



**OPTİK ÖRGÜLERDE ULTRA-SOĞUK  
ATOMLARLA OLUŞTURULAN KUANTUM  
SİMÜLASYONLARI  
Yüksek Lisans Tezi**

**Rüveyde ERGÜN**

**Eskişehir 2025**

**OPTİK ÖRGÜLERDE ULTRA-SOĞUK ATOMLARLA OLUŞTURULAN  
KUANTUM SİMÜLASYONLARI**

**Rüveyde ERGÜN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Fizik Anabilim Dalı**

**Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Bilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Züleyha ÖZTAŞ**

**Eskişehir**

**Eskişehir Teknik Üniversitesi**

**Lisansüstü Eğitim Enstitüsü**

**Haziran 2025**

*Bu tez çalışması BAP Komisyonu tarafından kabul edilen 24LÖT206 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.*

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Rüveyde ERGÜN'nün OPTİK ÖRGÜLERDE ULTRA-SOĞUK ATOMLARLA OLUŞTURULAN KUANTUM SİMÜLASYONLARI başlıklı çalışması 23/06/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Fizik Anabilim dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### Unvan Adı Soyadı

### İmza

Üye

: Doç. Dr. Züleyha ÖZTAŞ

Üye

: Prof. Dr. M. Zafer BALBAĞ

Üye

: Doç. Dr. Neslihan ŞAHİN

Prof. Dr. Harun BÖCÜK

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

23/06/2025

## DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm Yüksek Lisans ęrencisi Rüveyde ERGÜN, OPTİK ÖRGÜLERDE ULTRA-SOğUK ATOMLARLA OLUşTURULAN KUANTUM SİMÜLASYONLARI başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Daniřmanı

Doç. Dr. Züleyha ZTAř

**ÖZET**  
**OPTİK ÖRGÜLERDE ULTRA-SOĞUK ATOMLARLA OLUŞTURULAN**  
**KUANTUM SİMÜLASYONLARI**

Rüveyde ERGÜN

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Haziran 2025

Danışman: Doç. Dr. Züleyha ÖZTAŞ

Optik örgü potansiyellerinde tuzaklanan ultra-soğuk bozonik atomların kuantum simülasyon çalışmalarında önemli bir yeri bulunmaktadır. Optik örgü parametrelerinin ve bozonlar arası etkileşimlerin ayarlanabilir olması, bu tür sistemlerde faz geçişlerinin kontrol edilebilmesini sağlar. Fazlar arası geçiş kuantum bilişiminde yaygın olarak kullanılmaktadır. Özellikle örgü noktaları arasında tünellemenin baskılandığı Mott yalıtkan fazı kubitler ile eşleştirilmektedir.

Bozonların optik örgü potansiyellerindeki davranışını incelemek için Bose-Hubbard modeli kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında özellikle çok sayıda uygulama alanı bulunan üç kuyulu Bose-Hubbard modeli teorik olarak ele alınmıştır. Atomlar arası dipolar etkileşimlerin ve zamana bağlı tünelleme genliklerinin faz geçişleri üzerine etkileri incelenmiştir. Süperakışkan ve Mott yalıtkan fazlarına ilişkin, literatür ile uyumlu nümerik sonuçlar elde edilmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Optik örgü, Ultra-soğuk atomlar, Bose-Hubbard modeli, Kuantum simülasyonları.

## ABSTRACT

### QUANTUM SIMULATIONS GENERATED BY ULTRA-COLD ATOMS IN OPTICAL LATTICES

Rüveyde ERGÜN

Department of Physics

Programme in High Energy and Plasmas Physics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, June 2025

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Züleyha ÖZTAŞ

Ultra-cold bosonic atoms trapped in optical lattice potentials have an important role in quantum simulation studies. The adjustable optical lattice parameters and interactions between bosons allow phase transitions to be controlled in such systems. Interphase transitions are widely used in quantum computing. In particular, the Mott insulator phase, where tunneling between lattice sites is suppressed, is matched with qubits.

The Bose-Hubbard model is used to analyze the behavior of bosons in the optical lattice potentials. In this thesis, the three-well Bose-Hubbard model, which has many application areas, was theoretically considered. The effects of interatomic dipolar interactions and time-dependent tunneling amplitudes on phase transitions were investigated. Numerical results for the superfluid and Mott insulator phases, which are compatible with the literature, have been obtained.

**Keywords:** Optical lattice, Ultra-cold atoms, Bose-Hubbard model, Quantum simulations.

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında bilgi, deneyim ve akademik rehberliğiyle yolumu aydınlatan; özellikle bırakmayı düşündüğüm anlarda sabrıyla, anlayışıyla ve kararlılığıyla bana yeniden güç veren çok değerli danışmanım Doç. Dr. Züleyha ÖZTAŞ'a en içten ve derin teşekkürlerimi sunarım. Onun desteği ve inancı olmasaydı, bu çalışmanın tamamlanması mümkün olmayabilirdi.

Yüksek lisans süreci sadece akademik gelişimime değil; düşünce biçimime, sabrımı sınayış biçimime ve kendime duyduğum güvene de katkı sağladı. Bu tezi tamamlamak dışarıdan büyük bir adım gibi görünmese de benim için çok derin bir yere sahip oldu.

Bu süreci benimle birlikte paylaşan aileme, özellikle sabrıyla, sevgisiyle ve desteğiyle yanımda olan eşime ve bana her zaman ilham veren sevgili çocuklarıma gönülden teşekkür ederim. Onların varlığı bu çalışmanın en büyük güç kaynağıdır.

Rüveyde ERGÜN

## **ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ**

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Rüveyde ERGÜN

## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                  |      |
|--------------------------------------------------|------|
| BAŞLIK SAYFASI .....                             | I    |
| JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....                       | II   |
| DANIŞMAN ONAYI .....                             | III  |
| ÖZET .....                                       | IV   |
| ABSTRACT.....                                    | V    |
| TEŞEKKÜR .....                                   | VI   |
| ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ..... | VII  |
| İÇİNDEKİLER .....                                | VIII |
| TABLolar DİZİNİ .....                            | X    |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                            | XI   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....              | XII  |
| 1. GİRİŞ .....                                   | 1    |
| 2. OPTİK ÖRGÜLER .....                           | 3    |
| 2.1. Optik Örgü Nedir? .....                     | 3    |
| 2.2. Soğutma Teknikleri.....                     | 4    |
| 2.2.1. Doppler soğutma.....                      | 5    |
| 2.2.2. Buharlaştırılmalık soğutma .....          | 6    |
| 2.3. AC Stark Etkisi .....                       | 7    |
| 2.4. Optik Örgü Oluşumu .....                    | 10   |
| 3. BOSE-HUBBARD MODELİ.....                      | 12   |
| 3.1. Bloch Teoremi.....                          | 12   |
| 3.2. Wannier Fonksiyonları.....                  | 13   |
| 3.3. Sıkı Bağlanma Modeli.....                   | 14   |
| 3.4. Bose-Hubbard Modeli.....                    | 17   |
| 3.4.1. Bose-Hubbard modelinin türetilmesi .....  | 19   |
| 3.4.2. Süperakışkan-Mott yalıtkan fazı .....     | 20   |

|                                                            |           |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4. ÜÇ KUYULU OPTİK ÖRGÜLERDE FAZ GEÇİŞLERİ .....</b>    | <b>23</b> |
| 4.1. Döner Üç Kuyulu Optik Örgüde Bose-Hubbard Modeli..... | 24        |
| 4.2. Dipolar Atomlarla Bose-Hubbard Modeli .....           | 26        |
| 4.3. Zamana Bağlı Tünelleme Genlikleri .....               | 33        |
| <b>5. KÜBİTLER .....</b>                                   | <b>38</b> |
| 5.1. Kübit Nedir? .....                                    | 38        |
| 5.2. Kuantum Hesaplama .....                               | 39        |
| 5.2.1. Tek kübit işlemleri.....                            | 40        |
| 5.2.2. Çift kübit işlemleri.....                           | 40        |
| 5.2.3. Evrensel kuantum simülasyonu .....                  | 41        |
| 5.3. Richard Feynman ve Kuantum Simülasyonun Doğuşu .....  | 42        |
| <b>6. SONUÇ VE TARTIŞMA .....</b>                          | <b>44</b> |
| <b>KAYNAKÇA.....</b>                                       | <b>46</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b>                                            |           |

## TABLÖLAR DİZİNİ

### Sayfa

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Tablo 3.1.</b> Etkileşme enerjilerinin parçacık sayısına bağılılığı..... | 19 |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|



## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

|                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1. İki seviyeli atomun enerji diyagramı.....                                                                                    | 8  |
| Şekil 2.2. Optik örgülerde tuzaklanan atomların konumları.....                                                                          | 9  |
| Şekil 2.3. Lazer ışığı ile oluşturulan periyodik potansiyel yapılarının temsili gösterimi.....                                          | 10 |
| Şekil 2.4. Lazer ışığı kullanılarak soğutulan atomların, bir optik örgü içerisine yerleştirilme sürecinin şematik olarak gösterimi..... | 11 |
| Şekil 3.1. Kristal yapıdaki elektronların davranışını incelemek için kullanılan sıkı bağlanma modeli. ....                              | 15 |
| Şekil 3.2. Bir boyutlu optik örgüde Bose-Hubbard modelinin temel fiziksel süreçlerinin şematik gösterimi.....                           | 18 |
| Şekil 3.3. Süperakışkan ve Mott yalıtkan fazları.....                                                                                   | 22 |
| Şekil 4.1. Üç kuyulu Bose-Hubbard modeli.....                                                                                           | 23 |
| Şekil 4.2. Üç kuyulu Bose-Hubbard modeli.....                                                                                           | 24 |
| Şekil 4.3. Akımın özdeğerler ile değişimi.....                                                                                          | 25 |
| Şekil 4.4. Dipollerin yönelimi.....                                                                                                     | 26 |
| Şekil 4.5. Üç kuyulu Bose-Hubbard modeli.....                                                                                           | 27 |
| Şekil 4.6. $\Gamma/J = 0$ ; $\varepsilon/J = 0,1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi .....                                         | 30 |
| Şekil 4.7. $\Gamma/J = 0,001$ ; $\varepsilon/J = 0,1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi .....                                     | 31 |
| Şekil 4.8. $\Gamma/J = 0,05$ ; $\varepsilon/J = 0,1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi ... ..                                     | 32 |
| Şekil 4.9. $\Gamma/J = 0$ ; $\varepsilon/J = 0,1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi.....                                          | 35 |
| Şekil 4.10. $\Gamma/J = 0,001$ ; $\varepsilon/J = 0,1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi.....                                     | 36 |
| Şekil 4.11. $\Gamma/J = 0,05$ ; $\varepsilon/J = 0,1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi.....                                      | 37 |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|                   |                                           |
|-------------------|-------------------------------------------|
| $T$               | : Sıcaklık                                |
| $\psi$            | : Dalga fonksiyonu                        |
| $\vec{k}$         | : Dalga vektörü                           |
| $\psi_k(\vec{r})$ | : Bloch dalga fonksiyonu                  |
| $\lambda$         | : Dalga boyu                              |
| $\vec{E}$         | : Elektrik alan vektörü                   |
| $a$               | : Örgü sabiti                             |
| $V(x)$            | : Potansiyel enerji fonksiyonu            |
| $\delta$          | : Detuning                                |
| $\omega$          | : Enerji seviyeleri arası geçiş frekansı  |
| $v$               | : Hız                                     |
| $E$               | : Enerji                                  |
| $E_R$             | : Geri tepme enerjisi                     |
| $J$               | : Tünelleme genliği                       |
| $U$               | : Etkileşim enerjisi                      |
| $U_k(\vec{r})$    | : Periyodik fonksiyon                     |
| $n_i$             | : $i$ . örgü noktasındaki parçacık sayısı |
| $H$               | : Hamiltonyen                             |
| $\vec{\mu}_e$     | : Elektrik dipol moment                   |
| $\vec{\mu}_m$     | : Manyetik dipol moment                   |
| $V_0$             | : Potansiyel derinliği                    |
| $\vec{T}$         | : Örgü vektörü                            |
| $N$               | : Toplam parçacık sayısı                  |
| $M$               | : Örgü noktası sayısı                     |
| $G$               | : Ters örgü vektörü                       |
| $\delta_{ij}$     | : Kronecker delta fonksiyonu              |
| $\hat{a}$         | : Yaratma operatörü                       |
| $\hat{a}^\dagger$ | : Yok etme operatörü                      |
| $\hat{n}$         | : Sayı operatörü                          |
| $m$               | : Atomun kütlesi                          |

|              |   |                             |
|--------------|---|-----------------------------|
| $a_s$        | : | $s$ -dalga saçılma uzunluğu |
| $\hat{\psi}$ | : | Alan operatörü              |
| $P$          | : | Momentum                    |
| $\Phi$       | : | Manyetik akı                |
| $I$          | : | Akım                        |



## 1. GİRİŞ

Ultra soğuk atomlardan oluşan sistemler, kuantum fiziğinin temel ilkelerinin gözlemlenmesini mümkün kılar. Atomların çok düşük sıcaklıklara, yani mutlak sıfıra yakın değerlere kadar soğutulması, onların klasik fizik yerine tamamen kuantum mekaniksel davranışlar sergilemesine neden olur. Bu sıcaklık aralığında atomların hem parçacık hem de dalga özellikleri belirgin bir şekilde ortaya çıkar. Bunun sonucunda, Bose-Einstein yoğunlaşması (BEY) veya Fermi gazları gibi egzotik fazlar oluşur [1]. Bu tür kuantum gazları, kuantum mekaniğinin temel ilkelerini incelemek ve anlamak için elverişli bir platform sunmaktadır [2].

Ultra soğuk atomlar, kuantum ölçümleri ve hassas ölçümler yapmayı; dolayısıyla fiziksel sistemlerin derinlemesine incelenmesini sağlar. Lazer ile soğutma ve manyetik tuzaklama teknikleriyle neredeyse tamamen hareketsiz hale getirilen bu atomlar, kontrollü bir şekilde manipüle edilebilir ve ideal kuantum sistemlerini oluşturmak için kullanılabilir. Ultra soğuk atom sistemleri aynı zamanda yüksek hassasiyetli ölçümlerde ve zaman standartlarının oluşturulmasında kullanılır. Örneğin, atomik saat uygulamalarında, ultra soğuk atomların sahip olduğu düşük hızlar ve kuantum durumlarının uzun ömürlü olması ölçüm hassasiyetini büyük ölçüde artırır [1]. Ayrıca, ultra soğuk atomlar, kuantum mekaniğinin temellerini araştırmak ve geleceğin kuantum teknolojilerinin altyapısını oluşturmak için güçlü bir araç sunar. Bu nedenle, ultra soğuk atom sistemleri, modern kuantum teknolojileri ve temel bilim araştırmaları için vazgeçilmezdir. Özellikle optik örgülerde tuzaklanan ultra soğuk atomlar, katı hâl fiziğinde görülen özelliklerin modellenmesi için önemli bir araçtır [1]. Optik örgüler, atomlar için periyodik potansiyel alanlar oluşturur ve bunun sonucunda atomlar elektronların kristallerdeki hareketine benzer davranışlar sergiler. Ultra-soğuk atomların potansiyelde tutulması ile bir tür “yapay kristal” elde edilir. Özellikle Bose-Hubbard modeli gibi teorik yaklaşımlar, bu yapay kristaldeki faz geçişlerini anlamada önemli rol oynamaktadır [3, 4].

Kuantum simülasyonları, karmaşık kuantum sistemlerinin davranışlarını anlamak ve modellemek için güçlü bir araçtır. Bu simülasyonlar, kimya, fizik, malzeme bilimi ve bilgisayar bilimleri gibi birçok alanda kullanılır. Özellikle, nano ölçekteki sistemlerin ve atomik düzeydeki etkileşimlerin anlaşılması için önemlidir. Kuantum simülasyonlarının tarihçesi, 20. yüzyılın ortalarına dayanır. Richard Feynman'ın 1981'deki ünlü konuşması, kuantum sistemlerini klasik bilgisayarlarla simüle etmenin zorluğunu vurgulayarak,

kuantum bilgisayarlarının potansiyelini ortaya çıkardı [5]. Feynman'ın bu konuşması, kuantum simülasyonlarına olan ilgiyi arttırdı. Kuantum simülasyonu, kuantum bilgisayarlarını kullanarak karmaşık kuantum sistemlerinin davranışını modelleme ve inceleme sürecidir. Bu tür simülasyonlar, klasik bilgisayarlarla çözülmesi zor veya imkânsız olan kuantum mekaniksel problemleri çözmek için tasarlanmıştır. Kuantum simülasyonunun temel avantajlarından biri, kuantum mekaniksel fenomenleri doğrudan kuantum düzeyinde taklit edebilmesidir. Örneğin, moleküler yapının ve ilaçların etkileşimlerinin daha iyi anlaşılması, yeni malzemelerin tasarımı veya kuantum fiziğinin temel yasalarının daha derinlemesine incelenmesi gibi alanlarda kullanılabilir [6].

Optik örgüler ve kubitler konusu, kuantum bilgi işleme ve kuantum simülasyonu alanlarının kesişiminde yer alır. Bu iki kavramın birleşimi hem temel kuantum fiziğini anlamada hem de kuantum bilgisayarlar inşa etmede kritik rol oynar. Optik örgüde her kuyuya bir atom yerleştirilebilir. Yerleştirilen atomların her biri bir kubit gibi düşünülebilir. Kuantum simülasyonları, kuantum bitleri (kubitler) üzerinde karmaşık kuantum süreçlerini yürüterek çalışır. Bu süreçler, kuantum mekaniksel sistemlerin doğasını yansıtan süperpozisyon ve dolanıklık gibi kuantum özelliklerini kullanır. Bu yöntemlerle, kuantum simülatörleri, klasik bilgisayarların ulaşamayacağı düzeyde detay ve hassasiyette simülasyonlar yapılabilmektedir [6, 21].

## 2. OPTİK ÖRGÜLER

### 2.1. Optik Örgü Nedir?

Ultra soğuk atomlarla ilgili çalışmalar, kuantum fiziğinin deneysel olarak test edilebildiği en güçlü alanlardan birini oluşturmaktadır. “Ultra soğuk” kavramı, bilim dünyasında anlamlı bir ifade olarak ilk kez 20. yüzyılın ikinci yarısından itibaren kullanılmaya başlanmıştır [2]. Bu kavram, atomların ve moleküllerin mikro veya nano-Kelvin mertebelerine kadar soğutulabildiği durumları tanımlar. Bu seviyedeki sıcaklıklar, atomların klasik rejimden çıkarak belirgin kuantum davranışları sergilediği koşulları oluşturur. Termodinamiğe ait temel kavramlar özellikle Ludwig Boltzmann ve J. Willard Gibbs’in istatistiksel mekanik çalışmalarıyla geliştirilmiştir. Atom hareketlerinin sıcaklıkla ilişkilendirilmesi, 1920’lerde geliştirilen kuantum mekaniği çerçevesinde daha anlaşılır hâle gelmiştir. Albert Einstein ve Satyendra Nath Bose’un 1924–1925 yıllarında teorik olarak ortaya koyduğu Bose-Einstein Yoğunlaşması (BEY) kavramı, ultra soğuk rejimlerde madde dalgalarının davranışlarına ilişkin ilk temel öngörülerini sunmaktadır.

