

**T.C.**  
**AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Coşkun YALÇINKAYA

Oransal-Caputo Hibrit Operatörü ve Bu Operatör Yardımıyla Elde Edilen  
Bazı Eşitsizlikler

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TEZ YÖNETİCİSİ**

Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

**AĞRI – 2023**

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### Oransal-Caputo Hibrit Operatörü ve Bu Operatör Yardımıyla Elde Edilen Bazı Eşitsizlikler

Coşkun YALÇINKAYA

Danışman: Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

Bu tezde, Caputo kesirli türevi ve Riemann-Liouville integralinin lineer kombinasyonu olarak elde edilen Oransal-Caputo hibrit operatörü ele alınmıştır. Tez beş ana bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde, eşitsizlik, konvekslik, kesirli türev ve integral gibi konuların tarihsel gelişimi ve önemi vurgulanmıştır. İkinci bölümde, bu konularla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, literatürde var olan bazı kesirli türev ve integral operatörleri ile bazı teoremler sunulmuştur. Dördüncü bölümde, Oransal-Caputo hibrit operatörü ile elde edilen bazı yeni eşitsizlikler ortaya konulmuştur. Bulgular elde edilirken öncelikle Oransal-Caputo hibrit operatör yardımıyla farklı konveks fonksiyon türleri için bazı eşitsizlikler ortaya konmuştur. Ardından bir integral özdeşliği yardımıyla yeni eşitsizlikler üretilmiştir. Son olarak da sınırlı fonksiyonlar için bazı yeni sonuçlar bulunmuştur. Beşinci bölümde ise sonuç ve öneriler paylaşılmıştır.

2023, 65 sayfa

**Anahtar Kelimeler:** Oransal-Caputo hibrit operatör, konveks fonksiyonlar, integral eşitsizlikler.

## **ABSTRACT**

### **MASTER'S THESIS**

#### **The Proportional-Caputo Hybrid Operator and Some Inequalities Obtained with This Operator**

**Coşkun YALÇINKAYA**

**Danışman: Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ**

In this thesis, The proportional-Caputo hybrid operator obtained as a linear combination of the Caputo fractional derivative and the Riemann-Liouville integral is examined. The thesis consists of five main sections. In the first section, the historical development and significance of topics such as inequality, convexity, fractional derivatives, and integrals are emphasized. The second section provides the fundamental definitions and theorems related to these topics. The third section presents some existing fractional derivative and integral operators along with certain theorems found in the literature. In the fourth section, new inequalities obtained using The proportional-Caputo hybrid operator are presented. In the process of obtaining the findings, inequalities are initially established for different types of convex functions using the definition of The proportional-Caputo hybrid operator. Then, new inequalities are generated using an integral identity. Finally, some new results are obtained for bounded functions. In the fifth chapter, the conclusions and recommendations are shared.

**2023, 65 pages**

**Key Words:** The proportional-Caputo hybrid operator, convex functions, integral inequalities.

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim süresince her türlü bilgi ve birikimini büyük bir özveri ve meslek sevgisi ile paylaşan, bu aşamalara gelmemde büyük pay sahibi olan, minnet ve saygıyla hatırlayacağım çok kıymetli danışman hocam, Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e teşekkür eder, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Diğer yandan, öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı annem Fatma YALÇINKAYA, babam İlhan YALÇINKAYA ve kız kardeşim Canan YALÇINKAYA'ya çok teşekkür ederim.

Ayrıca her türlü fedakarlığı gösteren sevgili eşim Merve Nur YALÇINKAYA'ya yürekten teşekkür ederim.

**Haziran 2023**

**Coşkun YALÇINKAYA**

# İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| ÖZET .....                                                                                                                | ii        |
| ABSTRACT .....                                                                                                            | iii       |
| TEŞEKKÜR .....                                                                                                            | iv        |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                                                                                      | vi        |
| <b>1. GİRİŞ .....</b>                                                                                                     | <b>1</b>  |
| <b>2. KURAMSAL TEMELLER .....</b>                                                                                         | <b>5</b>  |
| 2.1. Genel Kavramlar.....                                                                                                 | 5         |
| 2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar .....                                                                        | 7         |
| 2.3. Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Önemli İntegral Eşitsizlikler .....                                                  | 9         |
| <b>3. MATERYAL VE YÖNTEM .....</b>                                                                                        | <b>20</b> |
| <b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....</b>                                                                                       | <b>31</b> |
| 4.1. Oransal-Caputo Hibrit Operatör Yardımıyla Farklı Konveks Fonksiyon Tür-<br>leri İçin Elde Edilen Bazı Bulgular ..... | 31        |
| 4.2. Bir İntegral Özdeşliği Yardımıyla Elde Edilen Bazı Sonuçlar.....                                                     | 34        |
| 4.3. Sınırlı Fonksiyonlar için Bazı Sonuçlar .....                                                                        | 41        |
| <b>5. SONUÇ .....</b>                                                                                                     | <b>54</b> |
| KAYNAKLAR .....                                                                                                           | 55        |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                                            | 58        |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|                                                 |                                                                                                |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$                                    | : Reel sayılar kümesi                                                                          |
| $\Gamma(z)$                                     | : Gama fonksiyonu                                                                              |
| $\beta(x, y)$                                   | : Beta fonksiyonu                                                                              |
| ${}_2F_1(a, b; c; z)$                           | : Hipergeometrik fonksiyonun gösterimi                                                         |
| $K_s^1$                                         | : 1. anlamda $s$ —konveks fonksiyonların sınıfı                                                |
| $K_s^2$                                         | : 2. anlamda $s$ —konveks fonksiyonların sınıfı                                                |
| $SX(h, I)$                                      | : $I$ aralığında $h$ —konveks fonksiyonların sınıfı                                            |
| $SV(h, I)$                                      | : $I$ aralığında $h$ —konkav fonksiyonların sınıfı                                             |
| $L^1[I]$                                        | : $I$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı                      |
| $J_{v+}^\alpha \delta(\varsigma)$               | : $\delta$ fonksiyonunun $\alpha$ . mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali |
| $J_{\psi-}^\alpha \delta(\varsigma)$            | : $\delta$ fonksiyonunun $\alpha$ . mertebeden sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali |
| ${}_H J_{v+}^\alpha \delta(\varsigma)$          | : $\delta$ fonksiyonunun $\alpha$ . mertebeden sol taraflı Hadamard kesirli integrali          |
| ${}_H J_{\psi-}^\alpha \delta(\varsigma)$       | : $\delta$ fonksiyonunun $\alpha$ . mertebeden sağ taraflı Hadamard kesirli integrali          |
| ${}^\rho I_{v+}^\alpha \delta(\varsigma)$       | : $\delta$ fonksiyonunun $\alpha$ . mertebeden sol taraflı Katugampola kesirli integrali       |
| ${}^\rho I_{\psi-}^\alpha \delta(\varsigma)$    | : $\delta$ fonksiyonunun $\alpha$ . mertebeden sağ taraflı Katugampola kesirli integrali       |
| ${}^C D_{v+}^\alpha \delta(\varsigma)$          | : $\delta$ fonksiyonunun $\alpha$ . mertebeden sol taraflı Caputo kesirli türevi               |
| ${}^C D_{\psi-}^\alpha \delta(\varsigma)$       | : $\delta$ fonksiyonunun $\alpha$ . mertebeden sağ taraflı Caputo kesirli türevi               |
| ${}^{CF} I_v^\alpha \delta(\varsigma)$          | : $\delta$ fonksiyonunun $\alpha$ . mertebeden sol taraflı Caputo-Fabrizio kesirli integrali   |
| ${}^{CF} I_\psi^\alpha \delta(\varsigma)$       | : $\delta$ fonksiyonunun $\alpha$ . mertebeden sağ taraflı Caputo-Fabrizio kesirli integrali   |
| ${}^{CPC} D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)$ | : $\delta$ fonksiyonunun $\alpha$ . mertebeden Oransal-Caputo hibrit operatör                  |

# 1. GİRİŞ

Matematik, dünya tarihi boyunca insanların günlük hayatta kullandıkları hesaplama, ölçme ve analiz işlemlerinin yanı sıra; bilim, teknoloji ve diğer birçok alanda büyük bir öneme sahip olmuştur. Matematik bilim dalında eşitsizlik teorisini, matematiksel işlemlerde eşitsizliklerin nasıl ifade edileceğini, çözüleceğini ve analiz edileceğini inceler. Eşitsizlik teorisi, Newton ve Euler'dan günümüze dek ekonomi, mühendislik, işletme, sosyal bilimler ve özellikle matematiksel modelleme, ortalamalar teorisi gibi alanlarda kullanılan çok etkili ve güçlü bir bilim dalı haline gelmiştir. Bu teori, matematik bilim dalının temel unsurlarından biridir ve matematiksel düşüncüyü geliştirme ve uygulama açısından büyük bir öneme sahiptir.

Eşitsizlik kavramı 18. yüzyıla kadar çok az gelişme göstermiş, üçgen eşitsizliği aritmetik ve geometrik eşitsizlik gibi sadece birkaç eşitsizlik elde edilmiştir. Fakat bu yüzyıldan itibaren çalışmalar hız kazanmış Chebyshev, Grüss, Hölder, Minkowski, Hadamard, Cauchy-Schwarz, Stolz, Hilbert, Gronwall, Young, Opial, Jensen, Simpson, Ostrowski gibi birçok eşitsizlik literatürde yerini almıştır. Hölder, Minkowski, aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliği baskın roller oynamış ve kendilerine yaygın kullanım alanları bulmuştur.

Eşitsizliklerle ilgili ilk kitap 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Pólya'nın "Inequalities" adı ile yayınlanmıştır (Hardy et al., 1952). Bu çalışmayı 1961 yılında yazarları Beckenbach ve Bellman olan aynı isim ile yeni bir eser takip etmiştir (Beckenbach and Bellman, 1965). Mitrinović'in 1970 yılında "Analytic Inequalities" isimli yayını ile de bu alandaki çalışmalar desteklenmiştir (Mitrinovic and Vasic, 1970). Bu tarihten itibaren eşitsizliklerin genelleştirilmeleri, geliştirmeleri ve yeni uygulamaları matematiğin çeşitli dallarındaki araştırmacılar tarafından verilmiştir.

Eşitsizlikler teorisi, matematiksel analizin temel taşlarından biridir. Sürekli bir gelişim sürecinde olup giderek artan uygulamalarıyla hızla büyüyen disiplin haline gelmiştir. Eşitsizlikler teorisiyle yakından ilişkili olan konvekslik kavramının kökleri de M.Ö. 2000 yıllarına kadar uzanmakta ve Eski Yunan, Mısır ve Babil dönemlerinde bu kavramın izlerine rastlanmaktadır. Konveksliğin tarihi çok eski bir altyapıya sahiptir. Konvekslik M.Ö. 250 yılına dayanan Archimedes'in  $\pi$  değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve

bilinen bir kavram olarak karşımıza çıkar. Hermite'in 1881'de bulduğu ve 1883'te Mathesis dergisinde yayınladığı bir sonuç, "konvekslik" kavramını ortaya çıkarmıştır. Hermite, Mathesis dergisine konveks bir fonksiyonun aşağıdaki eşitsizliği sağladığını ifade eden çalışmasını göndermiştir.

$$(\psi - v) \delta \left( \frac{v + \psi}{2} \right) \leq \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \leq (\psi - v) \frac{\delta(v) + \delta(\psi)}{2}$$

Söz konusu eşitsizlik Hermite eşitsizliği olarak değil, Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak literatürde yerini almıştır. E.F. Beckenbach bir çalışmasında Hermite adı ile literatüre girmeyen bu eşitsizliği ilk ispatlayanın Hadamard olduğunu yazmıştır. Bu eşitsizlik önemlidir. Çünkü belirli koşullar altında konvekslik tanımı ile denktir (Hardy et al., 1952).

Konveks fonksiyonlar 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından sistematik bir şekilde incelenmiştir. Ancak konveksliğin matematikteki önemi Hadamard'ın 1893 yılındaki çalışmasında ortaya çıkmıştır. Danimarkalı matematikçi Jensen tarafından yayınlanan iki makaleden sonra konveks fonksiyonlar teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. Bunun nedenleri şunlardır: Birincisi, konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkilidir, ikincisi ise modern analizde birçok alan doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların uygulamalarını içerir (Pečarić and Tong, 1992).

Niculescu, konveksliğin çok yaygın bir şekilde kullanılmasının iki ana nedenini şöyle açıklıyor: "Maksimum değerın sınır noktasında olması" ve "Her konveks fonksiyonun en az bir minimum noktası olması ve her yerel minimumun da mutlak minimum olması" (Niculescu et al., 2018). Konveks fonksiyonlar için eşitsizler konusunu ele alan Pečarić'in 1987 yılında yayınladığı "Convex Functions: Inequalities" adlı kitabı, bu alandaki temel kaynaklardan biri olma niteliği taşımaktadır (Pečarić, 1987). AG (Aritmetik-Geometrik) eşitsizliği, Hölder eşitsizliği ve Minkowski eşitsizliği konveks fonksiyonların uygulamalarından elde edilen önemli eşitsizliklerden bazılarıdır. Ayrıca konveks fonksiyonların klasik tanımı ile diğer fonksiyon sınıflarının bazıları için daha genel eşitsizlikler elde edilir. Çeşitli konveks fonksiyon sınıflarının eşitsizlikler üzerindeki rolünün büyüklüğünden günümüzde de bu konu üzerinde çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalar özellikle son yıllarda kesirli hesaplamaların da dahil edildiği yöne evrilmiştir.

Kesirli hesaplamaların başlangıcı,  $n$ . mertebeden bir tamsayı için türevin anlamının " $n$  tamsayı olmadığında da mümkün olup olmadığı" sorusuna dayanmaktadır. 30 Eylül 1695 tarihinde L'Hospital' in Leibniz'e yazdığı mektupta  $n$ . dereceden  $\frac{d^n y}{dx^n}$  türev notasyonunda  $n = \frac{1}{2}$  için sonucun nasıl olacağını sormuştur. Leibniz ise "Bir gün faydalı sonuçlar çıkacak



*açık bir paradokstur.”* diye cevaplamıştır. Böylelikle kesirli analiz kavramı ortaya çıkmış ve bu alanda 300’ü aşkın yıl boyunca birçok çalışma yapılmıştır. Öyle ki 21. yüzyılın en önemli analiz konularından biri olmuştur.

Dinamik sistemlerin çalışma prensiplerini anlamada araç olarak kullanılan türev ve integral operatörleri, matematiksel modellemenin temelini oluşturmaktadır. Öneminin bu denli büyük olması konu üzerinde derin çalışmalara itmiş, tamsayı mertebeli operatörlerin genel hali olan kesirli operatörlerin bulunmasını sağlamıştır. Kesirli türev ve integralin klasik türev ve integralden en önemli farkı, problemin türüne göre en iyi çözümün elde edilmesi adına birden çok tanımının olmasıdır. Fakat bu tür operatörlerin ilk tanımlandığı zamanlarda neredeyse hiç pratik uygulamasının olmaması, sadece matematiksel işlemler içeren soyut bir alan olarak kabul edilmesine sebep olmuştur.

Yaklaşık yarım asır önce bu paradigma, pür matematiksel formülasyonlardan çeşitli alanlardaki uygulamalara geçmeye başlamış ve son 20 yılda kesirli operatörler bilim, mühendislik ve matematiğin hemen hemen her alanına girmiştir. 1823 yılında N.H. Abel tarafından Tautochrone problemin çözümünde kesirli operatörler kullanılmıştır. J. Liouville kesirli analiz tanımlarını 1832 yılında teorik problemlere uygulamış ve bu alanda ilk önemli çalışmayı yapmıştır. 1867 yılında A.K. Grünwald kesirli operatörler alanında birçok çalışmalar yapmıştır. G.F.B. Riemann uzun yıllar çalıştığı kesirli integrasyon teorisini yaptığı çalışmalarla geliştirmiştir. A.V. Letnikov yine bu alanda 1868-1872 yılları arasında çok sayıda makale yayınlamıştır. Kesirli analiz alanında 1900-1970 yılları arasında birçok bilim insanı önemli katkılarda bulunmuştur.. H.H. Hardy ve M. Riezs 1915’te ıraksak serilerin toplamı için kesirli integrasyon üzerine, H. Weyl 1917’de periyodik fonksiyonlar için uygun kesirli integrasyon üzerine çalışmalar yapmışlardır. S. Blair ve S. Samko da bu konuda önemli katkılar sağlayan isimlerdir. Literatürde tarihsel aşamalarıyla birlikte bu konunun ele alındığı ilk kitap, Oldham ve Spanier tarafından 1974 yılında yazılmıştır (Oldham and Spanier, 1974).

Kesirli hesaplamalar diferansiyel denklemlerdeki çözümler için ciddi yarar sağlamıştır. Birçok matematikçi yıllar boyunca kendi notasyonlarını ve yaklaşımlarını kullanarak tam sayı olmayan mertebeden integral ve türev kavramına uygun birçok tanım yapmışlardır. Riemann-Liouville kesirli integral operatör, Hadamard kesirli integral operatör, Erdely kesirli integral operatör, Kober kesirli integral operatör ve uyumlu kesirli integral operatör tanımları bunlardan birkaçıdır. Kesirli türevi tanımlamanın birçok yolu vardır. Bunlardan bazıları integral formunu esas alır. Riemann-Liouville ve Caputo’nun tanımları bu gruba girer. Diğer taraftan Grünwald-Letnikov limit formuyla farklı bir yaklaşım sergiler. Lineer

olma özelliği bu ve benzeri bütün kesirli türev tanımlarında tek ortak özelliktir (Khalil et al., 2014). Diğer özelliklerle çok uyduğu söylenemez. Örneğin sabit fonksiyonun 1. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir. Ayrıca klasik türevdeki çarpım kuralı, bölüm kuralı ve zincir kuralı gibi özellikler kesirli türevler için her zaman geçerli olmaz. Riemann-Liouville kesirli integralinin başka bir eksikliği de başlangıç veya sınır değer problemleri söz konusuysen fiziksel başlangıç veya sınır koşulları ile tutarlı olmamasıdır. Bu güçlüğün üstesinden gelmek için Riemann-Liouville kesirli integralini kendi versiyonuyla değiştiren M. Caputo ve literatürde Caputo veya Dzherbashyan-Caputo kesirli türevi olarak bilinen

$${}^C D_{v+}^{\alpha} \delta(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_v^{\varsigma} \frac{\delta^{(m)}(\varphi)}{(\varsigma - \varphi)^{\alpha+1-m}} d\varphi \quad (\varsigma > v)$$

tanımını vermiştir (Katugampola, 2014). Bu operatör ise tam mertebeden türevlenemeyen fonksiyonlar için sonuç vermez.

