

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİNDE
AÇILIM VE SALINIM TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sevcan TUNCER

08121110

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Ocak-2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİNDE
AÇILIM VE SALINIM TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sevcan TUNCER

08121110

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 04 Ocak 2011

Tezin Savunulduğu Tarih: 24 Ocak 2011

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Diğer Jüri Üyeleri: Yrd.Doç.Dr. Hasan BULUT

Yrd.Doç.Dr. Ünal İÇ

OCAK-2011

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana gerekli tüm imkanları sağlayarak yardımcı olan ve her zaman her konuda destekçim olan çok kıymetli Sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI hocama teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

SEVCAN TUNCER

ELAZIĞ-2011

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II-III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
1.8.Regüler ve Singüler Sturm-Liouville Problemleri.....	6
1.9. Sturm-Liouville Problemleri ile İlgili Örnekler.....	13
Örnek-1.....	13
Örnek-2.....	14
Örnek-3.....	15
2. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN OSİLASYON TEORİSİ.....	16
2.1. Özfonksiyonların Sıfırları.....	16
Örnek-4.....	17
2.2. Teorem(1.Mukayese Teoremi).....	17
2.3. Sonuç.....	19
2.4. Teorem(2.Mukayese Teoremi).....	19
2.6. Teorem(Sturm Osilasyon Teoremi).....	20

	<u>Sayfa No</u>
3. GENEL OSİLASYON TEORİSİ.....	24
3.2. Teorem(1.Sturm Mukayese Teoremi).....	24
3.4. Fiziksel Yorumlar.....	25
3.5. Sturm-Picone Teoremi.....	27
3.7. Hatırlatmalar.....	28
3.10. Prufer Transferi.....	30
4.İNTEGRAL DENKLEMLER METODU İLE AÇILIM TEOREMİNİN İSPATI...32	
4.3. Açılım Teoremi.....	36
KAYNAKLAR.....	38

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde okuyucuya yardımcı olabilecek Sturm-Liouville Problemi'ni tanıtıcı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Sturm-Liouville Problemi'nin özdeğer ve özfonksiyonları ile ilgili örnekler incelenmiştir.

İkinci bölümde Mukayese Teoremleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Üçüncü bölümde Genel Osilasyon Teorisi'nin fiziksel yorumlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise İntegral Denklemler Yöntemi ile Açılım Teoremi ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Problemi,

Mukayese Teoremleri,

Genel Osilasyon Teorisi,

İntegral Denklemler Yöntemi,

Açılım Teoremi

SUMMARY

This thesis consist of four chapters.

In the first chapter, fundamental definitions and theorems which is related to Sturm-Liouville Problem are provided. Some examples which are related to Sturm-Liouville Problem's eigenvalue and eigenproblems are investigated.

In the second chapter, Comparison Theorems are investigated in detail.

In the third chapter, General Oscillation Theory's physical comments are considered.

In the fourth chapter, Dehiscence Theorem is proofed by integral equations method

Key Words: Sturm-Liouville Problem,

Comparision Theorems,

General Oscillation Theory,

Integral Equations Method,

Dehiscence Theorem

SEMBOLLER LİSTESİ

L : Sturm-Liouville Operatörü

λ : Lamda

$u(x)$:Çözüm Fonksiyonu

$v(x)$: Çözüm Fonksiyonu

ε : Ebsilon

ξ : Xi

φ : Phi

ψ : Psi

C^k : k. mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Tanım

Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altındaki probleme *başlangıç değer problemi* denir. Verilen şartlara da *başlangıç değer şartları* denir.

Örneğin; $y'' + 2y' = e^x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 2$ bir başlangıç değer problemidir, çünkü her iki koşul $x = \pi$ 'de verilmiştir.

1.2. Tanım

Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altındaki probleme *sınır değer problemi*, verilen şartlara da *sınır değer şartları* denir.

Örneğin; $y'' + 2y' = e^x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$
bir sınır değer problemidir, çünkü iki yardımcı koşul $x = 0$ ve $x = 1$ farklı değerlerinde verilmiştir.

1.3. Tanım

Tanım ve değer cümlesi vektörlerden oluşan dönüşüme *operatör* denir.

1.4. Tanım

A sınırlı lineer bir operatör ve x herhangi bir topolojik uzay olsun.
 $Ax = \lambda x$ eşitliğinde $x \neq 0$ çözümü için elde edilen λ 'ya A 'nın *özdeğeri*, x 'e ise A 'nın *özfonksiyonu* denir.

1.5. Tanım

L herhangi bir elemanlar cümlesi üzerinde tanımlanmış bir operatör olsun. $y \neq 0$ olmak üzere $Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan y, L operatörünün özfonksiyonu, λ ise özdeğeri olsun.

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), x \in [a, b]$$

şeklinde tanımlı operatöre *Sturm-Liouville operatörü* denir.

Burada $q(x), [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyondur. Bu operatör için $y(x)$ çözüm fonksiyonları cümlesi diferansiyellenebilir ve $[a, b]$ aralığının uç noktalarında verilmiş şartlarla belirlenir.

L operatörü için önemli sınır şartları;

1. tür sınır şartı; ayrık sınır şartları denir,

$$y(a)\cos \alpha + y'(a)\sin \alpha = 0$$

$$y(b)\cos \beta + y'(b)\sin \beta = 0$$

şeklindedir.

2. tür sınır şartı; periyodik ve antiperiyodik sınır şartları denir,

$$\begin{aligned} y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \end{aligned} \rightarrow \text{periyodik,}$$

$$\begin{aligned} y(a) &= -y(b) \\ y'(a) &= -y'(b) \end{aligned} \rightarrow \text{antiperiyodik}$$

şeklindedir.

3. tür sınır şartları; uçları bağlı sınır şartları denir,

$$y(a) = y(b) = 0$$

veya

$$y'(a) = y'(b) = 0$$

şeklindedir.

$p(x), l(x), r(x)$ fonksiyonları reel ve sonlu $[a, b]$ aralığında sürekli olmak üzere Sturm-Liouville operatörünün özdeğer ve özfonksiyonlarını inceleyelim:

$p(x), r(x)$ a, b aralığında pozitif fonksiyonlar olacak biçimde Sturm-Liouville denkleminin genel görüntüsü

$$Ly \equiv -\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\} + l(x)y = \lambda r(x)y, \quad a \leq x \leq b \quad (1.1)$$

şeklindedir. $p(x)$ 1.mertebeden ve $p(x)r(x)$ 2. mertebeden sürekli türeve sahip olacak şekilde

$$z = \frac{1}{c} \int_a^x \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}} dx, \quad u = (r(x)p(x))^{\frac{1}{4}} y, \quad \mu = c\lambda$$

dönüşümlerini uygularsak (1.1) denklemini

$$c = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}} dx$$

$$q(z) = \frac{Q''(x)}{Q(x)} - c^2 \frac{p(x)}{r(x)}$$

$$Q(z) = (r(x)p(x))^{\frac{1}{4}}$$

olmak üzere

$$-z'' + Q(z)z = \mu z$$

şeklinde yazılır. $y(x, \lambda_1)$ ile λ_1 'e karşı gelen özfonksiyonu ve $y(x, \lambda_2)$ ile λ_2 'ye karşılık gelen özfonksiyonu gösterelim:

1.6. Lemma

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ öz değerlerine karşılık gelen $y(x, \lambda_1)$ ve $y(x, \lambda_2)$ öz fonksiyonları ortogonaldır.

Yani,

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0, \quad x \in [0, \pi] \text{ dir.}$$

İspat

f ve g fonksiyonları sürekli ve ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olsun. $Lf = f''(x) - q(x)f(x)$ eşitliğini göz önüne alalım. İki fonksiyonun Wronskian determinanı

$$W_x[f, g] = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

şeklindedir. İki kez kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Lf \cdot g(x) dx &= \int_0^\pi [f''(x) - q(x)f(x)] g(x) dx \\ &= \int_0^\pi f''(x) g(x) dx - \int_0^\pi q(x) f(x) g(x) dx \\ &= \int_0^\pi g(x) df'(x) - \int_0^\pi q(x) f(x) g(x) dx \\ &= f'(x) g(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) g'(x) dx - \int_0^\pi q(x) f(x) g(x) dx \\ &= f'(x) g(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi g'(x) df(x) - \int_0^\pi q(x) f(x) g(x) dx \\ &= f'(x) g(x) \Big|_0^\pi - g'(x) f(x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi f(x) g''(x) dx - \int_0^\pi q(x) f(x) g(x) dx \\ &= f'(\pi) g(\pi) - f'(0) g(0) - g'(\pi) f(\pi) + g'(0) f(0) + \int_0^\pi [f''(x) - q(x)g(x)] f(x) dx \\ &= -W_\pi[f, g] + W_0[f, g] + \int_0^\pi Lg \cdot f(x) dx \end{aligned} \quad (1.2)$$

elde ederiz.

