

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OPTİMAL B-ROBUST TAHMİN YÖNTEMİ İLE
POWER LİNDLEY DAĞILIMININ PARAMETRE
TAHMİNİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : Berivan ÇAKMAK
ORCID : 0000-0003-2965-6129
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Enstitü Anabilim Dalı : İstatistik

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Fatma Zehra DOĞRU
ORCID : 0000-0001-8220-2375

Temmuz 2020

GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OPTIMAL B-ROBUST TAHMİN YÖNTEMİ İLE
POWER LINDLEY DAĞILIMININ PARAMETRE
TAHMİNİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Berivan ÇAKMAK

Enstitü Anabilim Dalı : İstatistik

Bu tez 23/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ufuk YOLCU

Jüri Başkanı

**Doç. Dr. Fatma Zehra
DOĞRU**

Üye

**Dr. Öğr. Üyesi Fatma
Gül AKGÜL**

Üye

Doç. Dr. Bahadır KOZ

Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Berivan ÇAKMAK
23/07/2020

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında olmak üzere aynı zamanda Lisans ve Yüksek Lisans eğitimim boyunca benimle büyük titizlikle ilgilenen, öneri ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, her soruma sabır ile cevap veren, değerli bilgileriyle yol gösteren ve her zaman yanımda olan değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Fatma Zehra DOĞRU'ya (Giresun Üniversitesi, İstatistik Bölümü) sonsuz teşekkür ederim. Tez savunma sunumumda bana engin bilgileri le katkıda bulunan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Ufuk YOLCU'ya (Giresun Üniversitesi, Ekonometri Bölümü) ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Fatma Gül AKGÜL 'e (Artvin Çoruh Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü) teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her türlü yardımı esirgemeyen, bütün konuşmalarımı sabırla dinleyen bana iyi bir dost olan manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli arkadaşım Asiye Nur YILDIRIM'a sevgi ve arkadaşlığı için çok teşekkür ederim. Tez yazım aşamasında engin Word bilgisinden dolayı her daim yardımına koşan Onur DERYA arkadaşına en içten dileklerle teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca varlıklarıyla, maddi ve manevi destekleriyle bugünlere gelmemde en büyük katkısı olan, her zaman yanımda olduklarını bildiğim en büyük destekçilerim olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

BEYAN

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ	iv
TABLolar LİSTESİ	v
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
1.1. Power Lindley (PL) Dağılımı	3
1.1.1. Hazard Fonksiyonu	6
1.1.2. Momentler	7
1.1.3. Yüzdelik Fonksiyon	8
BÖLÜM 2. DAYANIKLI İSTATİSTİK	10
2.1. Etki Fonksiyonu	10
2.2. ρ ve ψ Fonksiyon Seçimi	11
2.3. Regresyon M-Tahmin Yöntemi	15
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	18
3.1. Parametre Tahmini	18
3.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edici Yöntemi	18
3.1.2. En Küçük Kareler Tahmin Edici Yöntemi	19
3.1.3. Dayanıklı Regresyon Tahmin Yöntemi	21
3.1.4. Optimal B-Robust Tahmin Yöntemi	22
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	27
4.1. Uygulamalar	27
4.1.1. Simülasyon Çalışması	27
4.1.2. Rasgele Sayı Üretme Prosedürü	27
4.1.3. Hesaplama ile İlgili Detaylar	29
4.1.4. Simülasyon Sonuçları	30
4.2. Gerçek Veri Uygulaması	36
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	39
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

LS	: En küçük kareler
ML	: En çok olabilirlik
OBR	: Optimal B-robust
PL	: Power Lindley
RR	: Robust (Dayanıklı) Regresyon
RMSE	: Hata kareler ortalamasının karekökü



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. 1 Farklı α ve β parametre değerleri için PL dağılımının olasılık yoğunluk grafikleri	5
Şekil 1. 2 Farklı α ve β parametre değerleri için PL dağılımının kümülatif dağılım fonksiyon grafikleri	5
Şekil 1. 3. Farklı β parametre değerleri için Lindley dağılımının hazard fonksiyonu grafiği .	6
Şekil 1. 4 Farklı α ve β parametre değerleri için PL dağılımının hazard fonksiyonu grafikleri (a) (α, β) : (0.2, 10), (0.6, 2), (b) (α, β) : (1, 1), (2, 0.1), (c) (α, β) : (0.88, 1.2), (0.9, 1.5).....	7
Şekil 2. 1. Huber'in ρ ve ψ fonksiyonu grafikleri.....	12
Şekil 2. 2. Huber ağırlık fonksiyonu grafiği	13
Şekil 2. 3. Tukey'in ρ ve ψ fonksiyonu grafikleri.....	14
Şekil 2. 4. Tukey ağırlık fonksiyonu grafiği.....	15
Şekil 3.1. α parametresi için skor fonksiyonu ($\alpha = 0.2$ ve $\beta = 4$)	24
Şekil 3.2 β parametresi için skor fonksiyonu ($\alpha = 0.2$ ve $\beta = 4$)	24
Şekil 4. 1.(a) Gerilim-kopma veri setinin kutu grafiği; (b) ML, LS, RR ve OBR'den elde edilen uygun yoğunluklara sahip histogram grafiği.....	37
Şekil 4. 2. ML, LS, RR ve OBR yöntemlerinden elde edilmiş uydurulmuş dağılımların Q-Q grafikleri	38

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 4. 1. Aykırı değer olmadan farklı örneklem hacimleri için α parametresinin, yan ve RMSE değerleri	32
Tablo 4. 2. Aykırı değer olmadan farklı örneklem hacimleri için β parametresinin, yan ve RMSE değerleri	33
Tablo 4.3. Aykırı değer varlığında farklı örneklem hacimleri için α parametresinin, yan ve RMSE değerleri	34
Tablo 4.4. Aykırı değer varlığında farklı örneklem hacimleri için β parametresinin, yan ve RMSE değerleri	35
Tablo 4. 5. Gerilim-kopma ömrü	36
Tablo 4.6. Gerilim-kopma ömrü için elde edilmiş ML, LS, RR ve OBR tahminleri	36

OPTİMAL B-ROBUST TAHMİN YÖNTEMİ İLE POWER LİNDLEY DAĞILIMININ PARAMETRE TAHMİNİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında öncelikli olarak bilinen klasik yöntemlerden olan en çok olabilirlik (ML) ve en küçük kareler (LS) tahmin yöntemleri kullanılarak power Lindley (PL) dağılımının parametre tahminleri elde edilmiştir. Bunun yanı sıra klasik tahmin edici yöntemlerinin veride aykırı gözlem olduğu durumda aykırı gözlemlere karşı oldukça duyarlı oldukları bilinmektedir. Bu nedenle, klasik tahmin edici yöntemlere karşı aykırı gözlemlerden etkilenmeyecek alternatif bir tahmin edici yöntemine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tez çalışmasında, PL dağılımının parametreleri için optimal B-robust (OBR) tahmin yöntemi kullanılarak dayanıklı tahmin ediciler elde edilmiştir. Önerilen tahmin edicilerin performanslarını karşılaştırmak ve simülasyon çalışmasında çeşitliliği sağlamak amacıyla robust regresyon (RR) tahmin yöntemi kullanılarak da PL dağılımının parametreleri için tahmin ediciler elde edilmiştir. OBR tahmin edicilerinin uygulanabilirliğini test etmek için ayrıca gerçek veri uygulaması da yapılmıştır. Simülasyon çalışmasında veride aykırı gözlem olması ve olmaması durumunda OBR tahmin edicilerinin performansları diğer tahmin edicilerinin (ML, LS, RR) performansları ile karşılaştırılmıştır. Aynı zamanda aykırı değer içeren gerçek veri üzerinde de tahmin edicilerin performansı karşılaştırılmıştır. Simülasyon çalışması ve gerçek veri uygulaması sonucunda veri setinde aykırı gözlem olduğunda en iyi performansı OBR tahmin edicilerinin gösterdiği gözlenmiştir. Sonuç olarak, veride aykırı gözlem olduğunda PL dağılımının parametreleri için alternatif olarak OBR tahmin yönteminin kullanılması uygundur.

Anahtar kelimeler: En çok olabilirlik, En küçük kareler, Optimal B-robust, Dayanıklı istatistik, Power Lindley dağılımı

PARAMETER ESTIMATION OF THE POWER LINDLEY DISTRIBUTION WITH THE OPTIMAL B-ROBUST ESTIMATION METHOD

SUMMARY

In this thesis, parameter estimates of the power Lindley (PL) distribution were obtained by using the maximum likelihood (ML) and least squares (LS) estimation methods, which are among the known classical methods. Besides, it is known that classical estimation methods are very sensitive to outliers when there are outliers in the data. Therefore, an alternative estimation method against classical estimation methods is needed that will not be affected by outliers. In this thesis, robust estimators for the parameters of the PL distribution were obtained using the optimal B-robust (OBR) estimation method. To compare the performances of the proposed estimators and to provide variety in the simulation study, the estimators for the parameters of the PL distribution were also obtained using the robust regression (RR) estimation method. A real data application was also performed to test the applicability of the OBR estimators. In the simulation study, in the presence and absence of the outliers, the performances of OBR estimators were compared with the performances of the estimators (ML, LS, RR). At the same time, the performances of the estimators were also compared on the actual real data including outliers. As a result of the simulation study and real data application, it was observed that the OBR estimators showed the best performance when there were outliers in the data. Consequently, it is appropriate to use the OBR estimation method for the parameters of the PL distribution when there are outliers in the data.

Keywords: Maximum likelihood, Least squares, Optimal B-robust, Power Lindley distribution, Robust statistics

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Tıp, mühendislik, finans gibi birçok uygulama alanlarında yer alan yaşam verilerinin modellenmesi ve analizi oldukça önemlidir. Bu tür verileri modellemek için çeşitli yaşam modeli dağılımları önerilmiştir. Bilinen bu dağılımlardan bir tanesi Lindley (1958) tarafından yaşam verilerini modellemek için önerilen Lindley dağılımıdır. Daha sonra Ghitany ve ark. (2008) tarafından Lindley dağılımının çeşitli istatistiksel özellikleri incelenmiş ve uygulanabilirliği üstel dağılım ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda Lindley dağılımının üstel dağılımdan daha esnek ve daha iyi performans gösterdiği bulunmuştur. Bazı durumlarda, Lindley dağılımının teorik ve uygulama açısından uygun olmadığı durumlar olabilir. Böylece, Lindley dağılımının daha esnek genelleştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bu genelleştirmelerden bir tanesi Ghitany ve ark. (2013) tarafından Lindley dağılımının üssü alınarak elde edilen power Lindley (PL) dağılımıdır. PL dağılımının bazı dağılımsal özellikleri ve parametre tahminleri yine Ghitany ve ark. (2013) tarafından incelenmiştir.

Yaşam verilerini modelleyebilmek için önerilen yaşam modeli dağılımının parametrelerinin tahmin edilmesi gereklidir. En yaygın olarak kullanılan klasik yöntemler en çok olabilirlik (maximum likelihood (ML)) ve en küçük kareler (least squares (LS)) tahmin edici yöntemleridir. Verinin uzağında olan gözlem ya da gözlemler aykırı ya da sapan gözlem olarak adlandırılır. Klasik tahmin edici yöntemleri veride aykırı gözlem olmadığında çok iyi sonuçlar verirken, aykırı gözlem olduğunda güvenilir sonuçlar vermemektedir. Bunun yanı sıra, LS tahmin edici yöntemi lineer yansız tahminin kesinliğini ifade etmesinin yanında daha birçok iyi özelliğe sahip olan bir yöntemdir. Ancak, aykırı gözlemler artıkların kareleri üzerinde olumsuz etkiye sahiptir.

Bilinen klasik yöntemler aykırı gözlemlere karşı oldukça hassas oldukları için aykırı gözlemlerden çok etkilenmeyen yeni istatistiksel tekniklerin geliştirilmesi zorunlu

olmuştur. Bu teknikler, günümüzde de hala yaygın olarak kullanılan dayanıklı (robust) istatistiksel yöntemlerdir. Bu yöntemlerden biri aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olan M-tahmin yöntemine dayalı optimal B-robust (OBR) tahmin yöntemidir. Bu yöntem Hampel ve ark. (1986) tarafından önerilmiştir. Victoria Feser (1993) ve Victoria-Feser ve Ronchetti (1994) tarafından Pareto ve gamma dağılımlarının şekil parametresinin tahmin edilmesinde kullanılmıştır. Ayrıca, Doğru ve Arslan (2016) tarafından Burr XII dağılımının parametreleri ve Doğru ve ark. (2017) tarafından geliştirilmiş half-normal dağılımının parametreleri OBR tahmin yöntemi ile elde edilmiştir. Son zamanlarda Güney ve ark. (2020) tarafından OBR tahmin yöntemi kullanılarak Marshall-Olkin extended Burr XII dağılımının parametreleri tahmin edilmiştir.