Bunun dışında eşitsizlikler arasında önemli bir yere sahip olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin Riemann-Liouville integral operatörü kullanılarak elde edilen versiyonunun ortaya konulması kaçınılmaz olmuştur (Sarıkaya et al., 2013). Birçok çalışma bir sonraki çalışma için basamak olmuştur. Literatürdeki bilgiler arttıkça Riemann-Liouville kesirli integrali ve Hadamard kesirli integralini tek bir formda veren Katugampola kesirli integrali tanımlanmıştır (Katugampola, 2011). Riemann-Liouville kesirli integralinin yetersiz kaldığı noktada tanımlanmış olan uyumlu kesirli integral operatöründe keyfi derece için integrali tanımlanmıştır (Khalil et al., 2014). Hermite-Hadamard eşitsizliği, uyumlu (conformable) kesirli integral operatör içinde genelleştirilmiştir (Sarıkaya et al., 2019). Bu yeni operatör, belirtilen benzer özelliklerinden dolayı araştırmacıların ilgisini çekmiş ve kısa zamanda yeni çalışmalar literatüre eklenmiştir. A. O. Akdemir, M. Gürbüz, M. E. Özdemir, M. Z. Sarıkaya, E. Set, T. Abdeljawad, S. I. Butt, G. Farid, F. Jarad, M. A. Noor, S. Rashid son yıllarda kesirli operatörler üzerine makaleler, bildiriler, lisansüstü tez çalışmalar yapıp yeni sonuçlar sunarak konuya önemli katkıda bulunan araştırmacılardan bazılarıdır.

Bu tezdeki amacımız, Oransal-Caputo hibrit operatöründen yararlanarak konveks fonksiyonlar için elde edilmiş yeni bazı eşitsizlikleri literatüre katmaktır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışması kapsamında gerekli olan tanım, teorem ve önemli bazı temel özelliklere yer verilecektir.

### 2.1. Genel Kavramlar

**Tanım 2.1 (Konveks Küme):**  $L$  bir lineer uzay ve  $C \subseteq L$  olsun. Eğer  $\varsigma, \eta \in C$  olmak üzere

$$N = \{\omega \in L : \omega = \varphi\varsigma + (1 - \varphi)\eta, \quad 0 \leq \varphi \leq 1\} \subseteq C$$

ise  $C$  kümesine konveks küme denir. Geometrik olarak  $N$  kümesi uç noktaları  $\varsigma$  ve  $\eta$  olan bir doğru parçasıdır. Öyle ki, konveks küme boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar, 2000).

**Tanım 2.2 (Konveks Fonksiyon):**  $I, \mathbb{R}$  'de bir aralık ve  $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun. Her  $\varsigma, \eta \in I$  ve  $\varphi \in [0, 1]$  için

$$\delta(\varphi\varsigma + (1 - \varphi)\eta) \leq \varphi\delta(\varsigma) + (1 - \varphi)\delta(\eta)$$

şartı sağlanırsa  $\delta$  fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer  $\varsigma \neq \eta$  ve  $\varphi \in (0, 1)$  için fonksiyon

$$\delta(\varphi\varsigma + (1 - \varphi)\eta) < \varphi\delta(\varsigma) + (1 - \varphi)\delta(\eta)$$

şartı sağlanıyorsa bu fonksiyona da kesin konveks fonksiyon denir (Niculescu and Persson, 2006).

**Tanım 2.3 (Gama Fonksiyonu):**  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tanımlı fonksiyon ve  $\varsigma > 0$  için

$$\Gamma(\varsigma) = \int_0^{\infty} \varphi^{\varsigma-1} e^{-\varphi} d\varphi \quad (2.1)$$

şeklinde parametreye bağlı genelleştirilmiş integrale Gama fonksiyonu veya ikinci çeşit Euler integrali denir (Kannappan, 2009).

(2.1) ile ifade edilen fonksiyon

i)  $0 < \varsigma < \infty$  yakınsak

ii)  $\varsigma \leq 0$  için ıraksaktır.

Gama fonksiyonuna ait bazı özellikler

i)  $\varsigma > 0$  için  $\Gamma(\varsigma + 1) = \varsigma \Gamma(\varsigma)$

ii)  $\Gamma(\varsigma) = (\varsigma - 1)!$

iii)  $\Gamma(1) = 0! = 1$

iv)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

**Tanım 2.4 (Beta Fonksiyonu):**  $\varsigma, \eta \in \mathbb{R}^+$  için

$$\beta(\varsigma, \eta) = \int_0^1 \varphi^{\varsigma-1} (1 - \varphi)^{\eta-1} d\varphi \quad (2.2)$$

integrali ile tanımlanan  $\beta : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna Beta fonksiyonu veya birinci çeşit Euler integrali denir (Kannappan, 2009).

(2.2) ile ifade edilen fonksiyonu için

i)  $\varsigma > 0$  ve  $\eta > 0$  için yakınsaktır.

ii)  $\varsigma \leq 0$  ve  $\eta \leq 0$  için ıraksaktır.

Beta fonksiyonuna ait bazı özellikler

i)  $\beta(\varsigma, \eta) = \beta(\eta, \varsigma)$

ii)  $\varsigma, \eta > 0$  için  $\beta(\varsigma + 1, \eta) = \frac{\varsigma}{\varsigma + \eta} \beta(\varsigma, \eta)$

iii)  $\beta(\varsigma, \eta)$  fonksiyonu için

$$\beta(\varsigma, \eta) = \int_0^\infty \frac{\varphi^{\varsigma-1}}{(1 + \varphi)^{\varsigma+\eta}} d\varphi \quad (2.3)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Gama ve Beta fonksiyonu arasında

$$\beta(\varsigma, \eta) = \frac{\Gamma(\varsigma)\Gamma(\eta)}{\Gamma(\varsigma + \eta)}, \quad \varsigma, \eta \in \mathbb{R}^+ \quad (2.4)$$

ilişkisi vardır.

Erdelyi (Erdélyi et al., 1981), Whittaker'ın 1904'te ortaya çıkardığı hipergeometrik fonksiyon tanımını aşağıdaki gibi yapmıştır.

**Tanım 2.5 (Hipergeometrik Fonksiyon):**

$${}_2F_1(v, \psi; \xi; \omega) = \frac{1}{\beta(\psi, \psi - \xi)} \int_0^1 \varphi^{\psi-1} (1 - \varphi)^{\xi-\psi-1} (1 - \omega\varphi)^{-v} d\varphi, \quad \xi > \psi > 0, \quad |\omega| < 1.$$

## 2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar

Bu bölümde bazı konveks fonksiyon çeşitleri tanıtılacaktır.

**Tanım 2.6 (AG-Konveks Fonksiyon):**  $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve  $\delta : I \rightarrow (0, \infty)$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $\delta$  fonksiyonu her  $\varsigma, \eta \in I$  ve  $\varphi \in [0, 1]$  için,

$$\delta(\varphi\varsigma + (1 - \varphi)\eta) \leq \delta^\varphi(\varsigma)\delta^{1-\varphi}(\eta)$$

şartını sağlıyorsa  $\delta$  fonksiyonuna AG-konveks fonksiyon veya log -konveks fonksiyon denir (Niculescu, 2000).

**Tanım 2.7 (GA-Konveks Fonksiyon):**  $\delta : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin. Her  $\varsigma, \eta \in I$  ve  $\varphi \in [0, 1]$  için,

$$\delta(\varsigma^\varphi \eta^{1-\varphi}) \leq \varphi\delta(\varsigma) + (1 - \varphi)\delta(\eta)$$

şartını sağlayan  $\delta$  fonksiyonuna GA-konveks fonksiyon denir (Niculescu, 2000).

**Tanım 2.8 (GG-Konveks Fonksiyon):**  $\delta : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  fonksiyonu verilsin. Her  $\varsigma, \eta \in I$  ve  $\varphi \in [0, 1]$  için,

$$\delta(\varsigma^\varphi \eta^{1-\varphi}) \leq [\delta(\varsigma)]^\varphi [\delta(\eta)]^{1-\varphi}$$

şartını sağlayan  $\delta$  fonksiyonuna GG-konveks fonksiyon denir (Niculescu, 2000).

Her GG-konveks fonksiyon aynı zamanda GA-konveks fonksiyondur. Bu gerektirmeyi literatürde iyi bilinen AM-GM eşitsizliği kullanılarak

$$\delta(\varsigma^\varphi \eta^{1-\varphi}) \leq [\delta(\varsigma)]^\varphi + [\delta(\eta)]^{1-\varphi} \leq \varphi\delta(\varsigma) + (1 - \varphi)\delta(\eta)$$

kolayca görülebilir. Fakat bu gerektirmenin tersi genelde doğru değildir.

**Tanım 2.9 (Quasi-Konveks Fonksiyon):**  $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun. Her  $\varsigma, \eta \in I$  ve  $\varphi \in [0, 1]$  için,

$$\delta(\varphi\varsigma + (1 - \varphi)\eta) \leq \max \{ \delta(\varsigma), \delta(\eta) \}$$

koşulunu sağlayan  $\delta$  fonksiyonuna quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce, 1998).

**Tanım 2.10 (m-Konveks Fonksiyon):**  $\delta : [0, \psi] \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $\psi > 0$  olsun. Her  $\varsigma, \eta \in [0, \psi]$  ve  $\varphi, m \in [0, 1]$  için

$$\delta(\varphi\varsigma + m(1 - \varphi)\eta) \leq \varphi\delta(\varsigma) + m(1 - \varphi)\delta(\eta) \quad (2.5)$$

eşitsizliğini sağlayan  $\delta$  fonksiyonuna  $m$ -konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce, 2000).

(2.5)'de  $m = 1$  seçilirse,  $[0, \psi]$  aralığında  $m$ -konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona indirgenir.

**Tanım 2.11 (( $\alpha, m$ )-Konveks Fonksiyon):**  $\delta : [0, \psi] \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $\psi > 0$  olsun. Her  $\varsigma, \eta \in [0, \psi]$ ,  $\varphi \in [0, 1]$  ve  $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$  için

$$\delta(\varphi\varsigma + m(1 - \varphi)\eta) \leq \varphi^\alpha \delta(\varsigma) + m(1 - \varphi^\alpha) \delta(\eta) \quad (2.6)$$

şartını sağlayan fonksiyona  $(\alpha, m)$ -konveks fonksiyon denir (Miheşan, 1993).

**Tanım 2.12 (Birinci Anlamda  $s$ -Konveks Fonksiyon):**  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ ,  $\delta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $0 < s \leq 1$  olsun.  $\alpha^s + \beta^s = 1$  olmak üzere her  $\varsigma, \eta \in \mathbb{R}^+$  ve her  $\alpha, \beta \geq 0$  için

$$\delta(\alpha\varsigma + \beta\eta) \leq \alpha^s \delta(\varsigma) + \beta^s \delta(\eta)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $\delta$  fonksiyonuna birinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyon denir. Birinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyonların sınıfı  $K_s^1$  ile gösterilir (Orlicz, 1961).

**Tanım 2.13 (İkinci Anlamda  $s$ -Konveks Fonksiyon):**  $\delta : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $s \in (0, 1]$  olsun.  $\alpha, \beta \geq 0$  ve  $\alpha + \beta = 1$  olmak üzere her  $\varsigma, \eta \in I$  için

$$\delta(\alpha\varsigma + \beta\eta) \leq \alpha^s \delta(\varsigma) + \beta^s \delta(\eta) \quad (2.7)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $\delta$  fonksiyonuna ikinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyonların sınıfı  $K_s^2$  ile gösterilir (Breckner, 1978).

**Not 2.1 :** Birinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyon ve ikinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyon tanımlarında  $s = 1$  alınır, bilinen konvekslik tanımına indirgenir (Breckner, 1978).

**Tanım 2.14 ( $h$ -Konveks Fonksiyon):**  $h \neq 0$  ve  $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  negatif olmayan bir fonksiyon olsun.  $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$  negatif olmayan fonksiyonu her  $\varsigma, \eta \in I$  ve  $\varphi \in (0, 1)$  için

$$\delta(\varphi\varsigma + (1 - \varphi)\eta) \leq h(\varphi)\delta(\varsigma) + h(1 - \varphi)\delta(\eta) \quad (2.8)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $\delta$  fonksiyonuna  $h$ -konveks fonksiyon veya  $SX(h, I)$  sınıfına aittir denir (Varošanec, 2007).

(2.8) eşitsizliğinin tersini sağlayan  $\delta$  fonksiyonuna  $h$ -konkav fonksiyon veya  $SV(h, I)$  sınıfına aittir denir.

(2.8)'de açıkça görülmektedir ki;

i)  $h(\varphi) = \varphi$  seçilirse, tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar  $SX(h, I)$  sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar  $SV(h, I)$  sınıfına aittir.

ii)  $h(\varphi) = \frac{1}{\varphi}$  seçilirse,  $SX(h, I) \supseteq Q(I)$  (Godunova-Levin sınıfı)'dır.

iii)  $h(\varphi) = 1$  seçilirse,  $SX(h, I) \supseteq P(I)$  (Kuvvet fonksiyonu sınıfı)'dır.

iv)  $h(\varphi) = \varphi^s$  seçilirse,  $SX(h, I) \supseteq K_s^2$  (İkinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyon sınıfı)'dır. Burada,  $s \in (0, 1)$ 'dir.

**Tanım 2.15 (Harmonik Konveks Fonksiyon):**  $I \subset \mathbb{R}^+$  reel bir aralık olsun.  $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\varsigma, \eta \in I$  ve  $\varphi \in [0, 1]$  için

$$\delta \left( \frac{\varsigma \eta}{\varphi \varsigma + (1 - \varphi) \eta} \right) \leq \varphi \delta(\eta) + (1 - \varphi) \delta(\varsigma) \quad (2.9)$$

eşitsizliğini sağlarsa  $\delta$  fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizliğin tersi alınırsa harmonik konkav fonksiyon elde edilir (İşcan, 2014).

### 2.3. Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Önemli İntegral Eşitsizlikler

**Teorem 2.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği):**  $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık,  $v, \psi \in I$  ve  $v < \psi$  olmak üzere  $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$  konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\delta \left( \frac{v + \psi}{2} \right) \leq \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \leq \frac{\delta(v) + \delta(\psi)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Pearce et al., 1998).

**İspat (1.Yöntem)** Hermite- Hadamard eşitsizliğinin literatürde varolan iki ispatı aşağıda verilecektir.  $\delta$  fonksiyonu  $[v, \psi]$  aralığında konveks yani  $(v, \psi)$  aralığında sürekli ve  $[v, \psi]$  aralığında sınırlı olduğundan integrallenebilir. Konveksliğin geometrik yorumundan eşitsizliğin sağ tarafının ispatı açıktır.  $\varsigma = \varphi v + (1 - \varphi) \psi$  ve  $\varphi \in [0, 1]$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma &= \int_0^1 \delta(\varphi v + (1 - \varphi) \psi) d\varphi \\ &\leq \delta(v) \int_0^1 \varphi d\varphi + \delta(\psi) \int_0^1 (1 - \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

$$= \frac{\delta(v) + \delta(\psi)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca belirli integralin parçalanışından

$$\frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma = \frac{1}{\psi - v} \left( \int_v^{\frac{v+\psi}{2}} \delta(\varsigma) d\varsigma + \int_{\frac{v+\psi}{2}}^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \right)$$

olarak yazılabilir. Burada eşitsizliğin sağında  $\varsigma = v + \frac{\varphi(\psi-v)}{2}$  için

$$\int_v^{\frac{v+\psi}{2}} \delta(\varsigma) d\varsigma = \frac{\psi - v}{2} \int_0^1 \delta \left( v + \frac{\varphi(\psi - v)}{2} \right) d\varphi$$

ve  $\varsigma = \psi - \frac{\varphi(\psi-v)}{2}$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \delta \left( v + \frac{\varphi(\psi - v)}{2} \right) + \delta \left( \psi - \frac{\varphi(\psi - v)}{2} \right) \right] d\varphi \\ &\geq \delta \left( \frac{v + \psi}{2} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece her iki eşitsizlikte ispatlanmış olur.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin farklı bir ispatı ise aşağıdaki gibi verilebilir:

**İspat (2.Yöntem)**  $\delta$  fonksiyonu konveks olduğundan fonksiyon grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının fonksiyon grafiğinin üzerinde olduğu bilinmektedir. Buna göre

$$\delta(\varsigma) \leq \delta(v) + \frac{\delta(\psi) - \delta(v)}{\psi - v}(\varsigma - v)$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikte her iki taraf  $[v, \psi]$  aralığı üzerinde  $\varsigma$  değişkenine göre integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma &\leq \int_v^\psi \delta(v) d\varsigma + \frac{\delta(\psi) - \delta(v)}{\psi - v} \int_v^\psi (\varsigma - v) d\varsigma \\ &= \frac{\delta(v) + \delta(\psi)}{2} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca sol tarafın ispatına gelindiğinde, sırasıyla  $\varsigma = \frac{v+\psi-\varphi(\psi-v)}{2}$  ve  $\varsigma = \frac{v+\psi+\varphi(\psi-v)}{2}$  değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma = \frac{1}{\psi - v} \int_v^{\frac{v+\psi}{2}} \delta(\varsigma) d\varsigma + \frac{1}{\psi - v} \int_{\frac{v+\psi}{2}}^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \delta \left( \frac{v + \psi - \varphi(\psi - v)}{2} \right) + \delta \left( \frac{v + \psi + \varphi(\psi - v)}{2} \right) \right] d\varphi \\
&\geq \delta \left( \frac{v + \psi}{2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 2.2 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği):**  $p > 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olsun.  $\delta$  ve  $\varrho$ ,  $[v, \psi]$  aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun.  $|\delta|^p$  ve  $|\varrho|^q$ ,  $[v, \psi]$  aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_v^\psi |\delta(\varsigma)\varrho(\varsigma)| d\varsigma \leq \left( \int_v^\psi |\delta(\varsigma)|^p d\varsigma \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_v^\psi |\varrho(\varsigma)|^q d\varsigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

**İspat**  $p \geq 1$  için  $\varsigma \rightarrow \varsigma^p$  fonksiyonu  $(0, \infty)$  aralığında konvektir. Böylece Jensen eşitsizliğine göre

$$\int \phi dv \leq \left( \int \phi^p dv \right)^{\frac{1}{p}}$$

yazılabilir. Burada  $v$ , herhangi bir olasılık dağılımı ve  $h$  herhangi bir  $v$ -ölçülebilir bir fonksiyondur.  $u$  herhangi bir ölçü olsun ve  $v$  aşağıdaki şartı sağlayan bir dağılım olsun.

$$dv = \frac{\varrho^q}{\int \varrho^q du} du$$

Öte yandan  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  şartı kullanarak  $p(1 - q) + q = 0$  elde edilir ve  $\phi = \delta \varrho^{1-q}$  yazılabilir.