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0$$

sınır şartlarını kullanırsak,

$W_\pi[f, g] = 0$ ve $W_0[f, g] = 0$ olup, (1.2) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\int_0^\pi Lf \cdot g(x) dx = \int_0^\pi Lg \cdot f(x) dx \quad (1.3)$$

eşitliği elde edilir.

$f(x)$ yerine $y(x, \lambda_1)$ ve $g(x)$ yerine $y(x, \lambda_2)$ alınıp

$$Ly(x, \lambda_1) = \lambda_1 y(x, \lambda_1), Ly(x, \lambda_2) = \lambda_2 y(x, \lambda_2)$$

ifadeleri (1.3)'de yerine yazılırsa

$$\int_0^\pi \lambda_1 y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = \int_0^\pi \lambda_2 y(x, \lambda_2) y(x, \lambda_1) dx$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ için } \int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0$$

elde edilir. Yani $y(x, \lambda_1)$ ve $y(x, \lambda_2)$ fonksiyonları diktir ve böylece lemma ispatlanmıştır.

1.7. Lemma

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [0, \pi] \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} y(0)\cos \alpha + y'(0)\sin \alpha &= 0 \\ y(\pi)\cos \beta + y'(\pi)\sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

(1.4)-(1.5) sınır değer probleminin öz değerleri reeldir.

İspat

Bu teoremi olmayana ergi metoduna göre ispatlayalım;

Buna göre kabul edelim ki $\lambda_1 = u + iv$ kompleks bir özdeğer olsun. $q(x)$ fonksiyonu

$0, \pi$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon, α, β reel sayı olduğundan dolayı

$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = u - iv$ sayısı da özdeğer olur. Bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon

$y(x, \bar{\lambda}_1) = \overline{y(x, \lambda_1)}$ 'dir. Bu takdirde Lemma 1.6 gereğince

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) \overline{y(x, \lambda_1)} dx = 0$$

olur.

Yani,

$$\int_0^{\pi} |y(x, \lambda_1)|^2 dx = 0$$

olduğundan $y(x, \lambda_1) = 0$ olur. Halbuki $y(x, \lambda_1) \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde özdeğer kompleks olamaz. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

1.8. Regüler ve Singüler Sturm-Liouville Problemleri

Sturm-Liouville operatörü için

$$Ly \equiv -\frac{d^2}{dx^2} y + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [a, b] \quad (1.6)$$

denklemini ve

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha &= 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

sınır şartlarını göz önüne alalım (1.6)-(1.7) sınır değer problemi literatürde *Sturm-Liouville problemi* olarak bilinir. (1.7) sınır şartı $\sin\alpha \neq 0$ ve $\sin\beta \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y(a)\cot\alpha + y'(a) &= 0 \\ y(b)\cot\beta + y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

biçiminde de yazılabilir. Burada $\cot\alpha = -h, \cot\beta = H$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} y'(a) - h y(a) &= 0 \\ y'(b) + H y(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

şartları elde edilir. $q(x)$, $[a, b]$ de tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyon, H ve h sonlu reel sayılar ise (1.6)-(1.9) problemine *Regüler Sturm-Liouville problemi* denir. Bu koşullardan herhangi biri veya birkaçı sağlanmıyorsa bu takdirde (1.6)-(1.9) problemine *Singüler Sturm Liouville problemi* denir. (1.9) sınır şartlarının birincisinde $h = \infty$ durumundayken

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -h = \infty$$

yani,

$$\sin\alpha = 0, \alpha = 0 \text{ olup, } \cos\alpha = \cos 0 = 1$$

olur ki buradan $y(a) = 0$ olduğu görülür.

(1.6)-(1.9) problemi

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

$$y(a) = 0, y'(b) + Hy(b) = 0 \quad (1.10)$$

şeklini alır.

Şimdi (1.6)-(1.10) problemi için aşağıdaki teoremi ispatlayalım:

1.8.1. Teorem

$q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, reel değerli bir fonksiyon ve

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [a, b] \quad (1.6)$$

denkleminin

$$\varphi(a, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi'_x(a, \lambda) = -\cos \alpha \quad (1.11)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. Bu takdirde her reel α için $x \in [a, b]$ olacak biçimde bir tek $\varphi(x, \lambda)$ çözümü vardır. Ayrıca her sabit $x \in [a, b]$ için $\varphi(x, \lambda)$ çözümü λ 'ya göre bir tam fonksiyondur.

İspat

Başlangıç fonksiyonunu

$$\varphi_0(x, \lambda) = \sin \alpha - (x - a) \cos \alpha$$

olarak seçelim. Bu fonksiyon (1.6) denkleminin (1.11) koşullarını sağlayan çözümüdür. $n > 0$ için

$$\varphi_n(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \varphi_{n-1}(t) - \lambda \varphi_{n-1}(t, \lambda)(x - t) dt \quad (1.12)$$

şeklinde olsun. $q(x) \in [a, b]$ aralığında sürekli olduğu için $|q(x)| < M$ 'dir. $|\lambda| \leq N$ olsun.

Bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için $|\varphi_0(x, \lambda)| \leq K$ olur. Böylece $n = 1$ için (1.12) denklemi

$$\varphi_1(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \varphi_0(t) - \lambda \varphi_0(t, \lambda)(x - t) dt$$

şeklinde olur. Bu sebeple

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(x, \lambda) - \varphi_0(x, \lambda)| &= \left| \int_a^x q(t) - \lambda \varphi_0(t, \lambda)(x-t) dt \right| \\
&\leq \int_a^x |q(t)| + |\lambda| \|\varphi_0(t, \lambda)\| |x-t| dt \\
&\leq (M + N)K \int_a^x (x-t) dt \\
&= (M + N)K \left(-\frac{(x-t)^2}{2} \right)_a^x \\
&= \frac{1}{2} (M + N)K (x-a)^2
\end{aligned} \tag{1.13}$$

olur.

$n = 2$ için

$$\varphi_2(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x q(t) - \lambda \varphi_0(t, \lambda)(x-t) dt \tag{1.14}$$

$$\varphi_1(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x q(t) - \lambda \varphi_0(t, \lambda)(x-t) dt \tag{1.15}$$

(1.14) eşitliğinden (1.15) çıkarılıp eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
|\varphi_2(x, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)| &= \left| \int_a^x q(t) - \lambda [\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)](x-t) dt \right| \\
&\leq \int_a^x |q(t) - \lambda [\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)]| |x-t| dt \\
&\leq (M + N) \frac{1}{2} (M + N)K \int_a^x (t-a)^2 (x-t) dt \\
&= \frac{(M + N)^2 K (b-a)(x-a)^3}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{K(M + N)^2 (b-a)^1 (x-a)^3}{3!} \\
&\leq \frac{1}{2} (M + N)^2 K (b-a) \int_a^x (t-a)^2 dt
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$|\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)| \leq \frac{(M+N)^n K(b-a)^{n-1} (x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (1.16)$$

sonucu bulunur. Buradan

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda) \quad (1.17)$$

$x \in [a, b]$ için $|\lambda| \leq N$ olacak biçimde λ 'ya göre düzgün yakınsak olur.

Şimdi $n \geq 2$ için $\varphi(x, \lambda)$ 'nın λ 'ya göre tamlılığını gösterelim:

$$\varphi'_n(x, \lambda) - \varphi'_{n-1}(x, \lambda) = \int_a^x \varphi_n(t) - \lambda \{ \varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)(x-t) \} dt$$

$$\varphi''_n(x, \lambda) = \varphi_n(x) - \lambda \varphi_{n-1}(x, \lambda)$$

$$\varphi''_{n-1}(x, \lambda) = \varphi_{n-1}(x) - \lambda \varphi_{n-2}(x, \lambda)$$

$$\varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda) = \varphi_n(x) - \lambda \{ \varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda) \}$$

elde edilir. Şimdi (1.17) eşitliğini x 'e göre iki kez diferansiyellersek

$$\begin{aligned} \varphi''(x, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda) \\ &= \varphi''_1(x, \lambda) - \varphi''_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda) \\ &= \varphi_1(x) - \lambda \left[\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda) \right] \\ &= \varphi_1(x) - \lambda \varphi_1(x, \lambda) \end{aligned}$$

olacak şekilde $\exists \varphi(x, \lambda)$ çözümü mevcuttur. Yani $\varphi(x, \lambda)$, (1.6) Sturm-Liouville denkleminin (1.11) başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümüdür. Ayrıca (1.17) serisi düzgün yakınsak olduğu için $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu λ 'ya göre tam fonksiyondur.