Diğer bir dayanıklı yöntem ise hata terimlerinin dağılımı normal dağılım olmadığında ya da veri aykırı gözlem içerdiğinde LS tahmin edici yöntemine alternatif olarak önerilen dayanıklı regresyon (robust regression (RR)) tahmin yöntemidir. RR yöntemi aykırı değerlerin artıklar üzerindeki etkisini azaltmak için tasarlanmış bir yöntemdir. Literatürde birçok RR tahmin yöntemi mevcuttur. Bunlardan bazıları regresyon M-tahmini (Huber 1973), LTS-tahmini (Rousseeuw 1984), LMS-tahmini (Rousseeuw 1984), S-tahmini (Rousseeuw ve Yobai 1984), MM-tahmini (Yohai 1987) ve geliştirilmiş GM tahmini (GM-tahmini) (Mallows 1975, Hampel 1978, Krasker 1980, Krasker ve Welsch 1982, Hampel ve ark. 1986) olarak verilebilir. M-tahminine dayalı dayanıklı regresyon yöntemi Wang ve Cheng (2010) tarafından Burr XII dağılımının parametrelerinin dayanıklı tahmin edicilerini elde etmek için kullanılmıştır.

Bu tez çalışmasında, PL dağılımının parametreleri klasik ve dayanıklı tahmin edici yöntemleri kullanılarak tahmin edilecektir. Daha önceden PL dağılımının parametreleri ML tahmin edici yöntemi kullanılarak Ghitany ve ark. (2013) tarafından tahmin edilmiştir. Ancak veride aykırı gözlem olması durumu göz önüne alındığında PL dağılımının parametreleri için alternatif tahmin edicilere ihtiyaç vardır. Bu çalışmanın asıl amacı PL dağılımının parametreleri için aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olan OBR tahmin yöntemini önermektir. Bunun yanı sıra bu dağılımın parametreleri için klasik tahmin edici yöntemlerinden olan LS tahmin edici yöntemi

de kullanılarak parametre tahmini yapılacaktır. Uygulamada çeşitliliği sağlamak açısından karşılaştırma için ayrıca M-tahminine dayalı RR yöntemi kullanılarak da PL dağılımının parametre tahminleri elde edilecektir.

Tezin içeriği aşağıdaki gibi özetlenebilir. Bölüm 1’de PL dağılımının dağılımsal özellikleri hakkında bilgiler verilmiştir. Bölüm 2 dayanıklı istatistiklere ayrılmış olup gerekli bilgiler ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır. Bölüm 3’de PL dağılımının parametreleri ML, LS, RR ve OBR tahmin edici yöntemleri kullanılarak tahmin edilmiştir. Bu bölümde bütün tahmin edici yöntemleri ayrıntılarıyla birlikte verilmiştir. Bölüm 4’de tahmin edicilerin performanslarını karşılaştırmak için yapılan uygulamalar yer almaktadır. Bu uygulamalar simülasyon çalışması ve gerçek veri örneği olmak üzere iki kısma ayrılmıştır. Simülasyon çalışması kullanılarak ele alınan ve önerilen tahmin edicilerin performansları yan (bias) ve hata kareler ortalamasına (RMSE) göre karşılaştırılmıştır. Gerçek veri örneğinde de benzer şekilde önerilen tahmin yöntemlerinin uygulanabilirliği gösterilmiş ve performansı diğer tahmin edici yöntemleri ile karşılaştırılmıştır. Son bölümde tez çalışmasından elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

1.1. Power Lindley (PL) Dağılımı

Lindley dağılımı ilk defa Lindley (1958) tarafından tanıtılmıştır. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, β ölçek parametrelili üstel dağılım ile şekil parametresi 2 ve ölçek parametresi β olan gamma dağılımının karması yardımıyla elde edilir.

Böylece bu dağılıma ait olasılık yoğunluğu fonksiyonu aşağıdaki gibi verilebilir:

$$f(y|\beta) = pf_1(y, \beta) + (1 - p)f_2(y|2, \beta). \quad (1.1)$$

Burada

$$p = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad f_1(y|\beta) = \beta e^{-\beta y} \quad \text{ve} \quad f_2(y|\beta) = \beta^2 y e^{-\beta y} \text{ dir.}$$

Buradan olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y|\beta) = \frac{\beta^2}{1+\beta} (1+y)e^{-\beta y}, \quad y > 0 \text{ ve } \beta > 0, \quad (1.2)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (1.2) kullanılarak kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$F(y|\beta) = 1 - \left(1 + \frac{\beta y}{1+\beta}\right) e^{-\beta y}. \quad (1.3)$$

Giriş bölümünde de bahsedildiği gibi Ghitany ve ark. (2008) tarafından matematiksel özellikleri ve uygulamaları incelenen Lindley dağılımının daha esnek ve kullanışlı olan çeşitli genelleştirmeleri önerilmiştir. Lindley dağılımın genelleştirilmelerinden biri ise Ghitany ve ark. (2013) tarafından önerilen Lindley dağılımına sahip rasgele değişkenin üssü alınarak elde edilen PL dağılımıdır.

Diğer bir deyişle, eğer Y rastgele değişkeni Lindley dağılımına sahip ise $X = Y^{1/\alpha}$ rasgele değişkeni de PL dağılımına sahip olacaktır. Buradan PL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

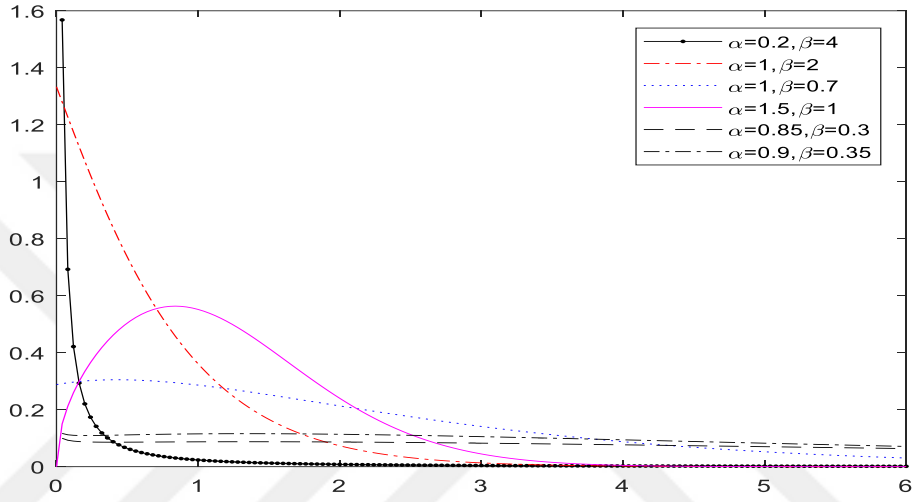
$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2}{\beta+1} (1+x^\alpha)x^{\alpha-1}e^{-\beta x^\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (1.4)$$

Eşitlik (1.4) kullanılarak kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

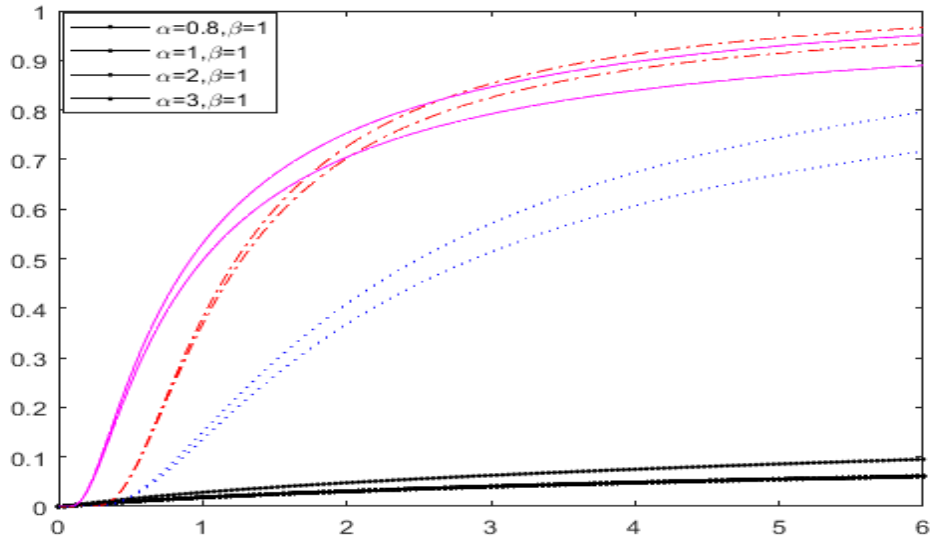
$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{\beta}{1+\beta}x^\alpha\right) e^{-\beta x^\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (1.5)$$

Bunun yanı sıra, PL dağılımının α şekil parametrelili ve β ölçek parametrelili Weibull dağılımı ile 2 ve α şekil parametrelili ve β ölçek parametrelili genelleştirilmiş gamma dağılımının karması kullanılarak elde edilebileceği görülmektedir. Dağılım

parametrelerinin davranışını incelemek için Şekil 1.1.'de farklı parametre değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri verilmiştir. Örnek olarak, Şekil 1.1.'e göre $\alpha = 0.2$ ve $\beta = 4$ parametreleri için L şeklinde (L-shaped) dağılım ve $\alpha = 1.5$ ve $\beta = 1$ parametreleri için sağa çarpık dağılım elde edilmiştir. Ayrıca, bu da farklı tipteki veri setlerini modellemek için esneklik sağlaması açısından Lindley dağılımına göre daha avantajlı bir dağılım olduğunu göstermektedir. Ayrıca Şekil 1.2.'de de farklı parametre değerleri için PL dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonu grafiklerine yer verilmiştir.



Şekil 1. 1. Farklı α ve β parametre değerleri için PL dağılımının olasılık yoğunluk grafikleri



Şekil 1. 2. Farklı α ve β parametre değerleri için PL dağılımının kümülatif dağılım fonksiyon grafikleri

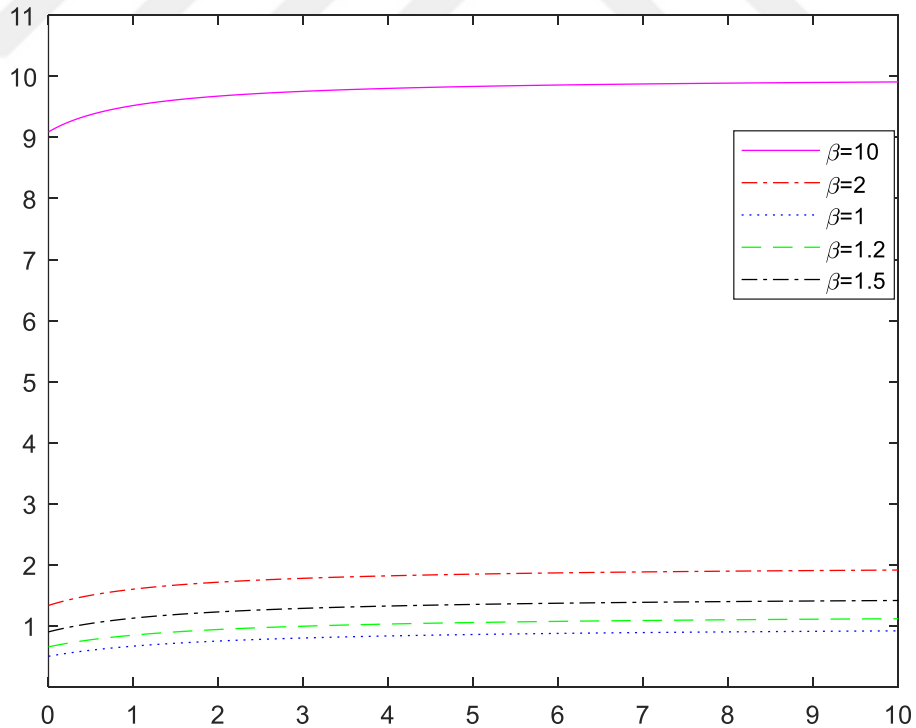
1.1.1. Hazard Fonksiyonu

Lindley dağılımı ile PL dağılımını esneklik ve uygulanabilirliğini karşılaştırmak amacı ile hazard fonksiyonları ve grafikleri bu kısımda incelenecektir.

Lindley dağılımının hazard fonksiyonu (Ghitany ve ark. (2008)) aşağıdaki formül yardımı ile elde edilir:

$$h(y) = \frac{f(y)}{S(y)} = \beta^2 \frac{1+y}{\beta+1+\beta y}, \quad y > 0, \quad \beta > 0. \quad (1.6)$$

Burada $S(y) = 1 - F(y)$ Lindley dağılımına ait yaşam (survival) fonksiyonudur. Şekil 1.3.'de Lindley dağılımının farklı β parametre değerleri için hazard fonksiyonu grafiği verilmiştir.