Böylece

$$\begin{aligned}
\int \delta \varrho du &= \left( \int \varrho^q du \right) \int \phi dv \\
&= \left( \int \varrho^q du \right) \int \delta \varrho^{1-q} \frac{\varrho^q}{\int \varrho^q du} du \\
&\leq \left( \int \varrho^q du \right) \left( \int \delta^p \varrho^{p(1-q)} \frac{\varrho^q}{\int \varrho^q du} du \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \int \varrho^q du \right) \left( \int \frac{\delta^p}{\int \varrho^q du} du \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\int \delta \varrho du \leq \left( \int \delta^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int \varrho^q du \right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılabilir. Bu durum  $\delta$  ve  $\varrho$ 'nin gerçekte olduğunu ve negatif olmadığını varsayımıyla yazılabilir ve karmaşık fonksiyonların genişletilmesi doğrudan elde edilebilir. Ayrıca  $\|\delta\|_p$  ve  $\|\varrho\|_q$  ne sıfır ne de sonsuzdur ve  $p, q > 1$  için geçerlidir.

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

**Sonuç 2.1 (Power Mean Eşitsizliği):**  $\delta$  ve  $\varrho$ ,  $[v, \psi]$  aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun.  $q \geq 1$ ,  $|\delta|$  ve  $|\varrho|^q$ ,  $[v, \psi]$  aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_v^\psi |\delta(\varsigma)\varrho(\varsigma)| d\varsigma \leq \left( \int_v^\psi |\delta(\varsigma)| d\varsigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left( \int_v^\psi |\delta(\varsigma)| |\varrho(\varsigma)|^q d\varsigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

**Teorem 2.3 (Ostrowski İntegral Eşitsizliği):**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon,  $v, \psi \in I$  ve  $v < \psi$  olsun. Eğer her  $\varphi \in [v, \psi]$  için  $|\delta'(\varphi)| < M$  ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \delta(\varphi) - \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \right| \leq M(\psi - v) \left[ \frac{1}{4} + \frac{(\varphi - \frac{v+\psi}{2})^2}{(\psi - v)^2} \right]$$

Burada,  $\frac{1}{4}$  sabiti en iyi katsayıdır ve daha küçük bir katsayı ile yer değiştiremez (Ostrowski, 1937).

Bu eşitsizlik literatürde  $\varphi \in [v, \psi]$  noktasında  $\delta(\varphi)$  değerinin  $\frac{1}{\psi-v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma$  integral ortalamasına yaklaşımı için bir üst sınır veren Ostrowski integral eşitsizliği olarak adlandırılır (Baloch and İşcan, 2015). Ostrowski integral eşitsizliği başka formda da aşağıdaki gibi verilebilir (İşcan, 2016).

$$\left| \delta(\varphi) - \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \right| \leq \frac{M}{\psi - v} \left[ \frac{(\varphi - v)^2 + (\psi - \varphi)^2}{2} \right]$$

**İspat** Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki eşitlik kullanılacaktır.  $\delta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(v, \psi) \subset I$ 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olduğundan  $\varphi \in (v, \psi)$  için

$$C(\varphi, \varsigma) = \begin{cases} \varsigma - v, & \varsigma \in [v, \varphi) \\ \varsigma - \psi, & \varsigma \in [\varphi, \psi] \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \delta(\varphi) &= \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma + \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi C(\varphi, \varsigma) \delta'(\varsigma) d\varsigma \\ \delta(\varphi) - \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma &= \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi C(\varphi, \varsigma) \delta'(\varsigma) d\varsigma \\ &= \frac{1}{\psi - v} \int_v^\varphi (\varsigma - v) \delta'(\varsigma) d\varsigma + \frac{1}{\psi - v} \int_\varphi^\psi (\varsigma - \psi) \delta'(\varsigma) d\varsigma \end{aligned}$$

yazılır. Bu durumda yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left| \delta(\varphi) - \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \right| &= \left| \frac{1}{\psi - v} \int_v^\varphi (\varsigma - v) \delta'(\varsigma) d\varsigma + \frac{1}{\psi - v} \int_\varphi^\psi (\varsigma - \psi) \delta'(\varsigma) d\varsigma \right| \\ \left| \delta(\varphi) - \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \right| &\leq \frac{1}{\psi - v} \int_v^\varphi |\varsigma - v| |\delta'(\varsigma)| d\varsigma + \frac{1}{\psi - v} \int_\varphi^\psi |\varsigma - \psi| |\delta'(\varsigma)| d\varsigma \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca  $|\delta'(\varphi)| < M$  olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \delta(\varphi) - \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \right| &\leq \frac{M}{\psi - v} \int_v^\varphi |\varsigma - v| d\varsigma + \frac{M}{\psi - v} \int_\varphi^\psi |\varsigma - \psi| d\varsigma \\ &= \frac{M}{\psi - v} \left[ \int_v^\varphi (\varsigma - v) d\varsigma + \int_\varphi^\psi (\psi - \varsigma) d\varsigma \right] \\ &= \frac{M}{\psi - v} \left[ \left( \frac{\varphi^2}{2} - \varphi v - \frac{v^2}{2} + v^2 \right) + \left( \psi^2 - \frac{\psi^2}{2} - \psi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{M}{\psi - v} \left[ \frac{(\varphi - v)^2 + (\psi - \varphi)^2}{2} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} (\varphi - v)^2 + (\psi - \varphi)^2 &= \left( \varphi - \frac{v + \psi}{2} + \frac{v + \psi}{2} - v \right)^2 + \left( \psi - \frac{v + \psi}{2} + \frac{v + \psi}{2} - \varphi \right)^2 \\ &= \left( \varphi - \frac{v + \psi}{2} \right)^2 + 2 \left( \varphi - \frac{v + \psi}{2} \right) \left( \frac{\psi - v}{2} \right) + \left( \frac{\psi - v}{2} \right)^2 \\ &\quad + \left( \frac{\psi - v}{2} \right)^2 + 2 \left( \frac{v + \psi}{2} - \varphi \right) \left( \frac{\psi - v}{2} \right) + \left( \frac{v + \psi}{2} - \varphi \right)^2 \\ &= 2 \left( \varphi - \frac{v + \psi}{2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\psi - v}{2} \right)^2 \\ &= 2(\psi - v) \left[ \frac{1}{4} + \frac{(\varphi - \frac{v + \psi}{2})^2}{(\psi - v)^2} \right] \end{aligned}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 2.4 (Simpson İntegral Eşitsizliği):**  $I = [v, \psi]$  ve  $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, \psi)$  üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve  $\|\delta^{(4)}\| = \sup_{\varsigma \in (v, \psi)} |\delta^{(4)}(\varsigma)| < \infty$  olsun. Bu durumda,

$$\left| \frac{1}{3} \left[ \frac{\delta(v) + \delta(\psi)}{2} + 2\delta \left( \frac{v + \psi}{2} \right) \right] - \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \right| \leq \frac{1}{2880} \|\delta^{(4)}\|_\infty (\psi - v)^4$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik literatürde Simpson eşitsizliği olarak bilinmektedir (Dragomir et al., 1999).

**İspat**  $I = [v, \psi]$  ve  $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $v, \psi$ ) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve  $\|\delta^{(4)}\| = \sup_{\varsigma \in (v, \psi)} |\delta^{(4)}(\varsigma)| < \infty$  olmak üzere  $C(\varsigma)$  fonksiyonunu

$$C(\varsigma) = \begin{cases} \frac{1}{24}(\varsigma - v)^3 \left(\varsigma - \frac{v+2\psi}{3}\right), & \varsigma \in \left[v, \frac{v+\psi}{2}\right) \\ \frac{1}{24}(\varsigma - \psi)^3 \left(\varsigma - \frac{2v+\psi}{3}\right), & \varsigma \in \left[\frac{v+\psi}{2}, \psi\right] \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda verilen eşitlikten

$$\begin{aligned} \int_v^\psi C(\varsigma) \delta^{(4)}(\varsigma) d\varsigma &= \int_v^{\frac{v+\psi}{2}} \frac{1}{24}(\varsigma - v)^3 \left(\varsigma - \frac{v+2\psi}{3}\right) \delta^{(4)}(\varsigma) d\varsigma \\ &+ \int_{\frac{v+\psi}{2}}^\psi \frac{1}{24}(\varsigma - \psi)^3 \left(\varsigma - \frac{2v+\psi}{3}\right) \delta^{(4)}(\varsigma) d\varsigma \end{aligned}$$

yazılır. Yukardaki integraller için mutlak değer özelliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} &\left| \int_v^\psi C(\varsigma) \delta^{(4)}(\varsigma) d\varsigma \right| \\ &\leq \int_v^{\frac{v+\psi}{2}} \frac{1}{24} |\varsigma - v|^3 \left| \varsigma - \frac{v+2\psi}{3} \right| |\delta^{(4)}(\varsigma)| d\varsigma + \int_{\frac{v+\psi}{2}}^\psi \frac{1}{24} |\varsigma - \psi|^3 \left| \varsigma - \frac{2v+\psi}{3} \right| |\delta^{(4)}(\varsigma)| d\varsigma \\ &\leq \frac{\|\delta^{(4)}\|_\infty}{24} \left[ \int_v^{\frac{v+\psi}{2}} (\varsigma - v)^3 \left(-\varsigma + \frac{v+2\psi}{3}\right) d\varsigma + \int_{\frac{v+\psi}{2}}^\psi (\psi - \varsigma)^3 \left(\varsigma - \frac{2v+\psi}{3}\right) d\varsigma \right] \\ &\leq \frac{\|\delta^{(4)}\|_\infty}{2880} (\psi - v)^5 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} &\left| \int_v^{\frac{v+\psi}{2}} \frac{1}{24} (\varsigma - v)^3 \left(\varsigma - \frac{v+2\psi}{3}\right) \delta^{(4)}(\varsigma) d\varsigma + \int_{\frac{v+\psi}{2}}^\psi \frac{1}{24} (\varsigma - \psi)^3 \left(\varsigma - \frac{2v+\psi}{3}\right) \delta^{(4)}(\varsigma) d\varsigma \right| \\ &\leq \frac{\|\delta^{(4)}\|_\infty}{2880} (\psi - v)^5 \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin sol kısmında kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\left| \int_v^{\frac{v+\psi}{2}} \frac{1}{24} (\varsigma - v)^3 \left(\varsigma - \frac{v+2\psi}{3}\right) \delta^{(4)}(\varsigma) d\varsigma + \int_{\frac{v+\psi}{2}}^\psi \frac{1}{24} (\varsigma - \psi)^3 \left(\varsigma - \frac{2v+\psi}{3}\right) \delta^{(4)}(\varsigma) d\varsigma \right| \\ &= \left| -\frac{2}{3} (\psi - v) \delta \left(\frac{v+\psi}{2}\right) - \frac{1}{6} (\psi - v) [\delta(v) + \delta(\psi)] + \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\|\delta^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\psi - v)^5$$

eşitsizliği yazılır. Son durumda

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{2}{3} (\psi - v) \delta \left( \frac{v + \psi}{2} \right) - \frac{1}{6} (\psi - v) [\delta(v) + \delta(\psi)] + \int_v^{\psi} \delta(\varsigma) d\varsigma \right| \\ & \leq \frac{\|\delta^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\psi - v)^5 \end{aligned}$$

olup eşitsizliğin her iki tarafı  $(\psi - v)$  ile bölünürse

$$\left| \frac{1}{3} \left[ \frac{\delta(v) + \delta(\psi)}{2} + 2\delta \left( \frac{v + \psi}{2} \right) \right] - \frac{1}{\psi - v} \int_v^{\psi} \delta(\varsigma) d\varsigma \right| \leq \frac{1}{2880} \|\delta^{(4)}\|_{\infty} (\psi - v)^4$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.5 (Chebyshev Eşitsizliği):**  $\delta$  ve  $\varrho$  fonksiyonları integrallenebilir ve senkronize fonksiyonlar olsun. O halde

$$\int_v^{\psi} \delta(\varsigma) \varrho(\varsigma) d\varsigma \geq \frac{1}{\psi - v} \int_v^{\psi} \delta(\varsigma) d\varsigma \int_v^{\psi} \varrho(\varsigma) d\varsigma$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer  $\delta$  ve  $\varrho$  farklı monotonluğa sahip ise eşitsizlik yön değiştirir.  $\delta$  ve  $\varrho$  fonksiyonları sabit ise eşitlik sağlanır (Chebyshev, 1882).

**İspat**  $\delta$  ve  $\varrho$ , senkronize fonksiyonlardan olduğundan

$$(\delta(\varsigma) - \delta(\eta)) (\varrho(\varsigma) - \varrho(\eta)) \geq 0$$

yazılabilir. İki tarafın çift katlı integrali alınır

$$\int_v^{\psi} \int_v^{\psi} (\delta(\varsigma) - \delta(\eta)) (\varrho(\varsigma) - \varrho(\eta)) d\varsigma d\eta \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \int_v^{\psi} \int_v^{\psi} \delta(\varsigma) \varrho(\varsigma) d\varsigma d\eta + \int_v^{\psi} \int_v^{\psi} \delta(\eta) \varrho(\eta) d\varsigma d\eta \\ & \geq \int_v^{\psi} \int_v^{\psi} \delta(\varsigma) \varrho(\eta) d\varsigma d\eta + \int_v^{\psi} \int_v^{\psi} \delta(\eta) \varrho(\varsigma) d\varsigma d\eta \end{aligned}$$

ve devamında

$$\frac{1}{\psi - v} \int_v^{\psi} \delta(\varsigma) \varrho(\varsigma) d\varsigma + \frac{1}{\psi - v} \int_v^{\psi} \delta(\eta) \varrho(\eta) d\eta$$

$$\geq \int_v^\psi \delta(\varsigma) \left( \int_v^\psi \varrho(\eta) d\eta \right) d\varsigma + \int_v^\psi \delta(\eta) \left( \int_v^\psi \varrho(\varsigma) d\varsigma \right) d\eta$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{2}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) \varrho(\varsigma) d\varsigma \geq 2 \left( \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \right) \left( \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \varrho(\varsigma) d\varsigma \right)$$

bulunur. Son ifadeden istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 2.6 (Grüss Eşitsizliği):**  $\delta$  ve  $\varrho$  fonksiyonları  $[v, \psi]$  aralığında integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Her  $\varsigma \in [v, \psi]$  ve  $c, C, n, N \in \mathbb{R}$  için  $c \leq \delta \leq C$  ve  $n \leq \varrho \leq N$  şartları altında

$$\left| \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) \varrho(\varsigma) d\varsigma - \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \frac{1}{\psi - v} \int_v^\psi \varrho(\varsigma) d\varsigma \right| \leq \frac{1}{4} (C - c) (N - n)$$

eşitsizliği geçerlidir (Grüss, 1935).