1.8.2. Teorem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [a, b] \quad (1.6)$$

denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h \quad (1.18)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$,

$$\psi(0, \lambda) = 0, \quad \psi'(0, \lambda) = 1 \quad (1.19)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\psi(x, \lambda)$ olsun. Bu takdirde (1.6)-(1.18) ve (1.6)-(1.19) problemlerinin çözümleri olan $\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonları için sırasıyla aşağıdaki bağıntılar söz konusudur:

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \quad (1.20)$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau \quad (1.21)$$

İspat

Önce (1.20) eşitliğini gösterelim; $\varphi(x, \lambda)$, (1.6) denkleminin çözümü olduğu için $-\varphi''(\tau, \lambda) + q(\tau)\varphi(\tau, \lambda) = \lambda\varphi(\tau, \lambda)$

olduğundan

$$q(\tau)\varphi(\tau, \lambda) = \varphi''(\tau, \lambda) + \lambda\varphi(\tau, \lambda)$$

yazabiliriz. (1.20) eşitliğin sağında bulunan integrali hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau &= \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) [\varphi''(\tau, \lambda) + \lambda\varphi(\tau, \lambda)] d\tau \\ &= \lambda \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau + \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) \varphi''(\tau, \lambda) d\tau \end{aligned} \quad (1.22)$$

şimdi son eşitliğin sağında bulunan ikinci integrali hesaplayalım. Bunun için iki kez kısmi integrasyon uygulayalım:

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) \varphi''(\tau, \lambda) d\tau &= \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) d\varphi'(\tau, \lambda) \\ &= \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) \varphi'(\tau, \lambda) \Big|_0^x - \int_0^x \varphi'(\tau, \lambda) d \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) \\ &= \varphi'(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda} (x - x) - \varphi'(0, \lambda) \sin \sqrt{\lambda} (x - 0) \\ &\quad + \sqrt{\lambda} \int_0^x \cos \sqrt{\lambda} (x - \tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -h \sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda} \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) d\varphi(\tau, \lambda) \\
&= -h \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} \left\{ \varphi(\tau, \lambda) \cos(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \int_0^x \right\} \\
&\quad - \int_0^x \varphi(\tau, \lambda) d \cos(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \\
&= -h \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} \left[\varphi(x, \lambda) \cos(\sqrt{\lambda}(x-x)) - \varphi(0, \lambda) \cos(\sqrt{\lambda}(x-0)) \right] \\
&\quad - \sqrt{\lambda} \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\
&= -h \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} \left[\varphi(x, \lambda) - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) \right] \\
&\quad - \lambda \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \varphi(\tau, \lambda) d\tau
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Şimdi (1.23)'ü (1.22) formülünde yerine yazalım:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \varphi(\tau, \lambda) d\tau &= -h \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} \varphi(x, \lambda) - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x - \lambda \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \\
&\quad \varphi(\tau, \lambda) d\tau + \lambda \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \varphi(\tau, \lambda) d\tau
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \varphi(\tau, \lambda) d\tau &= -h \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} \varphi(x, \lambda) - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \\
\sqrt{\lambda} \varphi(x, \lambda) &= \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x + h \sin \sqrt{\lambda}x + \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \varphi(\tau, \lambda) d\tau
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafını $\sqrt{\lambda}$ 'ya bölersek (1.20) eşitliğini elde ederiz.

(1.21) eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$\psi(x, \lambda)$, (1.6) denkleminin (1.19) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olduğundan

$$\begin{aligned}
-\psi''(x, \lambda) + q(x)\psi(x, \lambda) &= \lambda\psi(x, \lambda) \\
q(x)\psi(x, \lambda) &= \psi''(x, \lambda) + \lambda\psi(x, \lambda)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

olur.

Bu sebeple

$$\int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-\tau) \overrightarrow{q}(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau = \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-\tau) \overrightarrow{\psi}''(\tau, \lambda) d\tau + \lambda \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-\tau) \overrightarrow{\psi}(\tau, \lambda) d\tau$$

son eşitliğin sağında bulunan birinci integrale iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa ve (1.19) başlangıç koşulları göz önüne alınır

$$\int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-\tau) \overrightarrow{\psi}''(\tau, \lambda) d\tau = -\sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}\psi(x, \lambda) - \lambda \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-\tau) \overrightarrow{\psi}(\tau, \lambda) d\tau$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-\tau) \overrightarrow{q}(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau = -\sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}\psi(x, \lambda)$$

eşitliği bulunur, bu eşitliğin her iki tarafı $\sqrt{\lambda}$ 'ya bölünüp, $\psi(x, \lambda)$ çekilirse (1.21) eşitliğini elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

$$Ly \equiv -\frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{dy}{dx} \right\} + l(x)y = \lambda r(x)y, \quad a \leq x \leq b$$

Sturm-Liouville denkleminin Liouville dönüşümünü uygulayarak,

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [a, b] \quad (1.6)$$

denklemini elde ederiz. (1.6) denklemini

$$\begin{aligned} y(a)\cos \alpha + y'(a)\sin \alpha &= 0 \\ y(b)\cos \beta + y'(b)\sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

ayrık sınır koşulları ile göz önüne alalım. (1.6)-(1.7) Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin oluşturduğu cümleye bu probleminin *spektrumu* denir. Şimdi (1.6) denkleminde $q(x) = 0$ olacak durumda özdeğer ve özfonksiyonların bulunmasına ilişkin aşağıdaki örnekleri göz önüne alalım.

1.9. Sturm-Liouville Problemi ile İlgili Örnekler

Örnek-1

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$y(0, \lambda) = 0$, $y'(\pi, \lambda) = 0$ probleminin özdeğerini ve özfonksiyonlarını bulalım.

Çözüm

$$y(x, \lambda) = Ax + B$$

$$y(0, \lambda) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y'(\pi, \lambda) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$A = 0 = B$ olup $\lambda = 0$ özdeğer değildir.

a) $\lambda < 0$ olsun. λ öz değerine karşılık gelen özfonksiyon

$$y(x, \lambda) = A e^{-\sqrt{\lambda}x} + B e^{\sqrt{\lambda}x}$$

$$y(0, \lambda) = A + B = 0$$

$$y'(x, \lambda) = \sqrt{\lambda} A e^{\sqrt{\lambda}x} - \sqrt{\lambda} B e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$y'(\pi, \lambda) = \sqrt{\lambda} A e^{\sqrt{\lambda}\pi} - \sqrt{\lambda} B e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0$$

buradan ise $A = -B$ ve $A = 0 = B$ olur ki bu takdirde çözüm anlamsızdır.

b) $\lambda > 0$ olsun. $y(x, \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$

$$y(0, \lambda) = A = 0, \quad y'(\pi, \lambda) = -A\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\pi + B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\pi$$

$$y'(\pi, \lambda) = B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \cos \sqrt{\lambda}\pi = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{1}{2} + n \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)^2, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Bu sebeple λ_n özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar,

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

şeklindedir.

Örnek-2

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \quad , \quad 1 \leq x \leq e \quad (1.25)$$

$$y(1, \lambda) = 0 \text{ ve } y(e, \lambda) = 0$$

probleminin öz değer ve öz fonksiyonlarını bulalım.

Çözüm

(1.25) denklemi literatürde Cauchy denklemi olarak tanımlanır. Bu denklemi

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{1}{x} \lambda y = 0 \text{ şeklinde yazabiliriz.}$$

Bu durumda $p(x) = x$, $\ell(x) = 0$, $r(x) = \frac{1}{x}$, dir.

$y(x, \lambda)$ çözümünü x^m şeklinde ele alalım.

Bu takdirde,

$$y'(x, \lambda) = mx^{m-1} \quad y''(x, \lambda) = m(m-1)x^{m-2} \quad (1.26)$$

(1.26) denklemini (1.25) denkleminde yerine yazarsak

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + xmx^{m-1} + \lambda x^m = 0$$

$$x^m m(m-1) + m + \lambda = 0 \quad x^m m^2 + \lambda = 0$$

$$m^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -m^2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{\lambda}$$

bulunur.

Bu sebeple

$$y(x, \lambda) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

$$x^{i\alpha} = e^{i\alpha \ln x} = \cos(\alpha \ln x) + i \sin(\alpha \ln x)$$

olduğu göz önüne alınarak

$$y(x, \lambda) = A \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) + B \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

olur. Son eşitlikte A ve B , c_1 ve c_2 sabitlerine bağımlı sabitlerdir.

$$y(1, \lambda) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad y(e, \lambda) = 0$$

$$\sin \sqrt{\lambda} = n\pi \Rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

öz değerlerini elde ederiz. Bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar $\sin(n\pi x)$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ şeklindedir.

