

OPSİYON TERCİHLERİNİN STOKASTİK ANALİZ İLE İNCELENMESİ

Cihan AKSOP

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Temmuz 2012

ANKARA

Cihan AKSOP tarafından hazırlanan OPSİYON TERCİHLERİNİN STOKASTİK ANALİZ İLE İNCELENMESİ adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

.....

Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Tahir KHANİYEV

.....

Endüstri Mühendisliği, TOBB ETÜ

Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G. Ü.

Prof. Dr. M. Akif BAKIR

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G. Ü.

Prof. Dr. Reşat KASAP

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G. Ü.

Yrd. Doç. Dr. Ceren VARDAR

.....

Matematik Anabilim Dalı, TOBB ETÜ

Tarih: 23 / 07 / 2012

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Cihan AKSOP

OPSİYON TERCİHLERİNİN STOKASTİK ANALİZ İLE İNCELENMESİ
(Doktora Tezi)

Cihan AKSOP

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2012

ÖZET

Bu tezde, opsiyona konu olan varlığın fiyatını gözlemlemenin bir maliyeti olduğu varsayımı altında Amerikan tipi opsiyonları incelenmiştir. Uygulamada sürekli gözlem yapılamadığından gözlem zamanlarının belirlenmesi için bir strateji önerilmiştir. Önerilen strateji, opsiyona konu olan varlığın fiyatının hareketli bir sınırı ilk geçiş zamanı temeline dayanmaktadır. Opsiyona konu olan varlığın fiyatının Ornstein-Uhlenbeck sürecini takip ettiği varsayımına dayanarak, bu ilk geçiş zamanlarının dağılımı ve momentleri detaylı olarak incelenmiştir.

Bilim Kodu :205.1.110

Anahtar Kelimeler : Opsiyon değerlendirme, difüzyon süreçleri, ilk geçiş zamanları, beklenen değer

Sayfa Adedi :100

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

A STUDY ON OPTION PREFERENCES BY STOCHASTIC ANALYSIS
(Ph. D. Thesis)

Cihan AKSOP

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
July 2012

ABSTRACT

In this thesis, American type options are considered. Under the assumption that there exists a cost of observing the underlying asset, determination of observation times are investigated. Since continuous observation is not possible, a strategy for determining the observation times is proposed. The proposed strategy is based on the first passage times of the underlying asset's price to a moving boundary. Under the assumption that the underlying asset's price follows an Ornstein-Uhlenbeck process, distribution and moments of these first passage times are studied in details.

Science Code :205.1.110

Keywords : Option pricing, diffusion processes, first passage times, expected value

Page Number :100

Adviser : Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

TEŞEKKÜRLER

Çalışmalarım boyunca değerli yardımları ve katkılarıyla beni yönlendiren Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU'na, yine kıymetli tecrübelerinden faydalandığım hocam Prof. Dr. Tahir KHANİYEV'e, ayrıca Prof. Dr. M. Akif BAKIR'a ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜRLER.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	xi
1. GİRİŞ	1
2. OPSİYONLAR.....	3
2.1. Başlıca Opsiyon Türleri.....	5
2.1.1. Avrupa opsiyonları.....	5
2.1.2. Amerikan opsiyonları.....	5
2.1.3. Asya opsiyonları	6
2.1.4. Rus opsiyonları.....	6
2.1.5. Bermuda opsiyonları	6
2.2. Amerikan Tipi Opsiyonların Değerlendirilmesi	6
2.3. Opsiyonların Uygulama Alanları	9
2.4. Black-Scholes Modeli.....	11
2.5. Opsiyon Değerinin Belirlenmesinde Kullanılan Bazı Yöntemler	14
3. DİFÜZYON SÜREÇLERİ.....	18

Sayfa

3.1. Temel Tanımlar.....	18
3.2. Stokastik Analiz	21
3.3. Stokastik Süreç Örnekleri	25
3.3.1. Brownian hareket	25
3.3.2. Geometrik Brownian süreç	26
3.3.3. Ornstein - Uhlenbeck süreci	29
4. OPSİYON İZLEME STRATEJİSİ.....	36
4.1. Model Varsayımları	36
4.2. Gözlem Yapma Maliyeti Altında Opsiyon Uygulama Stratejisi	37
4.3. Sınır Değerlerinin Belirlenmesi	38
4.4. Difüzyon Süreçlerinin Hareketli Bir Sınırı İlk Geçiş Zamanları	42
4.4.1. Literatürde kullanılan yöntemler	42
4.4.2. Dönüşümler yardımıyla ilk geçiş zamanlarının incelenmesi	45
4.4.3. Ornstein – Uhlenbeck sürecinin hiperbolik bir sınırı ilk geçiş zamanı	47
4.4.4. Genel durum	49
4.4.5. İlk geçiş zamanlarının momentleri	53
5. ÖRNEK	57
6. SONUÇ	62
KAYNAKLAR	64

Sayfa

EKLER	74
Ek-1. Kısmi diferansiyel denklem çözümü	75
Ek-2. Green fonksiyonları	76
Ek-3. Kesikli zaman noktalarında gözlemlenen Ornstein – Uhlenbeck sürecinin tahmin edicileri	78
Ek - 4. Ornstein-Uhlenbeck sürecinin simülasyonu	87
Ek - 5. En küçük kareler Monte Carlo yöntemi.....	88
Ek- 6. Brownian Süreç.....	91
Ek - 7. Ornstein – Uhlenbeck Süreci.....	94
Ek - 8. Bürmann teoremi.....	98
ÖZGEÇMİŞ	99

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 5.1. Difüzyon katsayısının ilk geçiş zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonuna etkisi.....	58
Şekil 5.2. Drift katsayısının ilk geçiş zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonuna etkisi.....	59
Şekil 5.3. Kesikli zaman noktalarında gözlem yapılması durumu için örnek gerçekleşiş.....	61

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.1. Ornstein - Uhlenbeck sürecinin hiperbolik sınırı ilk geçiş zamanının ortalama ve varyansı	58

1. GİRİŞ

Yatırımlara ilişkin karar vermede en önemli konulardan bir tanesi gelecekteki belirsizlik durumlarından en az etkilenmektir. Bunun için mevcut durumu çok iyi analiz ederek, yatırım araçlarının gelecekteki değerlerini en iyi biçimde kestirmek ve riski olabildiğince küçükleyecek yöntemlere başvurmak gereklidir. Yatırım araçları olan varlıklar üzerinde bu türden bir risk azaltımı amaçlandığında, opsiyon fırsatlarından faydalanmak yatırımcı için cazip olmaktadır.

Bir opsiyon, temel olarak herhangi bir varlığın gelecekte belirli bir fiyattan alınması (satılması) hakkının bugünden belirli bir bedel karşılığı satın alınmasına olanak sağlayan bir sözleşmedir. Bu hak bir zorunluluk değil, varsa opsiyon sözleşmesi ile belirlenen şartların oluşmasına bağlı olarak opsiyon sahibinin isteğinde uygulamaya koyabileceği bir tercihtir.

Opsiyon sözleşmeleri kullanılarak, yatırım yapılmak istenen varlığa ilişkin harcama bir süre ertelenebileceğinden, net bugünkü değer ve opsiyon değerlendirme yaklaşımları farklı sonuçlara ulaşacaktır [59]. Bu durumun birinci nedeni, harcamaları olabildiğince geciktirmenin her zaman avantajlı olmasıdır. Çünkü elden çıkartılması geciktirilen her kaynak üzerinden bir faiz getirisi elde edilebilir. İkincisi ise bu bekleme sürecinde içinde bulunulan şartlarda değişimler olabilir. Bu nedenle, opsiyonları her zaman için olabildiğince geç uygulamaya koymak gerektiği düşünülebilir, fakat opsiyonu geç uygulamaya koymanın cezası paranın zaman değeri, yani faizi kullanamamaktır.

Opsiyon alım / satım işlemleri doğrudan ticari mallar üzerinden yapılmadığı için bu tür sözleşmeler CAPM (Capital asset pricing model, bkz. Kırılı [64]) ve Arbitraj (bkz. Yörük [119]) gibi yöntemlerle incelenemezler (bkz. Karan [59]). Ayrıca, bir hisse senedine dayalı opsiyon sözleşmesi almakla, o hisse senedinin sağladığı oy kullanma hakkı veya kârdan pay isteme hakkı gibi

haklar elde edilmediği gibi opsiyonlar başka bir varlığa dayandığından, opsiyonların (adil) fiyatları doğrudan arz-talep eşitliği altında belirlenemez.

Bu nedenlerle, borsa değerlerine bağlı olarak bir opsiyon sözleşmesinin klâsik yöntemlerle incelenmesi uygun değildir. Bu çalışmada Ornstein-Uhlenbeck süreçleri altında Amerikan tipi opsiyonlar incelenerek, gözlemlerin sürekli olmaması ve her bir gözlem zamanının daha önceki gözlem noktalarındaki sürecin değerine bağlı olarak belirlenmesi durumunda opsiyonun uygulamaya konulması için bir strateji önerilmiştir.

İzleyen bölümde opsiyonlara ilişkin temel kavramlar ve opsiyonların değerlerinin belirlenmesinde literatürde kullanılan bazı yöntemler sunulmuştur. 3. Bölüm'de tez konusunda temel araç olarak kullandığımız difüzyon süreçleri ve bunlara bağlı stokastik analiz yöntemlerine kısaca değinilmiştir. Tez çalışması kapsamında elde edilen sonuçların yer aldığı 4. Bölüm'de ele aldığımız opsiyona ilişkin model varsayımları ve bu varsayımlar altında opsiyona konu olan varlığın fiyatını gözlemlemek için önerilen strateji sunulmuştur. Önerilen bu strateji, opsiyona konu olan varlığın fiyatının hareketli bir sınırı ilk geçiş zamanıyla belirlendiğinden, difüzyon süreçlerinin ilk geçiş zamanlarının incelenmesinde literatürde uygulanmış çeşitli yöntemlere kısaca değinilmiş ve Ornstein-Uhlenbeck sürecinin hiperbolik bir sınırı ilk geçiş zamanı incelenmiştir. Elde edilen sonuçların bir uygulanmasının verildiği 5. Bölüm'de Monte Carlo simülasyonu ile oluşturulan bir gerçekleşme üzerinden önerilen stratejinin bir canlandırması sunulmuştur. 6. Bölüm'de ise çeşitli tartışmalara yer verilmiştir. Tez çalışmasıyla ilgili olan bazı tamamlayıcı bilgilerin ek olarak verilmesi uygun görülmüştür.

2. OPSİYONLAR

Bu bölümde opsiyonlara ilişkin temel bazı kavramlar sunulmaktadır. Burada geçen tanımlar ve daha detaylı incelemeler için bkz. [28].

Opsiyon sözleşmeleri (opsiyonlar), önceden belirlenen koşulların gerçekleşmesi halinde gelecekte anlaşmaya varılan türden davranma hakkını bugünden belirli karşılıklarla garanti altına alan standart sözleşme türleridir. Bu sözleşmelerde, anlaşmada geçen şartların gerçekleşmesi durumunda opsiyonu alan kişi, anlaşmada belirlenen davranışta bulunma hakkını elde eder, fakat bu hakkını kullanmak zorunda değildir.

Tez çalışmasına finansal bir araç olarak kullanılan opsiyonları konu alacağız. Bu nedenle bir opsiyon sözleşmesinin aşağıdaki tanımını kullanacağız.

2.1. Tanım: Bir *opsiyon sözleşmesi* sahibine bir malı (opsiyona konu olan varlığı – underlying asset) belirli bir fiyattan belirli bir zamanda veya zaman aralıklarında, önceden belirlenmiş koşulların sağlanması halinde satın alma veya satma hakkı sağlayan standart bir sözleşmedir. Bu hak, opsiyonu satan tarafından garanti edilir.

Opsiyonlar sözleşme konusunun alım veya satımı ilgilendirmesine göre ikiye ayrılırlar.

2.2. Tanım: Bir *alım opsiyonu*, sahibine belirli bir varlığı önceden belirlenen bir fiyattan, sözleşmeyle belirlenen zamanlarda alma hakkı verir. Bir *satım opsiyonu* ise sahibine belirli bir varlığı önceden belirlenen bir fiyattan, sözleşmeyle belirlenen zamanlarda satma hakkı verir.

2.3. Tanım: Alım opsiyonlarında *uygulama (anlaşma) fiyatı* opsiyon sahibinin opsiyona konu olan varlığı alma hakkına sahip olduğu fiyatı, satım

opsiyonlarında ise opsiyon sahibinin opsiyona konu olan varlığı satma hakkına sahip olduğu fiyatı belirtir.

2.4. Tanım: Bir opsiyonun *vade sonu*, opsiyon ile ilgili bütün hakların elde edilebileceği son tarihtir. Eğer opsiyon bu tarihe kadar uygulamaya konulmamışsa opsiyon sahibinin hiçbir hakkı kalmayacağı gibi opsiyonusatanın dabitün yükümlülükleri ortadan kalkacaktır.

2.5. Tanım: Herhangi bir opsiyonu satın alan yatırımcı *opsiyon primini* ödemek zorundadır. Bu prim, piyasada arz ve talep dengesi altında belirlenmektedir. Yatırımcı, opsiyonu satın almakla sözleşmede geçen zamanlarda opsiyona konu olan varlığı *anlaşma fiyatından* alma / satma hakkına sahip olur.

Opsiyonlar özellikle gelecekle ilgili belirsizliklerin olduğu piyasalardaki malların fiyat değişmelerine karşı riski azaltmada çok önemli rol oynarlar. Yatırımcının, bir malı belirli bir tarihe kadar bugünden belirlenen bir fiyattan satın alma opsiyonu satın aldığını varsayalım. Bu durumda yatırımcı, eğer opsiyona konu olan malın fiyatı anlaşma fiyatının üzerine çıkarsa, opsiyona konu olan malı *alarakopsiyonu uygulamaya koyar* ve malı *sözleşme fiyatından* alıp hemen piyasadaki yüksek fiyatından satarak aradaki fark kadar kâr elde eder. Eğer malın fiyatı opsiyon sözleşmesinin geçerlilik tarihine kadar anlaşma fiyatının üzerine hiç çıkmazsa, yatırımcı opsiyonu uygulamaya koymayarak zararını sadece opsiyon primi ile sınırlandırmış olur. Bu sayede malın fiyatındaki istenmeyen değişmelerden kendisini korur.

Her opsiyon sözleşmesinin bir satıcısı vardır. Satıcı, opsiyon sözleşmesini satarak opsiyon primini gelir olarak alacaktır. Daha sonra opsiyona konu olan varlığın fiyatındaki değişmelere göre opsiyon alıcısının vereceği kararı bekleyecektir. Opsiyonu satan kişinin alım veya satım kararı vermesi söz konusu değildir.

Satım opsiyonlarında ise, opsiyon sahibi belirli bir bedel ödeyerek satın aldığı opsiyon sayesinde, vadesinde veya vadesinden önce opsiyona konu olan varlığı satma hakkı elde eder. Bu opsiyonu satankişi ise bir bedel karşılığında sattığı opsiyonun vadesinden önce alıcının talep etmesi durumunda opsiyona konu olan varlığı satın almaya mecburdur.

2.1. Başlıca Opsiyon Türleri

Opsiyonlar çok çeşitli olmakla birlikte, temelde opsiyonun uygulama zamanı, opsiyona konu olan varlığın alınması için ödenecek miktar gibi özelliklere göre çeşitli sınıflandırmalara tâbi tutulurlar.

2.1.1. Avrupa opsiyonları

Bu tür opsiyonlar sadece vade sonunda uygulamaya konulabilir(Black ve Scholes [11]). Bu nedenle opsiyonun değeri sadece opsiyona konu olan varlığın vade sonundaki piyasa fiyatı ile ilişkilidir. Sadece vade sonundaki piyasa fiyatı opsiyon değerini belirlediğinden, bu türden opsiyonlara “vanilya opsiyonları” denilmektedir.

2.1.2. Amerikan opsiyonları

Bu tür opsiyonlar vade sonuna kadar herhangi bir anda uygulamaya konulabilir (Myneni [83]). Bu özelliği nedeniyle, opsiyon fiyatı sadece opsiyona konu olan varlığın vade sonundaki piyasa fiyatı ile değil, bunun yanında vadeye kalan süre ve opsiyona konu olan varlığın vade süresince piyasa değerleriyle de ilişkilidir. Opsiyon fiyatını belirlemek, örnek yol üzerindeki değerlere de bağlı olduğundan Amerikan tipi opsiyonlar “egzotik opsiyon” adını alır. Amerikan tipi opsiyonların özel bir türü olarak bu opsiyonların vadesi yeteri kadar uzun (sonsuz) ise süresiz Amerikan opsiyonu adını alırlar.

2.1.3. Asya opsiyonları

Opsiyonun uygulanması sonucunda alınacak olan para, opsiyonun uygulanmasından belirli bir süre öncesine kadar opsiyona konu olan varlığın değerinin ortalamasıyla ölçülür (Carr 2002 [24]). Opsiyonun uygulama tarihinin belirli bir vade ânında veya o vade ânına kadarki bir anda olmasına göre Avrupa (Chalasani [25]) ve Amerikan tipi (Bogomolov ve Medvedev [12], Broadi ve Detemple [19]) olarak kendi içinde ikiye ayrılır.

2.1.4. Rus opsiyonları

Opsiyonun uygulanması sonucu alınacak olan para, opsiyonun uygulanmasına kadar geçen sürede opsiyona konu olan varlığın fiyatının alacağı en büyük değer ile ölçülür (Duistermaat va. [35], Sheep ve Shirayayev [103, 104]). Bu özelliği sayesinde yatırımcı, herhangi bir şekilde opsiyona konu olan varlığın en yüksek değerini kaçırmak gibi bir kaygısı olmaz. Fakat opsiyonu vade sonuna kadar bekletmekle paranın zaman değerini elde edemeyeceği için, opsiyonu uygulama kararının iyi belirlenmesi gereklidir.

2.1.5. Bermuda opsiyonları

Bu opsiyon Amerikan tipi opsiyonların özel bir hali olup, opsiyonun uygulamaya konulabileceği tarihler opsiyon sözleşmesinde belirtilir [38]. Bu nedenle opsiyon sahibi, opsiyonu vadesinden önce uygulamaya koyabilmekle beraber, uygulama tarihini keyfi olarak belirleyemez. Bu opsiyonlar uygulamada daha çok Amerikan opsiyonlarının simülasyonları için kullanılırlar.

2.2. Amerikan Tipi Opsiyonların Değerlendirilmesi

Sözleşmenin bitim tarihine kadar herhangi bir anda uygulamaya konulabilen Amerikan tipi opsiyonlar, opsiyonu satın alan kişiye önceden belirlenmiş bir

fiyat üzerinden bir varlığı alma veya satma hakkı veren standart bir sözleşmedir. Yatırımcı, opsiyona konu olan varlığın piyasa fiyatına göre opsiyonu uygulamaya koyup koymama kararı verebildiği için varlığın fiyatındaki belirsizlikten korunmuş olur. Opsiyon sözleşmesinin geçerliliği boyunca opsiyona sahip olan kişi her an için opsiyonu hemen uygulama ya da uygulama kararını gelecek bir zamanda verme tercihini yapmak zorundadır. Bu kararı verirken opsiyona konu olan varlığın (bilinen) değeri ile devam etmenin (bilinmeyen) değerlerini karşılaştırmak zorundadır.

Sözleşme fiyatı K olan ve T zamanına kadar geçerliliğe sahip bir Amerikan tipi satış opsiyonunun değeri [106]

$$\max_{\tau \leq T} E[e^{-r\tau} \max\{K - S(\omega, \tau), 0\}] \quad (2.1)$$

ile verilir. Burada maksimizasyon $\tau \leq T$ olacak biçimindeki bütün duraklama zamanları üzerinden yapılmaktadır. r indirgeme oranı (genellikle riskten arındırılmış faiz oranı) iken $S(\omega, t)$, bir ω gerçekleşişi için t anında opsiyona konu olan varlığın piyasa fiyatını temsil etmektedir. Bu opsiyonun değerini tahmin etme probleminde opsiyon sahibinin opsiyonu hemen uygulamaya koyması durumundaki kazancı ile devam etmenin indirgenmiş değeri karşılaştırılmalıdır. Bu türden erken uygulama stratejileri nedeniyle Amerikan tipi opsiyonların değerlendirilmesi finans matematiğinde çok zor problemler olarak yer alır. Analitik çözümlere ulaşmada yaşanan zorluklar nedeniyle, Amerikan tipi opsiyonların nümerik olarak değerinin hesaplanması literatürde çok yer almaktadır.

Brennan ve Schwartz [16, 17] ve Schwartz[101] sonlu farklar yöntemiyle bu problemi incelemişlerdir. Bu yöntemde zaman ve durum uzayı yeteri kadar küçük aralıklara bölünerek, opsiyonun değerlendirilmesinden doğan kısmi diferansiyel denklemler sonlu farklar yöntemiyle çözülür. Brennan ve Schwartz yönteminin yakınsaması Jaillet va.[56] tarafından ispatlanmıştır.

Cox va.[32] da zaman ve durum uzayını kesikli hale getirmiş, fakat yöntemlerini simetrik rastgele yürüyüşün Brownian harekete yaklaşımı üzerine kurarak, binom yöntemi ile Amerikan tipi opsiyonların değerlendirilmesini incelemişlerdir. Bu yöntemin yakınsaması Amin ve Khanna [5] tarafından incelenmişken, Geske ve Shastri [44] binom yöntemi ile sonlu farklar yönteminin bir karşılaştırmasını sunmaktadır.

Boyle [13], Omberg [85], Boyle va.[14] ve Kamrad ve Ritchken [58], binom yöntemini multinomial yöntemleri de içerecek biçimde geliştirmişken, Barone-Adesi ve Whaley [9] ve MacMillan [76] kuasi-analitik bir yöntem önermiştir.

Avrupa tipi opsiyonlarda sıklıkla kullanılan nümerik integral yöntemi Parkinson [88] tarafından Amerikan tipi satış opsiyonlarına uyarlanmıştır.

Kim [65], Jacka [55] ve Carr va.[23], Amerikan tipi opsiyonların erken uygulanabilme özelliğinden yararlanarak bu tür opsiyonların değerlerini Avrupa tipi opsiyon ile bir erken uygulama priminin toplamı olarak ifade etmiştir.

Geske ve Johnson [43], Breen [15], Bunch ve Johnson [20] Richardson interpolasyonunu kullanmışlardır.

Bu türden sayısal yaklaşımların yeni karşılaşılabilecek opsiyon türlerine kolay uygulanabilmesi en büyük artılarından. Fakat, problemde incelenmek istenen etkenin fazla olması durumunda ortaya çıkan gerekli hesaplamaların sayısındaki hızlı artış, simülasyon yöntemlerini kullanmaya zorlamaktadır.

Opsiyon değerlendirme konusu ilk defa 1977 yılında Boyle [13] tarafından simülasyon çalışması ile incelenmişken, Amerikan tipi opsiyonlarda optimum erken uygulama stratejisi ilk kez Tilley [113] tarafından simülasyonla incelenmiştir. Longstaff ve Schwartz [75] tarafından önerilen en küçük kareler Monte Carlo yöntemi, Amerikan tipi opsiyonların değerlendirilmesinde

kullanılan önemli bir simülasyon yöntemi olmuştur. Yazarların önerdikleri yöntemde simülasyon yardımıyla üretilen opsiyona konu olan varlığın fiyatının oluşturduğu örnek yollar yardımıyla gelecek değerler en küçük kareler yardımıyla elde edilir ve bu değerlere göre “tamam mı devam mı” kararı verilir.