**İspat**

$$\phi(\varsigma, \eta) = (\delta(\varsigma) - \delta(\eta)) (\varrho(\varsigma) - \varrho(\eta))$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyonun  $[v, \psi]$  aralığında  $\varsigma$  ve  $\eta$  değişkenleri için her iki tarafının çift katlı integrali alınır ve düzenlemeler yapılırsa

$$\int_v^\psi \int_v^\psi \phi(\varsigma, \eta) d\varsigma d\eta = 2(\psi - v) \int_v^\psi (\delta \varrho)(\varphi) d\varphi - 2 \int_v^\psi \delta(\varphi) d\varphi \int_v^\psi \varrho(\varphi) d\varphi$$

olur. Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left( (\psi - v) \int_v^\psi (\delta \varrho)(\varphi) d\varphi - \int_v^\psi \delta(\varphi) d\varphi \int_v^\psi \varrho(\varphi) d\varphi \right)^2 \\ & \leq \left( (\psi - v) \int_v^\psi \delta^2(\varphi) d\varphi - \left( \int_v^\psi \delta(\varphi) d\varphi \right)^2 \right) \left( (\psi - v) \int_v^\psi \varrho^2(\varphi) d\varphi - \left( \int_v^\psi \varrho(\varphi) d\varphi \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. Ayrıca  $(C - \delta(\varphi)) (\delta(\varphi) - c) \geq 0$  ve  $(N - \varrho(\varphi)) (\varrho(\varphi) - n) \geq 0$  olduğundan

$$(\psi - v) \int_v^\psi (C - \delta(\varphi)) (\delta(\varphi) - c) d\varphi \geq 0$$

ve

$$(\psi - v) \int_v^\psi (N - \varrho(\varphi)) (\varrho(\varphi) - n) d\varphi \geq 0$$

olur. Diğer taraftan  $\delta$  fonksiyonu için

$$\begin{aligned} & (C - \delta(\varsigma)) (\delta(\eta) - c) + (C - \delta(\eta)) (\delta(\varsigma) - c) \\ & - (C - \delta(\varsigma)) (\delta(\varsigma) - c) - (C - \delta(\eta)) (\delta(\eta) - c) \\ & = \delta^2(\varsigma) + \delta^2(\eta) - 2\delta(\varsigma)\delta(\eta) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Son eşitliğin her iki tarafının  $[v, \psi]$  aralığında önce  $\varsigma$  için daha sonra  $\eta$  için integrali alınır düzenlenirse

$$\begin{aligned} & (\psi - v) \int_v^\psi \delta^2(\varphi) d\varphi - \left( \int_v^\psi \delta(\varphi) d\varphi \right)^2 \\ & = \left( (\psi - v) C - \int_v^\psi \delta(\varphi) d\varphi \right) \left( \int_v^\psi \delta(\varphi) d\varphi - c(\psi - v) \right) \\ & \quad - (\psi - v) \int_v^\psi (C - \delta(\varphi)) (\delta(\varphi) - c) d\varphi \end{aligned} \quad (2.11)$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde  $\varrho$  fonksiyonu için

$$\begin{aligned} & (\psi - v) \int_v^\psi \varrho^2(\varphi) d\varphi - \left( \int_v^\psi \varrho(\varphi) d\varphi \right)^2 \\ & = \left( (\psi - v) N - \int_v^\psi \varrho(\varphi) d\varphi \right) \left( \int_v^\psi \varrho(\varphi) d\varphi - n(\psi - v) \right) \\ & \quad - (\psi - v) \int_v^\psi (N - \varrho(\varphi)) (\varrho(\varphi) - n) d\varphi \end{aligned} \quad (2.12)$$

bulunur. (2.10), (2.11) ve (2.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left( (\psi - v) \int_v^\psi \delta(\varphi) \varrho^2(\varphi) d\varphi - \left( \int_v^\psi \delta(\varphi) \varrho(\varphi) d\varphi \right)^2 \right) \\ & \leq \left( (\psi - v) C - \int_v^\psi \delta(\varphi) d\varphi \right) \left( \int_v^\psi \delta(\varphi) d\varphi - c \right) \\ & \quad \times \left( (\psi - v) N - \int_v^\psi \varrho(\varphi) d\varphi \right) \left( \int_v^\psi \varrho(\varphi) d\varphi - n \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

elde edilir.  $u, v \in \mathbb{R}$  için  $4uv \leq (u + v)^2$  eşitliği kullanılırsa

$$4 \left( (\psi - v) C - \int_v^\psi \delta(\varphi) d\varphi \right) \left( \int_v^\psi \delta(\varphi) d\varphi - c \right) \leq ((\psi - v) (C - c))^2 \quad (2.14)$$

ve

$$4 \left( (\psi - v) N - \int_v^\psi \varrho(\varphi) d\varphi \right) \left( \int_v^\psi \varrho(\varphi) d\varphi - n \right) \leq ((\psi - v) (N - n))^2 \quad (2.15)$$

bulunur. (2.13), (2.14) ve (2.15) kullanılırsa istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 2.7 (Cauchy-Schwarz İntegral Eşitsizliği):**  $\delta$  ve  $\varrho$ ,  $[v, \psi]$  kapalı aralığı üzerinde sürekli iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left( \int_v^\psi \delta(\varsigma) \varrho(\varsigma) d\varsigma \right)^2 \leq \int_v^\psi \delta^2(\varsigma) d\varsigma \int_v^\psi \varrho^2(\varsigma) d\varsigma$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik Cauchy-Schwarz integral eşitsizliği olarak bilinir (Samko et al., 1993).

**İspat** Her  $\varphi$  gerçel sayısı için  $0 \leq (\varphi \delta(\varsigma) + \varrho(\varsigma))^2$  'dir. Her iki tarafın  $[v, \psi]$  kapalı aralığı üzerinden integrali alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_v^\psi (\varphi \delta(\varsigma) + \varrho(\varsigma))^2 d\varsigma \\ &= \varphi^2 \int_v^\psi \delta^2(\varsigma) d\varsigma + 2\varphi \int_v^\psi \delta(\varsigma) \varrho(\varsigma) d\varsigma + \int_v^\psi \varrho^2(\varsigma) d\varsigma \\ &= A\varphi^2 + B\varphi + C \end{aligned}$$

olsun. Burada

$$\begin{aligned} A &= \int_v^\psi \delta^2(\varsigma) d\varsigma \\ B &= 2 \int_v^\psi \delta(\varsigma) \varrho(\varsigma) d\varsigma \\ C &= \int_v^\psi \varrho^2(\varsigma) d\varsigma \end{aligned}$$

eşit olsun. Her  $\varphi$  gerçel sayısı için  $0 \leq A\varphi^2 + B\varphi + C \iff \Delta = B^2 - 4AC \leq 0$  'dır.

Burada  $A, B, C$ , yerine tekrar integral eşitlikleri yazılarak

$$\left( \int_v^\psi \delta(\varsigma) \varrho(\varsigma) d\varsigma \right)^2 \leq \int_v^\psi \delta^2(\varsigma) d\varsigma \int_v^\psi \varrho^2(\varsigma) d\varsigma$$



sonucuna ulaşılır. Ayrıca Cauchy-Schwarz integral eşitsizliği  $\mathbb{R}^n$  'nin bir alt bölgesinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar için yazılırsa, çok katlı integrallerde de geçerli olduğu görülebilir. Bunun ispatı da yukarıdaki gibi yapılır.

**Teorem 2.8 (İntegraller İçin Minkowski Eşitsizliği):**  $\delta$  ve  $\varrho$ ,  $[v, \psi]$  kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli iki fonksiyon ve  $p > 1$  için,

$$\int_v^\psi |\delta(\varsigma)|^p d\varsigma < \infty$$

ve

$$\int_v^\psi |\varrho(\varsigma)|^p d\varsigma < \infty$$

olsun. Bu halde,

$$\left( \int_v^\psi |\delta(\varsigma) + \varrho(\varsigma)|^p d\varsigma \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_v^\psi |\delta(\varsigma)|^p d\varsigma \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_v^\psi |\varrho(\varsigma)|^p d\varsigma \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitlik için gerek ve yeter şart hemen hemen her yerde  $\delta(\varsigma) = 0$  olmasıdır (Mitrinovic and Vasic, 1970).

**Teorem 2.9 (Young Eşitsizliği):**  $v, \psi \geq 0$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olacak şekilde  $1 < p, q < \infty$  olsun. O halde,

$$v\psi \leq \frac{1}{p}v^p + \frac{1}{q}\psi^q$$

eşitsizliği geçerlidir (Young, 1912).

**Teorem 2.10 (Üçgen Eşitsizliği):**  $v$  ve  $\psi$  reel sayı olmak üzere

$$|v + \psi| = |v| + |\psi|$$

ve tümevarım yoluyla

$$|v_1 + v_2 + \dots + v_n| = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

**Teorem 2.11 (İntegraller için Üçgen Eşitsizliği):**  $\delta$ ,  $[v, \psi]$  aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\left| \int_v^\psi \delta(\varsigma) d\varsigma \right| \leq \int_v^\psi |\delta(\varsigma)| d\varsigma$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

**Tanım 3.1 (Riemann – Liouville Kesirli İntegral Operatör):**  $\delta \in L[v, \psi]$  olmak şartıyla  $J_{v+}^{\alpha}\delta$  ve  $J_{\psi-}^{\alpha}\delta$  Riemann - Liouville kesirli integrallerinin  $v > 0$  ve  $\alpha \geq 0$  için tanımları sırasıyla

$$J_{v+}^{\alpha}\delta(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_v^{\varsigma} (\varsigma - \varphi)^{(\alpha-1)} \delta(\varphi) d\varphi \quad (\varsigma > v)$$

ve

$$J_{\psi-}^{\alpha}\delta(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varsigma}^{\psi} (\varphi - \varsigma)^{(\alpha-1)} \delta(\varphi) d\varphi \quad (\psi > \varsigma)$$

olarak tanımlanır (Samko et al., 1993).

Burada  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\varphi} \varphi^{\alpha-1} d\varphi$  olarak bilinen gama fonksiyonudur ve  $\alpha = 1$  seçilirse Riemann – Liouville kesirli integrali klasik integrale dönüşür. Ayrıca Riemann – Liouville tanımında  $\alpha = 0$  alınırsa,

$$J_{v+}^0\delta(\varsigma) = \delta(\varsigma)$$

ve

$$J_{\psi-}^0\delta(\varsigma) = \delta(\varsigma)$$

eşitlikleri elde edilir.

**Tanım 3.2 (Hadamard Kesirli İntegral Operatör):**  $\delta : [v, \psi] \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $[v, \psi]$  aralığında integrallenebilir bir fonksiyon,  $\alpha > 0$  ve  $0 < v < \psi$  için

$${}_H J_{v+}^{\alpha}\delta(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_v^{\varsigma} \frac{\delta(\varphi)}{\left(\ln \frac{\varsigma}{\varphi}\right)^{(1-\alpha)}} \frac{d\varphi}{\varphi} \quad (\varsigma > v)$$

ve

$${}_H J_{\psi-}^{\alpha}\delta(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varsigma}^{\psi} \frac{\delta(\varphi)}{\left(\ln \frac{\varphi}{\varsigma}\right)^{(1-\alpha)}} \frac{d\varphi}{\varphi} \quad (\psi > \varsigma)$$

integrallerine  $\alpha$ . mertebeden Hadamard kesirli integrali denir ve burada  ${}_H J_{0+}^{\alpha}\delta = {}_H J_{+}^{\alpha}\delta$  ve  ${}_H J_{\infty-}^{\alpha}\delta = {}_H J_{-}^{\alpha}\delta$  dır (Samko et al., 1993).

**Tanım 3.3 (Katugampola Kesirli İntegral Operatör):**  $[v, \psi] \subset \mathbb{R}$  sınırlı bir aralık,  $v < \varsigma < \psi$  ve  $\rho > 0$  olsun.  $(\alpha > 0)$  ve  $\delta \in X_c^p(v, \psi)$  için sol ve sağ Katugampola

kesirli integralleri

$${}^{\rho}I_{v+}^{\alpha}\delta(\varsigma) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_v^{\varsigma} \frac{\varphi^{\rho-1}}{(\varsigma^{\rho} - \varphi^{\rho})^{(1-\alpha)}} \delta(\varphi) d\varphi \quad (\varsigma > v)$$

ve

$${}^{\rho}I_{\psi-}^{\alpha}\delta(\varsigma) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varsigma}^{\psi} \frac{\varphi^{\rho-1}}{(\varsigma^{\rho} - \varphi^{\rho})^{(1-\alpha)}} \delta(\varphi) d\varphi \quad (\psi > \varsigma)$$

olarak tanımlanır (Katugampola, 2014).

**Tanım 3.4 (Caputo Kesirli Türev Operatör):**  $\delta \in L(v, \psi)$  ve  $v < \varsigma < \psi$  olsun. Bu durumda  $\alpha > 0$ ,  $[\alpha]$   $\alpha$ 'nın tam değeri olmak üzere  $m = [\alpha] + 1$  için sırasıyla  $\alpha$ . mertebeden sol ve sağ Caputo kesirli türevleri

$${}^CD_{v+}^{\alpha}\delta(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_v^{\varsigma} \frac{\delta^{(m)}(\varphi)}{(\varsigma - \varphi)^{\alpha+1-m}} d\varphi \quad (\varsigma > v)$$

ve

$${}^CD_{\psi-}^{\alpha}\delta(\varsigma) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{\varsigma}^{\psi} \frac{\delta^{(m)}(\varphi)}{(\varphi - \varsigma)^{\alpha+1-m}} d\varphi \quad (\psi > \varsigma)$$

şeklindedir (Caputo, 1967).

**Tanım 3.5 (Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral Operatör):**  $\delta \in L(v, \psi)$  ve  $v < \varsigma < \psi$  olsun. Bu durumda,  $\alpha \in [0, 1]$  olmak üzere  $\alpha$ . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli integralleri

$${}^CF_v I^{\alpha}\delta(\varsigma) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\delta(\varsigma) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_v^{\varsigma} \delta(\varphi) d\varphi \quad (\varsigma > v)$$

ve

$${}^CF_{\psi} I^{\alpha}\delta(\varsigma) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\delta(\varsigma) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_{\varsigma}^{\psi} \delta(\varphi) d\varphi \quad (\psi > \varsigma)$$

olarak tanımlanır. Burada  $B(\alpha) > 0$  normalleştirme fonksiyonu olup  $B(0) = B(1) = 1$  şeklindedir (Caputo and Fabrizio, 2015).

**Tanım 3.6 (Oransal-Caputo Hibrit Operatör):**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^{\circ}$  kümesi üzerinde türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta' \in L^1[I]$  olsun. O halde, Oransal-Caputo hibrit operatörü şu şekilde tanımlanabilir (Baleanu et al., 2020).

$${}^{CPC}_0 D^{\alpha}_{\varsigma}\delta(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\varsigma} (\kappa_1(\alpha) \delta(\varphi) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varphi)) (\varsigma - \varphi)^{-\alpha} d\varphi \quad (3.1)$$

burada  $\alpha \in [0, 1]$  aralığında ve  $\kappa_0, \kappa_1$  ise uygun fonksiyonlardır.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \kappa_0(\alpha) = 0; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \kappa_0(\alpha) = 1; \quad \kappa_0(\alpha) \neq 0, \quad \alpha \in (0, 1]; \quad (3.2)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \kappa_1(\alpha) = 1; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \kappa_1(\alpha) = 0; \quad \kappa_1(\alpha) \neq 0, \quad \alpha \in [0, 1). \quad (3.3)$$

**Lemma 3.1**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  kümesi üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta' \in L^1[I]$  olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & \kappa_1(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta'(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma) d\varphi + \kappa_0(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta''(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma) d\varphi \\ & + \kappa_1(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta'(\varphi \varsigma + (1-\varphi)\psi) d\varphi + \kappa_0(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta''(\varphi \varsigma + (1-\varphi)\psi) d\varphi \\ & = -\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v) + \kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \\ & + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \end{aligned}$$

eşitliği  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $v, \psi \in I^\circ$ ,  $v < \varsigma < \psi$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ile  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir (Gürbüz et al., 2022).

**İspat** Yukarıdaki varsayımlar ile

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta'(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma) d\varphi \\ & = \varphi^{1-\alpha} \frac{\delta(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma)}{v - \varsigma} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\delta(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma)}{v - \varsigma} (1-\alpha) \varphi^{-\alpha} d\varphi \\ & = -\frac{\delta(v)}{\varsigma - v} + \frac{1-\alpha}{\varsigma - v} \int_0^1 \varphi^{-\alpha} \delta(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma) d\varphi \\ & = -\frac{\delta(v)}{\varsigma - v} + \frac{1-\alpha}{\varsigma - v} \int_\varsigma^v \left( \frac{\varsigma - u}{\varsigma - v} \right)^{-\alpha} \delta(u) \frac{du}{v - \varsigma} \\ & = -\frac{\delta(v)}{\varsigma - v} + \frac{1-\alpha}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} \int_\varsigma^v (\varsigma - u)^{-\alpha} \delta(u) du \end{aligned} \quad (3.4)$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta''(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma) d\varphi = -\frac{\delta'(v)}{\varsigma - v} + \frac{1-\alpha}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} \int_\varsigma^v (\varsigma - u)^{-\alpha} \delta'(u) du \quad (3.5)$$

ifadesi geçerlidir. (3.4) ve (3.5) sırasıyla  $\frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$  ve  $\frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$  ile çarpılır ve sonuçlar taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta'(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma) d\varphi + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta''(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma) d\varphi \\
&= \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( -\frac{\delta(v)}{\varsigma-v} + \frac{1-\alpha}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}} \int_v^\varsigma (\varsigma-u)^{-\alpha} \delta(u) du \right) \\
&+ \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( -\frac{\delta'(v)}{\varsigma-v} + \frac{1-\alpha}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}} \int_v^\varsigma (\varsigma-u)^{-\alpha} \delta'(u) du \right) \\
&= -\frac{1}{(\varsigma-v)\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)) \\
&+ \frac{1-\alpha}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}\Gamma(1-\alpha)} \left[ \int_v^\varsigma (\kappa_1(\alpha)\delta(u) + \kappa_0(\alpha)\delta'(u)) (\varsigma-u)^{-\alpha} du \right] \\
&= -\frac{1}{(\varsigma-v)\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)) \\
&+ \frac{1-\alpha}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}} {}^{CPC}D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma) \tag{3.6}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta'(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi) d\varphi \\
&= \varphi^{1-\alpha} \frac{\delta(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi)}{\varsigma-\psi} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\delta(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi)}{\varsigma-\psi} (1-\alpha) \varphi^{-\alpha} d\varphi \\
&= -\frac{\delta(\varsigma)}{\psi-\varsigma} + \frac{1-\alpha}{\psi-\varsigma} \int_0^1 \varphi^{-\alpha} \delta(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi) d\varphi \\
&= -\frac{\delta(\varsigma)}{\psi-\varsigma} + \frac{1-\alpha}{\psi-\varsigma} \int_\psi^\varsigma \left( \frac{\psi-u}{\psi-\varsigma} \right)^{-\alpha} \delta(u) \frac{du}{\varsigma-\psi} \\
&= -\frac{\delta(\varsigma)}{\psi-\varsigma} + \frac{1-\alpha}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}} \int_\varsigma^\psi (\psi-u)^{-\alpha} \delta(u) du \tag{3.7}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta''(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi) d\varphi = -\frac{\delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma} + \frac{1-\alpha}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}} \int_\varsigma^\psi (\psi-u)^{-\alpha} \delta'(u) du \tag{3.8}$$

ifadesi geçerlidir. (3.7) ve (3.8) sırasıyla  $\frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$  ve  $\frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$  ile çarpılır ve sonuçlar taraf tarafa

toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta'(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi) d\varphi + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} \delta''(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi) d\varphi \\
&= \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( -\frac{\delta(\varsigma)}{\psi-\varsigma} + \frac{1-\alpha}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}} \int_{\varsigma}^{\psi} (\psi-u)^{-\alpha} \delta(u) du \right) \\
&+ \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( -\frac{\delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma} + \frac{1-\alpha}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}} \int_{\varsigma}^{\psi} (\psi-u)^{-\alpha} \delta'(u) du \right) \\
&= -\frac{1}{(\psi-\varsigma)\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)) \\
&+ \frac{1-\alpha}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}\Gamma(1-\alpha)} \left[ \int_{\varsigma}^{\psi} (\kappa_1(\alpha)\delta(u) + \kappa_0(\alpha)\delta'(u)) (\psi-u)^{-\alpha} du \right] \\
&= -\frac{1}{(\psi-\varsigma)\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)) \\
&+ \frac{1-\alpha}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}} {}^{CPC}_{\varsigma} D_{\psi}^{\alpha} \delta(\psi)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

bulunur. (3.6) ve (3.9) toplanarak istenen sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.1**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  kümesi üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta' \in L^1[I]$  olsun.  $\delta'$  ve  $\delta''$ ,  $I$  kümesi üzerinde konveks fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma-v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma} \right. \\
& \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_{\varsigma}^{\alpha} \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_{\varsigma} D_{\psi}^{\alpha} \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq \frac{\kappa_1(\alpha)|\delta'(v)| + \kappa_0(\alpha)|\delta''(v)|}{(3-\alpha)} \\
& + \frac{\kappa_1(\alpha)|\delta'(\psi)| + \kappa_0(\alpha)|\delta''(\psi)|}{(3-\alpha)(2-\alpha)} \\
& + \frac{\kappa_1(\alpha)|\delta'(\varsigma)| + \kappa_0(\alpha)|\delta''(\varsigma)|}{(2-\alpha)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $v, \psi \in I^\circ$ ,  $v < \varsigma < \psi$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir (Gürbüz et al., 2022).