Örnek-3

$$-y'' + \lambda y = 0, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulalım.

Çözüm

Verilen denklemin çözümü

$$y(x, \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

olup periyodik sınır-kosullarından faydalanırsak;

$$(A \cos \sqrt{\lambda} \pi + B \sin \sqrt{\lambda} \pi) - (A \cos \sqrt{\lambda} \pi - B \sin \sqrt{\lambda} \pi) = 0 \text{ ve}$$

$$(-A \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi + B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi) - (-A \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi - B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi) = 0$$

olup

$$(2 \sin \sqrt{\lambda} \pi) B = 0 \text{ ve } (2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi) B = 0$$

elde edilir.

Buradan $\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \Rightarrow \lambda_n = n^2$

$$\cos \sqrt{\lambda} \pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2}{4}$$

öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar $\cos nx$, $\sin nx$ 'lerdir.

2. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN OSİLASYON TEORİSİ

2.1. Özfonksiyonların Sıfırları

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [a, b] \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos \alpha + y'(a)\sin \alpha &= 0 \\ y(b)\cos \beta + y'(b)\sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. Bu problemin öz fonksiyonların sıfırlarının dağılımına ilişkin önemli sonuçlara ait çalışmalardan faydalanarak XX. asır civarlarında Sturm tarafından (1.6)-(1.7) probleminin sonsuz sayıda öz değerlerin varlığı ispatlanmıştır.

$q(x) = 0$ olacak şekilde aşağıdaki basit sınır-değer problemi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, \\ y'(0) = y'(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

probleminin özdeğerleri

$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1^2, \lambda_2 = 2^2, \dots, \lambda_n = n^2 \dots$ olmak üzere bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda_0) &= \varphi_0(x) = 0, \\ \varphi(x, \lambda_1) &= \varphi_1(x) = \cos x, \\ \varphi(x, \lambda_2) &= \varphi_2(x) = \cos 2x, \dots, \varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x) = \cos nx, \dots \end{aligned}$$

şeklindedir.

Böylece sıfırdan başlanacak şekilde özdeğerlerin artış sırasına göre özfonksiyonlar dizisini oluşturmuş oluruz.

$\varphi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonlarının sıfırları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) n . özfonksiyon olan $\varphi(x, \lambda_n)$ 'nin $[0, \pi]$ aralığında tam olarak n -tane sıfırı vardır.

2) n . ve $(n+1)$. öz fonksiyonların sıfırları sıralıdır (veya çaprazlaşırlar).

Yani n . özfonksiyonun ardışık iki sıfırı arasında $(n+1)$. özfonksiyonun bir sıfırı bulunur.

Özfonksiyonların bu özellikleri genel halde de sağlanır.

Örnek-4

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

problemde $\varphi_2(x) = \cos 2x$, $\varphi_3(x) = \cos 3x$ olup

$$\varphi_2(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + k \right), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 'dir.}$$

$$k = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{4},$$

$$k = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4},$$

$$k = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{4} \notin \dots, \notin 0, \pi$$

$$\varphi_3(x) = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2} + k \right)$$

$$k = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$k = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$k = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{7\pi}{6} \notin 0, \pi \text{ olur.}$$

2.2. Teorem (1. Mukayese Kriteri)

$$u'' + g(x)u = 0 \tag{2.1}$$

$$v'' + h(x)v = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde verilen iki denklemi göz önüne alalım. Eğer $[a, b]$ aralığının tamamı üzerinde

$g(x) < h(x)$ ise bu takdirde birinci denklemin aşıkâr olmayan herhangi bir çözümünün her iki sıfırı arasında ikinci denklemin her çözümünün en az bir sıfırı vardır.

İspat

(2.1) denklemi v ile (2.2) denklemini u ile çarpıp birbirinden çıkarırsak

$$v / u'' + g(x) u = 0$$

$$u / v'' + h(x) v = 0$$

$$u''v - v''u + g(x)u - h(x)v = 0$$

$$u''v - v''u = \frac{d}{dx}(u'v - v'u) = h(x)v - g(x)u \quad (2.3)$$

elde ederiz.

u 'nun ardışık iki sıfırını x_1 ve x_2 ile gösterelim. Kabul edelim ki v 'nin (x_1, x_2) aralığında sıfırı bulunmasın.

Bu takdirde (2.3) eşitliğini x_1 'den x_2 'ye kadar integrallersek

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}(u'v - v'u) dx = u'v - v'u \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (h(x)v - g(x)u) dx$$

$$u' x_2 v x_2 - v' x_2 u x_2 - u' x_1 v x_1 + v' x_1 u x_1 = \int_{x_1}^{x_2} (h(x)v - g(x)u) dx$$

elde edilir.

Şimdi v 'nin hiç bir yerde sıfıra eşit olmadığını kabul edelim. Genelliği bozmadan (x_1, x_2) aralığında $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ alabiliriz. Dolayısıyla bir önceki eşitliğin sağ tarafı pozitifdir.

$u(x) > 0$ olduğu için x_1 noktasının komşuluğunda $u(x)$ fonksiyonu artandır.

Dolayısıyla $u'(x_1) > 0$ 'dır. Benzer şekilde x_2 noktasının komşuluğunda $u(x)$ fonksiyonu

azalandır ve $u'(x_2) < 0$ olduğu sonucuna varılır. Bu sebeple

$u' x_2 v x_2 - u' x_1 v x_1$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece (x_1, x_2) aralığında v 'nin sıfırlarının varlığı ispatlanmış olur.

2.3. Sonuç

$g(x) < -m^2 < 0$ ve $(-\infty \leq a \leq x \leq b \leq \infty)$ olmak üzere

$$y'' + g(x)y = 0$$

denkleminin her çözümünün en fazla bir sıfırı vardır.

İspat

$$g(x) < h(x) = -m^2 < 0 \text{ ise}$$

$y'' - m^2 y = 0$ denkleminin çözümünün sıfırının olmadığını göstereceğiz. Bu denklemin çözüm fonksiyonu e^{mx} şeklinde olup sıfırları varolmadığı için her sonlu aralıkta $y'' + g(x)y = 0$ denkleminin en fazla bir sıfırı vardır.

2.4. Teorem (2. Mukayese Teoremi)

(2.1) ve (2.2) denklemlerinin

$$\begin{aligned} u'(a) &= \sin \alpha & u'(a) &= -\cos \alpha \\ v'(a) &= \sin \alpha & v'(a) &= -\cos \alpha \end{aligned} \quad (2.4)-(2.5)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri $u(x)$ ve $v(x)$ olsun. Ayrıca $[a, b]$ aralığının tamamında $g(x) < h(x)$ olsun.

Eğer $u(x)$ fonksiyonu, $a < x \leq b$ aralığında m -tane sifira sahip ise, bu takdirde $v(x)$ fonksiyonunun aynı aralıkta en az m -tane sıfırları mevcut olup, $v(x)$ 'in k . sıfırı $u(x)$ 'in k . sıfırından küçüktür.

İspat

$u(x)$ 'in a noktasına en yakın sıfırını x_1 ile gösterelim Bir önceki teoreme dayanarak $v(x)$ 'in $[a, x_1]$ aralığında en az bir sifira sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Bu aralıkta $v(x)$ 'in sifira sahip olmadığını kabul edelim.

Genelliği bozmadan a, x_1 aralığında $u(x) > 0$ ve $v(x) > 0$ alabiliriz. $u(x_1) = 0$ olduğundan $u(x)$ fonksiyonu x_1 noktasının bir komşuluğunda azalandır. Bu nedenle $u'(x_1) \leq 0$ 'dır. (2.3) eşitliğini a 'dan x_1 'e integrallersek

$$u'(x_1) - v(x_1) = \int_a^{x_1} (h(x) - g(x))u(x)v(x)dx$$

elde edilir. a, x_1 aralığında $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ ve $g(x) < h(x)$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı pozitifdir. Fakat sol tarafı pozitif değildir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece teorem ispatlanmıştır.

2.5 Lemma

Eğer x_0 ($a < x_0 < b$), $\varphi(x, \lambda)$ öz fonksiyonunun sıfırı ise bu durumda yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta > 0$ bulmak mümkün ki $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ olacak biçimde $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun $|x - x_0| < \varepsilon$ için sadece bir tek sıfırı vardır.

2.6. Teorem (Sturm Osilasyon Teoremi)

(1.6)-(1.7) sınır-değer probleminin sınırsız olarak artan $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ öz değerleri vardır. $m \rightarrow \infty$, $\lambda_m \rightarrow \infty$ olsun. Bu takdirde λ_m özdeğerlerine karşılık gelen $\varphi(x, \lambda)$ özfonksiyonunun $a < x < b$ aralığında m -tane sıfırı vardır.