2.3. Opsiyonların Uygulama Alanları

Opsiyon değerlendirme yöntemlerinin uygulama alanlarının başlıca ortak özellikleri şöyle sıralanabilir:

1. Gelecekle ilgili bir belirsizlik durumunun var olması
2. Verilecek olan kararın geri dönüşünün olmaması
3. Kararın verilmesinde tercih hakkının olması

Bu özellikleri sayesinde opsiyon değerlendirme yöntemleri bir finansal değer olan opsiyon sözleşmelerinin yanında yatırım fırsatlarının değerlendirilmesinde de kullanılabilir. Projelere yatırım kararlarının incelenmesinde opsiyon değerlendirme yöntemlerinin kullanılması genellikle “reel opsiyonlar” olarak adlandırılmaktadır. Piyasada doğrudan işlem görmemeleri haricinde reel opsiyonlar ile finansal opsiyonlar arasında değerlendirme yöntemleri bakımından fark bulunmamaktadır (Taş va.[111]).

Piyasa işlemlerinde opsiyonlar temel olarak daha önce de değinildiği üzere riskten korunma sağlarlar. Bunun yanı sıra, bir alım opsiyonu almak, opsiyona konu olan varlığı doğrudan almaktan her zaman için daha ucuz olacağından, yatırımcılar daha az kaynak ile daha fazla varlığı kontrol etme imkânı elde ederler. Bu özellikleri yardımıyla, İMKB’de risk yönetiminin Avrupa tipi opsiyonlar ile nasıl yapılabileceğini Coşkun [29] incelemiştir.

Ata[8] ise çalışmasında Avrupa tipi dövize dayalı opsiyonların Türkiye’de nasıl uygulanabileceğini incelemiştir.

Uysal [115] çalışmasında Black-Scholes modelinin yatırım projelerinin değerlendirilmesinde nasıl kullanılabileceğini incelemiştir. Özoğul ve Ülengin [87] çalışmalarında bilişim teknolojilerine yatırım yapmayı bir reel opsiyon yöntemi olarak ele almışlardır. Ayrıca gösterdikleri örnek ile Net Bugünkü Değer yaklaşımına göre projenin negatif değerli olmasına rağmen, reel opsiyon yaklaşımının projeye yatırım yapmayı kârlı olarak gösterebileceği sonucuna vararak opsiyon değerlendirmesi için özel yöntemlerin kullanılması gerektiğine güzel bir örnek vermişlerdir. Konuk [71] ise reel opsiyonları kullanarak şirketlerin nasıl değerlendirilebileceğini göstermiştir.

Opsiyonların ilginç kullanım alanlarından bir tanesini Engelen [40] suç davranışlarını incelerken ortaya koymuştur. Çalışmasında, opsiyona konu olan varlığın fiyatını suçun işlenmesinden elde edilebilecek kazanç ve suçun işlenmesi için gereken harcamayı ise uygulama fiyatı olarak ele almıştır. Bu sayede çalışmalarında, suç davranışlarını incelemede klâsik yaklaşım olan beklenen net kazancın tanımladığı “şimdi ya da asla” şeklindeki karar kuralı yerine, bir suçu işlemenin gelecekte kârlı hale gelebileceğini de göz önünde bulunduran bir karar kuralı elde etmişlerdir.

Bir başka uygulama ise optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan genetik algoritmalar için duraklama kuralının elde edilmesidir. Bu yönde bir çalışma Rimcharoen va. [94] tarafından yapılmıştır. Çalışmalarında genetik algoritmayı durdurma kuralını, bir opsiyonun uygulamaya konulmasına benzetmişlerdir. Yapmış oldukları simülasyon çalışmalarıyla da opsiyon değerlendirme yöntemlerinin farklı algoritmaları karşılaştırmada kullanılabileceğini göstermişlerdir.

Kjærland [69] çalışmasında Norveç’te hidroelektrik üretim santrallerine yatırım yapılması fırsatlarının değerlendirilmesi ve elektrik fiyatları ile optimal

yatırım zamanları arasındaki ilişkinin incelenmesinde reel opsiyonları kullanmıştır. Elektrik üretiminin ve tüketiminin mutlaka birbirlerini her zaman için dengelemesi gerektiği ve borç elektrik almak gibi bir durumun söz konusu olmayacağı için forward sözleşmeleri temelinde opsiyon değerlendirmesini kullanarak incelemelerini yapmışlardır. Benzer bir çalışma Türkiye’de elektrik üretim santrellerine yatırımın incelenmesinde Madlener ve Stoverink [78] tarafından yapılmıştır.

Sabour [97] çalışmasında bir altın madenine yatırım yapmayı, altın fiyatlarının geçmiş değerlerine ve madene yatırım yapmanın maliyetini göz önünde bulundurarak opsiyon değerlendirme teknikleri yardımıyla incelemiştir.

Piyasaya yeni ürün sürülmesi ile ilgili bir incelemeyi ise Penning ve Lint [89] yapmıştır. Çalışmalarında piyasaya yeni ürünü hemen sürmek yerine, piyasa hakkında daha fazla bilgi edinebilmek için beklemenin faydalı olabileceğine değinerek bu durumu opsiyon fiyatlama teknikleri yardımıyla incelemişlerdir.

2.4. Black-Scholes Modeli

Black-Scholes [11] Avrupa tipi opsiyonların değerlendirmesi ile ilgili çalışmalarında aşağıdaki varsayımlarda bulunmuştur:

1. Sabit, risksiz bir faiz oranı üzerinden istenildiği kadar borç alıp vermek mümkündür.
2. Opsiyona konu olan varlığın fiyatı sabit parametrelili bir geometrik Brownian harekete uyar.
3. İşlem maliyeti (aracılara verilen komisyon gibi) ve vergi yoktur.
4. Piyasada işlemler sürekli yapılabilmektedir.

5. Opsiyona konu olan varlıkta herhangi bir kâr payı dağıtımı yoktur.
6. Piyasada işlem gören bütün yatırım araçları istenildiği kadar bölünebilir.
7. Piyasada arbitraj yoktur.
8. Opsiyon sadece geçerlilik süresinin bitim zamanında uygulamaya konulabilir (Avrupa tipi opsiyon).

Black-Sholes modeli ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Merton [79] faiz oranlarının da stokastik olması durumunu incelemiştir. Çalışmasında faiz oranı modeli olarak Vasicek modelini¹kullanmıştır. Bu model, faiz oranının bir Ornstein-Uhlenbeck sürecine uyduğu varsayımına dayanmaktadır. Kim [66] ise çalışmasında faiz oranlarının Cox – Ingersoll-Ross modeli²ve Brennan-Schwartz³modeline uyması durumlarında Avrupa tipi opsiyonların değerlerini elde etmiş ve bu sonuçları Vasicek modeli ile Merton – Ho - Lee modeli⁴ altında Amin ve Jarrow [4] opsiyonun değerine ilişkin elde ettikleri sonuçları Nikkei 225 opsiyon piyasası (Japonya) verileri üzerinden karşılaştırmıştır. Elde ettikleri sonuçlar, kısa süreli opsiyonlarda, faiz oranının stokastik olarak alınmasının opsiyonun değeri üzerinde önemli bir etkisinin olmadığını göstermektedir. Kim ve Kunitomo [67] çalışmalarında faiz oranını

¹ Vasicek modeli, faiz oranında da bir değişim olduğu ve bu değişimin Ornstein-Uhlenbeck süreci ile modellenebileceği temeline dayanmaktadır [117].

²Cox – Ingersoll – Ross modelinde faiz oranlarındaki değişimin CIR difüzyon sürecine uyduğu varsayılır. Bu modelin üstünlüğü, CIR süreçlerinin negatif değer alamamasında yatmaktadır [30].

³ Brennan – Schwartz modeli faiz oranlarını kısa ve uzun vadeli oranlar üzerinden iki faktörlü olarak modellemektedir [18].

⁴ Merton – Ho – Lee modelinde faiz oranlarının modellenmesi için drifte sahip Brownian süreç kullanılmaktadır.

modellemek için daha genel bir süreç ele almışlar ve Avrupa tipi opsiyonların değerini incelemişlerdir.

Cox ve Ross [31] sabit esnekli varyans modelinin özel bir durumu altında opsiyon değerini incelemişlerdir. Elde ettikleri sonuçların detaylı ispatları Hsu va. [49] tarafından verilmektedir. Bogomolov ve Medvedev [12] ise çalışmasında sabit esnekli varyans modellerinden yola çıkarak gama süreçleri altında Avrupa tipi opsiyonların değerlerini incelemişlerdir. Chiang va. [27] çalışmalarında opsiyona konu olan varlığın fiyatına ilişkin süreci Ornstein-Uhlenbeck sürecinin integrali olarak tanımlanabilen Ornstein-Uhlenbeck konum süreci olarak almışlar ve Avrupa tipi opsiyonların değerlerini elde etmişlerdir.

Ho va.[48] ise çalışmasında faiz oranlarının stokastik süreç oluşturmaları durumunda Amerikan tipi opsiyonların değerlerini incelemiştir. Çalışmalarında Geske ve Johnson [43] tarafından önerilen Amerikan tipi opsiyonların Bermuda tipi opsiyonların limiti olarak incelenmesi yöntemini uygulamışlardır.

Carr ve Wu [24] çalışmalarında yatırım araçlarının fiyatlarında sıçramalar olduğuna ve yatırım kazançlarının stokastik olarak değiştiğine değinerek Brownian hareketin bu yapıyı yakalamada yeterli olmadığını bu nedenle Lévy süreçlerinin modellemede kullanılmasını önererek Avrupa tipi opsiyonların değerlerini incelemişlerdir.

Kim ve Yu [68], opsiyona konu olan varlığın batma (iflas) ihtimalini de göz önünde tutan yutan Ornstein-Uhlenbeck süreci, geometrik Brownian hareket, yutan sınırlı lognormal difüzyon süreci gibi farklı süreçler altında Amerikan opsiyonunun değerlerini sunmaktadır.

Madan va. [77] ise üç parametrelili varyans gama süreçlerini önermişlerdir. Bu süreç bir Brownian sürecin bir gama süreci ile verilen rastgele zamanlarda

gözlemlenmesiyle ortaya çıkmaktadır. Madan va. [77] çalışmalarında gama varyans süreçleri altında Avrupa tipi opsiyonların değerini elde etmişlerdir.

Subramanian[110] ise çalışmasında açığa satış (borç alınan varlığın satılması) kısıtı ve işlem yapma maliyetlerinin varlığı altında Avrupa tipi opsiyonların değerlerini incelemiştir. Çalışmasında Avrupa tipi opsiyonun değerini bir fayda fonksiyonu ile ifade etmiş ve fayda fonksiyonun doğrusal, üstel ve kuvvet fonksiyonu tipinde olması özel durumlarını inceleyerek, opsiyon değerinin sayısal olarak elde edilmesi için bir yöntem önermişlerdir.

Huang va. [51] çalışmalarında opsiyona konu olan varlığın fiyatının bir ARMA sürecine uyması durumunu incelemişlerdir. Çalışmalarında Amerikan tipi opsiyonların değerlerini belirlemek için en küçük kareler Monte Carlo yöntemini kullanmışlardır.

Charalambous ve Martzoukos [26] çalışmalarında yapay sinir ağlarını uygulamışlardır. Çalışmalarında conjugate gradyant algoritmasını doğru araması (line search) ile birleştirerek kullanmışlardır. Tek saklı katman kullanarak oluşturdukları ağda aktivasyon fonksiyonu olarak tansigmoid fonksiyonunu kullanmışlardır.

Bu çalışmada Amerikan tipi opsiyonlarda, opsiyona konu olan varlığın fiyatının sürekli olarak gözlenemediği ve her bir gözlem noktasının önceki gözlemlere bağlı olarak belirlendiği durumlarda opsiyonun uygulanmasına ilişkin bir strateji üzerinde durulacaktır.

2.5. Opsiyon Değerinin Belirlenmesinde Kullanılan Bazı Yöntemler

Parametrik olmayan opsiyon fiyatlama teknikleri arasında yapay sinir ağları, Amilon [3], Anders va.[6] ve Hutchinson va. [52] tarafından incelenmiştir. Keber [62] ise çalışmasında genetik algoritmayı kullanarak opsiyonların nasıl

fiyatlanabileceğini incelemiştir. Ait-Sahalia ve Lo [2] ise çalışmalarında kernel regresyon yöntemlerini kullanmışlardır.

Yapay sinir ağlarına benzer bir yöntem ise Teddy va. [112] tarafından insan beyninin öğrenmesine ilişkin modeller kullanılarak geliştirilmiştir. Çalışmalarda her bir girdiye karşılık uyarılacak olan hesaplama hücreleri, çıktının bir komşuluğu olarak tanımlanmakta ve bu şekilde güncellenen öğrenme fonksiyonları sayesinde yeni problemlere ilişkin değerler elde edilebilmektedir.

Köroğlu [72] Avrupa tipi opsiyonların değerlerinin bir difüzyon denklemine indirgenebileceğini kullanarak, Amerikan tipi opsiyonların değerlerini bir engel problemi olarak tanımlamıştır.

Scott [102] ise opsiyona konu olan varlığın dağılımında varyansın da bir rastgele değişken olması durumunu, yaptıkları Monte Carlo simülasyon çalışmaları ile incelemiştir.

Duan[34] çalışmasında opsiyona konu olan varlığın fiyatına ilişkin sürecin bir GARCH modeline uyması durumunda Avrupa tipi opsiyonların nasıl değerlendirileceğini göstermiştir. Bauwens ve Lubrano[10] ise çalışmalarında yatırımcıların opsiyonun değerine ilişkin yargılarını da ekleyebilecekleri bir Bayesçi yaklaşımla GARCH modeli altında Avrupa tipi opsiyonların değerini incelemişlerdir.

Opsiyonların değerlerinin hesaplanmasında Cox va. [32] opsiyona konu olan varlığın değerine kesikli bir binom süreci tanımlayarak yaklaşmışlar ve bu binom süreci ile opsiyonun değerlendirilmesini incelemişlerdir. Jabbour va. [54] opsiyona konu olan varlığın fiyatına yaklaşımda binom modeli yerine multinomiyal modeli kullanmışlar ve ürettikleri multinomiyal modelin beklenen değer ve varyansını sürecin gerçek beklenen değer ve varyansına eşitleyerek opsiyonun değerini elde etmişlerdir.

Alım satım işlemlerinin bir maliyetinin olduğu piyasalarda Avrupa tipi opsiyonların değerlendirilmesi için Monoyios [81] bir Markov zinciri yaklaşımı önermişlerdir.

Longstaff ve Schwartz [75] ise Amerikan tipi opsiyonların simülasyon ile nasıl değerelebileceğini göstermişlerdir. Önerdikleri en küçük kareler Monte Carlo yöntemi, Amerikan tipi opsiyonların değerlendirilmesinde kullanılan önemli bir simülasyon yöntemi olmaktadır. Bu yöntemde simülasyonla üretilen opsiyona konu olan varlığın fiyatının oluşturduğu örnek yollar yardımıyla gelecek değerler en küçük kareler kullanarak elde edilir ve bu değerlere göre “tamam mı devam mı” kararı verilir. Yaptıkları çalışmada öncelikle çok sayıda gerçekleşmiş üretmişler ve ürettikleri gerçekleşmeler için en son periyottan başlayarak geriye doğru opsiyonun o anki değerini hesaplamışlardır. Opsiyonun değerini ise temel polinomlar kullanarak elde ettikleri bu anlık opsiyon değerlerine uyacak biçimde en küçük kareler yardımıyla seçmişlerdir. Bu yöntem için gerekli simülasyon çalışmalarının etkinliğini arttırmak için Lemieux ve La [73] varyans küçültme yöntemlerini kullanarak incelemişken, Areal va. [7] farklı regresyon algoritmalarının kullanılmasının yanı sıra farkı temel polinomları ile de inceleme yapmıştır. Glasserman ve Yu [46] çalışmalarında Longstaff ve Schwartz’ın önerdiği simülasyon metodunda temel polinomun derecesi ile üretilen gerçekleşmiş sayının etkilerini incelemişlerdir.

Haugh ve Kogan [47] ise çalışmalarında Amerikan tipi opsiyonların değerini bulma probleminin bir dualini elde etmişler ve bu sayede opsiyonun değerini karakterize eden bir önerme sunmuşlardır. Bu karakterizasyonu kullanarak opsiyonun değerine ilişkin bir market fiyatını yaklaşık olarak elde etmişler ve yaptıkları simülasyon çalışmaları ile de opsiyonun değerine ilişkin alt ve üst sınırları bulmuşlardır.

Bu çalışmaların yanında Amerikan tipi opsiyonların değerlerini elde etmek için analitik yöntemler de kullanılmıştır. Barone-Adesi ve Whaley [9]

alışmalarında Amerikan tipi opsiyonların değ erlerinin, aynı parametrelerle bir Avrupa tipi opsiyon ile erken uygulama kazancının toplamı olduğunu kullanarak, Amerikan tipi opsiyonun değ erine iterasyon ile nasıl yaklaşılabileceğini göstermiştir. Broadie ve Detemple [19] Amerikan tipi opsiyonlar için bir alt ve üst sınır olarak yaklaşımlar kullanmışlar ve yaptıkları simülasyon çalışmaları ile de bu yöntemin binom yöntemi kadar iyi sonuçlar verdiğini göstermişlerdir.

Dağılımdan bağımsız olarak opsiyonun değ erine ilişkin sınırlar elde etmek için De Schepper ve Heijnen[100] opsiyona konu olan varlığın bazı momentleri ve modu bilindiğinde Avrupa tipi opsiyonların değ erlerinin hangi aralıkta kalacağını elde etmişlerdir.

3. DİFÜZYON SÜREÇLERİ

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanacağımız stokastik süreçler ve stokastik analiz konularında temel tanım ve özellikler verilecektir. Bu bölümdeki tanımlar ve daha detaylı bilgi için bkz. Karatzas ve Shreve [60], Oksendal [84], Mikosch [80].

3.1. Temel Tanımlar

3.1. Tanım: Bir *stokastik süreç* aynı Ω örnek uzayında tanımlı

$$(X_t, t \in T) \equiv (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega) \quad (3.1)$$

biçimindeki X_t rastgele değişkenlerinin topluluğudur. Bu çalışmada T zaman indisi olarak kullanılıp $\mathbb{R}$ 'nin bir aralığı olarak alınacaktır.

3.2. Tanım: σ -cebirleri dizisi her n için $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ koşulunu sağlıyorsa $\{\mathcal{F}_n\}$ 'ye filtre denir.

Filtreler artan bilgi toplulukları olup, genellikle bir denemeler dizisinde elde edilen bilginin artmasını modellemek için kullanılır.

3.3. Tanım: Boş kümeden farklı bir Ω uzayında tanımlı bir X rastgele değişkeni verilsin. X tarafından üretilen σ -cebiri $\sigma(X)$ ile gösterilir ve Ω 'nın, $\{X \in B\}, B \in \mathcal{F}$ biçimindeki kümelerinin topluluğudur.

Bir $\{X_t\}$ stokastik süreci için $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ alınırsa $\{\mathcal{F}_t\}$ bir filtre olur. Bu filtreye $\{X_t\}$ 'nin *doğal filtresi* denir.

3.4. Tanım: Boş kümeden farklı bir Ω örnek uzayında tanımlı bir X rastgele değişkeni verilsin. $\mathcal{G}$ ile Ω üzerinde tanımlı bir σ -cebiri gösterelim. Eğer $\sigma(X)$ 'deki her küme aynı zamanda $\mathcal{G}$ 'de de bulunuyorsa; yani, $\sigma(X) \subseteq \mathcal{G}$ ise, X rastgele değişkeni $\mathcal{G}$ -ölçülebilirdir, denir.

Bir X rastgele değişkeninin $\mathcal{G}$ ölçülebilir olması, X 'in değerini belirlemek için $\mathcal{G}$ 'deki bilginin yeterli ve gerekli olduğu anlamını taşır. Eğer X rastgele değişkeni $\mathcal{G}$ ölçülebilir ise, o zaman Borel ölçülebilir herhangi bir f fonksiyonu için $f(X)$ de $\mathcal{G}$ ölçülebilirdir; yani, $\mathcal{G}$ 'deki bilgi X 'i belirlemek için yeterli ise $f(X)$ 'i belirlemek için de yeterlidir.

3.5. Tanım: Boş kümeden farklı bir Ω örnek uzayı $\{\mathcal{F}_t\}$ filtresi ile donatılmış olsun. Eğer bu uzayda tanımlı bir $\{Y_t\}$ stokastik süreci her $t \geq 0$ için $\sigma(Y_t) \subseteq \mathcal{F}_t$ koşulunu sağlıyorsa, $\{Y_t\}$ süreci $\{\mathcal{F}_t\}$ filtresine uyarlanmıştır, denir.

Bir $\{Y_t\}$ sürecinin uyarlanmış olması demek, Y_t 'nin $\mathcal{F}_t$ 'den daha fazla bilgi içermediği anlamına gelmektedir.

Örnek: (Uyarlanmış süreç örnekleri) $\{B_t\}$ bir Brownian süreç ve $\{\mathcal{F}_t\}$ bu sürecin doğal filtresi olsun. O zaman, f iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere

$$X_t = f(t, B_t) \quad , t \geq 0 \quad (3.2)$$

süreci $\{\mathcal{F}_t\}$ 'ye uyarlanmıştır. Bu tür süreçlere aşağıdaki gibi örnekler verilebilir:

$$X_t^{(1)} = B_t, \quad X_t^{(2)} = B_t^2 - t, \quad X_t^{(3)} = \max_{0 \leq s \leq t} B_s, \quad X_t^{(4)} = \min_{0 \leq s \leq t} B_s^2 \quad (3.3)$$

3.6. Tanım: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı olsun. $\mathcal{F}$ 'nin bir alt σ -cebiri olarak $\mathcal{G}$ verilsin ve X bir rastgele değişken olsun. $\mathcal{G}$ verilmişken X 'in genelleştirilmiş koşullu beklenen değeri $E[X|\mathcal{G}]$ ile gösterilir ve aşağıdaki iki özelliği sağlayan bir rastgele değişkendir.

1. $E[X|\mathcal{G}]$, $\mathcal{G}$ ölçülebilirdir.

2. Her $A \in \mathcal{G}$ için $\int_A E[X|\mathcal{G}](\omega) dP(\omega) = \int_A X(\omega) dP(\omega)$

sağlanır.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uzayında tanımlı bir X rastgele değişkeni ve $\mathcal{F}$ üzerinde bir $\mathcal{G}, \sigma$ -cebiri verilsin. Eğer X rastgele değişkeni $\mathcal{G}$ ölçülebilir ise, $\mathcal{G}$ verildiğinde X 'in değeri kesin olarak belirlenebilir. Eğer X , $\mathcal{G}$ 'den bağımsızsa, $\mathcal{G}$ 'nin verilmesi X 'in değerini belirlemede herhangi bir fayda sağlamaz. Genelleştirilmiş koşullu beklenen değer ise bu kavramların arasında bir kavram ifade eder. Bu durumda $\mathcal{G}$ bilgisi X 'i tam olarak belirlememekle birlikte, X 'in değerini tahmin etmekte kullanılır.

3.7. Tanım: (Martingale) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı, $\{X_t\}$ bu olasılık uzayında tanımlı bir stokastik süreç ve $\{\mathcal{F}_t\}$ bir filtre olsun. Ayrıca her $t \geq 0$ için $E[|X_t|] < \infty$ sağlansın ve $\{X_t\}$ süreci, $\{\mathcal{F}_t\}$ filtresine uyarlanmış olsun. O zaman eğer

1. $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$, $0 \leq s < t$ ise, $\{X_t\}$ süreci bir martingaledir.
2. $E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$, $0 \leq s < t$ ise, $\{X_t\}$ süreci bir altmartingaledir.
3. $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$, $0 \leq s < t$ ise, $\{X_t\}$ süreci bir süpermartingaledir.

