

ÖRGÜ KOŞULLARI VE ÖRTÜ ÖZELLİKLERİ

125792
ÇETİN VURAL

DOKTORA TEZİ
(MATEMATİK)

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

125792

Ekim 2002

ANKARA

Çetin VURAL tarafından hazırlanan ÖRGÜ KOŞULLARI VE ÖRTÜ
ÖZELLİKLERİ adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Süleyman ÖNAL

Tez Yöneticisi



Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Cihan ORHAN



Üye : Prof. Dr. Cemil YILDIZ



Üye : Prof. Dr. Erdoğan ESİN



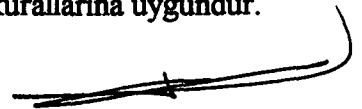
Üye : Prof. Dr. Dursun TAŞCI



Üye : Doç. Dr. Süleyman ÖNAL



Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
1. GİRİŞ	1
2. TANIMLAR VE TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Örtü Özellikleri	3
2.2. Örgü Koşulları	4
2.3. Küme Teori	5
2.4. Monoton Normal Uzaylar ve GO-Uzaylar	7
3. ÖRGÜ KOŞULLARI VE ÖRTÜ ÖZELLİKLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER	9
3.1. (F)-Koşulunu Sağlayan Sistemlerin Bazı Zayıf Biçimleri ve Örtü Özellikleri Arasındaki İlişkiler	9
3.2. Örgü Koşullarında Üretilmişlik	20
3.3. Çarpım Uzaylarında Örgü Koşulları ve Örtü Özellikleri	25
4. GO-UZAYLAR	30
4.1. GO-Uzaylar ve Durağan Küme	30
5. NOKTA $\leq \kappa$ TABAN, κ -NOKTA-DÜZGÜN TABAN VE GENİŞLEME	40
5.1. Nokta $\leq \kappa$ Problemi	40
5.2. κ -Nokta-Düzgün Taban ve Bir Genişleme Özelliği	52
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	57

ÖRGÜ KOŞULLARI VE ÖRTÜ ÖZELLİKLERİ
(Doktora Tezi)

Çetin VURAL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ekim 2002

ÖZET

Bu çalışmada (F)-koşulunu sağlayan sistemleri oluşturan aileler üzerindeki koşullar zayıflatılarak veya doğrudan (F)-koşulu zayıflatılarak bunlar ile bazı örtü özellikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bir ailenin başka bir aile tarafından üretilmesi tanımlanmış ve çarpım uzaylarında bazı örtü özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca nokta-sayılabılır taban probleminin genelleştirmesi olan nokta $\leq$ κ taban problemi ele alınmıştır. κ -ranklı (F)-koşulunu sağlayan bir sisteme sahip olan topolojik uzaylarda diskret her ailenin nokta $<$ κ genişlemeye sahip olduğu da görülmüştür.

Bilim Kodu : 403.04.01

Anahtar Kelimeler : (F)-koşulu, (G)-koşulu, metakompakt, nokta-sayılabılır.

Sayfa Adedi : 57

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Süleyman ÖNAL

LATTICE CONDITIONS AND COVERING PROPERTIES
(Ph.D. Thesis)

Çetin VURAL

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
October 2002

ABSTRACT

In this work, under some weaker condition, the relation between the system which satisfies (F)-condition and some cover property has been investigated. By defining a family which is generated by another family, we get some cover property of product spaces. Also we study on $\text{point} \leq \kappa$ base problem, which is a generalization of point-countable base problem. Then we show that each discrete family of a topological space having a system which satisfying κ -rank (F)-condition has $\text{point} < \kappa$ extension.

Science Code : 403.04.01

Key Words : (F)-condition, (G)-condition, metacompact, point-countable.

Page number : 57

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Süleyman ÖNAL

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca beni yönlendiren, büyük özverilerde bulunup değerli ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Hocam Sayın Doç.Dr. Süleyman ÖNAL'a, yaptığım çalışmaları belirli aralıklarla dinleme sabrını ve nezaketini gösteren değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Erdoğan ESİN ve Sayın Prof. Dr. Cemil YILDIZ'a, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan Annem, Babam ve eşim Ceyda'ya ve ayrıca üzerimde emeği bulunan tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.



1. GİRİŞ

Bu çalışma, giriş bölümü dışında dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde bazı tanım ve temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde; örgü koşulları olarak adlandırılan koşullar ile bazı örtü özellikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Örgü özellikleri ile ilgili ilk çalışmalar G.M. Reed (1983), P.J. Collins ve A.W. Roscoe (1984) tarafından yapılmıştır. Reed, Collins ve Roscoe bu çalışmalarında daha çok (F)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemindeki $\mathcal{W}(x)$ ailelerinin sayılabilir, açık ve kapsama bağıntısına göre azalan olması durumunu ele almışlar ve bu türden sisteme sahip olan uzayların metrikleştirilebilir olduğunu görmüşlerdir. Benzer çalışmalar Z. Balogh (1985) tarafından da yapılmıştır. Collins ve Roscoe 1984'deki çalışmalarında zincir (F)-koşulunun yığınsal normallığı gerektirdiğini görmüşler ve bu iki yazarın 1985 yılında G.M. Reed ve M.E. Rudin ile birlikte yaptıkları çalışmada “ $\supseteq$ ” bağıntısıyla iyi-sıralı (F)-koşulunun ve zincir komşuluk (F)-koşulunun metakompaktlığı dolayısıyla, yığınsal normallikten ötürü, parakompaktlığı gerektirdiği ispatlanmıştır. Daha sonra P.J. Moody, G.M. Reed, A.W. Roscoe ve P.J. Collins (1991) zincir (F)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemindeki $\mathcal{W}(x)$ ailelerinin, x 'in komşuluklarından oluşan bir aile ile “ $\supseteq$ ” bağıntısıyla iyi-sıralı olan başka bir ailenin birleşimi biçiminde yazıldığında bunun yine parakompaktlığı verdiğini görmüşlerdir. Üçüncü bölümün ilk kısmında, yukarıda söz edilen teoremlerdeki zincir, komşuluk, iyi-sıralılık gibi özellikler zayıflatılmak suretiyle bilinen sonuçlardan daha genel olabilecek bazı sonuçlar elde edilmiştir. İkinci kısımda, doğrudan (F)-koşulu zayıflatılarak bazı örtü özelliklerine ulaşılmıştır. Üçüncü kısımda ise, örgü koşullarının çarpım uzaylarındaki durumu incelenmiştir. P.M. Gartside (1993) Doktora tezinde iyi-sıralı (F)-koşulunu sağlayan sisteme sahip olan uzayların sonlu çarpımının metakompakt olduğunu görmüştür. Bu çalışmada ise; m regüler bir kardinal sayı olmak üzere, her $i \in m$ için X_i uzayı sonlu ranklı, Noetherian bir aileden sonlu üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir sisteme sahip olduğunda $\prod_{i \in m} X_i$ çarpım uzayının (∞, m) -metaLindelöf olduğu görülmüştür.

Dördüncü bölümde, Z. Balogh ve M.E. Rudin (1992) tarafından, monoton normal uzaylar için ispat edilmiş olan bir teoremin genelleştirilmiş sıralı uzaylardaki ispatı verilmiştir.

Beşinci bölümün ilk kısmında nokta-sayılabilir taban problemi olarak bilinen, açık (G)-koşulunu sağlayan uzayların nokta-sayılabilir tabana sahip olup olmadıkları problemi, κ sonsuz bir kardinal sayı olmak üzere nokta $\leq\kappa$ taban problemine dönüştürülmüş ve bu amaçla (G_κ) -koşulu tanımlanmıştır. İkinci kısımda ise, κ -nokta-düzgün taban tanımı verilmiş ve κ -nokta-düzgün tabana sahip ve $P_{<\kappa}$ -özellikliğini sağlayan her topolojik uzayın κ -developmente sahip olduğu görülmüştür. (X topolojik uzayının açık altkümelerinden oluşan ve kardinalitesi κ 'dan küçük olan her ailenin arakesiti X 'in açık altkümesi ise X uzayına $P_{<\kappa}$ -özellikliğini sağlıyor denir). Bu kısımda ayrıca κ ranklı (F)-koşulunu sağlayan sisteme sahip olan topolojik uzaylarda diskret her ailenin nokta $<\kappa$ genişlemesinin varlığı ispatlanmıştır.

Bu çalışmada; doğal sayılar kümesi ω ile, κ bir kardinal sayı olmak üzere κ 'dan sonra gelen en küçük kardinal sayı κ^+ ile, iyi-sıralı bir $(A, <)$ kümesinin sıra tipi (order type) $ot(A)$ ile, herhangi bir A kümesinin kardinalitesi $|A|$ ile, kapanışı $\bar{A}$ ile ve iç noktaları kümesi $\overset{\circ}{A}$ ile gösterilecektir.

Aksi belirtilmedikçe bütün topolojik uzaylar T_1 -uzaydır.

2. TANIMLAR VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Örtü Özellikleri

Tanım 2.1.1

$\mathcal{V}$ ve $\mathcal{B}$ bir X kümesi için örtüler olmak üzere eğer her $V \in \mathcal{V}$ için $V \subseteq O$ olacak biçimde bir $O \in \mathcal{B}$ varsa $\mathcal{V}$ ailesine $\mathcal{B}$ ailesinin incelməsi denir. Eğer $\mathcal{V}$ ailesi X için örtü değilse $\mathcal{V}$ ailesine $\mathcal{B}$ ailesinin kısmi incelməsi denir. $\mathcal{V}$ ailesi açık kümelerden oluşuyorsa $\mathcal{V}$ 'ye açık (kısmi) incelməsi denir.

Tanım 2.1.2

X bir topolojik uzay, $\mathcal{V}$ X 'in altkümelerinin bir ailesi ve κ bir kardinal sayı olmak üzere eğer her $x \in X$ için x elemanının $|\{V \in \mathcal{V} : V \cap T \neq \emptyset\}| < \kappa$ olacak biçimde bir T komşuluğu varsa $\mathcal{V}$ ailesine yerel $< \kappa$ denir. $\kappa = \omega$ olması halinde $\mathcal{V}$ ailesine yerel sonlu, $\kappa = \omega_1$ olması halinde de yerel sayılabilir denir. $\kappa = 2$ ise $\mathcal{V}$ ailesine diskret aile denir.

Tanım 2.1.3

X bir küme, $\mathcal{V}$ X 'in altkümelerinin bir ailesi ve κ sonsuz bir kardinal sayı olmak üzere her $x \in X$ için $|\{V \in \mathcal{V} : x \in V\}| < \kappa$ ise $\mathcal{V}$ ailesine nokta $< \kappa$ denir. Eğer $\kappa = \omega$ ise nokta-sonlu, $\kappa = \omega_1$ ise nokta-sayılabilir denir.

Tanım 2.1.4

Hausdorff bir X topolojik uzayının her açık örtüsünün yerel sonlu bir açık incelməsi varsa X uzayına parakompakt denir.

Tanım 2.1.5

X topolojik uzayının her açık örtüsünün nokta-sonlu (nokta-sayılabılır) bir açık incelmişi varsa X uzayına metakompakt (metaLindelöf) denir.

Yerel sonlu her aile nokta-sonlu olduğundan parakompakt her uzay metakompakttır fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Bununla ilgili örnekler [3]'te bulunabilir. Ancak uzay yığınsal normal ise bu ikisi denktir[3]. Şimdi yığınsal normal uzay tanımını verelim.

Tanım 2.1.6

X bir topolojik uzay olmak üzere X 'in kapalı altkümelerinden oluşan diskret her $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ailesi için, her $\alpha \in \Lambda$ için $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ olacak biçimde ayrık ve açık altkümelerden oluşan bir $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ailesi bulunabiliyorsa X uzayına yığınsal normal uzay denir.

2.2. Örgü Koşulları

Tanım 2.2.1

X bir küme, $\mathcal{A}$ X 'in altkümelerinin bir ailesi ve κ bir kardinal sayı olmak üzere $\text{rank}(\mathcal{A}) = \min\{\kappa : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ ve } |\mathcal{B}| \geq \kappa \text{ ise } \exists A, B \in \mathcal{B} : A \subset B\}$ biçiminde tanımlıdır. $\text{rank}(\mathcal{A}) \leq \kappa$ ise $\mathcal{A}$ ailesine κ ranklı, $\text{rank}(\mathcal{A}) < \omega$ olması durumunda da sonlu ranklı aile denir.

Tanım 2.2.2

X bir küme, $\mathcal{A}$ X 'in altkümelerinin bir ailesi ve κ sonsuz bir kardinal sayı olmak üzere eğer $\mathcal{A}$ nın, kapsama bağıntısına göre artan her alt ailesinin kardinalitesi κ 'dan küçükse $\mathcal{A}$ ailesine κ -Noetherian aile denir. $\kappa = \omega$ ise Noetherian aile denir.

İyi-sıralı bir küme içinde azalan sonsuz bir dizi bulunamayacağından, eğer $\mathcal{A}$ ailesi “ $\supseteq$ ” bağıntısıyla iyi-sıralı ise $\mathcal{A}$ ailesi Noetheriandır.

Tanım 2.2.3

X bir topolojik uzay ve her $x \in X$ için $\mathcal{W}(x)$ x elemanını içeren altkümelerin bir ailesi olmak üzere $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ olsun. Eğer “ $\forall x \in X, \forall U \subseteq X$ açık : $x \in U$ için $\exists V = V(x, U) \subseteq X$ açık : $x \in V(x, U)$ ve $\forall y \in V(x, U)$ için $\exists W \in \mathcal{W}(y) : W \subseteq U$ ” sağlanıyorsa $\mathcal{W}$ sistemi (F)-koşulunu sağlıyor denir.

Eğer $\mathcal{W}$ sistemini oluşturan $\mathcal{W}(x)$ aileleri; X 'in açık altkümelerinden oluşuyorsa $\mathcal{W}$ sistemi açık (F)-koşulunu, x 'in komşuluklarından oluşuyorsa komşuluk (F)-koşulunu, kapsama bağıntısına göre zincir ise zincir (F)-koşulunu, “ $\supseteq$ ” bağıntısına göre iyi-sıralı ise iyi-sıralı (F)-koşulunu sağlıyor denir. Eğer her $x \in X$ için $\text{rank}(\mathcal{W}(x)) \leq \kappa$ ve $\mathcal{W}(x)$ ailesi κ -Noetherian ise $\mathcal{W}$ sistemi κ ranklı, κ -Noetherian (F)-koşulunu sağlıyor denir. $\mathcal{W}(x)$ ailelerini kısıtlayan özelliklere göre adlandırmalar benzer biçimde çoğaltılabilir.

2.3. Küme Teori

Tanım 2.3.1

X bir küme ve “ $\leq$ ” X üzerinde yansımali, antisimetrik ve geçişmeli bir bağıntı olmak üzere her $x, y \in X$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise X kümesine $\leq$ bağıntısıyla tam sıralı bir küme denir. Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.3.2

$(A, \leq)$ tam sıralı bir küme ve $B \subseteq A$ olmak üzere eğer her $a \in A$ için $a \leq b$ olacak biçimde bir $b \in B$ varsa B kümesine A içinde kofinal denir. A 'nın kofinalitesi

$cf(A) = \min\{|B| : B \subseteq A \text{ ve } B \text{ } A \text{ içinde kofinal}\}$ biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.3.3

λ bir limit ordinal olmak üzere eğer $cf(\lambda) = \lambda$ ise λ 'ya regüler ordinal denir.

Tanım 2.3.4

γ bir ordinal ve $C \subseteq \gamma$ olmak üzere eğer her $\alpha < \gamma$ ve $C \cap \alpha$ kümesinin boş olmayan her B altkümesi için $\sup B \in C$ ise C kümesine γ içinde kapalıdır denir. Eğer her $\alpha \in \gamma$ için $\alpha < \beta$ olacak biçimde bir $\beta \in C$ varsa C kümesine γ içinde sınırsızdır denir.

Tanım 2.3.5

λ bir limit ordinal ve $S \subset \lambda$ olmak üzere eğer λ içindeki kapalı ve sınırsız her C altkümesi için $S \cap C \neq \emptyset$ ise S kümesine λ içinde durağan (stationary) denir.

Tanım 2.3.6

κ ve λ kardinal sayılar olmak üzere $\kappa^{\lambda} = \sup\{\kappa^{\eta} : \eta \text{ kardinal ve } \eta < \lambda\}$ biçiminde tanımlıdır. X bir küme ve λ bir kardinal sayı iken $[X]^{\lambda} = \{A \subseteq X : |A| < \lambda\}$, $[X]^{<\lambda} = \{A \subseteq X : |A| \leq \lambda\}$ ve $[X]^{\lambda} = \{A \subseteq X : |A| = \lambda\}$ dır. $|X| = \kappa$ ve λ , $2 \leq \lambda \leq \kappa$ biçiminde bir kardinal sayı olmak üzere $\kappa^{\lambda} = |[X]^{<\lambda}|$ olduğu bilinmektedir[12].

Tanım 2.3.7

γ bir ordinal, κ , λ ve her $\alpha < \gamma$ için κ_{α} bir kardinal sayı olmak üzere eğer “kardinalitesi κ olan herhangi bir X kümesi ve her $f : [X]^{\lambda} \longrightarrow \gamma$ fonksiyonu için öyle bir $\alpha < \gamma$ ve X'in kardinalitesi κ_{α} olan öyle bir Y altkümesi vardır ki f fonksiyonu $[Y]^{\lambda}$ kümesi üzerinde sabittir” iddiası doğru ise bu durum

$\kappa \longrightarrow (\kappa_\alpha)_{\alpha < \gamma}^\lambda$ ile gösterilir. Eğer her $\alpha < \gamma$ için $\kappa_\alpha = \tau$ ise $\kappa \longrightarrow (\tau)_\gamma^\lambda$ biçiminde gösterilir.

2.4. Monoton Normal Uzaylar ve GO-Uzaylar

Tanım 2.4.1

$(X, \leq)$ tam sıralı bir küme ve $A \subset X$ olmak üzere eğer $p \leq q$ olacak biçimdeki her $p, q \in A$ için $\{x \in X : p \leq x \leq q\} \subseteq A$ oluyorsa A kümesine X 'in konveks bir altkümesi denir.

Tanım 2.4.2

$(X, \leq)$ tam sıralı bir küme ve $x, y \in X$ olmak üzere $x < y$ olsun. $(x, \rightarrow) = \{z \in X : x < z\}$, $(\leftarrow, x) = \{z \in X : z < x\}$ ve $(x, y) = \{z \in X : x < z < y\}$ kümelerine açık aralıklar, $[x, \rightarrow) = \{z \in X : x \leq z\}$, $(\leftarrow, x] = \{z \in X : z \leq x\}$ ve $[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$ kümelerine de aralıklar denir. X kümesinin bütün açık aralıklarından oluşan aile topoloji tabanı olma özelliklerini sağlar ve bu ailenin ürettiği topolojiye lineer sıralı topoloji denir. Bu topoloji $\tau(\leq)$ ile gösterilir ve $(X, \leq, \tau(\leq))$ üçlüsüne lineer sıralı topolojik uzay denir.

Tanım 2.4.3

X bir küme, $\leq$ X üzerinde bir lineer sıralama bağıntısı ve τ X üzerinde bir topoloji olmak üzere eğer $\tau(\leq) \subseteq \tau$ ve τ topolojisinin konveks altkümelerden oluşan bir tabanı varsa $(X, \leq, \tau)$ üçlüsüne genelleştirilmiş sıralı uzay (GO-uzay) denir.

Tanım 2.4.4

X bir Hausdorff topolojik uzay olmak üzere eğer X 'in her x elemanı ve x 'i içeren her U açık altkümesi için öyle bir $G(x, U)$ açık altkümesi varsa ve

i.) $x \in G(x, U) \subseteq U$

ii.) $x, y \in X$, $U, V \subseteq X$ açık ve $x \in U$, $y \in V$ olmak üzere $G(x, U) \cap G(y, V) \neq \emptyset$ olması $x \in V$ veya $y \in U$ olmasını gerektirir.

koşulları sağlamıyorsa X topolojik uzayına monoton normal uzay denir.

GO-uzaylar monoton normal uzaylardır[11] fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Üzerindeki bilinen topolojiyle $\mathbb{R}^2$ monoton normal uzay olmasına karşın GO-uzay değildir.



3. ÖRGÜ KOŞULLARI VE ÖRTÜ ÖZELLİKLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu bölümde genel olarak (F)-koşulunu ve bu koşula benzer başka koşulları sağlayan bir sisteme sahip olan topolojik uzaylar ile bazı örtü özellikleri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

İlk kısımda (F)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sisteminin üzerindeki bilinen bazı özellikler (zincir, komşuluk, iyi-sıralılık) zayıflatılarak bunlar ile bazı örtü özellikleri arasındaki ilişkiler araştırılmış ve bilinen sonuçlardan daha genel olabilecek birtakım sonuçlar elde edilmiştir. İkinci kısımda ise bir ailenin bir aileler sistemi tarafından üretilmesi tanımlanmak suretiyle (F)-koşulu zayıflatılarak bazı örtü özelliklerine ulaşılmaya çalışılmış ve bunların kardinal genişlemeleri de elde edilmiştir. Bu bölümde ayrıca çarpım uzaylarının örtü özellikleri ile ilgili kriterlere de yer verilmiştir.