**İspat** Lemma 3.1 ve mutlak değer özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma-v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma} \right. \\
& \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_{\varsigma}^{\alpha} \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_{\varsigma} D_{\psi}^{\alpha} \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \kappa_1(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} |\delta'(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma)| d\varphi \\
&\quad + \kappa_0(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} |\delta''(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma)| d\varphi \\
&\quad + \kappa_1(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} |\delta'(\varphi \varsigma + (1-\varphi)\psi)| d\varphi \\
&\quad + \kappa_0(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} |\delta''(\varphi \varsigma + (1-\varphi)\psi)| d\varphi
\end{aligned} \tag{3.10}$$

bulunur.  $\delta'$  ve  $\delta''$  fonksiyonlarının konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v) + \kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
&\leq \kappa_1(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} (\varphi |\delta'(v)| + (1-\varphi) |\delta'(\varsigma)|) d\varphi \\
&\quad + \kappa_0(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} (\varphi |\delta''(v)| + (1-\varphi) |\delta''(\varsigma)|) d\varphi \\
&\quad + \kappa_1(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} (\varphi |\delta'(\varsigma)| + (1-\varphi) |\delta'(\psi)|) d\varphi \\
&\quad + \kappa_0(\alpha) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} (\varphi |\delta''(\varsigma)| + (1-\varphi) |\delta''(\psi)|) d\varphi
\end{aligned}$$

elde edilir. Basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v) + \kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
&= (\kappa_1(\alpha) |\delta'(\varsigma)| + \kappa_0(\alpha) |\delta''(\varsigma)|) \int_0^1 (\varphi^{1-\alpha} (1-\varphi) + \varphi^{2-\alpha}) d\varphi \\
&\quad + (\kappa_1(\alpha) |\delta'(v)| + \kappa_0(\alpha) |\delta''(v)|) \int_0^1 \varphi^{2-\alpha} d\varphi \\
&\quad + (\kappa_1(\alpha) |\delta'(\psi)| + \kappa_0(\alpha) |\delta''(\psi)|) \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} (1-\varphi) d\varphi
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.2**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  kümesi üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta' \in L^1[I]$  olsun.  $|\delta'|^q$  ve  $|\delta''|^q$ ,  $I$  kümesi üzerinde konveks fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\ & \leq \frac{1}{((1-\alpha)p+1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}}} \left[ \kappa_1(\alpha) (|\delta'(v)|^q + |\delta'(\varsigma)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \kappa_0(\alpha) (|\delta''(v)|^q + |\delta''(\varsigma)|^q)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \kappa_1(\alpha) (|\delta'(\varsigma)|^q + |\delta'(\psi)|^q)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \left. + \kappa_0(\alpha) (|\delta''(\varsigma)|^q + |\delta''(\psi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $v, \psi \in I^\circ$ ,  $v < \varsigma < \psi$ ,  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir (Gürbüz et al., 2022).

**İspat** (3.10) ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\ & \leq \kappa_1(\alpha) \left[ \left( \int_0^1 \varphi^{(1-\alpha)p} d\varphi \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |\delta'(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma)|^q d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \kappa_0(\alpha) \left[ \left( \int_0^1 \varphi^{(1-\alpha)p} d\varphi \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |\delta''(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma)|^q d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \kappa_1(\alpha) \left[ \left( \int_0^1 \varphi^{(1-\alpha)p} d\varphi \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |\delta'(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi)|^q d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \kappa_0(\alpha) \left[ \left( \int_0^1 \varphi^{(1-\alpha)p} d\varphi \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |\delta''(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi)|^q d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

yazılabilir.  $|\delta'|^q$  ve  $|\delta''|^q$  fonksiyonlarının konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{((1-\alpha)p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \kappa_1(\alpha) \left( \int_0^1 (\varphi |\delta'(v)|^q + (1-\varphi) |\delta'(\varsigma)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad + \kappa_0(\alpha) \left( \int_0^1 (\varphi |\delta''(v)|^q + (1-\varphi) |\delta''(\varsigma)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \kappa_1(\alpha) \left( \int_0^1 (\varphi |\delta'(\varsigma)|^q + (1-\varphi) |\delta'(\psi)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \kappa_0(\alpha) \left( \int_0^1 (\varphi |\delta''(\varsigma)|^q + (1-\varphi) |\delta''(\psi)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v) + \kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{((1-\alpha)p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(v)|^q + |\delta'(\varsigma)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(v)|^q + |\delta''(\varsigma)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(\varsigma)|^q + |\delta'(\psi)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(\varsigma)|^q + |\delta''(\psi)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.3**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  kümesi üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta' \in L^1[I]$  olsun.  $|\delta'|^q$  ve  $|\delta''|^q$ ,  $I$  kümesi üzerinde konveks fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v) + \kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \times (2-\alpha)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\leq \left\{ \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(v)|^q}{(3-\alpha)} + \frac{|\delta'(\varsigma)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(v)|^q}{(3-\alpha)} + \frac{|\delta''(\varsigma)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(\varsigma)|^q}{(3-\alpha)} + \frac{|\delta'(\psi)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(\varsigma)|^q}{(3-\alpha)} + \frac{|\delta''(\psi)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $v, \psi \in I^\circ$ ,  $v < \varsigma < \psi$ ,  $q \geq 1$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir (Gürbüz et al., 2022).

**İspat** (3.10) ve Power Mean eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\ & \leq \kappa_1(\alpha) \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} d\varphi \right)^{1-\frac{1}{q}} \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} |\delta'(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma)|^q d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \kappa_0(\alpha) \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} d\varphi \right)^{1-\frac{1}{q}} \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} |\delta''(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma)|^q d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \kappa_1(\alpha) \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} d\varphi \right)^{1-\frac{1}{q}} \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} |\delta'(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi)|^q d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \kappa_0(\alpha) \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} d\varphi \right)^{1-\frac{1}{q}} \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} |\delta''(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi)|^q d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

yazılabilir.  $|\delta'|^q$  ve  $|\delta''|^q$  fonksiyonlarının konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\ & \leq \left( \frac{1}{2-\alpha} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ \kappa_1(\alpha) \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} (\varphi |\delta'(v)|^q + (1-\varphi) |\delta'(\varsigma)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \kappa_0(\alpha) \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} (\varphi |\delta''(v)|^q + (1-\varphi) |\delta''(\varsigma)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \kappa_1(\alpha) \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} (\varphi |\delta'(\varsigma)|^q + (1-\varphi) |\delta'(\psi)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \left. + \kappa_0(\alpha) \left( \int_0^1 \varphi^{1-\alpha} (\varphi |\delta''(\varsigma)|^q + (1-\varphi) |\delta''(\psi)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right|$$

$$\begin{aligned}
& +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right)\Bigg| \\
\leq & \left(\frac{1}{2-\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\kappa_1(\alpha)\left(\frac{|\delta'(v)|^q}{(3-\alpha)}+\frac{|\delta'(\varsigma)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{|\delta''(v)|^q}{(3-\alpha)}+\frac{|\delta''(\varsigma)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\kappa_1(\alpha)\left(\frac{|\delta'(\varsigma)|^q}{(3-\alpha)}+\frac{|\delta'(\psi)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left.+\kappa_0(\alpha)\left(\frac{|\delta''(\varsigma)|^q}{(3-\alpha)}+\frac{|\delta''(\psi)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.4**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  kümesi üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta' \in L^1[I]$  olsun.  $|\delta'|^q$  ve  $|\delta''|^q$ ,  $I$  kümesi üzerinde konveks fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v)+\kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma-v}-\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma)+\kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma}\right. \\
& \left. +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right)\right| \\
\leq & \frac{2(\kappa_1(\alpha)+\kappa_0(\alpha))}{p^2(1-\alpha)+p} \\
& +\frac{\kappa_1(\alpha)}{2q}\left(|\delta'(v)|^q+2|\delta'(\varsigma)|^q+|\delta'(\psi)|^q\right) \\
& +\frac{\kappa_0(\alpha)}{2q}\left(|\delta''(v)|^q+2|\delta''(\varsigma)|^q+|\delta''(\psi)|^q\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $v, \psi \in I^\circ$ ,  $v < \varsigma < \psi$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $q > 1$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir (Gürbüz et al., 2022).

**İspat** (3.10) ve Young eşitsizliği  $\left(mn \leq \frac{m^p}{p} + \frac{n^q}{q}\right)$  yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v)+\kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma-v}-\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma)+\kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma}\right. \\
& \left. +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right)\right| \\
\leq & \kappa_1(\alpha)\left[\frac{1}{p}\int_0^1\varphi^{p(1-\alpha)}d\varphi+\frac{1}{q}\int_0^1|\delta'(\varphi v+(1-\varphi)\varsigma)|^qd\varphi\right] \\
& +\kappa_0(\alpha)\left[\frac{1}{p}\int_0^1\varphi^{p(1-\alpha)}d\varphi+\frac{1}{q}\int_0^1|\delta''(\varphi v+(1-\varphi)\varsigma)|^qd\varphi\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\kappa_1(\alpha) \left[ \frac{1}{p} \int_0^1 \varphi^{p(1-\alpha)} d\varphi + \frac{1}{q} \int_0^1 |\delta'(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi)|^q d\varphi \right] \\
& +\kappa_0(\alpha) \left[ \frac{1}{p} \int_0^1 \varphi^{p(1-\alpha)} d\varphi + \frac{1}{q} \int_0^1 |\delta''(\varphi\varsigma + (1-\varphi)\psi)|^q d\varphi \right]
\end{aligned}$$

yazılabilir.  $|\delta'|^q$  ve  $|\delta''|^q$  fonksiyonlarının konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\
& \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
\leq & \kappa_1(\alpha) \left[ \frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} + \frac{1}{q} \int_0^1 (\varphi |\delta'(v)|^q + (1-\varphi) |\delta'(\varsigma)|^q) d\varphi \right] \\
& + \kappa_0(\alpha) \left[ \frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} + \frac{1}{q} \int_0^1 (\varphi |\delta''(v)|^q + (1-\varphi) |\delta''(\varsigma)|^q) d\varphi \right] \\
& + \kappa_1(\alpha) \left[ \frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} + \frac{1}{q} \int_0^1 (\varphi |\delta'(\varsigma)|^q + (1-\varphi) |\delta'(\psi)|^q) d\varphi \right] \\
& + \kappa_0(\alpha) \left[ \frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} + \frac{1}{q} \int_0^1 (\varphi |\delta''(\varsigma)|^q + (1-\varphi) |\delta''(\psi)|^q) d\varphi \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\
& \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
\leq & \kappa_1(\alpha) \left[ \frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} + \frac{|\delta'(v)|^q + |\delta'(\varsigma)|^q}{2q} \right] \\
& + \kappa_0(\alpha) \left[ \frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} + \frac{|\delta''(v)|^q + |\delta''(\varsigma)|^q}{2q} \right] \\
& + \kappa_1(\alpha) \left[ \frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} + \frac{|\delta'(\varsigma)|^q + |\delta'(\psi)|^q}{2q} \right] \\
& + \kappa_0(\alpha) \left[ \frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} + \frac{|\delta''(\varsigma)|^q + |\delta''(\psi)|^q}{2q} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, (3.1) ifadesinde verilen birleştirilmiş çift taraflı integral operatör yardımıyla bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

### 4.1. Oransal-Caputo Hibrit Operatör Yardımıyla Farklı Konveks Fonksiyon Türleri İçin Elde Edilen Bazı Bulgular

**Teorem 4.1**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  kümesi üzerinde türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta' \in L^1[I]$  olsun.  $\delta$  ve  $\delta'$ ,  $I$  kümesi üzerinde konveks fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned} & {}^{CPC}_0 D_\varphi^\alpha \delta(u) \\ & \leq \frac{(\psi - v)^{\alpha-3}}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{u^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{(\psi - v)(\psi - u)u^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \\ & \quad \times [\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)] \\ & \quad + \frac{(\psi - v)^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{u^{2-\alpha}}{(\psi - v)^2(2-\alpha)} - \frac{(\psi - u)u^{1-\alpha}}{(\psi - v)(1-\alpha)} \right) \\ & \quad \times [\kappa_1(\alpha)\delta(\psi) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\psi)] \end{aligned}$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $v, \psi \in I^\circ$ ,  $\psi \neq v$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir.

**İspat** Oransal-Caputo hibrit operatörü, mutlak değer fonksiyonu özellikleri ve  $\varsigma = \varphi v + (1 - \varphi)\psi$  değişken dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned} & {}^{CPC}_0 D_\varphi^\alpha \delta(u) \\ & = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u (\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\ & = \frac{\psi - v}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} \left( \begin{array}{c} \kappa_1(\alpha)\delta(\varphi v + (1-\varphi)\psi) \\ + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varphi v + (1-\varphi)\psi) \end{array} \right) (u - (\varphi v + (1-\varphi)\psi))^{-\alpha} d\varphi \\ & = \frac{(\psi - v)\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} \delta(\varphi v + (1-\varphi)\psi) (u - (\varphi v + (1-\varphi)\psi))^{-\alpha} d\varphi \end{aligned}$$

$$+ \frac{(\psi - v) \kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} \delta'(\varphi v + (1 - \varphi) \psi) (u - (\varphi v + (1 - \varphi) \psi))^{-\alpha} d\varphi \quad (4.1)$$

yazılabilir.  $\delta$  ve  $\delta'$  fonksiyonlarının konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & {}^{CPC}_0 D_{\varphi}^{\alpha} \delta(u) \\ & \leq \frac{(\psi - v) \kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} (\varphi \delta(v) + (1 - \varphi) \delta(\psi)) (u - (\varphi v + (1 - \varphi) \psi))^{-\alpha} d\varphi \\ & \quad + \frac{(\psi - v) \kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} (\varphi \delta'(v) + (1 - \varphi) \delta'(\psi)) (u - (\varphi v + (1 - \varphi) \psi))^{-\alpha} d\varphi \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} & {}^{CPC}_0 D_{\varphi}^{\alpha} \delta(u) \\ & \leq \frac{(\psi - v) \kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \left[ \frac{\delta(v)}{(\psi - v)^{4-\alpha}} \left( \frac{u^{2-\alpha}}{2 - \alpha} + \frac{(\psi - v)(\psi - u) u^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right) \right. \\ & \quad \left. + \delta(\psi) \left( \frac{u^{1-\alpha}}{(\psi - v)^{2-\alpha} (1 - \alpha)} - \frac{u^{2-\alpha}}{(\psi - v)^{4-\alpha} (2 - \alpha)} - \frac{(\psi - u) u^{1-\alpha}}{(\psi - v)^{3-\alpha} (1 - \alpha)} \right) \right] \\ & \quad + \frac{(\psi - v) \kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \left[ \frac{\delta'(v)}{(\psi - v)^{4-\alpha}} \left( \frac{u^{2-\alpha}}{2 - \alpha} + \frac{(\psi - v)(\psi - u) u^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right) \right. \\ & \quad \left. + \delta'(\psi) \left( \frac{u^{1-\alpha}}{(\psi - v)^{2-\alpha} (1 - \alpha)} - \frac{u^{2-\alpha}}{(\psi - v)^{4-\alpha} (2 - \alpha)} - \frac{(\psi - u) u^{1-\alpha}}{(\psi - v)^{3-\alpha} (1 - \alpha)} \right) \right] \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  kümesi üzerinde türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta' \in L^1[I]$  olsun.  $\delta$  ve  $\delta'$ ,  $I$  kümesi üzerinde ikinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned} & {}^{CPC}_0 D_{\varphi}^{\alpha} \delta(u) \\ & \leq \frac{(\psi - u)^s u^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha) (\psi - v)^{2s-\alpha}} \left( {}_2\mathcal{F}_1 \left[ -s, 1 - \alpha; 2 - \alpha; \frac{-u}{(\psi - v)(\psi - u)} \right] \right) \\ & \quad \times [\kappa_1(\alpha) \delta(v) + \kappa_0(\alpha) \delta'(v)] \\ & \quad + \frac{(u - v)^s u^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha) (\psi - v)^{2s-\alpha}} \left( {}_2\mathcal{F}_1 \left[ -s, 1 - \alpha; 2 - \alpha; \frac{u}{(\psi - v)(u - v)} \right] \right) \\ & \quad \times [\kappa_1(\alpha) \delta(\psi) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\psi)] \end{aligned}$$

eşitsizliği  $s \in (0, 1]$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $v, \psi \in I^\circ$ ,  $\psi \neq v \neq u$ ,  $\left| \frac{u}{(\psi - v)(u - v)} \right| < 1$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir.

