid Mech.** 25:2 (1966) 321-330.
- [120] L.R.T. Gardner, G.A. Gardner, I. Dag, *A B-spline finite element method for the regularized long wave equation*, **Commun. Numer. Methods Eng.**, 11 (1995) 59-68 .
- [121] S. Kutluay and A. Esen, *A Finite Difference Solution Of The Regularized Long-Wave Equation*, **Math. Probl. Eng.**, 2006 (2006) 1-14.
- [122] A. Esen and S. Kutluay, *Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation*, **Appl. Math. Comput.**, 174 (2006) 833-845.
- [123] L. Mei and Y. Chen, *Explicit multistep method for the numerical solution of RLW equation*, **Appl. Math. Comput.**, 218 (2012) 9547-9554.

- [124] O. Oruç, F. Bulut and A. Esen, *Numerical Solutions of Regularized Long Wave Equation By Haar Wavelet Method*, **Mediterr. J. Math.**, 13 (2016), 3235–3253.
- [125] S. L. Islam, S. Haq and A. Ali, *A meshfree method for the numerical solution of the RLW equation*, **J. Comput. Appl. Math.**, 223 (2009) 997–1012.
- [126] I. Dağ, B. Saka and D. Irk, *Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation*, **Appl. Math. Comput.**, 159 (2004) 373–389.
- [127] I. Dağ, B. Saka and D. Irk, *Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines*, **J. Comput. Appl. Math.**, 190 (2006) 532–547.
- [128] S.I. Zaki, *Solitary waves of the splitted RLW equation*, **Comput Phys Commun**, 138 (2001) 80–91.
- [129] K.R. Raslan, *A computational method for the regularized long wave (RLW) equation*, **Appl. Math. Comput.**, 167 (2005) 1101–1118.
- [130] A. Doğan, *Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method*, **Appl. Math. Model.**, 26 (2002) 771–783.
- [131] B. Saka and I. Dağ, *A numerical solution of the RLW equation by Galerkin method using quartic B-splines*, **Comm. Numer. Methods Engrg.**, 24 (2008) 1339–1361.
- [132] I. Dağ and M. N. Özer, *Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline Finite element method*, **Appl. Math. Model.**, 25 (2001) 221–231.
- [133] B. Saka, I. Dağ and A. Doğan, *Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quadratic B-splines*, **Int. J. Comput. Math.**, 81:6 (2004) 727–739.
- [134] R. Mokhtari and M. Mohammadi, *Numerical solution of GRLW equation using Sinc-collocation method*, **Comput. Phys. Comm.**, 181 (2010) 1266–1274.
- [135] B. Saka and I. Dağ, *Quartic B-Spline Collocation Algorithms for Numerical Solution of the RLW Equation*, **Numer Methods Partial Differential Eq.**, 23 (2007) 731–751.
- [136] B. Saka, A. Şahin and I. Dağ, *B-Spline Collocation Algorithms for Numerical Solution of the RLW Equation*, **Numer. Methods Partial Differential Equations**, 27 (2009) 581–607.