İspatlarda yer alan ve $V(x, O)$ ile gösterilen küme, X topolojik uzayının bir x elemanını içeren O açık alt kümesi için (F)-koşulundan gelen, x elemanını içeren ve “ $y \in V(x, O)$ ise $x \in W \subseteq O$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{W}(y)$ vardır” koşulunu sağlayan açık alt kümedir.

3.1. (F)-Koşulunu Sağlayan Sistemlerin Bazı Zayıf Biçimleri ve Örtü Özellikleri Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda, [1] de yer alan, “(F)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W} = \{ \mathcal{W}(x) : x \in X \}$ sistemindeki her bir $\mathcal{W}(x)$ ailesi “ $\supseteq$ ” bağıntısıyla iyi-sıralı veya x in komşuluklarından oluşan bir zincir ise X topolojik uzayı parakompakttır” teoremlerindeki $\mathcal{W}(x)$ aileleri üzerindeki koşullar zayıflatılarak bazı örtü özelliklerinin elde edilmesi amaçlanmıştır.

Aşağıdaki teoremden X topolojik uzayının (F)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W} = \{ \mathcal{W}(x) : x \in X \}$ sistemindeki $\mathcal{W}(x)$ aileleri [1] deki gibi “ $\supseteq$ ” bağıntısıyla iyi-sıralı alınmayıp,

Noetherian ve sonlu ranklı alınırsa X uzayının metakompakt olduğu görülmüştür.

Teorem 3.1.1

X bir topolojik uzay olmak üzere eğer X uzayının sonlu ranklı, Noetherian (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W} = \{ \mathcal{W}(x) : x \in X \}$ sistemi varsa X uzayı metakompakttır.

İspat

$\mathfrak{S} = \{ O_\alpha : \alpha < \kappa \}$ ailesi X uzayının herhangi bir açık örtüsü olsun. Her $\alpha < \kappa$ için $P_\alpha = O_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} O_\beta$ ve $V_\alpha = \bigcup \{ V(y, O_\alpha) : y \in P_\alpha \}$ olmak üzere $\mathcal{V} = \{ V_\alpha : \alpha < \kappa \}$ ailesini tanımlayalım.

Her $\alpha < \kappa$ için $V_\alpha \subseteq O_\alpha$ olduğu, V_α nın X 'in bir açık altkümesi olduğu ve $\mathcal{V}$ ailesinin X için bir örtü olduğu açıktır. O halde $\mathcal{V}$ ailesinin nokta-sonlu olduğunu görmek yeterlidir.

$\mathcal{V}$ ailesinin nokta-sonlu olmadığını kabul edelim. O zaman X in öyle bir x_0 elemanı ve κ içinde artan öyle bir $\{ \alpha_n : n \in \omega \}$ dizisi vardır ki her $n \in \omega$ için $x_0 \in V_{\alpha_n}$ dir. V_{α_n} kümelerinin tanımından her $n \in \omega$ için $x_0 \in V(y_n, O_{\alpha_n})$ olacak biçimde $y_n \in P_{\alpha_n}$ vardır. Her $n \in \omega$ için $V(y_n, O_{\alpha_n})$ kümesi (F)-koşulundan gelen açık küme olduğundan ve her $n \in \omega$ için $x_0 \in V(y_n, O_{\alpha_n})$ olduğundan her $n \in \omega$ için $y_n \in W_n \subseteq O_{\alpha_n}$ olacak biçimde bir $W_n \in \mathcal{W}(x_0)$ elemanı vardır. $m < n$ biçimindeki her m, n doğal sayıları için $y_n \notin O_{\alpha_m}$ olduğundan $y_n \notin W_m$ olup $W_n \not\subset W_m$ dir. Şimdi ω nın iki elemanlı bütün altkümelerinin ailesinden $\{0,1\}$ kümesine giden $f : [\omega]^2 \longrightarrow \{0,1\}$ fonksiyonu

$$f(\{m, n\}) = \begin{cases} 0 & ; \quad W_m \subset W_n \text{ veya } W_n \subset W_m \\ 1 & ; \quad \text{diğer durum} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Ramsey teoreminden[2], ω 'nın, $f([I]^2) \subseteq \{0\}$ veya $f([I]^2) \subseteq \{1\}$ olacak biçimde, sonsuz elemanlı bir I altkümesi vardır. $\mathcal{W}(x_0)$ ailesi sonlu ranklı olduğundan $f([I]^2) \subseteq \{1\}$ olamaz. O halde $f([I]^2) \subseteq \{0\}$ olmak zorundadır. Ancak bu durumda, I 'nin $m < n$ biçimindeki her m, n elemanı için $y_n \notin W_m$ olduğundan, $\{W_n : n \in I\}$ ailesi $\mathcal{W}(x_0)$ içinde sonsuz artan bir dizi olur ki bu $\mathcal{W}(x_0)$ ailesinin Noetherian olması ile çelişir. Böylece $\mathcal{V}$ ailesi $\mathfrak{A}$ açık örtüsünün nokta-sonlu bir açık incelməsi olup X uzayı metakompakttır. ■

“ $\supseteq$ ” bağıntısıyla iyi-sıralı her aile Noetherian ve sonlu ranklı olduğundan Teorem 3.1.1'den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.2

X bir topolojik uzay olmak üzere eğer X 'in her x elemanı için $\mathcal{W}(x) = \bigcup_{i=0}^{n_x} \mathcal{W}_i(x)$ olacak biçimde bir n_x doğal sayısı var ve $i \leq n_x$ biçimindeki her i doğal sayısı için $\mathcal{W}_i(x)$ ailesi “ $\supseteq$ ” bağıntısıyla iyi-sıralı olmak üzere X uzayının (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemi varsa X uzayı metakompakttır. ■

Yığınsal normal uzaylarda metakompaktlık parakompaktlığa denk olduğundan[3] yukarıdaki teorem ve sonuçlarda X uzayı yığınsal normal uzay alınırsa X uzayının parakompakt olduğu söylenebilir.

[1] de zincir komşuluk (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip her X topolojik uzayının parakompakt olduğu ispatlanmıştır. Aşağıdaki teoremden, $\mathcal{W}$ sistemindeki, x 'in komşuluklarından oluşan $\mathcal{W}(x)$ aileleri x 'e göre değişken miktarlarda sonlu tane zincirin birleşiminden oluşuyorsa X uzayının metakompakt olduğu görülecektir.

Teorem 3.1.3

X bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in her x elemanı için $\mathcal{W}(x) = \bigcup_{i=0}^{n_x} \mathcal{W}_i(x)$ olacak

biçimde bir n_x doğal sayısı var ve $i \leq n_x$ biçimindeki her i doğal sayısı için $\mathcal{W}_i(x)$ ailesi x in komşuluklarından oluşan bir zincir olmak üzere $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemi (F)-koşulunu sağlıyorsa X uzayı metakompakttır

İspat

$\mathfrak{S} = \{O_\alpha : \alpha < \kappa\}$ X uzayının herhangi bir açık örtüsü ve her $\alpha < \kappa$ için $P_\alpha = O_\alpha \setminus \bigcup_{\rho < \alpha} O_\rho$ olsun. i doğal sayı olmak üzere $X_i = \{x \in X : i \leq n_x \text{ ve } \exists W \in \mathcal{W}_i(x)\}$

$\exists \alpha < \kappa \quad W \subseteq O_\alpha$ } ve her $x \in X_i$ için $\gamma(x, i) = \min\{\alpha < \kappa : \exists W \in \mathcal{W}_i(x) \quad W \subseteq O_\alpha\}$ olsun. Her $x \in X$ için $I(x) = \{i \in \{0, 1, \dots, n_x\} : x \in X_i\}$ olmak üzere her $x \in X$ ve her $i \in I(x)$ için $W(x, i) \subseteq O_{\gamma(x, i)}$ olacak biçimde bir $W(x, i) \in \mathcal{W}_i(x)$ seçelim ve $W_x = \bigcap_{i \in I(x)} W(x, i)$ olsun. λ bir ordinal olmak üzere X kümesinin indekslenmiş biçimi

$X = \{x_\beta : \beta < \lambda\}$ olsun. λ üzerine tümevarımla her $\beta < \lambda$ için Y_β kümesi şöyle tanımlansın. $\beta < \lambda$ olmak üzere her $\gamma < \beta$ için Y_γ kümesi tanımlanmış olsun ve

$$Y_\beta = \begin{cases} \emptyset & ; \quad x_\beta \in \bigcup_{\rho < \beta} Y_\rho \\ \left\{ z \in X : x_\beta \in W_z \text{ ve } z \notin \bigcup_{\rho < \beta} Y_\rho \right\} & ; \quad x_\beta \notin \bigcup_{\rho < \beta} Y_\rho \end{cases}$$

olsun. $\bigcup_{\beta < \lambda} Y_\beta = X$ olduğu açıktır.

X' in herhangi bir x elemanını alalım. $x \in P_\alpha$ olacak biçimde bir ve yalnız bir $\alpha < \kappa$ ve $x \in Y_\beta$ olacak biçimde $\beta < \lambda$ vardır. x elemanını içeren T_x açık alt kümesi ; eğer $x = x_\beta$ ise $T_x = \overset{\circ}{W}_x \cap O_\alpha$ biçiminde, $x \neq x_\beta$ ise $T_x = (\overset{\circ}{W}_x \setminus \{x_\beta\}) \cap O_\alpha$ biçiminde tanımlansın. $x \in P_\alpha$ için $x \in T_x$ ve $T_x \subseteq X$ açık olduğundan (F)-koşulunun iki kez kullanılmasıyla x' i içeren bir $V(x, V(x, T_x))$ açığı elde edilir.

Her $\alpha < \kappa$ için $V_\alpha = \bigcup \{V(x, V(x, T_x)) : x \in P_\alpha\}$ olmak üzere $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$

ailesi X için bir örtü ve $\mathfrak{S}$ açık örtüsünün açık incelmisidir. Bu ailenin nokta-sonlu olduğunu görelim. $\mathcal{V}$ ailesi nokta-sonlu olmasın. O zaman X in öyle bir x elemanı ve her $n \in \omega$ için $x \in V_{\alpha_n}$ olacak biçimde, κ içinde artan, bir $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ dizisi vardır.

V_{α_n} kümelerinin tanımından her $n \in \omega$ için $x \in V(y_n, V(y_n, T_{y_n}))$ olacak biçimde $y_n \in P_{\alpha_n}$ vardır. $V(y_n, V(y_n, T_{y_n}))$ kümeleri (F)-koşulunun kullanılmasıyla elde edilen açıklar olduğundan her $n \in \omega$ için $y_n \in S_n \subseteq V(y_n, T_{y_n})$ olacak biçimde bir $S_n \in \mathcal{W}(x)$ vardır. $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ dizisi artan, $y_n \in P_{\alpha_n}$ ve $S_n \subseteq V(y_n, T_{y_n}) \subseteq T_{y_n} \subseteq O_{\alpha_n}$ olduğundan $m < n$ biçimindeki her m, n doğal sayısı

için $S_n \not\subset S_m$ olup $\{S_n : n \in \omega\}$ sonsuz elemanlıdır. $\mathcal{W}(x) = \bigcup_{i=0}^{n_x} \mathcal{W}_i(x)$ olduğundan

ω 'nın sonsuz elemanlı öyle bir N altkümesi ve $i_0 \leq n_x$ biçiminde öyle bir i_0 doğal sayısı vardır ki $\{S_n : n \in N\} \subseteq \mathcal{W}_{i_0}(x)$ olur. $\mathcal{W}_{i_0}(x)$ zincir ve $m < n$ biçimindeki her m, n doğal sayısı için $S_n \not\subset S_m$ olduğundan N 'nin $m < n$ biçimindeki her m, n elemanı için $S_m \subset S_n$ dir. $\bigcup_{\beta < \lambda} Y_\beta = X$ olduğundan her $n \in N$ için $y_n \in Y_{\beta_n}$ olacak

biçimde $\beta_n < \lambda$ vardır. λ içinde sonsuz azalan bir dizi olamayacağından her $n \in N$ için

$\beta_n \leq \beta_{n+1}$ olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz. m_0 N 'nin herhangi bir elemanı olsun. N 'nin $m > m_0$ biçimindeki her m elemanı için $S_{m_0} \subset S_m$ olduğundan N 'nin

$m > m_0$ biçimindeki her m elemanı için $y_{m_0} \in V(y_m, T_{y_m})$ dir ve

$y_m \in W_m^{m_0} \subseteq T_{y_m}$ olacak biçimde bir $W_m^{m_0} \in \mathcal{W}(y_{m_0})$ elemanı vardır. Yukarıda

olduğu gibi, $\{W_m^{m_0} : m \in L, m > m_0\} \subseteq \mathcal{W}_{j_0}(y_{m_0})$ olacak biçimde N 'nin sonsuz bir

L altkümesi ve $j_0 \leq n_{y_{m_0}}$ biçiminde bir j_0 doğal sayısı vardır. Böylece $y_{m_0} \in X_{j_0}$

olup $j_0 \in I(y_{m_0})$ dir. $W_{y_{m_0}} = \bigcap_{j \in I(y_{m_0})} W(y_{m_0}, j)$ ve $j_0 \in I(y_{m_0})$ olduğundan

$W_{y_{m_0}} \subseteq W(y_{m_0}, j_0)$ dir. $m_1 \in L$ olmak üzere $m_1 > m_0$ olsun. $W_{m_1}^{m_0} \subseteq T_{y_{m_1}} \subseteq O_{\alpha_{m_1}}$ ve

$W_{m_1}^{m_0} \in \mathcal{W}_{j_0}(y_{m_0})$ olduğundan, $\gamma(y_{m_0}, j_0)$ in minimalliğinden, $\gamma(y_{m_0}, j_0) \leq \alpha_{m_1}$

olmak zorundadır. $y_{m_2} \neq x_{\beta_{m_0}}$ ve $m_2 > m_1$ olacak biçimde bir $m_2 \in L$ seçelim. Bu

durumda $\gamma(y_{m_0}, j_0) \leq \alpha_{m_1} < \alpha_{m_2}$ ve $y_{m_2} \in P_{\alpha_{m_2}}$ olduğundan $y_{m_2} \notin O_{\gamma(y_{m_0}, j_0)}$ olup $y_{m_2} \notin W(y_{m_0}, j_0)$ dir. Böylece, $\mathcal{W}_{j_0}(y_{m_0})$ zincir olduğundan, $W(y_{m_0}, j_0) \subset W_{m_2}^{m_0}$ dir. $y_{m_0} \in Y_{\beta_{m_0}}$ olduğundan $x_{\beta_{m_0}} \in W_{y_{m_0}} \subseteq W(y_{m_0}, j_0) \subset W_{m_2}^{m_0} \subseteq T_{y_{m_2}}$ olur. $m_2 > m_0$ olduğundan $\beta_{m_2} \geq \beta_{m_0}$ dir. Eğer $\beta_{m_2} = \beta_{m_0}$ ise $x_{\beta_{m_2}} = x_{\beta_{m_0}}$ olup $x_{\beta_{m_2}} \in T_{y_{m_2}}$ elde edilir ki bu $y_{m_2} \neq x_{\beta_{m_0}}$ olması ile çelişir. O halde $\beta_{m_2} > \beta_{m_0}$ dir. $T_{y_{m_2}} \subseteq W_{y_{m_2}}$ olduğundan $x_{\beta_{m_0}} \in W_{y_{m_2}}$ dir. Aynı zamanda $Y_{\beta_{m_2}}$ kümesinin tanımından ve $\beta_{m_2} > \beta_{m_0}$ olduğundan $y_{m_2} \notin \bigcup_{\rho < \beta_{m_0}} Y_\rho$ dir. Böylece $y_{m_2} \in Y_{\beta_{m_0}}$ olur ki bu $\beta_{m_2} > \beta_{m_0}$ olması ile çelişir. O halde $\mathcal{V}$ ailesi nokta-sonlu olup X uzayı metakompakttır. ■

G. Gruenhage ve P. Nyikos tarafından ispatlanmış olan “ nokta-sonlu ranklı bir baza sahip olan her T_1 topolojik uzayı metakompakttır” [7] teoremi yukarıdaki teoremin sonucu olarak verilebilir. Burada nokta-sonlu ranklı $\mathcal{B}$ bazı ile kastedilen; uzayın her x noktası için $\mathcal{W}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ olmak üzere, her $x \in X$ için $\text{rank}(\mathcal{W}(x)) < \aleph_0$ olmasıdır. İspatı [8]’de bulunabilecek olan aşağıdaki lemmayı ispatsız olarak verdikten sonra bu teoreme geri dönecektir.

Lemma (Dilworth)

P kısmi sıralı bir küme ve n bir doğal sayı olmak üzere P ’nin n elemanlı ve farklı herhangi iki elemanı karşılaştırılamayan en az bir altkümesi var olsun. Eğer P ’nin $n+1$ elemanlı her altkümesinin en az iki elemanı karşılaştırılabiliyorsa P kümesi n tane ayrık tam sıralı kümenin birleşimi olarak yazılabilir. ■

Bu Lemma yardımıyla yukarıda bahsedilen teorem, Teorem 3.1.3’ün sonucu olarak verilebilir.

Sonuç 3.1.4

X topolojik uzayının nokta-sonlu ranklı bir $\mathcal{B}$ tabanı varsa X metakompakttır.

İspat

Her $x \in X$ için $\mathcal{W}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ olsun. $\mathcal{B}$ X uzayı için taban olduğundan $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sisteminin (F)-koşulunu sağladığını görmek kolaydır. Aynı zamanda $\mathcal{B}$ nokta-sonlu ranklı olduğundan her $x \in X$ için $\text{rank}(\mathcal{W}(x)) = n_x + 1$ olacak biçimde bir n_x doğal sayısı vardır. Böylece $\mathcal{W}(x)$ in $|\mathcal{A}_x| = n_x$ olacak biçimde öyle bir $\mathcal{A}_x$ altkümesi vardırki $\mathcal{A}_x$ ' in farklı herhangi iki elemanı karşılaştırılmaz ve $\mathcal{W}(x)$ in $n_x + 1$ elemanlı her alt ailesinin en az iki elemanı karşılaştırılabilir. Böylece Dilworth lemmadan, her $x \in X$ için $\mathcal{W}(x)$ ailesi n_x tane zincirin birleşimi olarak yazılabilir. O halde $\mathcal{W}$ sistemi Teorem 3.1.3'ün koşullarını sağladığından X uzayı metakompakttır. ■

İspatı genelde Teorem 3.1.3'ün ispatına benzeyen fakat bazı teknik ayrıntılara sahip olan aşağıdaki teorem yardımıyla, X topolojik uzayında sayılabilir sayıdaki açığın arakesitinin yine açık olması halinde, (F)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemini oluşturan $\mathcal{W}(x)$ aileleri, x in komşuluklarından oluşan sayılabilir sayıdaki zincirin birleşimi olarak yazılabiliyorsa X uzayının metaLindelöf olduğu söylenecektir.

Teorem 3.1.3'ün ispatına benzer olduğundan aşağıdaki teorem ispatsız verilecektir.

Teorem 3.1.5

X bir topolojik uzay ve κ bir kardinal sayı olmak üzere X bir $P_{\leq \kappa}$ -uzay olsun. Her $x \in X$ ve her $i \in \kappa$ için $\mathcal{W}_i(x)$ ailesi x 'in komşuluklarından oluşan bir zincir ve her $x \in X$ için $\mathcal{W}(x) = \bigcup_{i \in \kappa} \mathcal{W}_i(x)$ olmak üzere eğer $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemi (F)-koşulunu sağlıyorsa X uzayının her açık örtüsünün nokta $\leq \kappa$ açık

incelmişiydi. ■

Yukarıdaki teoremden $\kappa = \omega$ alınması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.6

X sayılabilir sayıdaki açığın arakesitinin açık olduğu bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $\mathcal{W}_n(x)$ ailesi x in komşuluklarından oluşan bir zincir ve her $x \in X$ için $\mathcal{W}(x) = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{W}_n(x)$ olmak üzere eğer $\mathcal{W} = \{ \mathcal{W}(x) : x \in X \}$ sistemi

(F)-koşulunu sağlıyorsa X metaLindelöf uzaydır. ■

X topolojik uzayının zincir (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W} = \{ \mathcal{W}(x) : x \in X \}$ sistemi var ve her $x \in X$ için $\mathcal{W}_1(x)$ ailesi “ $\supseteq$ ” bağıntısıyla iyi-sıralı, $\mathcal{W}_2(x)$ ailesi x in komşuluklarından oluşmak üzere $\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}_1(x) \cup \mathcal{W}_2(x)$ biçimindeyse X uzayının parakompakt olduğu [4]’de belirtilmiştir. Bu teoremin ispatının temeli X uzayının metakompakt olduğunu yani X in her açık örtüsünün nokta-sonlu bir açık incelmeye sahip olduğunu görmektir. Dikkat edilirse bu teoremden $\mathcal{W}(x)$ ailesi yani $\mathcal{W}_1(x)$ ve $\mathcal{W}_2(x)$ ailelerinin birleşimi zincirdir. Bu çalışmada $\mathcal{W}(x)$ ailesi zincir alınmayıp $\mathcal{W}_1(x)$ ve $\mathcal{W}_2(x)$ ailelerinin birer zincir olması durumunda X uzayının yine metakompakt olduğu görülmüştür. Hatta x in komşuluklarından oluşan ailenin sonlu tane zincirin birleşimi olarak yazılması durumunda da X uzayının metakompakt olduğu görülmüştür. Bu, aşağıdaki teoremden sonra sonuç olarak verilecektir.

Teorem 3.1.7

X bir topolojik uzay ve κ sonsuz bir kardinal sayı olsun. X ’ in her x elemanı için öyle bir k_x doğal sayısı var ve $1 \leq i \leq k_x$ biçimindeki her i doğal sayısı için $\mathcal{W}_i(x)$ ailesi x ’in komşuluklarından oluşan bir zincir ve $\mathcal{W}_0(x)$ ailesi κ ranklı, Noetherian bir aile iken her $x \in X$ için $\mathcal{W}(x) = \bigcup_{i=0}^{k_x} \mathcal{W}_i(x)$ olmak üzere $\mathcal{W} = \{ \mathcal{W}(x) : x \in X \}$

sistemi (F)-koşulunu sağlıyorsa X uzayının her açık örtüsünün nokta- κ açık incelmişidir.

İspat

$\mathfrak{S} = \{O_\alpha : \alpha < \tau\}$ X uzayının herhangi bir açık örtüsü ve her $\alpha < \tau$ için $P_\alpha = O_\alpha \setminus \bigcup_{\rho < \alpha} O_\rho$ olsun. i doğal sayı olmak üzere $X_i = \{x \in X : 1 \leq i \leq k_x \text{ ve } \exists W \in \mathcal{W}_i(x)\}$

$\exists \alpha < \tau : W \subseteq O_\alpha$ } ve her $x \in X_i$ için $\gamma(x,i) = \min\{\alpha < \tau : \exists W \in \mathcal{W}_i(x), W \subseteq O_\alpha\}$ olsun. Her $x \in X$ için $I(x) = \{i \in \{1, 2, \dots, k_x\} : x \in X_i\}$ olmak üzere her $x \in X$ ve her $i \in I(x)$ için $W(x,i) \subseteq O_{\gamma(x,i)}$ olacak biçimde bir $W(x,i) \in \mathcal{W}_i(x)$ seçelim ve $W_x = \bigcap_{i \in I(x)} W(x,i)$ olsun. $Y = \{x \in X : \exists W \in \mathcal{W}(x) \setminus \mathcal{W}_0(x) \text{ ve } \exists \alpha < \tau, W \subseteq O_\alpha\}$ ve λ bir

ordinal olmak üzere Y kümesinin indekslenmiş biçimi $Y = \{x_\beta : \beta < \lambda\}$ olsun. λ üzerine indüksiyon ile her $\beta < \lambda$ için Y_β kümeleri şöyle tanımlansın. $\beta < \lambda$ olmak üzere her $\gamma < \beta$ için Y_γ kümesi tanımlanmış olsun ve

$$Y_\beta = \begin{cases} \emptyset & ; \quad x_\beta \in \bigcup_{\gamma < \beta} Y_\gamma \\ \{z \in Y : x_\beta \in W_z, z \notin \bigcup_{\gamma < \beta} Y_\gamma\} & ; \quad x_\beta \notin \bigcup_{\gamma < \beta} Y_\gamma \end{cases}$$

olsun. $Y = \bigcup_{\beta < \lambda} Y_\beta$ olduğu açıktır. $x \in X$ olsun. $x \in P_\alpha$ olacak biçimde bir ve yalnız bir

$\alpha < \tau$ vardır. x elemanını içeren T_x açık altkümeleri; eğer $x \in X \setminus Y$ ise $T_x = O_\alpha$ biçiminde, $x \in Y$ ise, $x \in Y_\beta$ olacak biçimde bir $\beta < \lambda$ var olup, eğer $x = x_\beta$ ise

$T_x = \dot{W}_x \cap O_\alpha$, eğer $x \neq x_\beta$ ise $T_x = (\dot{W}_x \setminus \{x_\beta\}) \cap O_\alpha$ biçiminde tanımlansın. $x \in P_\alpha$

için $x \in T_x$ ve $T_x \subseteq X$ açık olduğundan (F)-koşulunun iki kez uygulanmasıyla x 'i

içeren $V(x, V(x, T_x))$ açığı vardır. Her $\alpha < \tau$ için $V_\alpha = \bigcup \{V(x, V(x, T_x)) : x \in P_\alpha\}$ olmak

üzere $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \tau\}$ olsun. $\mathcal{V}$ ailesinin $\mathfrak{S}$ nun açık incelmiş olduğu kolayca

görülebilir. $\mathcal{V}$ ailesinin nokta- κ olmadığını kabul edelim. O zaman X in öyle bir x

elemanı ve τ nun $ot(I) = \kappa$ olacak biçimde öyle bir I altkümesi vardırki her $\alpha \in I$ için $x \in V_\alpha$ olup her $\alpha \in I$ için $x \in V(y_\alpha, V(y_\alpha, T_{y_\alpha}))$ olacak biçimde bir $y_\alpha \in P_\alpha$ vardır.

(F)-koşulundan, her $\alpha \in I$ için $y_\alpha \in S_\alpha \subseteq V(y_\alpha, T_{y_\alpha})$ olacak biçimde bir $S_\alpha \in \mathcal{W}(x)$ vardır. Her $\alpha \in I$ için $y_\alpha \in P_\alpha$ ve $S_\alpha \subseteq T_{y_\alpha} \subseteq O_\alpha$ olduğundan I nin $\rho < \alpha$ biçimindeki

her ρ, α elemanı için $y_\alpha \notin S_\rho$ dır ve böylece $S_\alpha \not\subset S_\rho$ elde edilir. $\mathcal{W}(x) = \bigcup_{i=0}^{k_x} \mathcal{W}_i(x)$

olduğundan I nin, $|J| = \kappa$ olacak biçimde öyle bir J altkümesi ve $0 \leq i_0 \leq k_x$ biçiminde öyle bir i_0 doğal sayısı vardırki $\{S_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \mathcal{W}_{i_0}(x)$ olur.

Eğer $i_0 = 0$ ise; $f : [J]^{=2} \longrightarrow \{0,1\}$ fonksiyonu; $\{\rho, \alpha\} \subset J$ olmak üzere S_ρ ve S_α kümeleri kapsama bağıntısıyla karşılaştırılabiliriyorsa $f(\{\rho, \alpha\}) = 0$ biçiminde, diğer durumda $f(\{\rho, \alpha\}) = 1$ biçiminde tanımlansın. Erdős-Dushnik-Miller teoreminden[2],

$\kappa \longrightarrow (\kappa, \omega)^2$ olduğundan, J nin ya $|N| = \aleph_0$ ve $f([N]^{=2}) \subseteq \{0\}$ olacak biçimde bir N altkümesi yada $|H| = \kappa$ ve $f([H]^{=2}) \subseteq \{1\}$ olacak biçimde bir H altkümesi vardır.

$\text{rank}(\mathcal{W}_0(x)) \leq \kappa$ olduğundan J nin, $f([H]^{=2}) \subseteq \{1\}$ olacak biçimde κ kardinalitede bir H alt kümesi bulunamaz. O halde J nin $f([N]^{=2}) \subseteq \{0\}$ olacak biçimde, sayılabilir bir N altkümesi vardır. Bu durumda $\{S_\alpha : \alpha \in N\} \subseteq \mathcal{W}_0(x)$ ailesinin her elemanı karşılaştırılabiliridir. N nin $\rho < \alpha$ biçimindeki her ρ, α elemanı için $y_\alpha \notin S_\rho$ olduğundan $S_\rho \subset S_\alpha$ olmak zorundadır. Fakat bu durumda $\{S_\alpha : \alpha \in N\}$ ailesi $\mathcal{W}_0(x)$ içinde sonsuz artan bir dizi olurki bu $\mathcal{W}_0(x)$ ailesinin Noetherian olması ile çelişir.

O halde $i_0 \geq 1$ olmak zorundadır. $i_0 \geq 1$ için $\mathcal{W}_{i_0}(x)$ zincir olduğundan ve J nin

$\rho < \alpha$ biçimindeki her ρ, α elemanı için $y_\alpha \notin S_\rho$ olduğundan $\{S_\alpha : \alpha \in J\}$ ailesi kapsama bağıntısına göre artandır. J nin herhangi bir α_0 elemanını alalım. J nin $\alpha > \alpha_0$ biçimindeki her α elemanı için $y_{\alpha_0} \in S_{\alpha_0} \subset S_\alpha \subseteq V(y_\alpha, T_{y_\alpha})$ olduğundan, (F)-koşulundan, $\alpha > \alpha_0$ biçimindeki her α elemanı için $y_\alpha \in W_{\alpha_0}^{\alpha_0} \subset T_{y_\alpha}$ olacak

biçimde bir $W_{\alpha_0}^{\alpha_0} \in \mathcal{W}(y_{\alpha_0})$ elemanı vardır. $\mathcal{W}(y_{\alpha_0}) = \bigcup_{i=0}^{k_{y_{\alpha_0}}} \mathcal{W}_i(y_{\alpha_0})$ olduğundan

$\{W_{\alpha_0}^{\alpha_0} : \alpha \in \hat{J}, \alpha > \alpha_0\} \subset \mathcal{W}_{i_0}(y_{\alpha_0})$ olacak biçimde, J nin kardinalitesi κ olan bir $\hat{J}$

altkümesi ve $0 \leq j_0 \leq k_{y_{\alpha_0}}$ biçiminde bir j_0 doğal sayısı vardır. Yukarıda olduğu gibi, Erdős-Dushnik-Miller teoreminden $j_0 \geq 1$ olmak zorundadır. Böylece $y_{\alpha_0} \in X_{j_0}$ olup $j_0 \in I(y_{\alpha_0})$ dir. Aynı zamanda $y_{\alpha_0} \in Y$ dir. J 'nin keyfi bir α_0 elemanı için yapılan bu işler J 'nin her α elemanı için yapılabileceğinden $\{y_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq Y$ dir. $Y = \bigcup_{\beta < \lambda} Y_\beta$

olduğundan her $\alpha \in \hat{J}$ için $y_\alpha \in Y_{\beta_\alpha}$ olacak biçimde bir $\beta_\alpha < \lambda$ vardır. λ içinde sonsuz azalan bir dizi olamayacağından $\rho < \alpha$ biçimindeki her ρ , $\alpha \in \hat{J}$ için $\beta_\rho \leq \beta_\alpha$ kabul edebiliriz. $\hat{J}$ 'nin yukarıdaki α_0 elemanını alalım. $\alpha \in \hat{J}$ olmak üzere $\alpha > \alpha_0$ olsun.

$W_\alpha^{\alpha_0} \subset T_{y_\alpha} \subset O_\alpha$ ve $W_\alpha^{\alpha_0} \in \mathcal{W}_{j_0}(y_{\alpha_0})$ olduğundan $\gamma(y_{\alpha_0}, j_0)$ 'ın minimalliğinden $\gamma(y_{\alpha_0}, j_0) \leq \alpha$ olmak zorundadır. Şimdi $y_{\alpha_1} \neq x_{\beta_{\alpha_0}}$ ve $\alpha_1 > \alpha$ olacak biçimde bir

$\alpha_1 \in \hat{J}$ seçelim. Bu durumda $\gamma(y_{\alpha_0}, j_0) \leq \alpha < \alpha_1$ ve $y_{\alpha_1} \in P_{\alpha_1}$ olduğundan

$y_{\alpha_1} \notin O_{\gamma(y_{\alpha_0}, j_0)}$ olup $y_{\alpha_1} \notin W(y_{\alpha_0}, j_0)$ dir. $\mathcal{W}_{j_0}(y_{\alpha_0})$ zincir olduğundan

$W(y_{\alpha_0}, j_0) \subset W_{\alpha_1}^{\alpha_0}$ olmak zorundadır. $y_{\alpha_0} \in Y_{\beta_{\alpha_0}}$ olduğundan

$x_{\beta_{\alpha_0}} \in W_{y_{\alpha_0}} \subset W(y_{\alpha_0}, j_0) \subset W_{\alpha_1}^{\alpha_0} \subset T_{y_{\alpha_1}}$ olur. $\alpha_1 > \alpha_0$ olduğundan $\beta_{\alpha_1} \geq \beta_{\alpha_0}$ dir.

Eğer $\beta_{\alpha_1} = \beta_{\alpha_0}$ ise $x_{\beta_{\alpha_1}} = x_{\beta_{\alpha_0}}$ dir ve $y_{\alpha_1} \neq x_{\beta_{\alpha_0}}$ olduğundan $y_{\alpha_1} \neq x_{\beta_{\alpha_1}}$ olup

$x_{\beta_{\alpha_1}} \in T_{y_{\alpha_1}} \subseteq W \setminus \{x_{\beta_{\alpha_1}}\}$ elde edilir ki bu mümkün değildir. O halde $\beta_{\alpha_1} > \beta_{\alpha_0}$

olmak zorundadır. $T_{y_{\alpha_1}} \subseteq W_{y_{\alpha_1}}$ olduğundan $x_{\beta_{\alpha_0}} \in W_{y_{\alpha_1}}$ dir. Aynı zamanda $Y_{\beta_{\alpha_1}}$

kümesinin tanımından ve $\beta_{\alpha_1} > \beta_{\alpha_0}$ olduğundan $y_{\alpha_1} \notin \bigcup_{\rho < \beta_{\alpha_0}} Y_\rho$ dir. Böylece

$y_{\alpha_1} \in Y_{\beta_{\alpha_0}}$ olur ki bu $\beta_{\alpha_1} > \beta_{\alpha_0}$ olması ile çelişir. O halde $\mathcal{V}$ ailesi nokta $< \kappa$ dir. ■

Yukarıdaki teoremden $\kappa = \omega$ alınması halinde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.8

X bir topolojik uzay olsun. X 'in her x elemanı için öyle bir k_x doğal sayısı var ve $1 \leq i \leq k_x$ biçimindeki her i doğal sayısı için $\mathcal{W}_i(x)$ ailesi x 'in komşuluklarından oluşan bir zincir ve $\mathcal{W}_0(x)$ ailesi sonlu ranklı ve Noetherian olmak üzere her $x \in X$ için

$$\mathcal{W}(x) = \bigcup_{i=0}^{k_x} \mathcal{W}_i(x) \text{ biçiminde ve } \mathcal{W} = \{ \mathcal{W}(x) : x \in X \} \text{ sistemi (F)-koşulunu sağlıyorsa}$$

X uzayı metakompakttır. ■

3.2. Örgü Koşullarında Üretilmişlik

Bu altbölümde, k bir doğal sayı olmak üzere k -üretilmiş aile ve κ , m kardinal sayılar olmak üzere m -aileden $<\kappa$ -üretilmiş aile tanımları verilmiş ve (F)-koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemini oluşturan $\mathcal{W}(x)$ aileleri sonlu ranklı, Noetherian ve k -üretilmiş olduğunda uzayın metakompakt olduğu görülmüş ve daha genel formda metaLindelöf'lüğü de verecek olan bir kardinal genişlemeye gidilmiştir. Bu biçimde tanımlı ailelerin çarpımsal oldukları da görülmüştür. Çarpımsal özellikler ve elde edilen sonuçlara bir sonraki kısımda değinilecektir.

Tanım 3.2.1

X bir küme, m ve κ kardinal sayılar olmak üzere $\mathcal{G}$ ve her $\alpha \in m$ için $\mathcal{W}_\alpha$ X 'in altkümelerinden oluşan aileler olsun. Eğer $\mathcal{G}'$ nin her S elemanı, $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{\alpha \in m} \mathcal{W}_\alpha$ ve $|\mathcal{A}| < \kappa$ olmak üzere, $S = \bigcap \mathcal{A}$ biçimindeyse $\mathcal{G}$ ailesine m -aileden $<\kappa$ -üretilmiş aile denir. $\kappa = \omega$ ise $\mathcal{G}$ ailesine m -aileden sonlu üretilmiş bir aile denir. Eğer $m=1$ ve k bir doğal sayı olmak üzere, $\mathcal{G}'$ nin her S elemanı, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$ ve $|\mathcal{A}| = k$ olmak üzere, $S = \bigcap \mathcal{A}$ biçimindeyse $\mathcal{G}$ ailesine bir aile tarafından k -üretilmiş aile denir. ■

3.1. bölümde sonlu ranklı, Noetherian (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip

her topolojik uzayın metakompakt olduğu görülmüştü. Aşağıdaki teoremden sonlu ranklı ve Noetherian bir aile tarafından k -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip olan topolojik uzayların da metakompakt olduğu görülecektir.

Teorem 3.2.2

X bir topolojik uzay, k bir doğal sayı olmak üzere eğer X uzayı sonlu ranklı ve Noetherian bir aile tarafından k -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemine sahipse X uzayı metakompakttır.

İspat

Her $x \in X$ için $\mathcal{G}(x)$ ailesi sonlu ranklı ve Noetherian olmak üzere $\mathcal{W}(x)$ ailesi $\mathcal{G}(x)$ tarafından k -üretilmiş olsun. $\mathfrak{G} = \{O_\alpha : \alpha < \kappa\}$ ailesi X uzayının herhangi bir açık örtüsü olsun. her $\alpha < \kappa$ için $P_\alpha = O_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} O_\beta$ ve $V_\alpha = \bigcup \{V(x, O_\alpha) : x \in P_\alpha\}$ olmak

üzere $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ olsun. $\mathcal{V}$ ailesi $\mathfrak{G}$ 'nin açık incelmisidir. $\mathcal{V}$ nokta-sonlu olmasın. O zaman X 'in öyle bir x elemanı ve κ içinde artan öyle bir $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ dizisi vardır ki her n doğal sayısı için $x \in V_{\alpha_n}$ olup $x \in V(y_n, O_{\alpha_n})$ olacak

biçimde bir $y_n \in P_{\alpha_n}$ vardır. (F)-koşulundan, her n doğal sayısı için $y_n \in W_n \subseteq O_{\alpha_n}$

olacak biçimde bir $W_n \in \mathcal{W}(x)$ vardır. $\mathcal{W}(x)$ ailesi $\mathcal{G}(x)$ tarafından k -üretilmiş

olduğundan her n doğal sayısı için $W_n = \bigcap_{i=1}^k S(n, i)$ olacak biçimde $S(n, i) \in \mathcal{G}(x)$

elemanları vardır. Böylece her n doğal sayısı için $y_n \in \bigcap_{i=1}^k S(n, i) \subseteq O_{\alpha_n}$ olup $m < n$

biçimindeki her m, n doğal sayısı için $y_n \notin O_{\alpha_m}$ olduğundan $y_n \notin \bigcap_{i=1}^k S(m, i)$ dir ve

$m < n$ biçimindeki her m, n doğal sayısı için $y_n \notin S(m, i(m, n))$ olacak biçimde bir $1 \leq i(m, n) \leq k$ doğal sayısı seçilebilir. ω 'nın iki elemanlı bütün altkümelerinin ailesinden $\{1, 2, \dots, k\}$ kümesine giden $f : [\omega]^{=2} \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ fonksiyonu

$f(\{m,n\}) = i(m,n)$ biçiminde tanımlanırsa Ramsey teoreminden[2], ω 'nın sonsuz elemanlı öyle bir B altkümesi vardır ki, f fonksiyonu B 'nin iki elemanlı bütün altkümeleri ailesi üzerinde sabittir. O halde $1 \leq i_0 \leq k$ biçiminde öyle bir i_0 doğal sayısı vardır ki $f([B]^{i_0}) \subseteq \{i_0\}$ dır. Böylece B 'nin $m < n$ biçimindeki her m,n elemanı için $i(m,n) = i_0$ dır. $\mathcal{G}(x)$ ailesi sonlu ranklı olduğundan, Ramsey teoremi kullanılarak, $\{S(n, i_0) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{G}(x)$ ailesinin her elemanı karşılaştırılabilir olacak biçimde B 'nin sonsuz elemanlı bir N altkümesi bulunabilir. N 'nin $m < n$ biçimindeki her m,n elemanı için $y_n \in S(n, i_0) \setminus S(m, i_0)$ olduğundan $S(m, i_0) \subset S(n, i_0)$ olmak zorundadır. Böylece $\{S(n, i_0) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi $\mathcal{G}(x)$ içinde, kapsama bağıntısına göre, sonsuz artan bir aile olur ki bu $\mathcal{G}(x)$ ailesinin Noetherian olması ile çelişir. O halde $\mathcal{V}$ ailesi nokta-sonlu olup X metakompakt uzaydır. ■

Yukarıdaki teoremden k -üretilmiş olma koşulundaki k doğal sayısı sabit tutulmayıp değişken alınırse uzay metaLindelöf olacaktır ki bu aşağıdaki teoremden sonra sonuç olarak verilecektir.

Teorem 3.2.3

X bir topolojik uzay, m , κ ve μ kardinal sayılar olmak üzere $m^{\kappa} \leq \mu$ olsun ve her $\sigma < \kappa$ için $\mu \longrightarrow (\kappa)_{\sigma}^2$ sağlansın. Eğer X uzayının κ ranklı ve κ -Noetherian olan m -aileden $<\kappa$ -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemi varsa X uzayının her açık örtüsünün noktasal μ açık incelməsi vardır.

İspat

Her $x \in X$ ve her $\alpha \in m$ için $\text{rank}(\mathcal{W}_{\alpha}(x)) \leq \kappa$ ve $\mathcal{W}_{\alpha}(x)$ ailesi κ -Noetherian olmak üzere $\mathcal{W}(x)$ ailesi $\{\mathcal{W}_{\alpha}(x) : \alpha \in m\}$ tarafından $<\kappa$ -üretilsin. $\mathcal{O} = \{O_{\rho} : \rho < \lambda\}$ X uzayı için herhangi bir açık örtü olmak üzere her $\rho < \lambda$ için $P_{\rho} = O_{\rho} \setminus \bigcup_{\gamma < \rho} O_{\gamma}$ ve

$V_p = \bigcup \{V(x, O_p) : x \in P_p\}$ olsun. $\mathcal{V} = \{V_p : p < \lambda\}$ ailesi $\mathfrak{S}$ açık örtüsünün açık incelmisidir. $\mathcal{V}$ ailesi $\text{nokta} < \mu$ olmasın. O zaman X 'in öyle bir x elemanı ve λ 'nın, $|I| = \mu$ ve her $\rho \in I$ için $x \in V_\rho$ olacak biçimde, bir I altkümesi vardır. V_p kümelerinin tanımından her $\rho \in I$ için $x \in V(y_\rho, O_\rho)$ olacak biçimde bir $y_\rho \in P_\rho$ vardır ve böylece her $\rho \in I$ için $y_\rho \in W_\rho \subseteq O_\rho$ biçiminde $W_\rho \in \mathcal{W}(x)$ elemanları bulunabilir. $\mathcal{W}(x)$ ailesi $\{\mathcal{W}_\alpha(x) : \alpha \in m\}$ tarafından $< \kappa$ -üretilmiş olduğundan her $\rho \in I$ için $W_\rho = \bigcap \mathcal{A}_\rho$ ve $|\mathcal{A}_\rho| < \kappa$ olacak biçimde bir $\mathcal{A}_\rho \subseteq \bigcup_{\alpha \in m} \mathcal{W}_\alpha(x)$ altailesi

vardır. Her $\rho \in I$ için, $\tau_\rho < \kappa$ olmak üzere $\mathcal{A}_\rho = \{A(\rho, i) : i \in \tau_\rho\}$ olsun. $\mathcal{A}_\rho \subseteq \bigcup_{\alpha \in m} \mathcal{W}_\alpha(x)$ olduğundan her $i \in \tau_\rho$ için $A(\rho, i) \in \mathcal{W}_{\alpha(\rho, i)}(x)$ olacak biçimde

bir $\alpha(\rho, i) \in m$ vardır. Her $\rho \in I$ için $f_\rho : \tau_\rho \longrightarrow m$ fonksiyonu, her $i \in \tau_\rho$ için $f_\rho(i) = \alpha(\rho, i)$ biçiminde tanımlı olmak üzere $F : I \longrightarrow m^{<\kappa}$ fonksiyonu her $\rho \in I$ için $F(\rho) = f_\rho$ biçiminde tanımlansın. $I = \bigcup \{F^{-1}(f_\rho) : f_\rho \in m^{<\kappa}\}$ olup, $|I| = \mu$, $m^{<\kappa} < \text{cf}(\mu)$ olduğundan $|F^{-1}(f_{\rho_0})| = \mu$ olacak biçimde bir $\rho_0 \in I$ vardır.

$F^{-1}(f_{\rho_0}) = J$ denilirse her $\rho \in J$ için $F(\rho) = f_{\rho_0}$ olup her $\rho \in J$ ve her $i \in \tau_\rho$ için $f_\rho(i) = f_{\rho_0}(i) = \alpha(\rho_0, i)$ olur. Böylece her $\rho \in J$ ve her $i \in \tau_\rho$ için $A(\rho, i) \in \mathcal{W}_{\alpha(\rho_0, i)}(x)$ elde edilir. Her $\rho \in J$ için $y_\rho \in W_\rho \subseteq O_\rho$ ve $W_\rho = \bigcap_{i \in \tau_{\rho_0}} A(\rho, i)$ olduğundan her $\rho \in J$ için

$y_\rho \in \bigcap_{i \in \tau_{\rho_0}} A(\rho, i) \subseteq O_\rho$ olur. $y_\rho \in P_\rho$ olduğundan J 'nin $\rho < \gamma$ biçimindeki her ρ, γ

elemanı için $y_\gamma \notin \bigcap_{i \in \tau_{\rho_0}} A(\rho, i)$ olup $\rho < \gamma$ biçimindeki her $\rho, \gamma \in J$ için $y_\gamma \notin A(\rho, i(\rho, \gamma))$

olacak biçimde bir $i(\rho, \gamma) \in \tau_{\rho_0}$ seçilebilir. Şimdi $h : [J]^2 \longrightarrow \tau_{\rho_0} \times 2$ fonksiyonu; eğer $A(\rho, i(\rho, \gamma))$ ile $A(\gamma, i(\rho, \gamma))$ kümeleri karşılaştırılabilirse $h(\{\rho, \gamma\}) = \langle i(\rho, \gamma), 0 \rangle$ biçiminde, aksi halde $h(\{\rho, \gamma\}) = \langle i(\rho, \gamma), 1 \rangle$ biçiminde tanımlansın. $|J| = \mu$, $|\tau_{\rho_0} \times 2| < \kappa$ ve her $\sigma < \kappa$ için $\mu \longrightarrow (\kappa)_\sigma^2$ olduğundan

J 'nin $|\Lambda| = \kappa$ olacak biçimde öyle bir Λ altkümesi vardırki h fonksiyonu Λ 'nın iki elemanlı bütün altkümelerinin ailesi üzerinde sabittir. O halde öyle bir $i_0 \in \tau_{\rho_0}$ ve $k \in 2$ vardırki her $\rho, \gamma \in \Lambda$ için $h(\{\rho, \gamma\}) = \langle i_0, k \rangle$ olur. Eğer $k = 1$ ise ;

$\{A(\rho, i_0) : \rho \in \Lambda\}$ ailesi $\mathcal{W}_{\alpha(\rho_0, i_0)}(x)$ içinde kardinalitesi κ olan ve farklı herhangi iki elemanı karşılaştırılamayan bir aile olur. Ancak bu $\text{rank}(\mathcal{W}_{\alpha(\rho_0, i_0)}(x)) \leq \kappa$ olması ile çelişeceğinden $\kappa = 0$ olmak zorundadır. Böylece her $\rho, \gamma \in \Lambda$ için $A(\rho, i_0)$ ile $A(\gamma, i_0)$ kümeleri karşılaştırılabilir. Λ 'nın $\rho < \gamma$ biçimindeki her ρ, γ elemanı için $\gamma \notin A(\rho, i_0)$ olduğundan $A(\rho, i_0) \subset A(\gamma, i_0)$ olmak zorundadır. Ancak bu durumda $\{A(\rho, i_0) : \rho \in \Lambda\}$ ailesi $\mathcal{W}_{\alpha(\rho_0, i_0)}(x)$ içinde kapsama bağıntısına göre artan bir aile olup $|\{A(\rho, i_0) : \rho \in \Lambda\}| = \kappa$ olduğundan bu $\mathcal{W}_{\alpha(\rho_0, i_0)}(x)$ ailesinin κ -Noetherian olmasıyla çelişir. Böylece $\mathcal{V}$ ailesi $\mathcal{G}$ 'nin nokta $< \mu$ açık incelenmiştir. ■

Eğer genelleştirilmiş kontinyum hipotezi(GCH) kabul edilirse; $\kappa \geq \omega$ biçimindeki her κ kardinal sayısı ve $\sigma < \text{cf}(\kappa)$ biçimindeki her σ kardinal sayısı için $\kappa^+ \longrightarrow (\kappa)_\sigma^2$ sağlandığından[2] ve regüler her κ kardinal sayısı için $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ olduğundan, genelleştirilmiş kontinyum hipotezi altında aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.4 (GCH)

X bir topolojik uzay ve κ regüler bir kardinal sayı olmak üzere eğer X uzayının κ ranklı ve κ -Noetherian olan κ -aileden $<\kappa$ -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemi varsa X uzayının her açık örtüsünün nokta $\leq \kappa$ açık incelenişi vardır. ■

Yine yukarıdaki teoremden $m = \kappa = \omega$ alınırsa, Ramsey Teoreminden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.5

X bir topolojik uzay olmak üzere eğer X uzayının sonlu ranklı ve Noetherian olan sayılabilir aile tarafından sonlu üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemi varsa X metaLindelöf uzaydır. ■

3.3. Çarpım Uzaylarında Örgü Koşulları ve Örtü Özellikleri

Bu altbölümde, önceki kısımlarda bahsedilen türden örgü koşullarını sağlayan sistemlere sahip olan topolojik uzayların çarpımlarına bu sistemlerin nasıl taşındıkları incelenecek ve böylece çarpım uzaylarının bazı örtü özelliklerine dair bir takım sonuçlar elde edilecektir.

Genel olarak örtü özelliklerinin çarpımsal özellikler olmadığı bilinmektedir. Örneğin metakompakt (metaLindelöf) iki uzayın çarpımı metakompakt (metaLindelöf) olmak zorunda değildir. Önceki kısımlarda görüldüğü üzere metaLindelöf veya metakompakt'lık gibi bazı örtü özelliklerini veren örgü koşulları mevcuttur. O halde çarpım uzaylarının bazı örtü özelliklerini sağladığına karar vermek için çarpım uzayının uygun örgü koşullarını sağlayıp sağlamadığına bakmak ta bir yöntemdir. Bu açıdan, çarpımsal özelliğe sahip örgü koşullarını tespit etmek önemlidir.

İyi-sıralı (F)-koşulunu sağlayan bir sisteme sahip olan topolojik uzayların metakompakt olduğu bilinmekteyken P.M.Gartside Doktora tezinde iyi-sıralı (F)-koşulunu sağlayan bir sisteme sahip olan topolojik uzayların sonlu çarpımının da metakompakt olduğunu göstermiştir[6]. Önceki kısımda sonlu ranklı, Noetherian bir aile tarafından k-üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan topolojik uzayların metakompakt olduğu görülmüştü. Aşağıdaki lemma ile bu örgü koşulunun sonlu tane topolojik uzayın çarpımında korunduğu görülecek ve bu örgü koşulunu sağlayan topolojik uzayların sonlu çarpımının metakompakt olduğu söylenecektir.

Lemma 3.3.1

m bir doğal sayı olmak üzere her $i \in m$ için X_i bir topolojik uzay ve k_i bir doğal sayı olsun. Eğer her $i \in m$ için X_i uzayının sonlu ranklı, Noetherian bir aile tarafından k_i -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}_i = \{ \mathcal{W}_i(x) : x \in X_i \}$ sistemi varsa $\prod_{i \in m} X_i$ çarpım uzayının da, $k = k_0 + k_1 + \dots + k_{m-1}$ olmak üzere, sonlu ranklı, Noetherian bir aile tarafından k -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan sistemi vardır.

İspat

Tümevarım ile yapılabileceğinden, ispatın iki uzayın çarpımı için yapılması yeterlidir.

X uzayının sonlu ranklı, Noetherian bir aile tarafından k_1 -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan sistemi $\mathcal{W}_1 = \{\mathcal{W}_1(x) : x \in X\}$ olsun ve her $x \in X$ için $\mathcal{W}_1(x)$ ailesi, sonlu ranklı ve Noetherian olan $\mathcal{G}_1(x)$ ailesi tarafından k_1 -üretilmiş olsun. Y uzayının sonlu ranklı, Noetherian bir aile tarafından k_2 -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan sistemi $\mathcal{W}_2 = \{\mathcal{W}_2(y) : y \in Y\}$ olsun ve her $y \in Y$ için $\mathcal{W}_2(y)$ ailesi, sonlu ranklı ve Noetherian olan $\mathcal{G}_2(y)$ ailesi tarafından k_2 -üretilmiş olsun. Her $(x,y) \in X \times Y$ için $\mathcal{G}(x,y) = \{A \times Y : A \in \mathcal{G}_1(x)\} \cup \{X \times B : B \in \mathcal{G}_2(y)\}$ olsun. $\mathcal{G}_1(x)$ ve $\mathcal{G}_2(y)$ aileleri sonlu ranklı ve Noetherian olduğundan her $(x,y) \in X \times Y$ için $\mathcal{G}(x,y)$ ailesi sonlu ranklı ve Noetheriandır. Ayrıca her $(x,y) \in X \times Y$ için $\mathcal{G}(x,y)$ tarafından $k_1 + k_2$ -üretilmiş aileye $\mathcal{F}(x,y)$ denilirse $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(x,y) : (x,y) \in X \times Y\}$ sisteminin (F)-koşulunu sağladığı kolayca görülebilir. Böylece $k = k_1 + k_2$ olmak üzere, $X \times Y$ uzayının, sonlu ranklı, Noetherian bir aile tarafından k -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{F}$ sisteminin var olduğu görülmüş olur. ■

Yukarıdaki lemma ve Teorem 3.2.2'den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.3.2

m bir doğal sayı, her $i \in m$ için X_i bir topolojik uzay ve $k_i \in \omega$ olmak üzere eğer her X_i uzayının sonlu ranklı, Noetherian bir aile tarafından k_i -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir sistemi varsa $\prod_{i \in m} X_i$ çarpım uzayı metakompakttır. ■

Keyfi sayıdaki uzayın çarpımına geçmeden önce aşağıdaki tanıımı verelim.

Tanım 3.3.3

σ ve μ sonsuz kardinal sayılar olmak üzere her $i \in \sigma$ için X_i bir topolojik uzay olsun.

$\prod_{i \in \sigma} X_i$ çarpım kümesi üzerinde tabanı

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in F} T_i \times \prod_{i \in \sigma - F} X_i : F \subseteq \sigma, |F| < \mu \text{ ve her } i \in F \text{ için } T_i \subseteq X_i \text{ açık} \right\}$$

olan topolojiye $\prod_{i \in \sigma} X_i$ kümesi üzerindeki $<\mu$ -kutu topoloji denir. $\mu = \omega$ için bu topolojinin çarpım(Tychonoff) topolojisi olduğu açıktır. ■

Teorem 3.3.4

κ , m , μ ve σ kardinal sayılar olmak üzere $\mu \leq cf(\kappa)$ olsun. Her $i \in \sigma$ için X_i bir topolojik uzay olmak üzere eğer her $i \in \sigma$ için X_i uzayının κ ranklı ve κ -Noetherian olan m -aileden $<\kappa$ -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}_i = \{ \mathcal{W}_i(x) : x \in X_i \}$ sistemi varsa, $<\mu$ -kutu topoloji ile, $\prod_{i \in \sigma} X_i$ uzayının da κ ranklı ve κ -Noetherian olan $\max\{m, \sigma\}$ -aileden $<\kappa$ -üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{F}$ sistemi vardır.

İspat

Her $i \in \sigma$, her $x \in X_i$ ve her $\alpha \in m$ için $\text{rank}(\mathcal{G}_\alpha^i(x)) \leq \kappa$ ve $\mathcal{G}_\alpha^i(x)$ ailesi κ -Noetherian olmak üzere $\mathcal{W}_i(x)$ ailesi $\{ \mathcal{G}_\alpha^i(x) : \alpha \in m \}$ tarafından $<\kappa$ -üretilsin.

$x = (x_i)_{i \in \sigma} \in \prod_{i \in \sigma} X_i$, $\alpha \in m$ ve $i \in \sigma$ olmak üzere

$$\mathcal{F}(x, \alpha, i) = \left\{ S \times \prod_{k \in \sigma - \{i\}} X_k : S \in \mathcal{G}_\alpha^i(x_i) \right\} \text{ ve } \{ \mathcal{F}(x, \alpha, i) : (\alpha, i) \in m \times \sigma \} \text{ ailesi}$$

tarafından $<\kappa$ -üretilmiş aile $\mathcal{F}(x)$ olsun. Her $(\alpha, i) \in m \times \sigma$ ve her $x \in \prod_{i \in \sigma} X_i$ için

$\mathcal{F}(x, \alpha, i)$ ailesinin κ -Noetherian olduğunu ve $\text{rank}(\mathcal{F}(x, \alpha, i)) \leq \kappa$ olduğunu

görmek kolaydır. O halde $\mathcal{F} = \{ \mathcal{F}(x) : x \in \prod_{i \in \sigma} X_i \}$ sisteminin (F)-koşulunu sağladığı

görülmelidir. $x=(x_i)_{i \in \sigma} \in \prod_{i \in \sigma} X_i$, $0 \subseteq \prod_{i \in \sigma} X_i$ ve 0 kümesi $<\mu$ -kutu topolojiye göre açık olmak üzere $x \in 0$ olsun. 0 açık altküme olduğundan σ 'nın $|F| < \mu$ olacak biçimde öyle bir F altkümesi ve her $i \in F$ için X_i uzayının öyle bir T_i açık altkümesi vardırki $x \in \prod_{i \in F} T_i \times \prod_{i \in \sigma-F} X_i \subseteq 0$ sağlanır. Her $i \in F$ için $x_i \in T_i$ ve $T_i \subseteq X_i$ açık olduğundan her $i \in F$ için $x_i \in V_i(x_i, T_i)$ olacak biçimde bir $V_i(x_i, T_i) \subseteq X_i$ açığı vardır. $V(x, 0) = \prod_{i \in F} V_i(x_i, T_i) \times \prod_{i \in \sigma-F} X_i$ olmak üzere $y=(y_i)_{i \in \sigma} \in V(x, 0)$ olsun. Bu durumda her $i \in F$ için $y_i \in V_i(x_i, T_i)$ olup her $i \in F$ için $x_i \in W_i \subseteq T_i$ olacak biçimde bir $W_i \in \mathcal{W}(y_i)$ vardır. $\mathcal{W}(y_i)$ ailesi $\{\mathcal{G}_\alpha^i(y_i) : \alpha \in m\}$ tarafından $<\kappa$ -üretilmiş olduğundan $W_i = \bigcap \mathcal{A}_i$ ve $|\mathcal{A}_i| < \kappa$ olacak biçimde bir $\mathcal{A}_i \subseteq \bigcup_{\alpha \in m} \mathcal{G}_\alpha^i(y_i)$ alt ailesi vardır. Her $i \in F$ için $\tau_i < \kappa$ olmak üzere $\mathcal{A}_i = \{A(i, j) : j \in \tau_i\}$ biçiminde olsun. $\bigcup_{i \in F} \tau_i = \tau$ ve her $j \in \tau \setminus \tau_i$ için $A(i, j) = X_i$ olsun. Böylece her $i \in F$ için $\mathcal{A}_i = \{A(i, j) : j \in \tau\}$ biçiminde olup her $i \in F$ için $W_i = \bigcap_{j \in \tau} A(i, j)$ biçimindedir. Ayrıca $|F| < \mu \leq cf(\kappa)$ olduğundan $\tau < \kappa$ dır. Her $i \in F$ için $x_i \in W_i = \bigcap_{j \in \tau} A(i, j)$ olduğundan her $i \in F$ ve her $j \in \tau$ için $x_i \in A(i, j)$ olup her $j \in \tau$ için $x \in \bigcap_{i \in F} \left(A(i, j) \times \prod_{k \in \sigma - \{i\}} X_k \right)$ olur ve böylece $x \in \bigcap_{j \in \tau} \left(\bigcap_{i \in F} \left(A(i, j) \times \prod_{k \in \sigma - \{i\}} X_k \right) \right)$ elde edilir. Aynı zamanda $\bigcap_{i \in F} \left(A(i, j) \times \prod_{k \in \sigma - \{i\}} X_k \right) = \prod_{i \in F} A(i, j) \times \prod_{i \in \sigma-F} X_i$ olduğundan ve her $i \in F$ için $W_i = \bigcap_{j \in \tau} A(i, j) \subseteq T_i$ olduğundan $x \in \bigcap_{(i,j) \in F \times \tau} \left(A(i, j) \times \prod_{k \in \sigma - \{i\}} X_k \right) \subseteq \prod_{i \in F} T_i \times \prod_{i \in \sigma-F} X_i \subseteq 0$ sağlanır. O halde $\mathcal{A} = \{A(i, j) \times \prod_{k \in \sigma - \{i\}} X_k : i \in F, j \in \tau\}$ denilirse $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{(\alpha, i) \in m \times \sigma} \mathcal{F}(y, \alpha, i)$ ve $|\mathcal{A}| < \kappa$ sağlanır. Böylece $\bigcap \mathcal{A} = W$ denilirse $W \in \mathcal{F}(y)$ ve $x \in W \subseteq 0$ sağlandığından $\mathcal{F}$ sisteminin (F)-koşulunu sağladığı görülmüş olur. ■

Yukarıdaki teoremden ve sonuç 3.2.5'den aşağıdaki elde edilir.

Sonuç 3.3.5

Sonlu ranklı ve Noetherian olan sayılabilir aileden sonlu üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan sisteme sahip olan sayılabilir topolojik uzayın çarpımı metaLindelöf uzaydır. ■

λ sonsuz bir kardinal sayı olmak üzere eğer X topolojik uzayının her açık örtüsünün noktasal $\leq \lambda$ açık incelməsi varsa X uzayına (∞, λ) -metaLindelöf uzay denir. λ sonsuz bir kardinal sayı olmak üzere, her $i \in \lambda$ için X_i uzayı sonlu ranklı ve Noetherian olan sayılabilir aileden sonlu üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir sisteme sahipse, yukarıdaki teoremden, $\prod_{i \in \lambda} X_i$ çarpım uzayı da sonlu ranklı ve Noetherian λ -aileden sonlu üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir sisteme sahiptir. Ramsey teoreminden her $n \in \omega$ için $\lambda \longrightarrow (\omega)_n^2$ sağlandığından, Teorem 3.2.3'den, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.3.6

λ sonsuz bir kardinal sayı olmak üzere, her $i \in \lambda$ için X_i uzayı sonlu ranklı ve Noetherian olan sayılabilir aileden sonlu üretilmiş (F)-koşulunu sağlayan bir sisteme sahipse $\prod_{i \in \lambda} X_i$ çarpım uzayı (∞, λ) -metaLindelöf uzaydır. ■

4. GO-UZAYLAR

Bu bölümün ilk kısmında genelleştirilmiş sıralı bir X topolojik uzayının her açık örtüsünün öyle bir σ -ayrık açık kısmi incelmışinin var olduğu ve bu incelmışin örttüğü yerin dışında kalan kısmın , herbiri regüler sayılamaz bir kardinalin durağan bir altkümesine homeomorf olan kapalı altuzaylardan oluşan diskret bir ailenin birleşimi şeklinde yazılabileceği görülecektir. Bu teorem monoton normal uzaylar için Z.Balogh ve M.E.Rudin tarafından ispatlanmıştır[10]. Genelleştirilmiş sıralı her uzay monoton normal olduğundan[11], bu yazarlar tarafından ispatlanan teorem genelleştirilmiş sıralı uzaylar için de elbetteki doğrudur. Monoton normal uzaylar için verilmiş olan ispatta bazı yeni tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Bu çalışmada genelleştirilmiş sıralı uzaylar için elde edilen ispat bilinen tanım ve kavramlarla yapılmıştır. Böylece bu kısımda yapılanlar, teoremin ifadesi açısından bir yenilik getirmemekle birlikte, ispatın farklılığı ve kısalığı açısından monoton normal uzaylar için yapılmış olan ispattan ayrılmaktadır.

4.1. GO-Uzaylar ve Durağan Küme

Yukarıda bahsedilen teoreme geçmeden önce bilinen bazı tanım ve lemmaları verelim.

Tanım 4.1.1

X bir küme, $\mathcal{G}$ X 'in altkümelerinin bir ailesi olmak üzere , her $A \subseteq X$ için

$st(A, \mathcal{G}) = \bigcup \{S \in \mathcal{G} : A \cap S \neq \emptyset\}$ biçiminde ve $x \in X$ olmak üzere $A = \{x\}$ için

$st(A, \mathcal{G}) = st(x, \mathcal{G})$ biçiminde tanımlıdır. Ayrıca $n > 1$ bir tamsayı olmak üzere

$st^n(x, \mathcal{G}) = st(st^{n-1}(x, \mathcal{G}), \mathcal{G})$ ve $st^\infty(x, \mathcal{G}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} st^n(x, \mathcal{G})$ dir.

$st^n(x, \mathcal{G})$ tanımından kolayca görülebileceği için aşağıdaki lemma ispatsız olarak verilecektir.

Lemma 4.1.2

X bir küme, $\mathcal{G}$ X 'in altkümelerinin bir ailesi, $x, y \in X$ ve $n > 1$ bir tamsayı olmak üzere $y \in st^n(x, \mathcal{G})$ olması için gerek ve yeter şart $1 \leq i \leq n$ biçimindeki her i tamsayısı için $\mathcal{G}$ 'nin, $S_i \cap S_{i+1} \neq \emptyset$ ve $x \in S_1, y \in S_n$ olacak biçimde $S_1, S_2, \dots, S_n$ elemanlarının bulunmasıdır. ■

Aşağıdaki iki lemmanın ispatı yukarıdaki lemma yardımıyla kolayca yapılabilir.

Lemma 4.1.3

X bir küme, $\mathcal{G}$ X 'in altkümelerinin bir ailesi olmak üzere X 'in her x, y elemanı için $st^\infty(x, \mathcal{G}) = st^\infty(y, \mathcal{G})$ veya $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap st^\infty(y, \mathcal{G}) = \emptyset$ dir. ■

Lemma 4.1.4

$(X, <)$ sıralanmış bir küme olmak üzere eğer $\mathcal{G}$ X 'in konveks altkümelerinden oluşan bir aile ise her $x \in X$ için $st^\infty(x, \mathcal{G})$ kümesi de konvektir. ■

Şimdi de ispatlanacak olan teoremden önemli bir rol oynayacak olan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.1.5

$(X, <)$ sıralanmış bir küme, $\mathcal{G}$ X 'in konveks altkümelerden oluşan bir örtüsü olmak üzere, her $x \in X$ için öyle $\alpha_x \leq \omega$, $\beta_x \leq \omega$ ve X içinde, $x_0 = y_0 = x$ olmak üzere, artan öyle bir $\{x_n : n \in \alpha_x\}$ ve azalan öyle bir $\{y_n : n \in \beta_x\}$ dizileri (sonlu olabilirler) vardır ki

$$i.) \quad st^\infty(x, \mathcal{G}) = \left(\bigcup_{n \in \alpha_x} st(x_n, \mathcal{G}) \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \beta_x} st(y_n, \mathcal{G}) \right)$$

- ii.) α_x 'in $m < n$ biçimindeki her m, n elemanı için $x_n \notin st(x_m, \mathcal{G})$ ve β_x in $m < n$ biçimindeki her m, n elemanı için $y_n \notin st(y_m, \mathcal{G})$
- iii.) Her $n, n+1 \in \alpha_x$ için $st(x_n, \mathcal{G}) \cap st(x_{n+1}, \mathcal{G}) \neq \emptyset$ ve her $n, n+1 \in \beta_x$ için $st(y_n, \mathcal{G}) \cap st(y_{n+1}, \mathcal{G}) \neq \emptyset$ sağlanır.

İspat

$x \in X$ olmak üzere $[x, \rightarrow) = \{y \in X : x < y \text{ veya } x = y\}$ ile gösterilsin. Artan diziyi bulmak için $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)$ kümesini ele alalım ve aşağıdaki durumları inceleyelim.

1.) Eğer $st^n(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow) = st^{n+1}(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)$ olacak biçimde bir $n \in \omega \setminus \{0\}$ elemanı varsa;

$n_0 = \min\{n \in \omega \setminus \{0\} : st^n(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow) = st^{n+1}(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)\}$ denilirse $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow) = st^{n_0}(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)$ olur ve n_0 in minimallüğünden $1 \leq n < n_0$ biçimindeki her n doğal sayısı için $st^n(x, \mathcal{G}) \setminus st^{n+1}(x, \mathcal{G})$ kümesinin özaltkümesidir. O halde, $x_0 = x$ olmak üzere $1 \leq n < n_0$ biçimindeki her n doğal sayısı için $x_n > x$ biçiminde bir $x_n \in st^{n+1}(x, \mathcal{G}) \setminus st^n(x, \mathcal{G})$ seçilirse $\mathcal{G}$ konveks olduğundan

$$st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow) = \bigcup_{n=0}^{n_0-1} st(x_n, \mathcal{G}), \quad st^n(\cdot, \cdot) \text{ nin tanımından ve } x_n \text{'lerin seçiminden,}$$

$1 \leq n < n_0 - 1$ biçimindeki her n doğal sayısı için $st(x_n, \mathcal{G}) \cap st(x_{n+1}, \mathcal{G}) \neq \emptyset$ sağlanır.

$1 \leq n < n_0$ ve $1 \leq m < n_0$ olmak üzere $m < n$ biçimindeki her m, n doğal sayısı için $x_n \notin st(x_m, \mathcal{G})$ olduğu açıktır. Böylece $\alpha_x = n_0$ olmak üzere $\{x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1}\}$ aranan artan dizidir.

2.) Eğer her $n \in \omega \setminus \{0\}$ için $st^n(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow) \neq st^{n+1}(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)$ ise; bu durumda $x_0 = x$ olmak üzere her $n \in \omega \setminus \{0\}$ için $x_n > x$ biçiminde bir $x_n \in st^{n+1}(x, \mathcal{G}) \setminus st^n(x, \mathcal{G})$ seçerek oluşturulan $\{x_n : n \in \omega = \alpha_x\}$ dizisi aranan

artan dizidir.

$(\leftarrow, x] \cap st^\infty(x, \mathcal{G})$ kümesi üzerinde yukarıdakine benzer işlemler yapılarak azalan dizi elde edilebilir. ■

İfadesi uzun olan aşağıdaki özelliği, her defasında tekrar etmemek için, (*) olarak adlandıracağız. Şimdi bu tanımlı verelim.

Tanım 4.1.6

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{G}$ X 'in herhangi bir açık örtüsü olmak üzere $\mathcal{G}$ 'nin öyle bir $\mathcal{V}$ σ -ayrık, açık, (kısmi) incelməsi varsa ve $X \setminus \bigcup \mathcal{V}$ kümesi, herbiri regüler sayılamaz bir kardinalin durağan bir altkümesine homeomorf olan kapalı altuzaylardan oluşan diskret bir ailenin birleşimi olarak yazılabiliyorsa X uzayında $\mathcal{G}$ için (*) özelliği sağlanıyor denir ve eğer X 'in her $\mathcal{G}$ açık örtüsü için (*) özelliği sağlanıyorsa X uzayı (*)'ı sağlıyor denir.

Şimdi de bu bölümün ana teoremini verelim.

Teorem 4.1.7

X bir GO-uzay ise X (*)'ı sağlar.

İspat

$\mathcal{G}$ X uzayının herhangi bir açık örtüsü olsun. X GO-uzay olduğundan X 'in konveks kümelerden oluşan bir bazı vardır ve böylece $\mathcal{G}$ 'nin konveks açık kümelerden oluşan bir $\mathcal{G}$ incelməsi vardır. Lemma 4.1.3'den X 'in öyle bir $\hat{X}$ altküməsi vardır ki $\mathcal{P} = \{st^\infty(x, \mathcal{G}) : x \in \hat{X}\}$ ailesi X 'in bir parçalanmasıdır. Ayrıca $\mathcal{G}$ ailesi konveks açık kümelerden olduğundan Lemma 4.1.4'den $\hat{X}$ 'nin her x elemanı için $st^\infty(x, \mathcal{G})$

kümesi konveks ve açıktır. Öte yandan $\mathcal{P}$ X 'in açık kümelerden oluşan bir parçalanması olduğundan aynı zamanda her $x \in \hat{X}$ için $st^\infty(x, \mathcal{G})$ kümesi X içinde kapalıdır. Böylece her $x \in \hat{X}$ için $st^\infty(x, \mathcal{G})$ kümesi X içinde hem açık hem kapalı ve her $x, y \in \hat{X}$ için $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap st^\infty(y, \mathcal{G}) = \emptyset$ olduğundan herhangi bir $x \in \hat{X}$ için $st^\infty(x, \mathcal{G})$ altuzayında $\mathcal{G}$ için (*) özelliğinin sağlandığını görmek yeterlidir. $\mathcal{P}$ parçalanmasının herhangi bir $st^\infty(x, \mathcal{G})$ elemanını alalım. Lemma 4.1.5'den öyle $\alpha \leq \omega$, $\beta \leq \omega$ ve $x_0 = y_0 = x$ olmak üzere X içinde artan öyle bir $\{x_n : n \in \alpha\}$ dizisi ve azalan öyle bir $\{y_n : n \in \beta\}$ dizisi vardır ki Lemma 4.1.5'in koşulları sağlanır. $st^\infty(x, \mathcal{G})$ altuzayının $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)$ kısmı için ispat elde edilirse benzer işlemler, azalan dizi kullanılarak, $(\leftarrow, x) \cap st^\infty(x, \mathcal{G})$ kısmında da yapılabileceğinden, artan dizi kullanılarak $st^\infty(x, \mathcal{G})$ altuzayının $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)$ parçasında çalışmak yeterlidir. Şimdi α 'nın ω 'ya eşit olması durumunu ve sonlu olması durumunu inceleyelim.

Eğer $\alpha = \omega$ ise;

$$st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow) = \left(\bigcup_{n \in \alpha} st(x_n, \mathcal{G}) \right) \cap [x, \rightarrow) \text{ ve her } n \in \omega \text{ için}$$

$st(x_n, \mathcal{G}) \cap st(x_{n+1}, \mathcal{G}) \neq \emptyset$ olduğundan ve aynı zamanda $\mathcal{G}$ 'nin elemanları konveks olduğundan $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)$ kümesi $\mathcal{G}$ 'nin sayılabilir bir alt ailesi ile örtülebilir. Sayılabilir her aile σ -ayrık olduğundan $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)$ kümesi $\mathcal{G}$ 'nin σ -ayrık kısmı bir açık incelmüş ile örtülmüş olur.

Eğer, $m \in \omega$ olmak üzere, $\alpha = m+1$ ise;

$\alpha = m+1$ olduğundan $\{x_n : n \in \alpha\} = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ biçimindedir. Bu durumda $[x, x_m)$ aralığı $\mathcal{G}$ 'nin sonlu bir $\mathcal{G}_0$ altailesi ile örtülebilir. Aynı zamanda $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow) = st(x_m, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ olduğundan aşağıdaki durumlar söz konusudur.

1.Durum: $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ kümesinin bir b son elemanı varsa; bu durumda $b \in st(x_m, \mathcal{G})$ olup $\mathcal{G}$ 'nin elemanları konveks olduğundan $[x_m, b]$ aralığı $\mathcal{G}$ 'nin bir

elemanı tarafından içerilir. Böylece $[x, x_m) \cup [x_m, b]$ kümesi $\mathcal{G}$ 'nin sonlu bir altailesi ile örtülebildiğinden ve $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow) \subseteq [x, x_m) \cup [x_m, b]$ olduğundan $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)$ kümesi $\mathcal{G}$ 'nin σ -ayrık bir $\mathcal{V}$ kısmi açık incelməsi ile örtülür.

2.Durum: $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ kümesinin son elemanı yoksa; bu durumda κ regüler bir kardinal sayı olmak üzere $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ kümesi içinde artan kofinal bir $\{z_\rho : \rho < \kappa\}$ dizisi vardır. κ sayılabilir ise $\{z_\rho : \rho < \kappa\}$ sayılabilir olup $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ kümesi $\mathcal{G}$ 'nin sayılabilir bir açık incelməsi ile örtülebilir. O halde κ sayılamaz, regüler bir kardinal olsun. Bütün limit ordinallerin kümesi LIM ile gösterilmek üzere, L kümesi;

$$L = \{\lambda \in \kappa \cap LIM : \sup\{z_\rho : \rho < \lambda\} \text{ X içinde var ve } \sup\{z_\rho : \rho < \lambda\} \in \overline{\{z_\rho : \rho < \lambda\}}\}$$

biçiminde tanımlansın. L κ 'nın durağan bir altkümesidir veya değildir. Şimdi bu iki durumu inceleyelim.

Eğer L κ 'nın durağan bir altkümesi ise:

Öncelikle $F = \{\sup\{z_\rho : \rho < \lambda\} : \lambda \in L\}$ kümesinin $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ içinde, dolayısıyla X içinde, kapalı olduğunu görelim. $p \in (st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)) \setminus F$ olsun. $\{z_\rho : \rho < \kappa\}$ dizisi $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ içinde kofinal olduğundan $p \leq z_\rho$ olacak biçimde $\rho < \kappa$ vardır. $\rho_0 = \min\{\rho : p \leq z_\rho\}$ denilirse $p \leq z_{\rho_0}$ olur ve ρ_0 'ın minimalliğinden $p \notin \{z_\rho : \rho < \rho_0\}$ için bir üst sınır olur. $\rho_0 \in L$ veya $\rho_0 \notin L$ dir. Eğer $\rho_0 \in L$ ise; bu durumda L kümesinin tanımından $\sup\{z_\rho : \rho < \rho_0\} = q$ olacak biçimde $q \in X$ vardır ve F kümesinin tanımından $q \in F$ dir. Öte yandan $p \notin F$ olduğundan $p \neq q$ olmak zorundadır. Aynı zamanda $p \notin \{z_\rho : \rho < \rho_0\}$ için bir üst sınır olduğundan $q < p$ dir. $p \leq z_{\rho_0}$ olduğundan $p < z_{\rho_0+1}$ olup $p \in (q, z_{\rho_0+1})$ dir. Şimdide $(q, z_{\rho_0+1}) \cap F = \emptyset$ olduğunu görelim. $y \in X$ olmak üzere $y \in (q, z_{\rho_0+1}) \cap F$ olsun. $y \in F$ olduğundan $y = \sup\{z_\rho : \rho < \lambda_0\}$ olacak biçimde $\lambda_0 \in L$ vardır. $q < y$ olduğundan $\lambda_0 \leq \rho_0$ olamaz. O halde $\rho_0 < \lambda_0$ olmak zorundadır. Ancak λ_0 limit ordinal olduğundan $\rho_0 + 1 < \lambda_0$ dir ve böylece $z_{\rho_0+1} \leq y$ olur ki bu $y \in (q, z_{\rho_0+1})$ olması ile çeliştiğinden $(q, z_{\rho_0+1}) \cap F = \emptyset$ dir. Eğer $\rho_0 \notin L$ ise ; ρ_0 'ın limit ordinal olup olmama durumlarını inceleyelim. ρ_0 limit ordinal değilse $\rho_0 = \gamma_0 + 1$ biçimindedir ve ρ_0 'ın minimalliğinden

$z_{\gamma_0} < p < z_{\rho_0+1} = z_{\gamma_0+2}$ olup $p \in (z_{\gamma_0}, z_{\gamma_0+2})$ dir. Aynı zamanda $(z_{\gamma_0}, z_{\gamma_0+2}) \cap F = \emptyset$ dir. Şöyleki; $y \in (z_{\gamma_0}, z_{\gamma_0+2}) \cap F$ ise $\sup\{z_\rho : \rho < \lambda_0\} = y$ olacak biçimde $\lambda_0 \in L$ vardır. $\lambda_0 \leq \gamma_0$ veya $\gamma_0 < \lambda_0$ dir. $\lambda_0 \leq \gamma_0$ ise $y \leq z_{\gamma_0}$ olur ki bu mümkün değildir. $\gamma_0 < \lambda_0$ ise, λ_0 limit ordinal olduğundan $\gamma_0+2 < \lambda_0$ dir ve böylece $z_{\gamma_0+2} \leq y$ elde edilir ancak bu da mümkün değildir. O halde $(z_{\gamma_0}, z_{\gamma_0+2}) \cap F = \emptyset$ olmak zorundadır. Eğer ρ_0 limit ordinal ise; $\rho_0 \notin L$ olduğundan ya $\{z_\rho : \rho < \rho_0\}$ dizisinin X içinde üst sınırlarının en küçüğü yoktur yada, varsa, $\overline{\{z_\rho : \rho < \rho_0\}}$ kümesinin elemanı değildir. Eğer $\{z_\rho : \rho < \rho_0\}$ dizisinin en küçük üst sınırı yoksa, p bu küme için bir üst sınır olduğundan, bu kümenin $q < p$ biçiminde başka bir üst sınırı vardır ve böylece $p \in (q, z_{\rho_0+1})$ olur. Yukarıdakilerde olduğu gibi $(q, z_{\rho_0+1}) \cap F = \emptyset$ olduğu kolayca görülebilir. Eğer $\sup\{z_\rho : \rho < \rho_0\} = q$ var ve $q \notin \overline{\{z_\rho : \rho < \rho_0\}}$ ise; $p \in \{z_\rho : \rho < \rho_0\}$ için üst sınır olduğundan $q \leq p$ dir. $q < p$ ise $p \in (q, z_{\rho_0+1})$ olup $(q, z_{\rho_0+1}) \cap F = \emptyset$ dir. $q = p$ ise; $p \notin \overline{\{z_\rho : \rho < \rho_0\}}$ olduğundan $p \in U$ ve $U \cap \{z_\rho : \rho < \rho_0\} = \emptyset$ olacak biçimde konveks, açık bir U altkümesi vardır. $p \in (\leftarrow, z_{\rho_0+1}) \cap U$ dur ve $(\leftarrow, z_{\rho_0+1}) \cap U \cap F = \emptyset$ olduğundan F kümesi kapalıdır.

Şimdide F 'nin L 'ye homeomorf olduğunu görelim. Her $\lambda \in L$ için $f(\lambda) = \sup\{z_\rho : \rho < \lambda\}$ biçiminde tanımlanan $f : L \longrightarrow F$ fonksiyonu, tanımından, örtendir. Ayrıca L 'nin her elemanı limit ordinal olduğundan $\lambda < \gamma$ iken $f(\lambda) < z_{\lambda+1} \triangleleft f(\gamma)$ olup f bire-bir dir. Şimdi f fonksiyonunun sürekli olduğunu görelim. $\lambda \in L$ 'nin herhangi bir elemanı olsun. $V \subset X$ 'in konveks ve açık bir altkümesi olmak üzere $f(\lambda) \in V$ olsun. L kümesinin tanımından $f(\lambda) \in \overline{\{z_\rho : \rho < \lambda\}}$ olup $V \cap \{z_\rho : \rho < \lambda\} \neq \emptyset$ dir. O halde $z_{\rho_0} \in V$ olacak biçimde bir $\rho_0 < \lambda$ vardır. $f(\lambda) \in V$, $z_{\rho_0} \in V$ ve V konveks olduğundan $[z_{\rho_0}, f(\lambda)] \subseteq V$ dir. Aynı zamanda $f(\rho_0, \lambda) \cap L \subseteq [z_{\rho_0}, f(\lambda)] \cap F \subseteq V$ olup f süreklidir. Şimdi ise f^{-1} fonksiyonunun sürekli olduğunu görelim. F 'nin herhangi bir p elemanını alalım. $\lambda \in L$ olmak üzere $p = \sup\{z_\rho : \rho < \lambda\}$ olsun.

W kümesi κ içinde açık olmak üzere $f^{-1}(p) = \{\lambda \in W : p = f(\lambda)\}$ olsun. O zaman $(\gamma, \lambda] \cap L \subseteq W$ olacak biçimde bir $\gamma < \lambda$ vardır. $\gamma < \lambda$, λ limit ordinal ve $p = \sup\{z_\rho : \rho < \lambda\}$ olduğundan $p \in (z_\gamma, z_{\lambda+1})$ dir. $(z_\gamma, z_{\lambda+1}) \cap F = U$ denilirse $f^{-1}(U) \subseteq (\gamma, \lambda]$ sağlanır. Şöyleki; $\sigma \in f^{-1}(U)$ olsun. Bu durumda $f(\sigma) = \sup\{z_\rho : \rho < \sigma\} \in (z_\gamma, z_{\lambda+1})$ olup $\gamma < \sigma \leq \lambda$ dir. Böylece $\sigma \in (\gamma, \lambda]$ olup $f^{-1}(U) \subseteq (\gamma, \lambda] \cap L \subseteq W$ elde edilir. O halde f^{-1} sürekli olup f homeomorfizmdir.

$\{z_\rho : \rho < \kappa\}$ dizisi $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ içinde kofinal ve L kümesi κ içinde durağan, dolayısıyla sınırsız, olduğundan F kümesi de $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ içinde kofinaldir. GO-uzaylarda her açık küme konveks açık kümelerin birleşimi olarak yazılabildiğinden ve F kümesi $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ içinde kofinal olduğundan, her $t \in I$ için J_t X 'in konveks, açık, sınırlı bir altkümesi ve $t \neq \hat{t}$ için $J_t \cap J_{\hat{t}} = \emptyset$ olmak üzere $(st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)) \setminus F = \bigcup_{t \in I} J_t$ biçiminde yazılabilir. Her $t \in I$ için $J_t \subseteq st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$, J_t sınırlı ve $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ kümesinin üst sınırı olmadığından her $t \in I$ için $J_t \subseteq [x_m, y_t]$ olacak biçimde bir $y_t \in st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ vardır. $st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow) = st(x_m, \mathcal{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ ve $\mathcal{G}$ konveks kümelerden olduğundan $[x_m, y_t] \subseteq O_t$ olacak biçimde bir $O_t \in \mathcal{G}$ vardır. O halde $\mathcal{J} = \{J_t : t \in I\}$ ailesi $\mathcal{G}$ 'nin ayrık bir kısmı incelmıştır. Aynı zamanda $[x, x_m)$ aralığı $\mathcal{G}_0$ ile örtüldüğünden $(st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)) \setminus F = \bigcup (\mathcal{J} \cup \mathcal{G}_0)$ dir. $\mathcal{W} = \mathcal{J} \cup \mathcal{G}_0$ denilirse $\mathcal{W}$ $\mathcal{G}$ 'nin σ -ayrık kısmı incelmıştır ve $(st^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)) \setminus \bigcup \mathcal{W} = F$ dir. Böylece L kümesinin durağan olması durumunda, $st^\infty(x, \mathcal{G}) \setminus \bigcup \mathcal{W} = F$ olacak biçimde, $\mathcal{G}$ 'nin σ -ayrık bir $\mathcal{W}$ kısmı açık incelmış ve regüler, sayılamaz bir kardinalin kapalı bir altkümesine homeomorf olan bir F altkümesi bulunmuş olur.

Eğer L kümesi κ içinde durağan değilse; bu durumda κ 'nın $L \cap A = \emptyset$ olacak biçimde kapalı ve sınırsız bir A altkümesi vardır. $A \cap LIM = C$ denilirse C kümesi de κ içinde kapalı ve sınırsızdır. κ regüler, sayılamaz bir kardinal ve C κ içinde kapalı ve sınırsız olduğundan, $f(0) = \min C$ ve $f(\rho) = \min(C \setminus \{f(i) : i \in \rho\})$ biçiminde

tanımlanan $f: \kappa \longrightarrow C$ örten fonksiyonu, κ 'nın $\rho < \gamma$ biçimindeki her ρ, γ elemanı için $f(\rho) < f(\gamma)$ ve her $\lambda \in \kappa \cap \text{LİM}$ için $f(\lambda) = \sup\{f(i) : i \in \lambda\}$ koşullarını sağlar. Her $\rho \in \kappa$ için $f(\rho) = \gamma_\rho$ ile gösterilmek üzere $D = \{z_{\gamma_\rho} : \rho \in \kappa\}$ olsun. D kümesi X içinde kapalı ve diskret'dir. Şöyleki; $y \in (\text{st}^\infty(x, \mathfrak{G}) \cap [x_m, \rightarrow))$ olsun. D kümesi $\text{st}^\infty(x, \mathfrak{G}) \cap [x_m, \rightarrow)$ içinde kofinal olduğundan $y \leq z_{\gamma_\rho}$ olacak biçimde $\gamma_\rho \in C$ vardır. $\min\{\gamma_\rho : y \leq z_{\gamma_\rho}\} = \gamma_{\rho_0}$ denilirse $y \{z_{\gamma_\rho} : \rho < \rho_0\}$ için üst sınır olur. $\rho_0 = \beta_0 + 1$ biçimindeyse $z_{\gamma_{\beta_0}} < y < z_{\gamma_{\beta_0+2}}$ dir ve $|(z_{\gamma_{\beta_0}}, z_{\gamma_{\beta_0+2}}) \cap D| \leq 1$ olur. ρ_0 limit ordinal ise, $\gamma_{\rho_0} \in C$ olduğundan, $\gamma_{\rho_0} \notin L$ olup $\{z_\rho : \rho < \gamma_{\rho_0}\}$ kümesinin ya en küçük üst sınırı yoktur yada varsa $\sup\{z_\rho : \rho < \gamma_{\rho_0}\} = p$ olmak üzere $p \notin \overline{\{z_\rho : \rho < \gamma_{\rho_0}\}}$ dir. Eğer $\{z_\rho : \rho < \gamma_{\rho_0}\}$ kümesinin X içinde en küçük üst sınırı yoksa bu kümenin $q < y$ olacak biçimde başka bir q üst sınırı vardır. Bu durumda $y \in (q, z_{\gamma_{\rho_0+1}})$ ve $|(q, z_{\gamma_{\rho_0+1}}) \cap D| \leq 1$ dir. Eğer $\sup\{z_\rho : \rho < \gamma_{\rho_0}\} = p$ olmak üzere $p \notin \overline{\{z_\rho : \rho < \gamma_{\rho_0}\}}$ ise, p üst sınırların en küçüğü olduğundan $p \leq y$ dir. $p < y$ ise $y \in (p, z_{\gamma_{\rho_0+1}})$ ve $|(p, z_{\gamma_{\rho_0+1}}) \cap D| \leq 1$ dir. $p = y$ ise; $p \notin \overline{\{z_\rho : \rho < \gamma_{\rho_0}\}}$ olduğundan y 'nin $U \cap \{z_\rho : \rho < \gamma_{\rho_0}\} = \emptyset$ olacak biçimde bir U komşuluğu vardır. O halde $y \in (\leftarrow, z_{\gamma_{\rho_0+1}}) \cap U$ ve $|\leftarrow, z_{\gamma_{\rho_0+1}}) \cap U \cap D| \leq 1$ dir. Böylece D 'nin kapalı ve diskret olduğu görülmüş olur. D diskret ve kapalı olduğundan her $\lambda \in \kappa \cap \text{LİM}$ için $\bigcap_{i < \lambda} (z_{\gamma_i}, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ kümesi X içinde açıktır. Şöyleki; $\lambda \in \kappa \cap \text{LİM}$ olmak üzere $y \in \bigcap_{i < \lambda} (z_{\gamma_i}, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ olsun. Bu durumda $y \{z_{\gamma_i} : i < \lambda\}$ kümesi için bir üst sınırdır. Eğer $\{z_{\gamma_i} : i < \lambda\}$ kümesinin en küçük üst sınırı yoksa $q < y$ olacak biçimde başka bir üst sınırı vardır ve böylece $y \in (q, z_{\gamma_{\lambda+1}}) \subseteq \bigcap_{i < \lambda} (z_{\gamma_i}, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ sağlanır. O halde $\{z_{\gamma_i} : i < \lambda\}$ kümesinin en küçük üst sınırı var ve bu p olsun. y üst sınır olduğundan $p \leq y$ olup $y \in [p, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ dir. $[p, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ kümesi X içinde açıktır. Şöyleki; $t \in [p, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ olsun. Eğer $p < t$ ise

$t \in (p, z_{\gamma_{\lambda+1}}) \subset [p, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ dir. $p = t$ olsun. Eğer $p \in D$ ise, D diskret olduğundan X 'in $U \cap D = \{p\}$ olacak biçimde konveks ve açık bir U altkümesi vardır. U konveks, $p = \sup\{z_{\gamma_i} : i < \lambda\}$ ve $U \cap D = \{p\}$ olduğundan $p \in U \cap (\leftarrow, z_{\gamma_{\lambda+1}}) \subseteq [p, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ olmak zorundadır. Eğer $p \notin D$ ise, D kapalı olduğundan, $p \in V \subseteq X \setminus D$ olacak biçimde konveks ve açık bir V altkümesi vardır ve $p \in V \cap (\leftarrow, z_{\gamma_{\lambda+1}}) \subseteq [p, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ sağlanır. Böylece $[p, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ kümesi açıktır ve $y \in [p, z_{\gamma_{\lambda+1}}) \subseteq \bigcap_{i < \lambda} (z_{\gamma_i}, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ olduğundan $\bigcap_{i < \lambda} (z_{\gamma_i}, z_{\gamma_{\lambda+1}})$ kümesinin açık olduğu da görülmüştür. Şimdi;

$$\mathcal{V}_1 = \{(z_{\gamma_p}, z_{\gamma_{p+2}}) : p \in \kappa \text{ ve } p \text{ çift} \}$$

$$\mathcal{V}_2 = \{(z_{\gamma_p}, z_{\gamma_{p+2}}) : p \in \kappa \text{ ve } p \text{ tek} \}$$

$$\mathcal{V}_3 = \left\{ \bigcap_{i < \lambda} (z_{\gamma_i}, z_{\gamma_{\lambda+1}}) : \lambda \in \kappa \cap \text{LIM} \right\}$$

aileleri tanımlansın. $\{z_{\gamma_p} : p < \kappa\} \subseteq \text{st}(x_m, \mathcal{G})$ ve $\mathcal{G}$ konveks olduğundan yukarıdaki aileler $\mathcal{G}$ 'nin kısmi incelmisleridir. Ayrıca bu ailelerin X 'in ayrık ve açık altkümelerinden oluştuğu açıktır. $z_{\gamma_0} \in \text{st}(x_m, \mathcal{G})$ ve $\mathcal{G}$ konveks olduğundan $[x_m, z_{\gamma_0}] \subseteq O$ olacak biçimde bir $O \in \mathcal{G}$ vardır. Öte yandan $[x, x_m]$ aralığı $\mathcal{G}_0$ ile örtüldüğünden $\text{st}^\infty(x, \mathcal{G}) \cap [x, \rightarrow)$ kümesi $\mathcal{G}$ 'nin σ -ayrık açık bir kısmi incelmisi ile örtülmüş olur. Böylece her $x \in \hat{X}$ için $\text{st}^\infty(x, \mathcal{G})$ altuzayında $\mathcal{G}$ için (*) özelliğinin sağlandığı görüldüğünden X uzayı (*)'ı sağlar. ■

5. NOKTA $\leq \kappa$ TABAN, κ -NOKTA-DÜZGÜN TABAN VE GENİŞLEME

Bu bölümün ilk kısmında nokta-sayılabılır taban problemi olarak adlandırılan problemin çözümüne yaklaşmak amacıyla P.J.Moody, G.M.Reed, A.W.Roscoe ve P.J.Collins tarafından yapılan, noktalanmış açık örtüye dayalı, çalışmaların[4] kardinal genişlemeleri elde edilmiştir.

X topolojik uzayının (F) -koşulunu sağlayan $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemindeki her bir $\mathcal{W}(x)$ ailesi sayılabilir ise $\mathcal{W}$ sistemi (G) -koşulunu sağlıyor denir. Eğer X uzayının nokta-sayılabılır bir $\mathcal{B}$ tabanı varsa o zaman X 'in her x elemanı için $\mathcal{W}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ olmak üzere $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemi açık (G) -koşulunu sağlar. Açık (G) -koşulunu sağlayan bir sisteme sahip olan topolojik uzayların nokta-sayılabılır bir tabanının olduğu, genel bir kanı olmakla birlikte, halen çözülememiş bir problemdir. Bu problemin sayılabilirlik yerine herhangi bir sonsuz kardinal için ele alınabileceği açıktır. Bu amaçla κ sonsuz bir kardinal sayı olmak üzere (G_κ) -koşulu tanımlanmış ve bu problemle ilgili olan [4] deki teoremlerin herhangi bir κ kardinali için olan genişlemeleri elde edilmiştir.

İkinci kısımda ise κ -nokta-düzgün taban tanımı verilmiş ve κ -nokta-düzgün tabana sahip ve $P_{<\kappa}$ -özellikliğini sağlayan her topolojik uzayın κ -development'e sahip olduğu görülmüştür. Bu kısımda ayrıca genişleme ile ilgili bir teoreme de yer verilmiştir.

Bu bölümde κ ile sonsuz bir kardinal sayı gösterilecektir.

5.1. Nokta $\leq \kappa$ Taban Problemi

Tanım 5.1.1

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemi (F) -koşulunu sağlasın. Eğer her $x \in X$ için $|\mathcal{W}(x)| \leq \kappa$ ise $\mathcal{W}$ sistemi (G_κ) -koşulunu sağlıyor denir. Eğer $\kappa = \omega$ ise $\mathcal{W}$ sistemi (G) -koşulunu sağlıyor denir.

Tanım 5.1.2

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\wp \subseteq X \times \mathcal{T}$ olmak üzere eğer $\{ U : \exists x \in X (x, U) \in \wp \}$ ailesi X için örtü oluyorsa $\wp$ ye X uzayının noktalanmış açık örtüsü denir. Eğer her $y \in X$ için $|\{(x, U) \in \wp : y \in U\}| \leq \kappa$ ise $\wp$ ye nokta $\leq \kappa$ ve eğer her $y \in X$ için $y \in \overline{\{x : (x, U) \in \wp, y \in U\}}$ ise $\wp$ ye yoğun denir.

Aşağıdaki lemma nokta $\leq \kappa$ taban ile noktalanmış açık örtü ve (G_κ) -koşulu arasındaki ilişkiyi verecektir.

Lemma 5.1.3

X bir topolojik uzay olsun.

- i.) X in nokta $\leq \kappa$ tabanı varsa X in yoğun ve nokta $\leq \kappa$ olan bir noktalanmış açık örtüsü vardır.
- ii.) X 'in açık (G_κ) -koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi var ve X in yoğun ve nokta $\leq \kappa$ olan bir noktalanmış açık örtüsü varsa X in bir nokta $\leq \kappa$ tabanı vardır.

İspat

i.) $\mathcal{B}$ X uzayının bir nokta $\leq \kappa$ tabanı olsun ve $\mathcal{B}$ nin boş olmayan her U elemanından bir x_u elemanı seçerek $\wp = \{(x_u, U) : U \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}\}$ kümesini oluşturalım. $\mathcal{B}$ taban olduğundan $\wp$ noktalanmış açık örtüdür. Ayrıca $\mathcal{B}$ nokta $\leq \kappa$ olduğundan her $y \in X$ için $|\{U \in \mathcal{B} : y \in U\}| \leq \kappa$ olup her $y \in X$ için $|\{(x_u, U) \in \wp : y \in U\}| \leq \kappa$ dır ve böylece $\wp$ nokta $\leq \kappa$ dır. $\wp$ nin yoğun olduğu da kolayca görülebilir.

ii.) $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemi açık (G_κ) -koşulunu sağlasın ve $\wp$ X ' in yoğun ve nokta $\leq \kappa$ olan noktalanmış açık örtüsü olsun.

$\mathcal{B} = \{U \cap W : \exists x \in X (x, U) \in \wp \text{ ve } W \in \mathcal{W}(x)\}$ olsun. $\wp$ nokta $\leq \kappa$ olduğundan her $y \in X$ için $|\{(x, U) \in \wp : y \in U\}| \leq \kappa$ ve her $x \in X$ için $|\mathcal{W}(x)| \leq \kappa$ olduğundan

$\mathcal{B}$ ailesi $\text{nokta} \leq \kappa$ dır. O halde $\mathcal{B}$ nin taban olduğunu görelim.

$x \in X$ ve O X 'in açık bir altkütmesi olmak üzere $x \in O$ olsun. $\mathcal{W}$ sistemi (G_κ) -koşulunu sağladığından $x \in V(x, O)$ olacak biçimde bir $V(x, O)$ açığı vardır. $\emptyset$ yoğun olduğundan $x \in \overline{\{y : (y, U) \in \emptyset, x \in U\}}$ dır. O halde $(y, U) \in \emptyset$, $x \in U$ ve $y \in V(x, O)$ olacak biçimde bir $y \in X$ vardır. $y \in V(x, O)$ olduğundan $x \in W \subseteq O$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{W}(y)$ vardır. Böylece $x \in W \cap U \subseteq O$ olup $\mathcal{B}$ X için bir tabandır. ■

Şimdi bir sonraki teoremden kullanmak üzere, ispatı kolayca görülebilen aşağıdaki lemmayı ispatsız olarak verelim.

Lemma 5.1.4

X topolojik uzayının (G_κ) -koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi varsa X uzayının her açık örtüsünün $\text{nokta} \leq \kappa$ açık incelməsi vardır. ■

Tanım 5.1.5

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere eğer öyle bir $G : \kappa \times X \longrightarrow \tau$ fonksiyonu var ve

- i) Her $x \in X$ ve her $\alpha < \kappa$ için $x \in G(\alpha, x)$
- ii) $y \in X$ ve $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X$ olmak üzere eğer her $\alpha < \kappa$ için $y \in G(\alpha, x_\alpha)$ iken $y \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}}$

koşulları sağlanıyorsa X uzayına zayıf κ -yarı-katmanlanabilir topolojik uzay denir.

Teorem 5.1.6

X topolojik uzayı zayıf κ -yarı-katmanlanabilir ve X 'in (G_κ) -koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi varsa X in yoğun ve $\text{nokta} \leq \kappa$ olan bir noktalanmış açık örtüsü vardır.

İspat

G fonksiyonu yukarıda tanımlandığı gibi olsun. Her $\alpha < \kappa$ için $\mathcal{G}_\alpha = \{G(\alpha, x) : x \in X\}$ ailesi X uzayı için bir açık örtüdür. O halde yukarıdaki lemmadan her $\alpha < \kappa$ için $\mathcal{G}_\alpha$ açık örtüsünün bir $\mathcal{V}_\alpha$ nokta $\leq \kappa$ açık incelməsi vardır. $\alpha < \kappa$ olsun. Her $V \in \mathcal{V}_\alpha$ için $V \subseteq G(\alpha, x_\alpha)$ olacak biçimde bir $x_\alpha \in X$ seçelim. $\wp = \{ (x_\alpha, V) : V \in \mathcal{V}_\alpha \text{ ve } \alpha < \kappa \}$ olsun. Her $\alpha < \kappa$ için $\mathcal{V}_\alpha$ açık örtü olduğundan $\wp$ noktalanmış açık örtüdür ve her $\alpha < \kappa$ için $\mathcal{V}_\alpha$ nokta $\leq \kappa$ olduğundan $\wp$ nokta $\leq \kappa$ dır. O halde $\wp$ nin yoğun olduğunu görelim. $y \in X$ olsun. Her $\alpha < \kappa$ için $\mathcal{V}_\alpha$ örtü olduğundan her $\alpha < \kappa$ için $y \in V_\alpha$ olacak biçimde bir $V_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$ vardır. Her $\alpha < \kappa$ için $x_{V_\alpha} = x_\alpha$ denilirse her $\alpha < \kappa$ için $y \in G(\alpha, x_\alpha)$ olur ve $y \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}}$ dir. $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \{x_\alpha : (x_\alpha, V_\alpha) \in \wp, y \in V_\alpha\}$ olduğundan $\wp$ yoğundur. ■

Şu ana kadarki $\wp$ noktalanmış açık örtülerinde $(x, U) \in \wp$ iken $x \in U$ olma zorunluluğu yoktur. Ancak uzayın nokta $\leq \kappa$ bazı varken uzayın (G_κ) -koşulundan daha kuvvetli bir koşulu sağlayan aşağıdaki tanımdaki gibi bir $\mathcal{W}$ sistemi vardır.

Tanım 5.1.7

X bir topolojik uzay olmak üzere her $x \in X$ için $|\mathcal{W}(x)| \leq \kappa$ olsun. Eğer her $x \in X$ ve x elemanını içeren her U açık alt kümesi için $x \in V(x, U) \subseteq U$ olacak biçimde bir $V(x, U)$ açığı var ve her $y \in V(x, U)$ için $x \in W \subseteq V(x, U)$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{W}(y)$ varsa $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemine (G'_κ) -koşulunu sağlıyor denir.

Teorem 5.1.8

(X, τ) topolojik uzayının (G'_κ) -koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemi varsa X uzayının yoğun ve nokta $\leq \kappa$ olan noktalanmış bir açık örtüsü vardır.

İspat

κ^+ üzerine tümevarımla her $\alpha \in \kappa^+$ için $X \times \mathcal{T}$ nun bir $\wp_\alpha$ altkümesini, X 'in bir X_α altkümesini ve her $x \in X$ için X 'in kapalı bir D_α^* altkümesini tanımlayacağız. $\alpha \in \kappa^+$ olsun ve her $\beta < \alpha$ için $\wp_\beta$, X_β ve her $x \in X$ için D_β^* kümeleri tanımlanmış olsun.

$$\mathcal{V}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \wp_\beta, \text{ her } x \in X \text{ için } D_\alpha^* = \overline{\{y : \exists (y, U) \in \mathcal{V}_\alpha, x \in U\}} \text{ ve } X_\alpha = \{x : x \in D_\alpha^*\}$$

olsun. $\mathcal{A}_\alpha = \{(x, V(x, X \setminus D_\alpha^*)) : x \notin X_\alpha\}$ olmak üzere $\mathcal{a}_\alpha = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\alpha : (x, U), (y, V) \in \mathcal{A} \text{ ise } x \notin V \text{ veya } y \notin U\}$ olsun. (Burada $U = V(x, X \setminus D_\alpha^*)$, $V = V(y, X \setminus D_\alpha^*)$ dir.). Zorn lemma'dan, $\mathcal{a}_\alpha$ nın bir $\wp_\alpha$ maksimal elemanı vardır. $\wp_\alpha$ $\mathcal{a}_\alpha$ nın maksimal elemanı olduğundan her $y \in X \setminus X_\alpha$ için $y \in V = V(x, X \setminus D_\alpha^*)$ olacak biçimde bir $(x, V) \in \wp_\alpha$ vardır.

$\wp = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} \wp_\alpha$ olsun. $\mathcal{V}_0 = \emptyset$ olduğundan $X_0 = \emptyset$ dir ve $\wp_0$ $\mathcal{a}_0$ 'ın maksimal elemanı olduğundan her $y \in X$ için $y \in V$ olacak biçimde bir $(x, V) \in \wp_0$ vardır. Böylece $\{V : \exists x (x, V) \in \wp_0\}$ ailesinin X 'i örttüğü görüldüğünden $\wp_0$ X için noktalanmış açık örtü olur ve dolayısıyla $\wp$ de X 'in noktalanmış açık örtüsüdür. Şimdi $\wp$ 'nin $\text{nokta} \leq \kappa$ olduğunu yani her $y \in X$ için $|\{(x, V) \in \wp : y \in V\}| \leq \kappa$ olduğunu görelim. $y \in X$ olmak üzere $\mathcal{B}_y = \{(x, V) \in \wp : y \in V\}$ olsun ve $f_y : \mathcal{B}_y \longrightarrow \mathcal{W}(y)$ fonksiyonu şöyle tanımlansın. $\wp = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} \wp_\alpha$ olduğundan, eğer $(x, V) \in \mathcal{B}_y$ ise $(x, V) \in \wp_\alpha$ ve $y \in V$ olacak

biçimde bir $\alpha < \kappa^+$ vardır. $y \in V = V(x, X \setminus D_\alpha^*)$ olduğundan $x \in W_V \subseteq V$ olacak biçimde bir $W_V \in \mathcal{W}(y)$ vardır. O halde f_y fonksiyonu $f_y((x, V)) = W_V$ biçiminde tanımlansın. Şimdi f_y fonksiyonunun bire-bir olduğunu görelim. $(x_1, V_1) \in \mathcal{B}_y$ ve $(x_2, V_2) \in \mathcal{B}_y$ olmak üzere $(x_1, V_1) \neq (x_2, V_2)$ olsun. (x_1, V_1) ve (x_2, V_2) $\mathcal{B}_y$ nin elemanları olduğundan $y \in V_1 \cap V_2$ olup $x_1 \in W_{V_1} \subseteq V_1$ ve $x_2 \in W_{V_2} \subseteq V_2$ dir. (x_1, V_1) ve (x_2, V_2) aynı bir $\wp_\alpha$ 'nın elemanları olabilirler veya $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $(x_1, V_1) \in \wp_\alpha$, $(x_2, V_2) \in \wp_\beta$ olabilir. Eğer (x_1, V_1) ve (x_2, V_2) aynı bir $\wp_\alpha$ 'nın

elemanları ise; $x_1 \notin V_2$ veya $x_2 \notin V_1$ dir. Böylece $W_{V_1} \neq W_{V_2}$ dir. Eğer $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $(x_1, V_1) \in \wp_\alpha$, $(x_2, V_2) \in \wp_\beta$ ise; $\alpha < \beta$ olsun. $W_{V_1} = W_{V_2}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $x_2 \in V_1$ ve $x_1 \in V_2$ dir. $V_2 = V(x_2, X \setminus D_\beta^{x_2})$ olduğundan $x_1 \in X \setminus D_\beta^{x_2}$ dir. Öte yandan $\alpha < \beta$ olduğundan $\wp_\alpha \subseteq \wp_\beta$ olup $(x_1, V_1) \in \wp_\beta$ dir. Aynı zamanda $x_2 \in V_1$ olduğundan $x_1 \in \{x : \exists (x, U) \in \wp_\beta \quad x_2 \in U\} \subseteq D_\beta^{x_2}$ olur ki bu çelişkidir. $\beta < \alpha$ olması durumu da benzer biçimde gösterilebileceğinden $W_{V_1} \neq W_{V_2}$ olup $f_y((x_1, V_1)) \neq f_y((x_2, V_2))$ dir. Böylece her $y \in X$ için f_y fonksiyonu bire-bir dir. Aynı zamanda $|\mathcal{W}(y)| \leq \kappa$ olduğundan $|\mathcal{B}_y| \leq \kappa$ olup $\wp$ nokta $\leq \kappa$ dir.

$\wp$ 'nin yoğun olduğunu görmek için $X = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} X_\alpha$ olduğunu görmek yeterlidir. $y \in X$ olmak üzere her $\alpha \in \kappa^+$ için $y \notin X_\alpha$ olsun. O zaman her $\alpha \in \kappa^+$ için $y \in T_\alpha$ olacak biçimde bir $(x_\alpha, T_\alpha) \in \wp_\alpha$ vardır. Ayrıca $\alpha \neq \beta$ biçimindeki her $\alpha, \beta \in \kappa^+$ için $(x_\alpha, T_\alpha) \neq (x_\beta, T_\beta)$ dir. Şöyleki; $\alpha, \beta \in \kappa^+$ olmak üzere $\alpha < \beta$ ve $(x_\alpha, T_\alpha) = (x_\beta, T_\beta)$ olsun. $(x_\alpha, T_\alpha) \in \wp_\alpha$ ve $\alpha < \beta$ olduğundan $\wp_\alpha \subseteq \wp_\beta$ olup $(x_\alpha, T_\alpha) \in \wp_\beta$ dir. Aynı zamanda $x_\alpha \in T_\alpha$ olduğundan $x_\alpha \in D_\beta^{x_\alpha}$ olur. Öte yandan $x_\alpha = x_\beta$ ve $x_\beta \in T_\beta = V(x_\beta, X \setminus D_\beta^{x_\beta}) \subseteq X \setminus D_\beta^{x_\alpha}$ olduğundan $x_\alpha \notin D_\beta^{x_\alpha} = D_\beta^{x_\beta}$ olur ki bu çelişkidir. $\beta < \alpha$ olması durumu da benzer biçimde gösterilebilir. Böylece $\alpha \neq \beta$ biçimindeki her $\alpha, \beta \in \kappa^+$ için $(x_\alpha, T_\alpha) \neq (x_\beta, T_\beta)$ olur ancak bu $|\{(x, V) \in \wp : y \in V\}| \leq \kappa$ olması ile çelişir. O halde $X = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} X_\alpha$ olup $\wp$ yoğundur. ■

[13]'te açık (G)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip olan ayrılabilir her topolojik uzayın sayılabilir bir tabana sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca [4]'te yoğunluğu $\leq \omega_1$ olan birinci sayılabilir her topolojik uzayın yoğun, nokta-sayılabilir bir noktalanmış açık örtüye sahip olduğu gösterilmiştir. Aşağıdaki teoremden bunun, sayılabilirlik yerine herhangi bir κ sonsuz kardinali için uyarlaması verilmiştir. Bu teorem ile, yoğunluğu $\leq \kappa^+$ olan ve açık (G_κ) -koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip olan her topolojik uzayın nokta $\leq \kappa$ tabanının varlığı garanti edilmiş olur.

X topolojik uzayının karakteri $\chi(X)$ ve yoğunluğu $d(X)$ ile gösterilmek üzere, aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.1.9

X bir topolojik uzay olmak üzere eğer $\chi(X) \leq \kappa$ ve $d(X) \leq \kappa^+$ ise X uzayının yoğun ve noktasal κ olan noktalanmış bir açık örtüsü vardır.

İspat

$D = \{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ X 'in yoğun altkümesi olsun. Her $\alpha < \kappa^+$ için $K_\alpha = \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}$ olmak üzere $\wp = \{(x_\alpha, X \setminus K_\alpha) : \alpha < \kappa^+\}$ olsun. $K_0 = \emptyset$ olduğundan $\wp$ noktalanmış açık örtüdür. Şimdi $\wp$ 'nin noktasal κ ve yoğun olduğunu görelim. $y \in X$ 'in herhangi bir elemanı olsun. $\chi(y, X) \leq \kappa$ olduğundan y 'nin $\sigma(y) = \{B(i, y) : i \in \kappa\}$ biçiminde bir komşuluklar tabanı vardır. D yoğun olduğundan her $i \in \kappa$ için $x_{\alpha_i} \in B(i, y)$ olacak biçimde bir $\alpha_i \in \kappa^+$ vardır. $\sup\{\alpha_i : i \in \kappa\} = \gamma$ denilirse, κ^+ regüler olduğundan $\gamma < \kappa^+$ dir ve $y \in K_\gamma$ olur. Aynı zamanda her $\beta > \gamma$ için $y \in K_\beta$ olduğundan $\wp$ noktasal κ dir. $\alpha_0 = \min\{\alpha \in \kappa^+ : y \in K_\alpha\}$ denilirse $y \in \overline{\{x_\alpha : y \notin K_\alpha, \alpha < \alpha_0\}}$ dir ve böylece $\wp$ 'nin yoğun olduğu da görülmüş olur. ■

Aşağıdaki lemma ve teorem yardımıyla, açık (G_κ) -koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemine sahip her X topolojik uzayının noktasal κ tabana sahip olan yoğun bir altkümesinin var olduğu görülecektir.

Lemma 5.1.10

(X, τ) bir topolojik uzay ve X 'in (G_κ) -koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi var olsun. $Y \subseteq X$ ve her $y \in Y$ için $y \in T_y$ olacak biçimde X 'in bir T_y açık altkümesi var olsun. Bu durumda $Y \times \tau$ nun

- i.) Her $x \in X$ için $|\{(y, U) \in \wp : x \in U\}| \leq \kappa$
- ii.) $Y \subseteq \bigcup \{U : \exists y \in Y (y, U) \in \wp\}$

iii.) $(y, U) \in \wp \Rightarrow y \in U \subseteq T_y$

koşullarını sağlayan bir $\wp$ alt kümesi vardır.

İspat

λ bir kardinal sayı olmak üzere Y kümesinin indekslenmiş biçimi $Y = \{y_\alpha : \alpha < \lambda\}$ olsun. İndüksiyon ile her $\alpha < \lambda$ için X 'in O_α açık altkümesi şöyle tanımlansın. $\alpha < \lambda$ olmak üzere her $\beta < \alpha$ için O_β tanımlanmış olsun ve

$$O_\alpha = \begin{cases} \emptyset & ; y_\alpha \in \bigcup_{\beta < \alpha} O_\beta \\ \bigcup \{V(x, T_{y_\alpha}) : x \in T_{y_\alpha} - \bigcup_{\beta < \alpha} O_\beta\} & ; y_\alpha \notin \bigcup_{\beta < \alpha} O_\beta \end{cases}$$

olsun. $\wp = \{(y_\alpha, O_\alpha) : O_\alpha \neq \emptyset\} \subseteq Y \times \mathcal{T}$ aranılan kümedir. Şöyleki; $x \in X$ olsun.

$I = \{\alpha \in \lambda : x \in O_\alpha\}$ olmak üzere $f : I \longrightarrow \mathcal{W}(x)$ fonksiyonu şöyle tanımlansın. $\alpha \in I$

olsun. Bu durumda $x \in O_\alpha$ olup $x \in V(p_\alpha, T_{y_\alpha})$ olacak biçimde bir $p_\alpha \in T_{y_\alpha} \setminus \bigcup_{\gamma < \alpha} O_\gamma$

elemanı vardır. $x \in V(p_\alpha, T_{y_\alpha})$ olduğundan $p_\alpha \in W_\alpha \subseteq T_{y_\alpha}$ olacak biçimde bir

$W_\alpha \in \mathcal{W}(x)$ vardır. O halde f fonksiyonu, $\alpha \in I$ olmak üzere, $f(\alpha) = W_\alpha$ biçiminde

tanımlansın. f bire-bir olduğundan $|I| = |\{\alpha \in \lambda : x \in O_\alpha\}| \leq |\mathcal{W}(x)| \leq \kappa$ dır ve

böylece her $x \in X$ için $|\{(y_\alpha, O_\alpha) \in \wp : x \in O_\alpha\}| \leq \kappa$ sağlanır. $\wp$ kümesinin ii-iii koşullarını sağladığı da kolayca görülebilir. ■

Teorem 5.1.11

Eğer $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının (G_κ) -koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi varsa X 'in

öyle bir $\wp$ noktası $\leq \kappa$, noktalanmış açık örtüsü vardır ki $\{x \in X : \exists U (x, U) \in \wp\}$

kümesi X içinde yoğundur ve $(x, U) \in \wp$ iken $x \in U$ sağlanır.

İspat

κ^+ üzerine indüksiyon ile her $\alpha < \kappa^+$ için $X \times \mathcal{T}$ nun $\wp_\alpha$ altkümesi ve X 'in bir X_α altkümesi şöyle inşa edilsin. $\alpha < \kappa^+$ olsun ve her $\beta < \alpha$ için $\wp_\beta$ ve X_β tanımlanmış olsun. $X_0 = \emptyset$ olmak üzere $X_\alpha = \{x : \exists U (x, U) \in \wp_\beta, \beta < \alpha\}$ olsun. $Y = X \setminus \overline{X}_\alpha$ ve her $y \in Y$ için $T_y = V(y, Y)$ denilirse yukarıdaki lemmadan $Y \times \mathcal{T}$ nun

- i.) Her $x \in X$ için $|\{(y, U) \in \wp_\alpha : x \in U\}| \leq \kappa$
- ii.) $X \setminus \overline{X}_\alpha \subseteq \bigcup \{U : \exists y \in X \setminus \overline{X}_\alpha (y, U) \in \wp_\alpha\}$
- iii.) $(y, U) \in \wp_\alpha \Rightarrow y \in U \subseteq V(y, X \setminus \overline{X}_\alpha)$

koşullarını sağlayan bir $\wp_\alpha$ altkümesi vardır. $\wp = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} \wp_\alpha$ olsun. $X_0 = \emptyset$ olduğundan

$\wp_0$ $X \times \mathcal{T}$ nun (ii) koşulunu sağlayan bir altkümesi olup $\wp_0$ X için noktalanmış açık örtüdür. O halde $\wp$ de noktalanmış açık örtüdür. Şimdi $\wp$ 'nin noktasal κ olduğunu görelim. $I = \{\alpha < \kappa^+ : \exists (x, U) \in \wp_\alpha \text{ } y \in U\}$ olsun ve $f : I \longrightarrow \mathcal{W}(y)$ fonksiyonu şöyle tanımlansın. $\alpha \in I$ olsun. Bu durumda $y \in U_\alpha$ olacak biçimde bir $(x_\alpha, U_\alpha) \in \wp_\alpha$ vardır. (iii)'den $x_\alpha \in U_\alpha \subseteq V(x_\alpha, X \setminus \overline{X}_\alpha)$ olup $y \in V(x_\alpha, X \setminus \overline{X}_\alpha)$ olur. O halde $x_\alpha \in W_\alpha \subseteq X \setminus \overline{X}_\alpha$ olacak biçimde bir $W_\alpha \in \mathcal{W}(y)$ seçilebilir. $f(\alpha) = W_\alpha$ olarak tanımlansın. $\alpha, \beta \in I$ ve $\alpha < \beta$ olmak üzere $W_\alpha = W_\beta$ olsun. Bu durumda $x_\alpha \in W_\beta$ olup $x_\alpha \in X \setminus \overline{X}_\beta$ dır. Ancak $\alpha < \beta$ ve $(x_\alpha, U_\alpha) \in \wp_\alpha$ olduğundan $x_\alpha \in X_\beta$ olur ki bu çelişkidir. O halde $W_\alpha \neq W_\beta$ olmak zorundadır ve böylece f bire-bir fonksiyon olup $|I| \leq \kappa$ dır. Aynı zamanda (i)'den, her $\alpha < \kappa^+$ için $A_\alpha = \{(x, U) \in \wp_\alpha : y \in U\}$ olmak üzere, $|A_\alpha| \leq \kappa$ dır. $\{(x, U) \in \wp : y \in U\} = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ olduğundan $|\{(x, U) \in \wp : y \in U\}| \leq \kappa$ dır ve böylece $\wp$ noktasal κ dır.

(iii)'den $(x, U) \in \wp$ iken $x \in U$ sağlanır.

Şimdide $\{x \in X : \exists U (x, U) \in \wp\}$ kümesinin X içinde yoğun olduğunu görelim.

$X = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} \bar{X}_\alpha$ olduğunu görmek yeterlidir. $y \in X$ olmak üzere her $\alpha < \kappa^+$ için $y \notin \bar{X}_\alpha$ olsun. (ii)'den her $\alpha < \kappa^+$ için $y \in U_\alpha$ olacak biçimde $(x_\alpha, U_\alpha) \in \wp_\alpha$ vardır ve $\alpha \neq \beta$ için $(x_\alpha, U_\alpha) \neq (x_\beta, U_\beta)$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece $|\{(x_\alpha, U_\alpha) \in \wp : y \in U_\alpha\}| = \kappa^+$ olur ki bu $\wp$ 'nin $\text{nokta} \leq \kappa$ olması ile çelişir. O halde $X = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} \bar{X}_\alpha$ olup $\{x \in X : \exists U (x, U) \in \wp\}$ kümesi X içinde yoğundur. ■

Yukarıdaki teorem ve Lemma 5.1.3'den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.12

X topolojik uzayı açık (G_κ) -koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemine sahipse X 'in $\text{nokta} \leq \kappa$ tabanı olan yoğun bir altkümesi vardır. ■

Aşağıdaki teorem, açık (G_κ) -koşulunu sağlayan bir sisteme sahip olup da $\text{nokta} \leq \kappa$ tabanı olmayan topolojik uzay örneğinin, herbiri $\text{nokta} \leq \kappa$ tabana sahip olan uzayların yerel $\leq \kappa$ birleşiminden inşa edilemeyeceği sonucunu verecektir.

Teorem 5.1.13

X topolojik uzayı (G_κ) -koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemine sahip olsun. Eğer X 'in öyle bir yerel $\leq \kappa$ $\{Y_i : i \in I\}$ örtüsü var ve her $i \in I$ için Y_i altuzayının yoğun, $\text{nokta} \leq \kappa$ noktalanmış açık örtüsü varsa X uzayının da yoğun, $\text{nokta} \leq \kappa$ noktalanmış açık örtüsü vardır.

İspat

$\{Y_i : i \in I\}$ ailesi yerel $\leq \kappa$ olduğundan her $x \in X$ için x 'in $|\{i \in I : T_x \cap Y_i \neq \emptyset\}| \leq \kappa$ olacak biçimde bir T_x komşuluğu vardır. Her $i \in I$ için $\wp_i$ Y_i 'nin yoğun, $\text{nokta} \leq \kappa$ noktalanmış açık örtüsü olsun. Sabit bir $i \in I$ alalım. Her $(y, U) \in \wp_i$ için U kümesi Y_i

içinde açık olduğundan, X 'in, $\tilde{U} \cap Y_i = U$ olacak biçimde bir $\tilde{U}$ açık altkümesi vardır. $S_i(y, U) = \bigcup \{V(x, \tilde{U} \cap T_x) : x \in U\}$ olsun. $S_i(y, U)$ kümesi X içinde açıktır ve $S_i(y, U) \cap Y_i = U$ dur. $\tilde{\wp}_i = \{(y, S_i(y, U)) : (y, U) \in \wp_i\}$ olmak üzere $\wp = \bigcup_{i \in I} \tilde{\wp}_i$ olsun.