1950’li yıllardan itibaren ultra soğuk atomlara yönelik ilgi hızla arttı. Sıvı helyum gibi örneklerle ultra soğuk faz geçişleri araştırılırken, aynı dönemde atom-atom çarpışmalarına ilişkin kuantum çarpışma teorileri geliştirilmeye başlanmıştır. Bu teoriler, düşük enerjili atomların birbirleriyle nasıl etkileşime girdiğini anlamak için önemli bir temel oluşturmaktadır. Ayrıca Raman geçişleri üzerine yapılan deneysel çalışmalar ve enerji seviyeleri arası geçişlerin kontrolü, daha nitelikli soğutma tekniklerinin geliştirilmesine katkı sundu. Bu dönemde yaşanan teknolojik gelişmeler, soğutma ve ölçüm süreçlerine doğrudan etki etti. 1954’te Charles Townes ve ekibi, mikrodalga spektrumunda çalışan ilk maseri geliştirirken, 1960’ta Theodore Maiman ilk lazeri üreterek bu sürecin temelini atmıştır [8]. 1967 yılında sezyum atomunun salınım frekansı uluslararası zaman standardı olarak kabul edildi ve atom saatlerinin geliştirilmesinde termal hareketlerin azaltılmasının önemi daha iyi anlaşıldı. 1975 yılında Theodor W. Hänsch ve Arthur Schawlow, lazerle soğutmanın teorik temelini açıklarken aynı yıl D. Wineland ve H. Dehmelt, iyonların lazer ışığı ile soğutulabileceğini ortaya koydular [9, 12]. Bu çalışmaları izleyen 1983 yılında Steven Chu ve ekibi, lazer ışığını kullanarak atomları optik tuzaklara hapsedmeyi başardı [9]. Bu gelişme, ultra soğuk atom fiziğinde bir dönüm noktası olmuştur. 1976’da önerilen buharlaşma ile soğutma yöntemi, atomların yüksek enerjili olanlarının sistem dışına çıkarılmasıyla sıcaklığın düşürülmesine olanak tanıdı [10, 14]. 1985 yılına gelindiğinde, lazerle soğutulan atomların Doppler sınırına

kadar indirilebildiği deneysel olarak gösterildi. Bu süreçte süper Doppler ve polarizasyon gradyan soğutma gibi daha ileri teknikler de geliştirildi. 1995 yılında Eric Cornell ve Carl Wieman, rubidyum atomlarını yaklaşık 20 nano-Kelvin sıcaklığa kadar soğutarak ilk kez Bose-Einstein Yoğunlaşmasını deneysel olarak gerçekleştirdiler [17]. Aynı yıl Wolfgang Ketterle de sodyum atomlarıyla benzer bir başarı elde etti. Bu önemli çalışmalar, atomların makroskopik kuantum durumlarını gözlemlemeyi mümkün kılmıştır. 2001 yılında Feshbach rezonanslarının kullanımı ile ultra soğuk atomlar arasındaki etkileşimler, dışsal manyetik alanlar yardımıyla hassas biçimde kontrol edilebilir hâle getirildi. Bu durum, kuantum faz geçişlerinin sistematik incelenmesine olanak sağlamaktadır [1].

2003'ten itibaren optik örgüler kullanılarak kuantum simülasyonları yapılmaya başlandı. Bu sayede ultra soğuk atomlar, düzenli bir potansiyel yapı içinde kuantum durumlarını koruyarak hareket edebilirler ve kristallerdeki elektronların davranışları deneysel olarak modellenenebilir. Bu gelişme, katı hâl fiziğinden kuantum bilgi işlemeye uzanan geniş bir alanın önünü açmıştır. 2010–2015 yılları arasında optik örgü sistemleri, kuantum bilgi işlem mimarileri için kullanılabilir hâle getirildi. Spin-tabanlı kuantum hesaplama deneyleri ile, atomların spin durumlarının dolanıklık ve süperpozisyon özellikleri, yüksek hassasiyetli ölçümler için başarıyla kullanıldı [7, 11]. 2015–2020 döneminde ultra soğuk atomlar, egzotik kuantum faz geçişlerinin simülasyonunda ve topolojik malzemelerin modellenmesinde yaygın biçimde kullanıldı [16]. 2020 sonrası dönemde ise ultra soğuk atomlar, kuantum sensör teknolojileri, manyetik rezonans görüntüleme ve kuantum termodinamiği gibi alanlarda yoğun biçimde araştırılmaktadır. Bu gelişmeler, ultra soğuk atom fiziği ve optik örgü sistemleri alanında köklü ilerlemelere olanak sağlamıştır [16].

## **2.2. Soğutma Teknikleri**

Fizik yasaları gereği mutlak sıfır sıcaklığına ulaşmak teorik olarak imkânsızdır. Ancak laboratuvar koşullarında son derece hassas araçlar ve yöntemler kullanılarak bu sıcaklığa oldukça yakın değerlere ulaşılabilir. Şimdiye kadar kaydedilen en düşük sıcaklık yaklaşık 100 pikoKelvin olup, bu değer 1 Kelvin'in 10 milyarda birine karşılık gelmektedir [2, 14]. Bu bölümde, laboratuvar ortamında nanoKelvin mertebesinde sıcaklıklara ulaşmak için geliştirilen iki temel yöntem ele alınacaktır.

### 2.2.1. Doppler soğutma

Doppler soğutma, lazer ışığı ile atomların hareketini yavaşlatarak soğutmayı mümkün kılan ve lazer soğutma teknikleri arasında en yaygın kullanılan yöntemlerden biridir. Genellikle magneto-optik tuzaklarla birlikte uygulanır. Özellikle düşük yoğunluktaki gazların, Doppler limitine kadar soğutulmasında etkili olan bu teknik, yalnızca belirli enerji seviyelerine sahip atom türlerinde uygulanabilir. Örneğin, Rubidyum-85 izotopu için Doppler limiti yaklaşık 150 mikrok Kelvin civarındadır [8, 15].

Lazer ışını, yüksek yoğunluklu elektromanyetik radyasyon taşır. Belirli koşullar altında, bu yüksek enerjili ışık demetleriyle atomların kinetik enerjisi azaltılabilir. Bu süreçte, atomlar lazer ışığından bir foton soğurur ve ardından bir foton yayar. Bu süreç öyle tasarlanır ki yayılan fotonun ortalama enerjisi, soğurulan fotondan biraz daha büyük olur. Böylece atomlar tekrar tekrar bu döngüyü yaşadıkça, sistemden enerji çekilmiş olur ve atomların kinetik enerjisi azalır. Sonuçta sistemin sıcaklığı düşer [8, 9, 12, 15]. Bir atomdaki elektron, sadece belirli enerji seviyeleri arasında geçiş yapabilir ve bu geçiş, yalnızca aradaki enerji farkına eşdeğer enerjide bir fotonun soğurulması veya yayılmasıyla gerçekleşir. Bu nedenle lazerle soğutma, foton enerjilerinin atomik geçişlerle rezonansa girecek şekilde ayarlanmasına dayanır. Bu yöntem, lazer frekansının atomik geçiş frekansından biraz daha düşük (red detuned) olacak biçimde ayarlanması esasına dayanır. Bir atom ışık kaynağına doğru hareket ettiğinde, Doppler kayması nedeniyle lazer ışığını daha yüksek frekansta algılar ve bu nedenle foton absorpsiyonu mümkün olur. İki karşıt yönden gelen lazer ışınları sayesinde, atomlar hangi yönde hareket ederlerse etsinler, hareket yönlerinin tersindeki ışını daha fazla soğurur. Bu etkileşimler sırasında her foton absorpsiyonunda, atom bir foton momentumu kadar geri tepme kuvveti kazanır. Emisyon süreci ise rastgele yönlerde gerçekleştiğinden, net momentum değişimi absorpsiyon yönünde kalır. Bu süreç çok sayıda tekrarlandığında atomun ortalama hızı azalır. Sıcaklık, bir atom grubunun ortalama rastlantısal kinetik enerjisinin ölçüsüdür; dolayısıyla bu hız azalışı, sistemin soğuması anlamına gelir [2].

Lazerle soğutma süreci, enerji ve momentum korunumu yasaları çerçevesinde gerçekleşir. Lazer ışınına doğru hareket eden bir atom, bir foton soğurduğunda momentumu fotonunkine eşdeğer miktarda azalır. Bu ilişki Eş. (2.1) ile verilir:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P_{foton}}{mv} = \frac{\Delta v}{v} \quad (2.1)$$

Eşitlik (2.1)'den türetilen atomun hızındaki değişim ile fotonun momentumu arasındaki ilişki

$$\Delta v = \frac{P_{foton}}{m} \quad (2.2)$$

ifadesiyle bulunur. Fotonun momentumu ise enerjisine ve dalga boyuna bağlı olarak Eş. (2.3) ile bulunur:

$$P = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (2.3)$$

Lazerle soğutma yönteminde erişilebilecek en düşük sıcaklık sınırı Doppler sıcaklığıdır. Doppler sıcaklığı sınırı yalnızca iki seviyeli atomik sistemlerde ve Doppler soğutma rejimlerinde geçerlidir. Daha karmaşık seviyelere sahip atomlar için bu alt limitin altına inmek, ancak Sub-Doppler teknikleriyle mümkün olabilmektedir [8,15]. Ancak bu tekniklerin de belirli sınırlamaları vardır ve özellikle nano Kelvin mertebesine ulaşmak, daha ileri düzeyde soğutma tekniklerinin geliştirilmesini gerekli kılmıştır.

### 2.2.2. Buharlaştırmalı soğutma

Doppler soğutma yöntemiyle ulaşılan mikroKelvin düzeyi, çoğu uygulama için yeterli olsa da BEY gibi kuantum faz geçişlerinin gözlemlenebilmesi için daha düşük, nanoKelvin düzeyinde sıcaklıklara ulaşılması gerekmektedir. Bu tür düşük sıcaklıklara ulaşmak için Doppler sınırının ötesinde çalışan bir yöntem olan buharlaştırmalı soğutma, ultra-soğuk atom fiziğinde temel ve tamamlayıcı bir teknik hâline gelmiştir [4].

Buharlaştırmalı soğutma, klasik anlamda bir sıvının buharlaşması sırasında yüksek enerjili moleküllerin sistemden uzaklaşmasıyla sıcaklığın düşmesi prensibine dayanır. Deneysel olarak, atomlar manyetik bir tuzak içinde tutulur ve sistemdeki en yüksek kinetik enerjiye sahip olanlar, radyo dalgaları ya da mikrodalga ışıınımı ile rezonansa sokularak sistemden uzaklaştırılır. Bu işlem, potansiyel kuyusunun enerji eşiğinin kademeli olarak düşürülmesiyle sağlanır. [2,14]. Dolayısıyla sistemden yüksek enerjili atomlar uzaklaştırıldıkça geriye kalan atomların ortalama enerjisi ve dolayısıyla sistemin sıcaklığı düşer. Bu süreç, sıcak bir bardak çaydan yüksek enerjili su molekülleri buharlaşıp uzaklaştıkça bardaktaki çayın soğumasına benzetilebilir. Bu sürecin etkinliği, sistemdeki atomların birbirleriyle elastik çarpışmalar yaparak enerji dağılımını yeniden düzenleyebilmesine bağlıdır. Yeterli çarpışma oranı sağlandığında, buharlaştırmalı soğutma termal dengede sıcaklığın düşmesini mümkün kılar. Aksi hâlde, sistem soğuyamaz ve atom kaybı artar [15]. Buharlaştırmalı soğutma yöntemi, sıcaklığın nano

Kelvin düzeyine kadar düşmesini sağlayarak, faz uzayı yoğunluğunun BEY için gerekli eşik değerine ulaşmasına imkân tanır. Kritik sıcaklık altına inildiğinde, atomların önemli bir kısmı temel enerji seviyesine yoğunlaşır ve makroskobik ölçekte kuantum istatistik etkileri ortaya çıkar. Bu yöntem, 1995 yılında Cornell ve çalışma arkadaşları tarafından rubidyum-87 atomları kullanılarak ilk kez başarıyla uygulanmış ve seyreltilmiş atomik bir gazda BEY gözlemlenmiştir [17]. Bu önemli deneyde, lazerle soğutulmuş atomlar manyetik tuzak içinde tutulmuş, ardından buharlaştırmalı soğutma ile yaklaşık 170 nano Kelvin sıcaklığa kadar soğutulmuştur. Günümüzde buharlaştırmalı soğutma, sadece BEY elde etmek amacıyla değil, aynı zamanda kuantum simülasyonlar ve hassas ölçümler için ultra-soğuk sistemlerin hazırlanmasında da yaygın biçimde kullanılmaktadır.

### 2.3. AC Stark Etkisi

AC Stark etkisi, bir sistemin zamanla değişen bir elektromanyetik alanla, özellikle lazer ışığıyla etkileşimi sonucu atomik enerji seviyelerinde meydana gelen kaymaları ifade eder. Bu etki, atomun elektrik dipol momenti ile dış elektrik alan arasındaki etkileşimden kaynaklanır ve kuantum optiğin temel olaylarından biridir [14]. AC Stark etkisinin temelinde durağan bir elektromanyetik dalga yer alır. İlgili elektrik alan kalıcı bir dipol momente sahip olmayan nötr atomda bir dipol moment indükler; bu da durağan dalganın maksimum veya minimumuna doğru itme veya çekmeye neden olur. Sonuç olarak atomlar AC Stark etkisi ile periyodik potansiyelde belirli konumlarda lokalize olur. Atomların optik örgüde lokalize olması, atomun enerji seviyelerinin lazer ışığına bağlı olarak kayması ile gerçekleşir. AC Stark etkisinin büyüklüğü, lazerin elektrik alan genliği ile atomun geçiş dipol momentinin çarpımının karesine ve lazer frekansı ile atomun rezonans frekansı arasındaki sapmaya bağlıdır [15]. Bu sapmaya detuning denir. Detuning terimi, lazer frekansının sistemin doğal rezonansı arasındaki farkı ifade eder. Detuning büyüklüğüne bağlı olarak, AC Stark etkisi altında atomların enerji seviyelerinde gözlemlenen kaymaların pozitif ya da negatif olması mümkündür (Şekil 2.1). Bu mekanizma, optik örgülerin fiziksel parametrelerinin hassas kontrolünün sağlanmasına olanak tanır. Potansiyelin periyodik yapısı, AC Stark kayması ile doğrudan ilişkilidir ve optik örgülerin temel fiziksel yapısını açıklar.

Atomla elektromanyetik alan arasındaki etkileşim sonucu Hamiltonyen

$$H = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{E} \quad (2.4)$$

ile ifade edilir. Eşitlik (2.4)'de yer alan  $\vec{\mu}_e$  dipol momentidir. Dipol moment, elektron yüküne ve her bir elektronun atoma olan uzaklığına bağlıdır:

$$\vec{\mu}_e = -e \sum_j \vec{r}_j \quad (2.5)$$

Genel olarak sadece son yörüngedeki elektronlar önem taşır. Lazerin zamana bağlı elektrik alanı [13]

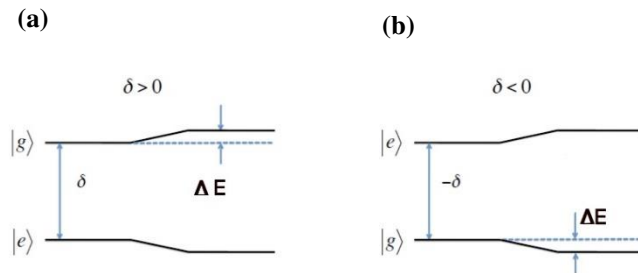
$$E(x, t) = E(x)e^{i\omega t} + c. c. \quad (2.6)$$

olsun. Atomun enerji seviyelerinde AC Stark etkisi nedeniyle kayma gerçekleşir. Atomda meydana gelen polarizasyon dış elektrik alanla aynı frekansta salınım yapar. Böylece, enerji kayması atomu tuzaklayan etkin bir potansiyel gibi davranır. Enerji seviyelerindeki kaymanın bulunması için pertürbasyon teorisi kullanılır. Denklemlerin basitleştirilmesi için, statik radyasyon alanı kabul edilebilir, yani  $E(x) = \mathcal{E}_0 E$  olsun. Standart pertürbasyon teorisi kullanılarak enerji kaymasına ikinci dereceden yaklaşım ile

$$\Delta E = - \sum \frac{|\langle e | \vec{\mu}_e \cdot \vec{E} | g \rangle|^2}{E_e - E_g} \mathcal{E}_0^2 \quad (2.7)$$

bulunur [13]. Eşitlik (2.7)'de  $E_g$  taban durumu enerjisini,  $E_e$  uyarılmış durumun enerjisini,  $|g\rangle$  ve  $|e\rangle$  sırasıyla taban ve uyarılmış durumları göstermektedir. İki seviyeli atom için Eş. (2.7), Eş. (2.8)'a indirgenir:

$$\Delta E = \pm \frac{|\langle e | \vec{\mu}_e \cdot \vec{E} | g \rangle|^2}{E_e - E_g} \mathcal{E}_0^2 \quad (2.8)$$

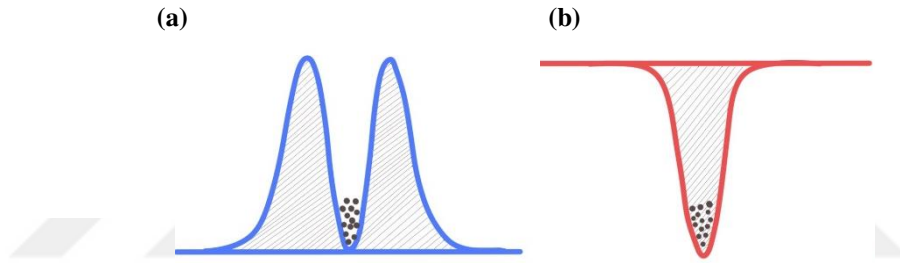


**Şekil 2.1:** İki seviyeli atomun enerji diyagramı. (a) pozitif detuning (b) negatif detuning.

Eşitlik (2.8) ile verilen enerji kayması  $\Delta E$ , atom ve lazer arasındaki eşleşmeye karşılık gelir. Şekil 2.1’de  $\Delta E$  gösterilmektedir. Lazer frekansı  $\omega$  ile atomun enerji seviyeleri arasındaki farka karşılık gelen  $\omega_0$  arasındaki farka detuning denir:

$$\delta = \omega - \frac{E_e - E_g}{\hbar} = \omega - \omega_0 \quad (2.9)$$

Detuning küçükse ( $\delta \rightarrow 0, \omega \approx \omega_0$ ), enerji kayması büyür. Kırmızıya ayarlı lazer (red detuned laser) kullanımı ile  $\delta < 0$  ( $\omega < \omega_0$ ) olur ve bu durumda potansiyel çekici olur. Atomlar daha yüksek yoğunluklu bölgede toplanır. Maviye ayarlı lazer (blue detuned laser) ile  $\delta > 0$  ( $\omega > \omega_0$ ) olur ve itici potansiyel oluşur. Lazer şiddetinin maksimumları potansiyelin maksimumlarına karşılık gelir. Atomlar düşük yoğunluklu bölgede toplanır. Her iki durum Şekil 2.2.’de gösterilmiştir.