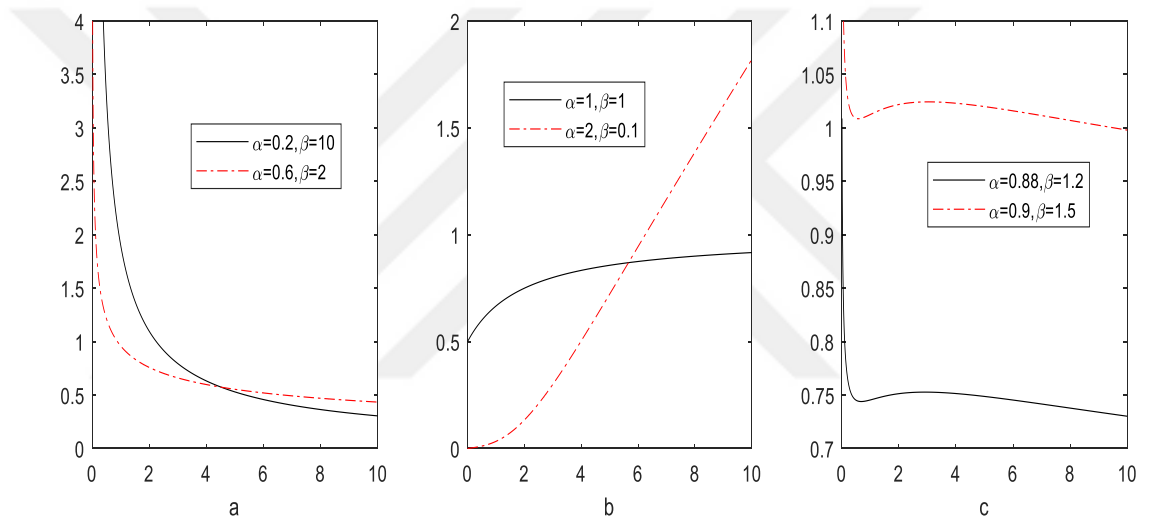


Şekil 1. 3. Farklı β parametre değerleri için Lindley dağılımının hazard fonksiyonu grafiği

PL dağılımının hazard fonksiyonu (Ghitany ve ark. (2013)) aşağıdaki formül yardımı ile elde edilir:

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \alpha\beta^2 \frac{(1+x^\alpha)x^{\alpha-1}}{\beta+1+\beta x^\alpha} \quad x > 0, \alpha, \beta > 0. \quad (1.7)$$

Burada $S(x) = 1 - F(x)$ power Lindley dağılımına ait yaşam fonksiyonudur. Şekil 1.4.'de PL dağılımının farklı α ve β parametre değerleri için hata oranı fonksiyon grafiği verilmiştir.



Şekil 1. 4. Farklı α ve β parametre değerleri için PL dağılımının hazard fonksiyonu grafikleri
(a) (α, β) : (0.2, 10), (0.6, 2), (b) (α, β) : (1, 1), (2, 0.1), (c) (α, β) : (0.88, 1.2), (0.9, 1.5).

Burada Lindley ve PL dağılımlarının hazard fonksiyonları karşılaştırıldığında, PL dağılımının hazard fonksiyonunun Lindley dağılımının hazard fonksiyonundan daha esnek olduğu görülmektedir.

1.1.2. Momentler

PL dağılımının karakteristik özelliklerinden olan momentleri aşağıdaki gibi tanımlanır. Her pozitif r tam sayısı için PL dağılımının r . moment

$$\mu'_r = \rho \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right)}{\beta^{r/\alpha}} + (1 - \rho) \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 2\right)}{\beta^{r/\alpha}}. \quad (1.8)$$

formülü ile verilir. Formülasyon üzerinde çeşitli düzenlemeler yapılarak aşağıdaki r. moment formülü şeklinde de ifade edilebilir:

$$\mu'_r = \frac{r\Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right)[\alpha(\beta + 1) + r]}{\alpha^2\beta^{r/\alpha}(\beta + 1)}. \quad (1.9)$$

Eşitlik (1.9) kullanılarak PL dağılımının beklenen değer, varyans, basıklık ve çarpıklık katsayıları aşağıda yer alan formüller yardımı ile hesaplanabilir:

$$E(X) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)[\beta + 1 + r]}{\alpha^2\beta^{1/\alpha}(\beta + 1)}, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)[\alpha(\beta + 1) + 2]\alpha^2(\beta + 1) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)[\alpha(\beta + 1) + 1]^2}{\alpha^4\beta^{2/\alpha}(\beta + 1)^2}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\text{Çarpıklık} = \frac{\mu'_3 - 3\mu'_2\mu + 2\mu^3}{\sigma^3}, \quad (1.12)$$

$$\text{Basıklık} = \frac{\mu'_4 - 4\mu'_3\mu + 6\mu'_2\mu^2 - 3\mu^4}{\sigma^4}. \quad (1.13)$$

1.1.3. Yüzdelik Fonksiyon

Bölüm 4.1.1.'de yer alan simülasyon çalışmasında PL dağılımından üretilecek rasgele veri için dağılımın tersi yöntemi kullanılacaktır. Bunun için PL dağılımının yüzdelik fonksiyonuna ihtiyaç vardır ve yüzdelik fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$F^{-1}(u) = [F_T^{-1}(u)]^{1/\alpha}, \quad (1.14)$$

$$Q(u) = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} W_{-1} \left(-\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}} (1-u) \right) \right]^{1/\alpha}. \quad (1.15)$$

Burada W_{-1} fonksiyonu Lambert W fonksiyonunun negatif kısmını (negative branch) göstermektedir.

Lambert W fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonun tersi olarak tanımlanmaktadır:

$$f(w) = we^w = z,$$

burada e^w üstel fonksiyon ve w herhangi bir karmaşık sayıyı ifade eder. $W(z)$ fonksiyonu

$$z = W(z)e^{W(z)}$$

eşitliğini sağlayan birkaç değer alan bir fonksiyondur. Burada eğer z reel sayı ise ve $z < -1/e \leq z < 0$ ise $W(z)$ iki mümkün reel değer alan fonksiyondur. $-1 \leq W(z)$ olan kısım W fonksiyonunun ana kısmı (principal branch) olarak adlandırılır ve W_0 olarak gösterilir. $W(z) \leq -1$ olan kısım ise W fonksiyonunun negatif kısmıdır ve W_{-1} olarak gösterilir. Daha detaylı bilgi için Chapeau-Blondeau ve Monir (2002) bakınız.

Burada not edilmelidir ki PL dağılımının (1.15) eşitliğinde verilen yüzdelik fonksiyonun da $-\frac{1}{e} < -\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}} (1-u) < 0$ olduğundan $W_{-1}(\cdot)$ fonksiyonu tektir. Buradan, $Q(u)$ fonksiyonunun da tek olduğu söylenir.

BÖLÜM 2. DAYANIKLI İSTATİSTİK

Kelime anlamı olarak da “dayanıklı, güçlü, dirençli, sağlam” anlamlarını barındıran “robust” ifadesi ilk defa Box tarafından 1953 yılında istatistiksel olarak literatüre katılmıştır. Daha sonra Tukey (1960; 1962), Huber (1964; 1967) ve Hampel (1971; 1974) tarafından yeni yöntemler önerilerek dayanıklı istatistik alanında büyük ilerlemeler sağlanmıştır. Bu yöntemler hala yaygın olarak kullanılmaktadır. Dayanıklı istatistik yöntemler hakkında daha detaylı bilgiler için bkz. Huber (1981), Hampel ve ark. (1986), Rousseeuw ve Leroy (1987), Staudte ve Sheather (1990).

Bilindiği üzere klasik yöntemler veride aykırı gözlem olmadığında ve varsayımlar sağlandığında ilgili dağılımın parametreleri için güvenilir sonuçlar vererek, elde edilen istatistiki sonuç çıkarımları da tahmin edicilerin özelliklerini inceleme de yeterli olacaktır. Bunun aksine veride aykırı gözlem olduğunda klasik tahmin edici yöntemi ile elde edilen istatistiki sonuç çıkarımları doğru olmayacaktır. Elde edilen parametre tahminleri gerçek parametre değerinden oldukça uzaklaşmış olacaktır. Dolayısıyla, aykırı gözlem durumunda bu gözlemlerden etkilenmeyecek tahmin edicilere ihtiyaç duyulur. Literatürde var olan dayanıklı yöntemler veride aykırı gözlem olmadığında ve varsayımlar sağlandığında klasik tahmin edici yöntemleri ile benzer (ya da yakın) istatistiki sonuç çıkarımları vermektedir. Ancak, veride aykırı gözlem olduğunda ve varsayımların sağlanmadığı durumlarda ise dayanıklı tahmin ediciler klasik tahmin edicilere göre güvenilir istatistiki sonuç çıkarımları vermektedir.

2.1. Etki Fonksiyonu

Dayanıklılığı ölçme kriterlerinden en yaygın olarak kullanılan ölçülerden biri etki fonksiyonudur (influence function (IF)).

$\hat{\theta}$ aşağıdaki gibi verilen parametrik ailenin (F_{θ}) tutarlı bir tahmin edicisi olsun:

$$\hat{\theta}_{\infty}(F_{\theta}) = \theta. \quad (2.1)$$

Etki fonksiyonu F dağılım ailesinin bir ϵ komşuluğunda

$$\mathcal{F}(F, \epsilon) = \{(1 - \epsilon)F + \epsilon G : G \in \mathcal{G}\} \quad (2.2)$$

$\hat{\theta}_{\infty}$ 'nin davranışını inceler. Burada $\mathcal{G}$ uygun dağılımlar kümesi olmak üzere bazı durumlarda δ_{x_0} ile gösterilen bir noktada yoğunlaşmış (point mass) dağılımı göstermektedir.

Buradan örneklem ϵ kadar aykırı gözlem içerdiğinde $\hat{\theta}_{\infty}$ tahmin edicisinin etki fonksiyonu (Hampel (1974))

$$\begin{aligned} IF_{\hat{\theta}}(x_0, F) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\hat{\theta}_{\infty}((1 - \epsilon)F + \epsilon \delta_{x_0}) - \hat{\theta}_{\infty}(F)}{\epsilon} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \hat{\theta}_{\infty}((1 - \epsilon)F + \epsilon \delta_0) \right|_{\epsilon=0} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ile tanımlanır. Burada $\downarrow$ sağdan limiti temsil eder. Daha detaylı bilgi için bkz. Maraonna ve ark. (2006).

2.2. ρ ve ψ Fonksiyon Seçimi

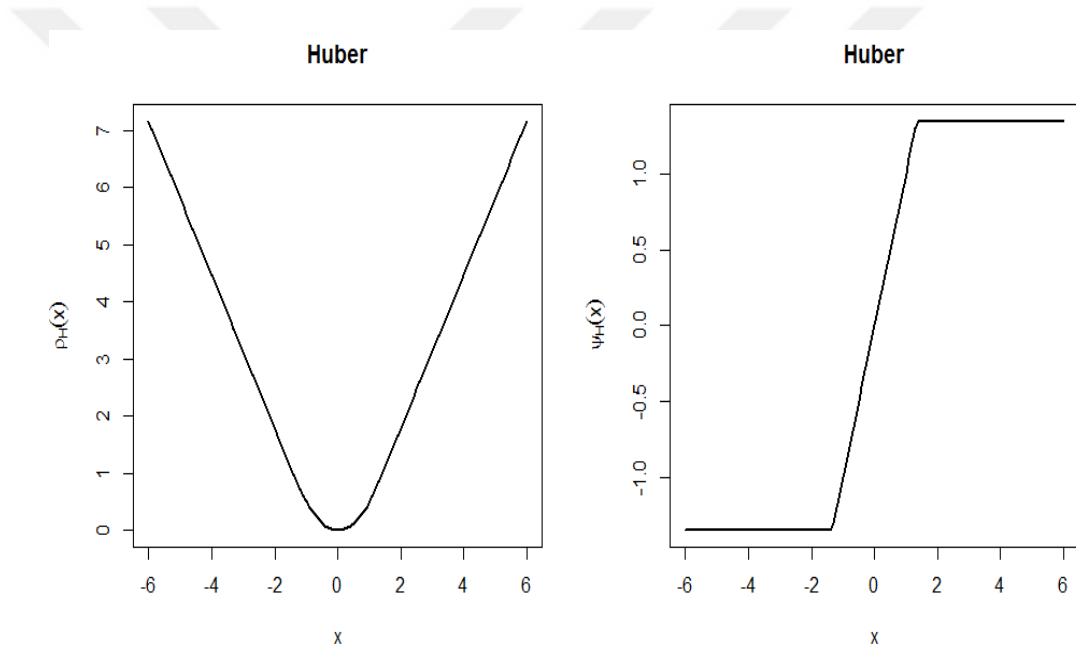
Bu kısımda RR ve OBR tahmin yöntemlerinde kullanılacak olan ρ ve φ fonksiyonları verilecektir. Bu tez çalışmasında kullanılacak olan ρ fonksiyonları Huber (1964) ve Tukey (1974) tarafından önerilen fonksiyonlardır. Öncelikle Huber (1964) tarafından önerilen monoton ρ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\rho_b(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq b, \\ 2b|x| - b^2, & |x| > b. \end{cases} \quad (2.4)$$

Buradan $\rho'(x) = 2\psi(x)$ olmak üzere

$$\psi_k(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq b, \\ \text{sgn}(x)b, & |x| > b, \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklindedir. Burada b ayarlama (tunning) sabitidir. $b = 1.345$ olarak alındığında standart normal dağılım için %95 asimptotik etkinlik elde edilir (bkz. Maronna ve ark. (2006)). Şekil 2.1.'de $b = 1.345$ alınarak Huber'in ρ ve φ fonksiyonları grafikleri çizdirilmiştir. Buradan, Huber'in ψ fonksiyonunun $[-b, b]$ aralığında sınırlı ve bu aralık dışında sabit olduğu görülür.