Bir sürecin martingale olması, onun artış veya azalış eğiliminde olmadığı anlamına gelir ve bu durumda $\mathcal{F}_s$ verilmişken X_t 'nin en iyi tahmini X_s 'dir. Altmartingale olması artma eğiliminde olduğu anlamı taşıırken, süpermartingale olması azalma eğiliminde olduğu anlamına gelir.

Martingaleler için bir örnek, hilesiz bir oyundan elde edilecek kazancın modellenmesiyle verilebilir. Bu amaçla her t anında X_t değerine sahip bir oyunu inceleyelim. Bu durumda $X_t - X_s$, $(s, t]$ zaman aralığındaki net kazancı gösterir. Bu sürecin doğal filtresini $\{\mathcal{F}_t\}$ ile gösterelim. Bu durumda $\mathcal{F}_s$ bilgisi verilmişken, oyundaki beklenen net kazanç

$$E[X_t - X_s | \mathcal{F}_s] = E[X_t | \mathcal{F}_s] - X_s \quad (3.4)$$

olur. Eğer X_t süreci bir martingale ise, yukarıdaki eşitlik sıfır olur ki adil bir oyundan beklenen de budur.

3.8. Tanım: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\{\mathcal{F}_t\}$ bir filtre olsun. $\{X_t\}$ stokastik süreci $\{\mathcal{F}_t\}$ filtresine uyarlanmış olsun. Eğer her $0 \leq s \leq t$ ve Borel ölçülebilir her f fonksiyonu için

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = g(X_s) \quad (3.5)$$

olacak biçimde Borel ölçülebilir bir g fonksiyonu bulunabiliyorsa, X_t stokastik sürecine Markov süreci denir.

3.9. Tanım: Aşağıdaki koşulları sağlayan $\{B_t\}$ stokastik sürecine Brownian hareketi denir:

1. $B_0 = 0$
2. $\{B_t\}$ durağan ve bağımsız artışıdır; yani, her $h > 0$ ve her $t > s \geq 0$ için $B_t - B_s \sim B_{t+h} - B_{s+h}$ sağlanır.
3. $t_0 < t_1 < \dots$ için $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots$ bağımsız rastgele değişkendir.
4. $B_t \sim N(0, t)$
5. Sürekli örnek yoluna sahiptir; yani, $B_t(\omega)$, t 'nin sürekli fonksiyonudur.

3.2. Stokastik Analiz

Bu bölümde sabit bir pozitif T sayısı, $\{\mathcal{F}_t\}$ filtresi ile bir B_t Brownian süreci ve bu filtreye uyarlanmış Δ_t süreci için

$$\int_0^T \Delta_t dB_t \quad (3.6)$$

integralinin tanımlamada İto integralinin kullanışını gözden geçireceğiz. (Bu bölümde geçen anlatım ve daha detaylı açıklamalar için bkz. [60,80])

Stokastik integraller de Riemann anlamındaki integrallere benzer olarak basit süreçlerin limit durumu olarak tanımlanır. Bu amaçla $[0, T]$ 'nin bir parçalanışı olarak $\Pi = \{t_i\}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ 'yi alalım. Δ_t sürecinin her bir $[t_j, t_{j+1})$ aralığında sabit olduğunu varsayalım. Böyle süreçlere basit süreç denir. Bu durumda İto integrali $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ için

$$\begin{aligned} I_t &= \int_0^t \Delta_u dW_u \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_{t_j} [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}] + \Delta_{t_k} (W_t - W_{t_k}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

ile tanımlanır. Yukarıdaki eşitlikten de görüldüğü üzere basit süreçler için integral tanımında integrantın her bir aralığın başında aldığı değer ile integratörün değişimi ağırlıklandırılmaktadır. Farklı ağırlıklandırma yöntemleri (Stratonovich [109]) literatürde incelenmiş olmakla birlikte aralık başındaki değere göre ağırlıklandırmak, konumuz olan finansal süreçle de uyumludur. Çünkü, bir borsa işleminde ilgilenilen aralığın başında pozisyon alınır ve aralıktaki değişimlere göre pozisyon kapatılır.

Genel olarak $\{\mathcal{F}_t\}$ filtresine uyarlanmış bir Δ_t süreci için

$$E \left[\int_0^T \Delta_t^2 dt \right] < \infty \quad (3.8)$$

sağlansın. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T |\Delta_{n,t} - \Delta_t|^2 dt \right] = 0 \quad (3.9)$$

olacak biçimde $\{\Delta_{n,t}\}_t$ stokastik süreçleri bulunabilir ve İto integrali bu süreç yardımıyla

$$\int_0^t \Delta_u dW_u = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \Delta_{n,u} dW_u \quad (3.10)$$

ile tanımlanır.

İto integralinin önemli özellikleri aşağıdaki teoremdedir verilmiştir:

3.10. Teorem: (bkz. [80]) T pozitif bir sabit ve $0 \leq t \leq T$ için Δ_t Eş.3.8'i sağlasın. İto stokastik integrali $I_t = \int_0^t \Delta_u dW_u$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. I_t , t 'ye göre süreklidir
2. Her t için I_t stokastik integrali $\mathcal{F}_t$ ölçülebilirdir.
3. I_t stokastik integrali bir martingaledir.
4. Her $t > 0$ için $E[I_t^2] = E \left[\int_0^t \Delta_u^2 du \right]$ sağlanır.

Teoremdedir geçen dördüncü özellik İto izometri özelliği olarak bilinir.

3.11. Tanım: (İto süreci) (bkz. [80]) $\{W_t\}$ bir Brownian süreç ve $\{\mathcal{F}_t\}$ bu sürecin filtresi olsun. $\{\Delta_u\}$ ve $\{\theta_u\}$ bu filtreye uyarlanmış süreçler olmak üzere

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Delta_u dW_u + \int_0^t \theta_u du \quad (3.11)$$

ile tanımlı $\{X_t\}$ stokastik sürecine İto süreci denir.

İto süreçleri diferansiyel gösterim ile

$$dX_t = \Delta_t dW_t + \theta_t dt \quad (3.12)$$

biçiminde de gösterilebilir.

3.12. Teorem: (İto lemmasının birinci genelleştirmesi) (bkz. [80]) $\{X_t\}$ stokastik süreci bir İto süreci ve $f(t, x)$ ikinci dereceden kısmi türevleri tanımlı ve sürekli olan bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(s, X_s) = & \int_s^t \left[f_1(y, X_y) + A_y^{(1)} f_2(y, X_y) + \frac{1}{2} (A_y^{(2)})^2 f_{22}(y, X_y) \right] dy \\ & + \int_s^t A_y^{(2)} f_2(y, X_y) dB_y \end{aligned} \quad (3.13)$$

sağlanır; burada $A_y^{(1)}$ ve $A_y^{(2)}$ ile sürecin sırasıyla drift ve difüzyon katsayıları gösterilmektedir.

3.13. Teorem: (İto lemmasının ikinci genelleştirmesi) (bkz. [80]) $\{X_t^{(i)}\}, i = 1, 2$ aşağıdaki şekilde verilen iki İto süreci olsun.

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t A_s^{(1,i)} ds + \int_0^t A_s^{(2,i)} dB_s, \quad i = 1, 2 \quad (3.14)$$

Ayrıca $f(t, x_1, x_2)$ ikinci dereceden kısmi türevleri var ve sürekli olan bir fonksiyon olsun. O zaman $s < t$ için

$$\begin{aligned}
f(t, X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) - f(s, X_s^{(1)}, X_s^{(2)}) &= \int_s^t f_1(y, X_y^{(1)}, X_y^{(2)}) dy \\
&+ \sum_{i=2}^3 \int_s^t f_i(y, X_y^{(1)}, X_y^{(2)}) dX_y^{(i-1)} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^3 \int_s^t f_{ij}(y, X_y^{(1)}, X_y^{(2)}) A_y^{(2,i-1)} A_y^{(2,j-1)} dy
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

sağlanır; burada f_i ve f_{ij} sırasıyla f 'nin i . ve j . bileşenine göre kısmi türevlerini gösterir.

İto lemmasının genelleştirmesini özel olarak $f(t, x_1, x_2) = x_1 x_2$ olarak alırsak, aşağıdaki kısmi integral teoremini elde ederiz.

3.14. Teorem: (Kısmi integral) (bkz. [80]) $\{X_t^{(i)}\}, i = 1, 2$ bir önceki teoremdaki gibi İto süreçleri olsun. O zaman

$$d(X_t^{(1)} X_t^{(2)}) = X_t^{(2)} dX_t^{(1)} + X_t^{(1)} dX_t^{(2)} + A_t^{(2,1)} A_t^{(2,2)} dt \tag{3.16}$$

sağlanır.

3.3. Stokastik Süreç Örnekleri

Bu bölümde, opsiyon değerlendirmede sıkça kullanılan geometrik Brownian hareketi ile Ornstein-Uhlenbeck süreçlerinin bilinen bazı özellikleri sunularak çalışmada Ornstein-Uhlenbeck sürecinin kullanılma nedeni açıklanmaya çalışılacaktır.

3.3.1. Brownian hareket

Brownian hareket, su içine daldırılan polenlerin hareketlerinin modellenmesinden ortaya çıkmaktadır. İlk defa 1800'lerde Robert Brown

tarafından incelenen bu hareket için tatmin edici bir açıklama 1905 yılında Einstein tarafından verilmiştir (Einstein [39], ayrıca bkz. Gardiner (kesim 1.2) [42]).

Brownian hareket, borsa fiyatlarının incelenmesinde ilk defa Osborne tarafından kullanılmıştır (Osborne [86], Chriss [28]). Osborne bu çalışmasında; Brownian hareketteki küçük parçaların büyük parçalara çarparak onları rastgele biçimde hareketlendirmesinden yola çıkarak, piyasadaki her bir alım/satım işlemini küçük parçalara benzetmiş ve bu işlemlerin fiyatlarda değişiklik yapacağını öne sürerek büyük parçalar olarak varlıkların fiyatlarını almıştır. Bu sürecin model varsayımları ve matematiksel formülasyonu için bkz. EK - 6.

3.3.2. Geometrik Brownian süreç

Geometrik Brownian sürece dayalı modeller ise piyasa fiyatlarındaki *değişimin* bir Brownian harekete uyduğunu varsayar. Bu süreçle modellemede fiyatlardaki beklenen yüzdelik değişimin sabit olduğu varsayılır. Bu nedenle değişimlerin Brownian harekete uyduğunu, dolayısıyla da varlıkların fiyatının geometrik Brownian sürece uyduğunu kabul ederler (bkz. Chriss [28]).

3.15. Tanım: (Geometrik Brownian hareket) Sabit bir $c \in \mathbb{R}$ ve $\sigma > 0$ için

$$X_t = X_0 + c \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s \quad (3.17)$$

doğrusal İto stokastik diferansiyel denklemini bir $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ ile çözen $\{X_t\}$ stokastik sürecine geometrik Brownian hareket denir.

Tanım 3.15’de geçen Geometrik Brownian sürecin çözümü

$$X_t = x_0 e^{(c-0.5\sigma^2)t + \sigma dB_t} \quad (3.18)$$

ile verilir. Bunu görmek için $X_t = f(t, B_t)$ olarak İto lemmasını kullanmak yeterli olacaktır:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left[f_1(s, B_s) + \frac{1}{2} f_{22}(s, B_s) \right] ds + \int_0^t f_2(s, B_s) dB_s \quad (3.19)$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} cf(t, x) &= f_1(t, x) + \frac{1}{2} f_{22}(t, x) \\ \sigma f(t, x) &= f_2(t, x) \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde ederiz. İkinci eşitlikten

$$\sigma^2 f(t, x) = f_{22}(t, x) \quad (3.21)$$

olduğu çıkar ve böylece

$$(c - 0.5\sigma^2)f(t, x) = f_1(t, x) \quad (3.22)$$

elde ederiz. $f(t, x) = g(t)h(x)$ biçiminde almayı denersek

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0)e^{(c-0.5\sigma^2)t} \\ h(x) &= h(0)e^{\sigma x} \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde ederiz. $x_0 = f(0, B_0) = f(0, 0) = g(0)h(0)$ olduğundan

$$X_t = X_0 e^{(c-0.5\sigma^2)t + \sigma B_t} \quad (3.24)$$

elde ederiz.

Şimdi geometrik Brownian sürecin ortalama, varyans ve kovaryans fonksiyonlarını elde edelim:

$Z \sim N(0,1)$ iken, her $t \in \mathbb{R}$ için $E[e^{tZ}] = \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\}$ olduğunu hatırlarsak

$$\begin{aligned}
 E[X_t] &= E[x_0 e^{(c-0.5\sigma^2)t + \sigma B_t}] \\
 &= x_0 e^{(c-0.5\sigma^2)t} E[e^{\sigma B_t}] \\
 &= x_0 e^{(c-0.5\sigma^2)t} E[e^{\sigma \sqrt{t} B_1}] \\
 &= x_0 e^{ct}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

olarak buluruz. Burada üçüncü eşitlikte Brownian hareketin kendine benzerlik özelliği kullanılmıştır.

$s \leq t$ olmak üzere X_s ile X_t arasındaki kovaryans

$$\begin{aligned}
 Cov(X_s, X_t) &= E[X_t X_s] - E[X_t]E[X_s] \\
 &= x_0^2 e^{(c-0.5\sigma^2)(t+s)} E[e^{\sigma(B_t+B_s)}] - x_0^2 e^{c(t+s)} \\
 &= x_0^2 e^{(c-0.5\sigma^2)(t+s)} E[e^{\sigma(B_t-B_s)+2\sigma B_s}] - x_0^2 e^{c(t+s)} \\
 &= x_0^2 e^{(c-0.5\sigma^2)(t+s)} E[e^{\sigma B_{t-s}}] E[e^{2\sigma B_s}] - x_0^2 e^{c(t+s)} \\
 &= x_0^2 e^{c(t+s)} (e^{\sigma^2 s} - 1)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

olarak elde ederiz. Buradan da $Var(X_t) = x_0^2 e^{2ct} (e^{\sigma^2 t} - 1)$ olarak buluruz.

Geometrik Brownian hareketin ifade ettiği süreç hakkında sezgimizi arttırmak için Tanım 3.15'deki eşitliği stokastik diferansiyel denklem olarak yazalım (Mikosch [80]):

$$dX_t = cX_t dt + \sigma X_t dB_t \tag{3.27}$$

Bu eşitliği $[t, t + dt]$ zaman aralığı için sezgisel olarak fark denklemi haline koymak istersek aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$X_{t+dt} - X_t = cX_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (3.28)$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafını X_t 'ye bölersek $[t, t + dt]$ aralığında varlığın(asset) görelî kazancını aşağıdaki gibi elde etmiş oluruz:

$$\frac{X_{t+dt} - X_t}{X_t} = c dt + \sigma dB_t \quad (3.29)$$

Bu eşitlik ise bize opsiyona konu olan varlığın görelî kazancının zamanla orantılı olarak sabit bir c miktar arttığını ve bu artışın σdB_t kadar bir stokastik gürültüye maruz kaldığını göstermektedir.

3.3.3. Ornstein-Uhlenbeck süreci

Fiziksel olarak hız, konumun zamana göre türevine denk geldiğinden; Brownian hareketin Kısım 3.3.1'de verilen şekilde Brownian süreç ile açıklanması durumunda, Brownian parçacıkların hızı sonsuz olacaktır. Modellemede karşılaşılan bu sorun nedeniyle bu parçacıkların hareketleri ayrıca Ornstein-Uhlenbeck modeli olarak bilinen yeni bir model ile de ifade edilmektedir. Bu sürecin model varsayımları ve matematiksel formülasyonu için bkz. EK - 7.

3.16. Tanım: (Ornstein-Uhlenbeck süreci) Aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemi bir $X_0 = x_0$ başlangıç değeriyle çözen $\{X_t\}$ stokastik sürecine Ornstein-Uhlenbeck süreci denir.

$$dX_t = -\lambda(X_t - v)dt + \sigma dB_t \quad (3.30)$$

Ornstein-Uhlenbeck sürecinin tanımından, sürecin aynı zamanda bir Ito süreci oluşturduğu görülebilir. Özel olarak $v = 0$ olsun. Eş. 3.30 eşdeğer olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$X_t = X_0 - \lambda \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t dB_s \quad (3.31)$$

Bu eşitliği çözmek için $Y_t = e^{\lambda t} X_t$ dönüşümünü göz önüne alalım. $f(t, x) = e^{\lambda t} x$ olarak alırsak

$$f_1(t, x) = \lambda f(t, x), \quad f_2(t, x) = e^{\lambda t}, \quad f_{22}(t, x) = 0 \quad (3.32)$$

olduğundan İto lemmasını kullanarak

$$\begin{aligned} Y_t - Y_0 &= \int_0^t \left[f_1(s, X_s) - \lambda X_s f_2(s, X_s) + \frac{1}{2} \sigma^2 f_{22}(s, X_s) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t [\sigma f_2(s, X_s)] dB_s \\ &= \int_0^t [\lambda Y_s - \lambda Y_s + 0] ds + \int_0^t \sigma e^{\lambda s} dB_s \\ &= \int_0^t \sigma e^{\lambda s} dB_s \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde ederiz. O halde Eş. 3.31'ün çözümü

$$X_t = e^{-\lambda t} X_0 + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dB_s \quad (3.34)$$

olarak elde edilir.

Bu sürecin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E \left[e^{-\lambda t} X_0 + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dB_s \right] \\ &= e^{-\lambda t} X_0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

ve varyansı

$$\begin{aligned}
Var(X_t) &= Var\left(e^{-\lambda t} X_0 + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dB_s\right) \\
&= \sigma^2 e^{-2\lambda t} \int_0^t e^{2\lambda s} ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2\lambda}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

olarak elde ederiz. Ornstein-Uhlenbeck süreci ile geometrik Brownian sürecin parametrelerini karşılaştırdığımızda ilk göze çarpan özellik Ornstein-Uhlenbeck sürecinin varyansı sabit iken, geometrik Brownian hareketin varyansı, zamanın artan bir fonksiyonu olarak karşımıza çıkmasıdır. Bir diğer fark ise süreçlerin beklenen değerlerinde ortaya çıkmaktadır. Ornstein-Uhlenbeck sürecinin beklenen değeri zamanla sifıra yaklaşırken, geometrik Brownian hareketin beklenen değeri sonsuza gitmektedir. Bu ise Ornstein-Uhlenbeck sürecinin zamanla durağanlaştığı anlamı taşımaktadır.

İzleyen Teorem, Ito difüzyon süreçlerinin güçlü Markov özelliğine sahip olduğunu belirtmektedir. Ornstein – Uhlenbeck süreci de bir Ito difüzyon süreci olduğundan, bu özellik çeşitli sonuçlar elde etmede faydalı olacaktır.

3.17. Teorem: (bkz. [84]) $\{X_t\}$ bir Ito difüzyon süreci ve $f, \mathbb{R}^n$ 'de Borel ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_{s \wedge t}; s \geq 0\}$ ailesi ile bu aileye göre tanımlanan ve 1 olasılıkla sonlu olan τ duraklama zamanı verilsin. O zaman, her $h \geq 0$ için

$$E_x[f(X_{\tau+h})|\mathcal{F}_\tau] = E_{X_\tau}[f(X_h)] \tag{3.37}$$

sağlanır.

Bu teorem kullanılmadan da Ornstein – Uhlenbeck sürecinin Markov özelliğini göstermek kolaydır. Bunu görmek için

$$X_t = e^{-\lambda(t-s)}X_s + \sigma e^{-\lambda(t-s)} \int_s^t e^{\lambda u} dB_u, \quad s < t \quad (3.38)$$

biçiminde yazılabileceğini gösterelim.

$$\begin{aligned} X_t &= e^{-\theta(t-s)} \left(e^{-\theta s} x_0 + \varepsilon \int_0^s e^{-\theta(s-u)} dB_u \right) + \varepsilon \int_s^t e^{-\theta(t-u)} dB_u \\ &= e^{-\theta t} x_0 + \varepsilon \int_0^s e^{-\theta(t-u)} dB_u + \varepsilon \int_s^t e^{-\theta(t-u)} dB_u \\ &= e^{-\theta t} x_0 + \varepsilon \int_0^t e^{-\theta(t-u)} dB_u \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ornstein-Uhlenbeck süreci için geçiş olasılıkları fonksiyonunu bu eşitlikler yardımıyla elde etmeye çalışalım. Ornstein-Uhlenbeck sürecinin Markov özelliğini de hatırlayarak

$$X_{t+\Delta t} = e^{-\lambda \Delta t} X_t + \sigma e^{-\lambda \Delta t} \int_t^{t+\Delta t} e^{\lambda u} dB_u \quad (3.40)$$

olarak yazabiliriz. O halde

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E[X_{t+\Delta t} - X_t | X_t = x]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E \left[(e^{-\lambda \Delta t} - 1)x + \sigma e^{-\lambda \Delta t} \int_t^{t+\Delta t} e^{\lambda u} dB_u \right]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{(e^{-\lambda \Delta t} - 1)x}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} -\lambda x e^{-\lambda \Delta t} = -\lambda x \end{aligned} \quad (3.41)$$

olur. Sürecin anlık varyansı ise

$$\begin{aligned}
\sigma^2(x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E[(X_{t+\Delta t} - X_t)^2 | X_t = x]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E \left[\left((e^{-\lambda \Delta t} - 1)x + \sigma e^{-\lambda \Delta t} \int_t^{t+\Delta t} e^{\lambda u} dB_u \right)^2 \right]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E \left[(e^{-\lambda \Delta t} - 1)^2 x^2 \right]}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\sigma^2 e^{-2\lambda \Delta t} E \left[\left(\int_t^{t+\Delta t} e^{\lambda u} dB_u \right)^2 \right]}{\Delta t} \\
&\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{2(e^{-\lambda \Delta t} - 1)x\sigma e^{-\lambda \Delta t} E \left[\int_t^{t+\Delta t} e^{\lambda u} dB_u \right]}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Deterministik fonksiyonların Ito integralini kullanırsak $\int_t^{t+\Delta t} e^{\lambda u} dB_u \sim N(0, \int_t^{t+\Delta t} e^{2\lambda u} du)$ olduğundan, son eşitlikteki üçüncü limit sıfıra eşittir. Yine bu bilgiyi kullanarak $2\lambda(e^{2\lambda(t+\Delta t)} - e^{2\lambda t})^{-1} \left(\int_t^{t+\Delta t} e^{\lambda u} dB_u \right)^2 \sim \chi_1^2$ olduğunu göz önüne alırsak, ikinci limiti

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\sigma^2 e^{-2\lambda \Delta t} E \left[\left(\int_t^{t+\Delta t} e^{\lambda u} dB_u \right)^2 \right]}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\sigma^2 e^{-2\lambda \Delta t} \frac{1}{2\lambda} (e^{2\lambda(t+\Delta t)} - e^{2\lambda t})}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\sigma^2 e^{2\lambda t} - e^{2\lambda(t-\Delta t)}}{2\lambda \Delta t} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\lambda} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} 2\lambda e^{2\lambda(t-\Delta t)} = \sigma^2 e^{2\lambda t}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

olarak buluruz. İlk limit ise

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E \left[(e^{-\lambda \Delta t} - 1)^2 x^2 \right]}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{(e^{-\lambda \Delta t} - 1)^2 x^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} 2(e^{-\lambda \Delta t} - 1)(-\lambda)e^{-\lambda \Delta t} x^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.44}$$

olur. O halde

$$\mu(x) = -\lambda x, \quad \sigma^2(x) = \sigma^2 e^{2\lambda t} \quad (3.45)$$

olur. Sürecin anlık ortalama ve varyansını Chapman - Kolmogorovileriye doğru denkleminde yerine koyarsak:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^2 e^{2\lambda t} p(t, x_0, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial(-\lambda x) p(t, x_0, x)}{\partial x} = \frac{\partial p(t, x_0, x)}{\partial t} \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \sigma^2 e^{2\lambda t} \frac{\partial^2 p(t, x_0, x)}{\partial x^2} - \left[-\lambda p(t, x_0, x) - \lambda x \frac{\partial p(t, x_0, x)}{\partial x} \right] = \frac{\partial p(t, x_0, x)}{\partial t} \\ \Rightarrow & \lambda p(t, x_0, x) + \lambda x \frac{\partial p(t, x_0, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{2\lambda t} \frac{\partial^2 p(t, x_0, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial p(t, x_0, x)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.46)$$

olur.

