



**HİPERBOLİK TİP DENKLEM İÇİN BİR
OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

Muhammet Enes Durmaz

Yüksek Lisans

Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Yusuf Koçak

2016

Her hakkı saklıdır

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

**HİPERBOLİK TİP DENKLEM İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL
PROBLEMİ**

Muhammet Enes Durmaz

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞRI

2016

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAY FORMU

HİPERBOLİK TİP DENKLEM İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Yrd. Doç. Dr. Yusuf KOÇAK danışmanlığında, Muhammet Enes DURMAZ tarafından hazırlanan bu çalışma, 14/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

İmza : 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK

İmza : 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf KOÇAK

İmza : 

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../201.. tarih ve / nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HİPERBOLİK TİP DENKLEM İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Muhammet Enes DURMAZ

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yusuf KOÇAK

Bu tezde, hiperbolik tip başlangıç-sınır değer problemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Kontrol fonksiyonu durum denkleminin katsayısında olup Sobolev uzayından seçilmiştir. Öncelikle hiperbolik kısmi türevli denklemin genelleştirilmiş çözüme sahip olduğu gösterilmiş daha sonra optimal kontrol probleminin çözümü için varlık ve teklik teoremleri verilmiştir. Son olarak optimal çözüm için bir gerek şart elde edilmiştir.

2016, 34sayfa

Anahtar Kelimeler: Optimal kontrol, Hiperbolik denklem, Sobolev uzayı

ABSTRACT

Master Thesis

AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR HYPERBOLIC TYPE EQUATION

Muhammet Enes DURMAZ

Ağrı İbrahim Çeçen University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Yusuf KOÇAK

In this thesis, An optimal control problem for a hyperbolic type of initial-boundary value problems are considered. Control function which is coefficient of the state equation are selected from Sobolev spaces. First hyperbolic partial differential has been shown to have a generalized solution then the existence and uniqueness theorems for the solution of the optimal control problem is given. Finally, a necessary condition is obtained for the optimal solution.

2016, 34pages

Keywords: Optimal control, Hyperbolic equation, Sobolev space

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen, bu konuda çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen kıymetli hocam Yrd.Doç.Dr. Yusuf KOÇAK'a, lisansüstü eğitimim boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e, tez süreci boyunca bilgisinden faydalandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Kadirhan POLAT' a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleri her zaman yanımda olan başta annem Nevin DURMAZ ve babam Muhsin DURMAZ olmak üzere amcalarım ve ailemin bütün üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Muhammet Enes DURMAZ

Haziran 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	5
3. MATERYAL ve YÖNTEM	11
3.1. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması	11
3.2. Genelleştirilmiş Türev ve Genelleştirilmiş Çözüm Kavramı	13
3.3. Hiperbolik Denklem için Genelleştirilmiş Çözüm	16
3.4. Optimal Kontrol Problemin Oluşturulması	23
3.5. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği	25
3.6. Optimal Çözüm için Gerek Şart	25
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	30
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	31
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ	34

SİMGELER DİZİNİ

Bu bölümde tezde kullanacağımız bazı sembolleri tanıtacağız:

$\forall^0 \mathbb{Z}$	Hemen hemen her yerde
$\forall$	Her
$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Öklit uzayı
H	Hilbert uzayı
B	Banach Uzayı
$\mathcal{H}$	Hamilton- Ponrtayagin fonksiyonu
$l > 0$	Verilen sayı
$T > 0$	Verilen sayı
Ω	$\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı bölge

1. GİRİŞ

Günümüzde kurulmaya çalışılan sistemlerde kazanç ve menfaatin en üst düzeyde olduğu ve aynı zamanda sistemin çalışması için gereken zamanın ve ücretin en aza indirilmesi öncelikli unsurlardır. Bu eğilim optimal kontrol unsurunu ortaya çıkarmıştır. "Optimal" kelimesi Latin kökenli olup "en iyi, en mükemmel" anlamını taşır. Günlük yaşamın her alanında karşımıza optimal kontrol problemleri çıkmaktadır. Bundan dolayı tarihi çok eskiye dayanmaktadır. Tarih boyunca karşılaşılan sorunlara çözümler aranmıştır. “Hatta bir efsaneye göre, Tyrian prensesi Dido, Kartaca şehrinin bulunduğu alanı maksimize etmek için çember yayı formunda sığır derisinden bir ip kullanır. Kartaca’nın bulunma hikâyesi hayali olsa da, yeni bir matematik kuralına esin kaynağı olmuş, varyasyon hesabı ve uzantıları ile optimal kontrol teori oluşmuştur” (Naidu 2002). Son yüzyılda teknoloji hızla geliştiğinden dolayı bazı problemler klasik varyasyon hesabı metotlarıyla ile çözülememiştir. Bunun sonucu olarak yeni metotlar geliştirilmiş ve bu sürecin sonunda modern olarak optimal kontrol probleminin temelleri atılmıştır.

Optimal kontrol verilen bir sürecin kontrol kanunlarının bulunmasıyla ilgilidir. Bir optimal kontrol problemi maliyet(gözlem) fonksiyoneli içerir. Aynı zamanda bazı fiziksel şartlar/sınırlar altında maliyet fonksiyonelinin en büyük veya en küçük değerinin bulunmasıdır. Uygulamalarında ortaya çıkan bu tür problemlere bazı örnekler şunlardır:

- Aya roket gönderilirken en az miktarda yakıt kullanımı,
- Kısa sürede kimyasal üretmek için minimum miktarda katalizör kullanımı,
- En az maliyetle yeni bir ürünün reklamını yaparak satışın istenen seviyeye getirilmesi,
- Belli kapasiteli bir iletişim kanalından maksimum düzeyde doğru bilgi iletme (Liberzon 2002).

Optimal kontrol problemini oluşturmak için kontrol edilen amacın bir matematiksel modeli, maliyet ya da gözlem fonksiyonelinin belirlenmesi, durum ve kontrollerdeki bazı fiziksel şartlarının bir ifadesi gereklidir (Naidu 2002).

Optimal kontrol teorisinin geliştirilmesinde dünyaca ünlü matematikçilerden L. S. Pontryagin ve J. L. Lions' un önemli katkıları olmuştur. Ayrıca A. G. Butkovskiy, A. İ. Yegorov, M. Goebel, R. Bellman, Yu. V. Egorov, K. A. Lur'e, F. P. Vasilyev, V. I. Plotnikov, G. T. Ahmedov, C. Sokolowski, T. Zolezzi, M. G. Bidout, A. D. İskenderov, G. Yagubov , ve diğer bilim adamlarının bu teorisinin gelişmesinde önemli rolleri vardır. Literatür tarandığında optimal kontrol sistemlerine en önemli katkı hiç şüphesiz 1956'da L. S. Pontryagin ve ortaklarının maksimum prensibini bulmaları ile olmuştur. R. Bellman ise 1957'de ayrık-zamanlı optimal kontrol sistemlerinin çözümleri bulmak için dinamik programlama tekniğini geliştirmiştir.

Optimal kontrol problemleri incelenirken karşımıza çeşitli sorular çıkar. Bu sorular,

1. Optimal kontrol probleminin iyi konulup (Well-posedness) konulmadığıdır. Bu araştırılırken, probleminin çözümünün varlığı, maliyet fonksiyonelinin alttan sınırlı olup olmadığı ve herhangi minimalleştirici dizinin minimum noktaları kümesine yakınsayıp yakınsamadığı incelenir.
2. Probleminin çözümü için gerekli ve yeterli şartlar nelerdir?
3. Probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için hangi hesaplama yöntemlerinin kullanılacağıdır.