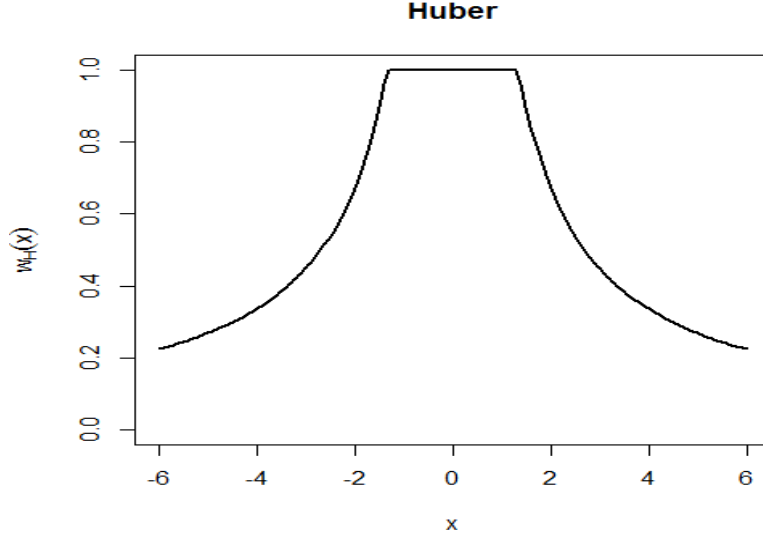


Şekil 2. 1. Huber'in ρ ve ψ fonksiyonu grafikleri

Ayrıca, Huber'in ψ fonksiyonu yardımıyla ağırlık fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$W_b(x) = \min\left(1, \frac{b}{|x|}\right). \quad (2.6)$$

Buradan Şekil 2.2.'de örnek olarak $b = 1.345$ için Huber'ın ağırlık fonksiyonu grafiği çizdirilmiştir.



Şekil 2. 2. Huber ağırlık fonksiyonu grafiği

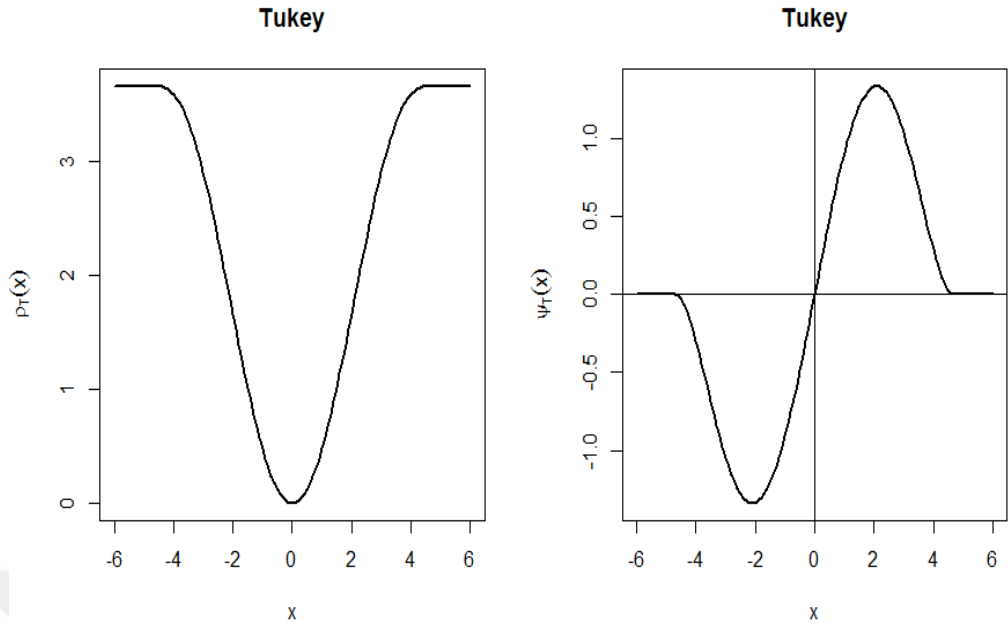
En çok kullanılan ρ fonksiyonlarından bir diğeri ise Tukey tarafından önerilen azalan (redesending) ya da Tukey'in (bisquare) fonksiyonudur (Beaton ve Tukey 1974). Tukey'in ρ fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$\rho_b(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right)^3, & |x| \leq b, \\ 1, & |x| > b. \end{cases} \quad (2.7)$$

Buradan $\rho'(x) = 6\psi(x)/b^2$ olmak üzere

$$\psi_b(x) = x \left(1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right)^2 I(|x| \leq b) \quad (2.8)$$

dır. Burada, ayarlama sabiti $b = 4.685$ olarak alındığında standart normal dağılım için %95 asimtotik etkinlik elde edilir (bkz. Maronna ve ark. (2006)). $b = 4.685$ için Tukey'in ρ ve ψ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 2.3'deki gibi elde edilir.

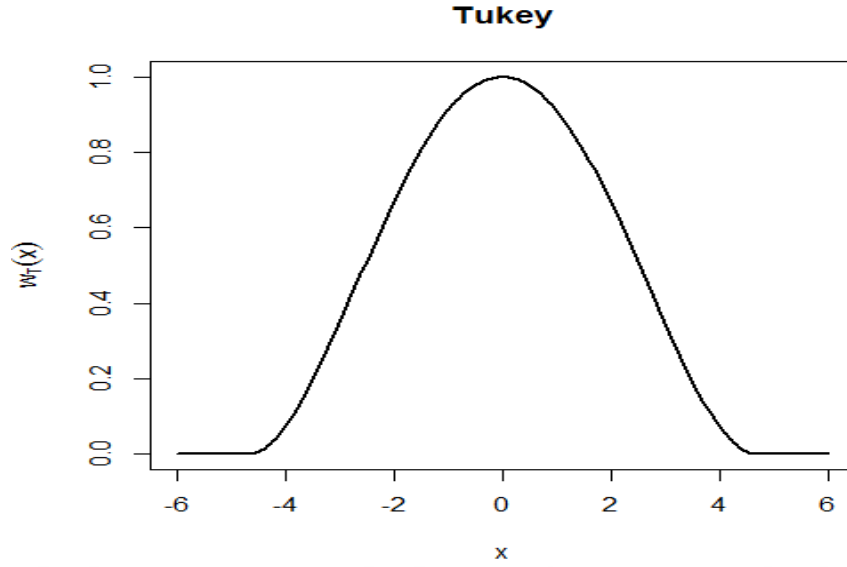


Şekil 2. 3. Tukey'in ρ ve ψ fonksiyonu grafikleri

Ayrıca Tukey'in ψ fonksiyonu kullanılarak ağırlık fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W_b(x) = \left[1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right]^2 I(|x| \leq b). \quad (2.9)$$

Burada örnek olarak $b = 4.685$ alındığında Tukey'in ağırlık fonksiyonu grafiği Şekil 2.4.'deki gibi elde edilir.



Şekil 2. 4. Tukey ağırlık fonksiyonu grafiği

Burada bahsi geçen ρ fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $\rho(x)$ fonksiyonu $|x|$ 'in azalmayan bir fonksiyonudur.
- $x = 0$ için $\rho(0) = 0$ 'dır.
- $\rho(x)$ fonksiyonu $x > 0$ için artandır.
- Eğer ρ fonksiyonu sınırlı ise $\rho(\infty) = 1$ 'dir (Maronna vd. 2006).

2.3. Regresyon M-Tahmin Yöntemi

En küçük kareler tahmin edicileri hata terimleri normal olmadığında yani hata terimleri dağılımı kalın kuyruklu olduğunda ya da veri aykırı gözlem içerdiğinde güvenilir sonuçlar vermezler. Bunun sebebi, en küçük kareler amaç fonksiyonunun bu gibi değişimlerden oldukça fazla etkilenmesidir. En küçük kareler yönteminde LS kriterinin yerine dayanıklı regresyon kriteri kullanılarak bu yöntem alternatif olarak M-tahminine dayalı dayanıklı regresyon yöntemi Huber (1973) tarafından önerilmiştir. Dayanıklı regresyon yöntemi veri setindeki aykırı gözlemleri belirler ve bu aykırı gözlemleri sınırlayarak veriyi analiz edip güvenilir sonuçlar elde eder. Bu yöntem veride aykırı gözlem olmadığı durumda da kullanılabilir fakat diğer bilinen klasik yöntemler ile çok yakın sonuçlar verir.

Bilindiği gibi regresyon analizinin amacı gözlenmiş değişkenler için regresyon doğrusu uydurmaktır. Verilmiş n gözlem için y ve x arasındaki doğrusal ilişkiyi aşağıdaki doğrusal regresyon denklemi ile verilir:

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \\ &= \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Burada y_i bağımlı değişken, $\mathbf{x}_i$ ($p \times 1$ boyutlu) bağımsız değişken vektörü, $\boldsymbol{\beta}$ ($p \times 1$ boyutlu) bilinmeyen parametre vektörü ve ε_i hata terimidir. Bu model için LS tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 'nın tahmin edilebilmesi için aşağıda verilen hataların kareleri toplamının $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre minimum yapılması gerekir:

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2. \quad (2.11)$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ elde edildikten sonra uydurulmuş regresyon modeli aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{y}_i = \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}. \quad (2.12)$$

Burada $\hat{y}_i$, y_i gözlemlerinin tahminini göstermektedir. i . artık $e_i = y_i - \hat{y}_i$ gözlenmiş değer ile tahmin edilmiş değer arasındaki farka eşittir. Buradan LS kriteri aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^n e_i^2. \quad (2.13)$$

Ancak, (2.13) ifadesi ile verilen LS kriteri aykırı gözlemlerden ve varsayımlardan sapmalardan oldukça fazla etkilenmektedir. Buradan, LS kriteri dayanıklı regresyon kriteri ile değiştirilerek aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n \rho(e_i). \quad (2.14)$$

Böylece, M-tahminine dayalı dayanıklı regresyon tahmini (2.14) ifadesinin β parametresine göre minimum yapılması ile elde edilir. Burada yer alan ρ fonksiyonu Bölüm 2.2.'de verilen özellikleri sağlamaktadır. ρ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki verilen eşitliğin β parametresine göre çözülmesi ile M-tahminine dayalı dayanıklı regresyon tahmini elde edilir:

$$\sum_{i=1}^n \psi(e_i)x_i = 0. \quad (2.15)$$

Burada $\psi = \rho'$ dır. Ayrıca $w(e_i) = \psi(e_i)/e_i$ ağırlık fonksiyonu olarak belirlendikten sonra β parametresi için dayanıklı tahmin aşağıdaki eşitliğin çözümünden de elde edilir:

$$\sum_{i=1}^n w(e_i)e_ix_i = 0. \quad (2.16)$$

Burada not edilmelidir ki ρ fonksiyonu için literatürde yer alan diğer fonksiyonlardan bir tanesi de kullanılabilir. Bundan sonra M-tahminine dayalı dayanıklı regresyon yöntemi kısaca RR yöntemi olarak adlandırılacaktır.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. PARAMETRE TAHMİNİ

Bu bölümde öncelikle PL dağılımının parametrelerini tahmin etmek için ML ve LS tahmin yöntemleri kullanılacaktır. Bu tez çalışmasının en temel amacı klasik tahmin yöntemlerine alternatif olarak OBR tahmin yöntemini önermektir. Dolayısıyla OBR tahmin yöntemi kullanılarak tahmin ediciler elde edilecektir ve ayrıca uygulamadaki karşılaştırma çeşitliliğini arttırmak için RR tahmin yöntemi kullanılarak da tahmin ediciler elde edilecektir.

3.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edici Yöntemi

$x_1, x_2, \dots, x_n$ PL dağılımından n boyutlu rasgele bir örneklem olsun. Bu dağılıma ait olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$L(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha\beta^2}{\beta + 1} \right)^n e^{-\beta \sum_{i=1}^n x_i^\alpha} \prod_{i=1}^n (1 + x_i^\alpha) x_i^{\alpha-1}. \quad (3.1)$$

Buradan, olabilirlik fonksiyonun logaritması alınarak log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \ell(\alpha, \beta) = n \log(\alpha) + 2n \log(\beta) - n \log(\beta + 1) + \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i^\alpha) \\ + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \beta \sum_{i=1}^n x_i^\alpha. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Log-olabilirlik fonksiyonunun parametrelere göre sırasıyla türevi alınıp sıfıra eşitlenir ve parametrelere ait en çok olabilirlik tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \log(x_i)}{1 + x_i^\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \beta \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \log(x_i) = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{n(\beta + 2)}{\beta(\beta + 1)} - \sum_{i=1}^n x_i^\alpha = 0 \quad (3.4)$$

Çeşitli düzenlemeler yapıldıktan sonra $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ parametre tahmin değerleri aşağıdaki doğrusal olmayan denklemlerin çözümü ile elde edilir:

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \log(x_i)}{1 + x_i^\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \hat{\beta}(\alpha) \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \log(x_i) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\hat{\beta}(\hat{\alpha}) = \frac{-(\sum_{j=1}^n x_j^{\hat{\alpha}} - n) + \sqrt{(\sum_{j=1}^n x_j^{\hat{\alpha}} - n)^2 + 8n \sum_{j=1}^n x_j^{\hat{\alpha}}}}{2 \sum_{j=1}^n x_j^{\hat{\alpha}}}. \quad (3.6)$$

Burada (3.5) ve (3.6) denklemleri nümerik yöntemler yardımı ile çözülür.

