



**ORDER İSTATİSTİKSEL VE ORDER
 J -YAKINSAKLIK TİPLERİ ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra KUMBASAR

Danışman

Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2023

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDER İSTATİSTİKSEL VE ORDER
 J -YAKINSAKLIK TİPLERİ ÜZERİNE

Esra KUMBASAR

Danışman
Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2023

TEZ ONAY SAYFASI

Esra KUMBASAR tarafından hazırlanan “Order İstatistiksel ve Order J -Yakınsaklık Tipleri Üzerine” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 25/01/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR

Başkan : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi,
Cumhuriyet Sosyal Bilimler MYO

Üye : Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Esra GÜLLE
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
..... /..... / 2023 tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. İbrahim EROL

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

25/01/2023

Esra KUMBASAR

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

ORDER İSTATİSTİKSEL VE ORDER
 J -YAKINSAKLIK TİPLERİ ÜZERİNE

Esra KUMBASAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdiç DÜNDAR

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez konusunun önemini ve tarihi geçmişini anlatan genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, literatürde mevcut ve tez çalışmasının daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan bazı temel kavramlar ve tanımlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise, bir L toplamsal sistemdeki γ metriği hatırlanarak metrik ile ilişkili bazı özelliklerden bahsedilmiştir. Bu akılda tutularak, metrik toplamsal sistem (L, γ) da order istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılıp bununla ilgili elde edilen bazı sonuçlar incelenmiştir. Dördüncü bölümde, bir (L, γ) metrik toplamsal sistemde order ideal yakınsaklık kavramı ve bu kavram ile ilgili bazı genel özellikler ele alınmıştır. Bu anlamda öncelikle order ideal yakınsak kavramı tanıtılmış ve örnekler verilmiştir. Daha sonra order ideal sınırlılık ve OJ^* -yakınsaklık kavramları tanıtılarak bu kavramların OJ -yakınsaklık ile ilişkileri incelenmiştir. Son bölüm olan beşinci bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2023, v + 39 sayfa

Anahtar Kelimeler: Toplamsal sistem, Metrik kafes, Order yakınsaklık, Order istatistiksel yakınsaklık, Order ideal yakınsaklık.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

ON ORDER STATISTICAL AND
ORDER $\mathcal{I}$ -CONVERGENCE TYPES

Esra KUMBASAR

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Erdinç DÜNDAR

This thesis consists of five main chapters.

In the first chapter, a general literature information about the importance and historical background of the thesis subject is given. In the second part, some basic concepts and definitions available in the literature and necessary for a better understanding of the thesis work are mentioned. In the third chapter, some features related to the metric are mentioned by remembering the γ metric in an L additive system. Keeping this in mind, the concept of order statistical convergence in the metric additive system (L, γ) is introduced and some related results are examined. In the fourth chapter, the concept of order ideal convergence in a (L, γ) metric additive system and some general properties related to this concept are discussed. In this sense, firstly, the concept of order ideal convergent is introduced and examples are given. Then, the concepts of order ideal constraint and $O\mathcal{I}^*$ -convergence were introduced and their relations with $O\mathcal{I}$ -convergence were examined. In the fifth section, which is the last chapter, the sources in the literature that we use during our study are listed.

2023, v + 39 pages

Keywords: Additive system, Metric lattice, Order convergence, Order statistical convergence, Order ideal convergence.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusunun verilmesi, çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım sayın Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR a, yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Esra KUMBASAR
Afyonkarahisar 2023

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Temel Kavramlar ve Tanımlar	3
2.2 İstatistiksel ve İdeal Yakınsaklık.....	4
2.2 Order Yakınsaklık	7
3. (L, γ) METRİK UZAYDA ORDER İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	9
3.1 Order Yakınsaklık İle İlgili Bazı Özellikler	9
3.2 Bir (L, γ) Metrik Uzayda Order İstatistiksel Yakınsaklık	10
4. (L, γ) METRİK UZAYDA ORDER İDEAL YAKINSAKLIK.....	25
4.1 Order I-Yakınsaklık İle İlgili Bazı Özellikler	25
4.2 Order I^* -Yakınsaklık	32
5. KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ.....	39

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$x = (x_k)$	Reel sayı dizisi
l_∞	Sınırlı reel veya kompleks diziler kümesi
$2^{\mathbb{N}}$	Doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi
$\mathcal{I}_f$	Sonlu elemanlı kümelerden oluşan ideal
(L, γ)	Metrik toplamsal sistem
$\mathcal{O}$ -yakınsak	Order yakınsaklık
$\mathcal{Ost}$ -yakınsak	Order istatistiksel yakınsaklık
$ K = \text{card}K$	K kümesinin kardinalitesi
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$	İdeale karşılık gelen süzgeç
$\mathcal{OI}$ -yakınsaklık	Order $\mathcal{I}$ -yakınsaklık
$\mathcal{OI}^*$ -yakınsaklık	Order $\mathcal{I}^*$ -yakınsaklık
$\mathcal{Ost}$ -limit	Order istatistiksel limit
$\mathcal{OI}$ -limit	Order ideal limit
h.h. k	Hemen hemen her k için

1. GİRİŞ

Toplanabilme Teorisinde yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramları, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi alanının temel kavramlarından olup, son zamanlarda çok farklı metrik uzaylarda çalışılmaktadır. Temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan ve yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı Toplanabilme Teorisinde farklı metrik uzaylarda incelenmektedir. İstatistiksel yakınsak kavramı Fast (1951) in tanıtmasından sonra başta Schoenberg (1959), Salat (1980), Fridy (1985) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından bu kavramın uygulamaları ve bazı genelleştirmeleri ile birlikte bazı özellikleri günümüze kadar çalışılmıştır.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan ideal kavramı ve istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramı Kostyrko vd. (2000) tarafından tanımlanarak bu kavramın bazı özellikleri ile birlikte yakınsaklık ile aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca, Kostyrko vd. (2000) bu çalışmada $\mathcal{I}^*$ -yakınsaklık kavramını tanımlayarak bazı şartlar altında $\mathcal{I}$ -yakınsaklık ile arasındaki ilişkileri vermişlerdir. Nabiev vd. (2007) $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi ve $\mathcal{I}^*$ -Cauchy dizisi kavramlarını tanıtarak bu kavramlar arasındaki ilişkileri ve $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi ile $\mathcal{I}$ -yakınsaklık ile arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Daha sonra başta Dems (2004), Kostyrko (2005), Savaş ve Das (2011) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından bu kavramın uygulamaları ve birkaç genelleştirmesi çalışılmıştır. Bununla birlikte ideal kavramı, lacunary dizi kavramı ve istatistiksel yakınsaklık kavramları kullanılarak, $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları ve bu kavramların bazı uygulamaları Das vd. (2011) tarafından verilmiştir.

Doğrusal olarak sırala bir toplamsal sistemi L de order yakınsaklık kavramı ve bir γ özel metriği Wilcox ve Smiley (1939) tarafından tanıtılmıştır. Ayrıca, order yakınsaklık kavramı Birkhoff (1940), Frink (1942), Aliprantis ve Border (2006) ve birçok bilim insanı tarafından tanıtılmış ve geliştirilmiştir. Son zamanlarda Ganguly ve Biswas (2014) ve Biswas ve Ganguly (2016) tarafından toplanabilme teorisinde önemli bir yere sahip olan istatistiksel ve ideal yakınsaklık kavramlarına genişletilmiştir.

Tezimizin üçüncü bölümünde, Ganguly ve Biswas (2014) tarafından yapılan makaledeki tanım, teorem ve lemmalar ispatlarıyla birlikte not edilecektir. Ayrıca, konunun daha iyi anlaşılması için verilen örnekler incelenecektir. Bu anlamda öncelikle Wilcox ve Smiley (1939) in çalışmasında tanıtılan bir L toplamsal sistemdeki γ metriğini hatırlanarak metrik ile ilişkili bazı özelliklerden bahsedilmiştir. Bu akılda tutularak, metrik toplamsal sistem (L, γ) da order istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılıp bununla ilgili elde edilen bazı sonuçlar not edilmiştir.

Tezimizin dördüncü bölümünde ise, Biswas ve Ganguly (2016) tarafından yapılan makaledeki tanım, teorem ve lemmalar ispatlarıyla birlikte not edilecektir. Öncelikle bir (L, γ) metrik toplamsal sistemde order istatistiksel yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan order ideal yakınsaklık (OJ -yakınsaklık) kavramı ve bu kavram ile ilgili bazı genel özellikler ele alınacaktır. Bu anlamda öncelikle order ideal yakınsak kavramı tanıtılmış ve örnekler verilecektir. Order ideal yakınsak olan bir dizinin limitinin tekliği ispatlanacaktır. Daha sonra order ideal sınırlılık ve OJ^* -yakınsaklık kavramaları tanıtılarak bu kavramların OJ -yakınsaklık ile ilişkileri incelenecektir.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasında yararlanacağımız bazı temel kavramlar verilmiştir. Literatürde iyi bilinen doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, metrik uzay ve mutlak değer metriği gibi temel kavramlar burada verilmeyecektir.

2.1 Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 2.1.1 Tanım kümesi $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ doğal sayılar kümesi olan her fonksiyona dizi denir.

Diziler değer kümelerine göre adlandırılır. Eğer bir dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ise, diziye reel terimli dizi veya reel sayı dizisi ya da reel dizi denir. Yani, reel terimli bir dizi

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde bir fonksiyondur.

Genel terimi x_k olan bir dizi $(x_k) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ şeklinde gösterilir (Balcı 2006).

Tezde aksi belirtilmediği sürece (x_k) dizisi reel sayı dizisi olarak ele alınacaktır.

Tanım 2.1.2 $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi ve $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $k > n_0$ olduğunda

$$|x_k - \mathcal{L}| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_k) dizisi $\mathcal{L}$ sayısına yakınsaktır denir ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \mathcal{L} \text{ veya } x_k \rightarrow \mathcal{L}$$

şeklinde gösterilir.

Herhangi bir sayıya yakınsayan diziye yakınsak dizi denir. Yakınsak olmayan diziye ise ıraksak dizi denir (Balcı 2006).

Tanım 2.1.3 Eğer her $k > 0$ sayısı için $|x_k| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı bulunabiliyorsa (x_k) dizisine sınırlı dizi denir. Tüm sınırlı reel veya kompleks dizilerin kümesi l_∞ ile gösterilir (Balcı 2006).

2.2 İstatistiksel ve İdeal Yakınsaklık

Şimdi bir dizinin yakınsaklığı kavramının bir genelleştirmesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamada kullanılan doğal yoğunluk kavramı ve istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi ve ilgili bazı tanımlar verilecektir. Ayrıca bu kavramlar ile ilgili ve tezde kullanılacak olan bazı teoremler ispatsız olarak not edilecektir.

Tanım 2.2.1 $K \subseteq \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n: k \in K\}$ kümelerini ele alalım.

$$|K| = \text{card}K \text{ (} K \text{ kümesinin kardinalitesi)}$$

olmak üzere;

$$\underline{\delta}(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{|K_n|}{n} \text{ ve } \overline{\delta}(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine sırasıyla K kümesinin alt ve üst yoğunlukları denir. Eğer

$$\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

ise $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$ dizisinin limiti mevcuttur denir. Bu limit $\delta(K)$ ile gösterilir ve bu limit değerine

K kümesinin doğal yoğunluğu denir. Bu durumda, $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: k \in K\}|$$

olarak tanımlanır (Niven vd. 1991).

Tanım 2.2.2 $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyor ise, $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st - \lim x = \mathcal{L}$$

ile gösterilir (Fridy 1985).

Teorem 2.2.1 Reel sayıların bir $x = (x_k)$ dizisi x e istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak $\delta(K) = 0$ olacak şekilde bir

$$K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$$

kümesi vardır öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$ dir (Salat 1980).

Tanım 2.2.3 Reel sayıların bir $x = (x_k)$ dizisi için bir B sayısı var öyle ki

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k| > B\}) = 0$$

ise, x dizisine istatistiksel sınırlıdır denir (Fridy ve Orhan 1979).

Teorem 2.2.2 Bir istatistiksel yakınsak dizi istatistiksel sınırlıdır (Fridy ve Orhan 1979).

Tanım 2.2.4 Reel sayıların bir $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$\delta(\{k : |x_k - x_N| > \varepsilon\}) = 0$$

ise, $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Fridy 1985).

Teorem 2.2.3 Bir dizi istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak istatistiksel Cauchy dizisidir (Fridy 1985).

İstatistiksel yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ideal yakınsaklık kavramı 2000 yılından bu yana birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Şimdi ideal, süzgeç ve ideal yakınsaklık kavramları ile ilgili tanım ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.2.5 Bir $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesi için

- i. $\emptyset \in \mathcal{I}$,
- ii. Her $A, B \in \mathcal{I}$ için $A \cup B \in \mathcal{I}$,
- iii. Her $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subset A$ için $B \in \mathcal{I}$

şartları sağlanıyorsa, bu durumda $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesine $\mathbb{N}$ de bir ideal denir.

Eğer $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ ise, $\mathcal{I}$ ya bir gerçek (non-trivial) ideal denir.

Ayrıca, $\mathcal{I}$ bir gerçekteal ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}$ oluyorsa, $\mathcal{I}$ idealeline uygun (admissible) ideal denir (Kostyrko vd. 2000).

Bu çalışmadaki bütün idealler uygun ideal olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.2.6 $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına $\mathcal{I}$ -yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I} - \lim x = \mathcal{L}$$

biçiminde gösterilir (Kostyrko vd. 2000).

Şimdi $\mathcal{I}$ -yakınsaklık ile ilgili bazı örnekler verilecektir (Kostyrko vd. 2000).

- (i) $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin tüm sonlu alt cümlelerinin sınıfı $\mathcal{I}_f$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{I}_f$ uygun idealdir ve $\mathcal{I}_f$ -yakınsaklık alışılmış (adi) yakınsaklık ile çakışır.
- (ii) $\mathcal{I}_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{I}_\delta$ bir uygun idealdir ve $\mathcal{I}_\delta$ -yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

Tanım: 2.2.7 Eğer $\mathcal{I}$ nın karşılıklı ayırık kümelerinin herhangi bir $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ dizisi için bir $\{B_1, B_2, B_3, \dots\}$ dizisi var öyle ki her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \Delta B_i$ simetrik farkı sonlu ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}$ ise, $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ideali AP-özelliğine sahiptir denir (Kostyrko vd. 2000).

Şimdi süzgeç tanımı ve ideal ile olan ilişkisi verilecektir.

Tanım 2.2.8 Boştan farklı bir $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesi için

- i. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- ii. Her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$,
- iii. Her $A \in \mathcal{F}$ ve her $B \supset A$ için $B \in \mathcal{F}$

şartları sağlanıyorsa, bu durumda $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesine $\mathbb{N}$ de bir süzgeç adı verilir (Kostyrko vd. 2000).

Eğer $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir gerçekteal ise, bu durumda

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset \mathbb{N}: (\exists A \in \mathcal{I})(M = \mathbb{N} \setminus A)\}$$

sınıfına $\mathbb{N}$ üzerinde $\mathcal{I}$ idealeine karşılık gelen süzgeç denir (Kostyrko vd. 2000).

2.3 Order Yakınsaklık

Şimdi de order yakınsaklık ile ilgili tanım ve teoremler verilecektir. Öncelikle Wilcox ve Smiley (1939) tarafından verilen tanımlar not edilecektir.

Tanım 2.3.1 $a, b, c, \dots$ elemanlarının kümesi L ve $\leq$, $a, b \in L$ olmak üzere tüm (a, b) ikilisi için tanımlanmış bir ikili bağıntı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa L nin $<$ ne göre kısmi sıralı küme olduğu söylenir.

- i. Tüm $a \in L$ için $a \leq a$ dır,
- ii. $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ dir,
- iii. $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ dir.

Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise, $x < y$ dir. $x \leq y$ bağıntısı ayrıca $y \geq x$ olarak da yazılır. Benzer şekilde, $x < y$ de $y > x$ şeklinde yazılabilir.

Eğer her iki $a, b \in L$ elemanının bir en küçük üst sınırı $a \vee b \in L$ varsa, L bir toplamsal sistem ve eğer her iki $a, b \in L$ elemanının bir en büyük alt sınırı $a \wedge b \in L$ varsa, L bir çarpımsal sistemdir. L , hem toplamsal hem de çarpımsal ise bir kafestir.

Tüm $x \in L$ için eğer $x \vee \theta = x$ ise, L toplamsal sistemdeki bir θ ögesi L nin boş ögesidir.

L kısmi sıralı bir küme ise, $i < j$ için $a_i \leq a_j$ ($a_i \geq a_j$) ise (a_i) dizisi artan (azalan) dır.

Not: Monoton artan (azalan) bir $(x_n) \in L$ dizisini belirtmek için $x_n \uparrow$ ($x_n \downarrow$) gösterimi kullanılır. $x_n \downarrow x$ gösterimi, $x_n \downarrow$ ve $\inf x_n = x$ anlamına gelir. $x_n \uparrow x$ in anlamı da benzerdir.

Bir L kafesinde, order yakınsaklık kavramından bahsedildiğinde kısaca O -yakınsaklık anlaşılabacaktır.

Tanım 2.3.2 Eğer $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L nin elemanlarının (y_n) dizisi var öyle ki L de

$$|x| = x^+ + x^- \text{ ve } x^+ = x \vee \theta, \quad x^- = (-x) \vee \theta$$

olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n - x| < y_n$$

ise bu durumda, L kafesindeki bir (x_n) dizisi, $x \in L$ ye Order yakınsaktır (O -yakınsak) denir (Frink 1942).

Açıklama: Eğer (x_n) dizisi x e O -yakınsak ise, $x_n \xrightarrow{O} x$ ile gösterilir. Order yakınsaklık tanımından, (x_n) dizisi bir limite O -yakınsaksa, bu durumda sınırlıdır. Bir O -yakınsak diziye sonlu sayıda terim eklenmesinin O -yakınsamasını etkilemediği ve limitinin değişmedi açıktır.

3. (L, γ) METRİK UZAYDA ORDER İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, Ganguly ve Biswas (2014) ve Wilcox ve Smiley (1939) tarafından yapılan makalelerdeki tanım, teorem ve lemmalar ispatlarıyla birlikte not edilecektir. Ayrıca, konunun daha iyi anlaşılması için verilen örnekler incelenecektir.

3.1 Order Yakınsaklık ile İlgili Bazı Özellikler

Öncelikle Wilcox ve Smiley (1939) in çalışmasında tanıtılan bir L toplamsal sistemdeki γ metriği hatırlanarak metrik ile ilişkili bazı özelliklerden bahsedilecektir. Bu akılda tutularak, metrik toplamsal sistem (L, γ) de order istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılıp bununla ilgili elde edilen bazı sonuçlar not edilecektir.

Tanım 3.1.1 (i) L bir toplamsal sistem ve D, L üzerinde tanımlanmış bir reel değerli fonksiyon olsun. Bu durumda, L üzerinde bir γ fonksiyonu

$$\gamma(a, b) = 2D(a \vee b) - D(a) - D(b)$$

olarak tanımlansın. $a < b$ için

$$D(a) \leq D(b) \text{ (} D(a) \geq D(b) \text{)}$$

olduğunda $D(a)$ ya monoton artandır (azalandır) denir.

Eğer $\gamma(a, b)$, L için bir metrik ise $D(a)$ fonksiyonu bir normdur.

(ii) L bir toplamsal sistem ve $\gamma(a, b)$, her $(a, b) \in L$ çifti için tanımlanmış bir reel değerli fonksiyon olsun. Bu durumda $a, b, c \in L$ için

$$\Delta(a, b, c) = \frac{1}{2} \{ \gamma(a, b) + \gamma(b, c) - \gamma(a, c) \}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.1.1 Eğer $D(a)$, bir L toplamsal sistemde tanımlı reel değerli bir fonksiyon ise, o zaman $a, b \in L$ için

- (i) Eğer $a \geq b$ ise $D(a) - D(b) = \gamma(a, b)$,
- (ii) Eğer $D(a)$ monoton artan ise, $|D(a) - D(b)| \leq \gamma(a, b)$,
- (iii) $\gamma(a, b) = \gamma(b, a)$, $\gamma(a, a) = 0$,
- (iv) $\Delta(a, a \vee b, b) = 0$,
- (v) $D(a)$ monoton artandır ancak ve ancak $\gamma(a, b) \geq 0$ dır,
- (vi) $D(a)$ düzgün monoton artandır ancak ve ancak $a \neq b$ için $\gamma(a, b) > 0$ dır.

Not: Eğer $D(a)$ monoton artan ve her $a, b, c \in L$ için $\Delta(a, b, c) \geq 0$ ise, bu durumda $\gamma(a, b)$, L üzerinde bir metriktir.

Lemma 3.1.2 Eğer $D(a)$, bir toplamsal sistem L üzerinde tanımlanan reel değerli bir fonksiyon ise, o zaman

(A) Her $a, b, c \in L$ için $\Delta(a, b, c) \geq 0$ olması aşağıdaki denk ifadeleri sağlar:

- (i) Tüm $a, b \in L$ için $\gamma(a \vee c, b \vee c) \leq \gamma(a, b)$ dır.
- (ii) Tüm $b \leq a$ için $\gamma(a \vee c, b \vee c) \leq \gamma(a, b)$ dır.
- (iii) $b \leq a$ için $D(a \vee c) + D(b) \leq D(a) + D(c \vee b)$ dır.
- (iv) $\gamma(a \vee c, b \vee d) \leq \gamma(a, b) + \gamma(c, d)$ dır.

(B) Eğer $D(a)$ monoton artan ise, bu durumda $\Delta(a, b, c) \geq 0$ dır ancak ve ancak (i) - (iv) denk ifadelerinden biri elde edilir.

3.2 Bir (L, γ) Metrik Uzayda Order İstatistiksel Yakınsaklık

Şimdi Ganguly ve Biswas (2014) tarafından tanıtılan bir (L, γ) metrik toplamsal sistemde order istatistiksel yakınsaklık kavramı ve bu kavram ile ilgili özellikler not edilecektir.

Çalışma boyunca $D, D(\theta) = 0$ olacak şekilde monoton artan reel değerli bir fonksiyon ve tüm $a, b, c \in L$ için $\Delta(a, b, c) \geq 0$ olarak alınacaktır.

Tanım 3.2.1 Bir metrik toplamsal sistem (L, γ) da bir (x_k) dizisini alalım. Eğer $y_k \downarrow \theta$ olacak şekilde L de bir (y_k) dizisi var öyle ki $D, D(\theta) = 0$ olacak şekilde L üzerinde reel değerli bir monoton artan fonksiyon ve tüm $a, b, c \in L$ için

$$\Delta(a, b, c) \geq 0$$

olmak üzere

$$\delta(\{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, x) \geq D(y_n)\}) = 0$$

ise, (x_k) dizisi $x \in L$ ye order istatistiksel yakınsaktır (Ost-yakınsak) denir.

Eğer bir (x_k) dizisi $x \in L$ ye order istatistiksel yakınsak ise, o zaman (x_k) dizisinin order istatistiksel limiti (yani, Ost-limit) x tir denir ve

$$x_k \xrightarrow{Ost} x$$

ile gösterilir.

Özel durumlar:

(a) $D, L = \mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan birim fonksiyon ve

$$\{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, x) \geq D(y_k)\}$$

sonlu olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \gamma(x_k, x) &= 2D(x_k \vee x) - D(x_k) - D(x) \\ &= |x_k - x| \end{aligned}$$

olur.

$$\{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, x) \geq D(y_k)\}$$

sonlu olduğundan bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki tüm $k \geq n_1$ için

$$|x_k - x| < y_k$$

dır. Yine $y_k \downarrow 0$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ için bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki tüm $k \geq n_2$ için $y_k < \varepsilon$ dir. $n_0 = maks \{n_1, n_2\}$ olsun. Bu durumda, tüm $k \geq n_0$ için

$$|x_k - x| < y_{n_0} < \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir.

Bu, alışılmış anlamda $x_k \rightarrow x$ olduğunu gösterir. Böylece, istatistiksel yakınsak dizi order istatistiksel yakınsaktır.

(b) $D, L = \mathbb{R}$ üzerinde birim fonksiyon ve

$$\{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, x) \geq D(y_k)\} = \emptyset$$

olsun. O halde, her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$|x_k - x| < y_k \text{ ve } \gamma(x_k, x) = |x_k - x|$$

olduğu açıktır. Bu ise

$$x_k \xrightarrow{O} x$$

olduğunu gösterir. Böylece bir order yakınsak bir dizi $\mathbb{R}$ de Ost-yakınsaktır.

(c) $D, L = \mathbb{R}$ üzerinde birim fonksiyon olsun. O halde,

$$\gamma(x_k, x) = |x_k - x|$$

eşitliği geçerlidir. Böylece,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - x| > y_k\}) = 0$$

elde edilir. Şimdi $y_k \downarrow 0$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ ve tüm $k \geq n_0$ için $y_k < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Yani, eğer $p \geq n_0$ ise

$$p \in \{k \in \mathbb{N}: |x_k - x| < \varepsilon\}$$

olması

$$p \in \{k \in \mathbb{N}: |x_k - x| < y_k\}$$

olduğunu gösterir. O zaman,

$$\{k \in \mathbb{N}: |x_k - x| < y_k\} - \{1, 2, \dots, n_0 - 1\} \subset \{k \in \mathbb{N}: |x_k - x| < \varepsilon\}$$

kapsaması ve sonuç olarak

$$\delta(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - x| < \varepsilon\}) = 1$$

yani,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - x| \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$x_k \xrightarrow{st} x$$

ve dolayısıyla istatistiksel yakınsak bir dizi aynı zamanda Ost-yakınsaktır.

Alışılmış yakınsaklığın veya istatistiksel yakınsaklığın order istatistiksel yakınsaklığın özel durumları olduğu anlaşılır. Aşağıdaki örnekte order istatistiksel yakınsak bir dizinin order yakınsak olmayabileceğini görülür.

Örnek 3.2.1 Şimdi

$$L_1 = \{[0, x]: x \in \mathbb{R} \text{ ve } x \geq 0\}$$

olsun. O halde L_1 , küme kapsama ilişkisi altında bir toplamsal sistemdir. $D: L_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$D([0, x]) = x, [0, x] \in L_1$$

olarak tanımlansın. Açık olarak γ , bu özel D ile daha önce tanımlanmış olmak üzere (L_1, γ) , bir metrik toplamsal sistemdir. Negatif olmayan rasyonel sayılar kümesi $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ şeklinde alınsın. (L_1, γ) de $\{A_n\}$ dizisi

$$A_k = \begin{cases} [0, r_n] & ; \text{eğer } k = n^2 \\ \left[0, \frac{1}{k+1}\right] & ; \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca, $y_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ seçilsin. O zaman $\{0\} = \theta$ olmak üzere,

$$\{y_n\}_n \in L \text{ ve } y_n \downarrow \theta$$

olur. O halde

$$\delta(\{k \in \mathbb{N}: \gamma(A_k, \theta) \geq D(y_k)\}) = 0$$

elde edilir ki $\{A_n\}$ dizisinin θ ya Ost-yakınsadığı fakat order yakınsak olmadığı açıktır.

Teorem 3.2.1 (L, γ) metrik toplamsal sistemdeki bir dizi en fazla bir Ost-limitine sahip olabilir.

İspat: İspat açıktır.

Tanım 3.2.2 (L, γ) metrik toplamsal sistemdeki bir (x_k) dizisi alınsın. Eğer $B \in \mathbb{R}$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N}: D(x_k) \geq B\}) = 0$$

ise, bu durumda (x_k) dizisi order istatistiksel sınırlıdır (Ost-sınırlıdır) denir.

Teorem 3.1.2 (L, γ) metrik toplamsal sistemdeki bir Ost-yakınsak dizi Ost-sınırlıdır.

İspat: L de (x_k) dizisi $x \in L$ ye Ost-yakınsak olsun. O zaman $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde bir (y_n) dizisi vardır öyle ki

$$\delta(\{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, x) \geq D(y_k)\}) = 0$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\gamma(x_k, x) < D(y_k), (\text{h.h. } k) &\Rightarrow 2 D(x_k \vee x) - D(x_k) - D(x) < D(y_k), (\text{h.h. } k) \\
&\Rightarrow 2 D(x_k \vee x) - D(x_k) < D(x) + D(y_k), (\text{h.h. } k) \\
&\Rightarrow D(x_k) \leq 2 D(x_k \vee x) - D(x_k) \\
&< D(x) + D(y_k) \quad (\text{h.h. } k)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\varepsilon > 0$ olsun.

$$y_n \downarrow \theta \text{ ve } D(\theta) = 0$$

ile D , monoton artan olduğundan,

$$D(y_n) \rightarrow 0$$

ve dolayısıyla tüm $n \geq m$ için

$$D(y_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan, h.h. k için $k \geq m$ olduğunda

$$D(x_k) < D(x) + \varepsilon$$

ve böylece

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : D(x_k) \geq D(x) + \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (x_n) Ost-sınırlıdır.

Not: Bir Ost-sınırlı dizi Ost-yakınsak olmayabilir. Bu gerçek aşağıdaki örnekte görülür.

Örnek 3.2.2 (L_1, γ) metrik kafeste (Örnek 3.1 deki gibi) bir $\{A_n\}$ dizisi aşağıdaki gibi

$$A_n = \begin{cases} [0, r_n]; & \text{eğer } n \text{ kare ise} \\ \emptyset; & \text{eğer } n \text{ tek kare ise} \\ [0, 1]; & \text{eğer } n \text{ kare değilse} \\ [0, 2]; & \text{eğer } n \text{ kare olmayan tek ise} \end{cases}$$

tanımlansın. $\{A_n\}$ dizisinin Ost-sınırlı olduğu fakat Ost-yakınsak olmadığı açıkça görülür.

Teorem 3.2.3 Eğer (x_n) ve (y_n) ,

$$x_n \xrightarrow{Ost} x \text{ ve } y_n \xrightarrow{Ost} y$$

olacak şekilde (L, γ) metrik toplamsal sistemde iki dizi ise bu durumda,

$$x_n \vee y_n \xrightarrow{Ost} x \vee y$$

olur.

İspat: $x_n \xrightarrow{Ost} x$ ve $y_n \xrightarrow{Ost} y$ olduğundan, bu durumda

$$z_n^1 \downarrow \theta \text{ ve } z_n^2 \downarrow \theta$$

olacak şekilde L de $\{z_n^1\}_n$ ve $\{z_n^2\}_n$ dizileri vardır öyle ki

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} \text{ için } \gamma(x_k, x) \geq D(z_k^1)\}) = 0 \text{ ve } \delta(\{k \in \mathbb{N} \text{ için } \gamma(y_k, y) \geq D(z_k^2)\}) = 0$$

dır. Şimdi

$$X = (\{k \in \mathbb{N} : \gamma(x_k, x) \geq D(z_k^1)\})$$

ve

$$X' = (\{k \in \mathbb{N} \text{ için } \gamma(y_k, y) \geq D(z_k^2)\})$$

olsun. O zaman,

$$\delta(X) = \delta(X') = 0$$

olduğu açıktır. X^c , X in tümleyeni olmak üzere, $p \in (X \cup X')^c$ olsun. O zaman,

$$p \in (X^c \cap X'^c)$$

dir. Bu ise

$$\gamma(x_p, x) < D(z_p^1) \text{ ve } \gamma(y_p, y) < D(z_p^2)$$

anlamına gelir. Lemma 3.1.2 den

$$\begin{aligned} \gamma(x_p \vee y_p, x \vee y) &\leq \gamma(x_p, x) + \gamma(y_p, y) \\ &< D(z_p^1) + D(z_p^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$z_n \downarrow \theta \text{ ve } D(z_n) \geq D(z_p^1) + D(z_p^2)$$

olacak şekilde L de bir $\{z_n\}_n$ dizisi alınsın. Sonuç olarak

$$\gamma(x_p \vee y_p, x \vee y) < D(z_p)$$

yani,

$$\{k \in \mathbb{N} : \gamma(x_k \vee y_k, x \vee y) \geq D(z_k)\} \subseteq X \cup X'$$

olduğunda

$$p \in \{k \in \mathbb{N} : \gamma(x_k \vee y_k, x \vee y) \geq D(z_k)\}^c$$

bundan dolayı

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \gamma(x_k \vee y_k, x \vee y) \geq D(z_k)\}) = 0$$

ve dolayısıyla

$$x_n \vee y_n \xrightarrow{Ost} x \vee y$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4 (L, γ) metrik toplamsal sistem olan (L, γ) da bir (x_n) dizisi x noktasına order istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak $\delta(K) = 1$ olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır öyle ki γ metriğine göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$$

dir.

İspat: L de $x_n \xrightarrow{Ost} x$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi alalım. O zaman, $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L de bir (y_n) dizisi vardır öyle ki

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_n, x) \geq D(y_n)\}) = 0$$

olur.

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_n, x) < D(y_n)\}$$

alalım. Açık olarak

$$\delta(A) = 1$$

dir.

$$A_j = \left\{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_n, x) < \frac{1}{j}\right\} \quad (j \in \mathbb{N})$$

kümesini düşünelim. Her $j \in \mathbb{N}$ için

$$D(y_n) \rightarrow 0$$

olduğundan tüm $n \geq n_j$ için

$$D(y_n) < \frac{1}{j}$$

olacak şekilde $n_j \in \mathbb{N}$ vardır. $p \in A$ alalım. Bu durumda,

$$\gamma(x_p, x) < D(y_p) < \frac{1}{j}$$

yani, eğer $p \geq n_j$ ise $p \in A_j$ olur. Böylece,

$$A - \{1, 2, 3, \dots, n_j - 1\} \subseteq A_j$$

ve buradan tüm $j = 1, 2, \dots$ için

$$\delta(A_j) = 1$$

olur. Ayrıca açık olarak

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots A_j \supseteq A_{j+1} \supseteq \dots$$

olduğu görülür.

Şimdi bir (k_j) dizisi aşağıdaki gibi olsun. $k_1 \in A_1$ alalım. $\delta(A_2) = 1$ olduğundan, $k_2 > k_1$ olacak şekilde $k_2 \in A_2$ vardır öyle ki tüm $n \geq k_2$ için

$$\frac{|A_2(n)|}{n} > \frac{1}{2}$$

elde edilir. Yine $\delta(A_3) = 1$ olduğundan, $k_3 > k_2$ olacak şekilde $k_3 \in A_3$ vardır öyle ki tüm $n \geq k_3$ için

$$\frac{|A_3(n)|}{n} > \frac{2}{3}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse, doğal sayıların bir (k_j) dizisi vardır öyle ki tüm $j = 1, 2, \dots$ için $k_j \in A_j$ ve tüm $n \geq k_j$ için

$$\frac{|A_j(n)|}{n} > \frac{j-1}{j}$$

elde edilir.

$$M_0 = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k < k_1\}$$

ve

$$M_j = \{k \in \mathbb{N} : k_j \leq k < k_{j+1}\} \cap A_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

kümeleri alınsın öyle ki

$$K = \bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$$

olsun. $j \in \mathbb{N}$ ve $k_j \leq n < k_{j+1}$ için

$$A_j(n) = \{k \leq n : k \in A_j\} \subseteq \{k \leq n : k \in K\} = K(n)$$

olur. O zaman

$$\frac{|K(n)|}{n} \geq \frac{|A_j(n)|}{n} \geq \frac{j-1}{j}$$

elde edilir. Buradan

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K(n)|}{n} = 1$$

olur. $\varepsilon > 0$ alınsın. $\frac{1}{j} < \varepsilon$ olacak şekilde en küçük pozitif bir j tamsayısı seçilsin. $n \geq k_j$

ve $n \in K$ alınsın. O zaman bir $r \geq j$ doğal sayısı vardır öyle ki $k_r \leq n < k_{r+1}$ ve böylece $n \in A_r$ dır. Böylece, tüm $n \in K$ ve $n \geq k_j$ için

$$\gamma(x_n, x) < \frac{1}{r} \leq \frac{1}{j} < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla γ metriğine göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$$

olur.

Tersine, $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L de farklı elemanların bir (y_n) dizisi seçilsin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$$

olduğundan, her y_i için $m_i \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki tüm $n \geq m_i, i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\gamma(x_{k_n}, x) < D(y_i)$$

dir. $z_1 \in L$ alınsın öyle ki

$$D(z_1) > \max \{D(y_1), \gamma(x_{k_1}, x), \gamma(x_{k_2}, x), \dots, \gamma(x_{k_{m_1-1}}, x)\}.$$

dir. $z_2 \in L$ alınsın öyle ki

$$\begin{aligned} \gamma(x_{k_{m_1-1}}, x) &\geq D(z_2) \\ &> \max \{D(y_2), \gamma(x_{k_{m_1+1}}, x), \gamma(x_{k_{m_1+2}}, x), \dots, \gamma(x_{k_{m_2-1}}, x)\} \end{aligned}$$

dir. $z_3 \in L$ alınsın öyle ki

$$\begin{aligned} \gamma(x_{k_{m_2}}, x) &\geq D(z_3) \\ &> \max \{D(y_3), \gamma(x_{k_{m_2+1}}, x), \gamma(x_{k_{m_2+2}}, x), \dots, \gamma(x_{k_{m_3-1}}, x)\} \end{aligned}$$

dir. Şimdi,

$$\begin{aligned} \alpha_{k_i} &= z_1; i = 1, 2, \dots, m_1 - 1 \\ &= y_1; i = m_1 \\ &= z_2; i = m_1 + 1, m_1 + 2, m_2 - 1 \\ &= y_2; i = m_2 \\ &\dots \dots \end{aligned}$$

alınsın. O zaman, tüm $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha_{k_n} \downarrow \theta$ için

$$\gamma(x_{k_n}, x) < D(\alpha_{k_n})$$

dir. Yine

$$\begin{aligned} \beta_i &= \alpha_{k_1}; 1, 2, \dots, k_1 \\ &= \alpha_{k_2}; k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k_2 \\ &\dots \dots \end{aligned}$$

alınsın. Böylece, L de bir $\{\beta_i\}$ dizisi vardır öyle ki $\beta_i \downarrow \theta$ ve tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(x_{k_n}, x) < D(\beta_{k_n}),$$

dir. $\delta(K) = 1$ olduğundan,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, x) \geq D(\beta_k)\}) = 0$$

yani, (x_n) , x e order istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 3.2.3 Eğer L de $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde bir (y_n) dizisi için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: \gamma(x_{n+p}, x_n) \geq D(y_n), p = 1, 2, 3, \dots\}) = 0$$

ise, (L, γ) metrik toplamsal sistemdeki bir (y_n) dizisi order istatistiksel Cauchy (yani Ost-Cauchy) dizisidir.

Teorem 3.2.5 (L, γ) metrik toplamsal sistemde bir Ost-Cauchy dizisi Ost-sınırlıdır.

İspat: (x_k) , L de bir Ost-Cauchy dizisi olsun. O zaman L de $y_k \downarrow \theta$ olacak şekilde bir (y_n) dizisi vardır öyle ki

$$\delta(\{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_{k+p}, x_k) \geq D(y_k), p = 1, 2, 3, \dots\}) = 0$$

yani, $p = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\gamma(x_{k+p}, x_k) < D(y_k) \text{ (h.h. } k)$$

dir.

Şimdi $y_k \downarrow \theta$ olduğundan $D(y_k) \rightarrow 0$ ve böylece $\varepsilon > 0$ için $m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki tüm $k \geq m$ için $D(y_k) < \varepsilon$ olur. Sonuç olarak hemen hemen tüm $k \geq m$ ve $p = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\gamma(x_{k+p}, x_k) < \varepsilon$$

dır. O halde, bazı pozitif $m_0 \geq m$ tam sayıları vardır öyle ki tüm $p = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\gamma(x_{m_0+p}, x_{m_0}) < \varepsilon$$

olur.

Eğer $n \geq m_0$ ise,

$$\begin{aligned} \gamma(x_n, x_{m_0}) < \varepsilon &\Rightarrow 2D(x_n \vee x_{m_0}) - D(x_n) - D(x_{m_0}) < \varepsilon \\ &\Rightarrow 2D(x_n \vee x_{m_0}) - D(x_n) < D(x_{m_0}) + \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O zaman,

$$D(x_n) \leq 2D(x_n \vee x_{m_0}) - D(x_n)$$

olduğundan, tüm $n > m_0$ için

$$D(x_n) < D(x_{m_0}) + \varepsilon$$

ve böylece

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: D(x_n) \geq D(x_{m_0}) + \varepsilon\}) = 0$$

dır. Dolayısıyla (x_k) dizisi Ost-sınırlıdır.

Teorem 3.2.6 Eğer (L, γ) metrik toplamsal sistemdeki bir (x_n) dizisi Ost-yakınsak ise Ost-Cauchy dizisidir.

İspat: (x_n) , $x \in L$ ye Ost-yakınsak olsun. O zaman $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L de bir (y_n) dizisi vardır öyle ki

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: \gamma(x_n, x) \geq D(y_n)\}) = 0$$

dır.

$$A = \{n \in \mathbb{N}: \gamma(x_n, x) \geq D(y_n)\}$$

alınsın. $z_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L de bir (z_n) dizisi ve tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$D(z_n) \geq 2D(y_n)$$

ve

$$B = \{n \in \mathbb{N}: \gamma(x_{n+p}, x_n) \geq D(z_n), p = 1, 2, 3, \dots\}$$

kümesi düşünölsün. A kümesinin tümleyeni olan

$$A^c = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$$

kümesini alalım. O zaman tüm $k \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(x_{n_k}, x) < D(y_{n_k})$$

dir. $p = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned} \gamma(x_{k+p}, x) &\leq \gamma(x_{k+p}, x) + \gamma(x_{n_k}, x) \\ &< D(y_{n_{k+p}}) + D(y_{n_k}) \\ &\leq 2D(y_{n_k}) \quad (D(y_n) \text{ bir monoton azalan dizi olduğundan}) \\ &\leq D(z_{n_k}) \end{aligned}$$

olur.

Böylece, $n_k \in B^c$ ve dolayısıyla

$$A^c \subseteq B^c$$

dir. Yani, $B \subseteq A$ ve dolayısıyla

$$\delta(B) = 0$$

olup, bu (x_n) nin Ost-Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.7 Eğer (L, γ) metrik toplama sisteminde bir (x_n) dizisi Ost-Cauchy dizisi ise o zaman $\delta(K) = 1$ olacak şekilde

$$K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$$

kümesi vardır öyle ki $m, n \rightarrow \infty$ için

$$\gamma(x_{k_n}, x_{k_m}) \rightarrow 0$$

dır.

İspat: (x_n) , L de Ost-Cauchy dizisi olsun. O zaman L de $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde (y_n) dizisi vardır öyle ki

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_{n+p}, x_n) \geq D(y_n), p = 1, 2, 3, \dots\}) = 0$$

olur. $D(y_n) \rightarrow 0$ olduğundan, tüm $n \geq k_1$ için $D(y_n) < \frac{1}{2}$ olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

Bu nedenle, eğer

$$K'_1 = \left\{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_{n+p}, x_n) < \frac{1}{2}, p = 1, 2, 3, \dots\right\}$$

ise $\delta(K'_1) = 1$ dir.

$$K_1 = K'_1 - \{1, 2, \dots, k_1\}$$

kümesini alalım. Açık olarak $\delta(K) = 1$ dir.

Yine tüm $n \geq k_2$ için $D(y_n) < \frac{1}{2}$ olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer

$$B'_1 = \left\{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_{n+p}, x_n) < \frac{1}{4}, p = 1, 2, 3, \dots\right\}$$

ise $\delta(B'_1) = 1$ dir.

$$B_1 = B'_1 - \{1, 2, \dots, k_2\}$$

alalım. Açık olarak $\delta(B_1) = 1$ dir.

$K_2 = K_1 \cap B_1$ alınsın. Bu, $K_2 \subseteq K_1$ ile $\delta(K_2) = 1$ ve $m_1, m_2 \in K_2$ için

$$\gamma(x_{m_1}, x_{m_2}) < \frac{1}{2}$$

olduğu anlamına gelir. Bu şekilde devam edilirse, $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin azalan bir $\{K_j\}$ dizisi vardır öyle ki tüm $j \in \mathbb{N}$ için

$$\delta(K_j) = 1$$

ve tüm $m_1, m_2 \in K_j$ ve $j \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(x_{m_1}, x_{m_2}) < \frac{1}{j}$$

dir. Buradan, Teorem 3.2.4 ün aynı argümanı uygulanarak, doğal sayıların bir $\{p_j\}$ seçilebilir öyle ki tüm $j = 1, 2, \dots$ için $p_j \in K_j$ ve tüm $n \geq p_j$ için

$$\frac{|K_j(n)|}{n} > \frac{j-1}{j}$$

dir.

$$L_0 = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k < p_1\}$$

ve

$$L_j = \{k \in \mathbb{N} : p_j \leq k < p_{j+1}\} \cap K_j, j = 1, 2, 3, \dots$$

kümeleri alınsın öyle ki

$$K = \bigcup_{j=0}^{\infty} L_j$$

olsun. $j \in \mathbb{N}$ ve $p_j \leq k < p_{j+1}$ için

$$K_{j(n)} = \{k \leq n : k \in K_j\} \subseteq \{k \leq n : k \in K\} = (K_n)$$

dir. Bu durumda,

$$\frac{|K(n)|}{n} \geq \frac{|K_j(n)|}{n} \geq \frac{j-1}{j}$$

ve böylece

$$\delta(K) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K(n)|}{n} = 1$$

dir. $\varepsilon > 0$ alınsın. $\frac{1}{j} < \varepsilon$ olacak şekilde en küçük pozitif j tamsayısı seçilsin. $m, n \in K$ ve

$m, n \geq p_j$ olsun. Burada $r \leq s$ olacak şekilde $r, s \geq j$ vardır öyle ki

$$p_r \leq m < p_{r+1} \text{ ve } p_s \leq n < p_{s+1}$$

dir. Bu nedenle $m \in K_r$ ve $n \in K_s$ dir. $r \leq s$ olduğundan, $K_s \subseteq K_r$ ve böylece $m, n \in K_r$ dir. Bu ise

$$\gamma(x_m, x_n) < \frac{1}{r} \leq \frac{1}{j} < \varepsilon$$

anlamına gelir. Böylece, $m, n \rightarrow \infty$ için

$$\gamma(x_m, x_n) \rightarrow 0$$

elde edilir.

Teorem 3.2.8 Eğer (x_n) , metrik toplama sistemi (L, γ) da monoton artan bir dizi ise, o zaman (x_n) , x e order istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak L de $u = (u_n)$ ve $v = (v_n)$ vardır öyle ki γ metriğine göre

$$x = u \vee v, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x \text{ ve } \delta(\{n \in \mathbb{N}: v_n \neq \theta\}) = 0$$

dır.

İspat: (x_n) , x e order istatistiksel yakınsak olduğundan, γ metriğine göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x \text{ ve } \delta(K) = 1$$

olacak şekilde

$$K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$$

kümesi vardır. $u = (u_k)$ ve $v = (v_k)$ dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$u_k = \begin{cases} \theta; & \text{eğer } 1 \leq k < k_1, \\ x_{k_n}; & \text{eğer } k_n \leq k < k_{n+1} \end{cases}$$

ve

$$v_k = \begin{cases} \theta; & \text{eğer } k \in K, \\ x_k; & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu durumda, γ metriğine göre

$$x = u \vee v, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x \text{ ve } \delta(\{n \in \mathbb{N}: v_n \neq \theta\}) = 0$$

olduğu açıktır.

Tersine, L de $u = (u_n)$ ve $v = (v_n)$ alalım öyle ki γ metriğine göre

$$x = u \vee v, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$$

ve

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: v_n \neq \theta\}) = 0$$

olsun.

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: v_n \neq \theta\}) = 0$$

olduğundan, tüm

$$k \in \mathbb{N} - \{n \in \mathbb{N}: v_n \neq \theta\}$$

için $x_k = u_k$ dır.

$$K = \mathbb{N} - \{n \in \mathbb{N}: v_n \neq \theta\} = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\}$$

olsun. O zaman, $\delta(K) = 1$ ve γ metriğine göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$$

olur. Dolayısıyla Teorem 3.2.4 ile (x_n) dizisi x e order istatistiksel yakınsaktır.

4. BİR METRİK TOPLAMSAL SİSTEMDE ORDER İDEAL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, Biswas ve Ganguly (2016) tarafından yapılan makaledeki tanım, teorem ve lemmalar ispatlarıyla birlikte not edilecektir. Öncelikle bir (L, γ) metrik toplamsal sistemde order istatistiksel yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan order ideal yakınsaklık (OJ -yakınsaklık) kavramı ve bu kavram ile ilgili bazı genel özellikler ele alınmıştır. Bu anlamda öncelikle order ideal yakınsak kavramı tanıtılmış ve örnekler verilmiştir. Order ideal yakınsak olan bir dizinin limitinin tekliği ispatlanmıştır. Daha sonra order ideal sınırlılık ve OJ^* -yakınsaklık kavramları tanıtılarak bu kavramların OJ -yakınsaklık ile ilişkileri incelenmiştir.

4.1 Order $\mathcal{I}$ -Yakınsaklık

Tanım 4.1.1 $\mathcal{I}$ ideali doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ nin altkümelerinin bir gerçek ideal ve (L, γ) bir metrik toplamsal sistem olsun. (L, γ) da bir $x = (x_n)$ dizisini alalım. Bu durumda eğer $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L de bir $y = (y_n)$ dizisi var öyle ki D ,

$$D(\theta) = 0$$

olacak şekilde L üzerinde reel değerli bir monoton artan fonksiyon ve tüm $a, b, c \in L$ için

$$\Delta(a, b, c) \geq 0$$

olmak üzere

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_n, \xi) \geq D(y_n)\} \in \mathcal{I}$$

ise, (x_n) dizisi $\xi \in L$ ye order ideal yakınsaktır (OJ -yakınsaktır) denir.

ξ sayısına $x = (x_n)$ dizisinin order ideal limiti (OJ -limit) denir ve

$$OJ - \lim x_n = \xi$$

olarak yazılır.

Çalışma boyunca D , $D(\theta) = 0$ olacak şekilde L üzerinde reel değerli bir monoton artan fonksiyon ve tüm $a, b, c \in L$ için $\Delta(a, b, c) \geq 0$ olarak alınacaktır.

Not 4.1.1 OJ -yakınsaklığın tanımına göre, OJ -yakınsak bir dizinin $\mathcal{I}$ -yakınsak olduğu açıktır. Özellikle D birim fonksiyon ve $L = \mathbb{R}$ ise o zaman γ nın $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış metrik olduğu görülür. Bu durumda, OJ -yakınsaklık, reel sayıların $\mathcal{I}$ -yakınsaklığına denktir.

Örnek 4.1.1 Eğer $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerinin ailesi $\mathcal{I}_f$ ile gösterilirse $\mathcal{I}_f, \mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve OJ -yakınsaklık, alışılmış yakınsaklık ile çakışır.

Örnek 4.1.2 Eğer $\mathcal{I}_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ olarak alınırsa $\mathcal{I}_\delta, \mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve OJ -yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

Aşağıda (L, γ) da OJ -yakınsak olan fakat yakınsak olmayan bir dizi örneği verilecektir.

Örnek 4.1.3 $\mathcal{I}$ ideali $\mathcal{I}_f$ ideali olarak alınsın ve $L = \mathbb{R}$ olacak şekilde D birim fonksiyon olsun. Bu durumda (L, γ) nın alışılmış metrik uzay olduğu görülür. $\mathbb{R}$ de bir (x_n) dizisi aşağıdaki gibi verilsin:

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{eğer } n \text{ kare ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ de $y_n = \frac{1}{n}$ olacak şekilde bir (y_n) dizisi olsun. Bu durumda,

$$\{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_n, 0) \geq D(y_n)\} \in \mathcal{I}$$

olur. Yani,

$$OJ\text{-}\lim x_n = 0$$

fakat (x_n) , γ metriğine göre yakınsak değildir.

Teorem 4.1.1 $\mathcal{I}$, gerçek bir ideal olmak üzere, eğer bir dizinin OJ -limiti varsa tekdir.

İspat: L de hem ξ hem de ν ye yakınsayan bir $x = (x_n)$ dizisi alalım öyle ki $\xi \neq \nu$ olsun. $\varepsilon = \frac{1}{3} \gamma(\xi, \nu)$ olsun. Bu durumda $B(\xi, \varepsilon)$, ξ merkezli ve ε yarıçaplı açık yuvar olmak üzere

$$B(\xi, \varepsilon) \cap B(\nu, \varepsilon) = \emptyset$$

olur. x , hem ξ ve hem de ν ye OJ -yakınsak olduğundan, L de

$$y_n^{(1)} \downarrow \theta \text{ ve } y_n^{(2)} \downarrow \theta$$

olacak şekilde $\{y_n^{(1)}\}$ ve $\{y_n^{(2)}\}$ iki dizisi vardır öyle ki

$$\{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, \xi) \geq D(y_k^{(1)})\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$\{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, v) \geq D(y_k^{(2)})\} \in \mathcal{I}$$

dır. Bu durumda,

$$y_n^{(1)} \downarrow \theta \text{ ve } y_n^{(2)} \downarrow \theta$$

olduğundan, tüm $n \geq n_0$ için

$$D(y_n^{(1)}) < \varepsilon/2 \text{ ve } D(y_n^{(2)}) < \varepsilon/2$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde, $k \geq n_0$ için

$$\{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, \xi) < D(y_k^{(1)})\} \subseteq \{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, \xi) < \varepsilon/2\}$$

olur. Böylece, $k \geq n_0$ için

$$\{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, \xi) < D(y_k^{(1)})\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

olduğundan,

$$A = \{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, \xi) < \varepsilon/2\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

olur. Benzer şekilde $k \geq n_0$ için

$$B = \{k \in \mathbb{N}: \gamma(x_k, v) < \varepsilon/2\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

olduğu görülür. Böylece $k \geq n_0$ için

$$A \cap B \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \text{ ve } A \cap B \neq \emptyset$$

elde edilir öyle ki bu bir çelişkidir ve dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.1.1 Eğer γ metriğine göre $x = (x_n) \in L$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ise bu durumda, $\alpha_n \downarrow \theta$ olacak şekilde bir $(\alpha_n) \in L$ dizisi vardır öyle ki tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(x_k, \xi) < D(\alpha_n)$$

dir.

İspat: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ için $m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki tüm $n \geq m$ için

$$\gamma(x_k, \xi) < \varepsilon$$

olur. $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L de bir (y_n) dizisi olsun. Bundan dolayı her y_i için en küçük bir pozitif tam sayı m_i vardır öyle ki tüm $n \geq m_i, i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\gamma(x_n, \xi) < D(y_i)$$

dir. $z_1 \in L$ seçilsin öyle ki

$$D(z_1) > \max\{D(y_1), \gamma(x_1, \xi), \gamma(x_2, \xi), \dots, \gamma(x_{m_1-1}, \xi)\},$$

$z_2 \in L$ seçilsin öyle ki

$$\gamma(x_{m_1}, \xi) \geq D(z_2) > \max\{D(y_2), \gamma(x_{m_1+1}, \xi), \gamma(x_{m_1+2}, \xi), \dots, \gamma(x_{m_2-1}, \xi)\},$$

$z_3 \in L$ seçilsin öyle ki

$$\gamma(x_{m_2}, \xi) \geq D(z_3) > \max\{D(y_3), \gamma(x_{m_2+1}, \xi), \gamma(x_{m_2+2}, \xi), \dots, \gamma(x_{m_3-1}, \xi)\}$$

ve böylece devam edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} \alpha_i &= z_1 ; i = 1, 2, \dots, m_1 - 1 \\ &= y_1 ; i = m_1 \\ &= z_2 ; i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2 - 1 \\ &= y_2 ; i = m_2 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

alalım. Böylece, tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(x_k, \xi) < D(\alpha_n) \text{ ve } \alpha_n \downarrow \theta$$

olur.

Teorem 4.1.2 Eğer $\mathcal{I}$ bir gerçekte ideal ve γ metriğine göre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olacak şekilde $x = (x_n) \in L$ ise bu durumda, $O\mathcal{I}$ -lim $x_n = \xi$ olur.

İspat: γ metriğine göre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olacak şekilde bir $x = (x_n) \in L$ dizi alınsın. O halde Lemma 4.1.1 e göre $\alpha_n \downarrow \theta$ olacak şekilde $(\alpha_n) \in L$ dizisi vardır öyle ki tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(x_n, \xi) < D(\alpha_n)$$

eşitsizliği elde edilir. O halde

$$\{n \in \mathbb{N}: \gamma(x_n, \xi) \geq D(\alpha_n)\} = \phi \in \mathcal{I}$$

ve böylece

$$O\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = \xi$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3 Eğer $\mathcal{I}$ bir gerçek ideal ve γ metriğine göre

$$O\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = \xi \text{ ve } O\mathcal{I}\text{-}\lim y_n = \nu$$

olacak şekilde (x_n) ve (y_n) , L de iki dizi ise bu durumda,

$$O\mathcal{I}\text{-}\lim(x_n \vee y_n) = \xi \vee \nu$$

dir.

İspat: $O\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ ve $O\mathcal{I} - \lim y_n = \nu$ olduğundan $\alpha_n \downarrow \theta$ ve $\beta_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L de (α_n) ve (β_n) dizileri vardır öyle ki

$$A = \{n \in \mathbb{N}: \gamma(x_n, \xi) \geq D(\alpha_n)\} \in \mathcal{I} \text{ ve } B = \{n \in \mathbb{N}: \gamma(y_n, \nu) \geq D(\beta_n)\} \in \mathcal{I}$$

dir. $p \in A^c \cap B^c$ olsun. Açıkça

$$\gamma(x_p, \xi) < D(\alpha_p) \text{ ve } \gamma(y_p, \nu) < D(\beta_p)$$

olur. D artan bir fonksiyon olduğundan

$$\gamma(x_p \vee y_p, \xi \vee \nu) \leq \gamma(x_p, \xi) + \gamma(y_p, \nu) < D(\alpha_p) + D(\beta_p)$$

elde edilir. $\alpha_n \downarrow \theta$ ve $\beta_n \downarrow \theta$ olduğundan tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$\delta_n \downarrow \theta \text{ ve } D(\delta_n) \geq D(\alpha_n) + D(\beta_n)$$

olacak şekilde bir $\{\delta_n\} \in L$ dizisi düşünölsün. O halde

$$\gamma(x_p \vee y_p, \xi \vee \nu) < D(\delta_p)$$

olur.

$$C = \{n \in \mathbb{N}: \gamma(x_n \vee y_n, \xi \vee \nu) \geq D(\delta_n)\}$$

alınsın. Bu durumda, $p \in C^c$ ve dolayısıyla

$$A^c \cap B^c \subseteq C^c$$

elde edilir. Buradan $A, B \in \mathcal{I}$ olduğundan, $C \subseteq A \cup B \in \mathcal{I}$ ve dolayısıyla

$$O\mathcal{I}\text{-}\lim(x_n \vee y_n) = \xi \vee \nu$$

olur.

Tanım 4.1.2 $\mathcal{I}, \mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir gerçek ideali ve (L, γ) bir metrik toplamsal sistemi olsun. L deki elemanların $x = (x_n)$ dizisi alınsın. Eğer

$$\{n \in \mathbb{N} : D(x_n) \geq B\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $B \in \mathbb{R}$ kümesi varsa, x dizisine L de order ideal sınırlıdır ($O\mathcal{I}$ -sınırlı) denir.

Teorem 4.1.4 $\mathcal{I}, \mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir gerçek ideali olsun. (L, γ) metrik toplamsal sisteminde bir $O\mathcal{I}$ -yakınsak olan dizi $O\mathcal{I}$ -sınırlıdır.

İspat: $O\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = \xi$ olacak şekilde L de bir $x = (x_n)$ dizisi olsun. Bu durumda, L de $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde bir (y_n) dizisi vardır öyle ki

$$\{n \in \mathbb{N} : \gamma(y_n, \xi) \geq D(y_n)\} \in \mathcal{I}$$

yani,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_n, \xi) < D(y_n)\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

olur. $p \in A$ alınsın. O halde

$$\gamma(x_p, \xi) < D(y_p)$$

yani,

$$2D(x_p \vee \xi) - D(x_p) - D(\xi) - D(y_p)$$

olur. Bu durumda,

$$D(x_p) \leq 2D(x_p \vee \xi) - D(x_p) < D(y_p) + D(\xi)$$

eşitsizliği geçerlidir. $y_n \downarrow \theta$ olduğundan $D(y_n) \downarrow 0$ ve sonuç olarak $\{D(y_n)\}$ sınırlıdır ve

$$M = \sup\{D(y_p) : p \in A\}$$

olacak şekilde gerçek bir M sayısı seçilebilir. Açık olarak $D(x_p) < D(\xi) + M$ ve böylece

$$A \subseteq \{k \in \mathbb{N} : D(x_k) < D(\xi) + M\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.5 $\mathcal{I}, \mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir uygun ideali ve (L, γ) bir metrik toplamsal sistemi olsun. Eğer $\mathcal{I}$ sonsuz bir küme içeriyorsa bu durumda, L de aynı limite yakınsamayan bir alt diziye sahip olan $O\mathcal{I}$ -yakınsak bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.

İspat: $A, \mathcal{I}$ da sonsuz bir küme ve $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ olacak şekilde

$$A = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$$

olsun. $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ olacak şekilde

$$B = \mathbb{N} - A = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$$

alınsın. $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan, B de sonsuz bir kümedir. $\eta \neq \xi$ olacak şekilde $\eta, \xi \in L$ seçilsin ve bir $(x_n) \in L$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} \eta; & \text{eğer } k \in A, \\ \xi; & \text{eğer } k \in B \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L de sıfır olmayan elemanlardan oluşan bir (y_n) dizisi seçilsin. Bu durumda,

$$\{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_n, \xi) \geq D(y_n)\} \subseteq A \in \mathcal{I}.$$

olur. Açık olarak,

$$O\mathcal{I}\text{-}\lim x_k = \xi$$

sağlanır. Ayrıca

$$\{n_k \in \mathbb{N} : \gamma(x_{n_k}, \eta) \geq D(y_n)\} = \phi \in \mathcal{I}$$

ve sonuç olarak (x_{n_k}) alt dizisi η ye yakınsaktır.

Teorem 4.1.6 $\mathcal{I}, \mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir uygun ideali ve L deki her bir $x = (x_n)$ dizisinin ξ ya $O\mathcal{I}$ -yakınsak bir alt dizisi varsa bu durumda x, ξ ya $O\mathcal{I}$ -yakınsaktır.

İspat: $x = (x_n)$ L de bir dizi olsun öyle ki x in her bir alt dizisi ξ ya $O\mathcal{I}$ -yakınsak fakat $O\mathcal{I}\text{-}\lim x_n \neq \xi$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $y_n \downarrow \theta$ olmak üzere her bir $\{y_n\} \in L$ ile için,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_n, \xi) \geq D(y_n)\} \notin \mathcal{I}$$

yani, $A \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğu için A sonsuz bir kümedir.

$A = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$ ve (x_{n_k}) , x in bir alt dizisi olsun. Bu durumda, (x_{n_k}) in herhangi bir (x_{p_k}) alt dizisi seçilirse açıkça

$$\{p_k \in \mathbb{N} : \gamma(x_{p_k}, \xi) \geq D(y_{p_k})\} \notin \mathcal{I}$$

olduğu görülür ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle

$$O\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = \xi$$

olmalıdır.

4.2 Order $\mathcal{I}^*$ -Yakınsaklık

Tanım 4.2.1 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir gerçek ideali ve (L, γ) bir metrik toplamsal sistemi olsun. Eğer L de bir $x = (x_n)$ dizisi için $M = \{m_1 < m_2 < m_3 \dots\}$ olmak üzere bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi var öyle ki γ metriğine göre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \xi$$

ise bu durumda, x dizisi $\xi \in L$ ya $O\mathcal{I}^*$ -yakınsaktır denir.

Teorem 4.2.1 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir gerçek ideali olsun. Eğer L de bir (x_n) dizisi için $O\mathcal{I}^*\text{-}\lim x_n = \xi$ ise bu durumda, $O\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = \xi$ olur.

İspat: $O\mathcal{I}^*\text{-}\lim x_n = \xi$ olsun. Bu durumda, $M = \{m_1 < m_2 < m_3 \dots\}$ olmak üzere bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi var öyle ki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \xi$$

dır. Buradan, Lemma 4.1.1 i kullanarak $\beta_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L de bir $\{\beta_n\}$ seçebiliriz öyle ki tüm $k \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(x_{m_k}, \xi) < D(\beta_{m_k})$$

olur. Böylece,

$$\{k \in \mathbb{N} : \gamma(x_k, \xi) \geq D(\beta_k)\} \subseteq \mathbb{N} - M \in \mathcal{I}.$$

ve sonuç olarak

$$O\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = \xi$$

elde edilir.

Aşağıdaki örnekte bir $\mathcal{I}$ ideali ve L de bir $\{x_n\}$ dizisi için $O\mathcal{I}$ -lim x_n ve $O\mathcal{I}^*$ -lim x_n limitlerinin eşit olmayabileceklerini gösterir.

Örnek 4.2.1 $p \in P$ olmak üzere $N_p = \{p, p^2, p^3, \dots\}$ asal sayıların kümesi ve $N_1 = \mathbb{N} - \bigcup_{p \in P} N_p$ olsun. Bu durumda, her N_j sonsuz olmak üzere $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1, j \in P} N_j$ ve tüm $i \neq j$ için $N_i \cap N_j = \emptyset$ dır. $\mathcal{I} = \{A \subset \mathbb{N}: A \text{ yalnızca sonlu sayıda } N_j \text{ ile kesişir.}\}$ olduğunu düşünelim. L de ξ , L nin bir yığılma noktası olsun. Bu durumda, L de bir (x_n) dizisi vardır öyle ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

olur. Lemma 4.1.1 i kullanarak, L de $\alpha_n \downarrow \theta$ olacak şekilde bir (α_n) dizisi seçilebilir öyle ki tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(x_n, \xi) < D(\alpha_n)$$

olduğu görülür. $j, 1$ ya da asal sayı olmak üzere eğer $n \in \mathbb{N}_j$ ise L de bir (y_n) dizisi $y_n = x_j$ biçiminde tanımlansın. $O\mathcal{I}$ -lim $y_n = \xi$ olduğu iddia edilsin. Aksi takdirde, $\beta_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L deki her $\beta = \{\beta_n\}$ için

$$A(\beta) = \{n \in \mathbb{N}: \gamma(x_n, \xi) \geq D(\beta_n)\} \notin \mathcal{I}$$

olur. Başka bir deyişle $A(\beta)$ sonsuz sayıda $\mathbb{N}_j$ ile kesişir. O halde, asal sayıların bir (p_n) alt dizisi vardır öyle ki

$$n \in \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_{p_1} \cup \mathbb{N}_{p_2} \cup \mathbb{N}_{p_3} \cup \dots$$

olduğunda

$$\gamma(x_n, \xi) \geq D(\beta_n)$$

olur. $\mathbb{N}_{p_1}$ sonsuz olduğundan

$$\gamma(x_{p_1}, \xi) \geq D(\beta_{q_1})$$

olacak şekilde bir $n = q_1 \in \mathbb{N}_{p_1}$ doğal sayısı vardır. Yine $\mathbb{N}_{p_2}$ sonsuz olduğundan $q_1 > q_2$ olmak üzere

$$\gamma(x_{p_2}, \xi) \geq D(\beta_{q_2})$$

olacak şekilde bir $n = q_2 \in \mathbb{N}_{p_2}$ doğal sayısı vardır. Bu şekilde devam edilerek, tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(x_{p_n}, \xi) \geq D(\beta_{q_n})$$

olacak şekilde doğal sayıların bir (q_n) alt dizisi inşa edilir ancak özellikle eğer

$$\beta_{q_n} = \alpha_{q_n}$$

ise, bu durum (a_n) dizisinin seçilişi ile çelişir.

Şimdi kabul edelim ki $OJ^*-\lim y_n = \xi$ olsun. Bu durumda, γ metriğine göre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \xi$$

olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < m_3 \dots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır. Lemma 4.1.1 i kullanarak, $\beta_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L de bir $\{\beta_n\}$ dizisi olabilir öyle ki, tüm $k \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(x_{m_k}, \xi) < D(\beta_{m_k}) \dots \dots \dots (1)$$

dir. $H = \mathbb{N} - M$ alınsın. Bu durumda $H \in \mathcal{I}$ ve $p_1, p_2, \dots, p_r$ asal sayıları vardır öyle ki

$$H \subseteq N_1 \cup N_{p_1} \cup N_{p_2} \cup \dots \cup N_{p_r}$$

dır. Böylece,

$$N_{r+1} \subseteq \mathbb{N} - H = M$$

ve $n \in N_{r+1}$, olması sonsuz sayıda n için $y_n = x_{n+1}$ anlamına gelir. Yani, $\beta_n \downarrow \theta$ ve D monoton artan olduğundan, sonsuz sayıda m_k için

$$\gamma(x_{m_k}, \xi) = \gamma(x_{r+1}, \xi) > 0$$

olur ki (1) ile çelişir. Dolayısıyla

$$OJ^*-\lim y_n \neq \xi$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2 $\mathcal{I}$ ideali AP özelliğine sahip, $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir uygun ideali olsun. Bu durumda, $\xi \in L$ olmak üzere (L, γ) deki (x_n) dizisi için $OJ-\lim x_n = \xi$ ancak ve ancak $OJ^*-\lim x_n = \xi$ dir.

İspat: $OJ-\lim x_n = \xi$ olduğundan, $y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde L de farklı elemanların bir (y_n) dizisi vardır öyle ki

$$\{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_n, \xi) \geq D(y_n)\} \in \mathcal{I}$$

dir. $n \geq 2$ için

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_n, \xi) \geq D(y_1)\} \text{ ve } A_n = \{k \in \mathbb{N} : D(y_n) \leq \gamma(x, \xi) < D(y_{n-1})\}$$

kümeleri ele alınsın.

Açıkça görülür ki A_i ikilileri çiftler olarak ayrıktır. AP özelliğinden altkümelerin bir $\{B_n\}$ dizisi vardır öyle ki tüm $i \in \mathbb{N}$ ler için $A_i \Delta B_i$ sonlu ve

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}$$

dir. $M = \mathbb{N} - B = \{m_1, m_2, \dots\}$ olsun. $\varepsilon > 0$ için,

$$D(y_{k+1}) < \varepsilon$$

olacak şekilde en küçük pozitif $k \in \mathbb{N}$ tamsayısı seçilsin. Bu durumda,

$$\{n \in \mathbb{N} : \gamma(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i$$

olur. $i = 1, 2, 3, \dots, k+1$ için $A_i \Delta B_i$ nin tümü sonlu kümelerdir ve böylece

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i \cap \{n \in \mathbb{N} : n > m\} = \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \cap \{n \in \mathbb{N} : n > m\}$$

olacak şekilde bazı $m \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $n > m$ ve $n \notin B$ ise

$$n \notin \bigcup_{i=1}^{k+1} B_i \text{ ve } n \notin \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i$$

olur. O halde

$$\gamma(x_n, \xi) < D(y_{k+1}) < \varepsilon.$$

sağlanır. Böylece, $n > m$ ve $n \in M$ için

$$\gamma(x_n, \xi) < \varepsilon$$

ve dolayısıyla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \xi$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$OJ^*-\lim x_n = \xi$$

olur. Tersini de Teorem 4.2.1 den anlaşılır.

5. KAYNAKLAR

Aliprantis C D, Border KIM C, 2006, Infinite Dimensional Analysis, Springer Berlin Heidelberg (Third Edition), NewYork

Balcı M, 2016, Matematik Analiz-I, Palme Yayınevi, Ankara.

Birkhoff G, (1940), Lattice Theory, American Mathematical Society Colloquium Publications, XXV(First Edition), NewYork.

Biswas B, Ganguly D K, 2016, On order ideal convergence in a metric additive system, Journal of Analysis and Number Theory, 4(2), 159-164.

Connor J, Swardson M A, 1993, Strong integral summability and the Stone Cech compactification of the half-line, Pacific Journal of Mathematics, 157(2), 201-224.

Das P, Dutta S, Pal S K, 2014, On $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$ equal convergence and an Egoroff-type theorem, Matematiki Vesnik, 66, 2 165177.

Erdős P, Tenenbaum G, 1989, Sur les densités de certaines suites d'entiers, Proceedings London Mathematical Society, 59(3), 417-438.

Fast H, 1959, Sur la convergence statistique, Colloquium Mathematicum, 2, 241-244.

Freedman A R, Sember J J, 1981, Densities and summability, Pacific Journal of Mathematics, 95(2), 293-305.

Fridy, J A 1985, On statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.

Fridy, J A ve Orhan C (1979), Statistical limit superior and limit inferior, Proceedings American Mathematical Society, 125(12): 3625-3631.

Frink O, 1942, Topology in lattices, Transactions of the American Mathematical Society, 51, 569-582.

- Ganguly D K, Biswas B, 2014, Order statistical convergence in a metric space, Investigations in Mathematical Sciences, 4(2), 11-23.
- Kostyrko P, Macaj M, Salat T, Sleziak M, 2005, $\mathcal{I}$ -convergence and External $\mathcal{I}$ -limit Points, Mathematica Slovaca, 55, 443-464.
- Kostyrko P, Salat T, Wilczynski W, 2000, $\mathcal{I}$ -convergence, Real Analysis Exchange, 26(2), 669-686.
- Maddox I J, 1988, Statistical convergence in a locally convex space, Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society, 104(1), 141-145.
- Miller H I, 1995, A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, Transactions of the American Mathematical Society, 374(5), 1881-1819.
- Nabiev A, Pehlivan S, Gürdal M, 2007, On $\mathcal{I}$ -Cauchy sequence, Taiwanese Journal of Mathematics, 11, 569–576.
- Niven I, Zuckerman H S, 1980, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, 4-th edition, Chapter-11, NewYork, USA.
- Rennie B C, 1951, Lattices, Proceedings of the London Mathematical Society, 52(2), 386-400.
- Salat T (1980), On statistically convergent sequences of real numbers, Mathematica Slovaca, 30(2), 139-150.
- Salat T, Tripathy B C, Ziman M, 2005, On $\mathcal{I}$ -convergence field, Italian Journal Pure and Applied Mathematics, 17, 45-54.
- Schoenberg, I J, 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, The American Mathematical Monthly, 66, 361-375.
- Steinhaus H, 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Mathematicum, 2, 73-74.

- Tripathy B C, Hazarika B, 2011, On $\mathcal{I}$ -monotonic and $\mathcal{I}$ -convergent sequences, Kyungpook Mathematical Journal, 51(2), 233-239.
- Tripathy B C, Hazarika B, 2011, $\mathcal{I}$ -convergent sequence spaces defined by Orlicz function, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 27(1), 149-154.
- Tripathy B C, Sen M, Nath S, 2012, $\mathcal{I}$ -convergence in probabilistic n -normed space, Soft Computing, 16, 1021-1027, DOI 10.1007/s00500-011-0799-8
- Tripathy B C, Dutta A J, (2012), On $\mathcal{I}$ -acceleration convergence of sequences of fuzzy real numbers, Mathematical Modelling and Analysis, 17(4), 549-557.
- Tripathy B K, Tripathy B C, 2005, On $\mathcal{I}$ -convergent double sequence, Soochow Journal of Mathematics, 31(4), 549-560.
- Wilcox L R, Smiley M F, 1939, Metric Lattices, Annals of Mathematics, 40(2), 309-327.
- Zygmund A, 1979, Trigonometric series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.