**Şekil 2.2:** Optik örgülerde tuzaklanan atomların konumları.  
(a) Maviye ayarlı lazer (b) Kırmızıya ayarlı lazer

AC Stark etkisi ile oluşan enerji seviyelerindeki kaymalar, lazer ışığının şiddeti ve dalga boyuyla belirlenen bir potansiyel fonksiyonu üretir. Bu potansiyel şu formdadır:

$$V(x) = V_0 \sin^2(kx) \quad (2.10)$$

Eşitlik (2.10) ile tanımlanan potansiyelde  $V_0$  potansiyelin derinliği,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  dalga sayısı,  $\lambda$  lazerin dalga boyudur.  $V_0$  parametresi, kullanılan lazerin şiddetine, atomun dipol momentine bağlıdır. Bu bağıllık, optik örgülerin istenildiği gibi tasarlanmasını sağlar. Böylece lazer ışığının dalga boyu ve şiddeti, atomların konumlandığı yerleri doğrudan kontrol etmektedir. Optik örgülerde enerji skalası olarak Eş. (2.11) geri tepme enerjisi kullanılır. Geri tepme enerjisi  $m$  atomun kütlesi olmak üzere

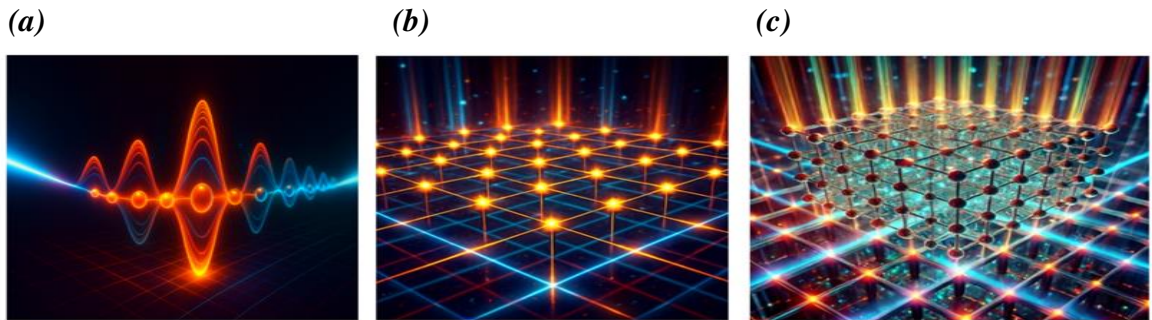
$$E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.11)$$

eşitliği ile bulunur. Bu enerji, fotonu absorplayan atomun son kinetik enerjisine karşılık gelir.

#### 2.4. Optik Örgü Oluşumu

Optik örgü (veya optik kafes), zıt yönlü lazer ışınlarının oluşturduğu periyodik bir potansiyel alandır. Bu düzenli potansiyel yapı, atomların belirli konumlarda hapsolmesine neden olur ve bu yönüyle atomlar için bir tuzak görevi görür.

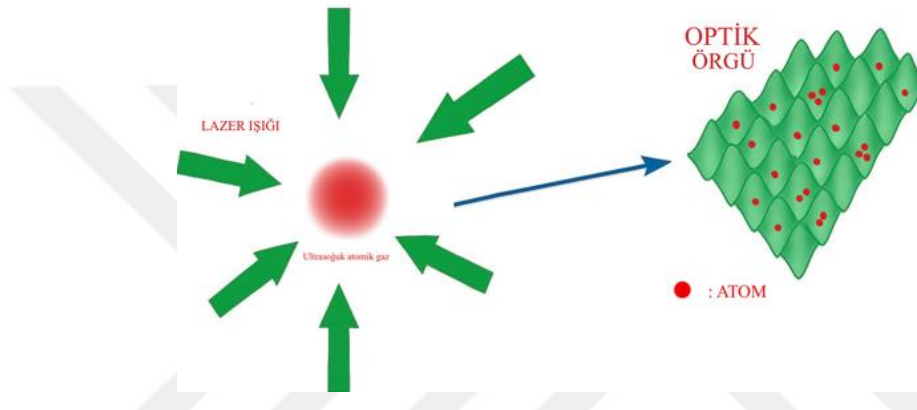
Optik örgüler, aynı dalga boyuna sahip iki lazer ışınının karşılıklı yönlerde gönderilerek birbirleriyle girişim yapması sonucunda oluşan durağan dalgalar aracılığıyla oluşturulur. Girişim sonucu meydana gelen bu dalga yapısı, uzayda periyodik olarak değişen potansiyel alanlar üretir. Atomlar, bu potansiyelin minimum noktalarında lokalize olur; çünkü bu konumlar enerji açısından en kararlı durumlardır. Bu durağan dalga deseninde oluşan karanlık ve aydınlık bölgeler, atomlar için sırasıyla potansiyel minimumlarını ve maksimumlarını tanımlar. Dolayısıyla, atomlar tipik olarak bu periyodik yapının potansiyel minimumlarına hapsolür ve bu sayede kontrollü biçimde düzenli örgü noktalarına yerleşirler. Optik örgünün fiziksel özellikleri; lazer ışınlarının dalga boyu, yönü, polarizasyonu ve bağıl fazı gibi parametreler aracılığıyla hassas bir şekilde ayarlanabilir. Elde edilen örgünün bir, iki veya üç boyutlu olması, örgü sabiti ve potansiyel derinliği bu parametrelerle doğrudan ilişkilidir. Bu yapıların temel özelliği, deneysel olarak kolayca biçimlendirilebilmeleridir. Tipik bir tek boyutlu optik örgüde, potansiyel kuyuları lazer ışığının dalga boyunun yarısı kadar bir aralıkla yerleşir. Bu aralık, atomların örgü boyunca periyodik olarak dizilmesini sağlar. Ortaya çıkan bu düzenli yapı, kristal örgülerin optik bir analogu olarak değerlendirilebilir. Böylelikle optik örgüler, katı hâl fiziğindeki periyodik atom dizilimlerini taklit ederek, kristal



**Şekil 2.3:** Lazer ışığı ile oluşturulan periyodik potansiyel yapılarının temsili gösterimi. (a) Tek boyutlu optik örgüde atomların yer aldığı potansiyel kuyuları, (b) İki boyutlu optik örgü geometrisi, (c) Üç boyutlu optik örgü yapısında hapsedilmiş atomlar.

sistemlerin davranışlarını simüle etmek amacıyla kullanılan deneysel platformlar hâline gelir [2, 3, 10].

İki boyutlu optik örgüler, aynı düzlemde belirli bir açıyla kesişen koherent lazer ışınlarının girişimiyle oluşturulur. Bu durumda atomlar, düzlemsel bir potansiyel içinde hapsolür ve kristalimsi yapılar meydana getirirler. Üç boyutlu optik örgülerde ise, lazer ışınlarının üç boyutlu uzaydaki konfigürasyonuna bağılı olarak kübik ya da hekzagonal simetriye sahip karmaşık yapılar elde edilir; böylece atomlar üç boyutlu potansiyel kuyuları içine düzenli biçimde yerleştirilebilir [4].



**Şekil 2.4:** Lazer ışığı kullanarak soğutulan atomların, bir optik örgü içerisine yerleştirilme sürecinin şematik gösterimi. Lazer ışınları ile oluşturulan durağan dalga yapısı, periyodik bir potansiyel oluşturarak atomların düzenli bir örgü yapısında hapsedilmesini sağlar.

Üç boyutlu düşünöldüğünde optik örgü potansiyeli

$$V(x, y, z) = V_0(\sin^2(kx) + \sin^2(ky) + \sin^2(kz)) \quad (2.12)$$

olur. Atomlar bu potansiyelin etkisi altında Bloch bantları olarak bilinen enerji seviyelerine hapsolür [4].

### 3. BOSE-HUBBARD MODELİ

#### 3.1. Bloch Teoremi

Kristal yapıdaki maddelerde elektronlar, periyodik bir potansiyel içinde hareket eder. Bu durumda Schrödinger denkleminin çözümleri Felix Bloch tarafından geliştirilen Bloch teoremi ile tanımlanır [18]. Bloch teoremine göre, periyodik bir potansiyel altında dalga fonksiyonları:

$$\psi_k(\vec{r}) = u_k(\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (3.1)$$

Eşitlik (3.1) ile verilen dalga fonksiyonunda  $\vec{k}$  dalga vektörü,  $u_k(\vec{r})$  kristal örgünün periyoduna sahip bir fonksiyondur ve şöyle tanımlanır:

$$u_k(\vec{r}) = u_k(\vec{r} + \vec{T}) \quad (3.2)$$

Dalga fonksiyonu kristal potansiyeli altında bulunan tek bir elektronun davranışını tanımlar. Bloch fonksiyonları iyonik merkezler tarafından oluşturulan potansiyel alanlarda yerleşmiş dalga paketleri olarak da yorumlanabilir. Elektronlar bu fonksiyonlar sayesinde kristal içinde serbestmiş gibi davranabilir. Eşitlik (3.1), Bloch teoremi olarak şöyle ifade edilir: Periyodik bir potansiyelde dalga denkleminin öz fonksiyonları,  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  düzlem dalgası ile kristal örgüsünün periyoduna sahip bir  $U_k(\vec{r})$  fonksiyonunun çarpımı şeklinde yazılır; bu fonksiyon karakteristik olarak ilerleyen dalgaların toplamı biçiminde yazılabilir. Bloch fonksiyonları, iyon merkezlerinin oluşturduğu potansiyel alanda serbestçe dolaşan elektronları temsil etmek üzere, yerleşmiş dalga paketleri şeklinde ifade edilebilirler. Burada  $\psi_k(\vec{r})$  dalga fonksiyonu katlı olmadığı, yani aynı enerji ve dalga sayısına sahip dalga fonksiyonu sayısı bir tane olduğu durum için, Bloch teoreminin kısmi bir ispatı verilecektir. Çevresi  $Ma$  olan ve  $M$  adet özdeş örgü noktasına sahip bir halka üzerinde bulunan bir elektron sistemi olsun. Potansiyel enerji periyodik bir yapıya sahip olduğundan bir tam sayı  $s$  için Eş. (3.3) denklemini sağlanır [18]:

$$U(x) = U(x + sa), s \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

Halkanın simetri özelliği göz önüne alındığında Eş. (3.4) yazılabilir:

$$\psi(x + a) = C\psi(x) \quad (3.4)$$

Eşitlik (3.4)'te  $C$  kompleks bir sabittir. Her bir nokta üzerinden geçerek halka etrafında bir kere dönüldüğünde

$$\psi(x + Ma) = \psi(x) = C^M \psi(x) \quad (3.5)$$

elde edilir. Bunun nedeni, dalga fonksiyonu  $\psi(x)$ 'in tek değerli olmasıdır. Eşitlik (3.5)'ten

$$C = e^{\frac{i2\pi s}{M}}; s = 0, 1, 2, \dots, M - 1 \quad (3.6)$$

olduğu görülmektedir. Sonuç olarak

$$\psi(x) = e^{\frac{i2\pi s x}{Ma}} u_k(x) \quad (3.7)$$

fonksiyonu, eğer

$$u_k(x) = u_k(x + a) \quad (3.8)$$

özelliğine sahipse,

$$\psi(x + a) = C\psi(x) \quad (3.9)$$

denklemini sağlar.  $k = 2\pi s/Ma$  alınır

$$\psi_k(\vec{r}) = u_k(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.10)$$

elde edilir ve Bloch teoremi ispatlanır [2, 4, 18, 19].

### 3.2. Wannier Fonksiyonları

Wannier fonksiyonları, kristal yapılarda kuantum mekaniği ile tanımlanan elektron dalga fonksiyonlarının bir temsilidir. Wannier fonksiyonları, Bloch fonksiyonlarının Fourier dönüşümüyle elde edilen, örgü noktaları etrafında lokalize olmuş dalga fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar özellikle yoğun madde fiziğinde ve katı hal fiziğinde önemli bir role sahiptir; çünkü Bloch fonksiyonlarına alternatif bir baz oluştururlar ve uzaysal olarak daha lokalize bir yapı sergilerler [18]. Bir banttaki Wannier fonksiyonları, aynı banda ait Bloch fonksiyonları üzerinden Eş. (3.11) ile tanımlanır:

$$\omega(\vec{r} - \vec{r}_i) = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i) \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (3.11)$$

Bu denklemde  $\vec{r}_i$  bir örgü noktasını temsil eder. Wannier fonksiyonu, örgü noktası  $\vec{r}_i$  civarında lokalize olmuştur.  $M$  ise kristaldeki örgü noktalarının sayısıdır. Bloch fonksiyonu  $\psi_k(\vec{r})$  dalga vektörü  $\vec{k}$  ile tanımlanır.  $\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i)$  faz faktörü olup Bloch dalga fonksiyonlarını farklı örgü noktalarına kaydırır.

Wannier fonksiyonları örgü noktalarında diklik koşulunu sağlar. Bu diklik koşulu Eş. (3.12) ile ifade edilir [18, 19]:

$$\int dV \omega^*(\vec{r} - \vec{r}_i) \omega(\vec{r} - \vec{r}_j) = 0, \quad (i \neq j) \quad (3.12)$$

$i$  ve  $j$  iki farklı örgü noktasını temsil eder. Diklik özelliği Wannier fonksiyonlarını farklı örgü noktalarında daha kullanışlı hale getirir. Tek boyutlu bir durumda, örgü sabiti  $a$  olan ve  $N$  atomlu bir örgüde Bloch fonksiyonu Eş. (3.13) ile verilir:

$$\psi_k(x) = N^{-\frac{1}{2}} e^{ikx} u_0(x) \quad (3.13)$$

Burada  $u_0(x)$  örgü periyodikliği taşıyan bir fonksiyondur. Wannier fonksiyonu bu durumda Eş. (3.14) ifade edilir [18]:

$$\omega(x - x_i) = u_0(x) \frac{\frac{\sin \pi(x-x_i)}{a}}{\frac{\pi(x-x_i)}{a}} \quad (3.14)$$

Bu ifade, Wannier fonksiyonlarının örgü noktaları etrafında pik yaptığını gösterir. Wannier fonksiyonları, kristallerin kuantum mekaniği açısından anlaşılmasında önemli bir matematiksel araçtır; kuantum simülasyonlarında karmaşık sistemleri daha basit modellere indirgerler ve Bloch fonksiyonlarına göre uzaysal olarak daha net ve lokalize bir fiziksel anlam taşırlar. Genel bir potansiyel altında ve herhangi bir  $\vec{k}$  dalga vektörü için Schrödinger dalga denklemi göz önüne alınarak, örgü sabiti  $a$  olan bir boyutlu periyodik sistemde potansiyel enerji fonksiyonu  $U(x)$  ile ifade edilir. Bu potansiyel örgü simetrisine sahip olup, örgü öteleme işlemi altında Eş. (3.15)'deki gibi değişmez kalır.

$$U(x) = U(x + a) \quad (3.15)$$

### 3.3. Sıkı Bağlanma Modeli

Sıkı bağlanma modeli kristal yapıdaki elektronların davranışını incelemek için kullanılan bir modeldir. Atomlara sıkı bir şekilde bağlı olan ve atomlar arası geçişleri sınırlı olan elektronların enerji seviyelerini anlamak için kullanılan basitleştirilmiş modellerden biridir. Yarı iletkenlerde ve metallerdeki elektronlar, genellikle atom çekirdeklerinin yakınında hapsolme eğilimindedir. Ancak komşu atomlara tünelleme

yoluyla hareket edebilirler. Bu hareket, tünellemelerin ardışık bir bileşimi şeklinde gerçekleşir (Şekil 3.1). Bu duruma sıçrama (hopping) adı verilir [3, 11].



**Şekil 3.1:** Kristal yapıdaki elektronların davranışını incelemek için kullanılan sıkı bağlanma modeli.

Sıkı bağlanım modeline göre parçacıklar tek parçacık durumlarına sahiptir:  $|n\rangle$ , burada  $n=1,2,\dots,M$ . Örgü noktaları arasındaki aralık  $a$  ise (örgü aralığı) o zaman her  $n$  noktası şu konumla ilişkilendirilebilir:

$$x_n = an \quad (3.16)$$

Böyle bir örgünün Hamiltonyeni:

$$H = -J \sum_{i=1}^M \{|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|\} \quad (3.17)$$

Burada  $J$  bir sabittir. Periyodik sınır koşulları gereği  $n = M$  olduğundan  $|M\rangle \langle M+1|$  terimi  $|M\rangle \langle 1|$  terimine eşittir.  $|n+1\rangle \langle n|$  terimi  $|n\rangle$  durumuna etki ettiğinde, yeni durum  $|n+1\rangle$  olur. Yani, bu terim  $n$  konumundan  $n+1$  konumuna bir sıçramayı sağlar. Benzer şekilde, aynı olasılıkla  $n+1$  konumundan  $n$  konumuna da sıçrama mümkündür [11, 20].