şeklinde özetlenebilir.

Doğada karşılaştığımız süreçlerin birçoğunun matematiksel modeli adi ve kısmi türevli denklemlerle ifade edilir. Bundan dolayı optimal kontrol problemlerinde kontrol edilmek istenen süreçler diferansiyel denklem olarak karşımıza çıkar. Bunu basit bir örnekle açıklayalım:

Örnek: $t = 0$ zamanında uzay da A noktasındaki bir araç düz bir çizgi boyunca hareket eder ve bu çizgi üzerinde başka bir B noktasında $T > 0$ zamanında durur. Aracın maksimum gücü her iki yönde aynı olduğu, değişken bir kuvvet tarafından

her iki yönde çizgi boyunca hızlandırılabilir olduğunu varsayalım. Bu durum ileri ve geri itme kuvveti arasında değiştirilebilir bir jet motorunu temsil edebilir. t zamanında $f(t)$, $-1 \leq f(t) \leq 1$, mevcut itme kuvveti olmak üzere seyahat için gerekli olan minimum $T > 0$ zamanı nedir? Burada $f(t) = +1$ (sırasıyla, $f(t) = -1$) maksimum ileri (sırasıyla, geri) hızlanmaya karşılık gelir.

Bu durumun modeli, $x(t)$, t zamanında aracın konumunu, m aracın kütlesini (işlem sırasında sabit kaldığı varsayılmıştır.) ve $x_0, x_T \in R$, A ve B pozisyonuna bağlı noktalar olmak üzere matematiksel problem aşağıdaki gibi formülze edilir:

$$mx''(t) = f(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$x'(0) = 0,$$

$$x(T) = x_T$$

$$x'(T) = 0$$

$$|f(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, T]$$

şartları altında $T > 0$ ' ın minimum değerinin bulunmasıdır. Bu problem bir optimal kontrol probleminin tüm gerekli özelliklerini gösterir:

- Maliyet fonksiyonelinin minimize edilmesi (Burada, seyahat için $T > 0$ gereklidir.)
- Bir diferansiyel denklem için başlangıç değer problemi x' in durumunu belirlemek için hareketi tanımlar. (Burada, $mx'' = f$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$)
- Bir f kontrol fonksiyonu ve çeşitli kısıtlar (Burada, $x(T) = x_T$, $x'(T) = 0$, $|f| \leq 1$) sağlanması gerekir.

Durum denklemi, diferansiyel denklem ve başlangıç koşulları ile tek olarak belirlenirken f kontrolü verilen kısıtlamalar içinden serbestçe seçilebilir. Adi diferansiyel denklemlerin optimal kontrolü hava ve uzay teknolojisinin yanında farklı alanlarda da kullanılır. Bu tür problemler, aynı zamanda robotik, spor hareket

dizileri, kimyasal süreçler ve enerji santrallerinin kontrolü gibi alanlarda karşımıza çıkar. Bazı durumlarda, süreçlerin yeterince optimize edilebilmesi adi diferansiyel denklemler tarafından modellenenebilir. Ancak bunun yanında birçok sistem kısmi türevli denklemler ile gösterilir. Örneğin, ısı iletimi, difüzyon, elektromanyetik dalgalar, akışkanlar, donma süreçleri ve diğer birçok fiziksel olaylar için kısmi diferansiyel denklemler tarafından modellenenebilir (Troltsch 2010).

Mühendislikte bir çok sistem hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler ile gösterilir. Örnek olarak, su taşıma ağları, gaz boru hattı ağları ve elektrik hatları vb. verilebilir. Ayrıca trafik akışı hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler tarafından modellenenebilir. Bu modeller sistemdeki durumların kontrol hareketlerinden nasıl etkilendiğini incelemeye izin verir (Troltsch 2010).

Literatürde, bir çok yazar tarafından hiperbolik denklemler için optimal kontrol problemleri incelenmiştir. Bu çalışmalardan bazıları şunlardır:

(Beyhan 2007) tez çalışmasında hiperbolik tipli bir denklem için Lions fonksiyoneli ile optimal kontrol probleminin iyi konulmasını araştırmıştır.

(Tagiyev2012) makalesinde hiperbolik tipli bir denklem için optimal kontrol problemini incelenmiştir. Burada yer alan kontroller yüksek mertebeden türevlerin katsayısında ve durum denkleminin katsayısında yer almaktadır.

(Saraç 2012) tez çalışmasında hiperbolik bir problem için verilen iki final değerinin birini veya ikisini kullanarak sistemin başlangıç konumunun belirlenmesini araştırmıştır.

(Boli *vd.* 2012) yarı lineer hiperbolik kısmi türevli diferansiyel denkleminin bir optimal kontrol problemini göz önüne almıştır.

Biz bu çalışmada verilen bir final değerini kullanarak sistemin katsayısının $W_2^1(0, T)$ uzayında belirlenmesi problemini ele aldık. Bu çalışma kontrol fonksiyonun arandığı uzay ve problemin oluşturulması bakımından diğer çalışmalardan farklıdır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, araştırmada kullanılacak olan bazı matematiksel kavramlara (tanım, teorem, lemma) yer verilecektir.

Tanım 2.1: A , R üzerinde bir lineer uzay olsun. A üzerinde bir norm olarak adlandırılan $\| \cdot \| : A \rightarrow R$ dönüşümü, her $x, y \in A$ ve $\lambda \in R$ için,

- i. $\|x\| \geq 0$, ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)
- iii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homojenlik)

şartları sağlanıyorsa, $\| \cdot \|$ ifadesine X üzerinde bir norm, $\{X, \| \cdot \| \}$ ifadesine ise normlu uzay denir.

Tanım 2.2: $\{X, \| \cdot \| \}$ normlu bir uzay ve $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ bir dizi olsun,

- i. Dizinin $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ için bazı $x \in X$ varsa yakınsak olduğu söylenir.
- ii. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_0(\varepsilon)$ ve $m > n_0(\varepsilon)$ için $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$ varsa diziye bir Cauchy dizisi denir.

Normlu uzayda herhangi bir yakınsak dizi ayrıca bir Cauchy dizisidir.

Tanım 2.3: $\{X, \| \cdot \| \}$ normlu bir uzay X de her Cauchy dizisi yakınsıyor ise yani X de limiti varsa tam olduğu söylenir. Tam bir normlu uzay Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.4: H reel lineer uzay olsun. Eğer her $x, y, x_1, x_2 \in H$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartlar gerçekleşirse $(\cdot, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne H üzerinde skaler çarpım denir.

- i. $(x, x) \geq 0$, ve $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $(x, y) = (y, x)$
- iii. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
- iv. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

Eğer $(.,.)$, H üzerinde skaler çarpım olur ise, o zaman $\{H, (.,.)\}$ ifadesine ön Hilbert uzayı denir.

Tanım 2.5: $\{H, (.,.)\}$ bir ön Hilbert uzayı $\|u\| := \sqrt{(u,u)}$ normuna göre tam ise Hilbert uzayı denir.

