T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ORLICZ-SOBOLEV UZAYLARINDA LOKAL OLMAYAN ELİPTİK DENKLEMLERİN BİR SINIFI

**Berat SÜER**

**YÜKSEK LİSANS**

**Matematik Anabilim Dalını**

**Kasım-2019**
**BATMAN**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Berat SÜER tarafından hazırlanan "Orlıcz-Sobolev Uzaylarında Lokal Olmayan Eliptik Denklemlerin Bir Sınıfı" adlı tez çalışması 21/11/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

| **Jüri Üyeleri** | **İmza** |
|---|---|
| **Başkan**<br>Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ | …………………… |
| **Danışman**<br>Dr. Öğr.Üyesi Veyis TURUT | …………………… |
| **Üye**<br>Doç. Dr. Hasan DALMAN | …………………… |

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Şahnaz TIGREK
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Berat SÜER
21/11/2019

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

## ORLICZ-SOBOLEV UZAYLARINDA LOKAL OLMAYAN ELİPTİK DENKLEMLERİN BİR SINIFI

**Berat SÜER**

**Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Dr.Öğr.Üyesi Veyis TURUT**

**2019, 70 Sayfa**

**Jüri**
**Dr.Öğr.Üyesi Veyis TURUT**
**Doç.Dr. Zehra YÜCEDAĞ**
**Doç.Dr. Hasan DALMAN**

İlk bölümde çalışılan konu ile ilgili temel kavramlara notasyonlara, teoremlere ve işlenecek konuları ilgilendiren lebesque ve sobolev uzayına yer verilmiştir.

İkinci bölümde Orlicz uzayları ve Orlicz-sobolev uzayları ve bu uzaylarla ilişkili temel kavramlar, notasyon ve teoremler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde varyasyonel yaklaşım konu edinmiştir. Varyasyonel yaklaşımla ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Varyasyonel yaklaşım bu tez çalışmasına konu olan problemin analizinde kullandığımız bir yöntemdir.

Dördüncü bölüm tez çalışmasının orijinal kısmıdır. Bu bölümde Dirichlet sınır koşulları altında ve Orlicz-Sobolev uzaylarında lokal olmayan bir eliptik denklemin bazı sınıflarının çözümleri ele alınmıştır. Varyasyonel yaklaşım uyguluyarak bu denkleme karşılık gelen enerji fonksiyonelinin yerel minimum olan aşikar çözümleri elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Ginzburg-Landau enerjisi, Lokal olmayan elptik denklemler, Mountain-Pass teoremi, Orlicz-Sobolev uzayları, Varyasyonel yaklaşım,

# ABSTRACT

## MS THESIS

## A CLASS OF NONLOCAL ELLIPTIC EQUATIONS IN ORLICZ-SOBOLEV SPACES

**Berat SÜER**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF BATMAN UNIVERSITY**
**THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE**
**IN MATHEMATIC**

**Advisor: Asst. Prof. Dr. Veyis TURUT**

**2019, 70 Pages**

**Jury**
**Asst. Prof. Dr. Veyis TURUT**
**Assoc.Prof.Dr. Zehra YÜCEDAĞ**
**Assoc.Prof.Dr. Hasan DALMAN**

In the first chapter, the basic concepts related to the subject, notations, theorems and lebesque and sobolev spaces related to the topics to be studied are given.

In the second chapter, Orlicz spaces and Orlicz-sobolev spaces and basic concepts, notation and theorems related to these spaces are discussed.

In the third chapter, we investigate the variational approach. Definitions and theorems related to the variational approach are given. The variational approach is a method used in the analysis of the problem that is the subject of this thesis.

The fourth chapter contains the orginal part of this thesis. In this chapter, we consider solutions of some classes of a nonlocal eliptic equation under the Dirichlet boundry conditions and in Orlicz-Sobolev spaces. Applying the variational appoach to this equation gives trivial solutions, which are local minimum, for the corresponding energy functional.

**Keywords:** Ginzburg-Landau energy, Mountain-Pass theorem, Nonlocal elliptic equations, Orlicz-Sobolev spaces, Variational appoach.