Sıkı bağlanma modelinde Hilbert uzayı sonlu boyutludur ve boyutu  $M$  olarak tanımlanır. Bu durumda, Eş. (3.17)'e ait matrisin elemanları:

$$H_{nm} = \langle n|H|m\rangle \quad (3.18)$$

Örneğin,  $M = 5$  için Hamiltonyen aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$H = -J \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Bu matriste, köşelerde yer alan elemanlar periyodik sınır koşullarından gelmektedir. Hamiltonyenin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulmak için gerekli özdeğer denklemi:

$$H|\phi\rangle = E|\phi\rangle \quad (3.20)$$

Özvektörler  $|\phi\rangle, |n\rangle$  bazında  $|\phi\rangle = \sum_n \phi_n |n\rangle$  şeklinde yazılır. Bu açılımın, Eş. (3.20)'te yerleştirilmesi ile aşağıdaki matris gösterimi elde edilir:

$$H|\phi\rangle = -J \begin{pmatrix} \phi_2 + \phi_5 \\ \phi_1 + \phi_3 \\ \phi_2 + \phi_4 \\ \phi_3 + \phi_5 \\ \phi_4 + \phi_1 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = E|\phi\rangle \quad (3.21)$$

Eşitlik (3.21)'ün matris gösterimindeki her satır  $\phi_n$  katsayıları için cebirsel bir ilişki sağlar. Bu eşitliğin genel formu

$$-J(\phi_{n-1} + \phi_{n+1}) = E\phi_n \quad (3.22)$$

olur ve periyodik sınır koşulu kullanıldığında  $\phi_{M+1} = \phi_1$  eşitliği sağlanır. Böylece problem bir yineleme problemine dönüşür. Buradaki değişkenler hem özvektörler  $\phi_n$ , hem de enerji  $E$ 'dir. Eşitlik (3.22) düzlem dalgalar kullanılarak çözülebilir. Düzlem dalga fonksiyonu:

$$\phi_n^k = \frac{e^{ikx_n}}{\sqrt{M}} \quad (3.23)$$

Örgü aralığı  $a = 1$  alındığında  $k$  boyutsuz hale gelir; ancak  $a$  sabit alındığında  $k$ 'nın boyutu (1/uzunluk) yani dalga sayısı olacaktır. Eşitlik (3.23) için normalizasyon koşulu aşağıdaki gibi sağlanmalıdır:

$$\sum_{n=1}^N |\phi_n^k|^2 = 1 \quad (3.24)$$

Eşitlik (3.23), Eş. (3.22)'de yerleştirildiğinde Eş. (3.25) elde edilir.

$$-g \frac{e^{ikn}}{\sqrt{M}} (e^{ik} + e^{-ik}) = E \frac{e^{ikn}}{\sqrt{M}} \quad (3.25)$$

Düzlem dalgaya ilişkin dispersiyon bağıntısı

$$E_k = -2g \cos ka \quad (3.26)$$

bulunur. Dispersiyon bağıntısının daha ayrıntılı olarak incelenebilmesi için öncelikle  $k$  dalga sayısının alabileceği izinli değerlerin belirlenmesi gereklidir. Bu değerler Eş. (3.23)'de periyodik sınır koşullarının

$$\phi_{M+1} = \phi_1 \quad (3.27)$$

uygulanması ile elde edilir. İşlem sonucunda  $e^{ikMa} = 1$  bulunur; bu da dalga sayısının alabileceği değerlerin  $k = \frac{2\pi\ell}{Ma}$  olduğunu gösterir. Bu kısıtlamada  $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  gibi değerler alır. Dalga sayısı sonsuz sayıda değer alamaz. Sıkı bağlanma modelinde, Hilbert uzayının boyutu  $M$  olduğundan  $M$  sayıda özvektörden oluşan bir küme gereklidir. Ortogonal bir baz oluşturabilmek için özvektörlerin birbirinden farklı olması gerekir. Eşitlik (3.23)'deki  $n$  değerleri tamsayı olduğundan

$$k \rightarrow k + \frac{2\pi}{a} \quad (3.28)$$

değişimi ile  $\phi_n^k$  değişmeden kalır [20]. Bu nedenle yalnızca  $\frac{2\pi}{a}$  uzunluğunda bir aralık içinde  $k$  seçimi yapmak mantıklıdır. Genellikle Eş. (3.29)'deki gibi simetrik bir aralık almak uygundur:

$$k \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right] \quad (3.29)$$

Bu aralık birinci Brillouin bölgesi olarak bilinir. Bu nedenle,  $k$  değerlerinin seçimi şu şekilde ifade edilir:

$$k = \frac{2\pi\ell}{Ma}, \quad -\frac{M}{2} < \ell \leq \frac{M}{2} \quad (3.30)$$

Bu ifade, Brillouin bölgesinde yer alan izinli dalga vektörlerini tanımlar. Sıkı bağlanma ve serbest parçacık dispersiyon ilişkileri arasındaki fark, serbest parçacık durumunda  $k$ 'nin  $\pm\infty$  aralığında olmasıdır. Sıkı bağlanma modelinde ise  $k$  birinci Brillouin bölgesi ile sınırlıdır.

### 3.4. Bose-Hubbard Modeli

Bose-Hubbard modeli, bozonların optik örgü potansiyelindeki davranışını ve kuantum faz geçişlerini incelemek için kullanılan temel bir modeldir. Sıkı bağlanma modelinin bozonlara uygulanmış hâli olarak da düşünülebilen Bose-Hubbard modeli, yoğun madde fiziğinde mikroskobik düzeyde süperakışkanlık ve Bose-Einstein yoğunlaşması gibi kolektif olayları anlamak için kullanılır [1,11].

Bose-Hubbard modelinin optik örgülerde hapsedilen ultra-soğuk atomlara uygulanabilirliği Jaksch ve arkadaşlarının 1998'de yaptığı çalışmalarla gösterilmiştir [11]. İlerleyen yıllarda ultra-soğuk atomların optik örgülerde deneysel olarak tuzaklanmasıyla Bose-Hubbard modeli büyük önem kazanmıştır. Kuantum

simülasyonları ve kuantum hesaplamaları gibi alanlarda bu model önemli bir rol oynamaktadır.

Atomların örgü boyunca hareketini ve örgü noktalarındaki etkileşimlerini açıklayan matematiksel bir ifadeden oluşan Bose-Hubbard modelinde Hamiltonyen:

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j) + \frac{U}{2} \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i + \sum_i \varepsilon_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (3.31)$$

Eşitlik (3.31)'de  $J$  komşu örgüler arasındaki tünelleme genliğidir. Bu ilk terim kinetik enerjiyi ifade eder. İkinci terim ise bozonlar arası etkileşme terimidir.  $U$  parametresi aynı örgü noktasındaki bozonlar arasındaki etkileşmenin büyüklüğünü belirler.  $\varepsilon_i$  ise örgü noktasına uygulanan dış tuzak potansiyelini temsil etmektedir. Uygulanan lazer şiddeti arttırıldıkça potansiyelin derinliği artar, bu da tünellemeyi yani  $J$ 'yi azaltırken,  $U$  etkileşimini arttırır.

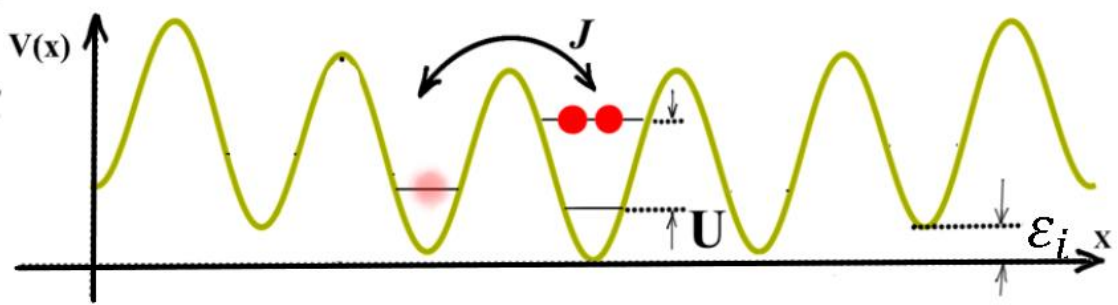
Etkileşim terimini daha detaylı anlamak için, aşağıdaki bozonik cebir ifadeleri kullanılır [20]:

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i = \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger - 1 \quad (3.32)$$

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i = \hat{a}_i^\dagger (\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger - 1) \hat{a}_i - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (3.33)$$

Eşitlik (3.33) sayı operatörü  $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  kullanılarak

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i = \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \quad (3.34)$$



**Şekil 3.2:** Bir boyutlu optik örgüde Bose-Hubbard modelinin temel fiziksel süreçlerinin şematik gösterimi. Kuyular arası tünelleme (sıçrama) genliği  $J$  ve aynı kuyuda bulunan bozonlar arasındaki etkileşim enerjisi  $U$  ile tanımlanır. Atomlar, potansiyel derinliği  $V_0$  ile belirlenen kuyular arasında kuantum tünelleme yoluyla hareket eder.

şeklinde yazılır.  $\hat{n}_i$  sayı operatörü,  $i$ . örgü noktasında bulunan toplam parçacık sayısını verir. Etkileşim terimi her bir örgüdeki parçacık sayısına bağlıdır. Tablo 3.1'de farklı  $n_i$  değerleri için etkileşim enerjisi  $\frac{U}{2} n_i (n_i - 1)$  değerlerini içeren durumlara yer verilmiştir.

Tablodan anlaşılacağı üzere, örgü noktasında 0 veya 1 parçacık olduğunda etkileşim terimi sıfırdır. Bu durum, etkileşimin olmadığını gösterir. Dolayısıyla Hamiltonyendeki ikinci terim, ancak iki veya daha fazla sayıda parçacık mevcut olduğunda katkı sağlar.

**Tablo 3.1:** Etkileşme enerjilerinin parçacık sayısına bağlılığı

| $n_i$                     | 0 | 1 | 2   | 3    | 4    | 5     |
|---------------------------|---|---|-----|------|------|-------|
| $\frac{U}{2}n_i(n_i - 1)$ | 0 | 0 | $U$ | $3U$ | $6U$ | $10U$ |

Eşitlik (3.35)'de yer alan kombinasyon,  $n_i$  parçacığın çiftler halinde etkileşime girebileceği yolların sayısını verir [20]:

$$\binom{n_i}{2} = \frac{n_i!}{2!(n_i-2)!} = \frac{n_i(n_i-1)}{2} \quad (3.35)$$

#### 3.4.1. Bose-Hubbard modelinin türetilmesi

Belirli koşullar altında, Bose-Hubbard Hamiltonyeni doğrudan ultra-soğuk atomik gazların mikroskobik tanımından türetilir. İlk olarak Jaksch ve arkadaşları tarafından geliştirilen bu türetme, düşük enerjili sınırdaki atomlar arası etkileşimlere önemli katkının yalnızca s-dalga saçılmasından geldiğini ortaya koymuştur [11]. Bu durumda atomlar arası potansiyel  $U(x)$ , noktasal etkileşimli etkin potansiyel ile değiştirilebilir [1,7,11,15]:

$$U(x) = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \delta(x) = g\delta(x) \quad (3.36)$$

Eşitlik (3.36)'da yer alan  $a_s$ , s-dalga saçılma uzunluğu,  $m$  atomların kütlesi,  $\delta(x)$  Dirac-Delta fonksiyonu,  $g$  bozonlar arası etkileşim parametresini olarak tanımlanır. Bozonlar arası etkin etkileşim deneysel olarak değiştirilebilen saçılma uzunluğu  $a_s$  ile karakterize edilir. Bu bağlamda, iki parçacık arasındaki potansiyel yerine geçecek biçimde etkin potansiyel yaklaşımı kullanılmaktadır.

İkinci kuantizasyon formalizmindeki operatörlerin genel formu, yaratma ve yok etme operatörleri cinsinden ifade edilir. Çok parçacıklı Hamiltonyeni oluşturmak için, özellikle konum gösterimi kullanmak faydalıdır. Konum gösterimindeki kuantum alan operatörleri  $\hat{\Psi}(x)$  ve  $\hat{\Psi}^\dagger(x)$  sisteme sırası ile,  $x$  konumunda bozon ekler veya çıkarır. Bir

dış potansiyelin varlığında ve ikinci kuantizasyonda Hamiltonyen bozonik alan operatörleri cinsinden

$$\hat{H} = \int d x \hat{\Psi}^\dagger(x) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right) \hat{\Psi}(x) + \frac{g}{2} \int d x \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \quad (3.37)$$

ile ifade edilir [37]. Alan operatörlerinin Wannier fonksiyonları cinsinden seriye açılımı

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{i,n} \hat{a}_{i,n} \omega_n(x-x_i) \quad (3.38)$$

$$\hat{\Psi}^\dagger(x) = \sum_{i,n} \hat{a}_{i,n}^\dagger \omega_n^*(x-x_i) \quad (3.39)$$

Düşük enerjilerde ve yeterince derin optik kafeslerde atomların en alt Bloch bandında bulunduğu varsayılır.  $J$ ,  $U$  ve  $\varepsilon_i$  parametreleri Eş. (3.40)-(3.42) ile verildiği takdirde Eş. (3.37), Eş. (3.33)'e dönüşür [37]:

$$J = - \int d x \omega_0(x) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0 \sin^2(k_l x) \right) \omega_0(x-a) \quad (3.40)$$

$$U = \int d x g |\omega_0(x)|^4 \quad (3.41)$$

$$\varepsilon_i = \int d x |\omega_0(x-x_i)|^2 V(x-x_i) \quad (3.42)$$

Wannier fonksiyonlarının bir noktada lokalize olduğu derin optik örgülerde en yakın komşular dışındaki etkileşimler ihmal edilir. Eşitlik (3.40), yalnızca  $i$  ve  $j$  kafes noktalarının birinci dereceden komşu olması durumunda sıfırdan farklıdır. Diğer durumlarda sıfırdır. Üçüncü terimde yer alan  $\varepsilon_i$  her örgü noktasında bulunan yerel potansiyel enerjiyi ifade eder ve bu enerji örgünün tuzak potansiyeli tarafından belirlenir. Bu yerel enerji kaymaları rastgele hale gelirse, yani örgü noktalarındaki yerel enerji seviyelerinde düzensizlikler olursa, bu durum sistemde düzensizlik etkilerinin incelenmesi de olanak tanır [13, 18, 35].

### 3.4.2. Süperakışkan-Mott yalıtkan fazı

Bose-Hubbard modelinde tanımlanan kuantum faz geçişlerinden biri, süper akışkan faz ile Mott yalıtkan fazı arasındaki geçiştir. Potansiyelin derinliği arttıkça süper akışkan fazından Mott yalıtkan fazına geçiş olur. Potansiyelin derinliği az iken kinetik enerji baskın, yani  $J \gg U$  olur. Komşu örgü noktaları arası tünelleme, parçacıklar arasındaki etkileşim enerjisini bastırarak süper akışkan özelliklerin ortaya çıkmasına neden olur. Bu durumda, atomlar tüm örgü boyunca delokalizedir ve sistem zayıf etkileşimli bir Bose

gazı gibi davranır. Etkileşim enerjisinin baskın olduğu durumda ( $J \ll U$ ), parçacıklar lokalize olur ve sistem, Mott yalıtkan fazına geçiş yapar. Mott yalıtkan fazında her örgü noktasında sabit bir parçacık sayısı bulunur. Bu iki rejim arasındaki geçiş kinetik enerji ile etkileşim enerjisi arasındaki rekabetin sonucudur. Kinetik enerji parçacıkları delokalize etmeye çalışırken, etkileşim enerjisi, atomları belirli noktalarda lokalize edip sayı dalgalanmalarını minimize etmeye çalışır [1, 2, 11, 14-16, 38].

Süperakışkan faz, optik örgü derinliği az olduğunda gerçekleşir. Neredeyse tüm atomlar aynı tek parçacık durumunda bulunur. Bu fazda sistemin Hamiltonyeni diğer terimlerin ihmalı ile

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j) \quad (3.43)$$

bulunur. Sistemin durumu makroskopik dalga fonksiyonu ile ifade edilebilir. Bu fazda sistemin taban durumu [11, 20, 21]:

$$|\Psi_{SF}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\hat{b}_0^\dagger)^N |0\rangle \quad (3.44)$$

$N$  toplam parçacık sayısı,  $|0\rangle$  boşluğun kuantum durumu,  $\hat{b}_q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_i \hat{a}_i^\dagger e^{iqx_i}$  operatörü  $q$  kuazi-momentumuna sahip bir atomu yaratma operatörü,  $M$  ise toplam örgü nokta sayısıdır. Çok parçacıklı taban durumu büyük ölçüde özdeş tek parçacıklı dalga fonksiyonlarının çarpımı gibi olduğu için sistem, iyi tanımlanmış bir faz açısına sahiptir. Korelasyon fonksiyonu

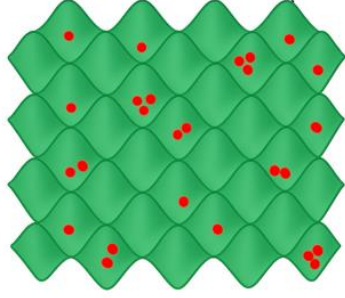
$$\rho_{i,j} = \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i \rangle \quad (3.45)$$

ile ifade edilir. Süper akışkan fazında bu korelasyon fonksiyonu  $i$  ve  $j$  durumları arasındaki mesafeden bağımsız olup mutlak değeri  $|\rho_{i,j}| = N/M$  ile bulunur. Parçacık sayısındaki dalgalanmalar ise  $(\Delta n)^2 = N/M$  ifadesi ile toplam parçacık sayısı  $N$  ve örgü sayısı  $M$ 'ye bağlıdır.

Bozonlar arası etkileşim arttıkça bir atomun bir örgü noktasından diğerine tünelleme yapabilmesi için gereken ortalama kinetik enerji etkileşme enerjisini aşmakta yetersiz kalır. Sonuç olarak atomlar bireysel örgü noktalarında lokalize olur ve parçacık sayısındaki dalgalanmalar baskılanır. Sistemin Hamiltonyeni diğer terimlerin ihmalı ile

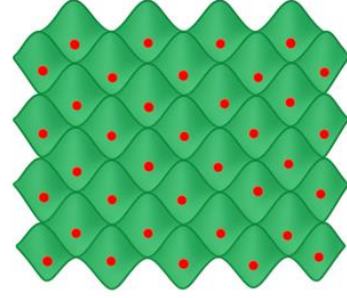
$$\hat{H} = \frac{U}{2} \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i \quad (3.46)$$

a) Süper akışkan durumu



Atomlar optik kafes içinde serbestçe hareket ederler

b) Mott yalıtkan durumu



Atomlar, atomlararası etkileşimler nedeniyle kafes noktalarına yerleşirler



**Şekil 3.3:** Süperakışkan ve Mott yalıtkan fazları. (a) Süperakışkan fazda, tünelleme baskın olduğu için atomlar optik örgü içerisinde lokalize olmayıp kolektif biçimde hareket ederler. (b) Mott yalıtkan fazında, etkileşim enerjisi baskın hale gelir; her örgü noktasında sabit sayıda atom bulunur ve parçacıklar lokalizedir.

bulunur. Mott yalıtkan fazı olarak adlandırılan bu fazda parçacıkların birbirinden uzak durması ile enerji minimum olur.  $N = M$  durumunda ve her bir parçacığın kendi örgü noktasında bulunması ile en düşük etkileşme enerjisi elde edilir. Dalga fonksiyonu, her örgü noktasında tek sayıda atom içeren lokalize atomik dalga fonksiyonlarından oluşur. Taban durumu dalga fonksiyonu

$$|\Psi_M\rangle = \prod_i \frac{1}{\sqrt{N!}} (\hat{a}_i^\dagger)^N |0\rangle \quad (3.47)$$

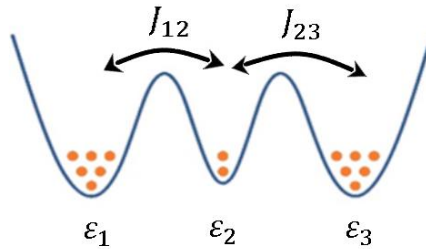
olur.  $\bar{n} = N/M$  örgü noktası başına ortalama parçacık sayısıdır. Mott yalıtkan fazındaki en düşük enerjili uyarılmalar, her sistemin toplam parçacık sayısını koruyan parçacık-delik uyarılmalarıdır. Bu tür bir uyarılmada: bir parçacık bir kafes noktasından çıkarılır (delik yaratılır), başka bir kafes noktasına eklenir (fazdan parçacık yaratılır). Süperakışkan fazında enerji spektrumunda bir aralık (gap) bulunmamakla birlikte, Mott yalıtkan fazında spektrumda aralık bulunur. Bu süreç Mott fazını karakterize eden bir enerji aralığı ile ifade edilir. Bu enerji aralığı parçacık delik çifti yaratmak için gereken minimum enerjiye karşılık gelir [3, 36]. Bu fazda  $i \neq j$  için  $\rho_{i,j} = 0$  ve parçacık sayısı dalgalanmaları  $(\Delta n)^2 = 0$  bulunur.