İspat

$$u(a) = \sin \alpha, u'(a) = -\cos \alpha \quad (2.6)$$

başlangıç şartlarını sağlayan

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, x \in [a, b] \quad (1.6)$$

denkleminin çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. 2. Mukayese teoreminden dolayı λ artarken $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı azalır. $a \leq x \leq b$ $|q(x)| < c$ olsun. Bu takdirde (1.6) denklemini

$$-y'' + \lambda + c y = 0 \quad (2.7)$$

denkleminiyle karşılaştıralım. (2.7) denkleminin (2.6) başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün görüntüsü

$$y(x, \lambda) = \sin \alpha \cosh \sqrt{-\lambda - c} (x - a) - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{-\lambda - c}} \sinh \sqrt{-\lambda - c} (x - a)$$

şeklindedir. λ parametresinin negatif değerlerinin mutlak değerlerinin yeterince büyük değerleri için bu fonksiyonun sıfır noktalarının mevcut olmadığı aşikârdır. Bu sebeple tekrar 2. Mukayese teoreminden faydalanarak λ parametresinin negatiflerinin yeterince büyük mutlak değerleri için $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının mevcut olmadığı kanaatine varılır.

Karşılaştırma için

$$-y'' + \lambda - c y = 0$$

denklemini seçersek pozitif ve sınırsız olarak artan λ 'lar için (1.6)-(1.7) probleminin çözümü olan $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısının $[a, b]$ aralığında sınırsız olarak arttığını elde ederiz.

Şimdi $\varphi(x, \lambda) = 0$ denklemini göz önüne alalım. Bu durumda Lemma (2.5)'den dolayı bu denklemin kökleri λ 'ya bağlı sürekli fonksiyonlardır.

Diğer yandan 2. Mukayese teoreminden dolayı λ 'lar artarken $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun her sıfırı sola kaymış olur. Sıfırlarının sayısı azalmadığı için a noktasının dışında sıfır noktası bulunamaz.

Bu sebeple Lemma (2.5)'den dolayı bu fonksiyonun yeni sıfırları b noktasından içeri girer. Böyle bir değer bulunacağı açıktır. $\varphi(b, \lambda) = 0$ olmak üzere μ_1 ile bu eşitliği sağlayan λ parametresinin ikinci değerini gösterelim. Böylece $\varphi(b, \mu_m) = 0$ olacak şekilde, $\varphi(x, \mu_m)$ fonksiyonu açık (a, b) aralığının içerisinde m -tane sıfıra sahip olmak üzere $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}, \mu_m, \dots$ sayı dizisi elde edilir. Eğer $\sin \beta = 0$ ise bu takdirde (1.7) sınır şartlarında ikinci eşitliğin $[y(b, \lambda) \cos \beta + y'(b, \lambda) \sin \beta = 0]$ sağlandığını görürüz.

Dolayısıyla μ_m 'ler özdeğerlerdir. Ayrıca (1.6)-(1.7) probleminin çözümü olan $\varphi(x, \lambda)$ (2.6) başlangıç koşullarını sağladığı için bu çözümün (1.7) sınır koşullarından birincisini de sağladığını görürüz. Böylece bu durumda $\sin \beta = 0$ durumunda teorem ispatlanmış olur.

Şimdi $\sin\beta \neq 0$ olsun. $u(x)$ ve $v(x)$ ise 2. Mukayese teoreminde göz önüne alınan fonksiyonlar olsun.

$$u'' + g(x)u = 0 \quad (2.1)$$

$$v'' + h(x)v = 0 \quad (2.2)$$

(2.6) başlangıç koşullarını sağlayan denklemler olsunlar. (2.1)-(2.2)'yi göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ u^2 \left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right) \right\} &= 2uu' \left[\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right] + u^2 \left[\frac{u''}{u} - \frac{v''}{v} \right] - u^2 \left(\frac{u'^2}{u^2} - \frac{v'^2}{v^2} \right) = \\ &= \frac{(u'v - v'u)}{v^2} + u^2 [h(x) - g(x)] \geq 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde edilir.

Bu sebeple v' nin fonksiyonunun sifıra dönüşmediği her aralıkta $u^2 \left(\frac{u'}{v'} - \frac{v'}{v} \right)$ fonksiyonu monoton artandır. $u(x), v(x)$ fonksiyonlarının a, b aralığında eşit sayıda sifıra sahip olduğunu varsayalım.

x_i ile $u(x)$ fonksiyonunun b noktasına en yakın sıfırını gösterelim. $x_i \leq x \leq b$ aralığında $v(x)$ fonksiyonunun sıfırlarının mevcut olmadığını gösterelim. Gerçekten;

2. Mukayese teoreminden dolayı a ve x_i noktaları arasında $v(x)$ fonksiyonunun enaz i -tane sayıda sıfırları bulunur.

Eğer $v(x)$ fonksiyonu $x_i \leq x \leq b$ aralığında sifıra sahip olursa bu takdirde a, b aralığında $v(x)$ fonksiyonunun varsayımımıza rağmen $u(x)$ fonksiyonundan daha fazla sifıra sahip olur. (2.8) eşitliğini x_i ve b arasında integrallersek

$$\begin{aligned} u^2 \left\{ \frac{u'(b)}{u(b)} - \frac{v'(b)}{v(b)} \right\} &> u^2(x_i) \left\{ \frac{u'(x_i)}{u(x_i)} - \frac{v'(x_i)}{v(x_i)} \right\} = 0 \\ \Rightarrow \frac{u'(b)}{u(b)} &> \frac{v'(b)}{v(b)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$\mu_m < \lambda' < \lambda'' < \mu_{m+1}$ olacak şekilde $u(x)$ yerine $v(x, \lambda')$, $v(x)$ yerine $v(x, \lambda'')$ alırsak (2.9)

eşitsizliğinden dolayı $\frac{\varphi'(b, \lambda)}{\varphi(b, \lambda)}$ fonksiyonu μ_m, μ_{m+1} aralığında monoton azalır ve

$\varphi(b, \mu_m) = \varphi(b, \mu_{m+1})$ olduğu için $\frac{\varphi'(b, \lambda)}{\varphi(b, \lambda)} = -\cot \beta$ olmak üzere

μ_m, μ_{m+1} aralığında bir tane λ_{m+1} noktası bulunur. Dolayısıyla bu noktada (1.7) şartının ikinci eşitliği sağlanır. Bu ise λ_{m+1} 'in bir özdeğer olması demektir. $v(x, \lambda_{m+1})$ ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyondur. Böylece açık a, b aralığında $v(x, \lambda_{m+1})$ fonksiyonunun $(m+1)$ -tane sıfırı vardır. Bununla teorem ispatlanmıştır.

3. GENEL OSİLASYON TEORİSİ

3.1. Tanım

p ve q sabit olacak şekilde

$$\begin{aligned} -u'' + pu &= 0 \\ -v'' + qv &= 0 \end{aligned} \tag{3.1)-(3.2}$$

denklemlerinin aşikar olmayan çözümleri $u(x)$ ve $v(x)$ için,

- i) $q < p$ ise $u(x)$ 'in ardışık sıfırları $v(x)$ 'in bir sıfırı tarafından ayrılır.
- ii) $p \geq 0$ ise $u(x)$ 'in herhangi x_0, ∞ aralığında en çok bir sıfırı vardır.
- iii) $q < 0$ ise her x_0, ∞ aralığında $v(x)$ 'in bir sıfırı vardır.

3.2. Teorem (1. Sturm Mukayese Teoremi)

Osilasyon teorisinde birçok klasik sonuç;

$p_k(x)$ ve $q_k(x)$ fonksiyonları C^k sınıfından, $p_1(x)$ ve $q_1(x)$ uygun aralıkta pozitif olmak üzere

$$-p_1(x) u' + p_0(x) u = 0 \tag{3.3}$$

$$-q_1(x) v' + q_0(x) v = 0 \tag{3.4}$$

self-adjoint Sturm-Liouville denklemlerinin çözümleri için elde edilmiştir. Bu teori için başlangıç sayılabilecek olanı 1836'da C. Sturm tarafından keşfedilen Mukayese Teoremidir.

3.3. Teorem

Eğer α, β (3.3) denkleminin aşık olmaya çözümü olan $u(x)$ 'in ardışık sıfırları ise $x \in \mathcal{G} = [\alpha, \beta]$ için

i) $q_1 x \equiv p_1 x$

ii) $q_0 x \leq p_0 x$, $q_0 x \neq p_0 x$

ise (3.4)'ün her $v(x)$ çözümünün (α, β) aralığında bir sıfırı vardır.