3.18. Teorem: Ornstein-Uhlenbeck süreci

$$dX_t = -\theta X_t dt + \varepsilon dB_t \quad (3.47)$$

ile verilsin. $[0, T]$ aralığının bir parçalanışı $\Pi = \{t_i\}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ olsun. Bu noktalardaki gözlem değerleri X_{t_i} ile gösterelim. O zaman $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$\hat{\theta}_{n,\varepsilon} := - \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2}, \quad \Delta t_{i-1} = t_i - t_{i-1} \quad (3.48)$$

en küçük kareler tahmin edicisi θ parametresinin tutarlı bir tahmin edicisidir.

İspat: bkz. EK - 3.

Ornstein-Uhlenbeck süreçlerinin en çok olabilirlik tahmin edicisi Valdivieso va.[116]'de incelenmiş ve en küçük kareler tahmin edicisiyle ilgili farklı bir sonuç Hu ve Long [50] tarafından incelenmiştir.

3.19. Tanım: $\{X_t\}$ stokastik süreci

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E[X_{t+\Delta t} - X_t | X_t = x]}{\Delta t} \\
\sigma^2(x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E[(X_{t+\Delta t} - X_t)^2 | X_t = x]}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

olmak üzere

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \tag{3.50}$$

biçiminde ifade edilebilsin. O zaman $p(t, x_0, x)$, x_0 'dan başlayan sürecin t süre sonra x 'e geçiş olasılığı fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^2(x) p(t, x_0, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \mu(x) p(t, x_0, x)}{\partial x} &= \frac{\partial p(t, x_0, x)}{\partial t} \\
\frac{1}{2} \sigma^2(x_0) \frac{\partial^2 p(t, x_0, x)}{\partial x_0^2} + \mu(x_0) \frac{\partial p(t, x_0, x)}{\partial x_0} &= \frac{\partial p(t, x_0, x)}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Bu eşitliklerden ilki Chapman - Kolmogorov ileriye eşitliği, ikincisi ise geriye eşitliği olarak bilinir.

4. OPSİYON İZLEME STRATEJİSİ

Bu bölümde tez çalışması kapsamında elde edilen esas sonuçlar sunulacaktır. Bu amaçla öncelikle çalışmada göz önünde bulundurulan piyasaya ilişkin varsayımlar sunulacak, ardından opsiyonu değerlendirmek için kullanılacak model ele alınacaktır.

4.1. Model Varsayımları

Çalışmada dikkate alınacak piyasaya ilişkin varsayımlar aşağıdadır:

1. Yatırım ve borç alma amaçlı faiz oranları bilinmekte ve incelenen süre boyunca sabit kalmaktadır.
2. Opsiyona konu olan varlığın değeri sabit parametrelili bir Ornstein – Uhlenbeck süreci oluşturmaktadır ve sürecin parametreleri yatırımcılar tarafından bilinmektedir.
3. Yatırım araçları arasında geçiş ücretsiz olarak yapılabilmektedir.
4. Menkul değerlere bağlı kâr payı dağıtımı yapılmamaktadır.
5. Bütün yatırım araçları istenildiği kadar bölünebilir.
6. Satım ve alım miktarı üzerinde herhangi bir sayı kısıtlaması yoktur.
7. Piyasada arbitraj yoktur.
8. Opsiyona konu olan varlığa ilişkin gözlem yapma maliyeti gözlemler arası geçen sürenin azalan bir fonksiyonudur.

4.2. Gözlem Yapma Maliyeti Altında Opsiyon Uygulama Stratejisi

ξ geçerlilik süresine sahip bir Amerikan tipi opsiyonu göz önüne alalım. Opsiyona konu olan varlığın fiyatı

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dB_t, \quad \mu, \sigma > 0, X_0 = x_0 \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

ile verilen bir $\{X_t\}$ Ornstein – Uhlenbeck sürecine uysun. Bu Amerikan tipi opsiyonun geçerliliğinin bittiği zamandaki; yani ξ anındaki, beklenen kârını S_A ile gösterelim; yani S bu opsiyonun değeri ve r birleşik faiz oranı olmak üzere $S_A = e^{r\xi} S$ olsun. Ayrıca opsiyonun anlaşıma fiyatı K olsun.

Opsiyona konu olan varlığın fiyatına ilişkin gözlemleri sürekli olarak yapma imkânına sahip olmadığımızı ve her bir gözlem maliyetinin bir önceki gözlem zamanından itibaren geçen sürenin bir fonksiyonu olduğunu kabul etmiştik. Bu maliyet fonksiyonunu f ile gösterirsek; t_0 anında gözlem yapıldıktan sonraki ilk gözlemi $t_1(> t_0)$ anında yapmanın maliyeti $f(t_1 - t_0)$ olur. f 'nin azalan bir fonksiyon seçilmesi gözlemlerin sıklaştırılması karşısında iyi bir cezalandırma olacağından, özel olarak $f(x) = e^{-ax}$, $a > 0$ olarak seçelim.

Gözlem maliyeti nedeniyle gözlemleri sürekli olarak yapamadığımızdan dolayı bu opsiyonun geçerlilik süresi bittiğinde elde etmeyi umduğumuz kâr S_A 'nın altında olacaktır. Kesikli gözlem yapmak için opsiyondan feda edebileceğimiz kâr miktarına $\varepsilon > 0$ diyelim. Piyasayı sürekli olarak takip edemediğimizden ve her bir gözlem için bir miktar bedel ödememiz gerektiğinden gözlem zamanlarını belirlemek için bir strateji oluşturmalıyız. Bu türden bir stratejiyi, uyguladığımız zaman opsiyonun bitimindeki beklenen kârımızın $S_A - \varepsilon$ kadar olmasını sağlayacak biçimde seçmek uygun olacaktır. Her bir gözlem zamanlarının aşağıdaki şekilde belirlendiği bir stratejiyi ele alalım:

1. Adım: $i = 0$ ve $t_0 = 0$ al ve 2. Adım'a geç.

2. Adım: $i \leftarrow i + 1$ al ve $t_i = E[\inf\{t > 0: X_t \geq g_i(t)\} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]$ olarak belirle ve 3. Adım'a geç.

3. Adım: Eğer $t_i \leq \xi$ ve $X_{t_i}(\omega) \geq g_i(t_i)$ sağlanırsa opsiyonu uygulamaya koy, $X_{t_i}(\omega) < g_i(t_i)$ ise 2. Adım'ı tekrarla. Eğer $t_i > \xi$ ve $X_\xi(\omega) \geq g_i(t_i)$ ise opsiyonu ξ zamanında uygulamaya koy, aksi halde opsiyonu uygulama ve dur.

Burada sınır değerleri

$$g_i(t) = e^{-r(\xi-t)}(S_A - \varepsilon) + K + \sum_{j=1}^{i-1} e^{r(t-t_j)} f(t_j - t_{j-1}) + f(t - t_{i-1}) \quad (4.2)$$

ile belirlenmektedir. Bir sonraki kısımda sınır değerlerinin elde edilişi açıklanmaktadır.

4.3. Sınır Değerlerinin Belirlenmesi

$t_0 = 0$ anında olduğumuzu kabul edelim ve ilk gözlemimizi ne zaman yapmamız gerektiğini elde etmeye çalışalım. $0 < t_1 < \xi$ zamanı için eğer bir gözlem yaparak opsiyonu uygulamaya koyarsak, opsiyona konu olan varlığın fiyatından, anlaşma fiyatını ve gözlem yapma maliyetini düştükten sonraki kısım kadar; yani $X_{t_1} - K - f(t_1 - t_0)$ miktar gelir elde ederiz. Bu geliri, r faiz oranı üzerinden değerlendirmeye koyarsak opsiyonun geçerlilik zamanına kadar $e^{r(\xi-t_1)}(X_{t_1} - K - f(t_1 - t_0))$ miktar elde etmiş oluruz. Gözlem maliyeti olmadığı durumdaki Amerikan opsiyonun getirisi S_A ve sürekli gözlem yapmaktan sakınmak için bu getiriden feda edebileceğimiz kısım ε olduğundan, ilk gözlemimizi

$$\begin{aligned}
e^{r(\xi-t_1)} (X_{t_1} - K - f(t_1 - t_0)) &\geq S_A - \varepsilon \\
\Rightarrow X_{t_1} &\geq \underbrace{e^{-r(\xi-t_1)} (S_A - \varepsilon) + K + f(t_1 - t_0)}_{=g_1(t_1)} \\
\Rightarrow t_1 &\in \{t > t_0 | X_t \geq g_1(t)\}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

zamanlarında yapabiliriz. Opsiyonu olabildiğince erken uygulamaya koyarak kalan zamanı faiz geliri elde etmede kullanabileceğimizden

$$t_1 = E[\inf\{t > t_0 : X_t \geq g_1(t)\} | \mathcal{F}_0] \tag{4.4}$$

olarak almak iyi bir tercih olacaktır. Burada eğer X_t hiçbir zaman $g_1(t)$ 'nin üzerine çıkmıyorsa veya $t_1 > \xi$ oluyorsa, $t_1 = \xi$ alıyoruz.

İlk gözlem zamanımızı yukarıdaki şekilde belirlediğimizi ve $t_1 < \xi$ sağlarken $X_{t_1} < g_1(t_1)$ kaldığını kabul edelim. Bu durumda ikinci gözlem zamanını belirlememiz gerekecektir. İkinci gözlem zamanını $t_2 (> t_1)$ ile gösterelim. İlk gözlemi gerçekleştirmek için t_1 anında $f(t_1 - t_0)$ miktar harcadığımızdan ikinci gözlemimizi

$$\begin{aligned}
e^{r(\xi-t_2)} (X_{t_2} - K - f(t_2 - t_1) - e^{r(t_2-t_1)} f(t_1 - t_0)) &\geq S_A - \varepsilon \\
\Rightarrow X_{t_2} &\geq \underbrace{e^{-r(\xi-t_2)} (S_A - \varepsilon) + K + f(t_2 - t_1) + e^{r(t_2-t_1)} f(t_1 - t_0)}_{=g_2(t_2)} \\
\Rightarrow t_2 &\in \{t > t_1 | X_t \geq g_2(t)\}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

zamanlarında yapabiliriz. Birinci gözlem zamanını belirlemede kullandığımız gibi

$$t_2 = E[\inf\{t > t_1 : X_t \geq g_2(t)\} | \mathcal{F}_{t_1}] \tag{4.6}$$

seçmek uygun olacaktır. Bu şekilde devam edersek genel olarak i . gözlem zamanını belirlemek için sınır

$$g_i(t) = e^{-r(\xi-t)}(S_A - \varepsilon) + K + \sum_{j=1}^{i-1} e^{r(t-t_j)} f(t_j - t_{j-1}) + f(t - t_{i-1}) \quad (4.7)$$

ile belirlenir.

2. Adım'da sabit bir $t > 0$ değeri için $g_i(t)$ fonksiyonu i 'ye göre artan olduğundan $t_i > t_{i-1}$ 'i sağlamak için $\inf\{t > t_{i-1} : X_t \geq g_i(t)\}$ yazmaya gerek yoktur; bunun yerine $\inf\{t > 0 : X_t \geq g_i(t)\}$ de alınabilir. Bu durumu görmek için $g_i(t)$, $t > 0$ fonksiyonunun i 'ye göre artan olduğunu gösterelim:

Her $i = 2, 3, \dots$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned} g_i(t) - g_{i-1}(t) &= e^{-r(\xi-t)}(S_A - \varepsilon) + K + \sum_{j=1}^{i-1} e^{r(t-t_j)} f(t_j - t_{j-1}) + f(t - t_{i-1}) \\ &\quad - e^{-r(\xi-t)}(S_A - \varepsilon) - K - \sum_{j=1}^{i-2} e^{r(t-t_j)} f(t_j - t_{j-1}) - f(t - t_{i-2}) \\ &= e^{r(t-t_{i-1})} f(t_{i-1} - t_{i-2}) + f(t - t_{i-1}) - f(t - t_{i-2}) \\ &= e^{r(t-t_{i-1})} e^{-a(t_{i-1}-t_{i-2})} + e^{-a(t-t_{i-1})} - e^{-a(t-t_{i-2})} \end{aligned} \quad (4.8)$$

sağlanır. Her $t \geq 0$ için $g_i(t)$ 'nin i 'ye göre artan olduğunu göstermek için tümevarımı kullanalım:

$i = 2$ için:

$$g_2(t) - g_1(t) = e^{r(t-t_1)} e^{-at_1} + e^{-a(t-t_1)} - e^{-at} \quad (4.9)$$

olur. Eğer $t \geq t_1 > 0$ ise $e^{r(t-t_1)} \geq 1$ olur.

$$\begin{aligned} g_2(t) - g_1(t) &\geq e^{-at_1} + e^{-at} (e^{at_1} - 1) \\ &> e^{-at_1} > 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

olur. Eğer $0 \leq t < t_1$ ise

$$\begin{aligned}
 g_2(t) - g_1(t) &= e^{r(t-t_1)}e^{-at_1} + e^{-a(t-t_1)} - e^{-at} \\
 &> e^{-(a+r)t_1} + e^{-at_1}e^{at_1} - e^{-at} \\
 &> e^{-(a+r)t_1} + 1 - 1 > 0
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

sağlanır.

Şimdi bir $i > 2$ değeri için $j = 2, 3, \dots, i-1$ iken $g_j(t) - g_{j-1}(t) > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1}$ sağlanır ve

$$g_i(t) - g_{i-1}(t) = e^{r(t-t_{i-1})}e^{-a(t_{i-1}-t_{i-2})} + e^{-a(t-t_{i-1})} - e^{-a(t-t_{i-2})} \tag{4.12}$$

olur. Eğer $t \geq t_{i-1} > 0$ ise $e^{r(t-t_{i-1})} \geq 1$ olur.

$$\begin{aligned}
 g_i(t) - g_{i-1}(t) &\geq e^{-a(t_{i-1}-t_{i-2})} + e^{-a(t-t_{i-1})} - e^{-a(t-t_{i-2})} \\
 &= e^{-a(t_{i-1}-t_{i-2})} + e^{-at}(e^{at_{i-1}} - e^{at_{i-2}}) > 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

olur. Eğer $0 \leq t < t_{i-1}$ ise

$$\begin{aligned}
 g_i(t) - g_{i-1}(t) &> e^{-rt_{i-1}}e^{-a(t_{i-1}-t_{i-2})} + e^{-at}e^{at_{i-1}} - e^{-at}e^{at_{i-2}} \\
 &= e^{-rt_{i-1}}e^{-a(t_{i-1}-t_{i-2})} + e^{-at}(e^{at_{i-1}} - e^{at_{i-2}}) > 0
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

sağlanır. Bu ise sabit bir $t > 0$ için $g_i(t)$ 'nin t 'ye göre artan olduğunu gösterir.

$\tau_i = \inf\{t > 0 : X_t \geq g_i(t)\}$ olarak ilk geçiş zamanını tanımlayalım. Gözlem noktaları bu ilk geçiş zamanının beklenen değeri olarak belirlendiğinden $E[\tau_i]$ 'yi hesaplamaya çalışalım.

4.4. Difüzyon Süreçlerinin Hareketli Bir Sınırı İlk Geçiş Zamanları

4.4.1. Literatürde kullanılan yöntemler

4.1. Teorem: (Fortet [41]) $\{X_t\}_{t \geq 0}$, bir x noktasından başlayan ve sürekli örnek yollarına sahip güçlü Markov süreci olsun ve $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu $g(0^+) \geq x$ eşitsizliğini sağlasın.

$$\tau = \inf\{t > 0: X_t \geq g(t)\} \quad (4.15)$$

ile X 'in g üzerine ilk geçiş zamanını gösterelim ve $F = F_x$, τ 'nin dağılım fonksiyonu olsun. O zaman $[g(t), \infty)$ tarafından kapsanan her ölçülebilir G kümesi için

$$P_x\{X_t \in G\} = \int_0^t P\{X_t \in G | X_s = g(s)\}F(ds) \quad (4.16)$$

sağlanır.

Ayrıca eğer X süreci zamana göre homojen ise

$$P_x\{X_t \in G\} = \int_0^t P_{g(s)}\{X_{t-s} \in G\}F(ds) \quad (4.17)$$

olur.

4.2. Teorem: (Ito ve McKean [53]) $\{X_t\}$, bir $X_0 = x \in \mathbb{R}$ noktasından başlayan homojen difüzyon süreci olsun ve bu sürecin sonsuz küçük üreticini (infinitesimal generator) $\mathcal{L}$ ile gösterelim. O zaman $x < a$ olmak üzere

$$\tau = \inf\{t > 0: X_t = a\} \quad (4.18)$$

nın Laplace dönüşümü $u(x, \lambda) := E_x[e^{-\lambda\tau}]$ aşağıdaki Sturm – Liouville sınır değer probleminin çözer:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u(x, \lambda) &= \lambda u(x, \lambda), \\
u(x, \lambda)|_{x=a} &= 1, \\
\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \lambda) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

4.3. Teorem: (Durbin [36]) $\{X_t\}$ ortalaması sıfır ve kovaryans fonksiyonu $\rho(s, t)$ olan sürekli bir Gauss süreci olsun. Ayrıca $g(t)$ bir sınır fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tau &= \inf\{t > 0: X_t = g(t)\}, \\
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho(t, t)}} \exp\left\{-\frac{g^2(t)}{2\rho(t, t)}\right\}, \\
b(t) &= \lim_{s \rightarrow t^-} \frac{1}{t-s} E[I(s, X)(g(s) - X_s) | X_t = g(t)],
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olarak tanımlansın. Burada $I(s, X)$ gösterge fonksiyonu eğer örnek yol s zamanından önce sınırı geçmemişse 1, diğer hallerde 0 değerini almaktadır. Eğer

1. g sınır fonksiyonu $[0, t)$ aralığında sürekli ve t noktasında soldan türeve sahip,
2. Kovaryans fonksiyonu $\rho(s, t)$ pozitif tanımlı ve $[0, t]^2$ 'de birinci dereceden sürekli kısmi türevlere sahip,

$$3. \ 0 < \lambda_t < \infty \text{ olmak üzere } \lim_{s \rightarrow t^-} \left[\frac{\partial \rho(s, t)}{\partial s} - \frac{\partial \rho(s, t)}{\partial t} \right] = \lambda_t,$$

oluyorsa

$$P_0\{\tau \in dt\} = b(t)f(t)dt \tag{4.21}$$

sağlanır.

4.4. Teorem: (Robbins ve Siegmund [96] ve Scheike [99]) $\{B_t\}$ bir Brownian süreç olmak üzere $D := \mathbb{R} \times (\varpi, \infty)$, $0 \leq \varpi < \infty$ bölgesinde tanımlı negatif olmayan $f(\cdot, \cdot)$ fonksiyonu aşağıdaki üç denk koşuldan birini sağlasın:

1. Sınırlı aralıklarda sonlu değer alan $(0, \infty)$ 'da tanımlı öyle bir μ ölçüsü vardır ki

$$f(x, t) = \int_0^\infty \exp\left\{\theta x - \frac{1}{2}\theta^2 t\right\} \mu(d\theta) \quad (4.22)$$

sağlanır.

2. $f(B_t, t)$ pozitif bir martingaledir.

3. D üzerinde $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(x, t) = 0$ sağlanır.

O zaman $f(g(t), t) = a$, $a > 0$ koşulunu sağlayan $g(t)$ sınır fonksiyonları için $f(x_0, t_0) \leq a$ ise

$$P\left\{\sup_{t_0 \leq t < \infty} (B_t \geq g(t)) \mid B_{t_0} = x_0\right\} = \frac{f(x_0, t_0)}{a} \quad (4.23)$$

eşitliği sağlanır.

4.5. Teorem: (Buonocore va. [21]) X_t , bir $x_0 < g(0)$ noktasından başlayan homojen difüzyon süreç ve $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\tau_g = \inf\{t > 0: X_t = g(t)\}$ ilk geçiş zamanının dağılımı $f(t)$ ile verilsin, yani;

$$f(t) = \frac{d}{dt} P\{\tau_g \leq t\} \quad (4.24)$$

olsun. Ayrıca

$$\varphi(x, t|y, s) = \frac{\partial}{\partial t} P\{X_t \leq x | X_s = y\} \quad (4.25)$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki integral denklemi sağlanır:

$$f(t) = -2\varphi(g(t), t|x_0, 0) + 2 \int_0^t f(\xi) \varphi(g(t), t|g(\xi), \xi) d\xi. \quad (4.26)$$

4.4.2. Dönüşümler yardımıyla ilk geçiş zamanlarının incelenmesi

$\{X_t\}$ stokastik sürecinin geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x, t|y, s)$ aşağıdaki Kolmogorov ileriye eşitliğini sağlasın:

$$\frac{\partial f_X(x, t|y, s)}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial^2 f_X(x, t|y, s)}{\partial x^2} + b(t, x) \frac{\partial f_X(x, t|y, s)}{\partial x} \quad (4.27)$$

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlamak üzere $Y_t = \psi^{-1}(X_{\varphi(s)}, t)|_{s=t}$ ile yeni bir süreç tanımlayalım:

1. Her x ve t için $\varphi'(t)$ türevi ve $\psi_x(x, t)$, $\psi_t(x, t)$ ve $\psi_{xx}(x, t)$ kısmi türevleri tanımlı,
2. Her t için $\varphi'(t) > 0$,
3. Her x, t için $\psi_x(x, t) \neq 0$,
4. Her t için $\psi(\psi^{-1}(x, t), t) = \psi^{-1}(\psi(x, t), t) = x$.

Y_t stokastik sürecinin geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_Y(x, t|y, s)$ olmak üzere, bu geçiş olasılıklarının Kolmogorov ileri eşitliğini şu şekilde gösterelim:

$$\frac{\partial f_Y(x, t|y, s)}{\partial t} = \bar{a}(t, x) \frac{\partial^2 f_Y(x, t|y, s)}{\partial x^2} + \bar{b}(t, x) \frac{\partial f_Y(x, t|y, s)}{\partial x} \quad (4.28)$$

Burada $\bar{a}(t, x)$, $\bar{b}(t, x)$ ile $a(t, x)$, $b(t, x)$ arasındaki bağıntı aşağıdaki eşitliklerle sağlanır:

$$\bar{a}(t, x) = \frac{a(t, x)\varphi'(t)}{\psi_x^2(x, t)}, \quad (4.29)$$

$$\bar{b}(t, x) = \left[b(t, x)\varphi'(t) - \frac{a(t, x)\varphi'(t)}{\psi_x^2(x, t)}\psi_{xx}(x, t) - \psi_t(x, t) \right] / \psi_x(x, t). \quad (4.30)$$

Eş. 4.29 ve Eş. 4.30 dönüşümleri Kolmogorov[105] tarafından elde edilmiştir. Bu dönüşümler yardımıyla Ricciardi [92] ve Capocelli ve Ricciardi [22] difüzyon süreçlerinin Feller ve Wiener süreçlerine dönüşümlerini incelemişlerdir.