#### 4. ÜÇ KUYULU OPTİK ÖRGÜLERDE FAZ GEÇİŞLERİ

Üç kuyulu optik örgü potansiyelleri optik örgü çalışmalarında ayrı bir yere sahiptir. Bu potansiyeller ile ilgili literatürde çok sayıda çalışma bulunmaktadır [22-32]. Özellikle farklı derinliklere sahip kuyulardan oluşan potansiyeller kuantum sensörlerinin ve atomtronik cihazların gelişiminde önemli bir yere sahiptir [26, 27]. Üç kuyulu bir potansiyelin Hamiltonyeninin hangi koşullar altında integre edilebilir olduğu ve sistemin dinamiği bu alanda çalışılan önemli problemlerdendir [26]. Krom ve disprosiyum gibi gazlar bu tür optik örgüde tuzaklandığında, dipolar etkileşimlerin göz önünde bulundurulması gerekir [28, 29]. Bu gazlarda dipolar etkileşimlerin izotropik olmama özelliğinin sistemin faz diyagramını önemli ölçüde etkilediği bulunmuştur [29]. Kuyular arası tünelleme genliklerinin özdeş olmadığı durumlarda tünellemenin baskılandığı ortalama alan yaklaşımı kullanılarak gösterilmiştir [30]. Tünelleme genliğinin zamanla sinüsoidal olarak değiştiği üç kuyulu optik örgü potansiyelleri incelenen diğer problemlerdendir [30, 31].

Bu bölümde lineer konfigürasyona sahip üç potansiyel kuyulu Bose-Hubbard modeli ele alındı. Böyle bir sistemde başlangıçta tüm atomlar uçtaki kuyulardan birinde, son halde ise diğer uçtaki kuyuda bulunur. Ortadaki kuyuda atom popülasyonu ihmal edilebilir. Optik örgü şiddeti yeterince büyük olduğunda, atomlar en düşük Bloch bandında bulunur ve tek bant yaklaşımı uygulanabilir. Sadece en yakın komşular arası tünelleme olduğu varsayılırsa sistemin Hamiltonyeni:

$$\hat{H} = -J_{12}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) - J_{23}(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_2) + \frac{U}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (4.1)$$



Şekil 4.1: Üç kuyulu Bose-Hubbard modeli.

$J_{12}$ , 1 ve 2 numaralı kuyular arasında,  $J_{23}$  ise 2 ve 3 numaralı kuyular arasındaki geçiş genliği gösterir. Sistemde toplam parçacık sayısı korunumlu bir niceliktir ve her bir kuyuya karşılık gelen sayı operatörü  $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  olur.  $\varepsilon_i$  terimi üç kuyunun da farklı derinliğe sahip olduğunu gösterir. Böyle bir sistem Şekil 4.1’de gösterilmiştir.

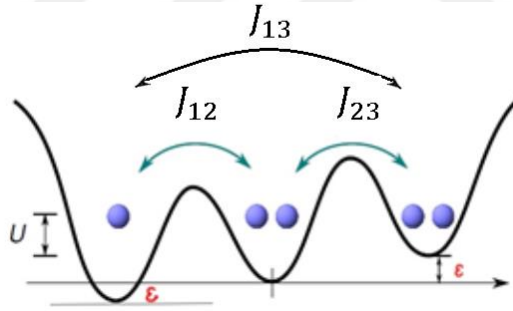
#### 4.1. Dönen Üç Kuyulu Optik Örgüde Bose-Hubbard Modeli

Bu bölümde süperakışkan ve Mott yalıtkan fazlarına örnek olarak dönen bir Bose-Hubbard modeli incelendi. Dönen bir Bose-Hubbard modelinde, dönme sistemde bir manyetik akı tanımını gerekli kılar. Tünelleme terimindeki faz çarpanı uygulanan bu manyetik akı  $\Phi$ 'nin veya akı ile orantılı  $\Omega$  frekansının dönen sistem üzerine etkisini gösterir. Birinci ve üçüncü kuyular arasında da tünelleme olduğu ve her üç kuyunun da derinliklerinin farklı olduğu kabul edilirse, öyle bir sistemde Hamiltonyen [32]

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \left[ -J(e^{i\Phi/3} \hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i + e^{-i\Phi/3} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{i+1}) + \frac{U}{2} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i \right] + \varepsilon(\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) \quad (4.2)$$

olur. Bu Bose-Hubbard modeli Şekil 4.2'de gösterilmektedir. Kuyular arası tünelleme genliği sabit olsun ( $J_{12} = J_{23} = J_{13} = J$ ). Bu durumda Hamiltonyen

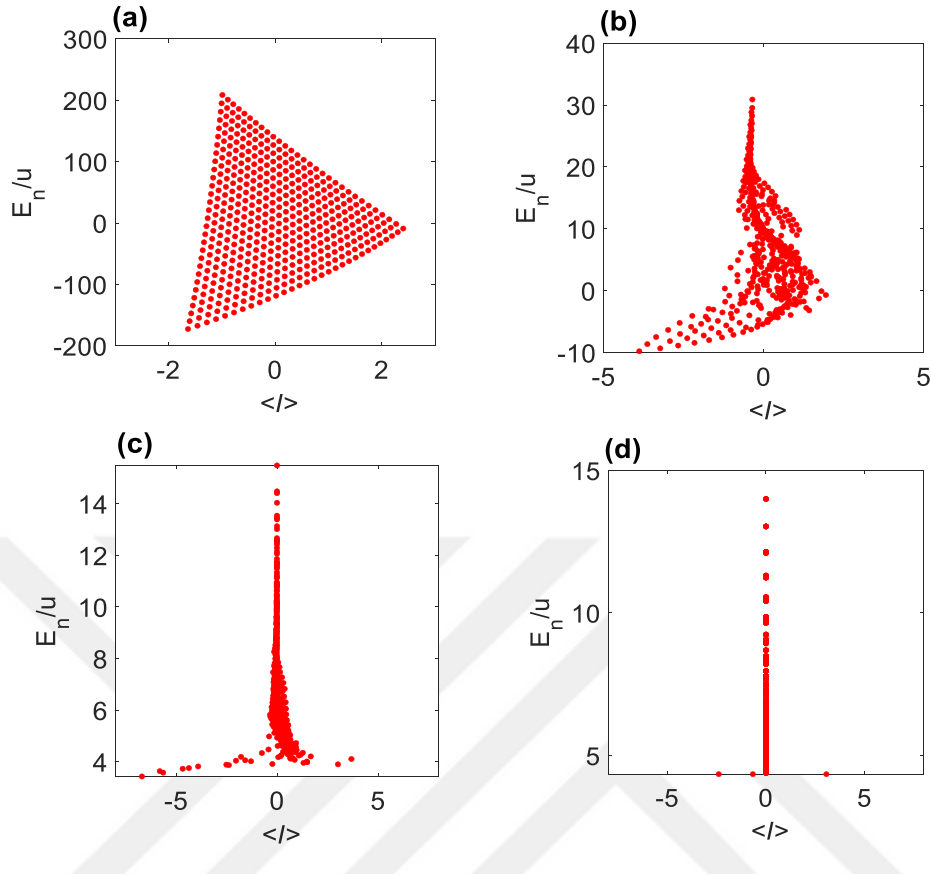
$$\begin{aligned} \hat{H} = & -J e^{i\Phi/3} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - J e^{i\Phi/3} \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_2 - J e^{i\Phi/3} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_3 - J e^{-i\Phi/3} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \\ & J e^{-i\Phi/3} \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_1 - J e^{-i\Phi/3} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 + \frac{U}{2} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2 + \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 \hat{a}_3) + \\ & \varepsilon(\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) \end{aligned} \quad (4.3)$$



**Şekil 4.2:** Üç kuyulu Bose-Hubbard modeli. Her üç kuyu arasında tünelleme olup, kuyular farklı derinliktedir.

olmaktadır. Akımın beklenen değeri Hamiltonyen operatörünün akı ile değişimine bağlıdır:

$$\langle I \rangle = \left\langle n \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \Phi} \right| n \right\rangle \quad (4.4)$$



**Şekil 4.3:** Akımın özdeğerler ile değişimi.  $N = 30$ ,  $\Phi = 0,8\pi$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $J = 0,5$  ve (a)  $u = 0,2$  (b)  $u=2$  (c)  $u=20$  (d)  $u=20000$ . Parçacıklar arası etkileşim arttıkça akım sıfıra gitmektedir.

Akımın özdeğerler ile değişimi Şekil 4.3'deki grafiklerde verilmiştir. Akımın beklenen değeri MATLAB programı ile nümerik olarak hesaplandı. Grafiklerin çiziminde  $N = 30$ ,  $\Phi = 0,8\pi$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $J = 0,5$  değerleri sabit olmakla birlikte, bozonlar arası etkileşim  $u = UN/J = 0,2; 2; 20$  ve  $20000$  olacak şekilde değiştirildi. Parçacıklar arası etkileşimlerin sıfır olduğu durumda ( $u = UN/J = 0$ ), akım Hamiltonyen ile komüte eder. Bu durumda her öz durum sıfırdan farklı bir akım değerine sahip olur ve sistem süperakışkan fazdadır. Parçacıklar arası etkileşimler arttıkça öz durumlar akımın sıfır olduğu bir çizgi etrafında toplanır.  $u = 20000$  değeri parçacıklar arası etkileşimlerin oldukça yüksek olduğu bir durumdur. Bu durumu temsil eden grafik Şekil 4.3-d'de görülmektedir. Şekilden tüm öz durumlar için akımın sıfıra gittiği anlaşılmaktadır. Dolayısıyla atomlar arası etkileşimlerin yüksek olduğunda akım sıfırdır. Akımın sıfır olduğu an, sistemin süperakışkan fazdan Mott yalıtkan fazına geçiş yaptığı andır.

## 4.2. Dipolar Atomlarla Bose-Hubbard Modeli

Bu bölümde optik örgüde dipolar atomların tuzaklandığı üç kuyulu bir Bose-Hubbard modeli ele alındı. Eşitlik (4.5) ile verilen Hamiltonyen, bozonlar arası dipol-dipol etkileşimlerini ve komşu örgü noktaları arasındaki tünellemeyi içermektedir. Böyle bir sistem için, büyük dipol momente sahip krom veya disprosyum gibi atomlar kullanılabilir. Sistemin Hamiltonyeni [28, 29]:

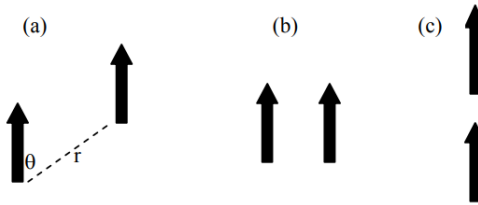
$$\hat{H} = -J_{12}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) - J_{23}(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_2 \hat{a}_3^\dagger) + \frac{U_0}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{U_{ij}}{2} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_j \quad (4.5)$$

$U_0$  terimi bozonlar arası temas etkileşimlerini ve dipol-dipol etkileşimleri içerir. Her iki tür etkileşim de itici veya çekici olabilir (Şekil 4.4). Bu etkileşim aşağıdaki ifade ile verilir [28, 29]:

$$U_0 = g \int d^3 \vec{r} |\Psi_i(\vec{r})|^4 + \int d^3 \vec{r} d^3 \vec{r}' |\Psi_i(\vec{r})|^2 V_D(|\vec{r} - \vec{r}', \theta|) |\Psi_i(\vec{r}')|^2 \quad (4.6)$$

$V_D(|\vec{r} - \vec{r}', \theta|) = d^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) / |\vec{r} - \vec{r}'|^3$  bozonlar arası dipolar etkileşmedir.  $d^2 = \mu_0 \mu_m^2 / 4\pi$  (veya  $d^2 = \mu_e^2 / 4\pi \epsilon_0$ ) olup  $\mu_m$  ( $\mu_e$ ) manyetik (elektrik) dipol moment,  $\theta$  polarizasyon yönü ile dipoller arası bağıl uzaklığın arasındaki açıdır.  $U_{ij}$  terimi ise farklı örgü noktaları arası dipolar etkileşimleri ifade eder:

$$U_{ij} = \int d^3 \vec{r} d^3 \vec{r}' |\Psi_i(\vec{r})|^2 d^2 \frac{(1 - 3 \cos^2 \theta)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} |\Psi_j(\vec{r}')|^2 \quad (4.7)$$



**Şekil 4.4:** Dipollerin yönelimi (a) İki dipolün yönelimi (b) İki dipolün yan yana dizilimi (itici etkileşim) (c) İki dipolün uç uca dizilimi (çekici etkileşim)

$\hat{N}^2 = (\hat{n}_1^2 + \hat{n}_2^2 + \hat{n}_3^2) + 2\hat{n}_1\hat{n}_2 + 2\hat{n}_1\hat{n}_3 + 2\hat{n}_2\hat{n}_3$  eşitliği kullanılarak Eş. (4.5) tekrar yazılabilir [28, 29]:

$$\hat{H} = \frac{U_0}{2} (\hat{N}^2 - \hat{N}) + (U_{12} - U_0) \hat{n}_1 \hat{n}_2 + (U_{13} - U_0) \hat{n}_1 \hat{n}_3 + (U_{23} - U_0) \hat{n}_2 \hat{n}_3 - J_{12}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) - J_{23}(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_2 \hat{a}_3^\dagger) \quad (4.8)$$

$4 \leq \alpha \leq 8$  aralığında,  $U_{12} = U_{23} = \alpha U_{13}$  ve  $U_{13} = U_0$  kabulü ile Eş. (4.8) analitik olarak çözülebilir [28, 29]. Bu koşullar altında Hamiltonyen Eş. (4.9)'a dönüşür:

$$\hat{H} = \frac{U_0}{2}(\hat{N}^2 - \hat{N}) + (\alpha - 1)U_0\hat{n}_2(\hat{n}_1 + \hat{n}_3) - J_{12}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger) - J_{23}(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3^\dagger) \quad (4.9)$$

Eşitlik (4.9) ile verilen Hamiltonyenin indirgenmiş formu:

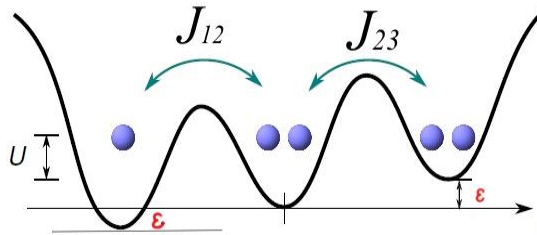
$$\hat{H}_0 = -\hat{H} + (1 + \alpha)U_0\hat{N}^2/4 - U_0\hat{N}/2 \quad (4.10)$$

$$\hat{H}_0 = U(\hat{n}_1 - \hat{n}_2 + \hat{n}_3)^2 + J_{12}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger) + J_{23}(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3^\dagger) \quad (4.11)$$

olduğu görülmektedir. Eşitlik (4.11)'de  $U = (\alpha - 1)U_0/4$  eşitliği kullanıldı.

Birinci ve üçüncü kuyulara eşit dış alan uygulandığında, oluşan üç kuyulu sistem Şekil 4.5'te gösterilmektedir. Bu durumda  $\varepsilon(\hat{n}_3 - \hat{n}_1)$  terimi, Eş. (4.11) ile verilen Hamiltonyene eklenir:

$$\hat{H}_0 = U(\hat{n}_1 - \hat{n}_2 + \hat{n}_3)^2 + J_{12}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger) + J_{23}(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3^\dagger) + \varepsilon(\hat{n}_3 - \hat{n}_1) \quad (4.12)$$



**Şekil 4.5:** Üç kuyulu Bose-Hubbard modeli. Bozonların en yakın kuyular arası tünelleme yaptığı ve kuyu derinliklerinin farklı olduğu kabul edilmiştir.

Eşitlik (4.12) ile verilen Hamiltonyen aşağıdaki durumlarda integre edilebilirdir [26]:

- i)  $U = 0, \varepsilon \neq 0, J_{12} = J_{23} \neq 0$
- ii)  $J_{12} = J_{23} = 0, U \neq 0, \varepsilon \neq 0$
- iii)  $\varepsilon = 0, U \neq 0, J_{12} = J_{23} \neq 0$

İkinci dereceden kuantum faz geçişlerini gösteren iki integrallenebilir sınır vardır. Tünelleme genliği sıfır alınarak, bozonlar arasındaki etkileşim kuvveti  $U, \varepsilon$ 'a göre değiştirilir. İkinci durumda,  $\varepsilon = 0$  iken  $U, J_{12} (J_{23})$ 'ye göre değiştirilir. Farklı fazlar,

kuyuları işgal eden bozon sayıları ile karakterizedir. Üç parametrenin de sıfırdan farklı olduğu ( $U \neq 0, J_{12} = J_{23} \neq 0, \varepsilon \neq 0$ ) integre edilemeyen durumlarda sistem çapraz geçişler sergiler. Bu durumunda Hamiltonyenin nümerik çözümleri yapılabilir.

İki ve üç kuyulu potansiyellerde ortalama alan yaklaşımı uygulanabilen bir yaklaşım olduğu bilinmektedir [22]. Sistemdeki  $N$  bozon sayısı yeterince büyük olduğunda Eş. (4.13) ile ortalama alan yaklaşımı kullanmak uygundur [30]:

$$\Psi_n = \langle \hat{a}_n \rangle / \sqrt{N} \quad (n=1,2,3) \quad (4.13)$$

Ortalama alan yaklaşımında verilen Hamiltonyen  $H_{mf} = \langle H \rangle / N$  denklemiyle

$$H_{mf} = J_{12}(\Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_1 \Psi_2^*) + J_{23}(\Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_3 \Psi_2^*) + \Gamma(\Psi_1 \Psi_1^* - \Psi_2 \Psi_2^* + \Psi_3 \Psi_3^*)^2 + \varepsilon(\Psi_3 \Psi_3^* - \Psi_1 \Psi_1^*) \quad (4.14)$$

bulunur. Eşitlik (4.14)'de  $\Gamma = NU$  'dur. Ortalama alan yaklaşımı,  $N \rightarrow \infty$  ve  $U \rightarrow 0$  ancak  $\Gamma = NU$  ifadesinin sabit olduğu anlamına gelir. Ortalama alan yaklaşımında

$$i \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = \frac{\partial H_{mf}}{\partial \Psi_n^*} \quad (4.15)$$

eşitliği ile birbirine ve zamana bağlı üç ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} i \frac{d\Psi_1}{dt} &= 2\Gamma(\Psi_1 \Psi_1^* - \Psi_2 \Psi_2^* + \Psi_3 \Psi_3^*)\Psi_1 + J_{12}\Psi_2 - \varepsilon\Psi_1 \\ i \frac{d\Psi_2}{dt} &= -2\Gamma(\Psi_1 \Psi_1^* - \Psi_2 \Psi_2^* + \Psi_3 \Psi_3^*)\Psi_2 + J_{12}\Psi_1 + J_{23}\Psi_3 \\ i \frac{d\Psi_3}{dt} &= 2\Gamma(\Psi_1 \Psi_1^* - \Psi_2 \Psi_2^* + \Psi_3 \Psi_3^*)\Psi_3 + J_{23}\Psi_2 + \varepsilon\Psi_3 \end{aligned} \quad (4.16)$$