$X = \bigcup \{Y_i : i \in I\}$ olduğundan $\wp$ noktalanmış açık örtüdür. $\wp$ 'nin $\text{nokta} \leq \kappa$ olduğunu görmek için öncelikle her $x \in X$ ve her $i \in I$ için $|\{(y, O) \in \tilde{\wp}_i : x \in O\}| \leq \kappa$ olduğunu görelim. $x \in X$ ve $i \in I$ olmak üzere $|\{(y, O) \in \tilde{\wp}_i : x \in O\}| > \kappa$ olsun. O zaman $\wp_i$ 'nin $|\mathcal{A}| = \kappa^+$ olacak biçimde öyle bir $\mathcal{A}$ altkümesi vardır ki her $(y, U) \in \mathcal{A}$ için $x \in S_i(y, U)$ olur. $S_i(y, U)$ kümesinin tanımından, her $(y, U) \in \mathcal{A}$ için $x \in V(z_{(y, U)}, \tilde{U} \cap T_{z_{(y, U)}})$ olacak biçimde $z_{(y, U)} \in U$ vardır. (G_κ) -koşulundan, her $(y, U) \in \mathcal{A}$ için $z_{(y, U)} \in W_{(y, U)} \subseteq \tilde{U} \cap T_{z_{(y, U)}}$ biçiminde $W_{(y, U)} \in \mathcal{W}(x)$ vardır. $|\mathcal{A}| = \kappa^+$, κ^+ regüler ve $|\mathcal{W}(x)| \leq \kappa$ olduğundan $\mathcal{A}$ 'nın $|\tilde{\mathcal{A}}| = \kappa^+$ olacak biçimde öyle bir $\tilde{\mathcal{A}}$ altailesi ve $\mathcal{W}(x)$ 'in öyle bir $W_{(y_0, U_0)}$ elemanı vardır ki her $(y, U) \in \tilde{\mathcal{A}}$ için $W_{(y, U)} = W_{(y_0, U_0)}$ olur. Böylece her $(y, U) \in \tilde{\mathcal{A}}$ için $z_{(y_0, U_0)} \in W_{(y, U)} \subseteq \tilde{U}$ olduğundan her $(y, U) \in \tilde{\mathcal{A}}$ için $z_{(y_0, U_0)} \in \tilde{U}$ dır. Aynı zamanda $z_{(y_0, U_0)} \in U_0 \subseteq Y_i$ olduğundan her $(y, U) \in \tilde{\mathcal{A}}$ için $z_{(y_0, U_0)} \in \tilde{U} \cap Y_i = U$ olur ancak bu $\wp_i$ 'nin $\text{nokta} \leq \kappa$ olması ile çelişir. O halde her $x \in X$ ve her $i \in I$ için $|\{(y, O) \in \tilde{\wp}_i : x \in O\}| \leq \kappa$ olmak zorundadır. Şimdi $\wp$ 'nin $\text{nokta} \leq \kappa$ olmadığını varsayalım. O zaman $|\{(y, O) \in \wp : x_0 \in O\}| > \kappa$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ vardır. Her $i \in I$ için $|\{(y, O) \in \tilde{\wp}_i : x_0 \in O\}| \leq \kappa$ ve $\wp = \bigcup_{i \in I} \tilde{\wp}_i$ olduğundan I 'nin $|J| = \kappa^+$

biçiminde öyle bir J altkümesi vardır ki her $i \in J$ için $x_0 \in O_i$ olacak biçimde bir $(y_i, O_i) \in \tilde{\wp}_i$ vardır. $\tilde{\wp}_i$ 'nin tanımından her $i \in J$ için $(y_i, U_i) \in \wp_i$ olmak üzere $O_i = S_i(y_i, U_i)$ biçimindedir. Böylece her $i \in J$ için $x_0 \in S_i(y_i, U_i)$ olup $x_0 \in V(z_i, \tilde{U}_i \cap T_{z_i})$ olacak biçimde $z_i \in U_i$ vardır ve (G_κ) -koşulundan, her $i \in J$ için $z_i \in W_i \subseteq \tilde{U}_i \cap T_{z_i}$ biçiminde $W_i \in \mathcal{W}(x_0)$ vardır. $|\mathcal{W}(x_0)| \leq \kappa$ olduğundan, $\mathcal{W}(x_0)$ 'in öyle bir W_{i_0} elemanı ve J 'nin $|L| = \kappa^+$ olacak biçimde öyle bir L altkümesi

vardır ki her $i \in L$ için $W_i = W_{i_0}$ olup her $i \in L$ için $z_i \in W_i = W_{i_0} \subseteq \tilde{U}_{i_0} \cap T_{z_{i_0}} \subseteq T_{z_{i_0}}$ dir. Aynı zamanda her $i \in L$ için $z_i \in Y_i$ olduğundan $z_i \in T_{z_{i_0}} \cap Y_i$ dir ve böylece her $i \in L$ için $T_{z_{i_0}} \cap Y_i \neq \emptyset$ olur ki bu $\{Y_i : i \in I\}$ ailesinin yerel $\leq \kappa$ olması ile çelişir. O halde $\wp$ nokta $\leq \kappa$ olmak zorundadır. $X = \bigcup \{Y_i : i \in I\}$ ve her $i \in I$ için $\wp_i$ Y_i içinde yoğun olduğundan $\wp$ 'nin yoğunluğunu görmek kolaydır. ■

Yukarıdaki teoremden ve Lemma 5.1.3 (ii)'den, buraya kadar yapılanları toparlayan, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1.14

X topolojik uzayı açık (G_κ) -koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemine sahip olsun. Eğer aşağıdakilerden herhangi biri sağlanıyorsa X uzayının nokta $\leq \kappa$ tabanı vardır.

- 1-) X zayıf κ -yarı katmanlanabilir uzaydır,
- 2-) X (G'_κ) -koşulunu sağlayan bir sisteme sahiptir,
- 3-) $d(X) \leq \kappa^+$,
- 4-) X , herbiri nokta $\leq \kappa$ tabana sahip olan altuzaylarının yerel $\leq \kappa$ birleşimidir. ■

Aşağıdaki teorem, açık (G_κ) -koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ sistemine sahip olupta nokta $\leq \kappa$ tabanı olmayan uzaylara örnek ararken kullanışlı olabilir.

Teorem 5.1.15

Eğer X topolojik uzayının açık (G_κ) -koşulunu sağlayan bir sistemi var fakat nokta $\leq \kappa$ tabanı yok ise o zaman X 'in boş olmayan öyle bir $\tilde{X}$ altuzayı vardır ki $\tilde{X}$ 'nin boş olmayan hiçbir açık altkümesinin nokta $\leq \kappa$ tabanı yoktur.

İspat

$\mathfrak{G} = \{O \subset X : O \text{ } X \text{ içinde açık ve } O \text{'nun noktas } \kappa \text{ tabanı var}\}$ olmak üzere $Y = \bigcup \mathfrak{G}$ olsun. X uzayı açık (G_κ) -koşulunu sağlayan sisteme sahip olduğundan her alt uzayı da açık (G_κ) -koşulunu sağlayan bir sisteme sahiptir. O halde Y 'nin açık (G_κ) -koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W}$ sistemi vardır ve böylece Lemma 5.1.4'den Y 'nin her açık örtüsünün noktas κ açık incelmışi bulunabilir. $\mathfrak{G}$ Y için açık örtü olduğundan $\mathfrak{G}$ 'nun noktas κ açık $\mathcal{V}$ incelmışi vardır. $\mathcal{V}$ nin her V elemanı için $\mathfrak{G}$ 'nun V 'yi içeren bir elemanı var olduğundan ve $\mathfrak{G}$ 'nun her elemanı noktas κ tabana sahip olduğundan her $V \in \mathcal{V}$ için V 'nin de bir $\mathcal{B}(V)$ noktas κ tabanı vardır. O halde $\mathcal{B} = \{B : B \in \mathcal{B}(V), V \in \mathcal{V}\}$ ailesi Y için noktas κ taban olur.

$X \setminus Y = \tilde{X}$ olsun. Y 'nin noktas κ tabanı var olduğundan eğer $\tilde{X}$ 'nin de noktas κ tabanı varsa bu durumda X noktas κ tabana sahip olacağından, $\tilde{X}$ 'nin noktas κ tabanı yoktur. Şimdi $\tilde{X}$ 'nin boştan farklı her açık altkümesinin de noktas κ tabana sahip olmadığını görelim. U $\tilde{X}$ 'nin açık altkümesi olmak üzere U 'nun noktas κ tabanı var olsun. Y açık olduğundan $\tilde{X}$ kapalı olup $\tilde{X} \setminus U$ kümesi X içinde kapalıdır. Böylece $X \setminus (\tilde{X} \setminus U) = Y \cup U$ kümesi X içinde açıktır. Aynı zamanda Y ve U kümelerinin her ikisi de noktas κ tabana sahip olduğundan $Y \cup U$ kümesi de noktas κ tabana sahiptir. O halde $Y \cup U \in \mathfrak{G}$ dur. $Y = \bigcup \mathfrak{G}$ olduğundan $Y \cup U \subseteq Y$ olup $U \subseteq Y$ dir. Öte yandan $U \subseteq \tilde{X} = X \setminus Y$ idi. O halde $U = \emptyset$ olmak zorundadır. ■

5.2. κ -Nokta-Düzgün Taban ve Bir Genişleme Özelliği

Bu kısımda, Alexandroff(1960) tarafından tanımlanan ve metrikleştirme teoremlerinde kullanılan nokta-düzgün taban tanımının kardinal genişlemesi olan κ -nokta-düzgün taban tanımı verilerek $P_{<\kappa}$ -özellğini sağlayan ve κ -nokta-düzgün tabana sahip olan topolojik uzayların κ -development'e sahip olduğu görülecektir. Ayrıca bir genişleme özelliğine de yer verilecektir.

Tanım 5.2.1

κ bir kardinal sayı ve $\mathcal{B}$ X topolojik uzayı için bir taban olmak üzere eğer X 'in her x elemanı ve x 'i içeren her U açık altkümesi için $|\{B \in \mathcal{B} : x \in B \text{ ve } B \cap X \setminus U \neq \emptyset\}| < \kappa$ oluyorsa $\mathcal{B}$ ailesine X 'in κ -nokta-düzgün tabanı denir.

Tanım 5.2.2

X bir topolojik uzay olmak üzere eğer X 'in açık örtülerinin, her $x \in X$ için $\{st(x, \mathcal{V}_i) : i < \kappa\}$ ailesi x 'in komşuluklar tabanı olacak biçimde, bir $\{\mathcal{V}_i : i < \kappa\}$ κ -dizisi varsa X uzayına κ -developable uzay ve $\{\mathcal{V}_i : i < \kappa\}$ dizisine de X 'in κ -development'i denir.

Lemma 5.2.3

X bir topolojik uzay, $\mathcal{B}$ X 'in κ -nokta-düzgün tabanı ve " $<$ " $\mathcal{B}$ ailesi üzerinde herhangi bir iyi-sıralama bağıntısı olmak üzere $\mathcal{B}$ 'nin boştan farklı her U elemanı için $r(U) = ot(\{B \in \mathcal{B} : U \subseteq B\}) < \kappa$ dır.

İspat

$U \in \mathcal{B}$ olmak üzere $x \in U$ olsun. $\{B \in \mathcal{B} : U \subseteq B\} \subseteq \{B \in \mathcal{B} : x \in B \text{ ve } B \cap X \setminus U \neq \emptyset\}$ dir ve $|\{B \in \mathcal{B} : x \in B \text{ ve } B \cap X \setminus U \neq \emptyset\}| < \kappa$ olduğundan $|\{B \in \mathcal{B} : U \subseteq B\}| < \kappa$ dır. κ kardinal sayı olduğundan $ot(\{B \in \mathcal{B} : U \subseteq B\}) < \kappa$ olmak zorundadır. ■

Teorem 5.2.4

X $P_{<\kappa}$ -özellğini sağlayan bir topolojik uzay olsun. Eğer X uzayının κ -nokta-düzgün tabanı varsa X uzayının κ -development'i vardır.

İspat

$\mathcal{B}$ X uzayının κ -nokta-düzgün tabanı olsun. $I(X)$ X 'in izole noktalarının kümesi olmak üzere her $\alpha < \kappa$ için $\mathcal{B}_\alpha = \{U \in \mathcal{B} : r(U) \geq \alpha\} \cup I(X)$ olsun. $\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ X 'in bir κ -development'i dir. Şöyleki; önce her $\alpha < \kappa$ için $\mathcal{B}_\alpha$ ailesinin X için bir örtü olduğunu görelim. $x \in X$ olsun. Eğer $\{x\} \subset X$ açık ise $x \in I(X)$ olup $x \in \bigcup \mathcal{B}_\alpha$ dir. $\{x\}$ kümesi açık olmasın. X T_1 -uzay ve $\mathcal{B}$ X uzayı için taban olduğundan $\bigcap \{B \in \mathcal{B} : x \in B\} = \{x\}$ dir. $\{x\}$ kümesi açık olmadığından ve X $P_{<\kappa}$ -uzay olduğundan $|\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}| \geq \kappa$ olmak zorundadır ve böylece $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ ailesinin $ot(\mathcal{V}) = \alpha$ olacak biçimde bir $\mathcal{V}$ altailesi seçilebilir. Bu durumda $|\mathcal{V}| \leq \alpha$ olup $\bigcap \mathcal{V}$ kümesi açıktır. $\{x\}$ kümesi açık olmadığından $\{x\} \neq \bigcap \mathcal{V}$ dir ve böylece $y \in \bigcap \mathcal{V}$ olacak biçimde x 'den farklı bir $y \in X$ vardır. $x \in \bigcap \{V \setminus \{y\} : V \in \mathcal{V}\}$ ve $\mathcal{B}$ taban olduğundan $x \in U \subseteq \bigcap \{V \setminus \{y\} : V \in \mathcal{V}\}$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{B}$ vardır. Her $V \in \mathcal{V}$ için $U \cap V$ 'nin özaltkümesi olduğundan $r(U) \geq \alpha$ olup $U \in \mathcal{B}_\alpha$ dir. O halde, $x \in U$ olduğundan, $x \in \bigcup \mathcal{B}_\alpha$ olup $\mathcal{B}_\alpha$ X için bir açık örtüdür.

Şimdi de her $p \in X$ için $\{st(p, \mathcal{B}_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ ailesinin p için komşuluklar tabanı olduğunu görelim. $p \in X$ ve $V \subseteq X$ açık olmak üzere $p \in V$ olsun. $\mathcal{B}$ κ -nokta-düzgün taban olduğundan $|\{B \in \mathcal{B} : p \in B \text{ ve } B \cap X \setminus V \neq \emptyset\}| < \kappa$ dir. O halde $ot(\{B \in \mathcal{B} : p \in B \text{ ve } B \cap X \setminus V \neq \emptyset\}) = \alpha$ olacak biçimde bir $\alpha < \kappa$ vardır. $U \in \mathcal{B}_{\alpha+1}$ olmak üzere $p \in U$ olsun. $U \in \mathcal{B}_{\alpha+1}$ olduğundan $ot(\{B \in \mathcal{B} : U \subseteq B\}) \geq \alpha+1$ dir. Eğer $U \cap X \setminus V \neq \emptyset$ ise $U \subseteq B$ biçimindeki her $B \in \mathcal{B}$ için $B \cap X \setminus V \neq \emptyset$ olacağından $ot(\{B \in \mathcal{B} : p \in B \text{ ve } B \cap X \setminus V \neq \emptyset\}) \geq \alpha+1$ olur ki bu çelişkidir. O halde $p \in U$ olacak biçimdeki her $U \in \mathcal{B}_{\alpha+1}$ için $U \cap X \setminus V = \emptyset$ ve $st(p, \mathcal{B}_{\alpha+1}) \subseteq V$ dir. Böylece $\{st(p, \mathcal{B}_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ ailesi p için komşuluklar tabanı olup $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ ailesi X 'in bir κ -development'i dir. ■

Şimdi yığınsal normal uzay ile yakından ilgili olan genişleme tanımını ve genişleme ile ilgili bir teoremi verelim.

Tanım 5.2.5

X bir topolojik uzay, $\mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in I\}$ ve $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in I\}$ X 'in altkümelerinden oluşan aileler olsun. Eğer her $\lambda \in I$ için $A_\lambda \subseteq V_\lambda$ ve $V_\lambda \subseteq X$ açık ise $\mathcal{V}$ ailesine $\mathcal{A}$ 'nın bir genişlemesi denir.

Teorem 5.2.6

X topolojik uzayının κ ranklı (F)-koşulunu sağlayan bir $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(x) : x \in X\}$ sistemi varsa X uzayı içindeki diskret her ailenin $\text{nokta} < \kappa$ genişlemesi vardır.

İspat

$\mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in I\}$ diskret bir aile olsun. Her $\lambda \in I$ için $U_\lambda = X \setminus \overline{\bigcup_{\rho \neq \lambda} A_\rho}$ denilirse $A_\lambda \subseteq U_\lambda$ olur ve $\rho \neq \lambda$ biçimindeki her $\rho, \lambda \in I$ için $A_\lambda \cap U_\rho = \emptyset$ dir. Her $\lambda \in I$ için $V_\lambda = \bigcup \{V(x, U_\lambda) : x \in A_\lambda\}$ olsun. Her $\lambda \in I$ için V_λ X 'in açık altkümesidir ve $A_\lambda \subseteq V_\lambda$ sağlanır. Şimdi $\{V_\lambda : \lambda \in I\}$ ailesinin $\text{nokta} < \kappa$ olduğunu görelim. Bu aile $\text{nokta} < \kappa$ olmasın. O zaman X 'in öyle bir x elemanı ve I 'nın $|J| = \kappa$ olacak biçimde öyle bir J altkümesi vardır ki her $\lambda \in J$ için $x \in V_\lambda$ dır. V_λ kümelerinin tanımından, her $\lambda \in J$ için $x \in V(x_\lambda, U_\lambda)$ olacak biçimde bir $x_\lambda \in A_\lambda$ vardır ve (F)-koşulundan her $\lambda \in J$ için $x_\lambda \in W_\lambda \subseteq U_\lambda$ biçiminde $W_\lambda \in \mathcal{W}(x)$ vardır. Her $\lambda \in J$ için $x_\lambda \in A_\lambda$ ve $\rho \neq \lambda$ için $A_\lambda \cap U_\rho = \emptyset$ olduğundan $\rho \neq \lambda$ biçimindeki her $\rho, \lambda \in J$ için $W_\lambda \neq W_\rho$ olup $|\{W_\lambda : \lambda \in J\}| = \kappa$ dır. O halde, $\text{rank}(\mathcal{W}(x)) \leq \kappa$ ve $\{W_\lambda : \lambda \in J\} \subseteq \mathcal{W}(x)$ olduğundan, J 'nin $W_\lambda \subset W_\rho$ olacak biçimde birbirinden farklı λ ve ρ elemanları vardır. Ancak bu durumda $x_\lambda \in W_\rho \subseteq U_\rho$ olur ki bu $x_\lambda \in A_\lambda$ olması ile çelişir. Böylece $\{V_\lambda : \lambda \in I\}$ ailesi $\text{nokta} < \kappa$ olup $\{A_\lambda : \lambda \in I\}$ ailesinin $\text{nokta} < \kappa$ genişlemesidir. ■

KAYNAKLAR

1. Collins, P.J., Reed, G.M., Roscoe, A.W., Rudin, M.E., 1985, A lattice of conditions on topological spaces, **Proc.Amer.Math.Soc.**, 94, (3), 485-496
2. Erdős, P., Hajnal, A., Mate, A., Rado, R., 1984, Combinatorial Set Theory, **North-Holland Publ.**, Hungary.
3. Kunen, K. and Vaughan, J.E., 1984, Handbook of Set-Theoretic Topology, **North-Holland Publ.**, Amsterdam.
4. Moody, P.J., Reed, G.M., Roscoe, A.W., Collins, P.J., 1991, A lattice of conditions on topological spaces-II, **Fund.Math.**, 138, 69-80
5. Hajnal, A. and Hamburger, P., 1999, Set Theory, **Cambridge University Press.**, Cambridge.
6. Gartside, P.M., 1993, Monotonicity in Analytic Topology, **D.Phil.thesis**, Oxford.
7. Gruenhage, G. and Nyikos, P., 1978, Spaces with bases of countable rank, **Topology Appl.**, 8, 233-257
8. Dilworth, R.P., 1950, A decomposition theorem for partially ordered sets, **Ann.Math.**, 51, 161-166
9. Kunen, K., 1990, Set Theory, **Elsevier Science Publ.**, Amsterdam.
10. Balogh, Z. and Rudin, M.E., 1992, Monotone normality, **Topology Appl.**, 47, 115-127
11. Heath, R.W., Lutzer, D.J., Zenor, P.L., 1973, Monotonically normal spaces, **Trans.Amer.Math.Soc.**, 178, 481-493
12. Holz, M., Steffens, K., Weitz, E., 1999, Introduction to Cardinal Arithmetic, **Birkhäuser Verlag**, Germany.
13. Collins, P.J. and Roscoe, A.W., 1984, Criteria for metrisability, **Proc.Amer.Math.Soc.**, 90, 631-640

ÖZGEÇMİŞ

Çetin Vural 1970 yılında Kastamonu'nun Tosya ilçesinde doğdu. 1987 yılında Düzce lisesinden mezun olarak aynı yıl Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde yüksek öğrenimine başladı. 1992 yılında bu bölümde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı ve "Sürekli Fonksiyon Uzaylarında Kardinal Değişmezler" konulu yüksek lisans tezini 1995 yılında verdi.