**İspat** (4.1) ile  $\delta$  ve  $\delta'$  fonksiyonlarının  $s$ -konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& {}^{CPC}_0 D_\varphi^\alpha \delta(u) \\
&= \frac{(\psi-v)\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} \delta(\varphi v + (1-\varphi)\psi) (u - (\varphi v + (1-\varphi)\psi))^{-\alpha} d\varphi \\
&\quad + \frac{(\psi-v)\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} \delta'(\varphi v + (1-\varphi)\psi) (u - (\varphi v + (1-\varphi)\psi))^{-\alpha} d\varphi \\
&\leq \frac{(\psi-v)\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} (\varphi^s \delta(v) + (1-\varphi)^s \delta(\psi)) (u - (\varphi v + (1-\varphi)\psi))^{-\alpha} d\varphi \\
&\quad + \frac{(\psi-v)\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} (\varphi^s \delta'(v) + (1-\varphi)^s \delta'(\psi)) (u - (\varphi v + (1-\varphi)\psi))^{-\alpha} d\varphi
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
& {}^{CPC}_0 D_\varphi^\alpha \delta(u) \\
&\leq \frac{(\psi-v)\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \delta(v) \frac{(\psi-u)^s u^{1-\alpha}}{(\psi-v)^{2s-\alpha+1} (1-\alpha)} \right. \\
&\quad \times \left( {}_2\mathcal{F}_1 \left[ -s, 1-\alpha; 2-\alpha; \frac{-u}{(\psi-v)(\psi-u)} \right] \right) \\
&\quad + \delta(\psi) \frac{(u-v)^s u^{1-\alpha}}{(\psi-v)^{2s-\alpha+1} (1-\alpha)} \\
&\quad \times \left( {}_2\mathcal{F}_1 \left[ -s, 1-\alpha; 2-\alpha; \frac{u}{(\psi-v)(u-v)} \right] \right) \Big] \\
&\quad + \frac{(\psi-v)\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \delta'(v) \frac{(\psi-u)^s u^{1-\alpha}}{(\psi-v)^{2s-\alpha+1} (1-\alpha)} \right. \\
&\quad \times \left( {}_2\mathcal{F}_1 \left[ -s, 1-\alpha; 2-\alpha; \frac{-u}{(\psi-v)(\psi-u)} \right] \right) \\
&\quad + \delta'(\psi) \frac{(u-v)^s u^{1-\alpha}}{(\psi-v)^{2s-\alpha+1} (1-\alpha)} \\
&\quad \times \left( {}_2\mathcal{F}_1 \left[ -s, 1-\alpha; 2-\alpha; \frac{u}{(\psi-v)(u-v)} \right] \right) \Big]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.3**  $\delta : I = [a, \infty) \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  kümesi üzerinde türevlenebilir olsun.

Aynı zamanda  $\delta, \delta' \in L^1[I]$  olsun.  $\delta$  ve  $\delta'$ ,  $I$  kümesi üzerinde  $m$ -konveks fonksiyonlar ise,

$${}^{CPC}_0 D_\varphi^\alpha \delta(u)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\psi-v)^{\alpha-3}}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{u^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{(\psi-v)(\psi-u)u^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \\
&\quad \times [\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)] \\
&\quad + \frac{(\psi-v)^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{u^{2-\alpha}}{(\psi-v)^2(2-\alpha)} - \frac{(\psi-u)u^{1-\alpha}}{(\psi-v)(1-\alpha)} \right) \\
&\quad \times \left[ \kappa_1(\alpha)m\delta\left(\frac{\psi}{m}\right) + \kappa_0(\alpha)m\delta'\left(\frac{\psi}{m}\right) \right]
\end{aligned}$$

*eşitsizliği*  $(\alpha, m) \in (0, 1)^2$ ,  $v, \psi \in I^\circ$ ,  $\psi \neq v$ , *ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan*  $\kappa_0$  *ve*  $\kappa_1$  *fonksiyonları için geçerlidir.*

**İspat** (4.1) ile  $\delta$  ve  $\delta'$  fonksiyonlarının  $m$ -konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&{}^{CPC}_0 D_\varphi^\alpha \delta(u) \\
&= \frac{(\psi-v)\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} \delta(\varphi v + (1-\varphi)\psi) (u - (\varphi v + (1-\varphi)\psi))^{-\alpha} d\varphi \\
&\quad + \frac{(\psi-v)\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} \delta'(\varphi v + (1-\varphi)\psi) (u - (\varphi v + (1-\varphi)\psi))^{-\alpha} d\varphi. \\
&\leq \frac{(\psi-v)\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} \left( \varphi\delta(v) + m(1-\varphi)\delta\left(\frac{\psi}{m}\right) \right) (u - (\varphi v + (1-\varphi)\psi))^{-\alpha} d\varphi \\
&\quad + \frac{(\psi-v)\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{\psi-u}{\psi-v}}^{\frac{\psi}{\psi-v}} \left( \varphi\delta'(v) + m(1-\varphi)\delta'\left(\frac{\psi}{m}\right) \right) (u - (\varphi v + (1-\varphi)\psi))^{-\alpha} d\varphi
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
&{}^{CPC}_0 D_\varphi^\alpha \delta(u) \\
&\leq \frac{(\psi-v)\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{\delta(v)}{(\psi-v)^{4-\alpha}} \left( \frac{u^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{(\psi-v)(\psi-u)u^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. + m\delta\left(\frac{\psi}{m}\right) \left( \frac{u^{1-\alpha}}{(\psi-v)^{2-\alpha}(1-\alpha)} - \frac{u^{2-\alpha}}{(\psi-v)^{4-\alpha}(2-\alpha)} - \frac{(\psi-u)u^{1-\alpha}}{(\psi-v)^{3-\alpha}(1-\alpha)} \right) \right] \\
&\quad + \frac{(\psi-v)\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{\delta'(v)}{(\psi-v)^{4-\alpha}} \left( \frac{u^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{(\psi-v)(\psi-u)u^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. + m\delta'\left(\frac{\psi}{m}\right) \left( \frac{u^{1-\alpha}}{(\psi-v)^{2-\alpha}(1-\alpha)} - \frac{u^{2-\alpha}}{(\psi-v)^{4-\alpha}(2-\alpha)} - \frac{(\psi-u)u^{1-\alpha}}{(\psi-v)^{3-\alpha}(1-\alpha)} \right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.



## 4.2. Bir İntegral Özdeşliği Yardımıyla Elde Edilen Bazı Sonuçlar

**Teorem 4.4**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  kümesi üzerinde üçüncü mertebeden türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta', \delta'', \delta''' \in L^1[I]$  olsun.  $|\delta''|$  ve  $|\delta'''|$ ,  $I$  kümesi üzerinde konveks fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned} & (2-\alpha) \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\ & \leq \kappa_1(\alpha) \left( |\delta'(v)| + (\varsigma - v) \left( \frac{|\delta''(v)|}{4-\alpha} + \frac{|\delta''(\varsigma)|}{(3-\alpha)(4-\alpha)} \right) \right) \\ & \quad + \kappa_0(\alpha) \left( |\delta''(v)| + (\varsigma - v) \left( \frac{|\delta'''(v)|}{4-\alpha} + \frac{|\delta'''(\varsigma)|}{(3-\alpha)(4-\alpha)} \right) \right) \\ & \quad + \kappa_1(\alpha) \left( |\delta'(\varsigma)| + (\psi - \varsigma) \left( \frac{|\delta''(\varsigma)|}{4-\alpha} + \frac{|\delta''(\psi)|}{(3-\alpha)(4-\alpha)} \right) \right) \\ & \quad + \kappa_0(\alpha) \left( |\delta''(\varsigma)| + (\psi - \varsigma) \left( \frac{|\delta'''(\varsigma)|}{4-\alpha} + \frac{|\delta'''(\psi)|}{(3-\alpha)(4-\alpha)} \right) \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $v, \psi, \varsigma \in I^\circ$ ,  $v < \varsigma < \psi$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir.

**İspat** Lemma 3.1 ve kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned} & -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \\ & + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \\ & = \kappa_1(\alpha) \left( \frac{\varphi^{2-\alpha}}{2-\alpha} \delta'(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=1} - \frac{(v-\varsigma)}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha} \delta''(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma) d\varphi \right) \\ & \quad + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{\varphi^{2-\alpha}}{2-\alpha} \delta''(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=1} - \frac{(v-\varsigma)}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha} \delta'''(\varphi v + (1-\varphi)\varsigma) d\varphi \right) \\ & \quad + \kappa_1(\alpha) \left( \frac{\varphi^{2-\alpha}}{2-\alpha} \delta'(\varphi \varsigma + (1-\varphi)\psi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=1} - \frac{(\varsigma-\psi)}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha} \delta''(\varphi \varsigma + (1-\varphi)\psi) d\varphi \right) \\ & \quad + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{\varphi^{2-\alpha}}{2-\alpha} \delta''(\varphi \varsigma + (1-\varphi)\psi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=1} - \frac{(\varsigma-\psi)}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha} \delta'''(\varphi \varsigma + (1-\varphi)\psi) d\varphi \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$-\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v) + \kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma}$$

$$\begin{aligned}
& +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right) \\
= & \kappa_1(\alpha)\left(\frac{\delta'(v)}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha} \delta''(\varphi v+(1-\varphi) \varsigma) d \varphi\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{\delta''(v)}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha} \delta'''(\varphi v+(1-\varphi) \varsigma) d \varphi\right) \\
& +\kappa_1(\alpha)\left(\frac{\delta'(\varsigma)}{2-\alpha}+\frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha} \delta''(\varphi \varsigma+(1-\varphi) \psi) d \varphi\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{\delta''(\varsigma)}{2-\alpha}+\frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha} \delta'''(\varphi \varsigma+(1-\varphi) \psi) d \varphi\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. İntegraller için üçgen eşitsizliği kuralı yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left|-\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v)+\kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma-v}-\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma)+\kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma}\right. \\
& \left.+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right)\right| \\
\leq & \kappa_1(\alpha)\left(\frac{\left|\delta'(v)\right|}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha}\left|\delta''(\varphi v+(1-\varphi) \varsigma)\right| d \varphi\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{\left|\delta''(v)\right|}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha}\left|\delta'''(\varphi v+(1-\varphi) \varsigma)\right| d \varphi\right) \\
& +\kappa_1(\alpha)\left(\frac{\left|\delta'(\varsigma)\right|}{2-\alpha}+\frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha}\left|\delta''(\varphi \varsigma+(1-\varphi) \psi)\right| d \varphi\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{\left|\delta''(\varsigma)\right|}{2-\alpha}+\frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha}\left|\delta'''(\varphi \varsigma+(1-\varphi) \psi)\right| d \varphi\right) \quad (4.2)
\end{aligned}$$

bulunur.  $|\delta''|$  ve  $|\delta'''|$  fonksiyonlarının konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left|-\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v)+\kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma-v}-\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma)+\kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma}\right. \\
& \left.+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right)\right| \\
\leq & \kappa_1(\alpha)\left(\frac{\left|\delta'(v)\right|}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha}(\varphi\left|\delta''(v)\right|+(1-\varphi)\left|\delta''(\varsigma)\right|) d \varphi\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{\left|\delta''(v)\right|}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha}(\varphi\left|\delta'''(v)\right|+(1-\varphi)\left|\delta'''(\varsigma)\right|) d \varphi\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha} (\varphi |\delta''(\varsigma)| + (1-\varphi) |\delta''(\psi)|) d\varphi \right) \\
& +\kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \int_0^1 \varphi^{2-\alpha} (\varphi |\delta'''(\varsigma)| + (1-\varphi) |\delta'''(\psi)|) d\varphi \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v) + \kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\
& \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(v)|}{2-\alpha} + \frac{\varsigma - v}{2-\alpha} \left( \frac{|\delta''(v)|}{4-\alpha} + \frac{|\delta''(\varsigma)|}{(3-\alpha)(4-\alpha)} \right) \right) \\
& + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(v)|}{2-\alpha} + \frac{\varsigma - v}{2-\alpha} \left( \frac{|\delta'''(v)|}{4-\alpha} + \frac{|\delta'''(\varsigma)|}{(3-\alpha)(4-\alpha)} \right) \right) \\
& + \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi - \varsigma}{2-\alpha} \left( \frac{|\delta''(\varsigma)|}{4-\alpha} + \frac{|\delta''(\psi)|}{(3-\alpha)(4-\alpha)} \right) \right) \\
& + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi - \varsigma}{2-\alpha} \left( \frac{|\delta'''(\varsigma)|}{4-\alpha} + \frac{|\delta'''(\psi)|}{(3-\alpha)(4-\alpha)} \right) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Sonuç 4.1** *Teorem 4.4 şartları altında  $\alpha = \frac{1}{2}$  seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} \left| -\frac{\kappa_1\left(\frac{1}{2}\right) \delta(v) + \kappa_0\left(\frac{1}{2}\right) \delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1\left(\frac{1}{2}\right) \delta(\varsigma) + \kappa_0\left(\frac{1}{2}\right) \delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^{\frac{1}{2}} \delta(\varsigma)}{(\varsigma - v)^{\frac{3}{2}}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^{\frac{1}{2}} \delta(\psi)}{(\psi - \varsigma)^{\frac{3}{2}}} \right) \right| \\
& \leq \kappa_1\left(\frac{1}{2}\right) \left( |\delta'(v)| + (\varsigma - v) \left( \frac{10|\delta''(v)| + 4|\delta''(\varsigma)|}{35} \right) \right) \\
& + \kappa_0\left(\frac{1}{2}\right) \left( |\delta''(v)| + (\varsigma - v) \left( \frac{10|\delta'''(v)| + 4|\delta'''(\varsigma)|}{35} \right) \right) \\
& + \kappa_1\left(\frac{1}{2}\right) \left( |\delta'(\varsigma)| + (\psi - \varsigma) \left( \frac{10|\delta''(\varsigma)| + 4|\delta''(\psi)|}{35} \right) \right) \\
& + \kappa_0\left(\frac{1}{2}\right) \left( |\delta''(\varsigma)| + (\psi - \varsigma) \left( \frac{10|\delta'''(\varsigma)| + 4|\delta'''(\psi)|}{35} \right) \right).
\end{aligned}$$

**Teorem 4.5**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  kümesi üzerinde üçüncü mertebeden türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta', \delta'', \delta''' \in L^1[I]$  olsun.  $|\delta''|^q$  ve  $|\delta'''|^q$ ,  $I$  kümesi üzerinde konveks fonksiyonlar ise,

$$(2-\alpha) \left| -\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v) + \kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma - v} - \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi - \varsigma} \right|$$

$$\begin{aligned}
& +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}D_v^\alpha\delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}D_\psi^\alpha\delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right)\Big| \\
\leq & \kappa_1(\alpha)\left(|\delta'(v)|+C(\varsigma-v)\left(\frac{|\delta''(v)|^q+|\delta''(\varsigma)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(|\delta''(v)|+C(\varsigma-v)\left(\frac{|\delta'''(v)|^q+|\delta'''(\varsigma)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\kappa_1(\alpha)\left(|\delta'(\varsigma)|+C(\psi-\varsigma)\left(\frac{|\delta''(\varsigma)|^q+|\delta''(\psi)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(|\delta''(\varsigma)|+C(\psi-\varsigma)\left(\frac{|\delta'''(\varsigma)|^q+|\delta'''(\psi)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği  $C = \left(\frac{1}{1+p(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $v, \psi, \varsigma \in I^\circ$ ,  $v < \varsigma < \psi$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir.