Şimdi X_t sürecinin bir $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sınırını ilk geçiş zamanını τ_X ile tanımlayalım; yani,

$$\tau_X = \inf\{t > 0: X_t = g(t)\} \quad (4.31)$$

olsun. Eğer Y_t sürecinin $\psi^{-1}(g(\varphi(s)), t)|_{s=t}$ sınırını ilk geçiş zamanı; yani,

$$\tau_Y = \inf\{t > 0: Y_t = \psi^{-1}(g(\varphi(s)), t)|_{s=t}\} \quad (4.32)$$

biliniyorsa, $\tau_X \stackrel{d}{=} \tau_Y$ olduğundan τ_X 'e ilişkin dağılım özellikleri elde edilebilir.

4.6. Önerme: Yukarıdaki şekilde tanımlanan ve $\bar{a}(t, x)$ 'i t 'den bağımsız yapan ψ ve φ dönüşümleri

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \ln \psi_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln a(t, x) + \frac{d}{dt} \ln \varphi'(t) \quad (4.33)$$

eşitliğini sağlar.

İspat: $\bar{a}(t, x)$, t 'den bağımsız ise t 'ye göre türevi sıfır olmalıdır. İspat Eş. 4.29'in t 'ye göre türevinin alınmasıyla tamamlanır.

4.7. Sonuç: Eğer $a(t, x)$, t 'den bağımsız ise Eş. 4.29'te t 'den bağımsız yapan yukarıdaki şekilde tanımlanmış ψ ve φ dönüşümleri arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\psi(x, t) = e^{c_1/2} x \sqrt{\varphi'(t)} + c_2 \quad (4.34)$$

Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere bu durumda

$$\begin{aligned} \bar{a}(t, x) &= a(t, x) e^{-c_1}, \\ \bar{b}(t, x) &= b(t, x) e^{-c_1/2} \sqrt{\varphi'(t)} - x \frac{\varphi''(t)}{2\varphi'(t)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

olur.

Ricciardi ve Sato [93] çalışmalarında yukarıda değinilen yöntemi Wiener süreçlerine dönüştürülebilen süreç için uygulamışlardır. Bu yöntemle ilgili bir tartışma Smith [107]'de verilmektedir. İzleyen bölümde yukarıda açıklanan yöntem Ornstein – Uhlenbeck sürecinin hiperbolik bir sınırı ilk geçiş zamanlarının dağılımının elde edilmesi için kullanılacaktır.

4.4.3. Ornstein – Uhlenbeck sürecinin hiperbolik bir sınırı ilk geçiş zamanı

$\{X_t\}$ bir Brownian hareket olsun. Bu durumda $b(t, x) = 0$ ve $a(t, x) = 1/2$ olur. Bu durumda $\bar{a}(t, x)$ ve $\bar{b}(t, x)$ katsayılarını t 'den bağımsız yapacak biçimdeki ψ ve φ dönüşümleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\bar{a}(t, x) &= \frac{e^{c_1}}{2}, \\ \bar{b}(t, x) &= -x \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\end{aligned}\quad (4.36)$$

olarak elde ederiz. Burada $\bar{b}(t, x)$ 'in de t 'den bağımsız olmasını istediğimizden $\frac{\varphi''(t)}{2\varphi'(t)}$ bir sabite eşit olmalıdır. O halde c_2 , c_3 ve c_4 birer sabit olmak üzere

$$\varphi(t) = \frac{e^{c_3}}{2c_2} e^{2c_2 t} + c_4 \quad (4.37)$$

sağlanır. Yine Sonuç 4.6'dan

$$\psi(x, t) = x \exp\left\{\frac{c_1 + c_3 + 2c_2 t}{2}\right\}, \quad \psi^{-1}(x, t) = x \exp\left\{-\frac{c_1 + c_3 + 2c_2 t}{2}\right\} \quad (4.38)$$

sağlanır.

O halde $Y_t = \psi^{-1}(B_{\varphi(t)}, t)$ ile tanımlı süreç

$$dY_t = -c_2 Y_t dt + e^{c_1/2} dB_t \quad (4.39)$$

stokastik diferansiyel denklemini sağlar ki bu süreç bir Ornstein – Uhlenbeck sürecidir. Kullanılan dönüşümlerde özel olarak $c_1 = 2$, $c_2 = 1/2$ ve $c_3 = 0$, $c_4 = -1$ alınırsa $Y_t = e^{-t} B_{e^{2t}-1}$ elde edilir ki bu dönüşüm Doob dönüşümü olarak da bilinir.

Salminen [98] $h(t) = \alpha t$, $t \in \mathbb{R}$ için $\tau_h = \inf\{t > 0: B_t = h(t)\}$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonunun

$$P_x\{\tau_h \in dt\} = \exp\left\{\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 t\right\} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dt \quad (4.40)$$

olduğunu göstermiştir. Bu bilgiyi kullanarak ψ ve φ dönüşümlerini $h(t) = at$ fonksiyonuna uygulayalım. Bu durumda

$$\psi^{-1}(h(\varphi(t)), t) = \alpha(e^t + e^{-t}) \quad (4.41)$$

hiperbolik sınırının Ornstein-Uhlenbeck süreci tarafından ilk geçiş zamanını inceleyebiliriz. O halde $\tau_g = \inf\{t > 0: Y_t = \alpha(e^t + e^{-t})\}$ dersek,

$$P\{\tau_g \in dt\} = \frac{4\alpha}{e^t - e^{-t}} \sqrt{\frac{e^{2t}}{\pi(e^{2t} - 1)}} \exp\left\{\frac{[\alpha(e^{2t} + 1)]^2}{1 - e^{2t}}\right\} dt \quad (4.42)$$

olarak elde ederiz. Bu sonuç aynı zamanda Buonocore ve. [21](ayrıca bkz. Downes ve Borovkov [33]) tarafından da integral denklemleri yardımıyla elde edilmiştir.

4.4.4. Genel durum

B_t bir Brownian süreç olmak üzere Ψ ve φ dönüşümleri aşağıdaki şekilde verilsin:

$$\Psi(x, t) = x \exp\left\{\frac{c_1 + c_3 + 2c_2 t}{2}\right\}, \quad \varphi(t) = \frac{e^{c_3}}{2c_2} e^{2c_2 t} + c_4 \quad (4.43)$$

Bölüm 4.4.2 ve Bölüm 4.4.3'deki tartışmalar dikkate alınırsa, bu durumda $Y_t = \Psi^{-1}(B_{\varphi(t)}, t)$ ile tanımlı süreç

$$dY_t = -c_2 Y_t dt + e^{c_1/2} dB_t \quad (4.44)$$

stokastik diferansiyel denklemini çözecektir. Şimdi

$$g_1(t) = \exp\{-r(\xi - t)\} (S_A - \varepsilon) + K + \exp\{-a(t - t_0)\} \quad (4.45)$$

sınırını inceleyelim ve

$$\Psi^{-1}(h(\varphi(t)), t) = \exp\{-r(\xi - t)\} (S_A - \varepsilon) + K + \exp\{-a(t - t_0)\} \quad (4.46)$$

olacak biçimdeki h sınırını belirleyelim. Bu durumda

$$h\left(\frac{e^{c_3}}{2c_2} e^{2c_2 t} + c_4\right) \exp\left\{-\frac{c_1 + c_3 + 2c_2 t}{2}\right\} = \exp\{-r(\xi - t)\} (S_A - \varepsilon) + K + \exp\{-a(t - t_0)\} \quad (4.47)$$

sağlanır. Bu eşitlikten

$$h(t) = \left[(S_A - \varepsilon) e^{-r\xi} \left(\frac{2c_2}{e^{c_3}}\right)^{\frac{r}{c_2}-1} (t - c_4)^{\frac{r}{c_2}-1} + K \frac{e^{c_3}}{2c_2} (t - c_4)^{-1} + e^{at_0} \left(\frac{2c_2}{e^{c_3}}\right)^{-\frac{a}{c_2}-1} (t - c_4)^{-\frac{a}{c_2}-1} \right] \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(c_1 + c_3)\right\} \quad (4.48)$$

elde ederiz. O halde

$$\gamma_1 = (S_A - \varepsilon) \exp\left\{-\frac{1}{2}(c_1 + c_3) - r\xi\right\} \left(\frac{2c_2}{e^{c_3}}\right)^{\frac{r}{c_2}-1}, \quad (4.49)$$

$$\gamma_2 = \frac{K}{2c_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(c_1 + c_3) + c_3\right\} \quad (4.50)$$

ve

$$\gamma_3 = \left(\frac{2c_2}{e^{c_3}}\right)^{-\frac{a}{c_2}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(c_1 + c_3)\right\} \quad (4.51)$$

olmak üzere

$$h(t) = \gamma_1 (t - c_4)^{\frac{r}{c_2}-1} + \gamma_2 \frac{1}{t - c_4} + \gamma_3 (t - c_4)^{\frac{a}{c_2}-1} \quad (4.52)$$

sağlanır. Özel olarak $\frac{e^{c_3}}{2c_2} = -c_4$ olacak biçimde seçersek $Y_0 = \exp\left\{-\frac{c_1+c_3}{2}\right\} B_0$ sağlanacaktır. $c_2 > 0$ olduğundan $c_4 < 0$ kalır ki bu durumda $h(t)$ fonksiyonu $t > 0$ için hiçbir zaman tanımsız kalmaz. O halde

$$\inf\{t > 0: B_t = h(t); B_0 = 0\} =^d \inf\{t > 0: Y_t = g_1(t); Y_0 = 0\} \quad (4.53)$$

sağlanır. Bu ise bize Ornstein – Uhlenbeck sürecinin $g_1(t)$ sınırını ilk geçiş zamanını Brownian sürecin $h(t)$ sınırını ilk geçiş zamanı ile inceleme imkanı verir.

Şimdi genel olarak $g_i(t)$ sınırını ilk geçiş zamanlarını inceleyelim. Bunun için $g_i(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki biçimde yazılışını kullanacağız:

$$\begin{aligned} g_i(t) &= e^{-r(\xi-t)}(S_A - \varepsilon) + K + \sum_{j=1}^{i-1} e^{r(t-t_j)} e^{-a(t_j-t_{j-1})} + e^{-a(t-t_{i-1})} \\ &= e^{rt} e^{-r\xi} (S_A - \varepsilon) + K + \sum_{j=1}^{i-1} e^{-rt_j - a(t_j-t_{j-1})} + e^{-at} e^{at_{i-1}} \\ &= e^{rt} \left[\underbrace{e^{-r\xi} (S_A - \varepsilon) + \sum_{j=1}^{i-1} e^{-rt_j - a(t_j-t_{j-1})}}_{=\theta_1} \right] + e^{-at} \underbrace{e^{at_{i-1}}}_{=\theta_2} + K \\ &= \theta_1 e^{rt} + \theta_2 e^{-at} + K \end{aligned} \quad (4.54)$$

olur. Öte yandan

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(h_i(\varphi(t)), t) &= g_i(t) \\ \Leftrightarrow h_i(\varphi(t)) &= \Psi(g_i(t), t) \\ \Leftrightarrow h_i(t) &= \Psi(g_i(\varphi^{-1}(t)), \varphi^{-1}(t)) \end{aligned} \quad (4.55)$$

olur. İlgilendiğimiz süreç için $\varphi^{-1}(t) = \frac{1}{2c_2} \ln\left(\frac{2c_2}{e^{c_3}}(t - c_4)\right)$ 'dir. O halde

$$\begin{aligned}
h_i(t) &= \left[\theta_1 \exp \left\{ \frac{r}{2c_2} \ln \left(\frac{2c_2(t-c_4)}{e^{c_3}} \right) \right\} + \theta_2 \exp \left\{ -\frac{a}{2c_2} \ln \left(\frac{2c_2(t-c_4)}{e^{c_3}} \right) \right\} + K \right] \\
&\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{2} (c_1 + c_3) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2c_2(t-c_4)}{e^{c_3}} \right) \right\} \\
&= \left[\theta_1 \left(\frac{2c_2(t-c_4)}{e^{c_3}} \right)^{\frac{r}{2c_2}} + \theta_2 \left(\frac{2c_2(t-c_4)}{e^{c_3}} \right)^{-\frac{a}{2c_2}} + K \right] \\
&\quad \times \exp \left\{ \frac{c_1 + c_3}{2} \right\} \left(\frac{2c_2(t-c_4)}{e^{c_3}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\theta_1 \left(\frac{2c_2(t-c_4)}{e^{c_3}} \right)^{\frac{r}{2c_2} + \frac{1}{2}} + \theta_2 \left(\frac{2c_2(t-c_4)}{e^{c_3}} \right)^{-\frac{a}{2c_2} + \frac{1}{2}} + K \left(\frac{2c_2(t-c_4)}{e^{c_3}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\quad \times \exp \left\{ \frac{c_1 + c_3}{2} \right\} \\
&= \left[\theta_1 \left(\frac{2c_2}{e^{c_3}} \right)^{\frac{r}{2c_2} + \frac{1}{2}} (t-c_4)^{\frac{r}{2c_2} + \frac{1}{2}} + \theta_2 \left(\frac{2c_2}{e^{c_3}} \right)^{-\frac{a}{2c_2} + \frac{1}{2}} (t-c_4)^{-\frac{a}{2c_2} + \frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + K \left(\frac{2c_2}{e^{c_3}} \right)^{\frac{1}{2}} (t-c_4)^{\frac{1}{2}} \right] \times \exp \left\{ \frac{c_1 + c_3}{2} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.56}$$

ile verilir. Burada

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \theta_1 \left(\frac{2c_2}{e^{c_3}} \right)^{\frac{r}{2c_2} + \frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{c_1 + c_3}{2} \right\}, \\
\rho_2 &= \theta_2 \left(\frac{2c_2}{e^{c_3}} \right)^{-\frac{a}{2c_2} + \frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{c_1 + c_3}{2} \right\}, \\
\rho_3 &= K \left(\frac{2c_2}{e^{c_3}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{c_1 + c_3}{2} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.57}$$

ve $n_1 = \frac{r}{2c_2} + \frac{1}{2}$, $n_2 = -\frac{a}{2c_2} + \frac{1}{2}$ ve $n_3 = \frac{1}{2}$ alırsak

$$h_i(t) = \rho_1(t-c_4)^{n_1} + \rho_2(t-c_4)^{n_2} + \rho_3(t-c_4)^{n_3} \tag{4.58}$$

elde ederiz.

Bu durumda

$$\tau_i = \inf\{t > 0: X_t = g_i(t)\} \quad (4.59)$$

ilk geçiş zamanının dağılımı Jang va. [57]'deki sonuç yardımıyla aşığıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$F_i(t) = u_i(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t H_{n,i}(t,s)u_i(s)ds. \quad (4.60)$$

Burada

$$\begin{aligned} u_i(t) &= 2\Psi\left(\frac{h_i(t)}{\sqrt{t}}\right), \\ H_{1,i}(t,s) &= \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left[2h_i'(s) - \frac{h_i(t) - h_i(s)}{t-s} \right] \phi\left(\frac{h_i(t) - h_i(s)}{\sqrt{t-s}}\right), \\ H_{n+1,i}(t,s) &= \int_0^t H_{1,i}(t,r)H_{n,i}(r,s)dr \end{aligned} \quad (4.61)$$

ve ϕ standart normal dağılım fonksiyonu, $\Psi(t) = 1 - \phi(t)$ 'dir.

4.4.5. İlk geçiş zamanlarının momentleri

İlk geçiş zamanının momentlerini incelemek için Tuckwell ve Wan [114]'ın elde ettiğı aşığıdaki sonucu kullanacağız:

4.8. Teorem: (Tuckwell ve Wan [114]) X_t stokastik süreci aşığıdaki stokastik diferansiyel denklemin çözümü olarak tanımlansın:

$$dX_t = \alpha(X_t)dt + \beta(X_t)dB_t, X_0 = x \in \mathbb{R} \quad (4.62)$$

Bu durumda X_t sürecinin, $h(t)$ sürekli fonksiyonu ile belirlenen bir sınırı ilk geçiş zamanının momentleri arasında aşığıdaki bağıntı vardır:

$$\frac{1}{2}\beta^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}M_n(x,y) + \alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}M_n(x,y) + \gamma(y)\frac{\partial}{\partial y}M_n(x,y) = -nM_{n-1}(x,y)$$

(4.63)

Burada;

$$M_n(x,y) = E[\tau^n],$$

$$\tau = \inf\{t > 0 | X_t = h(t); X_0 = x < y = h(0)\},$$

$$\frac{d}{dt}h(t) = \gamma(h(t))$$

(4.64)

'dir.

Tuckwell ve Wan[114]'ın bu teoremini kullanmak için öncelikle γ fonksiyonunu belirlemeye çalışalım. Bu amaçla Lagrange açılımını (bkz. Abromowitz [1]) kullanacağız.

$$h_i(t) = \rho_1(t - c_4)^{\frac{r+\mu}{2\mu}} + \rho_2(t - c_4)^{\frac{-a+\mu}{2\mu}} + \rho_3(t - c_4)^{\frac{1}{2}}$$

(4.65)

sınırını göz önüne alalım. Bu durumda

$$\frac{d}{dt}h_i(t) = \rho_1 \frac{r+\mu}{2\mu} (t - c_4)^{\frac{r}{2\mu} - \frac{1}{2}} + \rho_2 \left(\frac{-a+\mu}{2\mu} \right) \frac{1}{(t - c_4)^{\frac{a}{2\mu} + \frac{1}{2}}} + \frac{\rho_3}{2} \frac{1}{(t - c_4)^{\frac{1}{2}}}$$

(4.66)

ve

$$\gamma_i(t) = \frac{d}{dx}h_i(x) \Big|_{x=h_i^{-1}(t)}$$

(4.67)

sağlanır. ρ_1 , ρ_2 ve ρ_3 pozitif değerli olduğu için $h_i(t)$ fonksiyonu pozitif ekseninde sıfırdan farklıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
h_i'(t) = 0 &\Leftrightarrow \rho_1 \frac{r+\mu}{2\mu} (t-c_4)^{\frac{r}{2\mu}-\frac{1}{2}} + \rho_2 \left(\frac{-a+\mu}{2\mu} \right) \frac{1}{(t-c_4)^{\frac{a}{2\mu}+\frac{1}{2}}} + \frac{\rho_3}{2} \frac{1}{(t-c_4)^{\frac{1}{2}}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \rho_1 \frac{r+\mu}{2\mu} (t-c_4)^{\frac{r}{2\mu}} + \rho_2 \left(\frac{-a+\mu}{2\mu} \right) \frac{1}{(t-c_4)^{\frac{a}{2\mu}}} = -\frac{\rho_3}{2}
\end{aligned}
\tag{4.68}$$

olduğundan $h_i'(t) \neq 0$ 'dır.

O halde $h_i^{-1}(t)$ fonksiyonu bir $t_0 > 0$ noktası civarında Lagrange açılımı şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
&h_i^{-1}(t) \\
&= h_i^{-1}(t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[h_i(t) - h_i(t_0)]^k}{k!} \left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left((h_i^{-1}(t))' \left\{ \frac{t-t_0}{h_i(t) - h_i(t_0)} \right\}^k \right) \right]_{t=t_0}
\end{aligned}
\tag{4.69}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
\gamma_i(t) &= \rho_1 \frac{r+\mu}{2\mu} (h_i^{-1}(t) - c_4)^{\frac{r}{2\mu}-\frac{1}{2}} + \rho_2 \left(\frac{-a+\mu}{2\mu} \right) \frac{1}{(h_i^{-1}(t) - c_4)^{\frac{a}{2\mu}+\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \frac{\rho_3}{2} \frac{1}{(h_i^{-1}(t) - c_4)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
\tag{4.70}$$

olarak elde edilir.

Bu sayede momentler arası bağıntı:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_n(x, y) + \gamma_i(y) \frac{\partial}{\partial y} M_n(x, y) = -n M_{n-1}(x, y)
\tag{4.71}$$

olarak bulunur. Buradan da ilk moment

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_1(x, y) + \gamma_i(y) \frac{\partial}{\partial y} M_1(x, y) = -1 \quad (4.72)$$

diferansiyel denklemini sağlar.

5. ÖRNEK

Bu bölümde, tez çalışmasında elde edilen sonuçların bir uygulaması verilecektir. Öncelikle Ornstein – Uhlenbeck sürecinin hiperbolik bir sınırı ilk geçiş zamanının çeşitli karakteristikleri sunulacak ve ardından simülasyon ile oluşturulan bir gerçekleşim üzerinden tez çalışmasında önerilen strateji örneklendirilecektir. Bu bölümdeki bütün hesaplamalar Intel® Core™ Duo P8600 2.40 GHz bilgisayarda Ubuntu 12.04 işletim sistemi altında GNU Octave3.2.4 [37] ve R2.14.2 programlarında yapılmıştır.

Aşağıdaki şekilde tanımlanan Ornstein – Uhlenbeck sürecini ele alalım:

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

Ayrıca, faiz oranı $r = 0,01$, ceza fonksiyonunun parametresi $a = 1$, uygulama fiyatı $K = 0$ olsun ve opsiyonun değerinin, kârdan feda edebileceğimiz miktara eşit olduğunu kabul edelim; yani, $S_A = \varepsilon$ olsun. Bu durumda incelemek istediğimiz sınır fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilecektir:

$$g(t) = 0,2 \exp\{0,01 t\} + 0,5 \exp\{-t\} \quad (5.2)$$

Ornstein – Uhlenbeck sürecinin bu sınırı ilk geçiş zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek istediğimizde, özel olarak $\mu = \sigma = 1$ ve $x_0 = 0,5$ için, Kısım 4.4.3’de tartışılan yöntem ile (ayrıca bkz. Buonocore va. [21], Downes ve Borovkov [33])

$$P\{\tau \in dt\} = \frac{0,4}{e^t - e^{-t}} \sqrt{\frac{e^t}{\pi(e^{2t}) - 1}} \exp\left\{\frac{[g(t)e^t - 0,5]^2}{1 - e^{2t}}\right\} dt \quad (5.3)$$

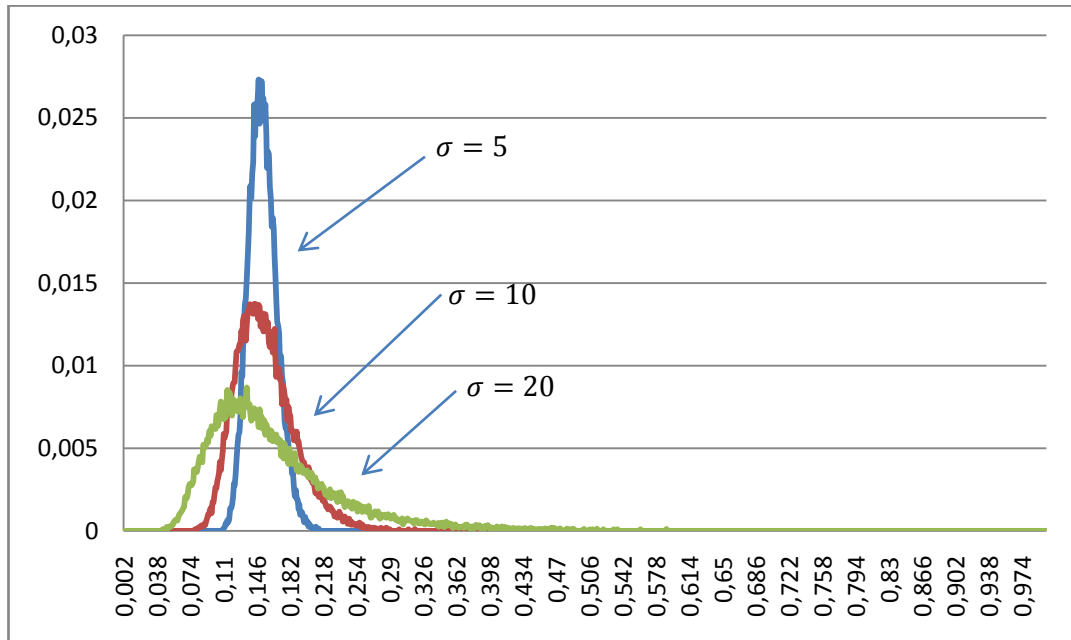
olarak elde edilebilecektir.