İspat

Eğer $u(x)$ ve $v(x)$, (3.1) ve (3.2) denklemlerinin çözümleri ise

$$\frac{d}{dx} (vp_1 u' - up_1 v') = (p_0 - q_0)uv \quad (3.5)$$

Eğer $u|_{\alpha} = u|_{\beta} = 0$ ise

$vp_1 u'|_{x=\alpha}^{x=\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} (p_0 - q_0) uv dx$ integrasyonu elde edilir. (α, β) aralığında $u(x)$ 'in pozitif olduğunu varsayarsak

$u'|_{\alpha} > 0$, $u'|_{\beta} < 0$ olur. (3.5) den $v(x)$, (α, β) aralığında sabit işaret olamaz. Doğrusal argüman (α, β) aralığında $u x < 0$ ise uygun olur.

3.4. Fiziksel Yorumlar

Bu teoremin daha sonraki genellemelerini oluşturacak (motive edecek) basit fiziksel yorumları vardır.

3.4.1. Titreyen Tel

$$q_1 x \equiv p_1 x = 1 \text{ ve}$$

$$-p_0 x = \delta_1 x > 0 \quad -q_0 x = \delta_2 x > 0 \text{ olsun.}$$

$u'' + \lambda \delta_1 x = 0$, $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ özdeğer problemi, $\delta_1 x$ telin yoğunluğu olmak üzere $\lambda_1=1$ öz değerine sahiptir. $\delta_2 x \geq \delta_1 x$, $\delta_2 x \neq \delta_1 x$ yoğunluğundaki ikinci bir teli ele alalım. $v'' + \delta_2 x v = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü, $\mu_k = 1$ 'e karşılık gelen

$$v'' + \mu v = 0, \quad \begin{aligned} v'(\alpha) - T_1 v(\alpha) &= 0 \\ v'(\beta) + T_2 v(\beta) &= 0 \end{aligned}$$

probleminin özfonksiyonu olarak düşünülebilir.

Ancak fiziksel değişken (parametre) olan $\mu_k = 1$ birinci özdeğer olmayacaktır. Böylece ilk özfonksiyon sabit bir nokta olduğu için $v(x)$, (α, β) aralığında değişken bir noktadır.

3.4.2. Basit Harmonik Hareket

x zaman olacak şekilde, $q_1 x \equiv p_1 x = 1$ olsun. $f(x) = -p_0 x$ u kuvveti ile $u = 0$ noktasında çekilen bağımsız bir parça verilsin. Bu parçanın hareketi $u'' + f(x)u = 0$ denklemi ile tanımlanır. Başka bir parça $F(x) \geq f(x)$, $F(x) \neq f(x)$ olarak bilinen $F(x) = -p_0 x$ v kuvveti ile $v = 0$ noktasında çekildiğinde oldukça fazla tekrarlar salınım olacaktır. Eğer $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ ise bu salınım (α, β) boyunca en az bir defada $v = 0$ olunca duracaktır.

3.4.3. Düzlemsel Hareket

Basit harmonik hareket argümanı çok bağımsız olursa salınım devam edemez. Bu yüzden parça merkezi bir güç alanı altındaki düzlemde hareketsizdir.

3.5. Sturm-Picone Teoremi

3.4.1. ve 3.4.2. fiziksel yorumlarının ayrıntısı olarak varsayalım ki $q_1(x) = p_1(x)$ sınırlaması gerekli olmasın. Bu sınırlama;

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{u}{v} (vp_1u' - uq_1v') \right] = u \left[p_1u' - \frac{u^2}{v} (q_1v')' + p_1 - q_1 \right] u_1^2 + p_1 \left(u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 \quad (3.6)$$

özdeşliğini elde eden M.Picone tarafından 1909'da oluşturuldu. u, v, p_1u', q_1v' her yerde geçerli olan değişkenlerdir ve $v(x) \neq 0$ 'dır. Bu özdeşliğe Picone, aşağıdaki genel Sturm teoreminden faydalanarak ulaştı.

3.6. Teorem

Eğer α, β (3.1)'in aşikar olmayan bir çözümü olan $u(x)$ 'in ardışık sıfırları olacak şekilde $x \in \mathcal{I} = [\alpha, \beta]$ için, eğer

i) $0 < q_1(x) \leq p_1(x)$

ii) $q_0(x) \leq p_0(x)$

ise (3.2)'nin her $v(x)$ çözümünün $[\alpha, \beta]$ aralığında bir sıfırı vardır.

İspat

Eğer $u(x)$ ve $v(x)$ sırası ile (3.1) ve (3.2) denklemlerinin çözümleri olmak üzere $x \in \mathcal{I} = [\alpha, \beta]$ için $v(x) \neq 0$ ise (3.6) bağıntısı

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{u}{v} (vp_1u' - uq_1v') \right] = p_0 - q_0 \left(\frac{u}{v} \right)^2 + p_1 - q_1 (u')^2 + q_1 \left(u' - \frac{u}{v} v' \right)^2$$

şeklinde elde edilir.

α 'dan β 'ya itegrallenirse $q_0(x) \equiv p_0(x)$, $q_1(x) \equiv p_1(x)$ olmaksızın

$$0 \geq \int_{\alpha}^{\beta} [(p_0 - q_0) \left(\frac{u}{v} \right)^2 + p_1 - q_1 (u')^2] dx$$

bulunur. Buradan

$$u'x - \frac{u(x)}{v(x)}v'x \equiv 0$$

elde edilir.

Bu son özdeşlik ifade eder ki $\frac{u(x)}{v(x)} = \text{cons}$ ve $v\alpha = v\beta = 0$ 'dır.

3.7. Hatırlatmalar

3.7.1. (α, β) aralığında $v x \neq 0$ olacak şekilde (3.6) mantıklı olacaktır.

$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{u}{v}$ ve $\lim_{x \rightarrow \beta} \frac{u}{v}$ dikkate alınarak $v x$ 'in $[\alpha, \beta)$ ve $(\alpha, \beta]$ aralıklarında bir sıfırının olduğu desteklenebilir ki $[\alpha, \beta]$ aralığında $v x$ 'in bir sıfırı vardır.

3.7.2. $u\alpha = u\beta = 0$ varsayımı ile $\sigma_1 = +\infty$, $u\alpha = 0$ 'ı belirtmek üzere ve $\sigma_2 = +\infty$, $u\beta = 0$ 'ı belirtmek üzere

$$u'\alpha - \sigma_1 u\alpha = 0$$

$$u'\beta - \sigma_2 u\beta = 0$$

genel şartlar söz konusu olur. Teorem(3.6), (3.4)'ün $v x$ çözümlerine uygulanırsa $T_1 \geq \sigma_1$, $T_2 \geq \sigma_2$ ve $u x$ ile $v x$ lineer bağımsız olmak üzere

$$v'\alpha - T_1 v\alpha = 0$$

$$v'\beta + T_2 v\beta = 0$$

elde edilir.

3.7.3. Sturm Mukayese Teoremi ve Sturm-Picone Teoremi gereğince

(3.1) denkleminin her(bazı) aşık ar olmayan çözümü α, ∞ aralığında bir sıfıra sahipse ∞ 'da salınım vardır. Eğer bazı(her) aşık ar olmayan çözümünün α, ∞ aralığındaki

sıfırları sonlu sayıda ise ∞ 'da salınım yoktur. Bu tekniğin uygulanmasında mukayese için Euler denklemleri kullanılır.

$$\left(\frac{1}{p(x)}u'\right)' + p(x)u = 0 \quad (3.7)$$

özel denklemi

$$u(x) = A \sin\left[\int_{\alpha}^x p(\xi) d\xi + \beta\right]$$

genel çözümüne sahiptir.

Böylece (3.7) için salınım varken $\int_{\alpha}^x \frac{1}{p(x)} dx = +\infty$, salınım yokken $\int_{\alpha}^x \frac{1}{p(x)} dx < +\infty$ 'dur.

3.8. Teorem

Eğer $\int_{\alpha}^x \frac{1}{p_1(x)} dx = +\infty$ ve $\int_{\alpha}^x \frac{1}{p_0(x)} dx = -\infty$ ise (2.1) denklemi, ∞ 'da salınımlıdır.

İspat

Bu ispat özel Riccati denklemi ve (2.1) Sturm-Liouville denklemi arasındaki ilişkiye bağlıdır. (2.1) denkleminin $u(x)$ çözümü için

$$h(x) = -p_1 \frac{u'}{u}$$

şeklinde tanımlansın.

$$h' = -p_0 + \frac{1}{p_1} h^2 \quad (3.8)$$

olur. Bu, osilasyon teorisinde temel bir geçiş oluşturur ve (3.8) denkleminin singüler olması için $u(x)$ 'in sıfırlarını anlatır.