**İspat** (4.2) ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v)+\kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma-v}-\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma)+\kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma} \right. \\
& \left. +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}D_v^\alpha\delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}D_\psi^\alpha\delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right)\right| \\
\leq & \kappa_1(\alpha)\left(\frac{|\delta'(v)|}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha}\left(\int_0^1\varphi^{(2-\alpha)p}d\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|\delta''(\varphi v+(1-\varphi)\varsigma)|^qd\varphi\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{|\delta''(v)|}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha}\left(\int_0^1\varphi^{(2-\alpha)p}d\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|\delta'''(\varphi v+(1-\varphi)\varsigma)|^qd\varphi\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\kappa_1(\alpha)\left(\frac{|\delta'(\varsigma)|}{2-\alpha}+\frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha}\left(\int_0^1\varphi^{(2-\alpha)p}d\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|\delta''(\varphi\varsigma+(1-\varphi)\psi)|^qd\varphi\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{|\delta''(\varsigma)|}{2-\alpha}+\frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha}\left(\int_0^1\varphi^{(2-\alpha)p}d\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|\delta'''(\varphi\varsigma+(1-\varphi)\psi)|^qd\varphi\right)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir.  $|\delta''|^q$  ve  $|\delta'''|^q$  fonksiyonlarının konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v)+\kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma-v}-\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma)+\kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma} \right. \\
& \left. +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}D_v^\alpha\delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}D_\psi^\alpha\delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right)\right| \\
\leq & \kappa_1(\alpha)\left(\frac{|\delta'(v)|}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha}\left(\frac{1}{1+p(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \int_0^1 (\varphi |\delta''(v)|^q + (1-\varphi) |\delta''(\varsigma)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg) \\
& + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(v)|}{2-\alpha} + \frac{\varsigma-v}{2-\alpha} \left( \frac{1}{1+p(2-\alpha)} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \times \left. \left( \int_0^1 (\varphi |\delta'''(v)|^q + (1-\varphi) |\delta'''(\varsigma)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& + \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \left( \frac{1}{1+p(2-\alpha)} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \times \left. \left( \int_0^1 (\varphi |\delta''(\varsigma)|^q + (1-\varphi) |\delta''(\psi)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \left( \frac{1}{1+p(2-\alpha)} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \times \left. \left( \int_0^1 (\varphi |\delta'''(\varsigma)|^q + (1-\varphi) |\delta'''(\psi)|^q) d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v) + \kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma-v} - \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma} \right. \\
& \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D^\alpha_\varsigma \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D^\alpha_\psi \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(v)|}{2-\alpha} + \frac{\varsigma-v}{2-\alpha} \left( \frac{1}{1+p(2-\alpha)} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{|\delta''(v)|^q + |\delta''(\varsigma)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(v)|}{2-\alpha} + \frac{\varsigma-v}{2-\alpha} \left( \frac{1}{1+p(2-\alpha)} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{|\delta'''(v)|^q + |\delta'''(\varsigma)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& + \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \left( \frac{1}{1+p(2-\alpha)} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{|\delta''(\varsigma)|^q + |\delta''(\psi)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \left( \frac{1}{1+p(2-\alpha)} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{|\delta'''(\varsigma)|^q + |\delta'''(\psi)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.6**  $\delta : I \subseteq \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  kümesi üzerinde üçüncü mertebeden türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta', \delta'', \delta''' \in L^1[I]$  olsun.  $|\delta''|^q$  ve  $|\delta'''|^q$ ,  $I$  kümesi üzerinde konveks fonksiyonlar ise,

$$(2-\alpha) \left| -\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v) + \kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma-v} - \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma} \right|$$

$$\begin{aligned}
& +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right)\Big| \\
& \leq \kappa_1(\alpha)\left(|\delta'(v)|+(\varsigma-v)\left[N+\frac{|\delta''(v)|^q+|\delta''(\varsigma)|^q}{2q}\right]\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(|\delta''(v)|+(\varsigma-v)\left[N+\frac{|\delta'''(v)|^q+|\delta'''(\varsigma)|^q}{2q}\right]\right) \\
& +\kappa_1(\alpha)\left(|\delta'(\varsigma)|+(\psi-\varsigma)\left[N+\frac{|\delta''(\varsigma)|^q+|\delta''(\psi)|^q}{2q}\right]\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(|\delta''(\varsigma)|+(\psi-\varsigma)\left[N+\frac{|\delta'''(\varsigma)|^q+|\delta'''(\psi)|^q}{2q}\right]\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği  $N = \frac{1}{p+p^2(2-\alpha)}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $v, \psi, \varsigma \in I^\circ$ ,  $v < \varsigma < \psi$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir.

**İspat** (4.2) ve Young eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v)+\kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma-v}-\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma)+\kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma} \right. \\
& \left. +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right)\right| \\
& \leq \kappa_1(\alpha)\left(\frac{|\delta'(v)|}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha}\left[\frac{1}{p}\int_0^1\varphi^{(2-\alpha)p}d\varphi+\frac{1}{q}\int_0^1|\delta''(\varphi v+(1-\varphi)\varsigma)|^qd\varphi\right]\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{|\delta''(v)|}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha}\left[\frac{1}{p}\int_0^1\varphi^{(2-\alpha)p}d\varphi+\frac{1}{q}\int_0^1|\delta'''(\varphi v+(1-\varphi)\varsigma)|^qd\varphi\right]\right) \\
& +\kappa_1(\alpha)\left(\frac{|\delta'(\varsigma)|}{2-\alpha}+\frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha}\left[\frac{1}{p}\int_0^1\varphi^{(2-\alpha)p}d\varphi+\frac{1}{q}\int_0^1|\delta''(\varphi\varsigma+(1-\varphi)\psi)|^qd\varphi\right]\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{|\delta''(\varsigma)|}{2-\alpha}+\frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha}\left[\frac{1}{p}\int_0^1\varphi^{(2-\alpha)p}d\varphi+\frac{1}{q}\int_0^1|\delta'''(\varphi\varsigma+(1-\varphi)\psi)|^qd\varphi\right]\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir.  $|\delta''|^q$  ve  $|\delta'''|^q$  fonksiyonlarının konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(v)+\kappa_0(\alpha)\delta'(v)}{\varsigma-v}-\frac{\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma)+\kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma} \right. \\
& \left. +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}}+\frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}}\right)\right| \\
& \leq \kappa_1(\alpha)\left(\frac{|\delta'(v)|}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha}\left[\frac{1}{p+p^2(2-\alpha)} \right. \right. \\
& \left. \left. +\frac{1}{q}\int_0^1(\varphi|\delta''(v)|^q+(1-\varphi)|\delta''(\varsigma)|^q)d\varphi\right]\right) \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{|\delta''(v)|}{2-\alpha}+\frac{\varsigma-v}{2-\alpha}\left[\frac{1}{p+p^2(2-\alpha)} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{q} \int_0^1 (\varphi |\delta'''(v)|^q + (1-\varphi) |\delta'''(\varsigma)|^q) d\varphi \Bigg] \Bigg) \\
& + \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \left[ \frac{1}{p+p^2(2-\alpha)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{q} \int_0^1 (\varphi |\delta''(\varsigma)|^q + (1-\varphi) |\delta''(\psi)|^q) d\varphi \right] \right) \\
& + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \left[ \frac{1}{p+p^2(2-\alpha)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{q} \int_0^1 (\varphi |\delta'''(\varsigma)|^q + (1-\varphi) |\delta'''(\psi)|^q) d\varphi \right] \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{\kappa_1(\alpha) \delta(v) + \kappa_0(\alpha) \delta'(v)}{\varsigma-v} - \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)}{\psi-\varsigma} \right. \\
& \left. + \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{{}^{CPC}_v D_\varsigma^\alpha \delta(\varsigma)}{(\varsigma-v)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\varsigma D_\psi^\alpha \delta(\psi)}{(\psi-\varsigma)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(v)|}{2-\alpha} + \frac{\varsigma-v}{2-\alpha} \left[ \frac{1}{p+p^2(2-\alpha)} + \frac{|\delta''(v)|^q + |\delta''(\varsigma)|^q}{2q} \right] \right) \\
& + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(v)|}{2-\alpha} + \frac{\varsigma-v}{2-\alpha} \left[ \frac{1}{p+p^2(2-\alpha)} + \frac{|\delta'''(v)|^q + |\delta'''(\varsigma)|^q}{2q} \right] \right) \\
& + \kappa_1(\alpha) \left( \frac{|\delta'(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \left[ \frac{1}{p+p^2(2-\alpha)} + \frac{|\delta''(\varsigma)|^q + |\delta''(\psi)|^q}{2q} \right] \right) \\
& + \kappa_0(\alpha) \left( \frac{|\delta''(\varsigma)|}{2-\alpha} + \frac{\psi-\varsigma}{2-\alpha} \left[ \frac{1}{p+p^2(2-\alpha)} + \frac{|\delta'''(\varsigma)|^q + |\delta'''(\psi)|^q}{2q} \right] \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

### 4.3. Sınırlı Fonksiyonlar için Bazı Sonuçlar

**Teorem 4.7**  $\delta, \varrho_1, \varrho_2 : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları  $I^\circ$  kümesi üzerinde türevlenebilir olsun.

Aynı zamanda  $\delta, \delta', \varrho_1, \varrho_2 \in L^1[I]$  olsun. Bununla birlikte

$$\varrho_1(\varphi) \leq \delta(\varphi) \leq \varrho_2(\varphi) \quad (4.3)$$

$$\varrho_1(\varphi) \leq \delta'(\varphi) \leq \varrho_2(\varphi) \quad (4.4)$$

şartları sağlansın. Bu durumda

$$\left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u) \right) \left( \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma + \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)$$

$$\geq \left( \frac{\kappa_0(\alpha) + \kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \right) \left[ \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma + \left( \int_0^u \delta(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)^2 \right]$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $\varsigma, \varphi \in I^\circ$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir.

**İspat**  $\varsigma \geq 0, \eta \geq 0$  için (4.3) yardımıyla

$$\begin{aligned} (\varrho_2(\varsigma) - \delta(\varsigma))(\delta(\eta) - \varrho_1(\eta)) &\geq 0 \\ \varrho_2(\varsigma)\delta(\eta) + \delta(\varsigma)\varrho_1(\eta) &\geq \varrho_1(\eta)\varrho_2(\varsigma) + \delta(\varsigma)\delta(\eta) \end{aligned} \quad (4.5)$$

ile (4.4) yardımıyla

$$\begin{aligned} (\varrho_2(\varsigma) - \delta'(\varsigma))(\delta'(\eta) - \varrho_1(\eta)) &\geq 0 \\ \varrho_2(\varsigma)\delta'(\eta) + \delta'(\varsigma)\varrho_1(\eta) &\geq \varrho_1(\eta)\varrho_2(\varsigma) + \delta'(\varsigma)\delta'(\eta) \end{aligned} \quad (4.6)$$

yazılabilir. (4.5) ve (4.6) sırasıyla  $\frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  ve  $\frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  ile çarpılır ve sonuçlar taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} &\frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_2(\varsigma)\delta(\eta) + \delta(\varsigma)\varrho_1(\eta)] \\ &+ \frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_2(\varsigma)\delta'(\eta) + \delta'(\varsigma)\varrho_1(\eta)] \\ &\geq \frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_1(\eta)\varrho_2(\varsigma) + \delta(\varsigma)\delta(\eta)] \\ &+ \frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_1(\eta)\varrho_2(\varsigma) + \delta'(\varsigma)\delta'(\eta)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &\frac{\varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\kappa_1(\alpha)\delta(\eta) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\eta)] \\ &+ \frac{\varrho_1(\eta)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)] \\ &\geq \frac{\varrho_1(\eta)\varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha)) \\ &+ \frac{(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma)\delta(\eta) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)\delta'(\eta)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

yazılabilir. İfadenin her iki yanının  $\varsigma$  değişkenine göre 0'dan  $u$ 'ya integrali alınır

$$\frac{[\kappa_1(\alpha)\delta(\eta) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\eta)]}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma$$



$$\begin{aligned}
& + \varrho_1(\eta) \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u) \right) \\
& \geq \frac{\varrho_1(\eta) (\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& \quad + \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\eta)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& \quad + \frac{\kappa_0(\alpha) \delta'(\eta)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma
\end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur. (4.9) ifadesi  $(u-\eta)^{-\alpha}$  ile çarpılır ve  $\eta$  değişkenine göre 0'dan  $u$ 'ya integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u) \right) \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u) \right) \int_0^u \varrho_1(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
& \geq \frac{(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \varrho_1(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
& \quad + \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \delta(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
& \quad + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \delta'(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u) \right) \left( \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma + \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right) \\
& \geq \frac{(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& \quad + \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \int_0^u \delta(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)^2 \\
& \quad + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \int_0^u \delta'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)^2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Sonuç 4.2** *Teorem 4.7 şartları altında  $\alpha = \frac{1}{2}$  seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\left( {}^{CPC}_0 D_u^{\frac{1}{2}} \delta(u) \right) \left( \int_0^u \frac{\varrho_1(\varsigma)}{\sqrt{u-\varsigma}} d\varsigma + \int_0^u \frac{\varrho_2(\varsigma)}{\sqrt{u-\varsigma}} d\varsigma \right)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{(\kappa_0(\frac{1}{2}) + \kappa_1(\frac{1}{2}))}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \frac{\varrho_1(\varsigma)}{\sqrt{u-\varsigma}} d\varsigma \int_0^u \frac{\varrho_2(\varsigma)}{\sqrt{u-\varsigma}} d\varsigma \\
&\quad + \frac{\kappa_1(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^u \frac{\delta(\varsigma)}{\sqrt{u-\varsigma}} d\varsigma \right)^2 \\
&\quad + \frac{\kappa_0(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^u \frac{\delta'(\varsigma)}{\sqrt{u-\varsigma}} d\varsigma \right)^2.
\end{aligned}$$

**Teorem 4.8**  $\delta, \phi, \varrho_2, \gamma_1, \gamma_2 : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları  $I^\circ$  kümesi üzerinde türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta', \phi, \phi', \varrho_2, \gamma_1, \gamma_2 \in L^1[I]$  olsun. Bununla birlikte

$$\gamma_1(\varphi) \leq \phi(\varphi) \leq \gamma_2(\varphi) \quad (4.12)$$

$$\gamma_1(\varphi) \leq \phi'(\varphi) \leq \gamma_2(\varphi) \quad (4.13)$$

ile (4.3) ve (4.4) şartları sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left( {}^{CPC}D_u^\alpha \phi(u) \right) \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
&+ \left( {}^{CPC}D_u^\alpha \delta(u) \right) \int_0^u \gamma_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
&\geq \frac{(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \gamma_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
&+ \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
&+ \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma
\end{aligned}$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $\varsigma, \varphi \in I^\circ$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir.

**İspat**  $\varsigma \geq 0, \eta \geq 0$  için (4.3) ve (4.12) yardımıyla

$$\begin{aligned}
&(\varrho_2(\varsigma) - \delta(\varsigma))(\phi(\eta) - \gamma_1(\eta)) \geq 0 \\
&\varrho_2(\varsigma)\phi(\eta) + \gamma_1(\eta)\delta(\varsigma) \geq \gamma_1(\eta)\varrho_2(\varsigma) + \delta(\varsigma)\phi(\eta)
\end{aligned} \quad (4.14)$$

ile (4.4) ve (4.13) yardımıyla

$$(\varrho_2(\varsigma) - \delta'(\varsigma))(\phi'(\eta) - \gamma_1(\eta)) \geq 0$$

$$\varrho_2(\varsigma) \phi'(\eta) + \gamma_1(\eta) \delta'(\varsigma) \geq \gamma_1(\eta) \varrho_2(\varsigma) + \delta'(\varsigma) \phi'(\eta) \quad (4.15)$$

yazılabilir. (4.14) ve (4.15) sırasıyla  $\frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  ve  $\frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  ile çarpılır ve sonuçlar taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_2(\varsigma) \phi(\eta) + \gamma_1(\eta) \delta(\varsigma)] \\ & + \frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_2(\varsigma) \phi'(\eta) + \gamma_1(\eta) \delta'(\varsigma)] \\ \geq & \frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\gamma_1(\eta) \varrho_2(\varsigma) + \delta(\varsigma) \phi(\eta)] \\ & + \frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\gamma_1(\eta) \varrho_2(\varsigma) + \delta'(\varsigma) \phi'(\eta)] \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{\varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\kappa_1(\alpha) \phi(\eta) + \kappa_0(\alpha) \phi'(\eta)] \\ & + \frac{\gamma_1(\eta)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma)] \\ \geq & \frac{\gamma_1(\eta) \varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha)) \\ & + \frac{(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) \phi(\eta) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma) \phi'(\eta)) \end{aligned} \quad (4.17)$$

yazılabilir. İfadenin her iki yanının  $\varsigma$  değişkenine göre 0'dan  $u$ 'ya integrali alınır

$$\begin{aligned} & \frac{[\kappa_1(\alpha) \phi(\eta) + \kappa_0(\alpha) \phi'(\eta)]}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\ & + \gamma_1(\eta) ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \\ \geq & \frac{\gamma_1(\eta) (\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\ & + \frac{\kappa_1(\alpha) \phi(\eta)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\ & + \frac{\kappa_0(\alpha) \phi'(\eta)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \end{aligned} \quad (4.18)$$

bulunur. (4.18) ifadesi  $(u-\eta)^{-\alpha}$  ile çarpılır ve  $\eta$  değişkenine göre 0'dan  $u$ 'ya integrali alınır

$$\begin{aligned} & ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \phi(u)) \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\ & + ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \int_0^u \gamma_1(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \gamma_1(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
&\quad + \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
&\quad + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi'(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta
\end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.9**  $\delta, \varrho_1, \varrho_2 : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları  $I^\circ$  kümesi üzerinde türevlenebilir olsun.

Aynı zamanda  $\delta, \delta', \varrho_1, \varrho_2 \in L^1[I]$  olsun. Bununla birlikte (4.3) ve (4.4) şartları sağlansın.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
&({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \left( \frac{u^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \left( \int_0^u \varrho_1^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^u \varrho_2^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\geq \frac{(\kappa_0(\alpha) + \kappa_1(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
&\quad + \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \int_0^u \delta(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)^2 \\
&\quad + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \int_0^u \delta'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ,  $\varsigma \in I^\circ$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir.

**İspat** (4.11) denklemi ve Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \left( \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma + \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right) \\
&\leq ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \\
&\quad \times \left( \left( \int_0^u \varrho_1^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^u (u-\varsigma)^{-2\alpha} d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^u \varrho_2^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^u (u-\varsigma)^{-2\alpha} d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \left( \left( \int_0^u \varrho_1^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{u^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^u \varrho_2^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{u^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \left( \frac{u^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \left( \int_0^u \varrho_1^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^u \varrho_2^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.10**  $\delta, \phi, \varrho_2, \gamma_1 : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları  $I^\circ$  kümesi üzerinde türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta', \phi, \phi', \varrho_2, \gamma_1 \in L^1[I]$  olsun. Bununla birlikte (4.3), (4.4), (4.12) ve (4.13) şartları sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \left( \frac{u^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left( ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \phi(u)) \left( \int_0^u \varrho_2^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} + ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \left( \int_0^u \gamma_1^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & \geq \frac{(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \gamma_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\ & \quad + \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\ & \quad + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \end{aligned}$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ,  $\varsigma \in I^\circ$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir.