- [137] N.G. Chegini, A. Salaripناه, R. Mokhtari and D. Isvand, *Numerical solution of the regularized long wave equation using nonpolynomial splines*, **Nonlinear Dyn.**, 69 (2012) 459–471.
- [138] S.E. Esipov, *Copled Burgers' equations: a model of polydispersive sedimentation*, **Phys. Rev. E**, 52 (1985) 3711–3718.
- [139] J. Nee and J. Duan, *Limit set of trajectories of the coupled viscous Burgers' equations*. **Appl. Math. Lett.**, 11:1 (1998) 57–61.
- [140] T. A. Abassy, M. A. El-Tawil and H. El-Zoheiry, *Exact solutions of some nonlinear partial differential equations using the variational iteration method linked with Laplace transforms and the Pad'e technique*, **Comput. Math. Appl.**, 54 (2007) 940-954.
- [141] P. C. Jain and M. K. kadalbajoo, *Invariant Embedding Method for the Solution of Coupled Burgers' Equations*, **J. Math. Anal. Appl.** 72 (1979) 1-16.
- [142] M. Dehghan, A. Hamidi and M. Shakourifar, *The solution of coupled Burgers' equations using Adomian–Pade technique*, **Appl. Math. Comput.**, 189 (2007) 1034–1047.
- [143] R.C. Mittal and G. Arora, *Numerical solution of the coupled viscous Burgers' equation*, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, 16 (2011) 1304–1313.
- [144] R. C. Mittal and A. Tripathi, *A Collocation Method for Numerical Solutions of Coupled Burgers' Equations*, **Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.**, 15 (2014) 457–471.
- [145] S. ul-Islam, B. Sarler, R. Vertnik and G. Kosec, *Radial basis function collocation method for the numerical solution of the two-dimensional transient nonlinear coupled Burgers' equations*, **Appl. Math. Model.**, 36 (2012) 1148–1160.
- [146] A. Rashid, M. Abbas, A. I. Md. Ismail and A. Abd Majid, *Numerical solution of the coupled viscous Burgers equations by Chebyshev–Legendre Pseudo-Spectral method*, **Appl. Math. Comput.**, 245 (2014) 372–381.
- [147] A. Rashid and A.I.B. Ismail, *A Fourier pseudospectral method for solving coupled viscous Burgers equations*, **Comput. Methods Appl. Math.**, 9 (2009) 412-420.
- [148] A.H. Khater, R.S. Temsah and M.M. Hassan, *A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers'-type equations*, **J. Comput. Appl. Math.**, 222 (2008) 333-350.

- [149] S. Kutluay and Y. Ucar, *Numerical solutions of the coupled Burgers equation by the Galerkin quadratic B-spline finite element method*, **Math. Meth. Appl. Sci.**, 36 (2013) 2403–2415.
- [150] Y. Ucar, *Numerical Solutions of Coupled Differential Equations With B-Spline Finite Element Method*, Ph.D. Thesis, İnönü University, 2011.
- [151] V. K. Srivastava, M. Tamsir, M.K. Awasthi and S. Singh, *One-dimensional coupled Burgers' equation and its numerical solution by an implicit logarithmic finite-difference method*, **AIP Advances**, 4 (2014) 037119-10.
- [152] Q. Li, Z. Chai and B. Shi, *A novel lattice Boltzmann model for the coupled viscous Burgers' equations*, **Appl. Math. Comput.**, 250 (2015) 948–957.
- [153] H. Lai and C. Ma, *A new lattice Boltzmann model for solving the coupled viscous Burgers' equation*, **Physica A**, 395 (2014) 445–457.
- [154] R. Mokhtari, A. Samadi Toodar and N.G. Chegini, *Application of the Generalized Differential Quadrature Method in Solving Burgers' Equations*, **Commun. Theor. Phys.**, 56:6 (2011) 1009–1015.
- [155] R. C. Mittal and R. Jiware, *Differential Quadrature Method for Numerical Solution of Coupled Viscous Burgers' Equations*, **Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.**, 13 (2012) 88–92.
- [156] D. Kaya, *An Explicit Solution of Coupled Burgers' Equations by Decomposition Method*, **Int. J. Math. Math. Sci.**, 27 (2001) 675–680.
- [157] A.A. Soliman, *The modified extended tanh-function method for solving Burgers-type equations*, **Phys. A**, 361 (2006) 394–404.
- [158] R. Abazari and A. Borhanifar, *Numerical study of the solution of the Burgers and coupled Burgers equations by a differential transformation method*, **Comput. Math. Appl.**, 59 (2010) 2711–2722.
- [159] S.G. Rubin , R.A. Graves, *Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics*. Nasa TR R-436. Washington, DC; 1975.

ÖZGEÇMİŞ

12.09.1985 tarihinde Batman' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Batman' da tamamladı. 2003 yılında Batman Lisesinden mezun oldu. 2004 yılında başladığı Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2008 yılında bitirdi. 2011 yılında Beykent Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bölümünde yüksek lisansını tamamladı. 2013 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde doktora programına başladı.