# TEŞEKKÜR

Maddi ve manevi olarak her zaman desteklerini yanımda hissettiğim ANNEME, BABAMA ve beni cesaretlendiren EŞİME,

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde emeği olan Sayın Hocam Doç. Dr. Mustafa AVCİ'ya,

Çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim, zaman ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Berat SÜER
BATMAN-2019

**İÇİNDEKİLER**

## SİMGELER VE KISALTMALAR

**Simgeler**

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{A}$ | : | $A$ kümesinin kapanışı |
| $A^C$ | : | $A$ kümesinin tümleyeni |
| $B_r(x)$ | : | x merkezli r yarıçaplı açık yuvar |
| $B_r[x]$ | : | x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar |
| $B(\Omega)$ | : | $\Omega$ bölgesinde tanımlı tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi |
| $C(\Omega)$ | : | $\Omega$ bölgesinde sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ | : | Lipschitz-sürekli fonksiyonlarından oluşan fonksiyon sınıfı |
| $C_0^\infty(\Omega)$ | : | $\Omega$ bölgesindeki kompakt desteğe sahip fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon sınıfı |
| $C^m(\Omega)$ | : | Kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonların oluşturduğu vektör uzayı |
| $C^m(\overline{\Omega})$ | : | $C_B^m(\Omega)$ uzayının kapalı alt uzayı |
| $D^\alpha u$ | : | $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$ Kısmi türev operatörü, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in N_0^N$ ve $\lvert\alpha\rvert = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$ |
| $ess\sup_{x\in\Omega} \lvert u(x)\rvert$ | : | $\lvert u(x)\rvert$ in $\Omega$ bölgesindeki esas (essential) supremumu |
| $L^p(\Omega)$ | : | $\Omega$ bölgesinde $p$.kuvvetten integrallenebilir ölçülebilir fonksiyonlar uzayı (Lebesgue uzayı) |
| $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ | : | $\Omega$ üzerinde tanımlı Orlicz sınıfı, $\tilde{L}_\Phi(\Omega) = \{u : \Omega \to R \text{ ölçülebilir; } \int_\Omega \Phi(\lvert u(x)\rvert)dx < \infty\}$ |
| $L_{loc}^1(\Omega)$ | : | lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı |
| $p'$ | : | $p$ nin eşleniği $\left(p' = \dfrac{p}{p-1}\right)$ |
| $p^*$ | : | Sobolev kritik kuvveti |
| $R^n$ | : | $n$ -Boyutlu Euclid (Öklid) Uzayı |
| $S_r(x)$ | : | x merkezli r yarıçaplı küre |

| | | |
|---|---|---|
| $\lVert u \rVert$ | : | $u$ nun normu |
| $\lVert\lvert u \rvert\rVert_{\Phi}$ | : | $u$ nun Luxemburg normu |
| $\lVert \cdot \rVert_X$ | : | $X$ normlu uzayında tanımlanan norm |
| $u_n \to u$ | : | Norm (Güçlü) Yakınsama |
| $u_n \rightharpoonup u$ | : | Zayıf yakınsama |
| $X^*$ | : | $X$ uzayının duali |
| $X^{**}$ | : | $X$ uzayının ikinci duali |
| $Vol(\Omega)$ | : | $\Omega$ nın hacmi |
| $W^{m,p}(\Omega)$ | : | Sobolev uzayı, $W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \le \lvert\alpha\rvert \le m)\}$ |
| $(W^{1,\Phi}(\Omega))^*$ | : | $W^{1,\Phi}(\Omega)$ nin (sürekli) dual uzayı |
| $\Omega$ | : | $R^N$ de açık bölge |
| $\lvert\Omega\rvert$ | : | $\Omega \subset R^N$ bölgesinin Lebesgue ölçümü |
| $\bar{\Phi}$ | : | $\Phi$ nin eşleniği |
| $\nabla$ | : | Gradient |
| $\Delta_p(\cdot)$ | : | $p$-Laplaceoperatörü, $\Delta_p u := \mathrm{div}(\lvert\nabla u\rvert^{p-2}\nabla u)$; $\lvert\nabla u\rvert = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}$ |
| $\hookrightarrow$ | : | Gömme |
| $\overset{z}{\to}$ | : | Zayıf yakınsama |
| $\subset\subset$ | : | Kompakt alt küme |