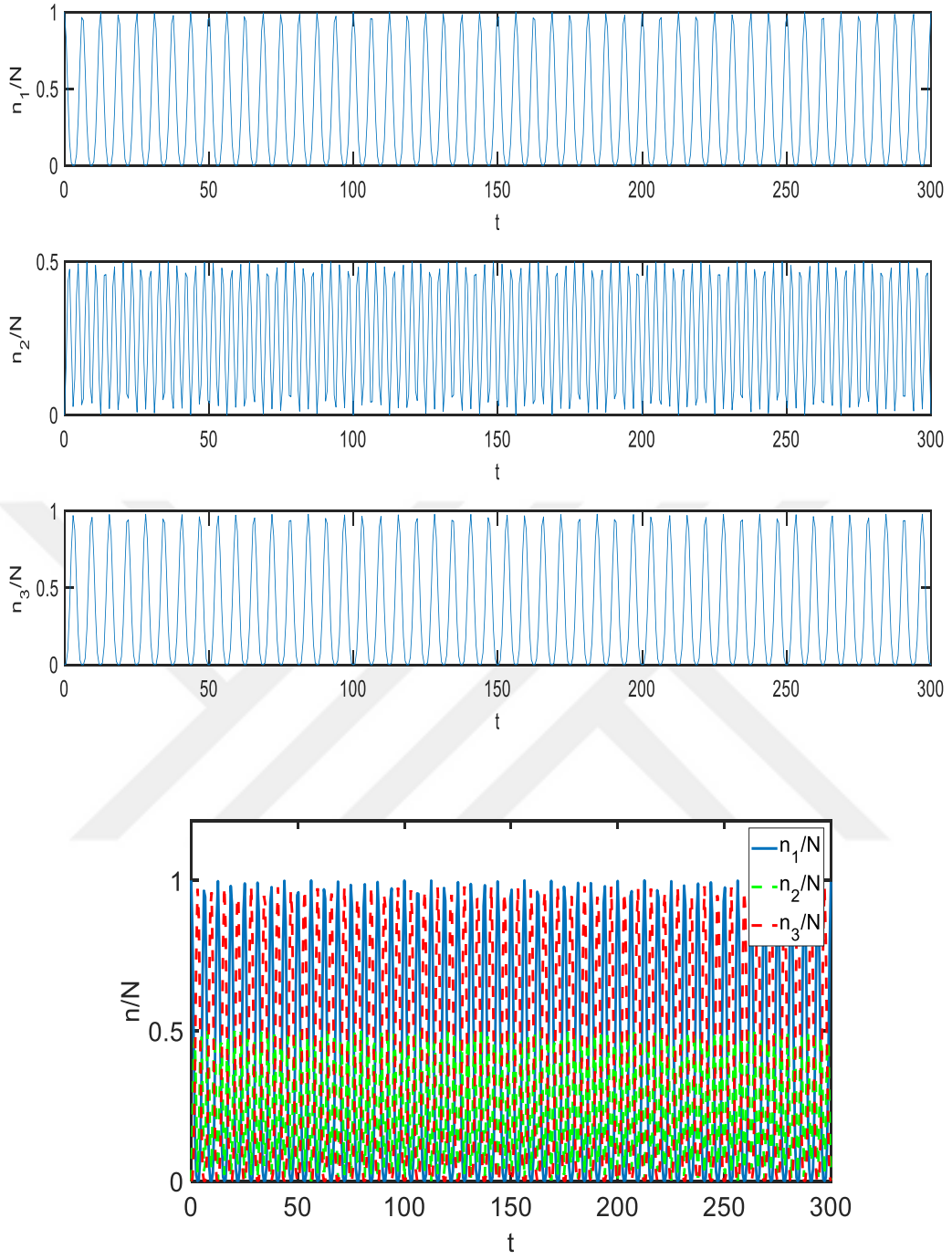
$J_{12}/J = J_{23}/J = 1/\sqrt{2}$  ve  $Jt \rightarrow t$  dönüşümü ile Eş. (4.16)

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dt} &= -2i\frac{\Gamma}{J}(|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2)\Psi_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\Psi_2 + i\frac{\varepsilon}{J}\Psi_1 \\ \frac{d\Psi_2}{dt} &= 2i\frac{\Gamma}{J}(|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2)\Psi_2 - \frac{i}{\sqrt{2}}\Psi_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\Psi_3 \\ \frac{d\Psi_3}{dt} &= -2i\frac{\Gamma}{J}(|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2)\Psi_3 - \frac{i}{\sqrt{2}}\Psi_2 - i\frac{\varepsilon}{J}\Psi_3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

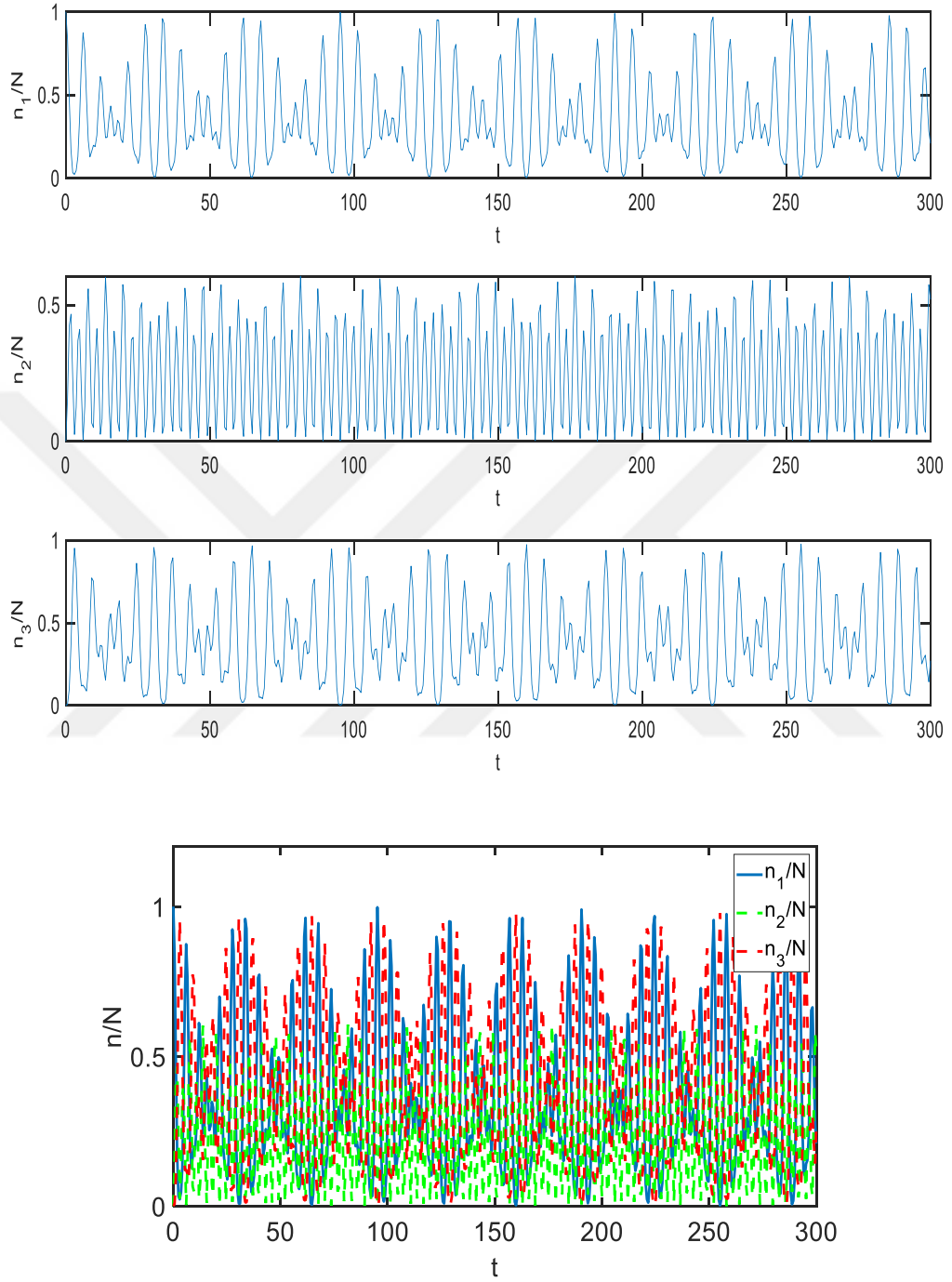
halini alır. Eşitlik (4.17)'nin çözümü nümerik olarak yapılır.  $n_1(t) = |\Psi_1(t)|^2$ ,  $n_2(t) = |\Psi_2(t)|^2$ ,  $n_3(t) = |\Psi_3(t)|^2$  sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü kuyulardaki parçacık sayılarını ifade eder. Başlangıç koşulları  $\Psi_1(0) = 200$ ,  $\Psi_2(0) = 0$ ,  $\Psi_3(0) = 0$

alınarak elde edilen  $n(t) \propto t$  grafikleri Şekil 4.6-4.8’de verilmiştir. Nümerik çözümler için Runge-Kutta metodu ve MATLAB programı kullanıldı.

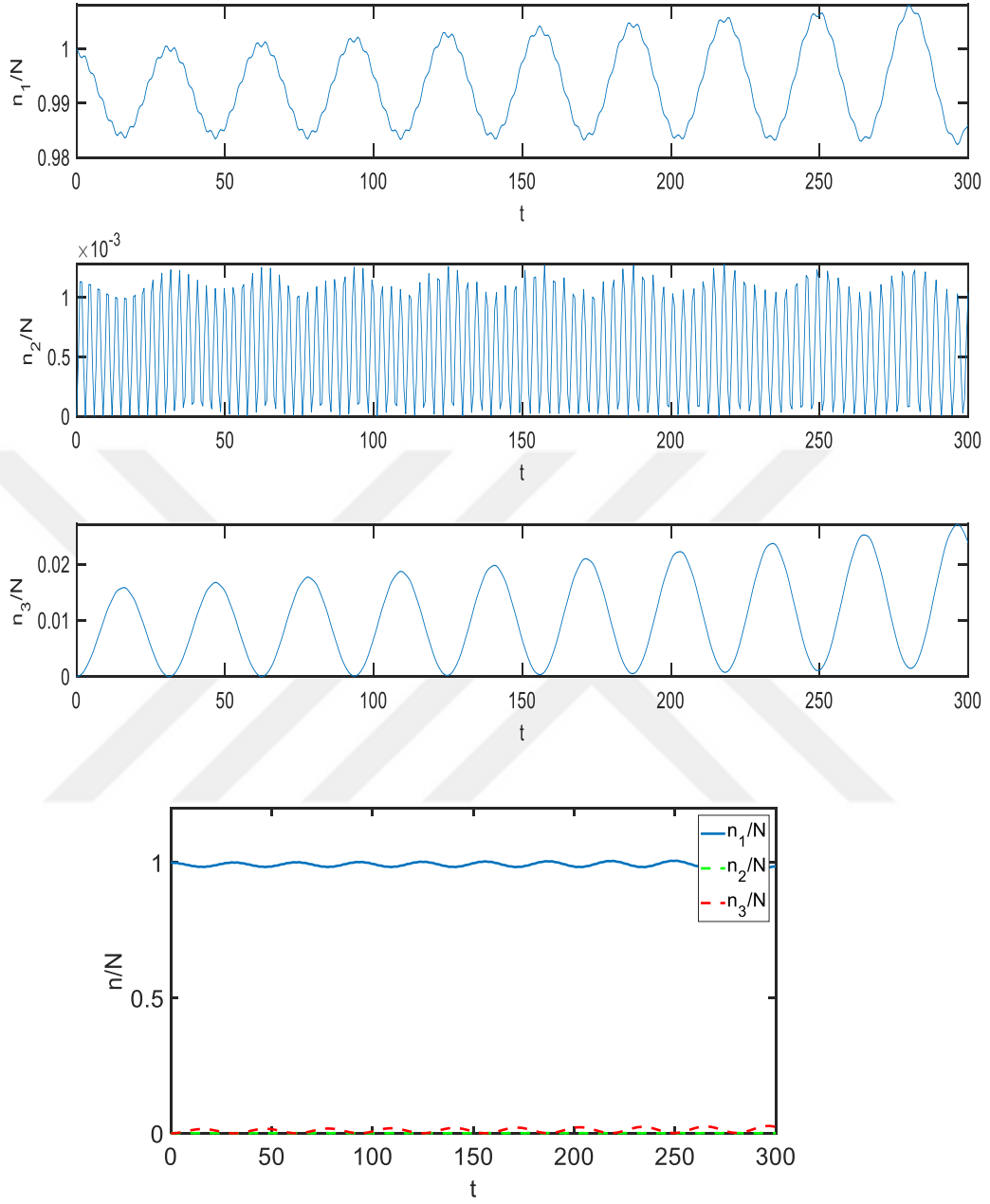
Şekil 4.6’da  $\Gamma/J = 0$  ve  $\varepsilon/J = 0,1$  için her üç kuyuya ait bağıl parçacık sayılarının zamanla değişimi çizilmiştir. Parçacıklar arası etkileşimlerin sıfır olduğu bu durumda sistem süperakışkan fazdadır. Her üç kuyudaki parçacık sayıları periyodik olarak değişmektedir. Şekil 4.7’de bozonlar arası etkileşme arttırılarak  $\Gamma/J = 0,001$  ve  $\varepsilon/J = 0,1$  değerleri için parçacık sayılarının zamanla değişimi çizilmiştir. Bu parametre değerlerinde her üç kuyuda da parçacık sayılarının yaklaşık periyodik salınımlar yaptığı görülmektedir. Şekil 4.8 ise atomlar arası etkileşimlerin daha da arttırıldığı durumu göstermektedir.  $\Gamma/J = 0,05$  ve  $\varepsilon/J = 0,1$  için çizilen bu grafiğe göre, kuyular arası bozon geçişi olmamakta, kuyulardaki bozon sayıları başlangıç koşullarındaki değerleri korumaktadır. Artan bozonlar arası etkileşimlerin tünellemeyi baskıladığı bu faz Mott yalıtkan fazına karşılık gelmektedir.



**Şekil 4.6:**  $\Gamma/J = 0$ ;  $\varepsilon/J = 0,1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi. Parçacıklar kuyular arası sürekli tünelleme yapmaktadır. Bu durum süper akışkan faza karşılık gelir.



**Şekil 4.7:**  $\Gamma/J = 0.001$ ,  $\varepsilon/J = 0.1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi. Kuyulardaki parçacık sayıları periyodik olarak değişmektedir.



**Şekil 4.8:**  $\Gamma/J = 0,05$ ;  $\varepsilon/J = 0,1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi. Parçacıklar arası etkileşme arttığından dolayı kuyular arası tünelleme azalır. Bu durum Mott yalıtkan fazına karşılık gelir.

### 4.3. Zamana Bağlı Tünelleme Genlikleri

Dipolar atomlardan oluşan üç kuyulu Bose-Hubbard modelinde tünelleme genlikleri aşağıdaki gibi zamana bağlı olsun [23, 31]:

$$J_{12}(t) = \Omega \sin^2(\pi t/2t_p) \quad (4.18)$$

$$J_{23}(t) = \Omega \cos^2(\pi t/2t_p)$$

$t$  zamanı  $0 < t < t_p$  aralığında olup,  $t_p = 400/\Omega$ . Bu durumda üç kuyulu sistemin Hamiltoniyeni

$$\hat{H}_0 = U(\hat{n}_1 - \hat{n}_2 + \hat{n}_3)^2 + J_{12}(t)(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) + J_{23}(t)(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_2 \hat{a}_3^\dagger) + \varepsilon(\hat{n}_3 - \hat{n}_1) \quad (4.19)$$

olur. Ortalama alan yaklaşımında ise

$$H_{mf} = J_{12}(t)(\Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_1 \Psi_2^*) + J_{23}(t)(\Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_2 \Psi_3^*) + \Gamma(\Psi_1 \Psi_1^* - \Psi_2 \Psi_2^* + \Psi_3 \Psi_3^*)^2 + \varepsilon(\Psi_3 \Psi_3^* - \Psi_1 \Psi_1^*) \quad (4.20)$$

Ortalama alan yaklaşımı ve Eş. (4.15) ile aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} i \frac{d\Psi_1}{dt} &= 2\Gamma(\Psi_1 \Psi_1^* - \Psi_2 \Psi_2^* + \Psi_3 \Psi_3^*)\Psi_1 + J_{12}(t)\Psi_2 - \varepsilon\Psi_1 \\ i \frac{d\Psi_2}{dt} &= -2\Gamma(\Psi_1 \Psi_1^* - \Psi_2 \Psi_2^* + \Psi_3 \Psi_3^*)\Psi_2 + J_{12}(t)\Psi_1 + J_{23}(t)\Psi_3 \\ i \frac{d\Psi_3}{dt} &= 2\Gamma(\Psi_1 \Psi_1^* - \Psi_2 \Psi_2^* + \Psi_3 \Psi_3^*)\Psi_3 + J_{23}(t)\Psi_2 + \varepsilon\Psi_3 \end{aligned} \quad (4.21)$$

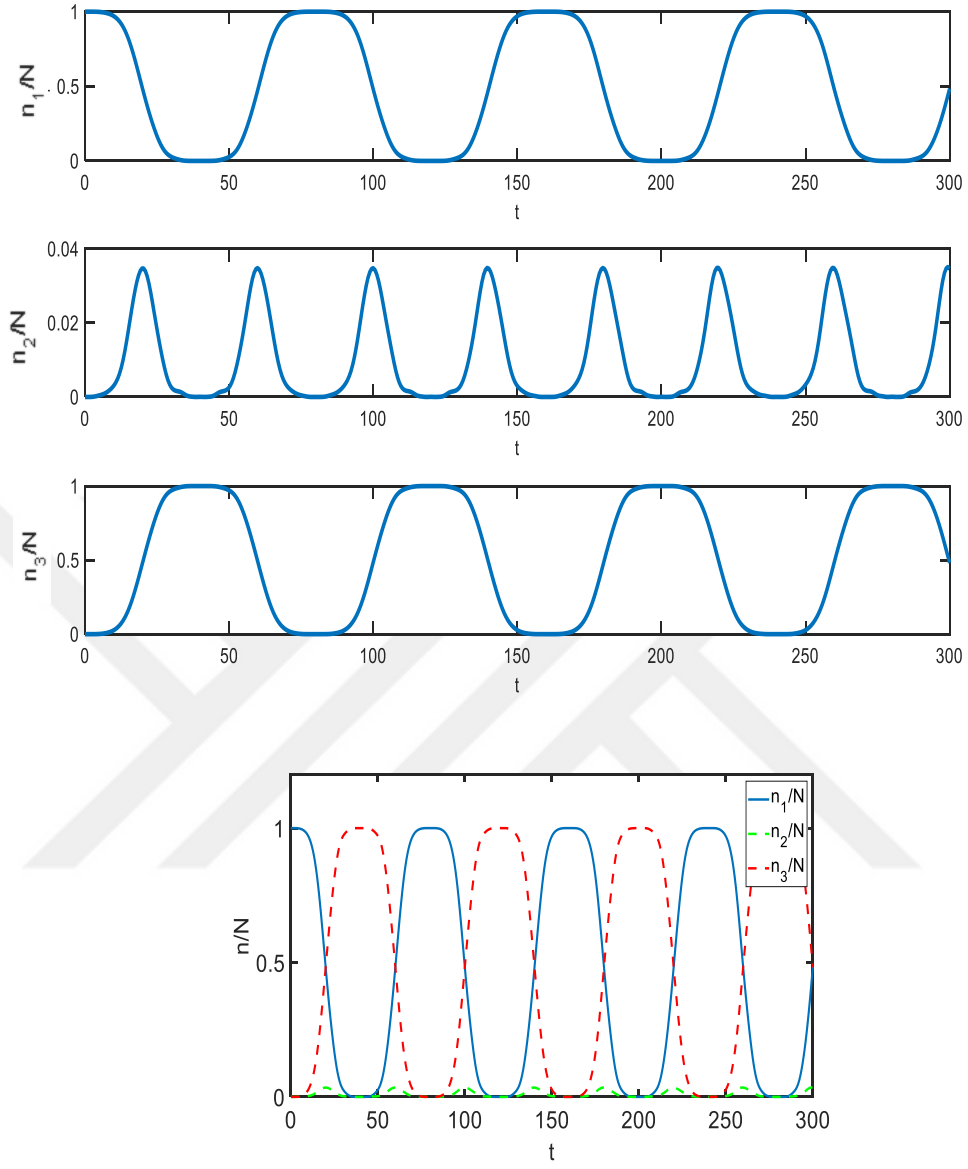
$\Omega t \rightarrow t$  dönüşümü sonucu