**İspat** (4.19) denklemi ve Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \phi(u)) \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma + ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \int_0^u \gamma_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\ & \leq ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \phi(u)) \left( \int_0^u \varrho_2^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^u (u-\varsigma)^{-2\alpha} d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \left( \int_0^u \gamma_1^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^u (u-\varsigma)^{-2\alpha} d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \phi(u)) \left( \int_0^u \varrho_2^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{u^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \left( \int_0^u \gamma_1^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{u^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = \left( \frac{u^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left( ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \phi(u)) \left( \int_0^u \varrho_2^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} + ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta(u)) \left( \int_0^u \gamma_1^2(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.11**  $\delta, \omega, \varrho_1, \varrho_2 : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları  $I^\circ$  kümesi üzerinde türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta', \omega, \omega', \varrho_1, \varrho_2 \in L^1[I]$  olsun. Bununla birlikte

$$\varrho_1(\varphi) \leq \delta(\varphi)\omega(\varphi) \leq \varrho_2(\varphi) \quad (4.20)$$

$$\varrho_1(\varphi) \leq \delta'(\varphi)\omega'(\varphi) \leq \varrho_2(\varphi) \quad (4.21)$$

şartları sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta^2(u) \right)^{\frac{1}{2}} \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \omega^2(u) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left( \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma + \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right) \\ & \geq \frac{(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\ & + \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \int_0^u \delta(\varsigma)\omega(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)^2 \\ & + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \int_0^u \delta'(\varsigma)\omega'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $\varsigma, \varphi \in I^\circ$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir.

**İspat**  $\varsigma \geq 0, \eta \geq 0$  için (4.20) yardımıyla

$$\begin{aligned} (\varrho_2(\varsigma) - \delta(\varsigma)\omega(\varsigma))(\delta(\eta)\omega(\eta) - \varrho_1(\eta)) & \geq 0 \\ \varrho_2(\varsigma)\delta(\eta)\omega(\eta) + \delta(\varsigma)\omega(\varsigma)\varrho_1(\eta) & \geq \varrho_1(\eta)\varrho_2(\varsigma) + \delta(\varsigma)\delta(\eta)\omega(\varsigma)\omega(\eta) \end{aligned} \quad (4.22)$$

ile (4.21) yardımıyla

$$\begin{aligned} (\varrho_2(\varsigma) - \delta'(\varsigma)\omega'(\varsigma))(\delta'(\eta)\omega'(\eta) - \varrho_1(\eta)) & \geq 0 \\ \varrho_2(\varsigma)\delta'(\eta)\omega'(\eta) + \delta'(\varsigma)\omega'(\varsigma)\varrho_1(\eta) & \geq \varrho_1(\eta)\varrho_2(\varsigma) + \delta'(\varsigma)\delta'(\eta)\omega'(\varsigma)\omega'(\eta) \end{aligned} \quad (4.23)$$

yazılabilir. (4.22) ve (4.23) sırasıyla  $\frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  ve  $\frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  ile çarpılır ve sonuçlar taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_2(\varsigma)\delta(\eta)\omega(\eta) + \delta(\varsigma)\omega(\varsigma)\varrho_1(\eta)]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_2(\varsigma) \delta'(\eta) \omega'(\eta) + \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma) \varrho_1(\eta)] \\
& \geq \frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_1(\eta) \varrho_2(\varsigma) + \delta(\varsigma) \delta(\eta) \omega(\varsigma) \omega(\eta)] \\
& + \frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_1(\eta) \varrho_2(\varsigma) + \delta'(\varsigma) \delta'(\eta) \omega'(\varsigma) \omega'(\eta)]
\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \frac{\varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\kappa_1(\alpha) \delta(\eta) \omega(\eta) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\eta) \omega'(\eta)] \\
& + \frac{\varrho_1(\eta)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) \omega(\varsigma) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma)] \\
& \geq \frac{\varrho_1(\eta) \varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha)) \\
& + \frac{(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha) \delta(\varsigma) \delta(\eta) \omega(\varsigma) \omega(\eta) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\varsigma) \delta'(\eta) \omega'(\varsigma) \omega'(\eta))
\end{aligned} \tag{4.25}$$

yazılabilir. İfadenin her iki yanının  $\varsigma$  değişkenine göre 0'dan  $u$ 'ya integrali alınır

$$\begin{aligned}
& \frac{[\kappa_1(\alpha) \delta(\eta) \omega(\eta) + \kappa_0(\alpha) \delta'(\eta) \omega'(\eta)]}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \varrho_1(\eta) ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha(\delta\omega)(u)) \\
& \geq \frac{\varrho_1(\eta) (\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \frac{\kappa_1(\alpha) \delta(\eta) \omega(\eta)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta(\varsigma) \omega(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \frac{\kappa_0(\alpha) \delta'(\eta) \omega'(\eta)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma
\end{aligned} \tag{4.26}$$

bulunur. (4.26) ifadesi  $(u-\eta)^{-\alpha}$  ile çarpılır ve  $\eta$  değişkenine göre 0'dan  $u$ 'ya integrali alınır

$$\begin{aligned}
& ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha(\delta\omega)(u)) \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha(\delta\omega)(u)) \int_0^u \varrho_1(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
& \geq \frac{(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \varrho_1(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
& + \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta(\varsigma) \omega(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \delta(\eta) \omega(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta
\end{aligned}$$

$$+\frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \delta'(\eta) \omega'(\eta) (u-\eta)^{-\alpha} d\eta \quad (4.27)$$

elde edilir. (4.27) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left( {}^{CPC}D_u^\alpha(\delta\omega)(u) \right) \left( \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma + \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right) \\ & \geq \frac{(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\ & \quad + \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \int_0^u \delta(\varsigma) \omega(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)^2 \\ & \quad + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \int_0^u \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)^2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

yazılabilir. (4.28) ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left( {}^{CPC}D_u^\alpha \delta^2(u) \right)^{\frac{1}{2}} \left( {}^{CPC}D_u^\alpha \omega^2(u) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left( \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma + \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right) \\ & \geq \frac{(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_1(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\ & \quad + \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \int_0^u \delta(\varsigma) \omega(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)^2 \\ & \quad + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \int_0^u \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \right)^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.12**  $\delta, \omega, \phi, \vartheta, \varrho_2, \gamma_1, : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları  $I^\circ$  kümesi üzerinde türevlenebilir olsun. Aynı zamanda  $\delta, \delta', \omega, \omega', \phi, \phi', \vartheta, \vartheta', \varrho_2, \gamma_1 \in L^1[I]$  olsun. Bununla birlikte

$$\gamma_1(\varphi) \leq \phi(\varphi) \vartheta(\varphi) \leq \gamma_2(\varphi) \quad (4.30)$$

$$\gamma_1(\varphi) \leq \phi'(\varphi) \vartheta'(\varphi) \leq \gamma_2(\varphi) \quad (4.31)$$

ile (4.20) ve (4.21) şartları sağlansın. Bu durumda

$$\left( {}^{CPC}D_u^\alpha \phi^2(u) \right)^{\frac{1}{2}} \left( {}^{CPC}D_u^\alpha \vartheta^2(u) \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma$$



$$\begin{aligned}
& + \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta^2(u) \right)^{\frac{1}{2}} \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \omega^2(u) \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^u \gamma_1(\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& \geq \frac{(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \gamma_1(\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^u \delta(\varsigma) \omega(\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi(\varsigma) \omega(\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^u \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi'(\varsigma) \omega'(\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma
\end{aligned}$$

eşitsizliği  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $\varsigma, \varphi \in I^\circ$  ve (3.2) ile (3.3) şartlarını sağlayan  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  fonksiyonları için geçerlidir.

**İspat**  $\varsigma \geq 0, \eta \geq 0$  için (4.20) ve (4.30) yardımıyla

$$\begin{aligned}
(\varrho_2(\varsigma) - \delta(\varsigma) \omega(\varsigma)) (\phi(\eta) \vartheta(\eta) - \gamma_1(\eta)) & \geq 0 \\
\varrho_2(\varsigma) \phi(\eta) \vartheta(\eta) + \gamma_1(\eta) \delta(\varsigma) \omega(\varsigma) & \geq \gamma_1(\eta) \varrho_2(\varsigma) + \delta(\varsigma) \omega(\varsigma) \phi(\eta) \vartheta(\eta)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

ile (4.21) ve (4.31) yardımıyla

$$\begin{aligned}
(\varrho_2(\varsigma) - \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma)) (\phi'(\eta) \vartheta'(\eta) - \gamma_1(\eta)) & \geq 0 \\
\varrho_2(\varsigma) \phi'(\eta) \vartheta'(\eta) + \gamma_1(\eta) \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma) & \geq \gamma_1(\eta) \varrho_2(\varsigma) + \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma) \phi'(\eta) \vartheta'(\eta)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

yazılabilir. (4.32) ve (4.33) sırasıyla  $\frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  ve  $\frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  ile çarpılır ve sonuçlar taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_2(\varsigma) \phi(\eta) \vartheta(\eta) + \gamma_1(\eta) \delta(\varsigma) \omega(\varsigma)] \\
& + \frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\varrho_2(\varsigma) \phi'(\eta) \vartheta'(\eta) + \gamma_1(\eta) \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma)] \\
& \geq \frac{\kappa_1(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\gamma_1(\eta) \varrho_2(\varsigma) + \delta(\varsigma) \omega(\varsigma) \phi(\eta) \vartheta(\eta)] \\
& + \frac{\kappa_0(\alpha)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\gamma_1(\eta) \varrho_2(\varsigma) + \delta'(\varsigma) \omega'(\varsigma) \phi'(\eta) \vartheta'(\eta)]
\end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\kappa_1(\alpha) \phi(\eta) \vartheta(\eta) + \kappa_0(\alpha) \phi'(\eta) \vartheta'(\eta)]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma_1(\eta)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma)\omega(\varsigma) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)\omega'(\varsigma)] \\
& \geq \frac{\gamma_1(\eta)\varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha)) \\
& + \frac{(u-\varsigma)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (\kappa_1(\alpha)\delta(\varsigma)\omega(\varsigma)\phi(\eta)\vartheta(\eta) + \kappa_0(\alpha)\delta'(\varsigma)\omega'(\varsigma)\phi'(\eta)\vartheta'(\eta))
\end{aligned} \tag{4.35}$$

yazılabilir. İfadenin her iki yanının  $\varsigma$  değişkenine göre 0'dan  $u$ 'ya integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{[\kappa_1(\alpha)\phi(\eta)\vartheta(\eta) + \kappa_0(\alpha)\phi'(\eta)\vartheta'(\eta)]}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \gamma_1(\eta)({}^{CPC}_0 D_u^\alpha(\delta\omega)(u)) \\
& \geq \frac{\gamma_1(\eta)(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \frac{\kappa_1(\alpha)\phi(\eta)\vartheta(\eta)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta(\varsigma)\omega(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \frac{\kappa_0(\alpha)\phi'(\eta)\vartheta'(\eta)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta'(\varsigma)\omega'(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma
\end{aligned} \tag{4.36}$$

bulunur. (4.36) ifadesi  $(u-\eta)^{-\alpha}$  ile çarpılır ve  $\eta$  değişkenine göre 0'dan  $u$ 'ya integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha(\phi\vartheta)(u)) \int_0^u \varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + ({}^{CPC}_0 D_u^\alpha(\delta\omega)(u)) \int_0^u \gamma_1(\eta)(u-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
& \geq \frac{(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \gamma_1(\eta)(u-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
& + \frac{\kappa_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta(\varsigma)\omega(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi(\eta)\vartheta(\eta)(u-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
& + \frac{\kappa_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \delta'(\varsigma)\omega'(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi'(\eta)\vartheta'(\eta)(u-\eta)^{-\alpha} d\eta
\end{aligned} \tag{4.37}$$

elde edilir. (4.37) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$({}^{CPC}_0 D_u^\alpha(\phi\vartheta)(u)) \int_0^u \varrho_2(\varsigma)(u-\varsigma)^{-\alpha} d\varsigma$$

$$\begin{aligned}
& + \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha (\delta \omega) (u) \right) \int_0^u \gamma_1 (\eta) (u - \eta)^{-\alpha} d\eta \\
& \geq \frac{(\kappa_1 (\alpha) + \kappa_0 (\alpha))}{\Gamma (1 - \alpha)} \int_0^u \varrho_2 (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \gamma_1 (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \frac{\kappa_1 (\alpha)}{\Gamma (1 - \alpha)} \int_0^u \delta (\varsigma) \omega (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi (\varsigma) \omega (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \frac{\kappa_0 (\alpha)}{\Gamma (1 - \alpha)} \int_0^u \delta' (\varsigma) \omega' (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi' (\varsigma) \omega' (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \quad (4.38)
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.38) ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \phi^2 (u) \right)^{\frac{1}{2}} \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \vartheta^2 (u) \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^u \varrho_2 (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \delta^2 (u) \right)^{\frac{1}{2}} \left( {}^{CPC}_0 D_u^\alpha \omega^2 (u) \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^u \gamma_1 (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& \geq \frac{(\kappa_1 (\alpha) + \kappa_0 (\alpha))}{\Gamma (1 - \alpha)} \int_0^u \varrho_2 (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \gamma_1 (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \frac{\kappa_1 (\alpha)}{\Gamma (1 - \alpha)} \int_0^u \delta (\varsigma) \omega (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi (\varsigma) \omega (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \\
& + \frac{\kappa_0 (\alpha)}{\Gamma (1 - \alpha)} \int_0^u \delta' (\varsigma) \omega' (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \int_0^u \phi' (\varsigma) \omega' (\varsigma) (u - \varsigma)^{-\alpha} d\varsigma \quad (4.39)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada alanyazında mevcut iki kesirli operatörün bir kombinasyonu olarak tanımlanmış Oransal-Caputo hibrit operatör yardımıyla bazı eşitsizlikler elde edilmiştir. Söz konusu operatör, farklı kesirli operatörlerin bir kombinasyonu olduğundan daha geniş bir yelpazede gerçek verilerin modellenmesinde kullanılabilir. Dileyen araştırmacılar, tercih edilen fonksiyon sınıfları için, bu çalışmada elde edilen üst sınırları diğer kesirli integral operatörleriyle elde edilen üst sınırlarla karşılaştırarak hangi eşitsizliklerin daha verimli olduğu sonucuna varabilir. Öte yandan bu tez çalışmasında kullanılan hibrit operatörün önemi ve etkisi sebebiyle araştırmacıların bu konu üzerine yeni sonuçlar ve genelleştirmeler elde etmeleri bilim dünyası açısından oldukça faydalı olacaktır.

## KAYNAKLAR

- Baleanu, D., Fernandez, A., and Akgül, A. (2020). On a fractional operator combining proportional and classical differintegrals. *Mathematics*, 8(3):360.
- Baloch, I. A. and İşcan, İ. (2015). Some Ostrowski type inequalities for harmonically-convex functions in second sense. *International Journal of Analysis*, 2015.
- Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi.
- Beckenbach, E. F. and Bellman, R. (1965). *Inequalities*. Springer-Verlag.
- Breckner, W. W. (1978). Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen räumen. *Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS)*, 23(37):13–20.
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent—ii. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539.
- Caputo, M. and Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, 1(2):1–13.
- Chebyshev, P. (1882). Sur les expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les mêmes limites. In *Proc. Math. Soc. Charkov*, volume 2, pages 93–98.
- Dragomir, S. and Pearce, C. (2000). Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. rgmia monographs, victoria university. *Victoria*.
- Dragomir, S. S., Agarwal, R., and Cerone, P. (1999). On Simpson's inequality and applications. *RGMA research report collection*, 2(3).
- Dragomir, S. S. and Pearce, C. E. (1998). Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 57(3):377–385.
- Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., and Tricomi, F. (1981). Higher transcendental

functions. vol. i-iii. melbourne, fl.

Grüss, G. (1935). Über das maximum des absoluten betrages von  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$ . *Mathematische Zeitschrift*, 39:215–226.

Gürbüz, M., Akdemir, A. O., and Dokuyucu, M. A. (2022). Novel approaches for differentiable convex functions via the proportional caputo-hybrid operators. *Fractal and Fractional*, 6(5):258.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge university press.

İşcan, İ. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6):935–942.

İşcan, İ. (2016). Ostrowski type inequalities for  $p$ -convex functions. *New Trends in Mathematical Sciences*, 4(3):140–150.

Kannappan, P. (2009). *Functional equations and inequalities with applications*. Springer Science & Business Media.

Katugampola, U. N. (2011). New approach to a generalized fractional integral. *Applied mathematics and computation*, 218(3):860–865.

Katugampola, U. N. (2014). A new approach to generalized fractional derivatives. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 6(4):1–15.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., and Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65–70.

Miheşan, V. (1993). A generalization of the convexity. In *Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania*.

Mitrinovic, D. S., Pečarić, J., and Fink, A. M. (1993). *Classical and new inequalities in analysis*. Kluwer Academic Publishers, UK.

- Mitrinovic, D. S. and Vasic, P. M. (1970). *Analytic inequalities*, volume 1. Springer.
- Niculescu, C. and Persson, L.-E. (2006). *Convex functions and their applications*, volume 23. Springer.
- Niculescu, C. P. (2000). Convexity according to the geometric mean. *Math. Inequal. Appl.*, 3(2):155–167.
- Niculescu, C. P., Persson, L.-E., and Niculescu, C. P. (2018). Convexity and majorization. *Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach*, pages 185–226.
- Oldham, K. and Spanier, J. (1974). *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, volume 111. Mathematics in Science and Engineering.
- Orlicz, W. (1961). A note on modular spaces i. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 9:157–162.
- Ostrowski, A. (1937). Über die absolutabweichung einer differentiierbaren funktion von ihrem integralmittelwert. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 10(1):226–227.
- Pearce, C. E., Pečarić, J., and Šimić, V. (1998). Stolarsky means and Hadamard’s inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 220(1):99–109.
- Pečarić, J. (1987). Convex functions: Inequalities. *Serbocroatian, Beograd*.
- Pečarić, J. E. and Tong, Y. L. (1992). *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*. Academic Press.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I., et al. (1993). *Fractional integrals and derivatives*, volume 1. Gordon and breach science publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland.
- Sarikaya, M. Z., Akkurt, A., Budak, H., Yıldırım, M. E., and Yıldırım, H. (2019). Hermite-Hadamard’s inequalities for conformable fractional integrals. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, 9(1):49–59.

Sarikaya, M. Z., Set, E., Yaldız, H., and Başak, N. (2013). Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(9-10):2403–2407.

Varošanec, S. (2007). On  $h$ –convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(1):303–311.

Young, W. H. (1912). On classes of summable functions and their fourier series. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 87(594):225–229.