**Kısaltmalar**

| | | |
|---|---|---|
| div | : | Diverjans |
| hhh | : | Hemen hemen her yerde |
| PS | : | Palais -Smale |
| $\Delta_2$ | : | Delta iki koşulu |

# 1. GİRİŞ

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılacak temel bazı kavramlara, tanım ve teoremlere değinilecektir. Ayrıca, bu bölümde Orlicz uzaylarının özel bir sınıfı olan Lebesgue ve Sobolev uzaylarına değinilecektir.

## 1.1. Normlu Uzay ve İç Çarpım Uzayı

**Tanım 1.1.1.** $X$ boş olmayan bir küme ve $F$ cismi $R$ veya $C$ olsun. Ayrıca, $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in F$ için $X$ de

$$+ : X \times X \to X \qquad\qquad \cdot : X \times F \to X$$
$$(x, y) \to x + y \qquad\qquad (\alpha, x) \to \alpha x$$

işlemleri tanımlansın. Eğer "+" ve "." işlemleri için

**i)** $x + (y + z) = (x + y) + z$

**ii)** $x + y = y + x$

**iii)** $x + 0 = x$

**iv)** $x + (-x) = 0$

**v)** $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

**vi)** $1.x = x$

**vii)** $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

**viii)** $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

özellikleri sağlanıyorsa $X$ 'e $F$ cismi üzerinde bir vektör uzayı veya lineer uzayı denir.

**Tanım 1.1.2.** $X$ bir $F$ cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Bu vektör uzayda

$$\|\cdot\| : X \to R$$
$$x \to \|x\|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon, her $x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in F$ için

**i)** $\|x_1\| \geq 0$ ; $\|x_1\| = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

**ii)** $\|\lambda x_1\| = |\lambda| \|x_1\|$

**iii)** $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$

özelliklerini sağlıyorsa, bu fonksiyona $X$ vektör uzayı üzerinde norm adı verilir ve $\left(X,\|.\|_X\right)$ ikilisine de bir *normlu uzay* denir. $X$ vektör uzayı üzerinde birden fazla norm tanımlanabilir.

$\left(X,\|.\|_X\right)$ normlu uzay ve $d : X \times X \to R$ bir metrik uzay olmak üzere,

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

ile tanımlı $d$ fonksiyonuna $\|.\|$ normu tarafından indirgenen ( genelleştirilen, üretilen) metrik adı verilir. Böylece, her normlu uzaydan kendi normu ile indirgenen metrik altında bir metrik uzay olduğu sonucu elde edilir. Ancak, her normdan bir metrik üretmesine karşılık her metrikten bir norm üretilmez.

**Tanım 1.1.3** $\left(X,\|.\|_X\right)$normlu uzay olmak üzere, herhangi bir $x \in X$ ve $r > 0$ sayısı için;

$B_r\left(x\right) = \left\{y \in X : \|x-y\|_X < r\right\}$ kümesine, $x$ merkezli $r$ yarıçaplı bir açık yuvar (açık top),

$B_r\left[x\right] = \left\{y \in X : \|x-y\|_X \leq r\right\}$ kümesine, $x$ merkezli $r$ yarıçaplı bir kapalı yuvar (kapalı top) ve

$S_r\left(x\right) = \left\{y \in X : \|x-y\|_X = r\right\}$ kümesine de $x$ merkezli $r$ yarıçaplı bir küre denir.

$A \subset X$ olmak üzere, her $x \in A$ için $B_r(x) \subset A$ olacak şekilde bir pozitif $r$ sayısı bulunabiliyorsa $A$ ya açık küme denir.

**Tanım 1.1.4.** $\left(X,\|.\|_X\right)$ bir normlu uzay ve $\left(x_n\right)$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n,m < N_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olacak biçimde $\varepsilon$'a bağlı bir $N_\varepsilon$ pozitif tamsayı varsa, $(x_n)$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Reel sayılarda yakınsaklık kavramını düşündüğümüzde yukarıdaki tanım $n,m \to \infty$ olduğunda $\|x_n - x_m\|_X \to 0$ olmasıyla denktir.