Tanım 2.6: $L_2(0,l)$ Hilbert uzayı olup mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir ve elemanları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir (Lebesgue anlamında) fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır:

$$(f, g)_{L_2(0,l)} = \int_0^l f(x)g(x)dx,$$

$$\|f\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{(f, f)_{L_2(0,l)}}$$

Tanım 2.7: $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir ve elemanları $\Omega = (0,l) \times (0,L)$ bölgesinde ölçülebilir (Lebesgue anlamında) fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır:

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x, t)g(x, t)dxdt,$$

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{(f, f)_{L_2(\Omega)}}.$$

Tanım 2.8: $W_2^1(0,l)$ Sobolev uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Elemanlarının kendisi ve I. mertebeden genelleştirilmiş türevi (x 'e göre) $L_2(0,l)$ 'den uzayındandır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır:

$$(f, g)_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left[f(x)g(x) + \frac{df(x)}{dx} \frac{dg(x)}{dx} \right] dx ,$$

$$\|f\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{(f, f)_{W_2^1(0,l)}}.$$

Tanım 2.9: $W_2^1(0, l)$ uzayı $W_2^1(0, l)$ uzayının alt uzayıdır. Elemanları 0 ve l noktalarında sıfıra eşittir.

Tanım 2.10: $W_2^1(0, T)$ Sobolev uzayıdır. Aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Elemanlarının kendisi ve I. mertebeden genelleştirilmiş türevleri (t 'ye göre) $L_2(0, T)$ 'den uzayındandır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır:

$$(f, g)_{W_2^1(0, l)} = \int_0^l \left[f(t)g(t) + \frac{df(t)}{dt} \frac{dg(t)}{dt} \right] dx,$$

$$\|f\|_{W_2^1(0, l)} = \sqrt{(f, f)_{W_2^1(0, l)}}.$$

Tanım 2.11: $W_2^{1,1}(\Omega)$ Sobolev uzayıdır. Aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Elemanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle $f(x, t)$ fonksiyonlarıdır ki, $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ 'dir. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır:

$$(f, g)_{W_2^{1,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[f(x, t)g(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \right] dxdt$$

$$\|f\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} = \sqrt{(f, f)_{W_2^{1,1}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.12: $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayıdır. Elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Tanım 2.13: $\{x_k\}$ dizisi B Banach uzayına ait olsun. Eğer $\forall c \in B^*$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle c, x_k \rangle = \langle c, x \rangle$$

şartı sağlanıyorsa bu taktirde $\{x_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 2.14: $\{x_k\}$, H Hilbert uzayına ait bir dizi olsun. Eğer $\forall y \in H$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y)_H = (x, y)_H$$

oluyorsa $\{x_k\}$ dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsıyordur denir.

Tanım 2.15: $\{x_k\}$, $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayına ait bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$$

oluyorsa $\{x_k\}$ dizisi $u \in X$ elemanına kuvvetli yakınsar denir.

Tanım 2.16: V , lineer X uzayının bir alt kümesi olmak üzere eğer $u, v \in V$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha u + (1 - \alpha)v \in V$ ise, V kümesine X kümesinde konveks küme denir.

Tanım 2.17: $C^k(\Omega)$, Ω' da k . mertebeye kadar sürekli türevlenebilir fonksiyonların kümesidir.

Tanım 2.18: $K \subset \mathbb{R}$ olmak üzere X, K üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $J: X \rightarrow K$ operatörüne fonksiyonel denir.

Tanım 2.19: f konveks bir X kümesi üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f 'ye konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.20: $(X, \| \cdot \|)$ normlu bir uzay olsun. $0 < \varepsilon \leq 2$ şartını sağlayan her ε sayısı için eğer $x, y \in X$ için $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ iken $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa; $(X, \| \cdot \|)$ uzayına düzgün konveks uzay denir. $1 < p < \infty$ için $L_p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks uzaydır.

Tanım 2.21: $(X, \| \cdot \|)$ normlu bir uzay ve $A \subset X$ verilsin. A kümesindeki her dizinin A 'da bir limit noktası varsa A kümesine X 'de kompakt küme denir.

Tanım 2.22: X normlu uzayında bir A kümesi verilsin. Eğer A daki bütün yakınsak dizilerin yakınsadığı nokta A kümesinde ise A kümesine X 'de kapalı küme denir.

Tanım 2.23: X Banach uzayı olmak üzere ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\{x_n\} \in A$ dizisi bir x

elemanına zayıf yakınsadığında $x \in A$ ise A kümesine X 'de zayıf kapalıdır denir.

Tanım 2.24: X, B Banach uzayının bir kümesi olsun. Eğer $\forall \{x_k\} \in X$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu takdirde X kümesine B 'de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.25: X , bir normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer X ' in her bir x elemanı, A 'nın elemanlarının bir dizisinin limiti ise A ya X ' de yoğunur denir.

Tanım 2.26: B Banach uzayı olmak üzere $J(v)$ fonksiyoneli $V \subset B$ kümesinde tanımlansın. Eğer $v \in V$ noktasına kuvvetli yakınsayan $\{v_k\} \in V$ dizisi için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k) \geq J(v)$$

şartı sağlanıyorsa $J(v)$ fonksiyoneline v noktasında alttan yarı sürekli fonksiyonel denir (Vasilyev 1981).

Tanım 2.27: B Banach uzayı olmak üzere $J(v)$ fonksiyoneli $V \subset B$ kümesinde tanımlansın. Eğer $u \in V$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k) \geq J(v)$$

şartı sağlanıyorsa $J(v)$ fonksiyoneli v noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Tanım 2.28: B Banach uzayı, $J(v)$ fonksiyoneli ise v noktasının herhangi bir $\omega(u, \gamma) = \{v: v \in B, \|v - u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlansın. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \rightarrow 0} \frac{o(h, v)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(v) = J(v + h) - J(v) = \langle J'(v), h \rangle_B + o(h, v)$ şartını sağlayan $J'(v) \in B^*$ elemanı varsa bu taktirde $J(v)$ fonksiyoneli Fréchet anlamında diferansiyellenebilirdir denir.

Teorem 2.1: V, B Banach uzayında konveks alt küme, $J(v)$ fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonel ve

$$V_* = \{v \in V: J(v) = J_* = \inf J(v)\}$$

kümesi $J(v)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu taktirde $\forall v_* \in V_*$ ve $\forall v \in V$ için $\langle J'(v_*), v - v_* \rangle \geq 0$ şartı sağlanır (Vasilyev 1981).

Teorem 2.2 (Weierstrass Teoremi): V, B Banach uzayında zayıf kompakt küme olmak üzere $J(v)$ fonksiyoneli bu kümede tanımlı sonlu değerlere sahip aynı zamanda alttan yarı sürekli fonksiyonel olsun. Bu taktirde $J_* = \inf J(v) > -\infty$ 'dir. $V_* = \{u \in V: J(v) = J_*\} \neq \emptyset$ zayıf kompakttır ve V kümesindeki herhangi minimalleştirici dizi minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar (Vasilyev 1981).

Teorem 2.3 (Goebel): $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, V kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi olmak üzere $J(v)$ fonksiyoneli V kümesinde alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu taktirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun G alt kümesi vardır öyle ki, $\forall \omega \in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - \omega\|_{\tilde{X}}^\beta$$

fonksiyoneli V kümesi üzerinde minimum değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli minimum değerini V kümesi üzerinde bir tek noktada alır (Goebel 1979).

Lemma 2.1 (Cauchy- Bunjakovski- Schwarz Eşitsizliği): $f, g \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left| \int_{\Omega} f g dx d\tau \right| \leq \left(\int |f|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzhenskaya 1973).

3. MATERİYAL ve YÖNTEM

3.1. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

İkinci dereceden bir lineer kısmi diferansiyel denklemi n -boyutlu bir Q bölgesinde

$$LU = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)U_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x)U_{x_i} + a(x) + v(t)U = f(x) \quad (3.1.1)$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$ katsayıları reel değerli ve (3.1.1) denkleminin çözümleri $C^2(Q)$ ya ait olduğu varsayılır.