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dt} &= -2i \frac{\Gamma}{\Omega} (|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2) \Psi_1 - i \sin^2\left(\frac{\pi t}{2t_p}\right) \Psi_2 + i \frac{\varepsilon}{\Omega} \Psi_1 \\ \frac{d\Psi_2}{dt} &= 2i \frac{\Gamma}{\Omega} (|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2) \Psi_2 - i \sin^2\left(\frac{\pi t}{2t_p}\right) \Psi_1 - i \cos^2\left(\frac{\pi t}{2t_p}\right) \Psi_3 \\ \frac{d\Psi_3}{dt} &= -2i \frac{\Gamma}{\Omega} (|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2) \Psi_3 - i \cos^2\left(\frac{\pi t}{2t_p}\right) \Psi_2 - i \frac{\varepsilon}{\Omega} \Psi_3 \end{aligned} \quad (4.22)$$

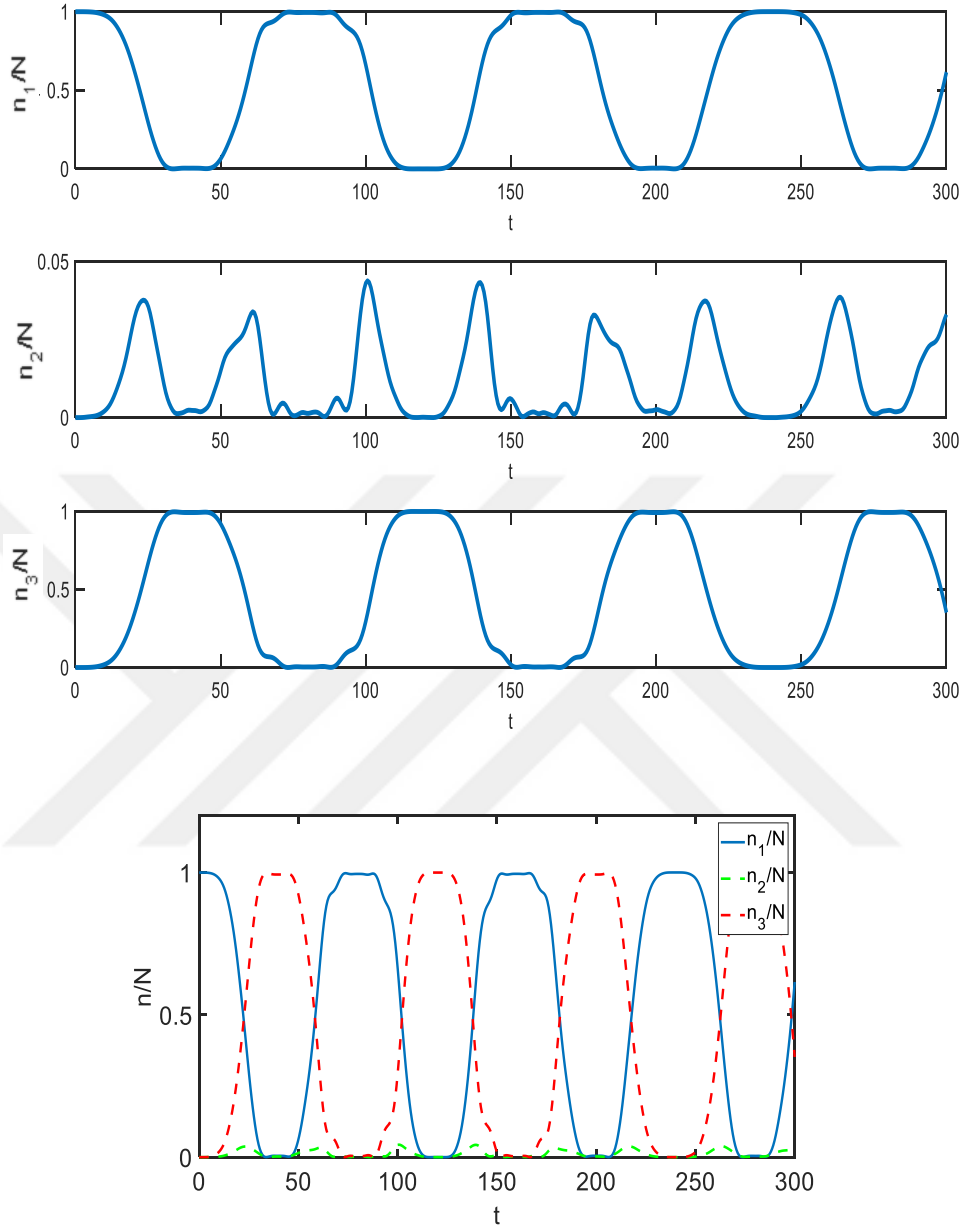
bulunur. Eşitlik (4.22)'nin nümerik çözümleri,  $\Psi_1(0) = 200$ ,  $\Psi_2(0) = 0$ ,  $\Psi_3(0) = 0$  başlangıç koşulları ile Runge Kutta metodu kullanılarak elde edilmiştir. Şekil 4.9'da bozonlar arası etkileşimlerin sıfır olduğu  $\Gamma/J = 0$ ,  $\varepsilon/J = 0,1$  durumda kuyulardaki bağlı parçacık sayılarının zamanla değişimi çizilmiştir. Bu durumda sadece birinci ve üçüncü

kuyularda parçacık alışverişi olmakta ve kuyulardaki parçacık sayıları periyodik olarak değişmektedir. İkinci kuyuda parçacık sayısının yaklaşık sıfır olduğu görülmektedir. Şekil 4.10, bozonlar arası etkileşimlerin arttırıldığı  $\Gamma/J = 0,001$  ve  $\varepsilon/J = 0,1$  değerlerinde parçacık sayısı değişimlerini göstermektedir. Sonuçlar etkileşimin sıfır olduğu duruma benzemektedir. Etkileşimler arttırıldığında Mott yalıtkan faza oluşur. Bu faza geçiş Şekil 4.11’de görülmektedir. Bu şekilde yer alan grafikler  $\Gamma/J = 0,05$  ve  $\varepsilon/J = 0,1$  için çizilmiştir. Kuyular arası tünelleme olmamakta ve parçacık sayıları başlangıçtaki değerlerini korumaktadır.

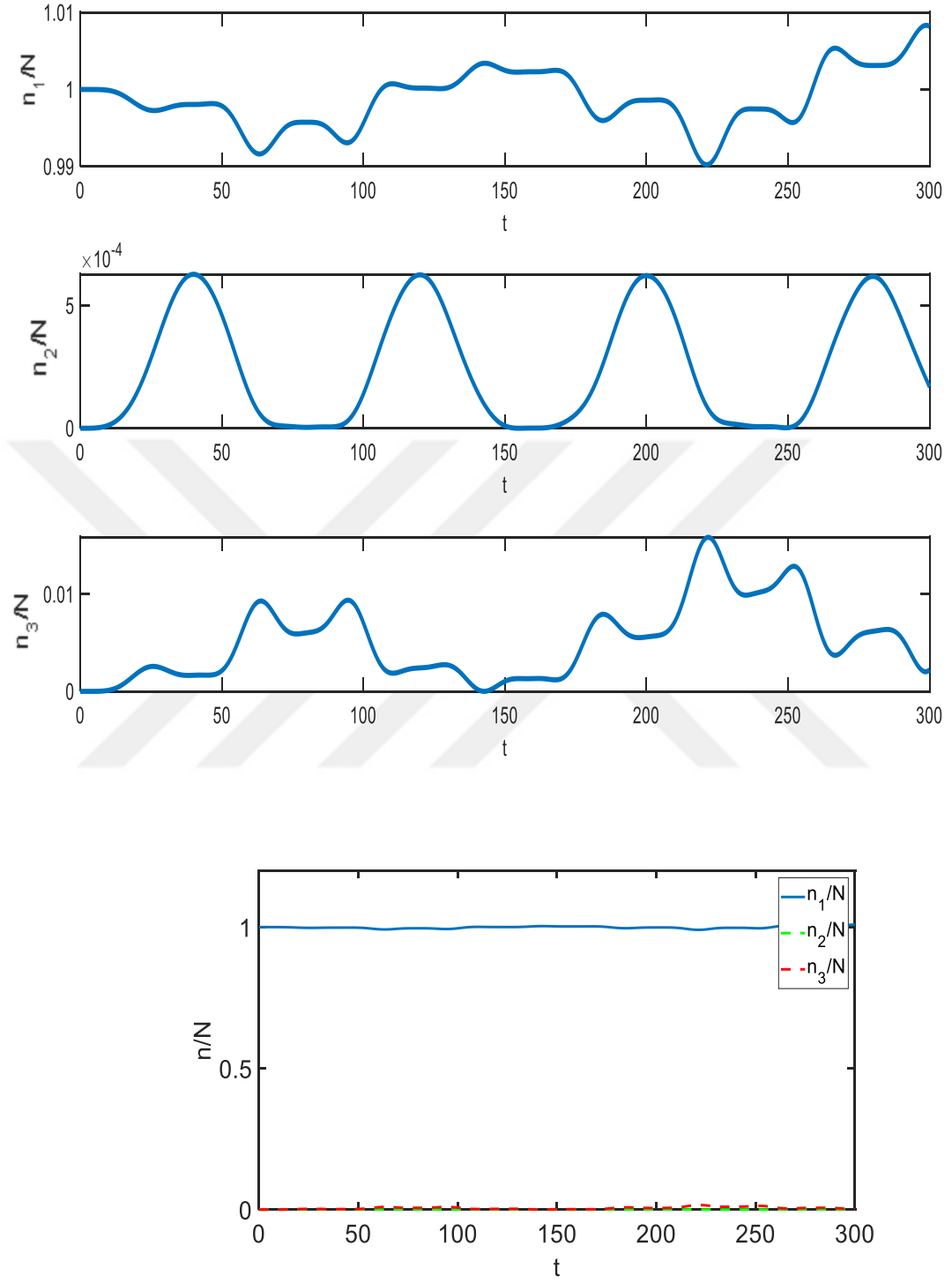




**Şekil 4.9:**  $\Gamma/J = 0$ ;  $\varepsilon/J = 0,1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi. Tünelleme sıfıra gittiği için süperakışkan fazı oluşur.



**Şekil 4.10:**  $\Gamma/J = 0,001$ ;  $\varepsilon/J = 0,1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi. Birinci ve ikinci kuyularda parçacık sayıları periyodik olarak değişirken, ikinci kuyuda parçacık bulunmamaktadır.



**Şekil 4.11:**  $\Gamma/J = 0,05$ ;  $\epsilon/J = 0,1$ . Parçacık sayılarının zamanla değişimi. Tünelleme azaldığından kuyulardaki parçacık sayısı değişmez. Mott yalıtkan fazı oluşur.

## 5. KÜBİTLER

Optik örgülerin kuantum bilgisayarları için yeni bir platform olduğu ve hem kuantum simülasyonları hem de genel amaçlı kuantum bilgi işleme için oldukça umut vadettiği düşünülmektedir. Optik örgülerde tuzaklanan ultra-soğuk atomların kuantum teknolojileri için uygun olmasının nedenleri şöyle sıralanabilir:

- Optik örgüde tutulan her bir atom bir kübit olarak tanımlanabilir.
- Örgü geometrisi değiştirilebilen bir yapıya sahiptir.
- Tünelleme ve atomlar arası etkileşimler hassas biçimde kontrol edilebilir.

Bu tür kuantum simülasyonları, Hubbard modeli, spin zincirleri ve kuantum faz geçişleri gibi sistemlerin doğrudan modellenmesi için etkin bir deneysel platform sağlar [6, 7, 33]. Süperakışkan fazı ve Mott yalıtkan fazı arasındaki geçişler üzerine yapılan deneyler, optik örgülerdeki dolanıklığın gerçekleştirilmesi için önemli adımlar sunmaktadır [11, 34, 40, 43].

### 5.1. Kübit Nedir?

Klasik bilgi işlem sistemlerinde temel bilgi birimi, yalnızca iki ayrık duruma (0 veya 1) sahip olan *bit* ile tanımlanırken; kuantum bilgi işlemde bu rolü *kuantum biti* yani **kübit** üstlenmektedir. Kübit, bir kuantum sisteminin temel hali olan  $|0\rangle$  ve  $|1\rangle$  durumlarının lineer süperpozisyonu şeklinde ifade edilebilir:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (5.1)$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (5.2)$$

Eşitlik (5.1) ve Eş. (5.2) de tanımlanan  $\alpha$  ve  $\beta$  kompleks sayılardır. Buradaki tanım, kübitin aynı anda hem 0 hem 1 durumlarında bulunmasına olanak tanır ve kuantum paralel hesaplamaların temelini oluşturur [6]. Kübitlerin bir diğer ayırt edici özelliği dolanıklık olarak adlandırılan kuantum korelasyonlarıdır. İki veya daha fazla kübit dolanık hale geldiğinde, bir kübitin durumu diğerinden bağımsız olarak tanımlanamaz. Bu özellik kuantum hesaplamada paralellik ve kuantum iletişimde güvenlik açısından kritik bir rol oynar [34, 41, 43].

Kübitlerin fiziksel olarak gerçekleştirilmesi, çeşitli kuantum sistemlerinin kuantum durumlarını bilgi birimi olarak kullanmaya dayanır. En yaygın kübit türleri şöyledir ([http-1](http://1)):

**Süperiletken Kübitler:** Josephson kavşakları kullanılarak oluşturulan bu yapılar, düşük sıcaklıklarda süperiletkenlik özelliklerinden yararlanır. Hızlı işlem ve bütünleşmiş devre mimarilerine uyumluluğu ile öne çıkar.

**Fotonik Kübitler:** Fotonların polarizasyon veya faz durumları kullanılarak gerçekleştirilir. Gürültüye karşı dayanıklıdır ve uzun mesafeli kuantum iletişim için uygundur. Ancak fotonlar arası etkileşimlerin zayıf olması, kapı işlemlerini zorlaştırır.

**Spin Kübitleri:** Elektron ya da çekirdek spinleri kullanılır. Katı hal sistemlerinde mikro ölçekli kontrol sağlarlar. Ancak çevresel manyetik gürültüye duyarlılık önemli bir zorluktur.

**Topolojik Kübitler:** Majorana fermiyonları gibi topolojik kuazi-parçacıklar aracılığıyla hata toleranslı bilgi kodlama hedeflenir. Henüz deneysel olarak sınırlı doğrulamalar yapılmış olsa da teorik olarak büyük vaat taşır.

**Atomik Kübitler (Optik Kafeslerde):** Ultra-soğuk atomlar, lazerle oluşturulan periyodik potansiyel kuyularında (optik kafes) tutulur. Atomların ince-yapı durumları kübit olarak kullanılır. Uzun koherens süreleri ve yüksek kontrol hassasiyeti ile öne çıkar.

**Quantum Nokta Kübitleri:** Yarıiletken yapılar içinde sıkıştırılmış elektronlar kullanılır. Spin veya yük durumları bilgi taşır. Elektronik entegrasyon açısından önemli bir adaydır.

Kübitlerin ölçülmesi, sistemin süperpozisyon halinden klasik bir duruma çökmesine neden olur. Ölçüm işlemi sonucu, sistem ya  $|0\rangle$  ya da  $|1\rangle$  durumuna indirgenir. Bu süreç, kuantum bilgiyi klasik bilgiye dönüştürürken beraberinde ölçüm sonrası bilginin geri alınamaz biçimde kaybolmasını da getirir [33, http-1]. Kübit kavramı, yalnızca kuantum bilgi birimi olarak değil; aynı zamanda kuantum mekaniğinin temel ilkelerinin teknolojik yansımalarının bir özeti olarak değerlendirilmelidir. Her fiziksel platform, belirli avantaj ve kısıtlamalarıyla birlikte kuantum hesaplamanın farklı yönlerini temsil etmektedir. Optik örgü sistemleri hem tekil atom kontrolü hem de faz geçişlerinin gözlemlenebilirliği sayesinde bu teknolojiler arasında öne çıkmaktadır [33, http-1].

## 5.2. Kuantum Hesaplama

Klasik hesaplama metotları klasik yasalara dayanırken, kuantum hesaplama kuantum yasalarına ve özellikle süperpozisyon ilkesine dayanır. Optik örgülerdeki ultra soğuk atomlar kuantum bilgi işlemi için iyi bir platform sunan birçok özelliğe sahiptir.

Bu özellikler arasında uzun koherans süreleri, ölçeklenebilirlik ve kuantum bitlerinin güvenilir kontrolü ve okunması yer almaktadır. Koherans süresi bir kuantum sisteminin süperpozisyon durumunu koruyabildiği süreyi ifade eder. Bu süre, kuantum bilgisayarlar, kuantum sensörler ve kuantum simülatörler için en önemli performans ölçütlerinden biridir. Her bir örgüde tuzaklanan atom bir kübiti temsil eder. Optik örgülerde kuantum hesaplamayı uygulamak için birçok teknik geliştirilmiştir. Bu bölümde optik kafeslerdeki tek ve çift kübit işlemlerinin nasıl gerçekleştirileceğine dair örneklerle yer verilecektir [39].

### 5.2.1. Tek kübit işlemleri

Optik örgülerde kuantum hesaplama için her bir örgü noktasında tek atomun bulunabildiği Mott yalıtkan fazı kullanımı uygundur. Bu fazda her bir örgüde tek atom bulunduğu parçacık sayısındaki dalgalanmalar çok küçüktür. Mott yalıtkan fazındaki atomların kübit olarak kullanılabilirdiği ve çok sayıda parçacığın dolanık hale getirilebildiği deneysel olarak gösterilmiştir [42]. Kübitin, mantıksal durumları olan  $|0\rangle$  ve  $|1\rangle$ ,  $m_F=1$  ve  $m_F = -1$  gibi iki aşırı ince yapı durumuna karşılık gelir. Bu iki durum arasındaki enerji kayması  $\hbar\omega_0$  olsun. Bu enerji farkına karşılık gelen elektromanyetik atma uygulanarak, rastgele bir süperpozisyon  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  durumu oluşturulabilir.  $\alpha$  ve  $\beta$ , uygulanan atmanın süresi ile kontrol edilen katsayılarıdır. Çevredeki kübitleri etkilemeden tek bir kübiti manipüle etmek için, bu kübitin kafesteki diğer kübitlere göre geçiş frekansını değiştirmek için teknikler kullanılabilir. Bu tür tek kübit işlemleri, optik örgülerdeki kuantum hesaplama teorisinin temelini oluşturur [39].