Varsayalım ki (3.1) denkleminde salınım olmasın. Eğer $[\beta, \infty)$ aralığında $u(x) > 0$ ise tanımlanan $h(x)$, (β, ∞) aralığında (3.8) denkleminin bir çözümüdür.

Böylece $\int_{\alpha}^{\infty} p_0(x) dx = -\infty$ olur.

Ayrıca $\alpha < \beta < \gamma < \infty$ ve $h(\beta) - \int_{\beta}^x p_0(\xi) d\xi > 0$, $[\gamma, \infty)$ olacak şekilde β ve γ bulabiliriz.

$[\gamma, \infty)$ aralığında $h(x) > g(x)$ olacak şekilde $g(x) = \int_{\beta}^x p_1(\xi) h^2(\xi) d\xi$ tanımlansın.

Bu tanımdan $g'(x) > \frac{1}{p_1(x)} g^2(x)$, $[\gamma, \infty)$ olur.

Buradan $\int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{p_1(x)} dx < \frac{1}{g(\gamma)} < \infty$ olur böylece ispat tamamlanır.

3.9. Teorem

Eğer $\int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{p_1(x)} dx < \infty$ ve $\int_{\alpha}^{\infty} |p_0(x)| dx < \infty$ ise (3.1) denkleminin ∞ 'da salınımsızdır.

3.10. Prüfer Transferi

(3.1) denkleminin $u(x)$ çözümü verilsin. $r(x)$ ve $\theta(x)$ uygun bir şekilde seçilmiş olmak üzere $u(x) = r(x) \sin \theta(x)$ formunun bu çözümü gösterdiğini araştıralım. Böyle $r(x)$ ve $\theta(x)$ 'in varlığına şüphe yoktur ancak esas soru, $u(x)$ 'in uygun denklem ile tanımlanmış olup olmamasıdır.

Böylece

$$p_1(x) u'(x) = r(x) \cos \theta(x)$$

olur ve

$$\theta' = \frac{1}{p_1(x)} \cos^2 \theta - p_0(x) \sin^2 \theta \quad (3.9)$$

ve

$$r' = r \left(\frac{1}{p_1} + p_0 \right) \sin \theta \cos \theta \quad (3.10)$$

olarak bulunur.

Bu durumda $\frac{1}{p_1(x)} = -p_0(x)$ elde edilir.

(3.7) denkleminde $\theta(x) = \int_{\beta}^x p(\xi) d\xi$ olarak alalım.

Böylece $u(x_0) = 0 \Leftrightarrow \theta(x_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$ olur.

Eğer $\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = \infty$ ise (3.1) ∞ 'da salınır.

Eğer $\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x)$ limiti varsa (3.1) ∞ 'da salınmaz.

Prufer transferinin bir uygulaması olarak $u(x)$ 'in her sıfırında $\theta'(x_0) > 0$ ve aralığında $p_1(x) > 0$ için Teorem(3.9) ifade eder ki,

$\psi' = \frac{1}{p_1(x)} + |p_0(x)|$, $\psi(\alpha) = \theta_0$, $\forall \theta_0$ için α, ∞ aralığında bağlı bir çözümü vardır.

Böylece

$$\left| \frac{1}{p_1(x)} \cos^2 \theta - p_0(x) \sin^2 \theta \right| \leq \frac{1}{p_1(x)} + |p_0(x)|$$

olur.

4. İNTEGRAL DENKLEMLER METODU İLE AÇILIM TEOREMİNİN İSPATI

4.1. $f(x) \neq 0$ sürekli fonksiyon olacak biçimde

$$y'' + (\lambda - q(x))y = f(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} y(0, \lambda) \cos \alpha + y'(0, \lambda) \sin \alpha &= 0 \\ y(\pi, \lambda) \cos \beta + y'(\pi, \lambda) \sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

problemini göz önüne alalım. λ kompleks sabit bir sayı olsun.

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0 \quad (4.3)$$

denkleminin

$$u(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad u'(\pi, \lambda) = -\cos \alpha$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü $v(x, \lambda)$ ile gösterelim. Eğer $u(x, \lambda)$ ve $v(x, \lambda)$ lineer bağımlı ise, yani $u(x, \lambda)$, (4.1)-(4.2) probleminin özfonksiyonları olmayacak biçimde Wronskian determinanı

$$W(u, v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \neq 0$$

dır ve tersine, eğer herhangi λ için Wronskian determinanı sıfıra eşit ise $u = Cv$ olur. Dolayısıyla u özfonksiyondur. Böylece (4.2)-(4.3) probleminin özdeğerleri Wronskian determinantının sıfırları ile çakışır. Bu durumda birinci mertebeden türevinin yanındaki katsayı sıfıra eşit olduğundan belirli Liouville formülünden dolayı W , x 'den bağımsızdır.

$$W(u, v) = w(\lambda)$$

$$G(x, t; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{w(\lambda)} u(x, \lambda) v(t, \lambda) & \dots x \leq t \\ \frac{1}{w(\lambda)} u(t, \lambda) v(x, \lambda) & \dots x \geq t \end{cases}$$

şeklinde $G(x, t; \lambda)$ Green fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon x ve t değişkenlerine göre simetrik ve reel λ değerleri için reeldir.

$$y(x, \lambda) = \int_0^x G(x, t, \lambda) f(t) dt \quad (4.4)$$

şeklindeki fonksiyonun (4.1)-(4.2) sınır probleminin çözümü olduğunu gösterelim:

$$y(x, \lambda) = \frac{1}{w(x)} \left\{ v(x, \lambda) \int_0^x u(t, \lambda) f(t) dt + u(x, \lambda) \int_0^x v(t, \lambda) f(t) dt \right\} \quad (4.5)$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} y''(x, \lambda) &= \frac{1}{w(x)} \left\{ v''(x, \lambda) \int_0^x u(t, \lambda) f(t) dt + u''(x, \lambda) \int_0^x v(t, \lambda) f(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + v'(x, \lambda) u(x, \lambda) f(x) - u'(x, \lambda) v(x, \lambda) f(x) \right\} \\ &= \frac{1}{w(x)} [q(x) - \lambda] \left\{ v(x, \lambda) \int_0^x u(t, \lambda) f(t) dt + u(x, \lambda) \int_0^x v(t, \lambda) f(t) dt \right\} + f(x) \\ &= [q(x) - \lambda] y(x, \lambda) + f(x) \end{aligned}$$

olup

$$y'' + (\lambda - q(x)) y = f(x)$$

elde edilir. $y(x, \lambda)$ fonksiyonunun (4.2) sınır koşullarını sağladığını kolayca kontrol edebiliriz. Böylece λ , (4.2)-(4.3) homojen probleminin özdeğeri olmayacak şekilde, her $f(x)$ fonksiyonu için homojen olmayan (4.1)-(4.2) problemi çözülebilir ve çözüm (4.4) formülü ile verilir.

Tersine eğer λ homojen problemin özdeğeri ise homojen olmayan (4.1)-(4.2) problemi genelde çözülebilir değildir. λ , homojen problemin özdeğeri olmayacak biçimde (4.1)-(4.2) sisteminin ek çözümü vardır.

Gerçekten, homojen olmayan problemin iki çözümünün farkının homojen problemin özfonksiyonu olacağı aşikardır ve varsayımdan dolayı bu sıfıra eşittir. $\lambda = 0$ için bir özdeğer olmadığını kabul edebiliriz. Aksi durumda bir sabit η sayısı için,

$$y'' + (\lambda + \eta) - q(x) y = 0$$

$$y(0, \lambda) \cos \alpha + y'(0, \lambda) \sin \alpha = 0$$

$$y(\pi, \lambda) \cos \beta + y'(\pi, \lambda) \sin \beta = 0$$

sınır problemini göz önüne alalım. Bu problemin özdeğeri, (4.2)-(4.3) probleminin özdeğerinin aynısıdır. Özdeğerlerin tümü η kadar sağa ötelenmiş olur. Son sınır problem için sıfır özdeğeri olmayacak şekilde η sayısını seçebiliriz. $G(x, t; \lambda) = G(x, t)$ eşitliğini göz önüne alırsak

$$y(x) = \int_0^x G(x,t) f(t) dt \quad (4.6)$$

fonksiyonu (4.2) sınır koşullarını sağlayan

$$y'' - q(x)y = f(x)$$

denkleminin çözümüdür. Böylece (4.1)-(4.2) sistemi

$$y + \lambda \int_0^\pi G(x,t) y(t) dt = \int_0^\pi G(x,t) f(t) dt \equiv g(x)$$

integral denklemine denk olduğunu söyleyebiliriz. Özellikle homojen problem $f(x) \equiv 0$

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi G(x,t) y(t) dt = 0 \quad (4.7)$$

integral denklemine denktir.