Ornstein – Uhlenbeck sürecinin difüzyon ve drift katsayısının bu ilk geçiş zamanı olasılıkları üzerindeki etkisi Şekil 5.1 ve Şekil 5.2’de gösterilmektedir.

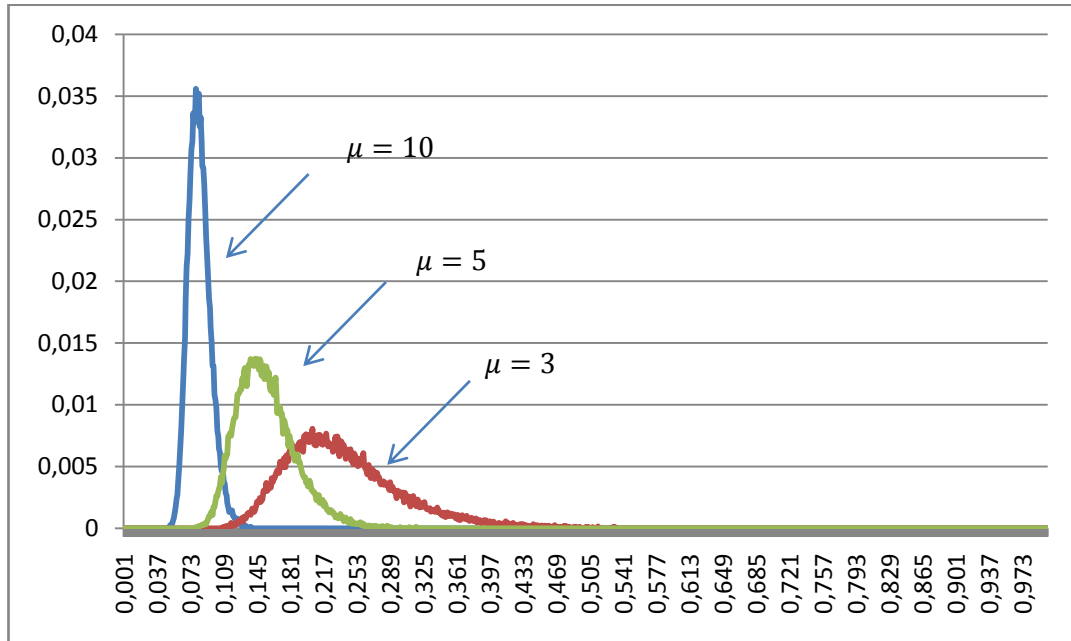
Şekil 5.1'de $\mu = 5$ iken $\sigma = 5, 10$ ve 20 ; Şekil 5.2'de ise $\sigma = 10$ iken $\mu = 3, 5$ ve 10 olarak alınmış ve ilk geçiş zamanlarının olasılık yoğunluk fonksiyonları simülasyon çalışması yardımıyla elde edilmiştir. Benzer olarak bu parametreler için ilk geçiş zamanlarının ortalama ve varyansları Çizelge 5.1'deki gibi verilebilir:

Çizelge 5.1. Ornstein - Uhlenbeck sürecinin hiperbolik sınırı ilk geçiş zamanının ortalama ve varyansı

μ	σ	$E[\tau]$	$Var(\tau)$
5	5	0,152	0,234
	10	0,154	1,043
	20	0,164	6,575



Şekil 5.1. Difüzyon katsayısının ilk geçiş zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonuna etkisi



Şekil 5.2. Drift katsayısının ilk geçiş zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonuna etkisi

Şimdi opsiyon izleme stratejisini inceleyelim. Opsiyonun geçerlilik süresi $\xi = 1$, anlaşma fiyatı $K = 40$, faiz oranı $r = 0,5$ ve gözlem yapma maliyetine ilişkin fonksiyonun parametresi $a = 0,5$ olsun. Bu durumda sınır fonksiyonları aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$g_i(t) = \theta_1 e^{\frac{1}{2}t} + \theta_2 e^{-\frac{1}{2}t} + 40 \quad (5.4)$$

Burada $\exp\{-5\} = 0,0067$ olduğundan

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0,0067(S_A - \varepsilon) + \sum_{j=1}^{i-1} \exp\left\{-t_j + \frac{1}{2}t_{j-1}\right\} \\ \theta_2 &= \exp\left\{\frac{1}{2}t_{i-1}\right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

dir. Kısım 4.3.4'de tartışılan dönüşüm yardımıyla, dönüştürülmüş sınırlar aşağıdaki biçimde verilir:

$$h_i(t) = \rho_1(t + 1) + \rho_2 + \rho_3\sqrt{t + 1} \quad (5.6)$$

Burada, $\exp\left\{\frac{1}{4}\right\} = 1,2840$ olduğundan

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1,2840 \theta_1 \\ \rho_2 &= 1,2840 \theta_2 \\ \rho_3 &= 1,2840 K \end{aligned} \quad (5.7)$$

dir. O halde

$$h_i^{-1}(t) = \sqrt{\frac{-\rho_3 + \sqrt{\rho_3^2 - 4\rho_1(\rho_2 - t)}}{\rho_1}} \quad (5.8)$$

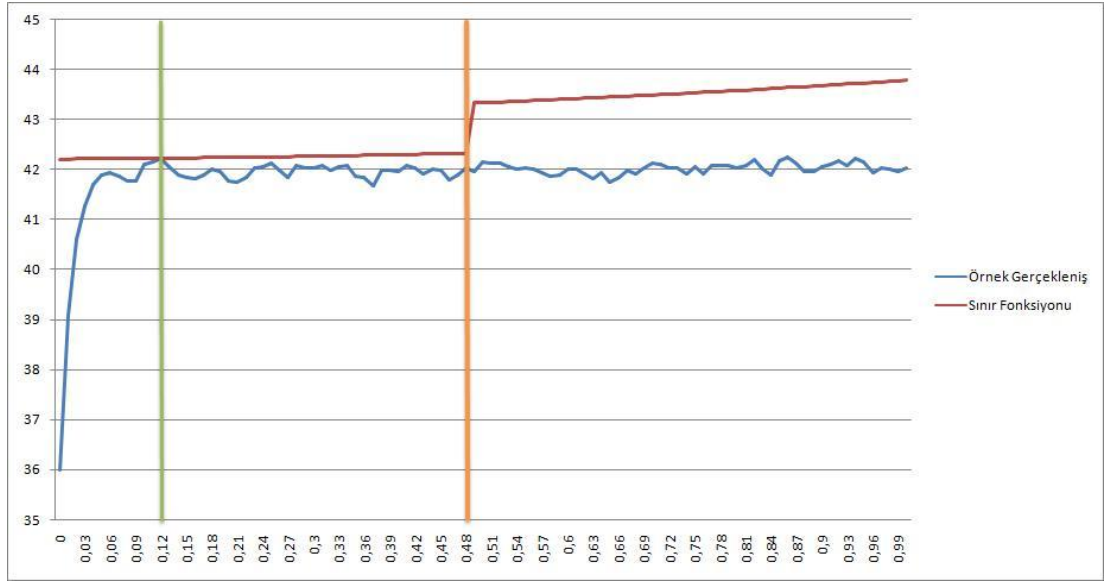
olarak elde ederiz.

Bu ilk geçiş zamanının beklenen değerini hesaplamak için Kısım 4.3.4'de verilen yöntem kullanılabilir. Bunun için

$$\gamma_i(t) = \rho_1 + \frac{\rho_3}{2} \left[\sqrt{\frac{-\rho_3 + \sqrt{\rho_3^2 - 4\rho_1(\rho_2 - t)}}{\rho_1}} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

ile verileceği göz önüne alınırsa momentler Tuckwell ve Wan [114]'ün çalışmasındaki diferansiyel denklemin çözümü ile elde edilebilir. Ayrıca bu momentleri hesaplamak için, ilk geçiş zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonundan da faydalanılabilir.

Örnek bir gerçekleşiş Şekil 5.3'de verilen gibi olsun. Kısım 4.4.5'de verilen sonuçlara göre ilk gözlem zamanı $t_1 = 0,48219$ olarak hesaplanmıştır. Bu nokta sınır fonksiyonunun değeri $g_1(t_1) = 42,32732$ olurken opsiyona konu olan varlığın fiyatı $X(t_1) = 42,03897$ olarak kalmıştır. Bu nedenle ilk gözlemde opsiyon uygulamaya konulmamıştır.



Şekil 5.3 Kesikli zaman noktalarında gözlem yapılması durumu için örnek gerçekleşiş.

6. SONUÇ

Bu çalışmada, Amerikan tipi bir opsiyon ele alınmıştır. Opsiyona konu olan varlığın piyasa değerini gözlemlemenin bir maliyetinin olduğu ve bu maliyetin ardışık gözlem zamanları arasında geçen sürenin bir fonksiyonu olduğu varsayılmıştır. Bu koşullar altında opsiyona konu olan varlığın fiyatını gözleme zamanlarının belirlenmesi için bir strateji önerilmiştir. Önerilen strateji, opsiyona konu olan varlığın fiyatının Ornstein-Uhlenbeck sürecine uyması durumu için detaylı olarak incelenmiş ve bir örnek ile elde edilen sonuçlar canlandırılmıştır.

Önerilen strateji, Ornstein-Uhlenbeck sürecinin hiperbolik bir sınırı ilk geçiş zamanına dayanmaktadır. Bu nedenle, difüzyon süreçlerinin sabit ve hareketli sınırları ilk geçiş zamanlarının dağılım ve momentlerinin incelenmesinde literatürde kullanılan bazı yöntemler sunulmuştur. Ornstein-Uhlenbeck sürecinin hiperbolik sınırları ilk geçiş zamanları ise, hem sürece hem de sınıra bir dönüşüm uygulanarak elde edilmiştir.

Şekil 5.3'den de görüldüğü üzere opsiyona konu olan varlığın fiyatı $t=0,12$ zamanında sınır fonksiyonunun üzerine çıkmaktadır. Bu noktada opsiyona konu olan varlığın fiyatı $X(0,12) = 42,23199$ iken sınır fonksiyonunun değeri $g_1(0,12) = 42,22865$ olarak kalmaktadır. Bu durum, sürekli gözlem yapmaktan kaçındığımız için ortaya çıkmaktadır. Opsiyona konu olan varlığın fiyatını gözlem zamanlarını nokta tahminleri yerine bir aralık olarak belirlemek bu türden fırsatların kaçırılmasını önlemek için kullanılabilir. Ayrıca, opsiyona konu olan varlığın fiyatının parametrelerinin bilinmediği ve eski gözlem değerlerine bağlı olarak tahmin edicilerin kullanıldığı veya bu parametrelerin fuzzy değişkenler ile modellendiği durumları da ilerleyen çalışmalarda incelemek faydalı olacaktır.

Çalışmada elde edilen sonuçlar sadece Amerikan tipi opsiyonlara değil, opsiyonun geçerlilik süresine kadar istenildiği noktalarda uygulamaya koymaya izin veren bütün opsiyon türleri için uyarlanabilir.

KAYNAKLAR

1. Abramowitz, M., Stegun, I. A., "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables", **National Bureau of Standards**, (1972).
2. Ait-Sahalia, Y., Lo, A. W., "Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset price", LFE-1024-95, **MIT-Sloan School of Management** (1995).
3. Amilon, H., "A neural network versus Black – Scholes: A comparison of pricing and hedging performances". **Scandinavian Working Papers in Economics, Lund University Series, Department of Economics**, Lund, Sweden (2001).
4. Amin, K. I., Jarrow, R. A., "Pricing options on risky assets in a stochastic interest rate economy", **Mathematical Finance**, 4: 217-237 (1992).
5. Amin, K., Khanna, A., "Convergence of American option values from discrete-to continuous-time financial models", **Mathematical Finance**, 4:289-304 (1994).
6. Anders, U. Korn, O., Schmitt, C., "Improving the pricing of options – A neural network approach". **Journal of Forecasting**, 15: 369-388 (1998).
7. Areal, N., Rodrigues, A., Armada, M. R., "On improving the least squares Monte Carlo option valuation method", **Review of Derivatives Research**, 11: 119-151 (2008).
8. Ata, B., "Döviz opsiyonları ve Türkiye’de uygulanabilirliği", Yüksek Lisans Tezi, **İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü**, İstanbul, (2003).
9. Barone-Adesi, G., Whaley, R. E., "Efficient analytic approximation of American option values", **The Journal of Finance**, 42(2): 301-320 (1987).
10. Bauwens, L., Lubrano, M., "Bayesian option pricing using asymmetric GARCH models", **Journal of Empirical Finance**, 9: 321-342 (2002).
11. Black, F., Scholes, M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", **Journal of Political Economy**, 81: 635-654 (1973).
12. Bogomolov, A., Medvedev, G., "Mathematical Properties of Option Pricing under Gamma Distribution Process", **Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1456960>** (2009).

13. Boyle, P. P., "Options: A Monte Carlo approach", ***Journal of Financial Economics***, 4:323-338 (1977).
14. Boyle, P., Enine, J., Gibbs, S., "Numerical evaluation of multivariate contingent claims", ***Review of Financial Studies***, 2:241-250 (1989).
15. Breen, R., "The accelerated binomial option pricing model", ***Journal of Financial and Quantitative Analysis***, 26: 153-164 (1991).
16. Brennan, M. J., Schwartz, E., "The valuation of American put options", ***Journal of Finance***, 32: 449-462, (1977).
17. Brennan, M. J., Schwartz, E., "Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis", ***Journal of Financial and Quantitative Analysis***, 13: 461-474 (1978).
18. Brennan, M. J., Schwartz, E. S., "Analyzing convertible bonds", ***Journal of Financial and Quantitative Analysis***, 15: 907-929 (1980).
19. Broadie, M., Detemple, J., "American option valuation: New boundary approximations, and a comparison of existing methods", ***The Review of Financial Studies***, 9 (4): 1211-1250 (1996).
20. Bunch, D., Johnson, H., "A simple and numerically efficient valuation method for American puts using a modified Geske-Johnson approach", ***Journal of Finance***, 47:809-816 (1992).
21. Buonocore, A., Nobile A. G., Ricciardi, L. M., "A new integral-equation for the evaluation of first – passage-time probability densities", ***Advances in Applied Probability***, 19: 785-800 (1987).
22. Capocelli, R. M., Ricciardi, L. M., "On the transformation of diffusion processes into the Feller process", ***Mathematical Biosciences***, 29: 219-234 (1976).
23. Carr, P., Jarrow, R., Mynemi, R., "Alternative characterization of American puts", ***Mathematical Finance***, 2:87-106 (1997).
24. Carr, P., Wu, L., "Time-changed Lévy processes and option pricing", ***CRIF Working Paper series, Paper 18***, http://fordham.bepress.com/crif_working_papers/18(2002).
25. Chalasani, P., Jha, S., Varikooty, A., "Accurate approximations for European Asian options", ***Journal of Computational Finance***, 3: 11-29 (1998).

26. Charalambous, C., Martzoukos, S. H., "Hybrid artificial neural networks for efficient valuation of real options and financial derivatives", ***Computational Management Science***, 2: 155-161 (2005).
27. Chiang, M-H., Chen, W-K., Cheng, C-H., "On option pricing with Ornstein-Uhlenbeck position process", ***Journal of Risk Management***, 9 (2): 1-19 (2007).
28. Chriss, N., "Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models", ***McGraw-Hill***, 1997.
29. Coşkun, M., "Risk yönetim aracı olarak opsiyonlar ve İMKB'de risk yönetim stratejilerinin uygulanması", Doktora Tezi, ***Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*** (2001).
30. Cox, J., Ingersoll, J., Ross, S., "A theory of the term structure of interest rates", ***Econometrica***, 53: 385-408 (1985).
31. Cox, J., Ross, S. A., "The valuation of options for alternative stochastic processes", ***Journal of Financial Economics***, 3: 145-166 (1976).
32. Cox, J. C., Ross, S., Rubinstein, M., "Option pricing: A simplified approach", ***Journal of Financial Economics***, 7: 229-264 (1979).
33. Downes, A. N., Borovkov, K., "First passage densities and boundary crossing probabilities for diffusion processes", ***Methodology and Computation in Applied Probability***, 10: 621- 644 (2008).
34. Duan, J. C., "The GARCH option pricing model", ***Mathematical Finance***, 5: 13-32 (1995).
35. Duistermaat, J. J., Kyprianou, A. E., van Schaik, K., "Finite expiry Russian options", ***Stochastic Processes and Their Applications***, 115: 609-638 (2005).
36. Durbin, J., "The first passage density of a continuous Gaussian process to a general boundary", ***Journal of Applied Probability***, 22: 99-122 (1985).
37. Eaton, J. W., "GNU Octave Manual", ***Network Theory Limited*** (2002).
38. Egloff, D., Kohler, M., Todorovic, N., "A dynamic look-ahead Monte Carlo algorithm for pricing Bermudan options", ***The Annals of Applied Probability***, 17(4): 1138 – 1171, (2007).
39. Einstein, A, "Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen", ***Annalen der Physik***, 17: 549-560 (1905).

40. Engelen, P-J., "Criminal behaviour: A real option approach with an application to restricting illegal insider trading", ***European Journal of Law and Economics***, 17: 329-352 (2004).
41. Fortet, R., "Les fonctiones aléatoires du type de Markov associées á certaines equationes linéaires aux dérivées partielles du type parabolique", ***Journal de Mathématiques Pures et Appliquées***, 22: 177-243 (1943).
42. Gardiner, C. W., "Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences", ***Springer***, 1997.
43. Geske, R., Johnson, H., "The American put option valued analytically", ***Journal of Finance***, 39: 1511-1524 (1984).
44. Geske, R., Shastri, K., "Valuation by approximation: A comparison of alternative option valuation techniques", ***Journal of Financial and Quantitative Analysis***, 20: 45-71 (1985).
45. Giraudo, M. T., Sacerdote, L., "An improved technique for the simulation of first passage times for diffusion processes", ***Communications in Statistics, Simulation and Methodology***, 28 (4): 1135-1163 (1999).
46. Glasserman, P., Yu, B., "Number of paths versus number of basis functions in American option pricing", ***The Annals of Applied Probability***, 14 (4): 2090-2119 (2004).
47. Haugh, M., Kogan, L., "Pricing American options: A duality approach", ***Operations Research***, 52 (2): 258-270 (2004).
48. Ho, T. S., Stapleton, R. C., Subrahmanyam, M. G., "The valuation of American options with stochastic interest rates: A generalization of the Geske-Johnson technique", ***Journal of Finance***, 52 (2): 827-840 (1997).
49. Hsu, Y. L., Lin, T. I., Lee, C. F., "Constant elasticity of variance (CEV) option pricing model: Integration and detailed derivation", ***Mathematics and Computers in Simulation***, 79: 60-71 (2008).
50. Hu, Y., Long, H., "Least squares estimator for Ornstein-Uhlenbeck processes driven by alfa-stable motions", ***Stochastic Processes and Their Applications***, 119: 2465-2480 (2009).
51. Huang, Y-C., Wu, C-W., Wang, C-W, "Valuing American options under ARMA processes", ***International Research Journal of Finance and Economics***, 28: 152-159 (2009).

52. Hutchinson, J., Lo, A., Poggio, T., "A nonparametric approach to pricing and hedging derivative securities via learning networks", ***Journal of Finance***, 49: 851-889 (1994).
53. Ito, K., McKean, H. P., "Diffusion Processes and Their Sample Paths", ***Springer*** (1965).
54. Jabbour, G. M., Kramin, M. V., Kramin, T. V., Young, S. D., "Multinomial lattices and derivatives pricing", in: Lee CF (ed) ***Advances in Quantitative Analysis of Finance and Accounting***, World Scientific, Singapore, 2(5): 1- 15 (2005).
55. Jacka, S. D., "Optimal stopping and American put", ***Mathematical Finance***, 1:1-14 (1991).
56. Jalliet, P., Lamberton, D., Lapeyre, B., "Variational inequalities and the pricing of American options", ***Acta Applicandae Mathematicae***, 21:263-289 (1990).
57. Jang, Y. S., Kim, S. L., Kim, S. K., "First passage problem for Wiener paths crossing differentiable curves", ***Journal of Applied Mathematics & Computing***, 19 (1-2): 475 – 484 (2005).
58. Kamrad, B., Ritchken, P., "Multinomial approximating models for options with k state variables", ***Management Science***, 18:141-148 (1991).
59. Karan, M. B., "Yatırım Analizi ve Portföy Yönetimi", ***Gazi Kitabevi***, Ankara (2001).
60. Karatzas, I., Shreve, S. E., "Brownian Motion and Stochastic Calculus", ***Springer*** (2005).
61. Kasonga, R. A., "The consistency of a non-linear least squares estimator from diffusion processes", ***Stochastic Processes and Their Applications***, 30: 263-275 (1988).
62. Keber, C., "Option pricing with genetic programming approach", ***Journal of Computational Intelligence in Finance***, 7(6): 26 – 36 (1999)
63. Kevorkian, J., "Partial differential equations: analytical solution techniques", ***Springer-Verlag***, (2000).
64. Kırılı, M., "Halka açık olmayan şirketlerde sistematik risk ölçütü beta katsayısının tahmin edilmesi", ***Yönetim ve Ekonomi***, 13(1): 121 – 134, (2006).
65. Kim, I. J., "The analytical valuation of American options", ***Review in Financial Studies***, 3:547-572 (1990).

66. Kim, Y-J., "Option pricing under stochastic interest rates: An empirical investigation", ***Asia-Pacific Financial Markets***, 9: 23-44 (2002).
67. Kim, Y-J., Kunitomo, N., "Pricing options under stochastic interest rates: A new approach", ***Asia-Pacific Financial Markets***, 6: 49-70 (1999).
68. Kim, I. J., Yu, G. G., "An alternative approach to the valuation of American options and applications", ***Review of Derivatives Research***, 1: 61-85 (1996).
69. Kjærland, F., "A real option analysis of investments in hydropower – The case of Norway", ***Energy Policy***, 35: 5901-5908 (2007).
70. Kloeden, P. E., Platen, E., "The Numerical Solution of Stochastic Differential Equations", ***Springer*** (1992).
71. Konuk, H., "Şirket değerlendirme yöntemleri ve reel opsiyonlar yaklaşımı", Yüksek Lisans Tezi, ***Marmara Üniversitesi Bankacılık ve Sigortacılık Enstitüsü*** (2006)
72. Köroğlu, C., "Üstel matris fonksiyonları yardımıyla Amerikan opsiyon probleminin çizgiler yöntemi ile çözümü", Doktora Tezi, ***Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*** (2002).
73. Lemieux, C., La, J., "A study of variance reduction techniques for American option pricing", ***Proceedings of the 2005 Winter Simulation Conference***, 1884-1891 (2005).
74. Long, H., "Least square estimator for discretely observed Ornstein-Uhlenbeck process with small Lévy noises", ***Statistics and Probability Letters***, 79: 2076-2085 (2009).
75. Longstaff, F. A., Schwartz, E. S., "Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach", ***Review of Financial Studies***, 14 (1): 113-147 (2001).
76. MacMillan, L. W., "An analytic approximation for the American put price", ***Advances in Futures and Options Research***, 1:119-139 (1986).
77. Madan, D. B., Carr, P. P., Chang, E. C., "The variance gamma process and option pricing", ***European Finance Review***, 2: 79-105 (1998).
78. Madlener, R., Stoverink, S., "Power plant investments in the Turkish electricity: A real options approach taking into account market liberalization", ***Applied Energy***, doi: 10.1016/j.apenergy.2011.11.050 (2011).

79. Merton, R. C., "Theory of rational option pricing", ***Bell Journal of Economics and Management Science***, 4: 141-183 (1973).
80. Mikosch, T., "Elementary stochastic calculus with finance in view", ***World Scientific***, (2004).
81. Monoyios, M., "Option pricing with transaction costs using a Markov chain approximation", ***Journal of Economic Dynamics & Control***, 28: 889-913 (2004).
82. Moreno, M., Navas, J. F., "On the robustness of least-square Monte Carlo (LSM) for pricing American derivatives", ***Review of Derivatives Research***, 6(2): 107-128 (2003).
83. Myneni, R., "The pricing of American option", ***The Annals of Applied Probability***, 2(1): 1-23 (1992).
84. Oksendal, B., "Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications", ***Springer***, (2003).
85. Omberg, E., "Efficient discrete time jump process models in option pricing", ***Journal of Financial and Quantitative Analysis***, 23: 161-174 (1988).
86. Osborne, M., "Brownian motion in the stock market", ***Operations Research***, 7: 145-173 (1964).
87. Özoğul, S. A., Ülengin, B., "Reel opsiyonlar ile bilişim teknolojileri yatırımlarının değerlendirilmesi", ***İtÜdergisi/b***, 3(1): 15-26 (2006).
88. Parkinson, M., "Option pricing: The American put", ***Journal of Business***, 50: 21-36 (1977).
89. Penning, E., Lint, O., "Market entry, phased rollout or abandonment? A real option approach", ***European Journal of Operational Research***, 124: 125-138 (2000).
90. Platen, E., "Simulation Methods for Stochastic Differential Equations", International Handbook on Information Systems – Handbook on Information Technology in Finance, ***Springer***, (2008).
91. Polyanin, A. D., "Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists", ***Chapman & Hall/CRC***, (2001).
92. Ricciardi, L. M., "On the transformation of diffusion processes into the Wiener process", ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 54: 185-199 (1976).

93. Ricciardi, L. M., Sato, S., "A Note on the Evaluation of First-Passage-Time Probability Densities", ***Journal of Applied Probability***, 20: 197 - 201 (1983).
94. Rimcharoen, S., Sutivong, D., Chongstitvatana, P., "Real options approach to evaluating genetic algorithms", ***Applied Soft Computing***, 9: 896-905 (2009).
95. Risken, H. "The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications", 2. Basım, ***Springer-Verlag***, (1989).
96. Robbins, H., Siegmund, D., "Boundary crossing probabilities for the Wiener process and sample sums", ***The Annals of Mathematical Statistics***, 41 (5): 1410-1429 (1970).
97. Sabour, S. A. A., "Decision making with option pricing and dynamic programming: Development and application", ***Resources Policy***, 25: 257-264 (1999).
98. Salminen, P., "On the first hitting time and last exit time for a Brownian motion to/from a moving boundary", ***Advances in Applied Probability***, 20: 411-426 (1988).
99. Scheike, T. H., "A boundary-crossing result for Brownian motion", ***Journal of Applied Probability***, 29: 448-453 (1992).
100. De Schepper, A., Heijnen, B., "Distribution-free option pricing", ***Insurance: Mathematics and Economics***, 40: 179-199 (2007).
101. Schwartz, E. S., "The valuation of warrants: Implementing a new approach", ***Journal of Financial Economics***, 4: 79-93, (1977).
102. Scott, L. O., "Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation, and an application", ***Journal of Financial and Quantitative Analysis***, 22 (4): 419-438 (1987).
103. Sheep, L. A., Shirayayev, A. N., "The Russian option: Reduced regret", ***Annals of Probability***, 3: 631-640 (1993).
104. Sheep, L. A., Shirayayev, A. N., "A new look at pricing of the Russian option", ***Theory of Probability and Applications***, 39: 103-119 (1995).
105. Shirayayev, A. N. "Selected Works of A. N. Kolmogorov Volume II Probability Theory and Mathematical Statistics", ***Kluwer Academic*** (1992) (Kolmogorov, A. N. "Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung", ***Math. Ann.***, 104: 415-458 (1931)'den İngilizce çeviri).

106. Shreve, S. E., "Stochastic Calculus for Finance II: Continuous – Time models", **Springer**, (2004).
107. Smith, P. L., "Stochastic dynamic models of response time and accuracy: A foundational primer", **Journal of Mathematical Psychology**, 44: 408 – 463 (2000).
108. Stentoft, L., "Convergence of the least square monte Carlo approach to Americal option valuation", **Management Science**, 50(4): 1193-1203 (2004).
109. Stratonovich, R. L., " A new representation for stochastic integrals and equations", **SIAM Journal of Control**, 4: 362-371 (1966).
110. Subramanian, A., "European option pricing with general transaction costs and short-selling constraints", **Stochastic Models**, 17 (2): 215-245 (2001).
111. Taş, O., Yaşaroğlu, Ç., Tokmakçioğlu, K., "Finansal opsiyonlarla reel opsiyonların karşılaştırılması ve gerçek bir yatırım projesinde reel opsiyonların hesaplanması", **Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**, 22 (2): 339-355 (2007).
112. Teddy, S.D., Lai, E. M. –K., Quek, C., "A brain-inspired cerebellar associative memory approach to option pricing and arbitrage trading", **Lecture Notes in Computer Science, Neural Information Processing**, 4234: 370-379 (2006).
113. Tilley, J. A., "Valuing American options in a path simulation model", **Transactions, Society of Actuaries, Schaumburg XLV**, (1993).
114. Tuckwell, H. C., Wan, F. Y. M., "First-passage time of Markov process to moving barriers", **Journal of Applied Probability**, 21 (4): 695-709 (1984).
115. Uysal, E., "Yatırım projeleri analizinde Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin kullanımı", **Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Dergisi**, 56 (1): 135-148 (2001).
116. Valdivieso, L., Schountes, W., Tuerlinckx, F., "Maximum likelihood estimation in processes of Ornstein-Uhlenbeck type", **Statistical Inference and Stochastic Process**, 12: 1-19 (2009).
117. Vasicek, O., "An equilibrium characterization of the term structure", **Journal of Financial Economics**, 5: 177-188 (1977).
118. Whittaker, E. T., Watson, G. N., "A Course of Modern Analysis: An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic

Functions, with an Account of the Principal Transcendental Functions", 4. Basım, **Cambridge University Press**.

119. Yörük, N., "Arbitraj fiyatlama modelinde risk unsurları", **Atatürk Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi**, 14(1): 87 - 99, (2000).

EKLER

Ek-1 Kısmi diferansiyel denklem çözümü

Aşağıdaki diferansiyel denklemin çözümünü ele alalım:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(t, x) = f(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \omega(t, x) \quad (6.1)$$

Bu diferansiyel denklemde

$$\tau = \int f(t) dt, \quad z = x \quad (6.2)$$

dönüşümünü uygularsak

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \omega(\tau, z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \omega(\tau, z) \quad (6.3)$$

ısı denklemini elde ederiz (bkz. Polyanin [91], Kevorkian [63]). Bu diferansiyel denklemin çözümü bilindiği üzere

$$\omega(\tau, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{z^2}{4\tau}\right\} \quad (6.4)$$

ile verilir. O halde Eş. 6.1'in çözümü

$$\omega(t, x) = \omega\left(f^{-1}\left(\frac{d\tau}{dt}\right), x\right) \quad (6.5)$$

ile verilecektir.

Ek-2 Green fonksiyonları

Bu ekteki anlatım Polyanin [91]'den alınmıştır.

$$L_{x,t} = a(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,t) \frac{\partial}{\partial x} + c(x,t), \quad a(x,t) > 0 \quad (6.6)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - L_{x,t}[\omega] = \Phi(x,t) \quad (6.7)$$

kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Bu diferansiyel denklem için başlangıç koşulu

$$\omega(0, x) = f(x) \quad (6.8)$$

ve sınır koşulları

$$s_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + k_1(t) \omega = 0, \quad x = x_1, \quad (6.9)$$

$$s_2 \frac{\partial \omega}{\partial x} + k_2(t) \omega = 0, \quad x = x_2 \quad (6.10)$$

ile verilsin. Bu durumda Eş. 6.7 diferansiyel denkleminin çözümü

$$\omega(x,t) = \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y,\tau) G(x,y,t,\tau) dy d\tau + \int_{x_1}^{x_2} f(y) G(x,y,t,0) dy \quad (6.11)$$

olur; burada $G(x,y,t,\tau)$ Green fonksiyonu

$$\frac{\partial G}{\partial t} - L_{x,t}[G] = 0 \quad (6.12)$$

Ek-2. (devam) Green fonksiyonları

kısmi diferansiyel denkleminin

$$s_1 \frac{\partial G}{\partial x} + k_1(t)G = 0, \quad x = x_1, \quad (6.13)$$

$$s_2 \frac{\partial G}{\partial x} + k_2(t)G = 0, \quad x = x_2 \quad (6.14)$$

sınır değer koşullarına göre çözümü ile verilmektedir.

Ek-3 Kesikli zaman noktalarında gözlemlenen Ornstein – Uhlenbeck sürecinin tahmin edicileri

Difüzyon süreçlerinin kesikli noktalardaki gözlemleri üzerinden en küçük kareler yardımıyla elde edilen parametre tahmin edicilerinin tutarlılığı Kasonga [61] tarafından incelenmiştir. Long [74] ise çalışmasında, $[0,1]$ aralığını eşit olarak parçalayan noktalardaki gözlemlere dayanarak Lévy sürecinden elde edilen bir Ornstein – Uhlenbeck sürecinin en küçük kareler tahmin edicilerini incelemiştir. Bu çalışmaya paralel olarak Ornstein – Uhlenbeck süreci için $[0,1]$ 'in keyfi parçalanışlarında en küçük kareler tahmin edicilerinin tutarlılığı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Long [74]'un çalışmasına paralel olarak; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, üzerinde çalıştığımız olasılık uzayı ve $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ bu uzayda sağdan sürekli ve artan σ -cebirleri ailesi olsun ve standart Brownian hareketimiz bu filtreye uyarlanmış olsun. $x_0 \in \mathbb{R}$ başlangıç değerine sahip Ornstein – Uhlenbeck süreci;

$$dX_t = -\theta X_t dt + \varepsilon dB_t, \quad t \in [0,1], \quad X_0 = x_0 \quad (6.15)$$

stokastik diferansiyel denkleminin çözümü olarak tanımlansın. Burada tek bilinmeyen parametre θ 'dır. Bu parametrenin gerçek değerini θ_0 ile gösterelim. O halde Eş. 6.15'ün çözümü

$$X_t = e^{-\theta_0 t} x_0 + \varepsilon \int_0^t e^{-\theta_0(t-s)} dB_s \quad (6.16)$$

ile verilir. Elimizde bu parametreyi tahmin etmek için $[0,1]$ 'in bir parçalanışı olarak $(\tau_n) = (X_{t_i}, i = 1, 2, \dots, n)$ gözlemleri bulunsun. O halde; θ_0 parametresinin en küçük kareler tahmin edicisi;

$$\rho_{n,\varepsilon}(\theta) := \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}} + \theta X_{t_{i-1}} \Delta t_{i-1}|^2, \quad \Delta t_{i-1} = t_i - t_{i-1} \quad (6.17)$$

Ek-3. (devam) Kesikli zaman noktalarında gözlemlenen Ornstein – Uhlenbeck sürecinin tahmin edicileri

kareler toplamını en küçükleyen θ değeridir (bkz. Kasonga [61] ve Long[74]).
Bu durumda;

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \theta} \rho_{n,\varepsilon}(\theta) &= 2 \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} \Delta t_{i-1} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}} + \theta X_{t_{i-1}} \Delta t_{i-1}) = 0 \\
 \Rightarrow \theta \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) &= 0 \\
 \Rightarrow \hat{\theta}_{n,\varepsilon} &= - \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2}
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

olur. Ayrıca Ornstein – Uhlenbeck süreci için

$$X_{t_i} = e^{-\theta_0 \Delta t_{i-1}} X_{t_{i-1}} + \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s \tag{6.19}$$

olarak yazılabileceği ve bu sürecin Markov özelliği gösterdiğine dikkat edilmelidir. Eş. 6.19'i göstermek için Eş. 6.16'ü kullanarak

$$\begin{aligned}
 X_{t_i} &= e^{-\theta_0 \Delta t_{i-1}} \left(e^{-\theta_0 t_{i-1}} x_0 + \varepsilon \int_0^{t_{i-1}} e^{-\theta_0(t_{i-1}-s)} dB_s \right) + \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s \\
 &= e^{-\theta_0 t_i} x_0 + \varepsilon \int_0^{t_{i-1}} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s + \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s \\
 &= e^{-\theta_0 t_i} x_0 + \varepsilon \int_0^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

olduğu kolayca görülür. Eş. 6.19'i kullanarak $\hat{\theta}_{n,\varepsilon}$ aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

Ek-3. (devam) Kesikli zaman noktalarında gözlemlenen Ornstein – Uhlenbeck sürecinin tahmin edicileri

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{n,\varepsilon} &= - \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2} \\
&= - \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}} X_{t_i} - \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}}^2}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}}^2}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2} - \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}} \left(e^{-\theta_0 \Delta t_{i-1}} X_{t_{i-1}} + \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s \right)}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}}^2}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2} - \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} e^{-\theta_0 \Delta t_{i-1}} X_{t_{i-1}}^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} (1 - e^{-\theta_0 \Delta t_{i-1}}) X_{t_{i-1}}^2}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2} - \frac{\varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{n,\varepsilon} - \theta_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} (1 - e^{-\theta_0 \Delta t_{i-1}}) X_{t_{i-1}}^2}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2} - \theta_0 \\
&\quad - \frac{\varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s}{\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_{i-1})^2} \\
&:= \Phi_1(n, \varepsilon) - \theta_0 - \frac{\Phi_2(n, \varepsilon)}{\Phi_3(n, \varepsilon)}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Şimdi Φ_1 , Φ_2 ve Φ_3 'ü inceleyelim. Bu incelemede aşağıdaki lemma ve özelliklerden faydalanacağız:

6.1. Lemma: [74] $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ deterministik fonksiyonu $\int_0^1 f^\alpha(s) ds < \infty$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman $0 < q < \alpha$ için, öyle bir C sabiti vardır ki, bu sabit sadece q , α ve β 'ya bağlıdır ve

Ek-3. (devam) Kesikli zaman noktalarında gözlemlenen Ornstein – Uhlenbeck sürecinin tahmin edicileri

$$\left(E \left| \int_0^t f(s) dZ_s \right|^q \right)^{1/q} = C \left(\int_0^t f^\alpha(s) ds \right)^{1/\alpha} \quad (6.23)$$

sağlanır.

$$\begin{aligned} \Phi_1(n, \varepsilon) - \theta_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} (1 - e^{-\theta_0 \Delta t_{i-1}}) X_{t_{i-1}}^2}{\sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 X_{t_{i-1}}^2} - \theta_0 \\ &= \frac{X_{t_{i-1}}^2}{\sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 X_{t_{i-1}}^2} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^n \left\{ \Delta t_{i-1} \left[1 - \left(1 - \theta_0 \Delta t_{i-1} + \frac{(\theta_0 \Delta t_{i-1})^2}{2!} - \dots \right) \right] - (\Delta t_{i-1})^2 \theta_0 \right\} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \left[\Delta t_{i-1} \left(\theta_0 \Delta t_{i-1} - \frac{(\theta_0 \Delta t_{i-1})^2}{2!} + \dots \right) - (\Delta t_{i-1})^2 \theta_0 \right] X_{t_{i-1}}^2}{\sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 X_{t_{i-1}}^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(-\theta_0^2 \frac{(\Delta t_{i-1})^3}{2!} + \theta_0^3 \frac{(\Delta t_{i-1})^4}{3!} - \dots \right) X_{t_{i-1}}^2}{\sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 X_{t_{i-1}}^2} \end{aligned} \quad (6.24)$$

O halde

$$\begin{aligned} |\Phi_1(n, \varepsilon) - \theta_0| &= \frac{\left| \sum_{i=1}^n \left(-\theta_0^2 \frac{\Delta t_{i-1}}{2!} + \theta_0^3 \frac{(\Delta t_{i-1})^2}{3!} - \dots \right) (\Delta t_{i-1})^2 X_{t_{i-1}}^2 \right|}{\sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 X_{t_{i-1}}^2} \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^n \left| -\theta_0^2 \frac{\Delta t_{i-1}}{2!} + \theta_0^3 \frac{(\Delta t_{i-1})^2}{3!} - \dots \right| \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 X_{t_{i-1}}^2}{\sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 X_{t_{i-1}}^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \left| -\theta_0^2 \frac{\Delta t_{i-1}}{2!} + \theta_0^3 \frac{(\Delta t_{i-1})^2}{3!} - \dots \right| \end{aligned} \quad (6.25)$$

Ek-3. (devam) Kesikli zaman noktalarında gözlemlenen Ornstein – Uhlenbeck sürecinin tahmin edicileri

olup $mesh(\tau_n) \rightarrow 0$ iken $\sum_{i=1}^n \left| -\theta_0^2 \frac{\Delta t_{i-1}}{2!} + \theta_0^3 \frac{(\Delta t_{i-1})^2}{3!} - \dots \right| \rightarrow 0$ olduğundan $mesh(\tau_n) \rightarrow 0$ iken

$$|\Phi_1(n, \varepsilon) - \theta_0| \rightarrow 0 \quad (6.26)$$

olur.

$$\begin{aligned} \Phi_2(n, \varepsilon) &= \varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} X_{t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} \left(e^{-\theta_0 t_{i-1}} x_0 + \varepsilon \int_0^{t_{i-1}} e^{-\theta_0(t_{i-1}-s)} dB_s \right) \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s \\ &= \varepsilon x_0 \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} e^{-\theta_0(t_i+t_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\theta_0 s} dB_s \\ &\quad + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} \int_0^{t_{i-1}} e^{-\theta_0(t_{i-1}-s)} dB_s \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s \\ &= \Phi_{2,1}(n, \varepsilon) + \Phi_{2,2}(n, \varepsilon) \end{aligned}$$

(6.27)

son eşitlikteki her bir toplam ifadelerini ayrı ayrı inceleyelim.

Çebişev eşitsizliği ve Ito stokastik integralinin izometri özelliğini kullanarak

Ek-3. (devam) Kesikli zaman noktalarında gözlemlenen Ornstein – Uhlenbeck sürecinin tahmin edicileri

$$\begin{aligned}
P\{|\Phi_{2,1}(n, \varepsilon)| > \delta\} &\leq \frac{1}{\delta^2} E \left| \varepsilon x_0 \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} e^{-\theta_0(t_i+t_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\theta_0 s} dB_s \right|^2 \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \varepsilon^2 x_0^2 \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 e^{-2\theta_0(t_i+t_{i-1})} E \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\theta_0 s} dB_s \right|^2 \\
&= \frac{1}{\delta^2} \varepsilon^2 x_0^2 \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 e^{-2\theta_0(t_i+t_{i-1})} \left[\frac{1}{2\theta_0} (e^{2\theta_0 t_i} - e^{2\theta_0 t_{i-1}}) \right] \\
&= \frac{1}{\delta^2} \varepsilon^2 x_0^2 \frac{1}{2\theta_0} \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 e^{-2\theta_0(t_i+t_{i-1})} (e^{2\theta_0 t_i} - e^{2\theta_0 t_{i-1}}) \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \varepsilon^2 x_0^2 \frac{1}{2\theta_0} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} e^{-2\theta_0(t_i+t_{i-1})} \right]}_{\substack{\text{mes } h(\tau_n) \rightarrow 0 \text{ iken} \\ = \int_0^{t_n} e^{4\theta_0 t} dt}} \\
&\quad \times \underbrace{\left[\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} (e^{2\theta_0 t_i} - e^{2\theta_0 t_{i-1}}) \right]}_{\substack{\text{mes } h(\tau_n) \rightarrow 0 \text{ iken} \\ = \int_0^{t_n} e^{2\theta_0 t} - e^{2\theta_0 t} dt = 0}} \\
\end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\therefore \varepsilon \rightarrow 0 \text{ iken } P\{|\Phi_{2,1}(n, \varepsilon)| > \delta\} \rightarrow 0 \tag{6.29}$$

olur. Benzer biçimde

$$\begin{aligned}
P\{|\Phi_{2,2}(n, \varepsilon)| > \delta\} &\leq \frac{1}{\delta^2} E \left| \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} \int_0^{t_{i-1}} e^{-\theta_0(t_{i-1}-s)} dB_s \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta_0(t_i-s)} dB_s \right|^2 \\
&= \frac{1}{\delta^2} \varepsilon^4 \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} e^{-2\theta_0 t_{i-1}} e^{-2\theta_0 t_i} \left[\frac{1}{2\theta_0} (e^{2\theta_0 t_{i-1}} - 1) \right] \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2\theta_0} (e^{2\theta_0 t_i} - e^{2\theta_0 t_{i-1}}) \right] \\
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Ek-3. (devam) Kesikli zaman noktalarında gözlemlenen Ornstein – Uhlenbeck sürecinin tahmin edicileri

olup son ifade $mesh(\tau_n) \rightarrow 0$ iken $\frac{1}{4\theta_0^2} \int_0^{t_n} e^{-4\theta_0 t} (e^{2\theta_0 t} - 1)(e^{2\theta_0 t} - e^{2\theta_0 t}) dt = 0$ olduğundan

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ iken } P\{|\Phi_{2,2}(n, \varepsilon)| > \delta\} \rightarrow 0 \quad (6.31)$$

olur. O halde

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ iken } P\{|\Phi_2(n, \varepsilon)| > \delta\} \rightarrow 0 \quad (6.32)$$

sağlanır. Benzer incelemeyi Φ_3 için yapalım.

$$\begin{aligned} \Phi_3(n, \varepsilon) &= \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 X_{t_{i-1}}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 \left(x_0 e^{-\theta_0 t_{i-1}} + \varepsilon \int_0^{t_{i-1}} e^{-\theta_0(t_{i-1}-s)} dB_s \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 \left[x_0^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} + \varepsilon^2 \left(\int_0^{t_{i-1}} e^{-\theta_0(t_{i-1}-s)} dB_s \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2x_0 e^{-\theta_0 t_{i-1}} \varepsilon \int_0^{t_{i-1}} e^{-\theta_0(t_{i-1}-s)} dB_s \right] \end{aligned} \quad (6.33)$$

Son eşitlikteki her bir toplam ifadesini sırasıyla $\Phi_{3,i}(n, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$ ile gösterelim ve tek tek inceleyelim.