L operatörünün yüksek türevlerinin katsayılarından oluşan $A(x) = \|a_{i,j}(x)\|$ matrisi simetrik olarak kabul edilebilir.

$$\sum a_{i,j}U_{x_i x_j} = \sum a'_{i,j}U_{x_i x_j} + \sum a''_{i,j}U_{x_i x_j}$$

dir. Burada

$$a'_{i,j} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), a''_{i,j} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

dir. $U_{x_i x_j} = U_{x_j x_i}$ olduğundan,

$$\sum a''_{i,j}U_{x_i x_j} \equiv 0$$

olur. $\|a_{i,j}(x)\|$ simetrik olduğundan,

$$\sum a_{i,j}U_{x_i x_j} \equiv \sum a'_{i,j}U_{x_i x_j}$$

dir.

x^0 , Q ' nun keyfi bir noktası ve $\lambda_1(x^0), \dots, \lambda_n(x^0)$, $A(x^0)$ matrisinin özdeğerleri olsun. Negatif özdeğerler $n_- = n_-(x^0)$ ile pozitif özdeğerler sayısı

$n_+ = n_+(x^0)$ ile ve sıfır özdeğerler sayısı $n_0 = n_0(x^0)$ ile gösterilirken, $n = n_+ + n_- + n_0$ gösterilir.

Eğer $n_+ = n$ veya $n_- = n$ ise (3.1.1) denkleminin x^0 noktasında eliptik tip bir denklem (x^0 noktasında eliptik) denir. Bu denklem $E, E \subset Q$, kümesinin her noktasında eliptik ise E kümesinde eliptiktir denir. $\mathbb{R}^n$ de eliptik denkleme bir örnek;

$$\Delta U = f,$$

Poisson denklemdir. Burada

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Laplace operatörüdür.

Eğer $n_+ = n - 1$ ve $n_- = 1$ veya $n_+ = 1$ ve $n_- = n - 1$ ise (3.1.1) denklemi $x^0 \in Q$ noktasında hiperboliktir denir (x^0 noktasında hiperbolik tip bir denklem). Denklem $E, E \subset Q$, kümesinin her noktasında hiperbolik ise o zaman E de hiperboliktir denir.

$x_1, \dots, x_n$ değişkenler olmak üzere $\mathbb{R}^n$ uzayının tamamında hiperbolik denklemin bir örneği;

$$U_{x_1 x_1} + \dots + U_{x_{n-1} x_{n-1}} - U_{x_n x_n} = f$$

olan dalga denklemdir.

(3.1.1) denklemi $n_0 = 0$ ve $1 < n_+ < n - 1$ ise x^0 noktasında ultra hiperbolik olarak adlandırılır. (3.1.1), E nin her noktasında ultra hiperbolik ise $E, E \subset Q$, de ultra hiperboliktir.

$$U_{x_1 x_1} + U_{x_2 x_2} - U_{x_3 x_3} - U_{x_4 x_4} = f(x)$$

denklemi $\mathbb{R}^4$ ün tamamında ultra hiperboliktir.

(3.1.1) denklemi de $n_0 > 0$ ise $x^0 \in Q$ noktasında paraboliktir (parabolik tip bir denklem) denir. (3.1.1) denklemi E nin her noktasında parabolik ise $E \subset Q$ kümesinde paraboliktir denir. Isı denklemi

$$U_{x_1x_1} + \dots + U_{x_{n-1}x_{n-1}} - U_{x_n} = f(x)$$

$\mathbb{R}^n$ uzayının tamamında parabolik olan bir denklem örneğidir.

Bir denklem bir bölgenin tüm noktalarında aynı tip olmasına gerek yoktur. Örneğin; Chaplignin denklemi ($n = 2$) için

$$U_{x_1x_1} + T(x_1)U_{x_2x_2} = f(x)$$

$x_1 > 0$, $T(x_1) > 0$ durumunda denklem eliptik, $x_1 < 0$, $T(x_1) < 0$ durumunda denklem hiperbolik ve $x_1 = 0$, $T(x_1) = 0$ durumunda denklem paraboliktir (Mikailov 1983).

3.2. Genelleştirilmiş Türev ve Genelleştirilmiş Çözüm Kavramı

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de integrallenebilir tüm yerel fonksiyonların kümesi yani Ω nın her kompakt alt kümesi üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olan tüm fonksiyonların kümesi $L^1_{loc}(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.1: $h(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve bazı çok indeksli a verilsin. Eğer $q(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonu

$$\int_{\Omega} h(x) D^a k(x) dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} q(x) k(x) dx, \quad \forall k \in C_0^\infty(\Omega)$$

eşitliğini sağlarsa, o zaman $q(x)$ ye $h(x)$ 'in zayıf türevi denir (Troltsch 2010).

Örnek 3.2.1: $\Omega = (-1,1)$ de $h(x) = |x|$ fonksiyonunun genelleştirilmiş türevinin

$$h'(x) := q(x) = \text{sgn}x = \begin{cases} -1, & x \in (-1,0) \\ 0, & x = 0 \\ +1, & x \in (0,1) \end{cases}$$

olduğunu gösterelim.

Her $k \in C_0^\infty(-1,1)$ için

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |x|k'(x)dx &= \int_{-1}^0 (-x)k'(x)dx + \int_0^1 xk'(x)dx \\ &= -xk(x)|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (-1)k(x)dx + xk(x)|_0^1 - \int_0^1 (+1)k(x)dx \\ &= -\int_{-1}^1 q(x)k(x)dx\end{aligned}$$

elde edilir (Troltzsch 2010).

Şimdi genelleştirilmiş çözüm kavramını inceleyelim. Aşağıdaki başlangıç değer problemini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U|_{t=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{t=0} = F(x)\end{aligned}$$

Bu denklemin çözümünün aşağıdaki fonksiyon olduğunu biliyoruz.

$$U(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z)dz$$

Yukarıda verilen çözüm başlangıç değer problemi için klasik çözümdür. Burada $F(x)$ 'in ikinci türeve kadar sürekli $f(x)$ 'in ise birinci türeve kadar sürekli olduğunu kabul ederiz. Ancak bu tür fiziksel problemlerde her zaman başlangıç koşullarına yeterince uygun ve düzgün çözümler var olmayabilir.

Eğer başlangıç verileri yeterince sürekli türevlere sahip değilse problemin diferansiyellenebilir çözümü bulunamaz. Böyle durumlarda "*genelleştirilmiş çözümler*" adı verilen çözümler kullanılır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için genelleştirilmiş çözümler teorisi S. L. Sobolev tarafından 1930'lu yıllarda incelenmiştir. Böyle çözümler klasik çözümler dizilerinin sınırı olarak tanımlanabilir ve integrasyon bağlantılarda kullanılabilir.

Denkleminin başlangıç koşullarına uygun $U(x, t)$ fonksiyonuna ki bu fonksiyon

$$U_n|_{t=0} = f_n(x), \quad \frac{\partial U_n}{\partial x} \Big|_{t=0} = F_n(x)$$

başlangıç koşullarına uygun $U_n(x, t)$ düzgün sürekli çözümler dizisinin bir sınırıdır.

Eğer ikinci dereceye kadar sürekli türevlere sahip olan $f_n(x)$ fonksiyonlar dizisi $f(x)$ ' e düzgün yakınsıyorsa ve aynı zamanda birinci dereceye kadar sürekli türevlere sahip olan $f_n(x)$ fonksiyonlar dizisi $f(x)$ ' e düzgün yakınsıyor ise $U(x, t)$ fonksiyonuna başlangıç değer probleminin genelleştirilmiş çözümü denir.

Genelleştirilmiş çözümü kullanmamızın önemli sebeplerinden biri şudur: Başlangıç değer probleminin klasik çözümünün var olması için, verilen $f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonları düzgün olmaları için pek sert koşullar sağlamak zorunda, ancak genelleştirilmiş çözümün var olması için bu fonksiyonlar düzgün olmak zorunda değildir. İkincisi ise belirli fizik problemlerinde $f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonları bize yaklaşık olarak verilir. Dolayısıyla yukarıda verilen çözüm fonksiyonu $U(x, t)$ de gerçek çözüme yalnızca bir yaklaşımdır.

Bu yaklaşımın klasik çözüm veya genelleştirilmiş çözüm olması hiç önemli değildir. Önemli olan bu yaklaşımın gerçek çözüme yakın olması için $f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonlarının gerçek $U(x, 0)$ ve $\frac{\partial U(x, 0)}{\partial x}$ başlangıç koşullarına yeterince yakın olmasıdır (Garibanoğlu 1995).

3.3. Hiperbolik Denklem için Genelleştirilmiş Çözüm

$$\begin{aligned} LU &= U_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x,t) U_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x,t) U_{x_i} + a(x,t) U \\ &= f(x,t) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Bu bölümde yukarıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümünü inceleyeceğiz. Yani, $Q_t = \Omega \times (0, T)$ ’ de $U(x, t)$ fonksiyonunu bulacağız. Burada Ω , R^n de keyfi bir sınırlı bölgedir. Aşağıdaki başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

$$LU = f(x, t) \in Q_T \quad (3.3.2)$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad U_t|_{t=0} = U(x) \quad x \in \Omega \quad (3.3.3)$$

$$U|_{S_T} = 0, \quad (x, t) \in S_T = \partial\Omega \times [0, T]. \quad (3.3.4)$$

Burada

$$f \in L_2(Q_T), \varphi \in W_{2,0}^1(\Omega), U \in L_2(\Omega) \quad (3.3.5)$$

ve

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad v\xi^2 \leq a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \leq \mu\xi^2, \quad v > 0 \quad (3.3.6)$$

$$\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, a_i, c_1 \right| \leq \mu_1, \quad \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right| \leq \mu'$$

şartları sağlansın.

Tanım 3.3.1: Eğer $U(x, t) \overset{0}{W}_2^1(Q)$ ’ye ait $U(x, 0) = \varphi$ ise ve her $\sigma \in \overset{0}{W}_2^1(Q_T)$ için

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_T} \left(-U_t \sigma_t + a_{ij} U_{x_j} \sigma_{x_i} + a_i U_{x_i} \sigma + a U \sigma \right) dx dt - \int_{\Omega} U \sigma(x, 0) dx \\
& = \int_{Q_T} f \sigma dx dt
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

eşitliği sağlanıyorsa (3.3.2) problemini $W_2^1(Q_T)$ uzayından olan $U(x, t)$ fonksiyonuna bir genelleştirilmiş çözüm diyeceğiz. Şimdi çözümün varlığı ve tekliği için aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 3.3.1 (Çözümün Varlığı): (3.3.2) denkleminin katsayıları (3.3.5) şartlarını sağlasın ve

$$\max_{Q_T} \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, a_i, c_1 \right| \leq \mu_1$$

olsun. O halde (3.3.2) problemi $W_2^1(Q_T)$ uzayına ait $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in \overset{0}{W}_2^1(Q_T)$, $U \in L_2(\Omega)$ için genelleştirilmiş çözüme sahiptir.

İspat: İspat için Galerkin metodunu kullanalım. $\{\varphi_k(x)\}$, $(\varphi_k, \varphi_1) = \delta_k^l$ ile $\overset{0}{W}_2^1(Q_T)$ uzayında temel sistem olsun.

$$U^N = \sum_{k=1}^N C_k^N(t) \varphi_k(x)$$

formunda bir yaklaşık $U^N(x, t)$ çözümünü arıyoruz. $U^N(x, t)$, (3.3.2)-(3.3.4) probleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2 U^N}{\partial t^2}, \varphi_l \right) + \int_{\Omega} \left(a_{ij} U_{x_j}^N \varphi_{l x_i} + a_i U_{x_i}^N \varphi_l + a U^N \varphi_l \right) dx \\
& = (f, \varphi_l) \quad l = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$$\frac{d}{dt} C_k^N(t)|_{t=0} = (U, \varphi_k), \quad C_k^N(0) = \alpha_k^N \quad (3.3.9)$$

elde edilir. Burada α_k^N ,

$$\varphi^N(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^N \varphi_k(x)$$

toplamında katsayılarıdır.

$\varphi^N(x)$, $N \rightarrow \infty$, $W_2^1(\Omega)$ 'nin normunda $\varphi(x)$ 'in yaklaşımlarıdır. (3.3.8) denklemini ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemidir. Sistemin katsayıları sınırlı fonksiyonlar ve $f_c \equiv (f(.,.), \varphi_l(.)) \in L_1(0, T)$ serbest terimleridir. (3.3.8) denkleminin her iki tarafını

$$\frac{d}{dt} C_l^N(t)$$

ile çarpıp $l = 0$ dan $l = N$ ye kadar toplarsak

$$\left(\frac{\partial^2 U^N}{\partial t^2}, \frac{\partial U^N}{\partial t} \right) + \int_{\Omega} \left(a_{ij} U_{x_j}^N U_{tx_i}^N + a_i U_{x_i}^N U_t^N + a U^N U_t^N \right) dx = (f, U_t^n)$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{\Omega_t} [(U^N)^2 + (U_x^N)^2 + (U_t^N)^2] dx \leq ct \in [0, T] \quad (3.3.10)$$

ve

$$\|U^N\|_{W_2^1(Q_T)} \leq c_1 \quad (3.3.11)$$

elde edilir.

(3.3.11) eşitsizliğinden faydalananarak, $U \in \overset{0}{W}_2^1(Q_T)$ elemanına $W_2^1(Q_T)$ uzayında zayıf yakınsayan ($t \in [0, T]$ 'de $L_2(\Omega)$ normunda) bir $\{U^N\}$, $N = 1, 2, \dots$ alt dizisi seçebiliriz. (yani U^N, U_t^N ve $U_{x_i}^N L_2(\Omega_t)$ de zayıf yakınsar.)

$U(x, t)$ fonksiyonunun (3.3.2) probleminin bir genelleştirilmiş çözümü olduğunu göstereceğiz. Başlangıç şartı

$$U|_{t=0} = \varphi(x),$$

$U^N(x, t)$ ' nin $L_2(\Omega)$ da $U(x, t)$ ye yakınsamasından ve ($U^N(x, 0) \rightarrow \varphi(x), L_2(\Omega)$ da) sağlanır. Şimdi (3.3.7) eşitliliğinin sağladığını gösterelim.