4.2. (4.2)-(4.3) probleminin özdeğerleri $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ve bunlara karşılık gelen normlaştırılmış özfonksiyonlar $v_0(x), v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ olsun.

$$H(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(\xi)}{\lambda_n}$$

çekirdeği göz önüne alalım. $\sqrt{\lambda_n} = n + O(1)$ asimptotik formülünden dolayı $H(x, \xi)$ için yazılan seri, mutlak ve düzgün yakınsaktır ve dolayısıyla $H(x, \xi)$ çekirdeği sürekli. Şimdi ise

$$Q(x, \xi) = G(x, \xi) + H(x, \xi) = G(x, \xi) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(\xi)}{\lambda_n}$$

çekirdeğini göz önüne alalım. Bu çekirdek sürekli ve simetrik olacaktır. Sıfıra denk olmayan her simetrik $Q(x, \xi)$ çekirdeği en az bir özfonksiyona sahiptir. Yani

$$u(x) + \lambda_0 \int_0^\pi Q(x, \xi) u(\xi) d\xi = 0 \quad (4.8)$$

denklemini sağlayan λ_0 sayısı ve $u(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcuttur. Böylece $Q(x, \xi)$ çekirdeğinin özfonksiyonlara sahip olmadığını gösterirsek $Q(x, \xi) \equiv 0$ olduğunu elde ederiz. Yani,

$$G(x, \xi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(\xi)}{\lambda_n} \quad (4.9)$$

açılımından, özfonksiyonların tamlığını kolayca elde ederiz. (4.7) denkleminde

$$\int_0^{\pi} G(x, \xi) v_n(\xi) d\xi = - \frac{1}{\lambda_n} v_n(x)$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^{\pi} Q(x, \xi) v_n(\xi) d\xi = 0$$

olup $Q(x, \xi)$ çekirdeği (4.2)-(4.3) probleminin tüm özfonksiyonlarına ortogonaldır. (4.8) integral denkleminin çözümü $u(x)$ olsun. $u(x)$ 'in $v_n(x)$ 'lerin tümüne dik olduğunu gösterelim. Gerçekten (4.8) denkleminde

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi} u(x) v_n(x) dx + \lambda_0 \int_0^{\pi} v_n(x) \left\{ \int_0^{\pi} Q(x, \xi) u(\xi) d\xi \right\} dx \\ &= \int_0^{\pi} u(x) v_n(x) dx + \lambda_0 \int_0^{\pi} u(\xi) \left\{ \int_0^{\pi} Q(x, \xi) v_n(x) dx \right\} d\xi \\ &= \int_0^{\pi} u(x) v_n(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$0 = u(x) + \lambda_0 \int_0^{\pi} Q(x, \xi) u(\xi) d\xi = u(x) + \lambda_0 \int_0^x G(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

bulunur. Yani $u(x)$, (4.2)-(4.3) probleminin özfonksiyonudur. Ayrıca $u(x)$, $v_n(x)$ 'lerin tümüne ortogonal olduğu için $u(x) \equiv 0$ ve dolayısıyla, $Q(x, \xi) \equiv 0$ olur. Böylece (4.9) formülü ispatlanmış olur.

4.3. Teorem (Açılım Teoremi)

Eğer $f(x)$ ikinci mertebeden sürekli türevelere sahipse ve (4.2) koşullarını sağlamıyorsa $f(x)$ fonksiyonu (4.2)-(4.3) probleminin özfonksiyonlarına göre mutlak ve düzgün yakınsak Fourier seri açılımı şeklinde yazılabilir.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \quad a_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx \quad (4.10)$$

İspat

$f''(x) - q(x)f(x) = h(x)$ olsun. Bu taktirde (4.4) ve (4.9)' dan dolayı

$$f(x) = \int_0^{\pi} G(x, \xi) h(\xi) d\xi = - \sum_{h=0}^{\infty} v_n(x) \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\pi} v_n(\xi) h(\xi) d\xi \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x)$$

$v_n(x)$ fonksiyonlarının ortogonallığı ve normlu olmasından dolayı

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx$$

olur.

4.4. Teorem

$0, \pi$ aralığında karesi integrallenebilen her $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_0^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{h=0}^{\infty} a_n^2 \quad (4.11)$$

Parseval eşitliği sağlanır.

Şimdi $f(x)$ fonksiyonunun açılımı belirli olacak şekilde, Rezolvent için Fourier serisine açılımını bulalım. (4.4) formülüne göre $y(x, \lambda)$ fonksiyonu (4.2) sınır koşullarını sağladığından, kısmi integrasyon yaparsak,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} y''(x, \lambda) - q(x) y(x, \lambda) v_n(x) dx &= \int_0^{\pi} v_n''(x) - q(x) v_n(x) y(x, \lambda) dx \\
&= -\lambda_n \int_0^{\pi} y(x, \lambda) v_n(x) dx \\
&= -\lambda_n d_n(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde ederiz.

$$y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\lambda) v_n(x), \quad a_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx$$

olsun. Bu takdirde (4.1) ve (4.12)'den

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\pi} y''(x, \lambda) + [\lambda - q(x)] y(x, \lambda) v_n(x) dx \\
&= -\lambda_n d_n(\lambda) + \lambda d_n(\lambda)
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$d_n(\lambda) = \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla ,rezolvent için açılım

$$y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} v_n(x) \tag{4.13}$$

şekindedir.

KAYNAKLAR

- [1] Richard Bronson Ph.D. Schaum Serisinden,“**Diferensiyel Denklemler Teori ve Problemleri**”,İkinci baskı çeviri Prof.Dr.H.Hilmi Hacısalihoğlu, Nobel Yayın Dağıtım, 1993.
- [2] Edwards&Penney 3. baskıdan çeviri Prof.Dr.Ömer Akın,“**Bilgisayar Destekli ve Matematiksel Modelli Diferansiyel Denklemler ve Sınır-Değer Problemleri**”,Palme Yayıncılık .
- [3] M.Aydın, B.Kuryel, G.Gündüz ve G. Oturanç,“**Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları**”(3. Baskı), Fakülteler Kitapevi, Barış Yayınları, 1995.
- [4] C.Cerit,“**Bilgisayar Uygulamalı Elemanter Diferansiyel Denklemler**” (8. Baskıdan çeviri), Beta Basımevi, 1997.
- [5] Kurt Kreith, “**Oscillation Theory**” ,University of California, Davis , CA/USA
- [6]Kreyszing E. ,“**Introductory Functional Analysis with Applications**”, Newyork,1978
- [7] Liusternik L.A. and Sobolev V.J. “**Elements of Functional Analysis,Frederck Ungar Publishing Company**”,Newyork,1961
- [8] Levitan B.M. and I.S. Sargsjan, Introduction to Spectral Theory:“**Selfadjoint Ordinary Differential Operators**”, Amer. Math. Soc. Transl. Math.
- [9] Markushevich A.I. ,“**Introduction to Analytic Functions Theory I,II**”, Moskow,1977
- [10] Yosida K.,“**Theory of Integral Equations**” , 2nd ed.(Japanese),Iwanami,1978
- [11] Titchmarsh,E.C., “**Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations I**” ,1946, II,1958
- [12] Naimark M.A., “**Linear Differential Operators**” ,NAUKA,1969
- [13] Marchenko V.A., “**Sturm-Liouville Operators and Their Applications**” , Nawkava Dumka,Kiew,1977
- [14] Levinson N., “**The Inverse Sturm-Liouville Problem,Mat.**” Tidsskr,1949
- [15] Swanson C.A., “**Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations**”, Newyork and London,1968
- [16] Willett D., “**Classification of Second-order Linear Differential Equations with respect to Oscillation,Advances in Math**” .3(1969), 594-623

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğdum. İlköğretimimi Dumlupınar İ.Ö.O.'nda, lise eğitimimi Mehmet Akif Ersoy Lisesi'nde tamamladım. 2003-2007 yılları arasında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisansımı tamamladım. 2007-2008 döneminde Fırat Üniversitesi Tezsiz Yüksek Lisans programı ile formasyon eğitimimi aldım. Ardından 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans programına kayıt yaptırđım. Bu esnada 2009 yılında Muş Korkut Çok Programlı Lisesi'ne ardından da 2010 yılında Elazığ Palu Mesleki ve Teknik Eğitim Merkezi'ne Matematik Öğretmeni olarak atandım. Halen Palu METEM'de görev yapmaktayım.

OCAK-2011

Sevcan TUNCER