3.1.2. En Küçük Kareler Tahmin Edici Yöntemi

En küçük kareler tahmin edicileri gözlenmiş veride hataların karelerinin toplamının minimum yapılması ile bulunur. Basit doğrusal regresyon modeli aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Burada β_0 ve β_1 regresyon katsayılarıdır ve ϵ_i rasgele hata terimidir. Buradan PL dağılımı için regresyon modeli aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y_i = \log \log \left(\frac{1}{1 - F(x)} \right). \quad (3.8)$$

$F(x)$ dağılım fonksiyonu bilinmediğinden dolayı tahmini olan $\hat{F}(x)$ kullanılmalıdır. Bunun için de sıra istatistikleri yaklaşımından yararlanılabilir:

$$y_i = \log \log \left(\frac{1}{1 - \hat{F}(x_{(i)})} \right). \quad (3.9)$$

y_i değerlerini belirlemek için bu tez çalışmasında aşağıdaki yaklaşım kullanılmıştır:

$$E \left(F(x_{(i)}) \right) = \frac{i - 0.5}{n}, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

burada $F(x_{(i)})$ fonksiyonu (0,1) civarında düzgün dağılıma sahiptir. Dolayısıyla

$$y_i = \log \log \left(\frac{n}{n - i - 0.5} \right) \quad (3.11)$$

olarak elde edilir.

Böylece α ve β parametreleri için LS tahmin edicileri aşağıdaki eşitliğin parametrelere göre minimum yapılmasıyla elde edilir:

$$S = \sum_{i=1}^n \epsilon^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \log \log \left(\frac{1}{1 - F(x_{(i)})} \right) \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(y_i - \log \log \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{\beta}{1 + \beta} x_{(i)}^\alpha \right) e^{-\beta x_{(i)}^\alpha}} \right) \right)^2. \quad (3.12)$$

S fonksiyonunun parametrelere göre kapalı formları bulunamadığından nümerik yöntemler kullanılarak minimumu bulunur.

3.1.3. Dayanıklı Regresyon Tahmin Yöntemi

RR yöntemi Bölüm 2.3.'de ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Buradan PL dağılımının parametreleri için RR yöntemine dayalı tahmin ediciler aşağıdaki adımlar kullanılarak elde edilir.

Bilindiği gibi RR tahmin edicileri aşağıdaki amaç fonksiyonunun parametrelere göre minimum yapılması ile elde edilir:

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n \rho(e_i). \quad (3.13)$$

Burada (3.7) eşitliği ile verilen regresyon modeli kullanılarak $e_i = (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) / \sigma$ olarak alınmıştır. Ayrıca, σ tahmin edilmesi gereken ölçeklendirme sabitidir. Bu çalışmada σ dayanıklı yöntem kullanılarak tahmin edilmiştir. Ayrıntılı bilgi için bkz. Holland ve Welsch (1977).

Bu çalışmada ρ fonksiyonu için Tukey'in ρ fonksiyonu kullanılmıştır. ρ fonksiyonu Bölüm 2.2.'de verilen özellikleri sağlamaktadır. Aşağıda ρ , ψ ve w (ağırlık) fonksiyonları verilmiştir:

$$\rho(e_i) = \begin{cases} \left(\frac{b}{2}\right)^2 \left\{1 - \left[1 - \left(\frac{e_i}{b}\right)^2\right]^3\right\}, & \forall |e_i| \leq b, \\ \frac{b^2}{2}, & \forall |e_i| \geq b, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\psi(e_i) = \begin{cases} e_i \left[1 - \left(\frac{e_i}{b}\right)^2\right]^2, & \forall |e_i| \leq b, \\ 0, & \forall |e_i| > b, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$w(e_i) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{e_i}{b}\right)^2\right]^2, & \forall |e_i| \leq b, \\ 0, & \forall |e_i| > b. \end{cases} \quad (3.16)$$

Burada çalışma boyunca sınırlama sabiti $b = 4.685$ olarak alınmıştır.

3.1.4. Optimal B-Robust Tahmin Yöntemi

Bu kısımda klasik tahmin edicilere alternatif olarak PL dağılımının parametreleri için OBR tahmin edicileri elde edilecektir. Öncelikli olarak parametre vektörü $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$ olarak tanımlansın. Bilindiği üzere $\boldsymbol{\theta}$ için M-tahmin edicisi aşağıdaki amaç fonksiyonunun parametreye göre minimum yapılması ile elde edilir:

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, \boldsymbol{\theta}). \quad (3.17)$$

Alternatif olarak ρ fonksiyonu Bölüm 2.2.'de verilen özellikleri sağlayıp türevlenebilir ise $\boldsymbol{\theta}$ 'nın M-tahmin edicisi

$$\sum_{i=1}^n \psi(x_i, \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (3.18)$$

eşitliğinin çözümü ile de bulunabilir. Burada $\psi = \rho'$ dır.

Bu çalışmada OBR tahmin edicilerini elde etmek için aşağıda yer alan Huber'in ρ ve ψ fonksiyonları kullanılacaktır:

$$\rho_b(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & |x| \leq b, \\ b|x| - \frac{1}{2}b^2, & |x| > b, \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\psi_b(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq b, \\ \text{sgn}(x)b, & |x| > b. \end{cases} \quad (3.20)$$

Burada $\text{sgn}(\cdot)$ işaret fonksiyonudur ve b dayanıklılık ayarlama sabitidir. M-tahmin edicisinin etki fonksiyonu (IF) bir tahmin edicinin dayanıklılığını ölçmek için kullanılır ve aşağıdaki formül ile verilir:

$$IF = \frac{\psi(x, \theta)}{-\int \frac{\partial \psi(x, \theta)}{\partial \theta} dF_{\theta}(x)}. \quad (3.21)$$

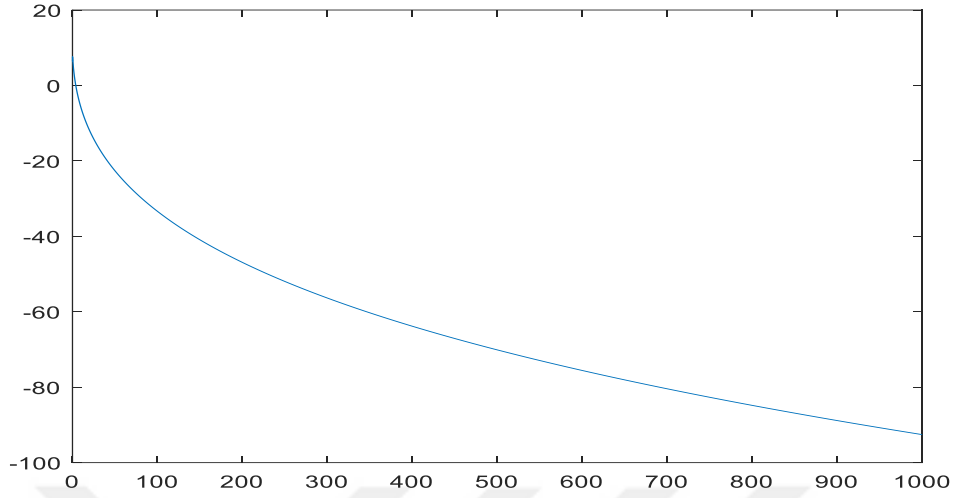
Ayrıca bir ML tahmin edicisinin etki fonksiyonu ise

$$IF = s(x, \theta)J(\theta)^{-1} \quad (3.22)$$

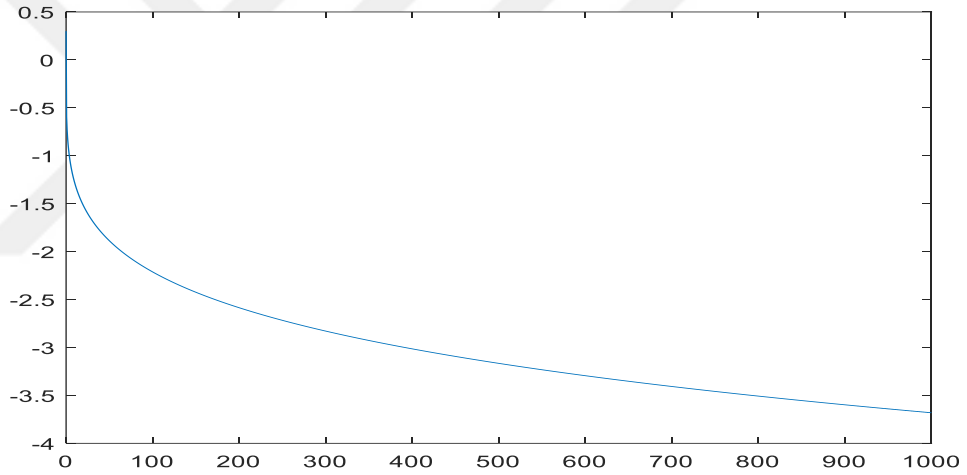
formülü ile hesaplanır. Burada $J(\theta)$ Fisher bilgi matrisidir ve $s(x, \theta) = \frac{\partial \log f_{\theta}(x)}{\partial \theta}$ skor fonksiyonudur. PL dağılımının skor fonksiyonu ise aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$s(x, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} + \frac{x^{\alpha} \log(x)}{1 + x^{\alpha}} + \log(x) + \beta x^{\alpha} \log(x) \\ \frac{\beta + 2}{\beta(\beta + 1)} - x^{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Buradan skor fonksiyonlarının davranışlarını incelemek için Şekil 3.1. ve Şekil 3.2.'de grafikleri verilmiştir.



Şekil 3.1. α parametresi için skor fonksiyonu ($\alpha = 0.2$ ve $\beta = 4$)



Şekil 3.2. β parametresi için skor fonksiyonu ($\alpha = 0.2$ ve $\beta = 4$)

Bu grafiklere göre PL dağılımının α ve β parametreleri için skor fonksiyonlarının sınırsız olduğu görülmektedir. Dolayısıyla elde edilen ML tahmin edicisinin etki fonksiyonu skor fonksiyonlarına bağlı olduğundan sınırsızdır ve aykırı gözlemlere karşı oldukça duyarlı olacaktır. Bu nedenle, PL dağılımının parametreleri için sınırlı etki fonksiyonuna sahip tahmin edicilere ihtiyaç duyulur. Bilindiği üzere dayanıklı M-tahmin edicilerinin etki fonksiyonu sınırlıdır. Bu çalışmada sınırlı etki fonksiyonuna sahip aşağıdaki eşitlik ile verilen standartlaştırılmış OBR tahmin yöntemi (Hampel ve ark.1986) kullanılacaktır:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \psi \left(A(\boldsymbol{\theta}) (s(x_i, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})) \right) &= \\ &= \sum_{i=1}^n W_b(x_i, \boldsymbol{\theta}) \{s(x_i, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})\} = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

burada

$$W_b(x, \boldsymbol{\theta}) = \min \left\{ 1; \frac{b}{\|A(\boldsymbol{\theta})\{s(x, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})\}\|} \right\}, \quad (3.25)$$

ağırlık fonksiyonudur ve $\|\cdot\|$ Öklid normudur. Aykırı gözlemlerin etkisini sınırlayan ağırlık fonksiyonu eğer $\|A(\boldsymbol{\theta})\{s(x_i, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})\}\| \leq b$ ise 1 değerini, diğer durumlarda ise $\frac{b}{\|A(\boldsymbol{\theta})\{s(x_i, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})\}\|}$ değerini alacaktır. Ayrıca $A(\boldsymbol{\theta})$, $p \times p$ tipinde bir matris ve $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$, $p \times 1$ tipinde vektör olmak üzere aşağıda verilen eşitliklerden elde edilirler:

$$E\{\psi(x, \boldsymbol{\theta})\psi(x, \boldsymbol{\theta})^T\} = \{A(\boldsymbol{\theta})^T A(\boldsymbol{\theta})\}^{-1}, \quad (3.26)$$

$$E\{\psi(s(x_i, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}))\} = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Bu çalışmada OBR tahmin edicileri Victoria Feser ve Ronchetti (1994) tarafından önerilen nümerik hesaplamalara dayanan aşağıda adımları verilen algoritma kullanılarak hesaplanacaktır. Algoritma dört adımdan oluşmaktadır.

Algoritma:

ADIM 1. Durdurma değerini ε , $\boldsymbol{\theta}$ parametresi için başlangıç değerini, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ve $A = J^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\theta})^{-T}$ olarak belirle. Burada, $J(\boldsymbol{\theta})$ Fisher bilgi matrisidir:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \int s(x, \boldsymbol{\theta}) s(x, \boldsymbol{\theta})^T dF_{\boldsymbol{\theta}}(x).$$

ADIM 2. $\mathbf{a}$ ve A için aşağıdaki eşitlikleri çöz:

$$AA^T = M_2^{-1}$$

ve

$$\mathbf{a} = \frac{\int s(x, \boldsymbol{\theta}) W_b(x, \boldsymbol{\theta}) dF_{\boldsymbol{\theta}}(x)}{\int W_b(x, \boldsymbol{\theta}) dF_{\boldsymbol{\theta}}(x)},$$

burada

$$M_k = \int \{s(x, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{a}\} \{s(x, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{a}\}^T W_b(x, \boldsymbol{\theta})^k dF_{\boldsymbol{\theta}}(x), \quad k = 1, 2$$

dır. $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{a}$ ve A 'nın şu anki değerleri verilen eşitlikleri çözmek için başlangıç değeri olarak kullanılır.

ADIM 3. M_1 ve

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = M_1^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{s(x_i, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{a}\} W_b(x_i, \boldsymbol{\theta}) \right)$$

değerlerini hesapla.

ADIM 4. Eğer $|\Delta \boldsymbol{\theta}| > \varepsilon$ ise $\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta} + \Delta \boldsymbol{\theta}$ ve adım 2'ye dön, değil ise dur.

Burada not edilmelidir ki sonlu eşitlikler için formüllerdeki integraller toplam ifadesi ile yer değiştirecektir.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. UYGULAMALAR

Bu bölümde ML, LS, RR ve OBR tahmin edicilerinin performanslarını veride aykırı gözlem olduğunda ve olmadığında karşılaştırmak için simülasyon çalışması ve gerçek veri uygulaması yer almaktadır.

4.1.1. Simülasyon Çalışması

Bu kısımda, farklı α ve β değerleri için PL dağılımından rastgele sayılar üretilerek veride aykırı gözlem olduğunda ve olmadığında simülasyon çalışması yapılarak tahmin edicilerin performansları karşılaştırılacaktır. Rastgele sayı üretmek için aşağıda yer alan prosedür kullanılacaktır.

4.1.2. Rasgele Sayı Üretme Prosedürü

X rastgele değişkeni α ve β parametrelili PL dağılımına sahip olmak üzere ($X \sim PL(\alpha, \beta)$) bu dağılımdan rastgele sayı aşağıda yer alan algoritmalarından herhangi biri kullanılarak üretilebilir. Bu algoritmalar Ghitany ve ark. (2013) tarafından verilmiştir.

Algoritma 1. Bu algoritma üstel dağılım ile gamma dağılımının karması yardımı ile Lindley dağılımından sayı üretilir. Daha sonra üretilen sayının $1/\alpha$ kuvveti alınarak PL dağılımdan rasgele sayı üretilmiş olur. Rastgele sayı üretme adımları aşağıdaki gibidir:

1. (0,1) aralığında düzgün dağılımdan rasgele sayı üret:
 $U_i \sim Uniform(0,1), \quad i = 1, \dots, n.$
2. β parametrelili üstel dağılımdan sayı üret:

$$V_i \sim \text{Exponential}(\beta), \quad i = 1, \dots, n.$$

3. Ölçek parametresi 2 ve şekil parametresi β olan gamma dağılımından rasgele sayı üret:

$$W_i \sim \text{Gamma}(2, \beta), \quad i = 1, \dots, n.$$

4. Eğer $U_i \leq p = \frac{\beta}{\beta+1}$ ise $X_i = V_i^{1/\alpha}$ al, değil ise $X_i = W_i^{1/\alpha}$, $i = 1, \dots, n$ al.

Algoritma 2: Bu algoritma weibull dağılımı ile genelleştirilmiş gamma dağılımının karması yardımı ile PL dağılımından rasgele sayı üretme prosedürünü ifade eder.

1. (0,1) aralığında düzgün dağılımdan rasgele sayı üret:

$$U_i \sim \text{Uniform}(0,1), \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Şekil parametresi α ve ölçek parametresi β olan weibull dağılımından rasgele sayı üret:

$$Y_i \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta), \quad i = 1, \dots, n.$$

3. Ölçek parametreleri 2 ile α ve şekil parametresi β olan genelleştirilmiş gamma dağılımından rasgele sayı üret:

$$Z_i \sim \text{GG}(2, \alpha, \beta), \quad i = 1, \dots, n.$$

4. Eğer $U_i \leq p = \frac{\beta}{\beta+1}$ ise $X_i = Y_i$, değil ise $X_i = Z_i$, $i = 1, \dots, n$.

Algoritma 3: Bu algoritma PL dağılımının dağılım fonksiyonunun tersi yardımı ile rasgele sayı üretme prosedürüne dayanmaktadır.

1. (0,1) aralığında düzgün dağılımdan rasgele sayı üret:

$$U_i \sim \text{Uniform}(0,1), \quad i = 1, \dots, n.$$

2. $X_i = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} W_{-1} \left(-\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}} (1 - U_i) \right) \right]^{1/\beta}$, $i = 1, \dots, n$ al.

4.1.3.Hesaplama ile İlgili Detaylar

Simülasyon çalışması için rastgele örneklem belirli α ve β parametreleri ile PL dağılımından $(X \sim PL(\alpha, \beta))$ yukarıda verilen algoritmalarından Algoritma 3 kullanılarak rastgele sayılar üretilmiştir. Not edilmelidir ki diğer rastgele sayı üretme algoritmaları da denenmiş ve aynı sonuçlar elde edilmiştir. Simülasyon çalışmasının detayları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Simülasyon çalışması için tekrar sayısı $N = 1000$ olarak alınmıştır.
- Bölüm 3.1.4.’de verilen algoritma için durdurma koşulu $\varepsilon = 10^{-6}$ olarak alınmıştır.
- Simülasyon çalışması için gerçek parametre değerleri $(\alpha, \beta) = (0.2, 4), (1.5, 1), (1, 2), (0.85, 0.3), (0.9, 0.35), (1, 0.7)$ olarak alınmıştır. Bu farklı parametre değerleri için Şekil 1.1’de PL dağılımın farklı davranış gösterdiği dağılım grafikleri yer almaktadır. Farklı tipteki verinin modellenemediğini göstermek için simülasyon çalışmasında bu grafikte yer alan farklı α ve β değerleri kullanılmıştır.
- Simülasyon için örnek hacmi $n = 25, 50, 100$ olarak alınmıştır.
- Ayrıca her bir örnekleme aykırı gözlem eklenerek simülasyonlar tekrarlanmıştır. Aykırı gözlem ekleme prosedürü de aşağıdaki gibi yapılmıştır:

$$(n - r)PL(x; \alpha, \beta) + rUniform(\bar{X} - 15\sigma, \bar{X} + 15\sigma).$$

Burada aykırı değer ekleme işlemi her bir örneklem için $r = 0.1$ alınarak yapılmıştır. Ayrıca, $\bar{X}$ örneklem ortalamasını ve σ ise örneklem standart sapmasını göstermektedir.

- Aykırı gözlem ekleme prosedürüne göre $n = 25$ için veriye 2 aykırı gözlem, $n = 50$ için veriye 5 aykırı gözlem ve $n = 100$ için veriye 10 aykırı gözlem eklenmiştir.
- Simülasyon çalışması ve gerçek veri uygulaması MATLAB R2017b programı kullanılarak yapılmıştır.

- Tahmin edicilerin performanslarını değerlendirmek için yan (Bias) ve hata kareler ortalamasının karekökü (RMSE) değerleri hesaplanıp karşılaştırılacaktır. Yan ve RMSE için formüller aşağıdaki gibidir:

$$Bias(\hat{\alpha}) = \bar{\alpha} - \alpha, \quad Bias(\hat{\beta}) = \bar{\beta} - \beta, \quad (4.1)$$

$$RMSE(\hat{\alpha}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\alpha}_i - \alpha)^2}, \quad RMSE(\hat{\beta}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\beta}_i - \beta)^2}. \quad (4.2)$$

Burada $\bar{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i$ ve $\bar{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_i$ dir.

Bölüm 3.1.4.'te verilen algoritma için başlangıç değeri ile ilgili olarak, Victoria-Feser ve Ronchetti (1994) tarafından önerilen ve aşağıda adımları verilen başlangıç değeri prosedürü kullanılmıştır.

ADIM 1. ML tahminlerini bul.

ADIM 2. OBR tahminini bulmak için $b = 3.5$ al.

ADIM 3. Adım 2'de elde edilen OBR tahminlerini yeni başlangıç değerleri olarak kullan ve tekrar OBR tahminleri elde etmek için $b = 2$ al.

4.1.4.Simülasyon Sonuçları

Farklı örneklem hacimleri ve parametre değerleri için elde edilen simülasyon sonuçları Tablo 4.1, 4.2, 4.3 ve 4.4'de gösterilmektedir. Bu tablolarda α ve β parametreleri için gerçek parametre değerleri, ML, LS, RR ve OBR yöntemlerinden elde edilen tahminlerin yan ve RMSE değerleri verilmektedir. Tablo 4.1. ve 4.2.'de veride aykırı gözlem olmadığında elde edilen tahmin sonuçları yer almaktadır. Tablo 4.3. ve 4.4.'de ise hesaplama detaylarında belirtildiği gibi aykırı gözlemler eklenerek tahmin sonuçları elde edilmiştir.

Tablo 4.1.'de α parametresi için veride aykırı gözlem olmadığında elde edilen tahmin sonuçları yer almaktadır. Tablo 4.1.'den ML tahminlerinin belirgin olarak diğer tahmin yöntemlerine göre en iyi performansı verdiği söylenebilir. Tablodan ML tahmin yönteminden elde edilen tahmin edicilerin yan ve RMSE değerlerinin neredeyse hepsinde diğer tahmin edici yöntemleri tarafından elde edilen tahmin edicilerin yan ve RMSE değerlerinden daha küçük olduğu görülür.

Tablo 4.2.' de β parametresi için veride aykırı gözlem olmadığında elde edilen tahmin sonuçları yer almaktadır. Tablo 4.2.'den ML tahminlerinin belirgin olarak diğer tahmin edici yöntemlerinden elde edilen tahminlere göre en iyi performansı verdiği söylenebilir. Tablodan ML tahmin edici yönteminden elde edilen tahmin edicilerin yan ve RMSE değerlerinin çoğu diğer tahmin edici yöntemleri tarafından elde edilen tahmin edicilerin yan ve RMSE değerlerinden daha küçük olduğu görülür.

Tablo 4.3.'de ise aykırı gözlem olduğunda α parametresi için elde edilen tahmin sonuçları bulunmaktadır. Bu tabloya göre aykırı gözlem olduğunda en üstün performansı yan ve RMSE değerlerine göre OBR tahmin yönteminden elde edilen tahmin ediciler vermiştir. Bunun aksine diğer tahmin ediciler aykırı gözlemlerden oldukça fazla etkilenmiştir.

Benzer şekilde Tablo 4.4.'te ise aykırı gözlem olduğunda β parametresi için elde edilmiş tahmin sonuçları yer almaktadır. Bu tabloya bakıldığında çoğu durum için yine en iyi performansı yan ve RMSE değerlerine bakıldığında OBR tahmin yönteminden elde edilen tahmin ediciler vermiştir. Bunun aksine diğer tahmin ediciler aykırı gözlemlerden oldukça etkilenmiştir.

Sonuç olarak aykırı gözlem olmadığı durumda bütün tahmin ediciler LS, ML, RR ve OBR benzer sonuçlar verirken aykırı gözlem olduğunda OBR dışındaki tahmin ediciler aykırı gözlemlere karşı oldukça duyarlı davranış göstermiştir. Buradan aykırı gözlem olduğu durumda güvenilir istatistiki sonuç çıkarımları elde etmek için alternatif bir yöntem olarak OBR tahmin edicilerinin kullanılması önerilir.

Tablo 4. 1. Aykırı değer olmadan farklı örneklem hacimleri için α parametresinin, yan ve RMSE değerleri

n	α	β		Parametre α			
				ML	LS	RR	OBR
25	0,2	4	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0127	-0,0201	-0,0191	0,0148
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0384	0,0428	0,0423	0,0439
	1	2	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0661	-0,0991	-0,0981	0,0752
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,1998	0,2241	0,2236	0,2336
	1	0,7	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0461	-0,1056	-0,1065	0,0317
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,1631	0,2040	0,2031	0,1850
	0,85	0,3	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0424	-0,0730	-0,0894	0,0302
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,1355	0,1614	0,1635	0,1507
	0,9	0,35	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0362	-0,0940	0,0687	0,1241
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,1432	0,1792	0,1610	0,1985
	1,5	1	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0871	-0,1426	0,1511	0,2698
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,2607	0,3083	0,2979	0,3880
50	0,2	4	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0051	-0,0153	-0,0143	0,0164
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0241	0,0327	0,0322	0,0344
	1	2	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0252	-0,0844	-0,0827	0,0704
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,1184	0,1595	0,1592	0,1618
	1	0,7	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0214	-0,0733	-0,0748	0,0541
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,1084	0,1487	0,1477	0,1422
	0,85	0,3	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0229	-0,0540	-0,0726	0,0419
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0897	0,1166	0,1234	0,1128
	0,9	0,35	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0254	-0,0526	-0,0711	0,0508
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0936	0,1229	0,1281	0,1234
	1,5	1	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0344	-0,1080	-0,1062	0,0964
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,1754	0,2344	0,2349	0,2381
100	0,2	4	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0033	-0,0104	-0,0097	0,0198
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0165	0,0225	0,0224	0,0288
	1	2	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0207	-0,0444	-0,0358	0,1044
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0840	0,1142	0,1170	0,1533
	1	0,7	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0148	-0,0482	-0,0386	0,0727
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0742	0,1073	0,1121	0,1214
	0,85	0,3	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0091	-0,0374	-0,0532	0,0528
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0590	0,0854	0,0927	0,0943
	0,9	0,35	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0080	-0,0422	-0,0545	0,0523
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0658	0,0920	0,0988	0,0984
	1,5	1	Bias($\hat{\alpha}$)	0,0168	-0,0787	-0,0611	0,1203
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,1198	0,1681	0,1709	0,1961

Dipnot: Tablo 4.1.'de koyu olarak yazılmış değerler simülasyon sonucunun en iyi olduğu parametre tahminini göstermektedir.

Tablo 4. 2. Aykırı değer olmadan farklı örneklem hacimleri için β parametresinin, yan ve RMSE değerleri

n	α	β		Parametre β			
				ML	LS	RR	OBR
25	0,2	4	Bias($\hat{\beta}$)	0,4745	-0,3570	-0,3279	1,0797
			RMSE($\hat{\beta}$)	1,3349	1,0526	1,0568	2,1574
	1	2	Bias($\hat{\beta}$)	0,0781	-0,0973	-0,0839	0,2249
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,3771	0,3239	0,3202	0,5207
	1	0,7	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0048	0,0516	0,0627	0,0330
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1484	0,1523	0,1575	0,1623
	0,85	0,3	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0082	0,0538	0,0657	0,0110
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0898	0,1217	0,1290	0,1005
	0,9	0,35	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0060	0,0615	0,0737	0,0177
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0923	0,1240	0,1310	0,1019
	1,5	1	Bias($\hat{\beta}$)	0,0953	-0,1455	-0,1457	0,0822
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,2772	0,3208	0,3210	0,3143
50	0,2	4	Bias($\hat{\beta}$)	0,1955	-0,2953	-0,2693	0,9792
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,7393	0,8022	0,8042	1,5709
	1	2	Bias($\hat{\beta}$)	0,0530	-0,0661	-0,0559	0,2252
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,2387	0,2222	0,2199	0,3794
	1	0,7	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0006	0,0343	0,0428	0,0191
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1060	0,1123	0,1158	0,1167
	0,85	0,3	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0078	0,0329	0,0452	-0,0053
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0613	0,0786	0,0866	0,0664
	0,9	0,35	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0076	0,0324	0,0457	-0,0049
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0677	0,0859	0,0933	0,0753
	1,5	1	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0041	0,0114	0,0189	0,0362
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1264	0,1195	0,1209	0,1455
100	0,2	4	Bias($\hat{\beta}$)	0,0793	-0,2484	-0,2446	0,9480
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,4216	0,5388	0,5390	1,2108
	1	2	Bias($\hat{\beta}$)	0,0195	-0,0482	-0,0445	0,2377
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1691	0,1733	0,1713	0,3362
	1	0,7	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0041	0,0190	0,0217	0,0057
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0722	0,0765	0,0810	0,0792
	0,85	0,3	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0016	0,0229	0,0332	-0,0110
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0434	0,0571	0,0637	0,0498
	0,9	0,35	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0005	0,0250	0,0348	-0,0080
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0490	0,0620	0,0683	0,0543
	1,5	1	Bias($\hat{\beta}$)	0,0010	0,0106	0,0139	0,0373
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0914	0,0881	0,0892	0,1104

Dipnot: Tablo 4.2.'de koyu olarak yazılmış değerler simülasyon sonucunun en iyi olduğu parametre tahminini göstermektedir.

Tablo 4.3. Aykırı değerin varlığında farklı örneklem hacimleri için α parametresinin, yan ve RMSE değerleri

n	α	β		Parametre α			
				ML	LS	RR	OBR
25	0,2	4	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,0122	-0,0322	-0,0312	-0,0038
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0328	0,0451	0,0444	0,0340
	1	2	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,3692	-0,3131	-0,3121	-0,1717
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,3742	0,3267	0,3258	0,2013
	1	0,7	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,3710	-0,3138	-0,3140	-0,1844
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,3751	0,3251	0,3252	0,2064
	0,85	0,3	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,2720	-0,2329	-0,2448	-0,1240
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,2773	0,2469	0,2566	0,1527
	0,9	0,35	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,3042	-0,2565	-0,2654	-0,1427
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,3091	0,2693	0,2760	0,1684
	1,5	1	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,2726	-0,2320	-0,2439	-0,1242
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,2774	0,2445	0,2544	0,1499
50	0,2	4	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,0242	-0,0303	-0,0290	-0,0050
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0317	0,0376	0,0366	0,0236
	1	2	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,4034	-0,3138	-0,3106	-0,2143
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,4055	0,3200	0,3171	0,2242
	1	0,7	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,4018	-0,3118	-0,3104	-0,2208
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,4037	0,3177	0,3164	0,2296
	0,85	0,3	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,3040	-0,2346	-0,2490	-0,1588
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,3060	0,2408	0,2546	0,1681
	0,9	0,35	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,3337	-0,2591	-0,2732	-0,1784
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,3357	0,2656	0,2791	0,1879
	1,5	1	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,7603	-0,6068	-0,4862	-0,4862
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,7616	0,6106	0,6100	0,4914
100	0,2	4	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,0316	-0,0285	-0,0269	-0,0048
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,0351	0,0326	0,0318	0,0173
	1	2	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,4116	-0,2954	-0,2879	-0,2023
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,4127	0,2988	0,2921	0,2078
	1	0,7	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,4117	-0,2983	-0,2949	-0,2130
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,4126	0,3012	0,2986	0,2173
	0,85	0,3	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,3099	-0,2169	-0,2271	-0,1456
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,3111	0,2207	0,2312	0,1515
	0,9	0,35	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,3432	-0,2446	-0,2544	-0,1696
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,3442	0,2478	0,2581	0,1742
	1,5	1	Bias($\hat{\alpha}$)	-0,7658	-0,5784	-0,5717	-0,4656
			RMSE($\hat{\alpha}$)	0,7665	0,5805	0,5743	0,4685

Dipnot: Tablo 4.3.'de koyu olarak yazılmış değerler simülasyon sonucunun en iyi olduğu parametre tahminini göstermektedir.

Tablo 4.4. Aykırı değerin varlığında farklı örneklem hacimleri için β parametresinin, yan ve RMSE değerleri

			Parametre β				
n	α	β		ML	LS	RR	OBR
25	0,2	4	Bias($\hat{\beta}$)	-0,6880	-1,0428	-1,0169	-0,1751
			RMSE($\hat{\beta}$)	1,0120	1,2131	1,1951	0,9989
	1	2	Bias($\hat{\beta}$)	-0,5575	-0,5765	-0,5598	-0,2868
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,5793	0,6009	0,5852	0,3820
	1	0,7	Bias($\hat{\beta}$)	0,0528	0,0052	0,0171	0,0331
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1009	0,0968	0,0949	0,1214
	0,85	0,3	Bias($\hat{\beta}$)	0,1161	0,0843	0,0957	0,0533
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1344	0,1170	0,1249	0,0994
	0,9	0,35	Bias($\hat{\beta}$)	0,1210	0,0820	0,0922	0,0570
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1408	0,1171	0,1228	0,1059
	1,5	1	Bias($\hat{\beta}$)	0,1162	0,0831	0,0943	0,0533
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1345	0,1160	0,1235	0,0992
50	0,2	4	Bias($\hat{\beta}$)	-1,0884	-1,1885	-1,1655	-0,4625
			RMSE($\hat{\beta}$)	1,1668	1,2542	1,2352	0,7475
	1	2	Bias($\hat{\beta}$)	-0,6212	-0,6319	-0,6192	-0,4278
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,6286	0,6417	0,6293	0,4534
	1	0,7	Bias($\hat{\beta}$)	0,0415	-0,0264	-0,0187	-0,0025
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0717	0,0731	0,0683	0,0767
	0,85	0,3	Bias($\hat{\beta}$)	0,1240	0,0669	0,0801	0,0498
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1321	0,0862	0,0975	0,0741
	0,9	0,35	Bias($\hat{\beta}$)	0,1246	0,0640	0,0779	0,0503
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1334	0,0856	0,0966	0,0767
	1,5	1	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0765	-0,1570	-0,1508	-0,0953
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0955	0,1707	0,1639	0,1252
100	0,2	4	Bias($\hat{\beta}$)	-1,2170	-1,1866	-1,1801	-0,4886
			RMSE($\hat{\beta}$)	1,2499	1,2202	1,2149	0,6284
	1	2	Bias($\hat{\beta}$)	-0,6344	-0,6406	-0,6305	-0,4466
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,6377	0,6453	0,6354	0,4582
	1	0,7	Bias($\hat{\beta}$)	0,0381	-0,0394	-0,0323	-0,0160
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0716	0,0633	0,0573	0,0587
	0,85	0,3	Bias($\hat{\beta}$)	0,1240	0,0518	0,0622	0,0368
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1321	0,0647	0,0739	0,0542
	0,9	0,35	Bias($\hat{\beta}$)	0,1295	0,0507	0,0622	0,0398
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,1337	0,0634	0,0739	0,0560
	1,5	1	Bias($\hat{\beta}$)	-0,0761	-0,1679	-0,1634	-0,1089
			RMSE($\hat{\beta}$)	0,0858	0,1746	0,1696	0,1229

Dipnot: Tablo 4.4.'de koyu olarak yazılmış değerler simülasyon sonucunun en iyi olduğu parametre tahminini göstermektedir.

4.2. Gerçek Veri Uygulaması

Çalışmanın bu bölümünde, Cooray ve Ananda (2008) tarafından kullanılan veri seti incelenecektir. Ayrıca, bu veri seti Doğru ve ark. (2017) tarafından genelleştirilmiş half-normal dağılımının parametrelerinin OBR tahmin edicilerinin uygulanabilirliğinin gösterilmesi için kullanılmıştır. Bu veri seti % 90 stres seviyelerinde Kevlar/49 epoksi iplik kopuşlarının gerilim-kopma ömrünü içermektedir. Veri seti Tablo 4.5.'te verilmiştir (veri seti için bkz. Andrews ve Herzberg (1985), Barlow ve ark. (1984)).

Tablo 4. 5. Gerilim-kopma ömrü

0,01 0,01 0,02 0,02 0,02 0,03 0,03 0,04 0,05 0,06 0,07 0,07 0,08 0,09 0,09 0,10 0,10 0,11
0,11 0,12 0,13 0,18 0,19 0,20 0,23 0,24 0,24 0,29 0,34 0,35 0,36 0,38 0,40 0,42 0,43 0,52
0,54 0,56 0,60 0,60 0,63 0,65 0,67 0,68 0,72 0,72 0,72 0,73 0,79 0,79 0,80 0,80 0,83 0,85
0,90 0,92 0,95 0,99 1,00 1,01 1,02 1,03 1,05 1,10 1,10 1,11 1,15 1,18 1,20 1,29 1,31 1,33
1,34 1,40 1,43 1,45 1,50 1,51 1,52 1,53 1,54 1,54 1,55 1,58 1,60 1,63 1,64 1,80 1,80 1,81
2,02 2,05 2,14 2,17 2,33 3,03 3,03 3,34 4,20 4,69 7,89

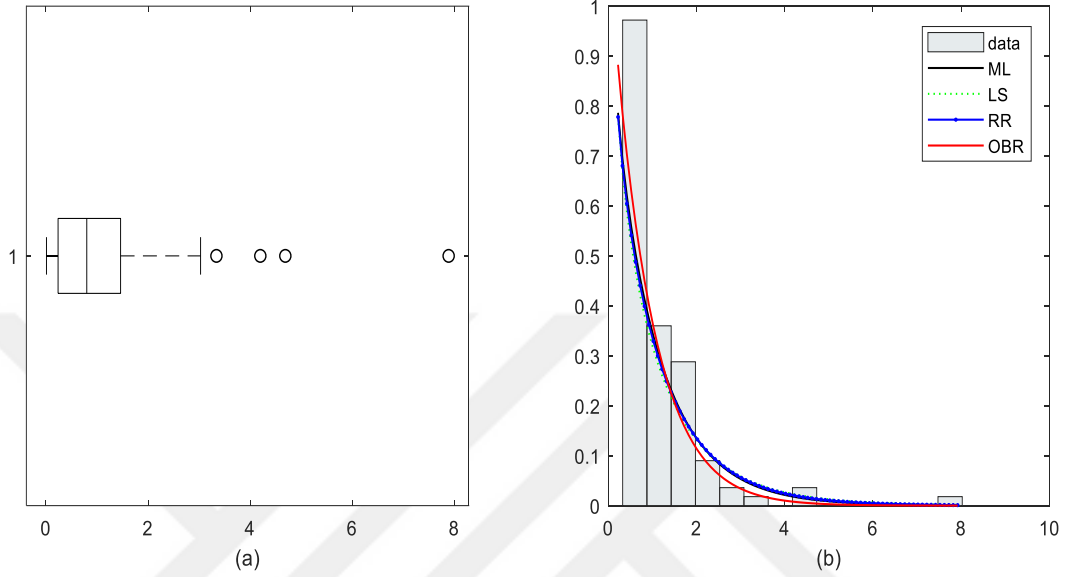
PL dağılımı bir yaşam modeli dağılımı olduğundan, bu dağılım için elde edilen tahmin edicilerin gerçek veri üstünde uygulanabilirliğini test etmek için Tablo 4.5.'te verilen veri seti kullanılacaktır. PL dağılımının parametreleri için ML, LS, RR ve OBR tahmin edicilerinin performansları karşılaştırılacaktır. Bu veri seti kullanılarak elde edilen tahmin sonuçları Tablo 4.6.'da verilmiştir. Bu tabloda ML, LS, RR ve OBR yöntemleri kullanılarak elde edilen parametre tahmin sonuçları yer almaktadır.

Tablo 4.6. Gerilim-kopma ömrü için elde edilmiş ML, LS, RR ve OBR tahminleri

Estimate	Estimation Method			
	ML	LS	RR	OBR
$\hat{\alpha}$	0,8616	0,7940	0,8145	0,9315
$\hat{\beta}$	1,4579	1,4402	1,4463	1,6495

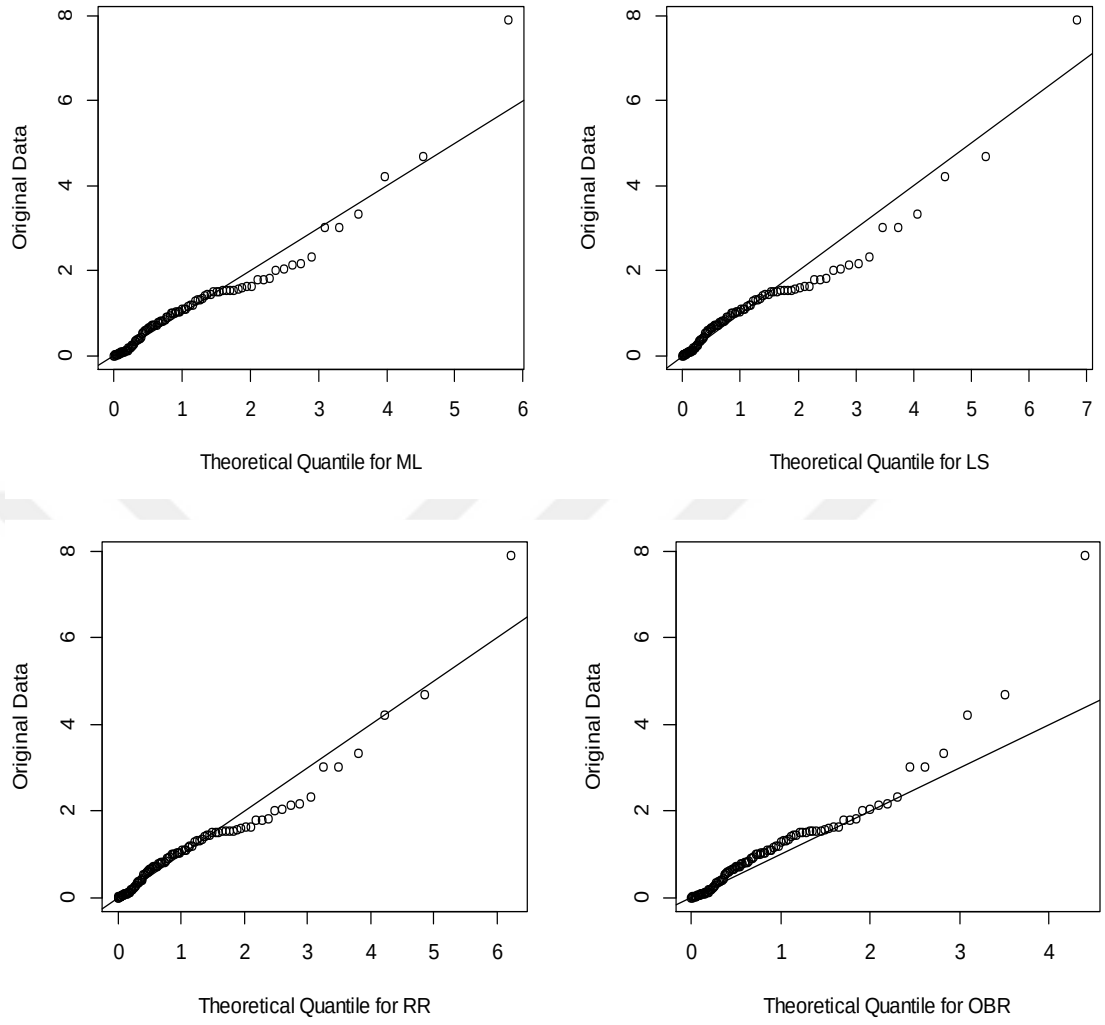
Şekil 4.1. (a)'da gerilim-kopma ömrü verisinin kutu grafiği yer almaktadır. Veri setinin kutu grafiğine göre veri setinde 4 adet potansiyel aykırı gözlemin olduğu görülmektedir. Ayrıca Şekil 4.1. (b)'de ML, LS, RR ve OBR yöntemlerinden elde edilmiş uydurulmuş yoğunluk fonksiyonu grafikleri ile verinin histogramı

bulunmaktadır. Şekil 4.1. (b)'de verilen grafikte ML, LS ve RR tahmin değerleri birbirine çok yakın olduğundan grafikleri neredeyse üst üste çizilmiştir. Bu tahmin edicilerden farklı olarak OBR yöntemi ile elde edilen uydurulmuş yoğunluk grafiği veri için en iyi uyumu sağlamıştır.



Şekil 4. 1. (a) Gerilim-kopma veri setinin kutu grafiği; (b) ML, LS, RR ve OBR'den elde edilen uygun yoğunluklara sahip histogram grafiği

Bu tahmin edicilerin performanslarını karşılaştırmak için kullanılabilecek alternatif bir yöntem ise Q-Q grafikleridir. Şekil 4.2.'de ML, LS, RR ve OBR yöntemlerinden elde edilmiş uydurulmuş dağılımların Q-Q grafikleri verilmiştir. Bu grafiğe göre ML, LS ve RR yöntemleri sonucunda elde edilmiş olan tahminler aykırı değerlerden oldukça etkilenmektedir. Bunun aksine OBR yöntemi ile elde edilen tahminler aykırı gözlemlerden etkilenmemiştir. Şekil 4.2.'de yer alan grafiğe göre gerilim-kopma verisi için en iyi uyumu OBR tahmin edicilerinin verdiği gözlenmiştir.



Şekil 4. 2. ML, LS, RR ve OBR yöntemlerinden elde edilmiş uydurulmuş dağılımların Q-Q grafikleri

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında PL dağılımının parametrelerini tahmin etmek için OBR tahmin yönteminin kullanılması önerilmiştir. Önerilen bu yöntem ile elde edilen tahmin edicilerin performans olarak üstün olduğunu gösterebilmek için ayrıca ML, LS ve RR yöntemleri kullanılarak tahmin ediciler elde edilmiştir. Tahmin edici yöntemlerinin performanslarını karşılaştırmak için simülasyon çalışması ve gerçek veri uygulaması yapılmıştır. Simülasyon sonuçlarına göre veride aykırı gözlem olmadığında klasik tahmin edici yöntemlerinden ML en iyi sonucu verirken diğer tahmin edici yöntemlerinin (LS, RR, OBR) yan ve RMSE değerleri ML tahmin edici yönteminden elde edilen sonuçlara yakın çıkmıştır. Ancak veriye aykırı gözlemler eklendiğinde diğer yöntemlerin aksine OBR tahmin yönteminin yan ve RMSE değerleri çoğu durumda daha küçük çıkmıştır. Bunun sebebi diğer tahmin edici yöntemlerinin eklenen aykırı gözlemlerden oldukça fazla etkilenmesidir. Bunlara ek olarak önerilen OBR tahmin yönteminin uygulanabilirliğini göstermek için gerçek veri uygulaması yapılmıştır. Gerçek veri uygulaması kendi içerisinde aykırı değer içeren gerçek veri seti kullanılarak ML, LS, RR ve OBR tahminleri elde edilmiştir. Elde edilen bu tahminlerin performanslarını karşılaştırmak için Q-Q grafiklerini oluşturulmuştur. Bu grafiğe göre aykırı değerlerden en çok ML, LS ve RR yöntemlerinden elde edilen tahmin ediciler etkilenmiştir. Ancak OBR yönteminden elde edilen tahmin edicilerin Q-Q grafiği bu veri seti için en iyi uyumu sağlamıştır.

Sonuç olarak bu çalışmada elde edilen sonuçlara göre veri aykırı gözlem içerdiğinde, PL dağılımının parametreleri için daha güvenilir sonuçların elde edilmesinde literatürde var olan klasik tahmin edici yöntemleri yerine alternatif olarak OBR tahmin yönteminin kullanılması önerilmektedir.

KAYNAKLAR

- Andrews, D.F. and Herzberg, A. M. 1985. Data: A Collection of Problems from Many Fields for the Student and Research Worker, New York: Springer Series in Statistics.
- Barlow, R.E. Toland, R.H. and Freeman, T. 1984. A Bayesian Analysis of Stress-rupture Life of Kevlar 49/epoxy Spherical Pressure Vessels. In "Proceeding of the Canadian Conference in Applied Statistics. 1981" (T.D. Dwivedi, Ed.), Marcel Dekker, New York.
- Baton, A.E. and Tukey, J.W. 1974. The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data. *Technometrics*, 16(2): 147-185.
- Chapeau-Blondeau, F. and Monir, A. 2002. Numerical evaluation of the Lambert W function and application to generation of generalized Gaussian noise with exponent 1/2. *IEEE transactions on signal processing*, 50(9), 2160-2165.
- Cooray, K. and Ananda, M.M.A. 2008. A generalization of the half-normal distribution with applications to lifetime data, *Communications in Statistics Theory and Methods*, 37,1323-1337.
- Doğru, F.Z. and Arslan, O. 2016. Optimal B-robust estimators for the parameters of the Burr XII distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 86(6): 1133-1149.
- Doğru, F.Z. Bulut, Y.M. and Arslan, O. 2017. Optimal B-Robust estimators for the parameters of the generalized half-normal distribution. *REVSTAT-Statistical Journal*, 15(3): 445-471.
- Ghitany, M.E. Atieh, B. Nadarajah, S. 2008. Lindley distribution and its application. *Mathematics and Computers in Simulation* 78(4): 493-506.
- Ghitany, M.E. Al-Mutairi, D.K. Balakrishanan, N. Al-Enezi, L.J. 2013. Power Lindley distribution and associated inference. *Computational Statistics and Data Analysis* 64: 20-33.
- Güney, Y. Ozdemir, S. Tuaç, Y. and Arslan, O. 2020. Optimal B-Robust Estimation for the parameters of the Marshall-Olkin extended Burr XII distribution with an application to pharmacokinetics, *REVSTAT-Statistical Journal*, forthcoming paper.
- Hampel, F. R. 1971. A general definition of qualitative robustness. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(6): 1887-1896.
- Hampel, F. R. 1974. The influence curve and its role in robust estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 69(346): 383-393.

- Hampel, F.R. 1978. Optimally bounding the gross-error-sensitivity and the influence of position in factor space. Proceedings of the ASA Statistical Computing Section, ASA, Washington, D.C. 59-64.
- Hampel, F.R. Ronchetti, E.M. Rousseeuw, P.J. and Stahel, W.A. (1986). Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions, Wiley, New York.
- Holland, P.W. and Welsch, R.E. 1977. Robust Regression Using Iteratively Reweighted Least-Squares. Communications in Statistics-Theory and Methods, 6: 813-827.
- Huber, P.J. 1964. Robust estimation of a location parameter. The Annals of Mathematical Statistics, 35: 73-101.
- Huber, P.J. 1967. The Behavior of Maximum Likelihood Estimates under Nonstandard Conditions. Processing of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol 1, 221-233, Berkeley: University of California Press.
- Huber, P.J. 1973. Robust regression: Asymptotics, conjectures and Monte Carlo. The Annals of Statistics, 1(5): 799-821.
- Huber, P.J. 1981. Robust Statistics, John Wiley & Sons. New York, 1981.
- Krasker, W.S. 1980. Estimation in linear regression models with disparate data points. Econometrica, 48(6): 1333-1346.
- Krasker, W.S. and Welsch, R.E. 1982. Efficient bounded-influence regression estimation. Journal of the American Statistical Association, 77(379): 595-604.
- Lindley, D.V. 1958. Fiducial distributions and Bayes' theorem. Journal of the Royal Statistical Society 20(1): 102-107.
- Mallows, C.L. 1975. On some topics in robustness. Technical memorandum, Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, N.J.
- Maronna, R. Martin, D. and Yohai, V. 2006. Robust Statistics: Theory and Methods. Wiley, 403 p. New York.
- Rousseeuw, P.J. 1984. Least median of squares regression. Journal of the American Statistical Association, 79(388): 871-880.
- Rousseeuw, P.J. and Yohai, V. 1984. Robust regression by means of S-estimators. Robust and Nonlinear Time Series Analysis, edited by J. Franke, W. Härdle, and R.D. Martin, 26: 256-274. Lecture Notes in Statistics, Springer, New York.
- Rousseeuw, P.J. and Leroy, A.M. 1987. Robust Regression and Outlier Detection. Wiley, 329 p. New York.
- Staudte, R.G. and Sheather, S.J. 1990. Robust Estimation and Testing. Wiley, 351 p. New York.
- Tukey, J.W. 1960. A survey of sampling from contaminated distributions. Contributions to Probability and Statistics, I. Olkin, ed. Stanford University Press, Stanford.

- Tukey, J.W. 1962. The future of data analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33: 1-67.
- Victoria-Feser, M.P 1993. Robust methods for personal income distribution models, Ph.D thesis in Econometrics and Statistics, Faculty of Economic and Social Sciences, University of Geneva, Switzerland. (GE-archives).
- Victoria-Feser, M.P. and Ronchetti, E. 1994. Robust methods for personal-income distribution models, *The Canadian Journal of Statistics*, 22(3): 247-258.
- Wang, F.K. Cheng Y.F. 2010. Robust regression for estimating the Burr XII parameters with outliers. *Journal of Applied Statistics*, 37(5): 807-819.
- Yohai, V.J. 1987. High breakdown-point and high efficiency robust estimates for regression. *The Annals of Statistics*, 15(2): 642-656.



ÖZGEÇMİŞ

Berivan ÇAKMAK, 12 Mayıs 1993 tarihinde Ankara'nın Yenimahalle ilçesinde doğdu. 2011 yılında Bursa Yıldız Tekstil Lisesinden mezun oldu. Aynı yıl girdiği üniversite sınavında Ankara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümünü kazandı. 2018 yılında Giresun Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim dalında tezli yüksek lisans programına başladı. Nisan 2019 tarihinden itibaren AKBANK T.A.Ş.' de çalışmaya başladı ve halen bu kurumda çalışmaya devam etmektedir.