Ek-3. (devam) Kesikli zaman noktalarında gözlemlenen Ornstein – Uhlenbeck sürecinin tahmin edicileri

$$\begin{aligned}
\Phi_{3,1}(n, \varepsilon) &= \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 x_0^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} \\
&\geq \sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} x_0^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} \rightarrow \int_0^{t_n} x_0^2 e^{-2\theta_0 t} dt \quad (mesh(\tau_n) \rightarrow 0) \\
|\Phi_{3,1}(n, \varepsilon)| &= \left| \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 x_0^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |(\Delta t_{i-1})^2 x_0^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}}| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |\Delta t_{i-1} x_0 e^{-\theta_0 t_{i-1}}| \right)^2 \rightarrow \left(\int_0^{t_n} x_0 e^{-\theta_0 t} dt \right)^2 \quad (mesh(\tau_n) \rightarrow 0)
\end{aligned}
\tag{6.34}$$

O halde $mesh(\tau_n) \rightarrow 0$ iken $\infty > \Phi_{3,1}(n, \varepsilon) > 0$ sağlanır.

$$\begin{aligned}
P\{|\Phi_{3,2}(n, \varepsilon)| > \delta\} &\leq \frac{1}{\delta} E \left| \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 \varepsilon^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} \left(\int_0^{t_{i-1}} e^{\theta_0 s} dB_s \right)^2 \right| \\
&\leq \frac{1}{\delta} \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} E \left| \int_0^{t_{i-1}} e^{\theta_0 s} dB_s \right|^2 \\
&= \frac{1}{\delta} \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} (e^{2\theta_0 t_{i-1}} - 1) \\
&\leq \frac{1}{\delta} \varepsilon^2 \frac{1}{2\theta_0} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} e^{-2\theta_0 t_{i-1}} \right)}_{\substack{mesh(\tau_n) \rightarrow 0 \text{ iken} \\ = \int_0^{t_n} e^{-2\theta_0 t} dt}} \\
&\quad \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} (e^{2\theta_0 t_{i-1}} - 1) \right)}_{\substack{mesh(\tau_n) \rightarrow 0 \text{ iken} \\ = \int_0^{t_n} e^{2\theta_0 t} - 1 dt}}
\end{aligned}
\tag{6.35}$$

Ek-3. (devam) Kesikli zaman noktalarında gözlemlenen Ornstein – Uhlenbeck sürecinin tahmin edicileri

O halde

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ iken } P\{|\Phi_{3,2}(n, \varepsilon)| > \delta\} \rightarrow 0 \quad (6.36)$$

olur.

$$\begin{aligned}
 P\{|\Phi_{3,3}(n, \varepsilon)| > \delta\} &\leq \frac{1}{\delta} E \left| \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 2x_0 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} \varepsilon \int_0^{t_{i-1}} e^{\theta_0 s} dB_s \right| \\
 &\leq \frac{1}{\delta} 2x_0 \varepsilon \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} E \left| \int_0^{t_{i-1}} e^{\theta_0 s} dB_s \right| \\
 &\leq \frac{1}{\delta} 2x_0 \varepsilon \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} \left(\int_0^{t_{i-1}} e^{2\theta_0 s} ds \right)^{1/2} \\
 &= \frac{1}{\delta} 2x_0 \varepsilon \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} \left[\frac{1}{2\theta_0} (e^{2\theta_0 t_{i-1}} - 1) \right]^{1/2} \\
 &= \frac{1}{\delta} 2x_0 \varepsilon \left(\frac{1}{2\theta_0} \right)^{1/2} \sum_{i=1}^n (\Delta t_{i-1})^2 e^{-2\theta_0 t_{i-1}} (e^{2\theta_0 t_{i-1}} - 1) \\
 &\leq \frac{1}{\delta} 2x_0 \varepsilon \left(\frac{1}{2\theta_0} \right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} e^{-2\theta_0 t_{i-1}} \right)}_{\substack{\text{mes } h(\tau_n) \rightarrow 0 \text{ iken} \\ = \int_0^{t_n} e^{-2\theta_0 t} dt}} \\
 &\quad \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1} (e^{2\theta_0 t_{i-1}} - 1) \right)}_{\substack{\text{mes } h(\tau_n) \rightarrow 0 \text{ iken} \\ = \int_0^{t_n} (e^{2\theta_0 t} - 1) dt}}
 \end{aligned} \quad (6.37)$$

O halde $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $P\{|\Phi_{3,3}(n, \varepsilon)| > \delta\} \rightarrow 0$ olur. Böylece $\text{mesh}(\tau_n) \rightarrow 0$ ve $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\hat{\theta}_{n,\varepsilon} - \theta_0 \rightarrow_p 0$ sağlanır.

Ek – 4. Ornstein-Uhlenbeck sürecinin simülasyonu

$\{X_t\}$ süreci $[0, \Theta]$ zaman aralığında

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0 \quad (6.38)$$

denkleminin çözümü ile tanımlı olsun. $[0, \Theta]$ aralığının bir parçalanışını

$$\tau_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.39)$$

ile tanımlı $\{\tau_n\}$ dizisi olarak alalım ve

$$y_{n+1} = y_n + \mu(y_n)h + \sigma(y_n)\Delta W_{n+1}, \quad y_0 = x_0 \quad (6.40)$$

olmak üzere $Y(\tau_n) = y_n$ olan $\{Y_t\}$ sürecini göz önüne alalım. Eş. 6.40 ile tanımlanan süreç Eş. 6.38 diferansiyel denkleminin çözümü için Euler fark yöntemi uygulanmasıyla elde edilmiştir [90, 70]. Burada $\Delta W_{n+1} \sim N(0, h)$ olan bağımsız rastgele değişkenlerdir. Bu durumda Y_t süreci $h \rightarrow 0$ iken $\{X_t\}$ sürecine yakınsayacaktır [45]. Bu sayede $\{X_t\}$ sürecinin simülasyonu $\{y_n\}$ ile gerçekleştirilebilir.

Ek – 5. En küçük kareler Monte Carlo yöntemi

En küçük kareler Monte Carlo (EKMC) [75] yönteminde, yeteri kadar kısa aralıklarda erken uygulama noktalarına sahip olan Bermuda opsiyonları yardımıyla Amerikan opsiyonlarına yaklaşılr. Opsiyonun geçerlilik süresi T olmak üzere b adet erken uygulama zamanlarını $0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_b = T$ ile gösterelim. Bu zaman noktalarında, opsiyona konu olan varlığın değerine ilişkin n tane örnek yol, uygun bir şekilde seçilecek $\phi(u, S_{i,t_{j-1}}, t_{j-1}, t_j)$ için

$$\begin{aligned} S_{i,t_j} &= \phi(u, S_{i,t_{j-1}}, t_{j-1}, t_j), \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, b \\ S_{i,t_0} &= s_0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (6.41)$$

ile verilsin. Burada $s_0 \in \mathbb{R}^+$ sabit bir sayı olup, $u \sim U(0,1)$ 'dir. Bir i örnek yolu için $t_j, j = 1, \dots, b$ anındaki opsiyonun ödemesini $C(t_j, S_{i,t_j})$ ile gösterirsek

$$C(t, S_{i,t}) = \begin{cases} \max\{S_{i,t} - K, 0\} & \text{, satış opsiyonu ise} \\ \max\{K - S_{i,t}, 0\} & \text{, alım opsiyonu ise} \end{cases} \quad (6.42)$$

olur.

Longstaff ve Schwartz [75] çalışmalarında opsiyonun değerini şu yöntem ile tahmin etmeyi önermektedirler: T anından geriye doğru örnek yolları incelenir. Bu inceleme şu şekilde yapılır: önce her $i = 1, \dots, n$ için opsiyonun optimum uygulama zamanı olarak $t^*(i) = T$ alınır. Bir $t_j, j = 1, \dots, b - 1$ anında opsiyonun uygulamaya değer olduğu yollar $i_1, \dots, i_{n^*}$ ile gösterilir ve her bir $i = i_1, \dots, i_{n^*}$ için opsiyona devam etmenin bugüne indirgenmiş değeri $F(t_j, S_{i,t_j})$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$F(t_j, S_{i,t_j}) = e^{-r(t_{j+1}-t_j)} C(t_{j+1}, S_{i,t_{j+1}}), \quad i = i_1, \dots, i_{n^*}; j = 0, \dots, b - 1 \quad (6.43)$$

Ek – 5.(devam) En küçük kareler Monte Carlo yöntemi

Burada F fonksiyonunun yapısı kesin olarak bilinmediğinden $F(t_j, S_{i,t_j}) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{j+1,k} \psi_k(S_{i,t_j})$ alınır. Burada ψ_k fonksiyonları Chebyshev, Gegenbauer, Hermite, Jacobi, Laguerre, Legendre gibi temel fonksiyonlardan birisidir (Moreno ve Naves [82] ile Stentoft [108] bu polinomların önerilen opsiyon değerlendirme yöntemine etkilerini incelemişlerdir). F fonksiyonunun iyi bir yaklaşımı yeteri kadar büyük bir M değeri için $F_M(t_j, S_{i,t_j}) = \sum_{k=0}^M \beta_{j+1,k} \psi_k(S_{i,t_j})$ ile verilebilir. Buradaki her bir $j = 0, \dots, b - 1$ için $\beta_{j+1,k}$ katsayılarının tahmini, S_{i,t_j} ile $F(t_j, S_{i,t_j})$ değerlerini regresyona tabi tutarak elde edilir. $\beta_{j+1,k}$ katsayılarının tahminleri olan $\hat{\beta}_{j+1,k}$ değerleri yardımıyla

$$\hat{F}(t_j, S_{i,t_j}) = \sum_{k=0}^M \hat{\beta}_{j+1,k} \psi_k(S_{i,t_j}) \quad (6.44)$$

devam etmenin değeri tahmin edilir. Eğer

$$C(t_j, S_{i,t_j}) > \hat{F}(t_j, S_{i,t_j}) \quad (6.45)$$

ise $t^*(i) = t_j$ alınarak bu işlemler ilk gözleme kadar devam ettirilir. Bu sayede her bir yol için opsiyonun değeri hesaplandıktan sonra, opsiyonun değeri

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-rt^*(i)} C(t^*(i), S_{i,t^*(i)}) \quad (6.46)$$

olarak tahmin edilir.

Ek – 5.(devam) En küçük kareler Monte Carlo yöntemi

En küçük kareler Monte Carlo yönteminin algoritması aşağıdaki şekilde verilebilir:

1. Başlangıç parametrelerinin belirlenmesi

- a. Temel fonksiyonda kullanılacak terim sayısı M ve üretilecek örnek yol sayısı n 'yi belirle.
- b. Her örnek yol için opsiyonu uygulama zamanı olarak T 'yi ata.

2. Tekrar süreci

- a. Her bir zaman için kâr (in-money) olan örnek yollarında devam etmenin bugünkü değerini hesapla.
- b. Opsiyona devam etmenin bugünkü değeri ile opsiyona konu olan varlığın bugünkü değerini, kullanılan temel fonksiyon yardımıyla regresyona tabii tut.
- c. Tahmin edilen model ile her bir kâr (in-money) durumunda olan örnek yol için, devam etmenin bugünkü değerini tahmin et.
- d. Eğer opsiyonu bugün uygulamak, tahmin edilen gelecek değerden daha değerli ise en iyi uygulama zamanını bugün olarak al.
- e. Başlangıç zamanına gelene kadar bu işlemleri tekrarla.

3. Her bir yol için elde edilen en iyi uygulama zamanlarını kullanarak, opsiyonun ortalama değerini hesapla.

EK – 6. Brownian Süreç

Bu ekde, Brownian hareketin modellenmesi için kullanılan varsayımlar ile hareketin modellenmesi anlatılacaktır. Bu anlatımda, büyük ölçüde Gardiner (Kesim 1.2) [42]'in Einstein [39]'in İngilizce tercümesinden faydalanılmıştır.

Brownian hareket için kullanılan varsayımlar

1. Hareket, polenin daldırıldığı sıvının hiç durmadan hareket eden moleküllerinin çok fazla sıklıktaki etkisiyle gerçekleşir.
2. Polenin hareketine neden olan moleküllerin davranışları o derece karışıktır ki, bu hareketlerin polene olan etkileri sadece çok fazla sıklıktaki bağımsız etkilerce belirlenen olasılıklarla ifade edilebilir.
3. Herbir parçacık diğer parçacıklardan bağımsız olarak hareket eder.
4. Zaman aralıkları çok küçük seçilmediği müddetçe bir parçacığın farklı zaman aralıklarındaki hareketleri bağımsızdır.

Şimdi bir τ zaman aralığını alalım. Bu zaman aralığı, gözlemlenebilen zaman aralıklarına göre çok küçük, fakat ardışık zaman aralıklarında parçacığın hareketinin bağımlı olacağını düşündürmeyecek kadar uzun olsun.

Bu sıvı içinde n tane parçacık (polen) bulunsun. Bu τ zaman aralığında, herbir parçacığın X -ekseni Δ miktarda (herbir parçacık için Δ farklı (negatif veya pozitif) değerlidir) değişecektir. Δ için kesin olarak bir “sıklık kuralı” olacaktır: Δ ve $\Delta + d\Delta$ aralığında bir ötelemeye karşılaşan parçacık sayısı dn ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta) d\Delta = 1 \quad (6.47)$$

olmak üzere

EK – 6. (devam) Brownian Süreç

$$dn = n\phi(\Delta)d\Delta \quad (6.48)$$

biçiminde ifade edilebilecektir. Burada ϕ , Δ 'nın çok küçük değerleri için sıfırdan farklıdır ve $\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$ 'dir.

Şimdi, sadece x ve t 'ye bağlı bir birimlik bir alanda, $v = f(x, t)$ ile bu alandaki parçacık sayısını gösterelim. t zamanındaki dağılımdan $t + \tau$ zamanındaki dağılımı hesaplayacağız. $\phi(\Delta)$ fonksiyonunun tanımından, $t + \tau$ anında x -eksenine dik iki düzlem arasında bulunan ve x ve $x + dx$ noktalarından geçen parçacık sayısını bulmak kolaydır:

$$f(x, t + \tau)dx = dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \Delta, t)\phi(\Delta)d\Delta \quad (6.49)$$

olduğu gösterilebilir.

τ yeteri kadar küçük olduğundan

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6.50)$$

alabiliriz. Ayrıca $f(x + \Delta, t)$ 'yi Δ 'nın kuvvetlerine göre seriye açarsak:

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \quad (6.51)$$

Bu seriyi integral altında kullanırsak:

$$f + \frac{\partial f}{\partial t} \tau = f \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2!} \phi(\Delta)d\Delta \dots \quad (6.52)$$

EK – 6. (devam) Brownian Süreç

elde ederiz. $\phi(x) = \phi(-x)$ olduğundan eşitliğin sağ tarafındaki ikinci, dördüncü... terimler sıfır olacaktır. Birinci, üçüncü, beşinci... terimlerin katkısı ise bir öncekiyle kıyaslandığında her seferinde daha da küçülecektir. Bu sayede

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta) d\Delta = D \quad (6.53)$$

olarak alırsak

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (6.54)$$

elde ederiz.

Ek – 7. Ornstein – Uhlenbeck Süreci

Bu modelin açıklanması ve Ornstein-Uhlenbeck süreçlerinin elde edilmesi izleyen kesimde büyük ölçüde Risken [95]'in açıklama ve tartışmalarının tercümeleleri kullanılarak sunulmuştur.

Fiziksel tanımı⁵

Eğer m kütleline sahip küçük bir parçacık bir sıvı içine daldırılırsa, bir sürtünme (*friction*) kuvveti bu parçacığa etki edecektir. Bu türden bir sürtünme veya yavaşlatma (*damping*) kuvvetinin en basit açıklaması Stokes kanunu tarafından verilir:

$$F_c = -\alpha v \quad (6.55)$$

Bu nedenle farklı kuvvetlerin yokluğunda parçacığın hareketinin denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$mv' + \alpha v = 0 \quad (6.56)$$

veya

$$v' + \gamma v = 0, \quad \gamma = \frac{\alpha}{m} = \frac{1}{\tau} \quad (6.57)$$

O halde bir $v(0)$ başlangıç hızı aşağıdaki bağıntı ile sıfıra doğru gidecektir:

$$v(t) = v(0)e^{-t/\tau} = v(0)e^{-\gamma t} \quad (6.58)$$

Bu sürtünmenin arkasındaki fizik sıvı moleküllerinin parçacık ile çarpışmasıdır. Parçacığın momentumu, sıvı moleküllerine geçer ve bu nedenle parçacığın hızı azalarak sıfıra gider. Eş. 6.57'de geçen diferansiyel

⁵Risken [95]

Ek – 7. (devam) Ornstein – Uhlenbeck Süreci

denklem deterministik, yani; t zamanındaki hız tamamen onun başlangıç hızı $v(0)$ ile Eş. 6.58'den belirlenir.

Eş. 6.56'de geçen deterministik eşitlik sadece parçacığın kütlesinin çok büyük olması durumunda geçerlidir, çünkü bu durumda termal dalgalanmalar ihmal edilebilirler. Eşit bölüştürme kuralı (*equipartition law*) nedeniyle, parçacığın ortalama enerjisi

$$\frac{1}{2}mE[v^2] = \frac{1}{2}kT \quad (6.59)$$

ile verilir. Burada k Boltzmann sabiti ve T sıcaklıktır. Küçük m kütleleri için termal hız $v_{th} = \sqrt{kT/m}$ gözlemlenebilir ve bu nedenle küçük parçacıkların hızları Eş. 6.57 ile tam olarak açıklanamaz. Eğer parçacığın kütlesi, moleküllerin kütlesine nazaran hâlâ büyük kalıyorsa, Eş. 6.56 yaklaşık bir çözüm olarak hâlâ geçerli olur. Buna rağmen, Eş. 6.56 doğru Eş. 6.59 termal enerjisi ile düzeltilmelidir. Bu düzeltme, Eş. 6.56'nin sağ tarafına bir $F_f(t)$ dalgalanma kuvveti eklemekle yapılabilir; yani, moleküller tarafından küçük parçacığa etki eden toplam kuvvet, sürekli bir güç azaltma kuvveti $F_c(t)$ ve bir dalgalanma kuvveti $F_f(t)$ 'ye parçalanabilir (Langevin)

$$F(t) = F_c(t) + F_f(t) = -\alpha v(t) + F_f(t) \quad (6.60)$$

Buradaki $F_f(t)$ kuvveti stokastik bir kuvvet olup, özellikleri sadece ortalama üzerinden verilebilmektedir.

Burada stokastik bir kuvvetin neden oluştuğunu biraz tartışalım. Eğer probleme deterministik olarak yaklaşırsak sıvı içindeki bütün moleküllerin ve küçük parçacığın birbirleriyle olan etkileşimlerinden hareket denklemini çıkartmamız gerekir. Fakat sıvı içindeki molekül sayısının çok fazla olması nedeniyle bu tür etkileşimleri çözmek çok zordur. Ayrıca, sıvı içindeki bütün

Ek – 7. (devam) Ornstein – Uhlenbeck Süreci

moleküllerin başlangıç değerlerini bilmediğimizden, sıvı nedeniyle parçacıkta oluşan hareketi hesaplayamayız. Eğer sıvının başlangıç değerleri hariç ilk sisteme (parçacık ve sıvı) benzer bir başka sistem kullanırsak, parçacığın farklı bir hareketiyle karşılaştık. Termodinamikte sıkça yapıldığı gibi bu türden sistemlerin bir topluluğunu (Gibbs topluluğu) ele alacağız. $F_f(t)$ kuvveti sistemden sisteme değişmektedir ve bu kuvvet için sadece ortalamalar üzerinden bilgi edinebiliriz.

Eş. 6.60'ü Eş. 6.56'da yerine yazar ve sonucu kütleyle oranlarsak aşağıdaki hareket denklemini elde ederiz:

$$v' + \gamma v = \Gamma(t) \quad (6.61)$$

Burada parçacık başına düşen dalgalanma kuvveti

$$\Gamma(t) = \frac{F_f(t)}{m} \quad (6.62)$$

'dir ve buna Langevin kuvveti denir. Daha ileriye gitmeden önce $\Gamma(t)$ Langevin kuvvetinin bazı özelliklerini inceleyelim. Öncelikle bu kuvvetin sistemler üzerinden ortalaması sıfır olmalıdır; yani

$$E[\Gamma(t)] = 0; \quad (6.63)$$

çünkü, hızın ortalama hareket denklemi Eş. 6.56 ile verilmelidir. Ayrıca iki Langevin kuvvet arasındaki zaman farkı τ_0 çarpışma zamanından daha fazla ise, çarpımları sıfır olmalıdır; yani, $|t - t'| \geq \tau_0$ ise

$$E[\Gamma(t)\Gamma(t')] = 0 \quad (6.64)$$

olmalıdır. Bu varsayım mantıklıdır; çünkü parçacık ile sıvı içindeki moleküllerin çarpışmaları hemen hemen birbirlerinden bağımsız olarak

Ek – 7. (devam) Ornstein – Uhlenbeck Süreci

gerçekleşir. Genellikle, bir çarpışmanın gerçekleşme süresi τ_0 , parçacığın hızının değişme süresi $\tau = 1/\gamma'$ 'dan daha küçüktür. Bu nedenle $\tau_0 \rightarrow 0$ limitini kabul edilebilir bir yaklaşım olarak aşağıdaki şekilde

$$E[\Gamma(t)\Gamma(t')] = q\delta(t - t') \quad (6.65)$$

alabiliriz; burada δ fonksiyonu eşitlikte yer almalıdır; aksi halde parçacığın ortalama enerjisi Eş. 6.59'de eşit parçalanma kuralı nedeniyle sonlu olmazdı.

Ek – 8. Bürmann teoremi

6.2. Teorem: (Bürmann Teoremi, bkz. Whittaker ve Watson [118] sf. 129) f ve ϕ analitik fonksiyonlar olmak üzere $\phi(a) = b$ ve $\psi(z) = \frac{z-a}{\phi(z)-b}$ olsun. O zaman, z 'nin uygun bir komşuluğu için

$$f(z) = f(a) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{[\phi(z) - b]^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} [f'(a)\psi^m(a)] + R_n \quad (6.66)$$

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_a^z \int_{\gamma} \left[\frac{\phi(z) - b}{\phi(t) - b} \right]^{n-1} \frac{f'(t)\phi'(z)}{\phi(t) - \phi(z)} dt dz \quad (6.67)$$

sağlanır; burada γ çevresi a ve z noktalarını çevreleyen ve $\phi(t) = \phi(z)$ eşitliğinin bu çevrenin içindeki ζ noktaları için sadece $\zeta = t$ iken sağlanacak biçimde seçilmelidir.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AKSOP, Cihan
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 14.04.1985 Ankara
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (312) 283 91 44
 Faks :
 e-mail : caksop@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi/İstatistik Bölümü	
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/İstatistik Bölümü	2008
Lisans	Gazi Üniversitesi/İstatistik Bölümü	2007
Lisans	Anadolu Üniversitesi/İşletme Bölümü	2008
Çift anadal	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	2007

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2007-2012	TÜBİTAK	Uzman Yardımcısı

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Aksop, C., Bakır, M. A., "Zaman Çizelgeleme Problemi: Tamsayılı Optimum Ders Programının Oluşturulması", **5. İstatistik Günleri Sempozyumu**, 232 – 238, 2006.

2. Esen, P., Aksop, C., “Dayanıklılık Parametresi İçin Yeni Bir Test”, **6. İstatistik Günleri Sempozyumu**, 194 – 196, 2009.
3. Aksop, C., Çelebioğlu, S., “Joint Distribution of any record Value and an Order Statistics”, **International Mathematical Forum**, 4 (22): 1091-1103 (2009).
4. Aksop, C., “On a Modification of Operators”, **International Mathematical Forum**, 4(45): 2211-2215 (2009).
5. Aksop, C., “God’s algorithm for Rubik’s Cube: An Integer Programming Approach”, **International Mathematical Forum**, 4(45): 2217-2222 (2009).
6. Aksop, C., “A Study on Forecasting Methods Based on Smoothing Techniques”, **International Mathematical Forum**, 5(22): 1049-1057 (2010).
7. Aksop, C., Çelebioğlu, S., Khaniyev, T., “Ornstein-Uhlenbeck Sürecinin Bir Sınır Fonksiyonelinin Momentleri Üzerine”, **Uluslararası 7. İstatistik Kongresi**, 140-141 (2011).
8. Khaniyev, T., Aksop, C., “Asymptotic Results for an Inventory Model of Type (s,S) with a Generalized Beta Interference of Chance”, **TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics**, 1(2): 223-236 (2011).

Hobiler

Satranç