Bu eşitliğin her iki tarafını

$$d_l(t) \in W_2^1(0, T), \quad d(t) = 0$$

ile çarpalım. $l = 1$ den $l = N$ ye kadar toplayıp 0 ' dan T ' ye integralleyelim. Sonra U^N den $\frac{\partial}{\partial t}$ yi

$$\sigma = \sum_{l=1}^N d_l(t) \varphi(x)$$

ya taşıyarak ilk terime kısmi integrasyon uygularsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(-U_t^N \sigma_t + a_{ij} U_{x_j}^N \sigma_{x_i} + a_i U_{x_i}^N \sigma + a U^N \sigma \right) dx dt - \int_{\Omega} U_t^N \sigma|_{t=0} dx \\ = \int_{\Omega_T} f \sigma dx dt \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Bu eşitlikte limite geçerse (3.3.7) eşitliğini elde ederiz. σ şeklindeki tüm fonksiyonları R_N şeklinde gösterelim. $\bigcup_{N=1}^{\infty} R_N$ kümesi $\overset{0}{W}_2^1(Q_T)$ kümesinde yoğun olduğundan (3.3.7) her $\sigma \in \overset{0}{W}_2^1(Q_T)$ için sağlanır.

Böylece $U(x, t)$ ' nin $W_2^1(Q_T)$ uzayında genelleştirilmiş çözüm olduğunu gösterdik. (3.3.11) eşitsizliği $U(x, t)$ çözümünü için sağlanır. Bu $U(x, t)$ çözümü içinde aşağıdaki kestirim aynı işlemlerle elde edilir.

$$\|U\|_{W_2^1(Q_T)} \leq c(T) \left(\|\varphi\|_{W_2^1(Q_T)} + \|U\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} \right)$$

teorem ispatlandı (Ladyzhenskaya 1973).

Şimdi çözümün tekliğini ispatlayalım.

Teorem 3.3.2 (Çözümün Tekliği): (3.3.2) denkleminin katsayıları (3.3.5) şartlarını sağlasın ve

$$\max_{Q_T} \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, a_i, c_1 \right| \leq \mu_1$$

olsun. O halde (3.3.2) problemi $W_2^1(Q_T)$ uzayına ait bir tek çözüme sahiptir.

İspat: (3.3.2) denkleminin U_1 ve U_2 şeklinde iki genelleştirilmiş çözümü olsun. $U = U_1 - U_2 \in W_{2,0}^1(Q_T)$ farkı $t = 0$ için ve $f = U = 0$ için (3.3.7) eşitliğini sağlar. Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$\sigma(x, t) = \begin{cases} 0, & b \leq t \leq T \\ \int_b^t U(x, \tau) d\tau, & 0 \leq t \leq b \end{cases} \quad (3.3.13)$$

genelleştirilmiş türevin tanımından $\sigma(x, t)$ ' nin tanımından $\widehat{W}_{2,0}^1(Q_T)$ sınıfından olduğunu ve $\sigma_{tx} = U_x$ genelleştirilmiş türevine sahip olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz. Dahası σ , σ_x ve U elamanları $t \in [0, T]$ üzerinde sürekli bağımlı $L_2(\Omega)$ uzayının elamanlarıdır. (3.3.7) denkleminde, (3.3.13) den yararlanılarak $U = \sigma_t$ alırsak $f = U = 0$ ile aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\int_{Q_b} \left[\sigma_t \sigma_{tt} - a_{ij} \sigma_{tx_j} \sigma_{x_i} - a_i \sigma_{tx_i} \sigma - a \sigma_t \sigma \right] dx dt \quad (3.3.14)$$

Bu denklemde ilk üç terimi integrallersek $\sigma_t|_{t=0} = U|_{t=0} = 0$ ve $\sigma_x|_{t=b} = 0$ için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\sigma_t^2(x, b) + a_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} |_{t=0} \right] dx \\ &= - \int_{Q_b} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} + a_i \sigma_t \sigma_{x_i} + \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - a \right) \sigma + \sigma \right] dx dt \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

teoremin şartından

$$\int_{\Omega} \left[\sigma_t^2(x, b) + a_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} |_{t=0} \right] dx \leq c \int_{Q_b} (\sigma_x^2 + \sigma_t^2 + \sigma^2) dx dt$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi

$$V(x, t) = \int_t^0 U_{x_i}(x, \tau) d\tau \equiv V_i(x, t)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (3.3.13)' yi kullanırsak

$$\sigma_{x_i}(x, t) = \int_b^t U_{x_i}(x, \tau) d\tau = V_i(x, b) - V_i(x, t), \quad t \leq b$$

ve $\forall x \in \Omega$ için,

$$\int_0^b \sigma^2 dt = \int_0^b \left(\int_0^t U d\tau \right)^2 dt \leq \int_0^b (b-t) \int_t^b U^2 d\tau dt \leq b^2 \int_0^b U^2 d\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.3.15) eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_{\Omega} [U^2(x, b) + a_{ij}(x, 0) V_i(x, b) V_j(x, b)] dx \quad (3.3.16)$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \int_{Q_b} \left[\sum_{i=1}^n (V_i(x, b) - V_i(x, t))^2 + (1 + b^2)U^2 \right] dx dt \\
&\leq 2cb \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n V_i^2(x, b) dx + c \int_{Q_b} \left[2 \sum_{i=1}^n V_i^2 + (1 + b^2)U^2 \right] dx dt
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} U^2(x, b) dx + (v - 2bc) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n V_i^2(x, b) dx \\
&\leq c_1 \int_{Q_b} \left(\sum_{i=1}^n V_i + U^2 \right) dx dt
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

elde edilir. Burada

$$c_1 = c(2 + b^2)$$

dir. $b \in [0, v/4c]$ için

$$v - 2bc \geq \frac{v}{2},$$

ve

$$U(x, b) = 0, V_i(x, b) = 0$$

olur. $t \in [v/4c, v/2c]$ için

$$U(x, t) = 0$$

olur. Sonuç olarak

$$U \equiv U_1 - U_2 = 0$$

Buradan $U_1 = U_2$ olduğu elde edilir. Yani çözüm tektir (Ladyzhenskaya 1973).

3.4. Optimal Kontrol Problemin Oluşturulması

Hiperbolik tipli denklemler için optimal kontrol problemleri mekanik sistemlerin titreşimleri ve çeşitli dalga süreçlerinde ortaya çıkar. Bu problemler de kontroller başlangıç koşulu, sınır koşulu, durum denkleminin katsayıları veya denklemin sağ tarafından seçilirler. Bu türde problemler literatürde birçok bilim adamı tarafından örneğin (Lions 1971; Tagiyev 2012; Saraç 2012; Beyhan 2012; Gugat 2015) çalışmalarında incelenmiştir. Bu tez çalışmasında

$$J_\alpha(v) = \int_0^l |U(x, T; v) - y(x)|^2 dx + \alpha \|v - w\|_{W_2^1(0, T)}^2 \quad (3.4.1)$$

fonksiyoneli

$$V \equiv \left\{ v = v(t) : v \in W_2^1(0, T), |v(t)| \leq b_0, \left| \frac{dv(t)}{dt} \right| \leq b_1, \forall t \in [0, T] \right\}$$

kümesinde

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a(x)U + v(t)U = f(x, t), (x, t) \in \Omega \quad (3.4.2)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = h(x), \quad x \in (0, l) \quad (3.4.3)$$

$$\frac{\partial U(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial U(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T) \quad (3.4.4)$$

şartları altında minimum yapacak olan $v(t)$ fonksiyonu belirlemek istiyoruz. Yani amacımız

$$\inf_{v \in V} J_\alpha(v) \quad (3.4.5)$$

problemini çözmektir.

Burada $x \in [0, l]$, $t \in [0, T]$, $\Omega = (0, l) \times (0, T)$. $a_0 > 0, l > 0$ ve $T > 0$ verilen sayılardır.

(3.4.2) denklemi hiperbolik kısmi türevli denklemdir. Bu denklem homojen l uzunluğunda olan bir telin titreşim işlemini verir. $f(x, t)$ birim kütleye uygulanan kuvvetin yoğunluğudur. $U(x, t)$, t zamanında x noktasındaki telin konumunu verir. $v(t)$ katsayısı control fonksiyonudur ve $W_2^1(0, T)$ uzayına aittir. $\varphi(x)$ fonksiyonu $t = 0$ zamanında telin başlangıç durumunu verir ve h fonksiyonu $t = 0$ zamanında sistemin başlangıç hızını verir. Ayrıca $\alpha \geq 0$ düzgünleştirme parametresi, $a(x)$ ölçülebilir sınırlı fonksiyon olup $y(x) \in L_2(0, l)$, $w \in W_2^1(0, T)$ dir.

Öncelikle (3.4.2)-(3.4.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini inceleyelim.

Tanım 3.4.1: $\forall \zeta \in W_2^{1,1}(\Omega)$ için

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + a_0 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + a(x)U\zeta + v(t)U\zeta \right) dxdt \\ = \int_0^l U\zeta(x, 0)dx + \int_{\Omega} f\zeta dxdt \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

integral özdeşliğini ve $U(x, 0) = \varphi(x)$ başlangıç şartını sağlayan $U \in W_2^{1,1}(\Omega)$ fonksiyonuna (3.4.2)-(3.4.4) probleminin genelleştirilmiş çözümü denir. (3.4.2) denkleminin her iki yanını $\zeta(x, t)$ test fonksiyonu ile çarpıp Ω bölgesinde integrallenir ve kısmi integrasyon kullanılırsa (3.4.6) eşitliği kolaylıkla elde edilir.

Ayrıca (3.4.6) integral eşitliğini kullanarak bu $U(x, t)$ çözümün var olması için $\varphi \in W_2^1(0, l)$, $h(x) \in L_2(0, l)$, $f \in L_2(\Omega)$ seçebiliriz.

Şimdi (3.4.2)-(3.4.4) probleminin genelleştirilmiş çözümü için varlık ve teklik teoremini verelim. (3.4.2)-(3.4.4) bilindiği gibi ikinci çeşit sınır değer problemidir. Genel halde birinci çeşit sınır değer probleminin çözümü için verilen Teorem 3.3.1. ve Teorem 3.3.2. yi kullanırsak (3.4.2)-(3.4.4) probleminin çözümü için aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.4.1: $\varphi \in W_2^1(0, l)$, $h(x) \in L_2(0, l)$ ve $f \in L_2(\Omega)$ koşullarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda her $v \in V$ için (3.4.2)-(3.4.4) başlangıç sınır değer probleminin genelleştirilmiş bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir:

$$\|U\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \leq c_1 \left(\|\varphi\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} + \|h\|_{L_2(0,l)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \right) \quad (3.4.7)$$

3.5. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde, $a \geq 0$ ve $a > 0$ için (3.4.5) optimal kontrol probleminin varlığı ve tekliğini inceleyeceğiz.

Teorem 3.5.1: Teorem 3.4.1' in şartları sağlansın. Bu taktirde (3.4.5) optimal kontrol probleminin $a \geq 0$ için en az bir çözümü vardır.

İspat: (İsgenderov vd. 2002; Beyhan 2007) çalışmalarından V kümesi ve $J_a(v)$ fonksiyonelinin Weierstrass teoreminin (Teorem 2.2.) şartlarını sağladığı gösterilebilir, Teorem 3.5.1'nin geçerli olduğunu kolaylıkla ispatlanabilir.

Teorem 3.5.1. bize $a \geq 0$ için çözümün varlığını garanti eder. Ancak tekliği garanti etmez.

Teorem 3.5.2: $W_2^1(0, T)$ uzayında her yerde yoğun öyle bir G kümesi vardır ki $\forall w \in G$ ve $a > 0$ (3.4.6) optimal kontrol problem tek bir çözüme sahiptir.

İspat: $W_2^1(0, T)$ uzayı (Yasida 1980; Tagiyev 2012) çalışmalarından düzgün konveks uzay, V kümesi ise bu uzayda kapalı sınırlı kümedir. $J_a(v)$ fonksiyonelinin ise bu kümede sonlu değerlere sahip ve alttan yarı sürekli olduğunu (Beyhan 2007) çalışmasından yararlanarak elde edilir. Bu halde Goebel teoreminin (Teorem 2.3.) şartları sağlanmış olur. Böylece Teorem 3.5.2. ispatlandı.

3.6. Optimal Çözüm için Gerek Şart

Bu alt bölüm (Koçak ve Dokuyucu 2016) çalışmasından yararlanarak oluşturulmuştur. Burada fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğunu göstererek

problemin çözümü için bir gerek şart elde edilecektir. Bunun için öncelikle adjoint problem tanımlayacağız.

Lagrange fonksiyonu yardımı ile

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + a(x)Z + v(t)Z = 2[U(x, T: v) - y(x)], x \in (0, l) \quad (3.6.1)$$

$$Z(x, t) = 0, \frac{\partial Z(x, T)}{\partial t} = 0, x \in (0, l) \quad (3.6.2)$$

$$\frac{\partial Z(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial Z(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T). \quad (3.6.3)$$

Adjoint problemini oluşturalım. Bu adjoint problem (3.4.2)-(3.4.4) problem ile aynı tiptir. Bu problemin genelleştirilmiş çözümü $Z \in W_2^{1,1}(\Omega)$ fonksiyonudur. Şimdi optimal kontrol problem için aşağıdaki Hamilton Pontryagin fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\mathcal{H}(v(t), \eta(t), U(x, t), Z(x, t)) = \eta(t)v(t) + \alpha(v(t) - w(t))^2. \quad (3.6.4)$$

Burada $\eta(t)$ fonksiyonu

$$\eta'' - \eta = \int_0^T UZ dx, \eta'(0) = \eta'(T) = 0$$

problemin çözümüdür.

Teorem 3.6.1: Teorem 3.3.1. in şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $w \in W_2^1(0, T)$ verilen eleman olsun. Bu durumda $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesinde Fréchet türevi vardır ve bu türev için aşağıdaki formül geçerlidir:

$$J'_\alpha(v) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} \quad (3.6.5)$$

Burada $\mathcal{H}$, (3.6.4) ile tanımlıdır.

İspat: $J_\alpha(v)$ fonksiyonunun artışını bulalım. $v + \Delta v \in V$ için fonksiyonelin artışı

$$\begin{aligned} J_\alpha(v) &= J_\alpha(v + \Delta v) - J(v) = 2 \int_0^l |U(x, T; v) - y(x)| \Delta U dx \\ &+ 2\alpha \int_0^T [(v - w)\Delta v + (v_t - w_t)\Delta v_t] dt + ||\Delta U||_{L_2(0,L)}^2 + ||\Delta v||_{W_2^1(0,T)}^2 \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\Delta U(x, T)$ fonksiyonu $v + \Delta v \in V$ artışına karşılık gelen aşağıdaki fark probleminin çözümüdür.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta U}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 \Delta U}{\partial x^2} + a(x)\Delta U + (v + \Delta v)\Delta U &= -\Delta v U \\ \Delta U(x, 0) = 0, \frac{\partial \Delta U(x, 0)}{\partial t} &= 0, \quad x \in (0, l) \\ \frac{\partial \Delta U(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \Delta U(l, t)}{\partial x} &= 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Bazı temel işlemleri yaparak;

$$2 \int_0^l |U(x, T) - y(x)| \Delta U dx = \int_\Omega \Delta v \Delta U Z dx dt + \int_\Omega \Delta v U Z dx dt$$

elde edilir. Bu eşitsizliği kullanarak (3.6.6) formülünde yerine yazarsak fonksiyonelin artışı için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\Delta J_\alpha = \int_\Omega \Delta v U Z dx dt + 2\alpha \int_0^T [(v - w)v + (v_t - w_t)\Delta v_t] dt + R.$$

Burada R , aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$R = ||\Delta U||_{L_2(0,L)}^2 + ||\Delta v||_{W_2^1(0,T)}^2 + \int_\Omega \Delta v \Delta U Z dx dt.$$

Ayrıca R aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$R \leq c_2 \|\Delta v\|_{W_2^1(0,T)}^2. \quad (3.6.7)$$

Sonuç olarak, fonksiyonelin artışı aşağıdaki eşitsizlik ile tanımlanır.