### 5.2.2. Çift kübit işlemleri

İki atomik kübiti optik kafeste dolanık hale getirmenin yöntemlerinden biri çarpışmalı etkileşimdir. Mott yalıtkan fazında bulunan ve komşu örgü noktalarına hapsedilmiş iki atom, bu etkileşimlerin kontrolü ile dolanıklığa sokulabilir. Dolanık kübitler kuantum bilgisayarları için oldukça önemlidir. Ancak bu kübitlerin çevreden iyi şekilde yalıtılması gerekir. Maksimum süperpozisyon durumunda olan, komşu örgü noktalarında bulunan ( $j$  ve  $j+1$ ) iki atom ele alınırsa, atomların durumu [39]

$$|\Psi\rangle = \frac{(|0\rangle_j + |1\rangle_j)(|0\rangle_{j+1} + |1\rangle_{j+1})}{2} \quad (5.3)$$

Farklı manyetik durumlar dairesel polarize bir alanla farklı şekilde etkileşime girer. Dolayısıyla optik örgü lazerinin polarizasyonu yavaş yavaş değiştirilirse, atomların iki halinin uzaysal olarak farklı iki potansiyel minimumu olacaktır. Örneğin,  $|0\rangle$  durumu sola  $|1\rangle$  durumu ise sağa hareket ederek yeni potansiyel minimumlarına yerleşir. Bu durumda yeni toplam şu hale gelir [39]:

$$|\psi\rangle = \frac{(|0\rangle_l|0\rangle_{l+1} + |0\rangle_l|1\rangle_{l+2} + |1\rangle_{l+1}|0\rangle_{l+1} + |1\rangle_{l+1}|1\rangle_{l+2})}{2} \quad (5.4)$$

Burada  $l, j-1$  ve  $j$  konumları arasındadır. Bu ifadenin üçüncü teriminden, birinci atomun  $|1\rangle$  durumu ile ikinci atomun  $|0\rangle$  durumu aynı örgü içinde bulunur ve aralarında  $U_{01}$  etkileşimi oluşur.  $t_{etk}$  kadar bir süre geçtikten sonra, faz kayması oluşur:

$$\phi = \frac{t_{etk}U_{01}}{\hbar} \quad (5.5)$$

Faz kayması sonucu toplam durum şu hale dönüşür:

$$|\psi\rangle = \frac{(|0\rangle_l|0\rangle_{l+1} + |0\rangle_l|1\rangle_{l+2} + e^{-i\phi}|1\rangle_{l+1}|0\rangle_{l+1} + |1\rangle_{l+1}|1\rangle_{l+2})}{2} \quad (5.6)$$

Daha sonra lazerler doğrusal polarizasyon durumuna getirilir ve kubitlere rezonans bir elektromanyetik bir atma uygulanır. Bu işlem sonucunda sistemin son durumu şu hale gelir:

$$|\psi\rangle = \frac{[(1+e^{-i\phi})|1\rangle_j|1\rangle_{j+1} + (1-e^{-i\phi})|B\rangle]}{2} \quad (5.7)$$

Burada  $|B\rangle$ , maksimum dolanık durum olarak şu şekilde tanımlanır:

$$|B\rangle = |0\rangle_j|-\rangle_{j+1} + |1\rangle_j|+\rangle_{j+1} \quad (5.8)$$

Tam dolanıklık, faz kayması  $\phi = \pi$  olacak şekilde  $t_{etk}$  süresinin ayarlanması ile elde edilir [39].

### 5.2.3. Evrensel kuantum simülasyonu

Bir kuantum hesaplama sistemi, tek ve çift kubit işlemleriyle, Hamiltonyeni bir ve iki parçacıklı terimler içeren herhangi çok parçacıklı bir sistemin simülasyonunu yapabilir. Buradaki fikir, herhangi bir Hamiltonyeni her biri küçük ve sabit bir alt uzay

üzerinde etkili olan küçük Hamiltonyenlere ayırmaktır. Bu ayrıştırma işlemi sonucu Hamiltonyen [39]:

$$H = \sum_j H_j \quad (5.9)$$

Sistemin zamanla evrimi için  $e^{-iHt}$  operatörü, küçük evrimler  $e^{-iH_j t}$  serisine açılabilir:

$$e^{-iHt} = \lim_{m \rightarrow \infty} (e^{\frac{-iH_1 t}{m}} e^{\frac{-iH_2 t}{m}} e^{\frac{-iH_3 t}{m}} \dots)^m \quad (5.10)$$

Eşitlik (5.10)'da kullanılan ayrıştırma Trotter-Suzuki yaklaşımı olarak bilinir ve kuantum bilgisayarlar için temel simülasyon tekniğini oluşturur. Bu teknik, çok karmaşık bir kuantum sistemin evrimini, daha küçük ve kontrol edilebilir parçalara bölerek yüksek doğrulukla gerçekleştirmeyi mümkün kılar.

### 5.3. Richard Feynman ve Kuantum Simülasyonun Doğuşu

Kuantum fiziğinin modern çağdaki en üretken ve yaratıcı isimlerinden biri olan Richard P. Feynman, yalnızca teorik öngörleriyle değil, düşünsel cesaretiyle de kuantum bilgi biliminin temellerini atmıştır. 1981 yılında MIT'de düzenlenen bir konferansta yaptığı sunumda Feynman, klasik bilgisayarların kuantum sistemleri modellemedeki sınırlılıklarını vurgulamış ve devrim niteliğinde bir öneride bulunmuştur: “Doğayı, doğanın kendisine benzer bir sistemle taklit etmek gerekir” [5]. Bu önerme, daha sonra *kuantum simülasyon* olarak anılacak bir alanın ilk tohumlarını atmıştır.

Feynman'ın temel gözlemi şuydu: Bir kuantum sistemin davranışını klasik hesaplama araçlarıyla doğru biçimde öngörmek için, hesaplama karmaşıklığı üstel biçimde artmaktadır. Bu nedenle, kuantum sistemleri anlamının en etkin yolu yine kuantum mekaniksel ilkelere tabi sistemleri kullanarak simülasyon gerçekleştirmektir. Bu fikir, günümüzde ultra-soğuk atomların optik kafeslerde tuzaklandığı deneysel platformlarda gerçeğe dönüşmektedir. Bu bağlamda, Feynman'ın vizyonu, bu tezde yer alan optik örgülerde bozonik atomların düzenlenmesi, Bose-Hubbard modelinin uygulanması, faz geçişlerinin analizi ve kuantum fazlarının gözlenebilirliği gibi başlıklarla birebir örtüşmektedir.

Bu tezde, lazerle oluşturulan periyodik potansiyeller altında hapsedilen ultra-soğuk atomlar kullanılarak bir kuantum simülasyon platformunun nasıl oluşturulabileceği ayrıntılı biçimde ele alınmıştır. Özellikle Bose-Hubbard Hamiltonyeni, atomların yer değiştirme eğilimlerini temsil eden tünelleme terimi ile aynı kafes noktasında bulunan

atomlar arasındaki etkileşimi temsil eden yerel etkileşim terimi üzerinden, kuantum faz geçişlerini doğrudan modellemeye imkân tanımaktadır [11]. Bu yönüyle sistem, Feynman'ın tarif ettiği kuantum simülatörün tam anlamıyla bir deneysel karşılığına dönüşmektedir.

Feynman'ın önerdiği gibi, doğadaki fiziksel süreçleri taklit edebilmek için kullanılan sistemin de kuantum kurallarına uygun çalışması gerekmektedir. Bu tez kapsamında ifade edilen modellerde, tek ve çift kübit işlemlerinin optik kafes ortamında nasıl uygulanabileceği, Trotter ayrıştırması ile çok-cisimli Hamiltonyen evriminin nasıl ifade edilebileceği gösterilmiştir. Bu uygulamalar, Feynman'ın *“kuantum sistemleri klasik bilgisayarlarla simüle etmek yerine, kuantum bilgisayarlarla doğrudan simüle edelim”* düşüncesinin günümüz deneysel fiziğindeki yansımalarıdır [6].

Bugün, Feynman'ın 1980'li yıllarda öngördüğü bu kavramsal çerçeve, yalnızca teorik fizikte değil, deneysel kuantum teknolojilerinde de kendine güçlü bir yer bulmuştur. Optik örgülerde oluşturulan sistemler, yüksek sıcaklık süperiletkenlikten manyetik faz geçişlerine, kuantum kimyadan topolojik madde simülasyonlarına kadar pek çok karmaşık yapının doğrudan incelenmesini mümkün kılmaktadır. Bu da kuantum simülasyonun artık yalnızca soyut bir düşünce değil, pratik bir araç olduğunu göstermektedir.

## 6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada öncelikle optik örgülerde tuzaklanan bozonik atomların davranışı incelenmiştir. Optik örgüler üç boyutta durağan lazer dalgaları oluşturan lazer ışınlarının girişimiyle oluşturulan periyodik ve korunumlu tuzaklama potansiyelleridir. Lazer ışığı atomlarda AC Stark kayması ve dolayısıyla periyodik bir potansiyel etkisi yaratır. Bu potansiyellerde tuzaklanan ultra soğuk bozonlar birinci Bloch bandındaki Wannier fonksiyonlarını baz alan Bose-Hubbard modeli ile tanımlanır. Bu modelde, bozonlar arası etkileşme enerjisi, komşu örgü noktaları arasında bozonların tünelleme yaparken kazandıkları kinetik enerji ile rekabet halindedir. Lazer şiddetinin artırılması ile komşu örgüler arası bariyer arttığı için kinetik enerji azalırken etkileşme enerjisi artar. Bu durumda süperakışkan fazdan Mott yalıtkan fazına geçiş olur. Süperakışkan fazda atomlar örgü noktaları arasında kolayca tünelleme yaparken, Mott yalıtkan fazda atomlar sabit pozisyonlarında kalır ve tünelleme minimum düzeyde gerçekleşir.

Kuantum bilişim çalışmalarında optik örgüler kuantum simülatörü olarak düşünülmektedir. Bu düşünce, örgüde tuzaklanan her bir atomun bir kübit olarak tanımlanabilmesine dayanır. Optik örgü geometrisi, kullanılan lazer parametreleri aracılığıyla hassas biçimde programlanabilirken, sistemdeki tünelleme ve etkileşim katsayıları da doğrudan ayarlanabilir. Bu sayede, kübitlerin konumları, durumları ve aralarındaki etkileşimler yüksek hassasiyetle kontrol edilebilir. Özellikle çok sayıda kübitin bu periyodik yapıda yerleştirilebilmesi ve bu yapıların paralel olarak kontrol edilebilmesi, bu sistemleri kuantum hesaplama açısından avantajlı kılmaktadır.

Bu çalışmada özellikle üç kuyulu optik örgüleri modelleyen Bose-Hubbard modeli ele alınmıştır. Bu tür optik örgüler kuantum sensörleri ve atomtronik cihazlar gibi farklı kullanım alanlarına sahip olduğundan dolayı önemli bir yere sahiptir. Tezde faz geçişlerine yönelik nümerik hesaplama örneklerine yer verilmiştir. Ele alınan örneklerden ilki dipolar atomlar, ikincisi ise zamana bağlı tünelleme genlikleridir. Her iki durumda da, kuyulardaki parçacık sayıları Runge-Kutta metodu ile nümerik olarak hesaplanmıştır. Atomlar arası etkileşme sıfır iken, parçacıkların kuyular arası serbestçe hareket ettiği gösterilmiştir. Atomlar arası etkileşme arttığında ise kuyular arası tünelleme baskılanır. Elde edilen bu sonuçlar literatür ile uyumludur.

Sonuç olarak, Richard Feynman'ın kırk yılı aşkın süre öncesinde kuantum bilgi kuramına kazandırdığı vizyon, bu tez kapsamında ele alınmıştır. Optik örgülerdeki ultra-soğuk atomların mikroskobik düzeyde kontrolü, Feynman'ın ortaya koyduğu kuantum

simülasyon ideali ile birebir örtüşmektedir. Bu nedenle optik örgü çalışmaları kuantum teknolojileri alanında giderek önem kazanmaktadır.



## KAYNAKÇA

- [1] Greiner, M. ve Fölling, S. (2008). Optical Lattices. *Nature*. 453, 736-738.
- [2] Choi, J. Y. (2023). Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices: past, present and future. *Journal of the Korean Physical Society*. 82, 875-881.
- [3] Ferguson, D. G. (2005). *The Bose-Hubbard Hamiltonian*. ABD:University of Illinois at Urbana-Campaign.
- [4] Block, I. (2005). Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nature* 1,23-30.
- [5] Feynman, R. (1982). Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*. 21(6/7), 467-488.
- [6] Lloyd, S. (1996). Universal Quantum Simulators. *Science* 273,1073-1078.
- [7] Block, I., Delibard, J. ve Zwerger, W. (2008). Many-body physics with ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*. 80 (3), 885-964.
- [8] Hansch, T. W. ve Schawlow, A. L. (1975). Cooling of gases by laser radiation. *Optics Communications*. 3(1), 68-69.
- [9] Chu, S. (1997). The manipulation of natural particles. *Nobel Lecture*. 122-158.
- [10] Ketterle, W. (2001). When atoms behave as waves. *Nobel Lecture*. 118-154.
- [11] Jaksch, D., ve Zoller, P. (2005). The cold atom Hubbard tool box. *Annals of Physics*. 315(1), 52-79.
- [12] Wineland, D. J. ve Itano, W. M. (1979). Laser cooling of atoms. *Physical Review A*. 20 (4), 1521-1540.
- [13] Souza, R. S. (2023). *Ultracold bosons in random lattice potentials*. Doktora Tezi. Brezilya: Universidade Federal De São Carlos: Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia.
- [14] Cohen-Tannoudji, C. (1997). Manipulating atoms with photons. *Nobel Lecture*. 166-190.
- [15] Genes, C. (2019). *Quantum physics of light-matter interactions*. Max Planck Institute for the Science of Light.
- [16] Rey, A. M. (2004). *Ultra-cold bosonic atoms in optical lattices*. Doktora tezi. ABD:University of Maryland.
- [17] Anderson, M. H., Ensher, J. R., Matthews, M. R., Wieman, C. E. ve Cornell, E. A. (1995). Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*. 259(5221), 198-201.
- [18] Kittel, C. (1996). *Katıhal Fiziğine Giriş* (Çev: B. Karaoğlu). İstanbul: Güven.

- [19] Kohn, W. (1959). Analytic properties of Bloch waves and Wannier functions. *Physical Review*. 115(4), 809-821.
- [20] Gabriel, T. L. (2019). *Second quantization*. Ders Notları. Brezilya:University of Sao Paulo.
- [21] Yamashita, M ve Kensuke, I. (2012). Quantum simulation with ultracold atomic gases in an optical lattice. *NTT Technical Review*, 10(9), 35-40.
- [22] Shchesnovich, V. S. ve Mogilevtsev, D. S. (2010). The three-site Bose-Hubbard model subject to atom losses: the boson-pair dissipation channel and failure of the mean-field approach. *Phys. Rev. A*. 82, 043621.
- [23] Bradly, C. J., Rab, M., Greentree, A. D., ve Martin A. M. (2012). Coherent tunneling via adiabatic passage in a three-well Bose-Hubbard system. *Phys. Rev. A*. 85, 053609.
- [24] McCormack, G., Nath, R. ve Li, W. (2020). Nonlinear dynamics of Rydberg-dressed Bose-Einstein condensate in a triple-well potential. *Phys. Rev. A*. 102, 063329.
- [25] Nakerst, G ve Haque, M. (2022). Chaos in the three-site Bose Hubbard model-classical vs quantum. *Phys. Rev. E*. 107, 024210.
- [26] Castro, E. R., Carlos, J. C., Roditi, I., Santos, L. F. ve Hirsch, J. G. (2021). Quantum-classical correspondence of a system of interacting bosons in a triple-well potential. *Quantum*. 5, 563.
- [27] Wilsmann, K. W., Ymai, L. H., Tonel, A. P., Links, J. ve Foerster, A. (2018). Control of tunneling in an atomtronic switching device. *Communications Physics*. 1 (91).
- [28] Tonel, A. P., Ymai, L.H., Wilsmann, K. W., Foerster, A. ve Links, J. (2020). Entangled states of dipolar bosons generated in a triple-well potential. *SciPost Phys*. 2, 003.
- [29] Gallemí, A., Guilleumas, M., Mayol, R. ve Sanpera, A. (2013). The role of anisotropy in dipolar bosons in triple-well potential. *Phys. Rev. A*. 88, 063645.
- [30] Rong, S., Xie, Q. ve Hai, W. (2015). Interplay and nonidentical coupling for a Bose Einstein Condensate in a triple-well potential. *Physics Letters A*. 379, 1881-1886.
- [31] Olsen, M. K. (2015). Asymmetric steering in a coherent transport of atomic population with a three-well Bose-Hubbard model. *Journal of the Optical Society of America B*. 32 (4), pp. A15-A19.
- [32] Arwas, G., Vardi, A. ve Cohen, D. (2014). Triangular Bose-Hubbard trimer as a minimal model for a superfluid circuit. *Phys. Rev. A*. 89, 013601.
- [33] New Scientist. (2017). *The Quantum World*. London:John Murray Learning.
- [34] Jaksch, D. (2007).Optical lattices, ultracold atoms and quantum information processing. *Contemporary Physics*. 45 (5), 367-381.

- [35] Barter, H. B. (2018). *Quantum simulation of the Bose-Hubbard model with ultracold atoms in triangular optical superlattices*. Doktora Tezi. Berkeley: University of California.
- [36] Burton, W. C. (2019). *Ultracold bosons in optical lattices for quantum measurement and simulation*. Yüksek Lisans Tezi. ABD: Massachusetts Institute of Technology, Research Laboratory of Electronics.
- [37] Daley, A. J. (2005). *Manipulation and simulation of cold atoms in optical lattices*. Doktora Tezi. Avusturya: University of Innsbruck.
- [38] Hofstetter, W. ve Qin, T. (2018). Quantum simulations of strongly correlated matter systems. *Journal of Physics*, 51(8), 1-30.
- [39] Khalifa, M., Koeck, D. ve Neuenfeld, D. *Optical lattices as quantum simulators*. Teknik Rapor. Kanada: UBC, Department of Physics and Astronomy.
- [40] Kościelski, M. (2023). *Dynamical Bose-Hubbard model for entanglement generation and storing*. Yüksek Lisans Tezi. Polonya: University of Warsaw.
- [41] Preskill, J. (1998). Reliable quantum computers. *The Royal Society London*. 385-410.
- [42] Mandel, O., Greiner, M., Widera, A., Rom, T., Hänsch, T. W. ve Bloch I. (2003). Controlled collisions for multi-particle entanglement of optically trapped atoms. *Nature*. 425, 937.
- [43] Lubasch, M. (2009). *Quantum chaos and entanglement in the Bose-Hubbard model*. Doktora Tezi. Almanya: Ruprecht Karls Universität Heidelberg.
- http-1:**<https://quantum.microsoft.com/en-us/insights/education/concepts/types-of-qubits>  
(Erişim tarihi 30.03.2025)

## ÖZGEÇMİŞ

**ORCID NO:** 0009-0009-1223-5812

**Ad Soyad** : Rüveyde ERGÜN

**Yabancı Dil** : İngilizce

### Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2023-2025, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitü, Fizik, Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği.
- 1996-2000, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik.