



ÖRGÜLENMİŞ ÇAPRAZ MODÜLLERİN HOMOTOPİ SINIFLARI ÜZERİNE

Sevgi FİDAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Haziran – 2018

ÖRGÜLENMİŞ ÇAPRAZ MODÜLLERİN HOMOTOPİ SINIFLARI ÜZERİNE

Sevgi FİDAN

Kütahya Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Erdal ULUALAN

Haziran - 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Sevgi FİDAN'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Örgülenmiş Çapraz Modüllerin Homotopi Sınıfları Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimizce Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

20/06/2018

Prof. Dr. Önder UYSAL
Enstitü Müdürü, Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof.Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Bölüm Başkanı, Matematik Bölümü

Prof. Dr. Erdal ULUALAN
Danışman, Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Sınav Komitesi Üyeleri

Prof. Dr. Erdal ULUALAN
Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Doç. Dr. İbrahim İlker AKÇA
Matematik ve Bilgisayar Bölümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Doç.Dr. Mine TURAN
Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Kütahya Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %16 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Prof. Dr. Erdal ULUALAN

Sevgi FİDAN

ÖRGÜLENMİŞ ÇAPRAZ MODÜLLERİN HOMOTOPİ SINIFLARI ÜZERİNE

Sevgi FİDAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 2018

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erdal ULUALAN

ÖZET

Bu tezde örgülenmiş çaprazlanmış modüllerin morfizmlerinin homotopi sınıflarının yapısı incelenmiştir. Grupların ve değişmeli cebirler üzerinde örgülenmiş çapraz modüllerin tanımları ve bunlar arasındaki morfizmlerin homotopik kavramları tanıtılmış ve homotopilerin özellikleri incelenmiştir. Bu anlamda 4 bölümden oluşmuştur.

İlk bölümde iki eğri arasındaki homotopi kavramı ve homotopi sınıfı kavramına değinilmiştir.

İkinci bölümde gruplar ve değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin homotopileri incelenmiştir.

Üçüncü ve Dördüncü bölümlerde ise bu yapıların örgülü çapraz modüller için karşılıkları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış modül, Homotopi, Kategori.

ON THE HOMOTOPY CLASS OF MORPHISMS OF BRAIDED REGULAR CROSSED MODULER

Sevgi FİDAN

Department of Mathematics, Master Thesis, 2018

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Erdal ULUALAN

SUMMARY

In this thesis we investigate the class of homotopies between the morphisms of braided crossed modules. We define the notion of homotopy between maps of braided crossed modules of groups and commutative algebras and we give their properties. In this meaning this thesis consists of four chapters;

In the first chapter, we recall the basic definitions about homotopy between two curves and homotopy classes.

In the second chapter, we introduced the corresponding cases of these structures to the notions of braided crossed modules of groups and commutative algebras .

Key words: Crossed Modüler, Homotopy, Category.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yardımlarını esirgemeyen başta değerli danışman hocam Prof. Dr. Erdal ULUALAN' a maddi manevi desteğini hep yanımda hissettiğim aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	v
SUMMARY	vi
1. HOMOTOPİ KAVRAMI	1
1.1. Homotopi ve Homotopi Tipleri.....	1
1.1.1.Homotopik eğriler (iki eğri arasındaki homotopi)	2
1.2.Basit Bağlantılı Uzaylar	4
1.3. Homotopi Tipi.....	8
1.4. Homotopi Grubu	11
2.GRUPLAR VE DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER...15	
2.1.Yüksek Boyutta Homotopiler	15
2.2. Değişmeli Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller.....	17
2.3. Çaprazlanmış Modüller Kategorisi	18
2.4. İki Çaprazlanmış Modül Morfizmleri Arasındaki Homotopi	19
2.5. Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopi Sınıfları	26
3. ÖRGÜLÜ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE HOMOTOPİLERİ.....30	
3.1 Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış ve Örgülü Çaprazlanmış Modülleri.....	31
3.2. Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modül Homotopileri.....	32
3.3. Gruplar Üzerinde Örgülü Çaprazlanmış Modüller.....	33
4.DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNE ÖRGÜLÜ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİNİN MORFİZİMLERİNİN HOMOTOPİLERİ.....37	
4.1. Değişmeli Cebirler Üzerine Örgülü Çaprazlanmış Modüllerinin Homotopileri.....	37
4.2. Derivasyonlar (Örgülü Çaprazlanmış Modüller İçin)	38

İÇİNDEKİLER (devam)**Sayfa**

5. SONUÇ VE ÖNERİLER	44
KAYNAKLAR DİZİNİ	45



1.HOMOTOPİ KAVRAMI

Bu bölümde tezde kullanılacak olan temel kavramlar kısaca tanıtılacaktır. Topolojik uzaylarda iki eğri arasındaki homotopi kavramı kısaca değinilecek ve daha sonra homotopi tiplerinden bahsedilecektir.

1.1. Homotopi ve Homotopi Tipleri

Tanım 1.1.1. X bir topolojik uzay ve $I = [0,1]$ olsun. X topolojik uzayında c den d ye bir eğri alalım. Bu eğri $\beta(0) = c$ ve $\beta(1) = d$ olacak şekilde $\beta: I \rightarrow X$ sürekli bir fonksiyondur. Burada c ye eğrimizin başlangıç noktası, d ye ise bitiş noktası denir.

Örnek 1.1.2. X bir topolojik uzay olsun ve $k \in X$ alalım. $a_k: I \rightarrow X$; bütün $t \in I$ için $a_k(t) = k$ ile tanımlanan fonksiyon sürekli olup aynı zamanda sabittir. Böylece bir eğridir. Bu eğriye k noktasındaki sabit eğri denir.

Örnek 1.1.3. $\beta: I \rightarrow X$ c den d ye bir eğri olsun. $\beta(0) = c$ $\beta(1) = d$ dir. d den c ye bir eğri ise $\tilde{\beta}(t) = \beta(1 - t)$ ile tanımlanır.

$$\tilde{\beta}(0) = \beta(1 - 0) = \beta(1) = d$$

$$\tilde{\beta}(1) = \beta(1 - 1) = \beta(0) = c$$

$\tilde{\beta}: d \sim c$ bir eğri olur.

β sürekli olduğundan

$$\tilde{\beta}: I \rightarrow X$$

$$\tilde{\beta}(t) = \beta(1 - t)$$

ile tanımlı fonksiyonda tanımlı olacağından $\tilde{\beta}$, d den c ye X topolojik uzayında bir eğri olur.

Örnek 1.1.4. $\beta: I \rightarrow X$ c den d ye $\gamma: I \rightarrow X$ d den e ye iki eğri olsun.

$$\beta \circ \gamma(t) = \begin{cases} \beta(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan $\beta\gamma(t) : I \rightarrow X$ sürekli ve $\beta\gamma(0) = c$ $\beta\gamma(1) = e$ c den e ye bir eğri olur. Burada $\beta\gamma$ nın anlamı β ve γ eğrilerinin yan yana gelmesidir. Yani β nın bitiş noktası γ nin başlangıç noktasına gelecek şekilde iki eğrinin birbirine eklenmesidir.

Tanım 1.1.5. X bir topolojik uzay ve $F \subset X$ olsun. Eğer her $c, d \in F$ için c den d ye F içinde bir $\beta : I \rightarrow X$ eğrisi varsa yani, $\beta(I) \subset F$ ise F kümesine eğrisel bağlantılıdır denir.

1.1.1. Homotopik eğriler (iki eğri arasındaki homotopi)

Tanım 1.1.6. $\beta, \gamma : I \rightarrow X$ iki eğri ve başlangıç ve bitiş noktaları aynı x ve y olsun. Eğer

$$K : I \times I \rightarrow X$$

$$K(s, 0) = \beta(s); K(s, 1) = \gamma(s)$$

$$K(0, p) = x$$

$$K(1, p) = y$$

olacak şekilde bir K fonksiyonu varsa β ve γ ya homotoptur denir ve $\beta \simeq \gamma$ ile gösterilir. Buradaki K fonksiyonuna β ve γ arasındaki homotopi denir.

Teorem 1.1.7. X uzayı içinde c den d ye olan tüm eğrilerin homotop olma bağıntısı bir denklik bağıntıdır.

İspat:

Yansıma:

$$\beta : I \rightarrow X$$

$$\beta(0) = c, \beta(1) = d$$

olan c den d ye bir eğri olsun.

$$K : I \times I \rightarrow X$$

$$K(s, 0) = \beta(s), K(1, s) = \beta(s)$$

$$K(0, s) = c$$

$$K(1, s) = d$$

olacak şekilde $K : I \times I \rightarrow X$

$$K(t, p) = \beta(t)$$

olarak tanımlanan dönüşüm sürekli olup bir homotopidir.

Simetri: $\beta \simeq \gamma$ olsun . Bu durumda

$$K : I \times I \rightarrow X$$

$$K(s, 0) = \beta(s); K(s, 1) = \gamma(s)$$

$$K(0, s) = c$$

$$K(1, s) = d$$

olacak şekilde K sürekli dönüşümü vardır.

$$\tilde{K} : I \times I \rightarrow X$$

$$\tilde{K}(t, p) = K(t, 1 - p)$$

dönüşümünü göze alalım.

$$\tilde{K}(s, 0) = K(s, 1 - 0) = K(s, 1) = \gamma(s)$$

$$\tilde{K}(s, 1) = K(s, 1 - 1) = K(s, 0) = \beta(s)$$

$$\tilde{K}(0, s) = K(0, 1 - s) = c$$

$$\tilde{K}(1, s) = K(1, 1 - s) = d$$

olup $\tilde{K} : \gamma \simeq \beta$ bulunur.

Geçişme: $\beta \simeq \gamma$ ve $\gamma \simeq \theta$ olsun. β, γ, θ c den d ye bir eğridir.

$$KoL(t, p) = \begin{cases} K(t, 2p), & 0 \leq p \leq \frac{1}{2} \\ L(t, 2p - 1), & \frac{1}{2} \leq p \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $KoL : I \times I \rightarrow X$ sürekli dönüşümü β dan γ ya bir homotoptir.

$$KoL(t, 0) = K(t, 0) = \beta(t)$$

$$KoL(t, 1) = L(t, 1) = \theta(t)$$

olup $\beta \simeq \theta$ olur.

Yani başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan X topolojik uzayındaki eğrilerin birbirine homotop olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

1.2.Basit Bağlantılı Uzaylar

Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan $\beta: I \rightarrow X$ eğrisine kapalı eğri denir.

$$a_k : I \rightarrow X$$

$$a_k(t) = x$$

ile tanımlı sabit fonksiyon x noktasında kapalı eğridir. Eğer $\beta: I \rightarrow X$ kapalı eğrisi a_k sabit eğrisine homotop ise bu eğriye x noktasında büzülebilir eğri denir. Yani $\beta: I \rightarrow X$

$$\beta(0) = s_0$$

$$\beta(1) = s_0$$

olan başlangıç ve bitiş noktası s_0 olan bir eğri olsun.

$$\beta \simeq a_{s_0} : s_0 \rightarrow s_0$$

demek;

$$K : I \times I \rightarrow X$$

$$K(s, 0) = \beta(s)$$

$$K(s, 1) = a_{s_0}(s) = s_0$$

$$K(0, s) = s_0$$

$$K(1, s) = s_0$$

olacak şekilde sürekli bir K dönüşümü vardır.

Bir X topolojik uzayı alalım. Bu uzaydaki her kapalı eğri bir noktaya büzülebiliyorsa, bu uzaya basit bağlantılı uzay denir. Yani başlangıç ve bitiş noktası aynı olan her eğri sabit eğriye homotop ise bu uzaya basit bağlantılı uzay denir.

Relatif Homotopi

Tanım 1.2.1. X ve Y topolojik uzay olsun

$k, l : X \rightarrow Y$ iki sürekli dönüşüm ve $A \subset X$ olsun. Eğer $K : X \times I \rightarrow Y$

$$K(s, 0) = k(s);$$

$$K(s, 1) = l(s)$$

ve her $a \in A \subset X$ için

$$K(a, u) = K(a) = L(u)$$

olacak şekilde K sürekli dönüşümü varsa, K ya A ya k ve l arasındaki homotopi denir.

$$K : k \simeq g \text{ rel } A$$

Buna göre : $\beta, \gamma : I \rightarrow X$ s_0 tabanlı yani başlangıç ve bitiş noktası s_0 olan iki eğri olsun $\beta \simeq \gamma \text{ rel } s_0$ demek;

$$K(s, 0) = \beta(s)$$

$$K(s, 1) = \gamma(s)$$

$$K(0, s) = s_0$$

$$K(1, s) = s_0$$

$$K(s_0, u) = \beta(s_0) = \gamma(s_0)$$

olacak şekilde bir K sürekli dönüşümü var olması demektir.

İki Eğrinin Çarpımı

Tanım1.2.2. $\beta: I \rightarrow X$ $\gamma: I \rightarrow X$, $\beta(1) = \gamma(0)$ olacak şekilde iki eğri olsun.

$$\beta.\gamma(s) = \begin{cases} \beta(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\beta.\gamma$ c den d ye bir eğri olur. Gerçekten de

$$\beta.\gamma(0) = \beta(2.0) = \beta(0)$$

$$\beta.\gamma(1) = \gamma(2.1 - 1) = \gamma(1)$$

olur. Yani $\beta.\gamma$; $\beta(0)$ dan $\gamma(1)$ tanımlı bir eğridir. $\beta.\gamma$ da I dan X e sürekli bir dönüşüm olup bir eğri belirtir

Tanım1.2.3. β eğrisi bir sabit fonksiyon olsun. Yani $\forall x \in I$ için $\beta(s) = k$ ise β ya k noktasındaki sabit eğri denir. Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan eğriye kapalı eğri denir. Bu kapalı eğri kendi kendini kesmiyorsa, buna basit kapalı eğri denir.

Teorem1.2.4. $\beta \sim \theta$ ve $\gamma \sim \sigma$ ise

$$\beta.\gamma \sim \theta.\sigma$$

dır.

İspat: $\beta \sim \theta$ ise $\beta(0) = \theta(0)$ ve $\beta(1) = \theta(1)$ dir.

$\gamma \sim \sigma$ ise $\gamma(0) = \sigma(0)$ ve $\gamma(1) = \sigma(1)$ dir.

$\beta \sim \gamma$ var ise $\beta(1) = \gamma(0)$ olur. Buna göre ;

$$\beta \circ \gamma(0) = \beta(0) = \theta(0) = \theta \sigma(0)$$

$$\beta\sigma\gamma(1) = \gamma(1) = \sigma(1) = \theta\sigma(1)$$

olup $\beta.\gamma \sim \theta.\sigma$ bulunur.

Teorem 1.2.5. $\beta \sim \gamma$ ise $\beta^{-1} \sim \gamma^{-1}$ dir.

İspat: $\beta \sim \gamma$ ise $\beta(0) = \gamma(0); \beta(1) = \gamma(1)$ olur.

$$\beta^{-1}(0) = \beta(1) = \gamma(1) = \gamma^{-1}(0)$$

$$\beta^{-1}(1) = \beta(0) = \gamma(0) = \gamma^{-1}(1)$$

olup $\beta^{-1} \sim \gamma^{-1}$ bulunur.

Teorem 1.2.6. $k: X \rightarrow Y$ ve $l: X \rightarrow Y$ sürekli ve homotopik olan iki dönüşüm ve $m: Y \rightarrow Z$ sürekli bir dönüşüm ise; $m \circ k$ ve $m \circ l$ fonksiyonları X den Z ye sürekli homotop dönüşümlerdir.

İspat: $k, l : X \Rightarrow Y$ sürekli homotopik iseler; $K : X \times I \rightarrow Y$

$$K(s, 0) = k(s)$$

$$K(s, 1) = l(s)$$

ve A relatif homotopi ise her $s \in A$

$$K(s, t) = k(s) = l(s)$$

şeklinde her $K : X \times I \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü vardır. $m : Y \rightarrow Z$ sürekli olduğundan

$$L : X \times I \rightarrow Z$$

$$L(s, y) = m(K(s, y))$$

ile tanımlı dönüşüm süreklidir. Yani ;

$$L(s, 0) = m(K(s, 0)) = m(k(s)) = m \circ k(s)$$

$$L(s, 1) = m(K(s, 1)) = m(l(s)) = m \circ l(s)$$

olup $m \circ k \simeq m \circ l \text{ rel } A$ olur.

Teorem1.2.7. $\beta: I \rightarrow X$, $\gamma: I \rightarrow X$ iki eğri olsun. $\beta \simeq \gamma \text{ rel } s_0$ olsun. $\sigma: s_0$ dan s_0 bir eğri ise;

$$\sigma \circ \beta \simeq \theta \circ \gamma \text{ rel } s_0 \text{ dir.}$$

İspat: $\beta \simeq \gamma \text{ rel } s_0$ ise;

$$K: I \times I \rightarrow X$$

$$K(s, 0) = \beta(s)$$

$$K(s, 1) = \gamma(s)$$

$$K(s_0, u) = \beta(s_0) = \gamma(s_0)$$

$$K(0, s) = K(1, u) = s_0$$

olacak şekilde sürekli dönüşüm vardır. $\sigma: I \rightarrow X$ sürekli bir dönüşümü olup

$$\sigma \circ \beta \simeq \theta \circ \gamma \text{ rel } s_0 \text{ olur.}$$

1.3.Homotopi Tipi

X ve Y iki topolojik uzay $k: X \rightarrow Y$ ve $l: Y \rightarrow X$ iki sürekli dönüşüm olsun. $kol: Y \rightarrow Y$ dönüşümü homotop ise $lom: X \rightarrow X$; id_x dönüşümüne homotop ise; X ve Y topolojik uzaylarına aynı homotopi tipine sahiptir denir.

$$lok \simeq id_y \text{ olmak üzere;}$$

$$K: Y \times I \rightarrow Y$$

$$K(y, 0) = lok(y)$$

$$K(y, 1) = id_y = y$$

olacak şekilde sürekli K homotopisi vardır.

$$kol \simeq id_x \text{ demek;}$$

$$K: X \times I \rightarrow X$$

$$K(s, 0) = kol(s)$$

$$K(s, 1) = id_x(s) = s$$

olacak şekilde sürekli K nin var olması demektir.

X ve Y uzayları homeomorfik iseler aynı homotopi tipindedirler. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek1.3.1. Bir noktaya büzülebilen bir uzay, bir noktadan ibaret olan bir uzayla aynı homotopi tipindedir.

Sonuç1.3.2. X uzayı s_0 noktasına büzülebilen basit bağlantılı bir uzay olsun.

$\beta, \gamma : I \rightarrow X$ başlangıç ve bitiş noktası s_0 olan iki eğri olsun. Eğer;

$$K: I \times I \rightarrow X$$

$$K(s, 0) = \beta(s)$$

$$K(s, 1) = \gamma(s)$$

$$K(s_0, y) = \beta(s_0) = \gamma(s_0)$$

$$K(0, y) = K(1, s_0) = \gamma(s_0) = s_0$$

olacak şekilde sürekli bir dönüşüm var ise;

K ya s_0 taban noktasına göre β ve γ eğrileri arasındaki homotopi denir.

s_0 tabanlı X topolojik uzayında β eğrilerinin birbirine homotop olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten de ; $\beta : I \rightarrow X; \beta(0) = \beta(1) = s_0$ ise $K : I \times I \rightarrow X$;

$K(s, y) = \beta(s)$ bir homotopi olur. Çünkü β sürekli olduğundan K da sürekli ve;

$$K(s, 0) = \beta(s)$$

$$K(s, 1) = \beta(s)$$

$$K(0, y) = \beta(s_0) = s_0 = K(1, y) = \beta(1)$$

olup $K(s_0, y) = \beta(s_0)$ olur. Yani $\beta \simeq \beta$ rel s_0 dır.

$$\beta \simeq \gamma \text{ ise } K : I \times I \rightarrow X$$

$$K(s, 0) = \beta(s)$$

$$K(s, 1) = \gamma(s)$$

$$K(0, y) = s_0 = K(1, y)$$

olacak şekilde K sürekli homotopisi vardır.

$\widetilde{K}: I \times I \rightarrow X$ $\widetilde{K}(s, y) = K(s, 1 - y)$ ile tanımlı dönüşüm sürekli olup

$$\widetilde{K}(s, 0) = K(s, 1) = \gamma(s);$$

$$\widetilde{K}(s, 1) = K(s, 0) = \beta(s);$$

$$\widetilde{K}(0, y) = K(0, 1 - y) = s_0$$

$$\widetilde{K}(1, y) = K(1, 1 - y) = s_0$$

olup $\widetilde{K}: \gamma \simeq \beta \text{ rel } s_0$ olur.

$K: \beta \simeq \gamma$ ve $L: \gamma \simeq \theta$ olsun. $M: I \times I \rightarrow X$;

$$M(s) = \begin{cases} K(t, 1 - p), & 0 \leq p \leq \frac{1}{2} \\ L(t, 2p - 1), & \frac{1}{2} \leq p \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan M sürekli bir dönüşüm olur ve;

$$M(s, 0) = K(s, 0) = \beta(s);$$

$$M(s, 1) = L(s, 1) = \gamma(s);$$

$$M(0, y) = K(0, 2y) = s_0$$

$$M(1, y) = L(1, 2y - 1) = s_0$$

olup $M: \beta \simeq \theta \text{ rel } s_0$ bulunur. Yani bir X topolojik uzay ve $s_0 \in X$ keyfî bir sabit nokta için başlangıç ve bitiş noktaları s_0 olan bütün kapalı eğrilerin birbirine homotop olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

1.4.Homotopi Grubu

X bir topolojik uzay $s_0 \in X$ de sabit bir nokta olsun. Başlangıç ve bitiş noktası s_0 olan bütün kapalı eğrilerin kümesini X' ile gösterelim. X' , X in basit kapalı s_0 noktasına büzülebilen, basit bağlantılı bir alt uzayı olacaktır. s_0 noktasına bu eğrilerin taban noktası, bu eğrilere de s_0 tabanlı kapalı eğriler denir. Yukarıda başlangıç ve bitiş noktaları $s_0 \in X$ olan bütün kapalı eğrilerin birbirine homotop olma bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterdik. $\beta \in X'$ başlangıç ve bitiş noktası s_0 olan bir eğri olduğundan β ya homotop olan s_0 tabanlı bütün kapalı eğrilerin sınıfını

$$[\beta] = \{\gamma : \beta \simeq \gamma \text{ rel } s_0\}$$

ile gösterelim. Yani $[\beta]$, homotop olma bağıntısına göre β ya homotop olan bütün s_0 tabanlı γ eğrilerinin oluşturduğu bir denklik sınıfıdır.

$\beta \in X'$ olmak üzere $[\beta]$ denklik sınıflarının oluşturduğu kümeyi

$$L : X' / \sim = \{[\beta] : \beta \in X'\}$$

Yani; " $\beta : s_0 \sim s_0$ kapalı eğri" olsun.

Burada $[\beta] = \{\gamma : \beta \simeq \gamma \text{ rel } s_0\}$ olup; $K : I \times I \rightarrow X$;

$$K(s, 0) = \beta(s)$$

$$K(s, 1) = \gamma(s)$$

$$K(0, s) = s_0 = K(1, s)$$

olacak şekilde K sürekli dönüşümü vardır. Başlangıç ve bitiş noktası s_0 olan β, γ kapalı eğrilerinin çarpımı

$$\beta \cdot \gamma(s) = \begin{cases} \beta(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

dir. O halde $[\beta]$ ve $[\gamma]$ denklik sınıflarının çarpımı

$$[\beta].[\gamma] = [\beta.\gamma]$$

ile tanımlıdır. Şimdi bu çarpımın iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $\beta \sim \theta$ ve $\gamma \sim \sigma$ iken;

$$\beta.\gamma \sim \theta.\sigma$$

olduğunu gösterelim. Bunu gösterirsek $[\beta] = [\theta]$ ve $[\gamma] = [\sigma]$ iken; $[\beta.\theta] = [\gamma.\sigma]$ olduğunu göstermiş oluruz.

$\beta \sim \theta$ ise; bu iki eğrinin başlangıç ve bitiş noktası s_0 olup $K: \beta \simeq \theta$ ise;

$$K(s, 0) = \beta(s)$$

$$K(s, 1) = \gamma(s)$$

$$K(0, s) = s_0 = K(1, s)$$

olur. $\gamma \sim \sigma$ ise s_0 tabanlı iki eğri oluyorsa; $L: I \times I \rightarrow X$

$$L(s, 0) = \gamma(s)$$

$$L(s, 1) = \sigma(s)$$

$$\beta.\gamma = \begin{cases} \beta(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olduğundan $\beta \circ \gamma \simeq \theta \circ \sigma$ olması için; $P: I \times I \rightarrow X$; $\beta.\gamma$ ve $\theta.\sigma$ da s_0 da tabanlı iki eğri olup ;

$$P(s, y) = \begin{cases} K(s, 2y), & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ L(s, 2y - 1), & \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$\beta.\gamma$ ve $\theta.\sigma$ arasındaki homotopidir. Gerçekten de ;

$$P(s, 0) = K(s, 0) = \beta(s);$$

$$P(s, 1) = L(s, 1) = \gamma(s);$$

olup $\beta\gamma \simeq \theta\sigma$ olduğundan $[\beta.\theta] = [\gamma.\sigma]$ olup bu denklik sınıflarının çarpımı iyi tanımlıdır. Herhangi bir X topolojik uzayında yukarıda tanımlanan çarpıma göre bütün eğrilerin kümesi bir yarı-grup oluşturur. Bütün eğriler yerine s_0 tabanlı kapalı eğrilerin oluşturduğu X' kümesi göz önüne alınırsa, $X'/\sim$ yukarıda tanımlanan çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba fundamental grup veya s_0 tabanlı X' topolojik uzayının 1. homotopi grubu denir ve $\pi_1(X, s_0)$ ile gösterilir. Şimdi s_0 tabanlı bütün kapalı eğrilerin homotopik olma bağıntısına göre, denklik sınıflarının oluşturduğu

$$X'/\sim = \{[\beta]: \beta \in s_0 \sim s_0 \text{ kapalı eğri}\}$$

kümesinin bir grup oluşturduğunu gösterelim.

G_1 : Tanımdan dolayı $[\beta].[\gamma] = [\beta.\gamma]$; çarpımı s_0 tabanlı kapalı eğrilerin bir homotopi sınıfıdır. Yani bu çarpım iyi kapalı olup kapalıdır.

$$G_2 : ([\beta][\gamma]).[\theta] = [\beta.\gamma].[\theta] = [(\beta.\gamma).\theta] = [\beta.(\gamma.\theta)] = [\beta].([\gamma][\theta])$$

olur.

G_3 : $\beta_{s_0} : I \rightarrow X$; $\forall s \in I$ için $\beta(s) = s_0$ olan sabit eğri olsun. $[1]$ ile β_{s_0} sabit eğrisine homotop olan tüm kapalı eğrilerin sınıfını gösterelim. Eğer γ bir sabit eğri ve $\beta.\gamma$ mevcut ise $\beta.\gamma \simeq \beta$ olduğundan;

$$[\beta].[1] = [\beta.1] = [\beta]$$

olur. Burada

$$[1] = \{\gamma : \gamma \simeq \beta_{s_0}\}$$

olur. Böylece sıfır eğrilerinin yani sabit eğrilerin homotopi sınıfı olan $[1]$, grubun birim elemanıdır.

Sıfır eğri β ise $\beta: I \rightarrow X$ $\beta(I) = s_0 \in X$ olup

$$[1] = \{\gamma: \gamma \sim \beta \text{ rel } s_0\}$$

olur. Yani sabit eğriye homotop olan γ eğrilerinin oluşturduğu sınıftır.

$G_4: \beta s_0$ tabanlı kapalı bir eğri olsun. $\beta^{-1}(s) = (1 - s)$ ile tanımlı olup $\beta \cdot \beta^{-1}$ ve $\beta^{-1} \cdot \beta$ eğrileri s_0 tabanlı sabit eğriye homotop olurlar.

$$K : I \times I \rightarrow X;$$

$$K(s, 0) = \beta \cdot \beta^{-1}(s)$$

$$K(s, 1) = s_0 = \beta_{s_0}(s)$$

olup $\beta \cdot \beta^{-1}(s) = s_0 = \beta_{s_0}(s_0)$ olduğundan $\beta \cdot \beta^{-1}$ ile β_{s_0} sabit eğrisi homotoptur. Benzer şekilde; $\beta^{-1} \cdot \beta$ ile β_{s_0} sabit eğrisi homotop olduğundan $\beta \cdot \beta^{-1} \in [1]$ olup;

$[\beta \cdot \beta^{-1}] = [1]$ yani $[\beta^{-1}] \cdot [\beta] = [1]$ bulunur.

Yani bir X topojik uzayı $s_0 \in X$ alalım. Başlangıç ve bitiş noktası s_0 olan tüm $\beta : I \rightarrow X$ kapalı eğrilerin homotop olma bağıntısı bir denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının oluşturduğu bölüm kümesi eğrilerinin yukarıdaki gibi tanımlı ve işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba X in 1. homotopi grubu denir.

2.GRUPLAR VE DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Önceki bölümde homotopi tipi 1 olan topolojik uzayların eğrilerinin homotopi sınıfının üzerinde denklik bağıntısı tanımlanarak 1. homotopi grubu elde edilmiştir. Yani homotopi tipi 1 olan topolojik uzaylara cebirsel olarak gruplar karşılık gelir. Bu karşılık gelme

$$\pi_1 : X \rightarrow Grp$$

$\pi_1(x)$ 1. homotopi grubu şeklinde olur. Yani bir X bir basit bağlantılı topolojik uzayların kategorisi olmak üzere $x \in X$ için $\pi_1(x)$, gruplar kategorisinin bir objesidir. 2-tip topolojik uzaylara cebirsel model olarak gruplar üzerinde 1950 yılında Whitehead tarafından çaprazlanmış modül kavramı tanımlanmıştır. (Whitehead , 1950). Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller T.Porter tarafından incelenmiştir. (Porter ,1986). Bu bölümde değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri hatırlatılacak ve morfizmeleri arasındaki homotopi dönüşümlerinin oluşturduğu sınıf incelenecektir.

2.1.Yüksek Boyutta Homotopiler

Öncelikle bu bölümde kullanılacak olan bazı temel kavramları hatırlayalım.

Tanım2.1.1. $\mathcal{R}$ birimli bir olsun. $(\vartheta, \oplus)$ bir abelyen grup olsun.

$$\mathcal{R} \times \vartheta \rightarrow \vartheta$$

$$(r, \vartheta) \rightarrow r \otimes \vartheta$$

ile verilen dönüşüm aşağıdaki özellikleri sağlarsa ϑ ye sol $\mathcal{R}$ _modül denir. $r \in \mathcal{R}$, $\vartheta_i \in \vartheta$

$$1) r \otimes (\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) = (r \otimes \vartheta_1) \oplus (r \otimes \vartheta_2)$$

$$2) (r_1 \pm r_2) \otimes \vartheta = (r_1 \otimes \vartheta) \oplus (r_2 \otimes \vartheta)$$

$$3) (r_1 \cdot r_2) \otimes \vartheta = r_1 \otimes (r_2 \otimes \vartheta)$$

$$4) r \otimes 0 = 0$$

$$5) 1_R \otimes \vartheta = \vartheta$$

$(\vartheta, \oplus)$, bir hem sağ hemde sol $\mathcal{R}$ _modül olsun.

$$\cdot : \vartheta \times \vartheta \rightarrow \vartheta$$

ikinci bir ikili işlem olsun. Bu işlem aşağıdaki özellikleri sağlarsa

$$1) a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c ; a, b, c \in \vartheta$$

$$2) a \cdot (b \oplus c) = (a \cdot b) \oplus (a \cdot c)$$

Burada $(\vartheta, \oplus, \cdot)$ bir halka ve ayrıca sağ -sol modül var ve ayrıca aşağıdaki özellikleri sağlarsa ϑ ye bir $\mathcal{R}$ -cebir denir.

$$r \otimes (\vartheta_1 \cdot \vartheta_2) = (r \otimes \vartheta_1) \cdot \vartheta_2$$

$$= \vartheta_1 \cdot (r \otimes \vartheta_2)$$

Eğer her $a, b \in R$ için

$$a \cdot b = b \cdot a$$

ise yani $(\vartheta, \oplus, \cdot)$ değişmeli halka ise ϑ ye değişmeli R -cebir denir. Bu tezde kullanılan tüm cebirler değişmeli cebir olarak alınacaktır.

Örnek2.1.2. Her Abelyen grup bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.

$(\vartheta, \oplus)$ Abelyen grup olsun.

$$\mathbb{Z} \times \vartheta \rightarrow \vartheta$$

$$(n, \vartheta) \rightarrow n \cdot \vartheta = \vartheta \oplus \vartheta \oplus \vartheta \oplus \dots \oplus \vartheta$$

olmak üzere toplam n tanedir.

$$n. (\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) = (\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) \oplus (\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) \oplus (\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) \oplus (\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) \oplus (\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) \oplus (\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) \oplus \dots \oplus (\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) \oplus (\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) \text{ olmak üzere toplam } n \text{ tanedir. Buradan}$$

$$= n \cdot \vartheta_1 \oplus n \cdot \vartheta_2 \text{ yazılabilir. Diğer modül aksiyomlarında kolaylıkla gösterilebilir.}$$

2.2. Değişmeli Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modüller ilk olarak 1950 yılında Whitehead tarafından homotopi tipleri 2 –tip olan basit bağlantılı topolojik uzaylara cebirsel bir model olarak tanımlanmıştır (Whitehead, 1950). Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller ve bunların kategoriksel özellikleri T.Porter tarafından incelenmiş ve bazı yapıları ile özellikle cat-cebirler ve simplisel cebirler ile olan yakın ilişkisi ispatlanmıştır (Porter, 1986).

Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı tanımlamadan önce bazı ön bilgileri hatırlayalım.

Cebir Etkisi

Tanım2.2.1. F ve G iki R -cebir olsun. G nin F üzerine cebir etkisi

$$G \times F \rightarrow F$$

$$(g, f) \rightarrow g \cdot f$$

ile gösterilen bir fonksiyon olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$1) g \cdot (f_1 + f_2) = g \cdot f_1 + g \cdot f_2$$

$$2) (g_1 \cdot g_2) \cdot f = g_1 \cdot (g_2 \cdot f)$$

$$3) (g_1 + g_2) \cdot f = g_1 \cdot f + g_2 \cdot f$$

$$4) g (f_1 \cdot f_2) = (g \cdot f_1) \cdot f_2$$

Bu etki varsa F bir G -cebir olur.

Tanım:2.2.2. F ve G iki R -cebir (değişmeli) G nin F üzerine cebir etkisi var ve $\gamma : F \rightarrow G$ bir cebir homomorfizmi aşağıdaki özellikleri sağlarsa

$$\gamma (f_1 + f_2) = \gamma(f_1) + \gamma(f_2)$$

$$\gamma (f_1 \cdot f_2) = \gamma(f_1) \cdot \gamma (f_2)$$

$$\gamma (r \cdot f_1) = r \gamma (f_2)$$

Buna göre γ bir lineer dönüşümdür. Eğer aşağıdaki iki şart sağlanırsa γ ya çaprazlanmış modül denir.

1. Her $g \in G, f \in F$ için

$$\gamma(g \cdot f) = g \cdot \gamma(f)$$

olmalıdır. Sadece bu ilk şart sağlanırsa buna ön çaprazlanmış modül denir.

2. Her $f', f \in F$ için

$$f \cdot \gamma(f') = f \cdot f'$$

olmalıdır. Burada

$$0 = f \cdot f' - f \cdot \gamma(f')$$

olur.

Örnek 2.2.3. $id : F \rightarrow F$ birim dönüşüm olsun. Her $f', f \in F$ için

$$f' \cdot f = f' \cdot f$$

ile tanımlanabilir. Yani F nin ikinci işlemi etki verilir. Böylece

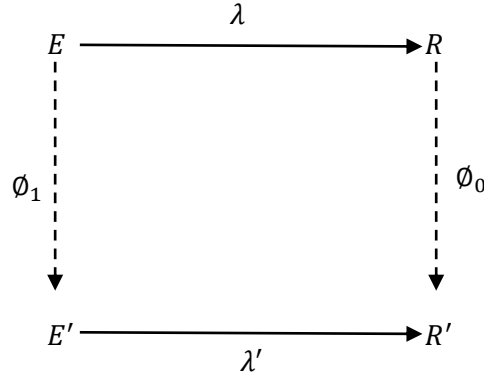
$$f \cdot \gamma(f') = f \gamma(f') = f f'$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomu elde edilir.

2.3. Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

$A : E \xrightarrow{\lambda} R$ ve $A' : E' \xrightarrow{\lambda'} R'$ birer değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül olsunlar

$\emptyset : A \rightarrow A', \emptyset = (\emptyset_1, \emptyset_0)$ şeklinde cebir homomorfizm çifti olmak üzere eğer aşağıdaki iki şart sağlanırsa $\emptyset$ ye A dan A' ne bir çaprazlanmış modül morfizmi denir.



Diyagram değişmeli olmalıdır. Yani her $\alpha \in E$ için

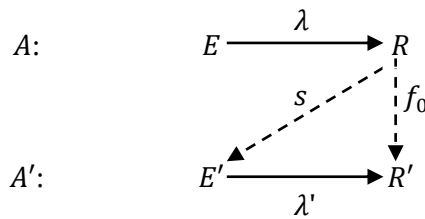
$$\phi_0 \circ \lambda(\alpha) = \lambda' \circ \phi_1(\alpha)$$

olmalıdır. Burada $\phi_0 : R \rightarrow R'$ ve $\phi_1 : E \rightarrow E'$ birer cebir homomorfizmdir.

2. Etkiyi korumalıdır. Yani her $r \in R$ ve $a \in E$ için $\phi_1(r \cdot a) = \phi_0(r) \cdot \phi_1(a)$ olmalıdır. Böylece objeleri $\lambda : E \rightarrow R$ şeklindeki çaprazlanmış modüller ve morfizmleri ise bu şekilde tanımlı homomorfizm çiftleri olan kategoriye yani çaprazlanmış modüller kategorisini oluşturabiliriz. Bu kategorisi $XMod$ ile gösteririz.

2.4. İki Çaprazlanmış Modül Morfizmleri Arasındaki Homotopi

$A : E \xrightarrow{\lambda} R$ ve $A' : E' \xrightarrow{\lambda'} R'$ birer çaprazlanmış modül ve $f_0 : R \rightarrow R'$ bir cebir homomorfizmi olsun. Bunu aşağıdaki diyagramla gösterelim.



$s : R \rightarrow E'$ bir fonksiyon olmak üzere eğer aşağıdaki iki şart sağlanırsa s ye bir f_0 -derivasyon adı verilir.

1. k – *linear* olup her $r, r' \in R$ için $k \in K$ için

$$i) s(r + r') = s(r) + s(r')$$

$$ii) s(k \cdot r) = k \cdot s(r)$$

dir. Burada k bir değişmeli halkadır.

2. $r, r' \in R$ için

$$s(rr') = f_0(r) \cdot s(r') + f_0(r') \cdot s(r) + s(r)s(r')$$

olmalıdır.

Şimdi iyi bilinen aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.4.1. $A : E \xrightarrow{\lambda} R$ ve $A' : E' \xrightarrow{\lambda'} R'$ birer çaprazlanmış modül olsunlar.

$(f_1, f_0) : A \rightarrow A'$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun. $g_0 : R \rightarrow R'$ ve

$g_1 : E \rightarrow E'$ birer cebir homomorfizm olsun. Bu verileri aşağıdaki diyagramla

özetleyelim.

$$\begin{array}{ccc}
 A: & \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\lambda} & R \\ \downarrow f_1 & \searrow s & \downarrow f_0 \\ E' & \xrightarrow{\lambda'} & R' \end{array} & \\
 A': & &
 \end{array}$$

$r \in R, e \in E$ için

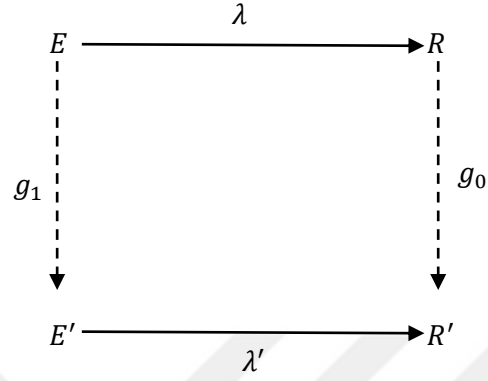
$$g_0(r) = f_0(r) + \lambda' \circ s(r)$$

$$g_1(e) = f_1(e) + (s \circ \lambda)(e)$$

oluyorsa bu durumda g de A dan A' ne bir çaprazlanmış modül olur.

İspat:

1.



diyagramı değişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için

$$g_0 \circ \lambda = \lambda' \circ g_1$$

olmalıdır. Her $e \in E$ için

$$\begin{aligned} g_0 \circ \lambda (e) &= g_0(\lambda(e)) = f_0 \circ (\lambda(e)) + \lambda' \circ s(\lambda(e)) \\ &= \lambda' \circ f_1(e) + \lambda' \circ s \circ \lambda(e) \\ &= \lambda' \circ g_1(e) = \lambda'(g_1(e)) \\ &= \lambda'(f_1(e) + s \circ \lambda(e)) \\ &= \lambda' \circ f_1(e) + \lambda' \circ s \circ \lambda(e) \end{aligned}$$

olup

$$g_0 \circ \lambda = \lambda' \circ g_1$$

olduğu görülür.

2. Şimdi etkiyi koruduğunu gösterelim. Her $r \in R$ ve $e \in E$ için

$$g_1(r \cdot e) = g_0(r) \cdot g_1(e)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna g_1 in teoremdeki tanımından

$$g_1(r \cdot e) = f_1(r \cdot e) + s \circ \lambda(r \cdot e)$$

$$= f_0(r) \cdot f_1(e) + s(\lambda(r \cdot e))$$

$$= f_0(r) \cdot f_1(e) + s(r \cdot \lambda(e))$$

olur.

$\lambda(e) = r'$ alalım.

$$= f_0(r)f_1(e) + f_0(r) \cdot s(\lambda e) + f_0(\lambda e) \cdot s(r) + s(r)s(\lambda e)$$

$$= f_0(r)(f_1(e) + s(\lambda e)) + s(r)(f_0(\lambda e) + s(\lambda e))$$

bulunur. Burada

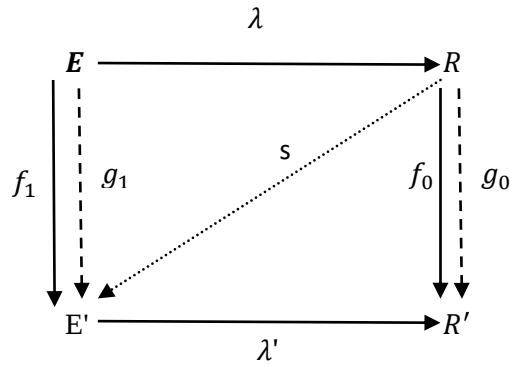
$$g_0(r) \cdot g_1(e) = (f_0(r) + \lambda' \circ s(r)) \cdot (f_1(e) + s \circ \lambda(e))$$

olur.

Tanım2.4.2. $A, E \xrightarrow{\lambda} R$ ve $A' : E' \xrightarrow{\lambda'} R'$ birer çaprazlanmış modül $f = (f_1, f_0)$ ve $g = (g_1, g_0)$ önceki teoremden verilen şartları sağlayan A dan A' ne birer çaprazlanmış modül morfizmi ve $s : R \rightarrow E'$ bir f_0 -derivasyon ise

$$(f_0, s) : f \cong g$$

ikilisi ise f den g ye bir homotopi denir. Bunu aşağıdaki diyagram ile özetleyelim:



Sağlaması gereken özellikler aşağıda özetlenmiştir.

1. s bir k – lineer morfizmdir.

2. Her $r, r' \in R$ için

$$s(r \cdot r') = f_0(r) \cdot s(r') + f_0(r') \cdot s(r) + s(r)s(r')$$

3. Her $r \in R$ ve $e \in E$ için

$$g_0(r) = f_0(r) + \lambda' \circ s(r)$$

$$g_1(e) = f_1(e) + s \circ \lambda(e)$$

olur.

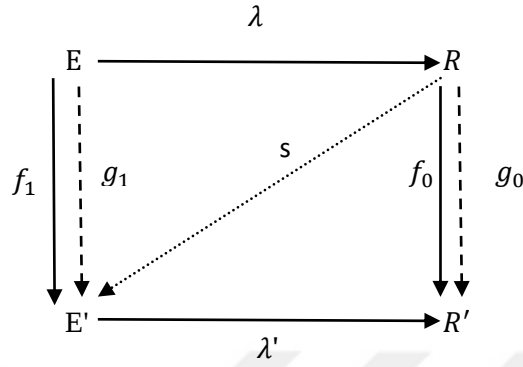
4.

$$g_0 \circ \lambda = \lambda' \circ g_1$$

$$g_1(r \cdot e) = g_0(r) \cdot g_1(e)$$

Şimdi $(f_0, s): f \simeq g$ bir homotopi iken g den f ye homotopinin nasıl olduğunu aşağıdaki ifadelerle verelim.

$f = (f_1, f_0)$ ve $g = (g_1, g_0)$ olmak üzere $\lambda: E \rightarrow R$ çaprazlanmış modülünden $\lambda': E' \rightarrow R'$ çaprazlanmış modülüne birer morfizm olsun ve $s: R \rightarrow E'$ bir derivasyon ve $(f_0, s): f \simeq g$, f den g ye bir homotopi olsun.



Şimdi $g \simeq f$ olup olmadığını gösterelim. Bunun için önce

$$\bar{s} = -s : R \rightarrow E'$$

$$\bar{s}(r) = -s(r), \quad r \in R$$

şeklindeki dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda her $r, r' \in R$ için

$$\begin{aligned} \bar{s}(r r') &= -s(r r') = -(f_0(r) \cdot s(r') + f_0(r') \cdot s(r) + s(r) s(r')) \\ &= -f_0(r) \cdot s(r') - f_0(r') \cdot s(r) - s(r) s(r') + \\ &\quad s(r) s(r') - s(r) s(r') \\ &= -f_0(r) \cdot s(r') - (\lambda' \circ s(r) \cdot s(r')) - f_0(r') \cdot s(r) - \lambda \circ (s(r')) \cdot s(r) \\ &\quad + s(r) s(r') \\ &\quad \lambda'(s(r) \cdot s(r')) = s(r) \cdot s(r') \\ &\quad \lambda(a) \cdot a' = a a' \\ &= -(f_0(r) + \lambda' \circ s(r)) \cdot s(r') - (f_0(r') + \lambda' s(r')) \cdot s(r) + s(r) s(r') \\ &= -g_0(r) \cdot s(r') - g_0(r') \cdot s(r) + s(r) s(r') \cdot (-s(r)) \cdot (-s(r')) \\ &= g_0(r) \cdot \bar{s}(r') + g_0(r') \cdot \bar{s}(r) + \bar{s}(r) \bar{s}(r') \\ &\quad f_0(r) = g_0(r) + \lambda' \bar{s}(r) \end{aligned}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$g_0(r) = f_0(r) + \lambda' \circ s(r)$$

olduğundan

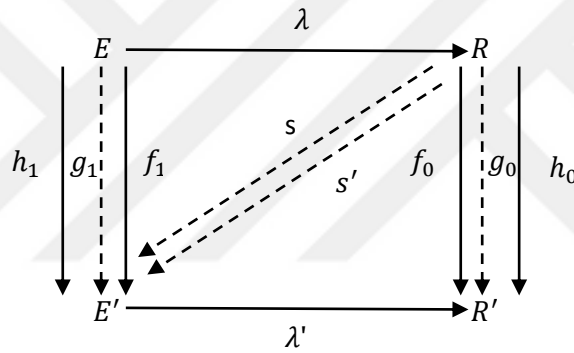
$$\begin{aligned}
 f_0(r) &= g_0(r) - \lambda' \circ s(r) \\
 &= g_0(r) + \lambda' \circ \bar{s}(r)
 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$(g_0, \bar{s}) : g \simeq f$$

şeklinde homotopi olur.

Teorem:2.4.3. f, g ve $h : A \rightarrow A'$ tanımlı birer çaprazlanmış modül morfizm olsun. s f_0 -derivasyon $f \simeq g$ ve $s'g_0$ -derivasyon $g \simeq h$ olsun. $s + s' : R \rightarrow E'$ lineer dönüşümü $(s + s')(r) = s(r) + s'(r)$ f_0 -derivasyon ve $f \simeq h$ dir. Yani $f \simeq g$ ve $g \simeq h$ ise $f \simeq h$ dır.



İspat:

$$(f_0, s) : f \simeq g \quad (g_0, s') : g \simeq h$$

homotopi olsun. $(f_0, s + s')$ nin f den h ye bir homotopi olduğunu gösterelim.

1. Her $r \in R$ için

$$\begin{aligned}
 h_0(r) &= g_0(r) + \lambda' \circ s'(r) \\
 &= f_0(r) + \lambda' \circ s(r) + \lambda' \circ s'(r) \\
 &= f_0(r) + \lambda' \circ (s + s')(r)
 \end{aligned}$$

2. Her $e \in E$ için

$$\begin{aligned} h_1(e) &= f_1(e) + s' \circ \lambda'(e) \\ &= g_1(e) + s \circ \lambda(e) + s' \circ \lambda'(e) \\ &= g_1(e) + (s + s') \circ \lambda(e) \end{aligned}$$

olur. Burada ayrıca her $r, r' \in R$ için

$$(s + s')(r r') = s(r r') + s'(r r')$$

$(s + s') \sim f_0$ -derivasyon olur.

$$\begin{aligned} &= f_0(r) \cdot s(r') + f_0(r') \cdot s(r) + s(r) s(r') + g_0(r) \cdot s'(r') + \\ &\quad g_0(r') \cdot s'(r) + s'(r) s'(r') \\ &= f_0(r) \cdot s(r') + f_0(r') \cdot s(r) + s(r) s(r') + (f_0(r) + \lambda' \circ s(r)) \cdot s'(r') \\ &\quad + (f_0(r') + \lambda' \circ s(r')) \cdot s'(r) + s'(r) s'(r') \\ &= f_0(r) \cdot s(r') + f_0(r') \cdot s(r) + s(r) s(r') + f_0(r) \cdot s'(r') + s(r) s'(r') + \\ &\quad f_0(r') \cdot s'(r) + s(r') s'(r) + s'(r) s'(r') \\ &= f_0(r) \cdot (s + s'(r')) + f_0(r') \cdot (s + s'(r)) + s(r) s(r') + s(r) s'(r') \\ &\quad + s(r') s'(r) + s'(r) s'(r') \\ &= f_0(r) \cdot (s + s'(r')) + f_0(r') \cdot (s + s') + (s + s')(r) \cdot (s + s')(r') \end{aligned}$$

olups $+ s' : R \rightarrow E'$ bir f_0 -derivasyon olur. Böylece

$$(f_0, s + s') : f \simeq h$$

şeklinde bir homotopi olur.

2.5. Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopi Sınıfları

A ve A' birer çaprazlanmış modül ve $\text{Hom}(A, A')$ sınıfı A dan A' ne giden çaprazlanmış modül morfizmlerinin sınıfı olur. Önce grupoid kavramını hatırlayalım:

C_1 ve C_0 birer küme olmak üzere;

$$C = C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} C_0$$

diagramı göz önüne alalım. Burada aşağıdaki özellikler sağlanırsa C ye bir grapoid denir.

1. $x, y \in C_0$ olmak üzere $a : x \rightarrow y$ birer morfizmdir ve $a \in C_1$ dir. C_0 in elemanlarına objeler, C_1 in elemanlarına morfizmler denir.

2. $se = te = i_a$ dir. Ayrıca $a : x \rightarrow y \in C_1$ için $s(a) = x$ ve $t(a) = y$ dir.

3. $a : x \rightarrow y$ ve $b : y \rightarrow z$ olmak üzere $b \circ a \in C_1$ dir ve $s(b \circ a) = x = s(a)$, $t(b \circ a) = z = t(b)$ dir.

4. Her $a : x \rightarrow y$ için $a^{-1} : y \rightarrow x$ morfizmi olarak ve $a \circ a^{-1} = e(x)$ dir, $a^{-1} \circ a = e(y)$ dir.

Bu şartlar altında ;

$$C = C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} C_0$$

yapısına birgrupoid denir. Şimdi $Hom(A, A')$ nin bir grupoid olduğunu gösterelim. Objeler $C_0 = Hom(A, A')$ dir. Yani f, g, h şeklindeki A dan A' ne giden çaprazlanmış modül morfizmleri objelerdir. f den g ye giden $\emptyset$ morfizleri ise $(f_0, s) : f \cong g$ şeklinde homotop olma bağlantısıdır. Yani $\emptyset = (f_0, s) : f \cong g$ iken ; $\emptyset$ lerin oluşturduğunu yani f den g ye giden tüm homotopilerin oluşturduğu sınıfı C_1 ile gösterirken

$$C = C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} C_0$$

yapısı bir grupoid oluşturur. Burada ,

$$s(f_0, s) = s(\emptyset) = f_1$$

$$t(f_0, s) = g$$

dir.

$(f_0, s): f \simeq g$ ve $(g_0, s'): g \simeq h$ olsun. Önceki teoremlerde $(f_0, s + s'): f \simeq h$ olduğunu gösterdik. O halde $(f_0, s) \circ (g_0, s') = (f_0, s + s')$ şeklinde işlem tanımlanabilir. Ayrıca

$\emptyset = (f_0, s): f \simeq g$ iken $\emptyset^{-1} = (f_0, \bar{s}): g \simeq f$ olduğunu da biliyoruz. Böylece

$$C = C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} C_0$$

bir grupoid oluşturur.. Burada bir $f \in C_0 = \text{Hom}(A, A')$ için $e(f)$ şu şekilde tanımlanır.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\lambda} & R \\ \downarrow f_1 & \searrow 0 & \downarrow f_0 \\ E' & \xrightarrow{\lambda'} & R' \end{array}$$

(Note: The diagram shows a commutative square with solid arrows $\lambda, \lambda', f_1, f_0$ and a dotted diagonal arrow 0 from E to E' . Dashed vertical lines also connect E to E' and R to R' .)

$e(f) = (f_0, 0)$ şeklinde olur. O halde

$$f_0(r) = f_0(r) + \lambda' \circ s(r)$$

$$= f_0(r) + \lambda' \circ 0(r)$$

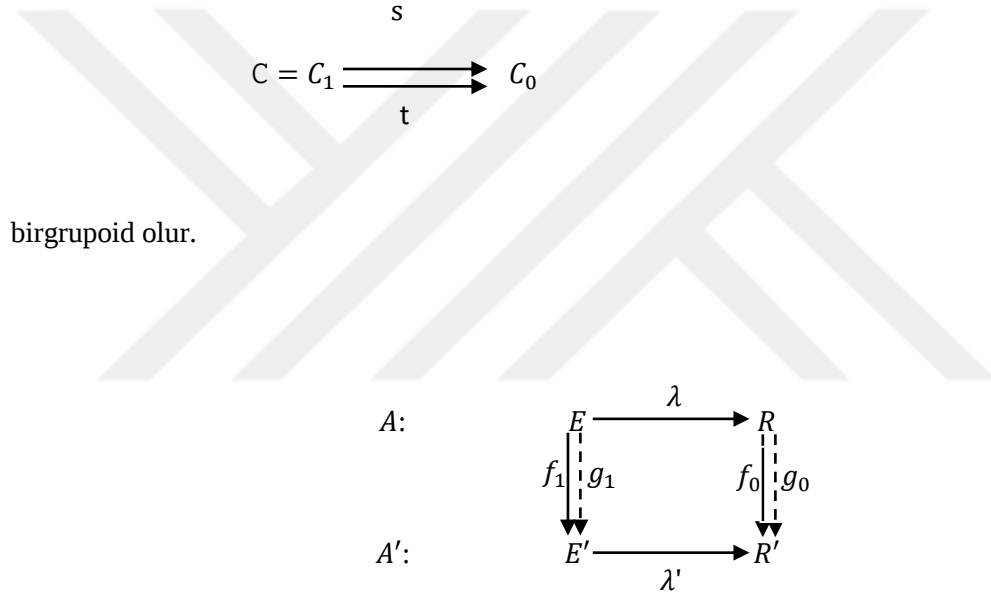
$$= f_0(r) + \lambda'(0)$$

$$= f_0(r)$$

olur.

Ayrıca $(f, 0): f \simeq f$ olup $s(e)(f) = s(f, 0) = f = id(f)$ ve $t(e)(f) = f$

elde edilir. Sonuç olarak ;



$$\text{Hom}(A, A') : (f_1, f_0) = f \simeq g = (g_1, g_0)$$

$$x : \simeq : f \simeq g$$

$$s(x) = f, \quad t(x) = g$$

olur. Sonuç olarak

$$C = C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} C_0$$

yapısı bir groupoid olur.

3.ÖRGÜLÜ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE HOMOTOPİLERİ

Grupoidler üzerinde bir çaprazlanmış modül

$$C_2 \xrightarrow{\delta} C_1 \xrightleftharpoons[t]{s} C_0$$

Şeklinde bir diyagram ile gösterilir. Bu yapılar üzerinde C_0 in C_1 ve C_2 nin üzerine soldan ve sağdan bir etkileri tanımlanmış ve daha sonra $\{-, -\} : C_1 \times C_1 \rightarrow C_2$ braiding yani örgüleme dönüşümü tanımlanarak yani bir cebirsel model olan örgülü düzenli çaprazlanmış modüller ve groupoidler üzerinde Brown ve Gilbert tarafından tanımlanmıştır. (Brown ve Gilbert, 1989). Bu yapının 2_ çaprazlanmış modül ve simplisel gruplar ile olan ilişkileri incelenmiştir. Arvasi ve Ulualan , 2007 de örgülü çaprazlanmış modüller ile simplisel gruplar arasındaki ilişkiyi Peiffer elemanları yardımıyla yeniden ispatlanmışlardır. (Arvasi ve Ulualan , 2007) . Bu model çaprazlanmış kompleksler kategorisinde tensör çarpım tanımlanarak ortaya çıkmıştır. C bir çaprazlanan kompleks olmak üzere $m : C \otimes C \rightarrow C$ tensör çarpım özelliklerini sağlayan dönüşüm olmasıyla birlikte (C, m) ikilisinin ≤ 2 hali örgülü düzenli çaprazlanmış modül yapısını verir.

$$C_2 \xrightarrow{\delta} C_1 \xrightleftharpoons[t]{s} C_0$$

bir örgülü düzenli çaprazlanan modül olduğunda eğer $C_0 = \{e\}$ birim grup ise gruplar üzerinde

$$C_2 \xrightarrow{\delta} C_1$$

şeklinde bir çaprazlanmış modül elde edilir ve $\{-, -\} : C_1 \times C_1 \rightarrow C_2$ örgülenme dönüşümü vardır. Ulualan doktora tezinde bu yapının değişmeli cebirler üzerinde tanımını vermiş ve bazı kategoriler ile olan ilişkileri incelemiştir. (Ulualan, 2004)

3.1 Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış ve Örgülü Çaprazlanmış Modülleri

Şimdi gruplar üzerinde çaprazlanmış modül ve örgülü çaprazlanmış modül tanımını verelim. M ve N iki grup ve N, M grubu üzerine etki etsin . Bu etki aşağıdaki gibi tanımlı bir fonksiyondur:

$$M \times N \rightarrow M$$

$$(m, n) \rightarrow m^n$$

İle gösterilir ve aşağıdaki özellikleri sağlar;

$$1. (m^{n_1})^{n_2} = m^{n_1 \cdot n_2}$$

$$2. (m m')^n = m^n m'^n$$

$$3. m^e = m, e^n = e \text{ dir.}$$

N, M grubu üzerine yukardaki gibi etki etsin ve $\lambda : M \rightarrow N$ bir grup

homomorfizmi olsun. Eğer her $m \in M$ ve $n \in N$ için

$$1. \lambda(m^n) = n^{-1} \lambda(m) n$$

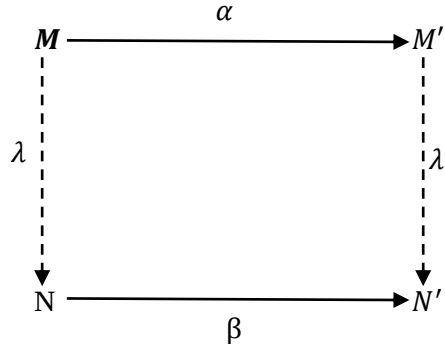
$$2. m^{\lambda m'} = (m')^{-1} m m'$$

Özellikleri sağlanıyorsa λ ya bir çaprazlanmış modül (gruplar üzerinde) denir.

$\lambda : M \rightarrow N$ ve $\lambda' : M' \rightarrow N'$ birer (gruplar üzerinde) çaprazlanmış modül olsun.

$\alpha : M \rightarrow M'$ ve $p : N \rightarrow N'$ birer grup homomorfizmi ve aşağıdaki şartları sağlansın.

1.



diyagramı değişmelidir. Yani $\lambda' \circ \alpha = \beta \circ \lambda$ dır.

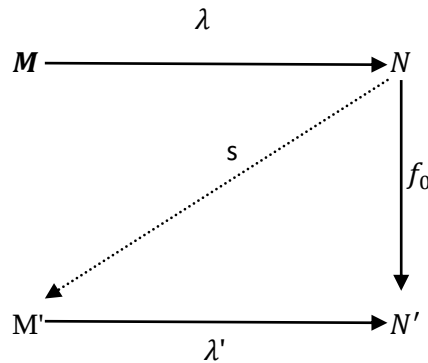
2. Her $m \in M$ ve $n \in N$ için

$$\alpha(m^n) = \alpha(m)^{\beta(n)} \text{ dir.}$$

Bu şartlar altında $(\alpha, \beta) : \lambda \rightarrow \lambda'$ homomorfizm çiftine gruplar üzerinde çaprazlanmış modüllerin morfizmi denir.

3.2. Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modül Homotopileri

Şimdi kabul edelim ki $\lambda : M \rightarrow N$ ve $\lambda' : M' \rightarrow N'$ birer çaprazlanmış modül ve $f_0 : N \rightarrow N'$ bir grup homomorfizmi olur. $S : N \rightarrow M'$ bir dönüşüm olmak üzere ve



diyagramı değişmeli olsun. Yani $\lambda' \circ s = f_0$ olmak üzere aşağıdaki şart sağlanırsa S ye bir f_0 -derivasyon fonksiyonu veya f_0 -derivasyon fonksiyonu denir.

$$s(nn') = f_{0(n)} s(n') \cdot s(n)^{f_{0(n')}} \cdot s(n)s(n')$$

Şimdi çok iyi bilinen aşağıdaki teoremi ilerde kullanacağımız için verelim.

Teorem3.1.1. $(f_1, f_0): (\lambda : M \rightarrow N) \rightarrow (\lambda' : M' \rightarrow N')$ bir çaprazlanmış modül morfizm olsun . (g_1, g_0) çiftide ,

$$g_0: N \rightarrow N'$$

ve

$$g_1: M \rightarrow M'$$

birer grup homomorfizmi olsun. Eğer $S : N \rightarrow M'$ bir f_0 -derivasyon olmak üzere

$$g_0(n) = f_0(n)\lambda' s(n)$$

$$f_1(m) = f_1(m)s(\lambda(m))$$

Özelliklerini sağlıyorsa (g_1, g_0) çifti λ dan λ' ne bir çaprazlanmış modül morfizmi olur. Bu teoremin ispatını değişmeli cebirler üzerinde bir önceki bölümde verdik.

3.3. Gruplar Üzerinde Örgülü Çaprazlanmış Modüller

Örgülü çaprazlanmış modüller , örgülü regüler çaprazlanmış modüllerin indirgenmiş halidir. Bu tanımı ilk olarak Brown and Gilbert yapmıştır. Bu yapının Moore komplekslerin boyu ≤ 2 olan indirgenmiş simplisel gruplar ile olan ilişkisi incelenmiştir. (Arvasi ,Kocak ve Ulualan , 2004), Arvasi ve Ulualan örgülü ve düzenli çaprazlanmış modüller ile simplisel gruplar arasındaki ilişkiyi yeniden kısa bir yol ile ispatlamışlardır.(Arvasi , Ulualan. 2007)

Tanım 3.2.1. $\lambda : M \rightarrow N$ gruplar üzerinde bir çaprazlanmış modül olsun.

$$\{ -, - \}: N \times N \rightarrow M$$

örgülenme dönüşümü olarak adlandırılan ve aşağıdaki şartları sağlayan $\{ -, - \}$ dönüşümü ile birlikte , λ ya örgülü çaprazlanmış modül denir.

Her $a, a', b, b' \in N$ ve $x, y \in M$ dir.

$$1. \{a, b b'\} = \{a, b\}^{b'} \{a, b'\}$$

$$2. \{a a', b\} = \{a', b\} \{a, b\}^{a'}$$

$$3. \{\lambda a, b\} = [b, a] = b^{-1} a^{-1} b$$

$$4. \{a, \lambda_y\} = y^{-1} y^a$$

$$5. \{\lambda_x, b\} = (x^{-1})^b u$$

Şimdi kabul edelim ki ;

$$\lambda : M \rightarrow N$$

$$\lambda' : M' \rightarrow N'$$

olmak üzere ,

$$\{, \} : N \times N \rightarrow N$$

$$\{, \}' : N' \times N' \rightarrow M'$$

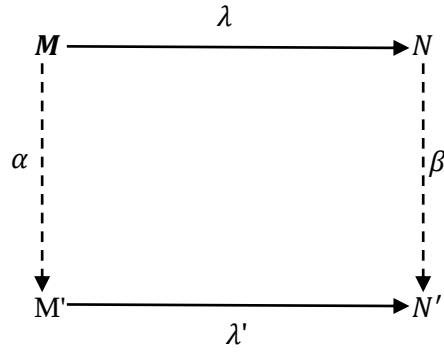
örgülenme dönüşümleri ile birlikte birer örgülü çaprazlanmış modül olsun.

$$\alpha : M \rightarrow M'$$

$$p : N \rightarrow N'$$

çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa (α, β) çiftine örgülü çaprazlanmış modül morfizmi denir.

1.



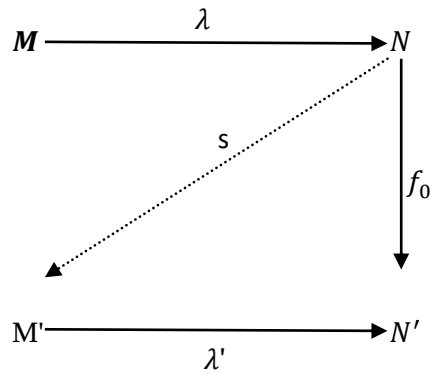
diyagramı değişmeli değildir. Yani $\beta \circ \lambda = \lambda' \circ \alpha$ dir.

2. $\alpha(m^n) = \alpha(m)^{\beta(u)}$ dir.

3. $n, n' \in N$ için $\alpha(\{n, n'\}) = \{\beta(n), \beta(n')\}'$ olmalıdır.

$(\lambda : M \rightarrow N, \{-, -\})$ ve $(\lambda' : M' \rightarrow N', \{-, -\})$ birer örgülü çaprazlanmış modül ve $S :$

$N \rightarrow M'$ aşağıdaki özelliği sağlayan bir dönüşüm olsun.



1. $f_0 : N \rightarrow N'$ bir grup homomorfizmdir ve $\partial' \circ s = f_0$ dir.

2. Her $e, e' \in N$ için

$$s(e e') = \{\lambda'(s(e)), f_0(e')\}' \cdot \{f_0(e), \lambda'(s(e'))\}' \cdot s(e')^{\lambda'_2(s(e))} \cdot s(e)^{\lambda(s(e'))^{-1}}.$$

$s(e) \cdot s(e')$ dir.

Bu dönüşümüne f_0 -derivasyon dönüşümü denir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.2.3.

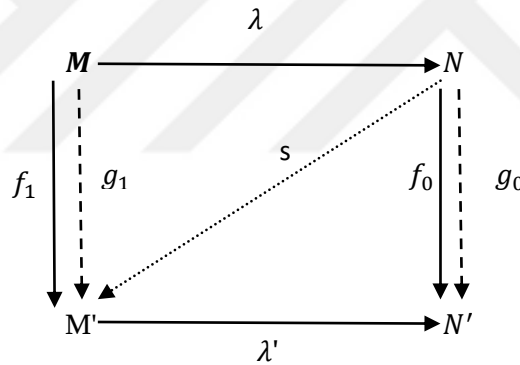
$(\lambda : M \rightarrow N, \{-, -\})$ ve

$$(\lambda' : M' \rightarrow N', \{-, -\}')$$

birer örgülü çaprazlanmış modül ;

$$(f, f_0) : (\partial ; M \rightarrow N) \rightarrow (\partial' : M' \rightarrow N')$$

bir örgülü çaprazlanmış modül morfizmi ve $s : N \rightarrow M'$ bir f_0 -derivasyon olsun.



Eğer (g_0, g_1) aşağıdaki özellikleri sağlayan birer grup iseler (g_1, g_0) çifti de bir örgülü çaprazlanmış modül morfizmi olur.

$$1. g_0(n) = f_0(n)\lambda'(s(n))$$

$$2. g_1(m) = f_1(m)s\lambda(m)$$

Bu teoremin ispatı burada ihmal edilmiştir. Bir sonraki bölümde bu teoremin değişmeli cebirler üzerine daha detaylı olarak ispat edeceğiz.

4.DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNE ÖRGÜLÜ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİNİN MORFİZİMLERİNİN HOMOTOPİLERİ

4.1. Değişmeli Cebirler Üzerine Örgülü Çaprazlanmış Modüllerinin Homotopileri

R, E ye bir cebir etkisine sahip ve R ve E birer k_cebir olmak üzere $\lambda : E \rightarrow R$ bir $k - cebir$ homomorfizm olsun. Bölüm 2 de de değinildiği gibi değişmeli cebirler üzerine çaprazlanmış modül $\lambda(r.e) = r\lambda(e)$ ve $\lambda(e).e' = ee'$ şartlarını sağlıyordu. Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller için örgüleme dönüşümü Ulualan tarafından yapılmış olup bu yapıyla bazı yapıların özellikle simplisel cebirler, kuadratik modüller ile olan ilişkisini ispatlamıştır. (Ulualan , 2004). Şimdi değişmeli cebirler üzerine örgülü çaprazlanmış modül tanımını verelim.

Tanım.4.1.1. E ve R birer $k - cebir$ ve $\lambda : E \rightarrow R$ bir çaprazlanmış modül olsun.

$$\{- \otimes - \} : R \times R \rightarrow E$$

örgülenme dönüşümü olarak adlandırılırken dönüşüm aşağıdaki sağlarsa $(E \rightarrow R, \{- \otimes - \})$ yapısına örgülenmiş çaprazlanmış modül denir.

Her $x, y, z \in R$ ve $a, b \in E$ için

$$1. \lambda \{x \otimes y\} = yx = xy$$

$$2. \{\lambda a \otimes \lambda b\} = ab$$

$$3. \{\lambda a \otimes x\} + \{x \otimes \lambda a\} = 0$$

$$4. \{xy \otimes z\} - \{x \otimes \lambda a\} = 0$$

$C = (\lambda : E \rightarrow R, \{- \otimes - \})$ ve $C' = (\lambda' : E' \rightarrow R', \{- \otimes - \}')$ birer örgülü çaprazlanmış modül olsun. C den C' ye bir f morfizmi $f = (f_1, f_0)$ olmak üzere

$$f_1 : E \rightarrow E', f_0 : R \rightarrow R' \text{ birer } k - cebir \text{ homomorfizmdir.}$$

Eğer

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\lambda} & R \\
 f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 \\
 E' & \xrightarrow{\lambda'} & R'
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise yani ; $f_0 \circ \lambda = \lambda' \circ f_1$ ise ve ayrıca aşağıdaki özellikleri sağlanırsa $(f_1, f_0)'$ a örgülü çaprazlanmış modül morfizmi denir.

1. $e \in E$ ve $r \in R$ için

$$f_1(e, r) = f_1(e) \cdot f_0(r)$$

2. $r, r' \in R$ için ;

$$f_1(\{r \otimes r'\}) = \{f_0(r) \otimes f_0(r')\}'$$

Böylece objeleri $C = (\lambda : E \rightarrow R, \{- \otimes - \})$ şeklindeki örgülü çaprazlanmış modüller ve morfizmleri yukarıdaki gibi tanımlı olan kategoriye örgülü çaprazlanmış modülü oluşturabiliriz.

4.2. Derivasyonlar (Örgülü Çaprazlanmış Modüller İçin)

$\lambda_2 : E \rightarrow R$ bir örgülü çaprazlanmış modül olsun. Aşağıdaki diyagramı ele alalım.

Eğer t fonksiyonu;

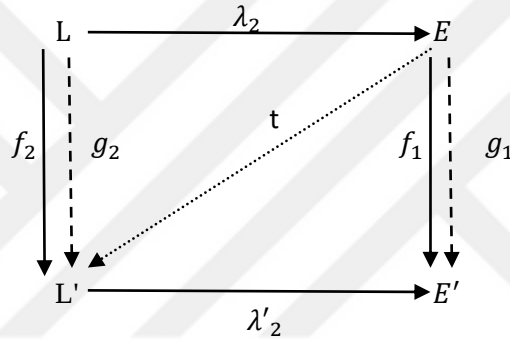
$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\lambda_2} & E \\
 f_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\
 L' & \xrightarrow{\lambda'_2} & E'
 \end{array}$$

$$t(e \cdot e') = \{\lambda_2' \circ t(e) \otimes f_1(e')\}' + \{f_1(e) \otimes \lambda_2' \circ t(e')\}' + \lambda_2' \circ t(e) \cdot t(e') - \lambda_2' \circ t(e') \cdot t(e) + t(e) t(e')$$

şartını sağlıyorsa t ye f_1 - derivasyon denir.

Şimdi örgülü çaprazlanmış modül morfizmleri arasındaki homotopileri tanımlayan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 4.2.1. $\lambda_2 : L \rightarrow E$ bir $\{- \otimes -\} : E \times E \rightarrow L$ örgülenme dönüşümü ile birlikte bir örgülü çaprazlanmış modül olsun. (f_1, f_2) de λ_2 den λ_2' 'ne örgülü çaprazlanmış modüllerin bir morfizmi olmak üzere aşağıdaki diyagramı ele alalım.



Burada eğer ;

$$g_1(e) = f_1(e) + \lambda_2' \circ t(e)$$

$$g_2(l) = f_2(l) + t \circ \lambda_2(l)$$

şartlarını sağlayan bir $g = (g_1, g_2)$ varsa g bir örgülü çaprazlanmış modül morfizmi olur.

İspat: $g = (g_1, g_2)$ örgülenmiş çaprazlanmış modül morfizmi olup olmadığını göstereceğiz.

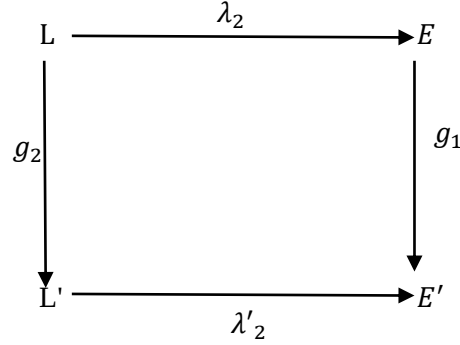
Zaten her $e, e' \in E$ ve $l, l' \in L$ için

$$g_1(e \cdot e') = g_1(e) \cdot g_1(e')$$

$$g_2(l \cdot l') = g_2(l) \cdot g_2(l')$$

şartları vardır.

Ayrıca;



diyagramı değişmeli yani $g_1 \circ \lambda_2 = \lambda_2' \circ g_2$ olmalıdır. Şimdi bu diyagramın değişmeli olup olmadığını kontrol edelim. Her $l \in L$

$$\begin{aligned}
 g_1 \circ \lambda_2(l) &= g_1(\lambda_2(l)) = f_1(\lambda_2(l)) + \lambda_2' \circ t(\lambda_2 l) \\
 &= \lambda_2'(f_2(l)) + \lambda_2'(t \circ \lambda_2(l)) \\
 &= \lambda_2'(f_2(l) + t \circ \lambda_2(l)) \\
 &= \lambda_2' \circ g_2(l)
 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 g_2(e \cdot l') &= f_2(e \cdot l') + t \circ \lambda_2(e \cdot l') \\
 &= g_1(e) \cdot g_2(l')
 \end{aligned}$$

olup olmadığını gösterelim. Here, $e' \in E$ ve $l, l' \in L$

$$\begin{aligned}
 g_2(e \cdot l) &= f_2(e \cdot l) + t \circ \lambda_2(e \cdot l) \\
 \lambda_2(e \cdot l) &= e \lambda_2(l)
 \end{aligned}$$

çaprazlanmış modül 1 kuralından

$$f_1(e) \cdot f_2(l) + t(e \lambda_2 l)$$

$\lambda_2 l = e'$ diye düşünersek, yukarıda verdiğimiz $t(e e')$ açılımından;

$$\begin{aligned}
 &f_1(e) \cdot f_2(l) + \{\lambda_2' t(e) \otimes f_1(\lambda_2 l)\}' + \{f_1(e) \otimes \lambda_2' \circ t(\lambda_2 l)\}' + \\
 &\lambda_2' \circ t(e) \cdot t(\lambda_2 l) - \lambda_2' \circ t(\lambda_2 l) \cdot t(e) + t(e) t(\lambda_2 l) \\
 &\{\lambda_2' l \otimes \lambda_2' e'\} = l e'
 \end{aligned}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned}
&= f_1(e) \cdot f_2(l) + \{\lambda_2'(t(e)) \otimes \lambda_2(f_2(l))\}' + \{f_1(e) \otimes \lambda_2' \circ t(\lambda_2 l)\}' + \\
&\quad \lambda_2' \circ t(e) \cdot t(\lambda_2 l) - \lambda_2' \circ t(\lambda_2 l) \cdot t(e) + t(e) \cdot t(\lambda_2 l) \\
&= f_1(e) \cdot f_2(l) + t(e) \cdot f_2(l) + f_1(e) \cdot t(\lambda_2 l) + \lambda_2' \circ t(e) \cdot t(\lambda_2 l) \\
&\quad - \lambda_2' \circ t(\lambda_2 l) \cdot t(e) + t(e) \cdot t(\lambda_2 l) \\
&= f_1(e) \cdot f_2(l) + t(e) \cdot f_2(l) + f_1(e) \cdot t(\lambda_2 l) + t(e) \cdot t(\lambda_2 l) - \\
&\quad t(\lambda_2 l) \cdot t(e) + t(e) \cdot t(\lambda_2 l)
\end{aligned}$$

$\lambda_2(a) \cdot a' = a a'$ çaprazlanmış modül 2 kuralından ;

$$\begin{aligned}
&f_1(e) \cdot f_2(l) + t(e) \cdot f_2(l) + f_1(e) \cdot t(\lambda_2 l) + t(e) \cdot t(\lambda_2 l) \\
&g_1(e) \cdot g_2(l) = (f_1(e) + \lambda_2'(t(e)) \cdot (f_2(l) + t(\lambda_2 l) \\
&= f_1(e) \cdot f_2(l) + f_1(e) \cdot t(\lambda_2 l) + \lambda_2'(t(e)) \cdot f_2(l) + \lambda_2'(t(e)) \cdot t(\lambda_2 l) \\
&\quad \lambda_2'(t(e)) \cdot f_2(l) = t(e) \cdot f_2(l)
\end{aligned}$$

ve

$$\lambda_2'(t(e)) \cdot t(\lambda_2 l) = t(e) \cdot t(\lambda_2 l)$$

eşitliklerinden ve gerekli sadeleştirmelerden açıktır ki ;

$$g_2(e \cdot l') = g_1(e) \cdot g_2(l')$$

olur.

$e, e' \in E$ için $\{e \otimes e'\} \in L$ için

$$\{\otimes\}: E \otimes E' \rightarrow L$$

$$g_2(\{e \otimes e'\}) = \{g_1(e) \otimes g_1(e')\}'$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned}
&= g_2(\{e \otimes e'\}) = f_2\{e \otimes e'\} + \cdot t \circ \lambda_2(\{e \otimes e'\}) \\
&= \{f_1(e) \otimes f_1(e')\}' + t(e \cdot e') \quad (\because \lambda_2\{e \otimes e'\} = e \cdot e') \\
&= \{g_1(e) \otimes g_1(e')\}' = f_1(e) + \lambda_2' \circ t(e) \otimes f_1(e') + \\
&\quad \lambda_2 \circ t(e')\}' \\
&= \{f_1(e) \otimes f_1(e')\}' + \{f_1(e') + \lambda_2 \circ t(e')\}' + \{\lambda_2' \circ t(e) \otimes f_1(e')\}' + t(e) \cdot t(e')
\end{aligned}$$

$$= g_2 (\{ e \otimes e' \} = \{ g_1(e) \otimes g_1(e') \})'$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.2.2. Yukarıda teoremin şartlarını sağlayan $t : E \rightarrow L'$ derivasyon dönüşümüne $f = (f_1, f_2)$ ve $g = (g_1, g_2)$ morfizmleri arasındaki homotopi denir.

Teorem 4.2.3. $f = (f_1, f_2)$ olmak üzere $A \rightarrow A'$ tanımlı örgülü çaprazlanmış modül olsun.

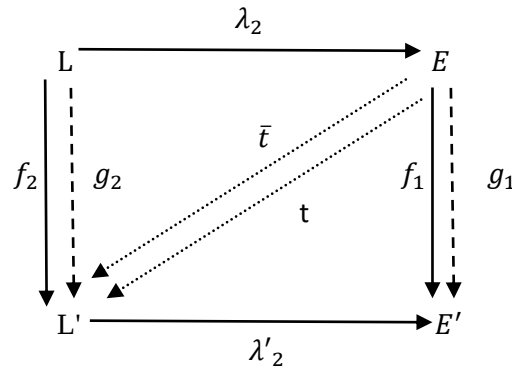
$f \simeq f$ ve t, f_1 -derivasyon olarak tanımlı $t : E \rightarrow L'$, $t(e) = 0_{L'}$ dir.

İspat : $t(e \cdot e') = 0_{L'}$ olmalı f_1 -derivasyon,

$$\begin{aligned} t(e, e') &= \{\lambda_2' \circ t(e) \otimes f_1(e')\}' + \{f_1(e) \otimes \lambda_2' \circ t(e')\}' + t(e) \cdot t(e') \\ &= \{0_{L'} \otimes f_1(e')\}' + \{f_1(e) \otimes 0_{L'}\}' + 0_{L'} \cdot 0_{L'} \\ &= 0_{L'} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.2.4. $f = (f_1, f_2)$ ve $g = (g_1, g_2)$ $A \rightarrow A'$ ya tanımlı örgülü çaprazlanmış modül morfizm olsun. t, f_1 -derivasyon $f \simeq g$ ve $t : E \rightarrow L'$ lineer dönüşüm var olsun. $g \simeq f, g_1$ -derivasyon olmak üzere $\bar{t}(e) = -t(e)$ olur.



Burada eğer ;

$t, f \simeq g$ ye f_1 -derivasyon olduğundan

$$f_1(e) = g_1(e) + \lambda_2' \circ \bar{t}(e)$$

$$f_2(l) = g_2(l) + \bar{t} \circ \lambda_2(l)$$

$$g_1(e) = f_1(e) + \lambda_2' \circ t(e)$$

$$g_2(l) = f_2(l) + t \circ \lambda_2(l)$$

$$f_1(e) = g_1(e) - \lambda_2' \circ t(e)$$

$$f_1(e) = g_1(e) + \lambda_2' \circ \bar{t}(e)$$

$$\bar{t}(e \cdot e') = -t(e, e')$$

$$\bar{t}(ee') = -[\{\lambda_2' \circ t(e) \otimes f_1(e')\}' + \{f_1(e) \otimes \lambda_2' \circ t(e')\}' + \lambda_2' \circ t(e) \cdot t(e') - \lambda_2' \circ t(e') \cdot t(e) + t(e) t(e')]$$

$$= \{\lambda_2' \circ \bar{t}(e) \otimes f_1(e')\}' + \{f_1(e) \otimes \lambda_2' \circ \bar{t}(e')\}' + \lambda_2' \circ \bar{t}(e) \cdot \bar{t}(e') - \lambda_2' \circ \bar{t}(e') \cdot \bar{t}(e) + \bar{t}(e) \cdot \bar{t}(e')$$

$$= \{\lambda_2' \circ \bar{t}(e) \otimes f_1(e')\}' + \{f_1(e) \otimes \lambda_2' \circ \bar{t}(e')\}' - t(e) \cdot t(e') + t(e) \cdot t(e') - t(e) \cdot t(e')$$

$$= \{\lambda_2' \circ \bar{t}(e) \otimes f_1(e')\}' + \{f_1(e) \otimes \lambda_2' \circ \bar{t}(e')\}' - \lambda_2' \circ \bar{t}(e) \cdot \bar{t}(e') - \lambda_2' \circ \bar{t}(e') \cdot \bar{t}(e) + \bar{t}(e) \cdot \bar{t}(e')$$

$$= -t(e) \cdot f_1(e') - f_1(e) \cdot t(e') - \lambda_2' \circ t(e) \cdot t(e') - \lambda_2' \circ t(e') \cdot t(e) + t(e) \cdot t(e')$$

$$= \bar{t}(e) \cdot f_1(e') + f_1(e) \cdot \bar{t}(e') + \lambda_2' \circ \bar{t}(e) \cdot \bar{t}(e') + \lambda_2' \circ \bar{t}(e') \cdot \bar{t}(e) + \bar{t}(e) \cdot \bar{t}(e')$$

$$= (f_1(e) + \lambda_2' \circ t(e')) \cdot \bar{t}(e') + (f_1(e') + \lambda_2' \circ t(e)) \cdot \bar{t}(e) + \bar{t}(e) \cdot \bar{t}(e')$$

$$= g_1(e) \cdot \bar{t}(e') + g_1(e') \cdot \bar{t}(e) + \bar{t}(e) \cdot \bar{t}(e')$$

$$= \{\lambda_2' \circ \bar{t}(e) \otimes g_1(e')\}' + \{g_1(e') \otimes \lambda_2' \circ \bar{t}(e)\}' + \bar{t}(e) \cdot \bar{t}(e')$$

$$= \bar{t}(ee')$$

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde Örgülenmiş çaprazlanmış modüllerin morfizmleri arasındaki homotopi kavramı incelenmiştir. Çaprazlanmış modüller arasındaki morfizmlerin homotopi sınıflarının groupoid olduğu bu tezde açıklanmıştır. Ancak örgülü çaprazlanmış modüllerin morfizmleri arasındaki homotopilerinin oluşturduğu sınıfın nasıl bir cebirsel model olduğu daha sonraki çalışmalara bırakılmıştır. Bu sınıfın, her örgülü çaprazlanmış modül aslında bir çaprazlanmış modül olduğundan groupoid olduğu açıktır. Ancak örgüleme dönüşümünün nasıl bir etki katacağı çalışmalara devam etmektedir. Bu konudaki öngörümüz bu yapının yani homotopi sınıfının oluşturduğu groupoid yapısının bir whiskered groupoid olacağı yönündedir. .Literatürde Örgülenmiş çaprazlanmış modül yapılarının çeşitli cebirsel versiyonları örneğin Liecebiri, LieRinehartcebiri, vs. olup bu yapılarında morfizmleri arasındaki homotopi kavramı açıklanabilir düzeye getirilmiştir. Ayrıca bu Örgülenmiş çaprazlanmış modül yapısına kategorik olarak denk olan çaprazlanmış kareler, 2- çaprazlanmış modüller veya cat^2 - gruplar, cat^2 - cebirler gibi bazı cebirsel yapıların aralarındaki morfizmlerin homotopileri ve bu homotopilerin sınıfları tanımlanabilir. Bu önerileri tezimizde açık problem olarak bırakılmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Arvasi, Z. (1994). Applications in Commutative Algebra of the Moore complex of a Simplicial Algebra, Ph.D. Thesis, University of Wales, Bangor.
- Arvasi, Z. ve Porter T. (1998). Freeness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, Applied Categorical Structures, Sayı: 6, 455-471.
- Arvasi, Z. ve Porter, T. (1997). Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras. Theory and Applications of Categories. 3, 1, 1-23.
- Arvasi, Z. ve Ulualan, E. (2006). On algebraic models for homotopy 3-types. Journal of Homotopy and Related Structures. 1, 1, 1-27.
- Arvasi, Z. ve Ulualan, E. (2007). 3-types of simplicial groups and braided regular crossed modules. Homology, Homotopy and Applications. 9, 1, 139-161.
- Arvasi, Z., Koçak, M. ve Ulualan, E. (2005). Braided crossed modules and reduced simplicial groups. Taiwanese Journal of Mathematics. 9, 3, 477-488.
- Baez, J.C. ve Neuchl, M. (1996). Higher-dimensional algebra I: Braided monoidal 2-categories. Adv. Math. 121, 196-244.
- Berger, C. (1999). Double loop spaces, braided monoidal categories and algebraic 3-types of spaces. Contemporary Mathematics. 227, 46-66.
- Brown R. ve Loday, J. L. (1987). Van Kampen theorems for diagram of spaces, Topology 26, 311-335.
- Brown, R. ve Wensley, C.D. (1995). On finite induced crossed modules, and the homotopy 2-type of mapping cones, Theory and Applications of Categories, (3) 1, 54-71.
- Brown, R. ve Wensley, C.D. (2003). Computation and homotopical applications of induced crossed modules, Journal of Symbolic Computation 35, 59-72.
- Brown, R. (1987). From groups to groupoids, Bull. London Math. Soc., 19, 113-134.
- Brown, R. ve Gilbert, N.D. (1989). Algebraic models of 3-types and automorphism structures for crossed modules. Proc. London Math. Soc., 3, 59, 51-73.
- Brown, R. ve İçen, İ. (2003). Homotopies and automorphisms of crossed modules over groupoids. Appl. Categorical Structure, 11, 185-206.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Carrasco, P. ve Cegarra, A.M. (1991). Group-theoretic algebraic models for homotopy types. Journal Pure Appl. Algebra, 75, 195-235.
- Castiglioni, J.L. ve Ladra, M. (2008). Peiffer elements in simplicial groups and algebras, Jour. Pure and Applied Algebra, 212, 9, 2115-2128.
- Conduché, D. (1984). Modules croisés généralisés de longueur 2. Jour. Pure and Applied Algebra, 34, 155-178.
- Duskin, J. (1975). Simplicial methods and the interpretation of triple cohomology. Memoirs A.M.S. 3, 163.
- Ellis G.J. (1984). Crossed Modules and Their Higher Dimensional Analogues, Ph.D. Thesis, U.C.N.W.
- Garzon, A.R. ve Miranda, J.G. (1997). Homotopy theory for (braided) cat-groups. Chaiers de Topologie Geometrie Differentielle Categorique, XXXVIII-2.
- Grandje'an, A. R. ve Vale, M.J. (1986). 2-Modulos Cruzados an la Cohomologiade Andr'e-Quillen. Memorias de la Reai Academia de Ciencias, 22.
- Joyal, A. ve Street, R. (1986). Braided monoidal categories. Macquarie Mathematics Report, 860081, Macquarie University.
- Loday, J. L. (1982). Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups. J. Pure and Applied Algebra, Sayı: 24, 179-202.
- May, J.P. (1967). Simplicial objects in algebraic topology. Math. Studies, 11, Van Nostrand.
- Mutlu, A. ve Porter, T. (1998). Applications of Peiffer pairings in the Moore complexes of a simplicial group. Theory and Applications of Categories, 4, 7, 148-173.
- Porter T. (1985). Crossed Modules in Cat and a Brown-Spencer Theorem for 2-categories, Chaiers Topologie Geom. Differentielle Categoriques 26, 381-388.
- Porter, T. (1986). Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles J. Algebra 99, 458-465.
- Porter, T. (1987). Some categorical results in the theory of crossed modules in commutative algebras, J. Algebra 109 415-429.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Porter, T. (1993). n-Type of simplicial groups and crossed n-cubes, *Topology* 32, 5-24.
- Porter, T. ve Kamps, K.H. (2002). 2-groupoid enrichments in homotopy theory and algebra, *K-theory*, 25, 4, 373-409.
- Ulualan E. ve Pak, S. (2013). Braiding for internal categories in the category of whiskered groupoids and simplicial groups, *Turkish Journal of Mathematics*, 37, 1, 145-164.
- Ulualan E. (2004). Değişmeli cebirler üzerinde kuadratik modüller.
- Whitehead, J.H. C. (1949). Combinatorial homotopy II. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 453-496.