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_0^T \left(\int_0^l UZ dx + 2\alpha[(v-w) + (v_t - w_t)] \right) \Delta v(t) dt + o(\|\Delta v\|_{W_2^1(0,T)}). \quad (3.6.8)$$

(Subaşı ve Durur 2014) çalışması kullanarak $W_2^1(0,T)$ uzayında iç çarpım elde etmek için aşağıdaki adjoint problemi tanımlayalım.

$$\eta'' - \eta = \int_0^l UZ dx, \quad \eta'(0) = \eta'(T) = 0.$$

Buradan yukarıdaki ifade (3.6.8) eşitliğinde dikkate alınırsa fonksiyonelin artışı

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_0^T (\eta(t)\Delta v(t) + \eta'(t)\Delta v'(t) + 2\alpha[(v-w) + (v_t - w_t)]\Delta v(t)) dt + o(\|\Delta v\|_{W_2^1(0,T)})$$

şeklinde yazılır. Burada Fréchet türevinin tanımı kullanırsak

$$J'_\alpha(v) = \eta + 2\alpha(v-w) \quad (3.6.9)$$

elde edilir. Hamilton Pontryagin fonksiyonu için olan formula kullanırsak

$$J'_\alpha(v) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} = \eta + 2\alpha(v-w)$$

elde ederiz. Teorem 3.6.1. ispatlandı.

Şimdi optimal çözüm için gerekli bir koşul verelim.

Teorem 3.6.2: Teorem 3.6.1. ün şartlarının olduğunu ve (3.4.5) optimal kontrol probleminin $v^* \in V$ çözümü olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik $\forall v \in V$ için sağlanır:

$$\int_0^T \left(\int_0^l U^*(x, t) Z^*(x, t) dx + 2\alpha[(v^*(t) - w^*(t)) + (v_t^* - w_t^*)] \right) (v(t) - v^*(t)) dt \geq 0.$$

Burada (3.4.2)-(3.4.4) ve (3.6.1)-(3.6.3) problemlerinin çözümleri sırasıyla $U(x, t; v^*) = U^*(x, t)$ ve $Z(x, t; v^*) = Z^*(x, t)$ olur.

İspat: Biz $J_\alpha(v)$ ve $J'_\alpha(v)$ nin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu kolayca gösterebiliriz. V kümesi konveks kümedir (Yasida 1980). Bu yüzden $J_\alpha(v)$, V kümesi üzerinde sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyoneldir. (Vasilyev 1981) çalışmasındaki teoremi (Teorem2.1) kullanırsak $J_\alpha(v)$, $v^* \in V$ de bir minimuma sahip olur. Sonra biz her $v \in V$ için $\langle J'_\alpha(v^*), v - v^* \rangle_{W_2^1(0,T)} \geq 0$ elde ederiz.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin üçüncü bölümünde hiperbolik tipli bir denklem için optimal kontrol problemi incelenmiştir.

İlk olarak kontrolün $W_2^1(0.T)$ uzayından seçilmesi durumunda hiperbolik denklemin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili teoremler verilmiştir. Sonra ele alınan optimal control probleminin çözümünün varlığı ve tekliği bilinen Weierstrass ve Goebel teoremleri kullanılarak ispatlanmıştır. Son olarak $W_2^1(0.T)$ uzayında iç çarpımı elde etmek için ikinci mertebeden adi diferensiyel denklem şeklinde ek problem tanımlanarak fonksiyonelin Fréchet türevi elde edilmiş ve optimal çözüm için bir gerek şart verilmiştir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada hiperbolik denklemde katsayı kontrolüne ait teorik sonuçlar elde edilmiştir. Hiperbolik denklemin genelleştirilmiş çözüm kavramından yola çıkarak aday kontrol kümesi belirlenmiştir. Verilen bir final kriterinden yola çıkarak denklemdeki katsayının $W_2^1(0, T)$ uzayından belirlenmesi için gerek şart elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde yer alan benzer çalışmalardaki sonuçlardan farklıdır.



KAYNAKLAR

- Beyhan, S., 2007. Hiperbolik Tip Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması Ve Onun Nümerik Çözüm Algoritması, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi
- Bo Li · HongweiLou.,2012. Optimality Conditions for Semilinear Hyperbolic Equations with Controls in Coefficients, Appl Math Optim, 65:371–402
- Garibanoğlu, G. A. 1995. Kısmi türevli denklemler, Milli Eğitim Basımevi.
- Goebel, M., 1979. On existence of optimal control. Math. Nachr., Vol 93, 67-73.
- Gugat, M., 2015. Optimal boundary control and stabilization of hyperbolic systems, Birkhauser Basel, 143 s.
- İskenderov, A. D., Tagiev, R. G., Yagubov, G. Ya., 2002. Optimalleştirme metodları. Çaşıoğlu, 400 s, Bakü.
- Koçak, Y., Dokuyucu, M.A. 2016. On a necessary condition for optimal control of hyperbolic equation, AIP conference proceedings. 1726, 020085
- Ladyzhenskaya, Olga., 1973. Boundary value problem of Mathematical Physics, Nauka (Rusça)
- Liberzon, D., 2012. Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Princeton University Press, 235 s., New Jersey.
- Lions, J.L., 1971. Optimal control for systems governed by partial differential equations. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 400 s, New York.
- Mikhailov, V. P., 1983. Kısmi türevli diferansiyel denklemler. Nauka, 424 s, Moskova. (Rusça)
- Naidu, D. S., 2002. Optimal Control Systems. CRC press. 460 s, USA
- Saraç, Y., 2012. Hiperbolik Bir Problemde Başlangıç Şartının Optimal Kontrolü. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Subaşı, M., Durur, H. 2014. On the stability of the solution in an optimal control problem for a Schrödinger equation, Applied Mathematics and Computation, Vol.249. pp 521-526

Tagiev, R.K, 2012. On optimal Control of the Hyperbolic equation Coefficients, Automation and Remote Control, Vol.73. pp.1145-1155

Trotzsch, Fredi., 2010. Optimal control of partial differential equation, American Mathematical Society, 418 s.

Vasilev, F. P., 1981. Ekstremal problemlerin çözüm metodları. Nauka, 400 s, Moskova. (Rusça)

Yosida, K., 1980. Functional Analysis. Springer-Verlag, 624 s, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Erzurum ili Oltu ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Oltu'da tamamladı. 2009 yılında kayıt yaptırdığı İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2013 yılında mezun oldu. Aynı yıl başladığı Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine halen devam etmektedir.