**Tanım 1.1.5.** $\left(X,\|.\|_X\right)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya *tam uzay* denir. Bir normlu vektör uzayı, normdan indirgenen metrik ile tam ise bu uzaya *Banach uzayı* olarak adlandırılır.

**Tanım 1.1.6.** Bir $X$ vektör uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona *fonksiyonel* adı verilir. Bu fonksiyonel,

$$f\left(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2\right) = \beta_1 f\left(x_1\right) + \beta_2 f\left(x_2\right) \;\; ; x_1, x_2 \in X \;\; ve \;\; \beta_1, \beta_2 \in F$$

koşulu altında bir lineer dönüşümdür.

**Tanım 1.1.7.** $\left(X,\|.\|_X\right)$ normlu uzayında tanımlı bütün lineer ve sürekli fonksiyonellerin oluşturduğu uzaya $X$ normlu *uzayının duali* denir ve $X^*$ veya $X'$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Bu uzay,

$$(u+v)(x)=u(x)+v(x) \text{ ve} (cu)(x)=cu(x); \quad u,v\in X^*, x\in X, c\in C,$$

ile tanımlanan noktasal toplam ve çarpma işlemleri ile bir vektör uzayı olur. Bu durumda, bu uzayda herhangi bir $u\in X^*$ elemanının normu

$$\|u\|_{X^*} = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{|u(x)|}{\|x\|_X}$$

şeklinde tanımlanır ve bu norm altında $X^*$ uzayı da *Banach* uzayı olur. Böylece, $X^*$ uzayı da normlu vektör uzayı olduğundan bu uzayın da dual uzayı tanımlanabilir.

**Tanım 1.1.8.** $X^*$ bir normlu uzay olmak üzere, $\left(X^*\right)^* = X^{**}$ ile tanımlanan lineer vektör uzayına $X$ normlu uzayının *ikinci duali* denir ve $X^{**}$ uzayı da bir *Banach* uzayı olur.

Sabit bir $x\in X$ elemanı ve $u\in X^*$ için

$$h: X^* \to R(veyaC)$$
$$u \to h_x(u)=u(x)$$

$$\alpha_x(u)=f(x)$$

Şeklinde bir $h_x$ fonksiyoneli tanımlansın. Bu durumda, her $x\in X$ değerine karşılık bir tek sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden

$$T: X \to X^{**}$$
$$x \to T(x)=h_x(u)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme *kanonik dönüşüm* denir. Eğer, $T$ dönüşümü üzerine ise bu durumda $X$ uzayına *yansımalı( refleksif ) uzay* dadı verilir. Eğer, $X$ uzayı yansımalı uzay ise $X = X^{**}$ eşitliği vardır.

**Tanım 1.1.9.** $\left(X,\|.\|_X\right)$ normlu bir uzay ve $(x_n)$ bu uzayda bir dizi olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı bulunabiliyorsa bu $(x_n)$ dizisine norma göre *yakınsak dizi* veya *güçlü yakınsak dizi* denir ve bu yakınsama $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

**Tanım1.1.10.** $\left(X, \|.\|_X\right)$ normlu uzayında tanımlanan iki farklı norm $\|.\|_{1,X}$ ve $\|.\|_{2,X}$ olsun. Eğer, her $x \in X$ ve $\alpha, \beta > 0$ için

$$\alpha\|x\|_{2,X} \leq \|x\|_{1,X} \leq \beta\|x\|_{2,X}$$

olacak şekilde $\alpha, \beta$ reel sayıları varsa, $\|.\|_{1,X}$ ve $\|.\|_{2,X}$ normlarına *denk normlar* denir.

**Tanım 1.1.11.** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay olsun. Eğer, her $x \in X$ için

$$\|L(x)\|_Y = \|x\|_X$$

Eşitliğini sağlayan ve $X$ uzayını $Y$ uzayı üzerine dönüştüren 1-1 lineer bir $L$ operatörü varsa $X$ ve $Y$ normlu uzaylarına *izometrik olarak izomorfizma* denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir. Bu durumda, $L$ operatörüne de $X$ ve $Y$ normlu uzayları arasında *izometrik izomorfizma* adı verilir. Ayrıca, izometrik olarak izomorf olan uzaylar aynı uzaylar olarak kabul edilir.

**Tanım 1.1.12.** $\left(X, \|.\|_X\right)$ normlu bir uzay ve $A$, $X$ uzayının bir alt kümesi olmak üzere $\overline{A} = X$ oluyorsa $A$ *kümesi* $X$ uzayında *yoğundur* denir. Bununla birlikte $A, B \subset X$ olan iki küme olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her bir $x \in B$ için

$$\|x - y\|_X < \varepsilon$$

Olacak şekilde bir $y \in A$ elemanı mevcut ise $A$ *kümesi* $B$ *kümesin de yoğundur* denir.

**Tanım 1.1.13.** $\left(X, \|.\|_X\right)$ normlu bir uzay olmak üzere, $X$ 'in $A \subset X$ olacak şekilde sayılabilir yoğun bir $A$ alt kümesi varsa $\left(X, \|.\|_X\right)$ normlu uzayına *ayrılabilir uzay* denir.

**Tanım 1.1.14.** $X$ bir $F$ cismi ( $R$ veya $C$ ) üzerinde bir vektör uzay ve bu uzayda

$$\langle .,. \rangle : XxX \to F$$

dönüşümü tanımlansın. Eğer, her $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in F$ için

**i)** $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**ii)** $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ($K = C$ olduğunda $\overline{c}$, $c$ sayısının kompleks eşleniği),

**iii)** $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

özelliklerini sağlayan $\langle .,. \rangle$ dönüşüme *bir iç çarpım* ve $\left( X, \langle .,. \rangle \right)$ ikilisine de bir *iç çarpım uzayı* ( veya ön Hilbert uzayı) adı verilir. Eğer $F$ cismi Reel sayılar cismi olarak alınırsa **ii)** özelliği $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ olur.

$\left( X, \langle .,. \rangle \right)$ bir iç çarpım uzayındaki bir $x \in X$ elemanının normu

$$\|x\|_X = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 1.1.15.** Bir $\left( X, \langle .,. \rangle \right)$ iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi, bu uzaydaki bir elemana yakınsıyorsa, yani $\left( X, \langle .,. \rangle \right)$ iç çarpım uzayı bir Banach uzayı ise $\left( X, \langle .,. \rangle \right)$ uzayına *Hilbert uzay*ı denir.

**Tanım 1.1.16.** $N$ -boyutlu $R^N$, reel Euclid uzayındaki iç çarpımı her $x = \left( x_1, ..., x_N \right), y = \left( y_1, ..., y_N \right) \in R^N$ için

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

olarak tanımlanır. Bir $x = \left( x_1, ..., x_N \right) \in R^N$ elemanının normu ise

$$|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{N} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir ve $R^N$ uzayı, "$\cdot$" iç çarpımı altında bir Hilbert uzayıdır.

**Tanım 1.1.17.** $X$ üzerindeki en zayıf topoloji, $X$ normlu uzayı üzerindeki zayıf topoloji ( *weak topology* ) olur. Bu topoloji ile $X^*$ dual uzayındaki her fonksiyon altında süreklilik korunur ve $X$ uzayı sonlu boyutlu olmadıkça $X$ uzayı üzerindeki zayıf topoloji, norm topolojiden daha zayıftır.

**Tanım 1.1.18.** $\left( X, \|.\|_X \right)$ normlu uzay ve $\left( x_n \right)$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer, her $f \in X^*$ için $n \to \infty$ iken

$$f(x_n) \to f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa o zaman $\left( x_n \right)$ dizisine $x$'e *zayıf yakınsaktır* denir ve $x_n \rightharpoonup x$ veya $x_n \xrightarrow{z} x$ ile gösterilir.

**Teorem 1.1.19.** $\left(X,\|\cdot\|_X\right)$ normlu uzayında bir dizi $\left(x_n\right)$ ve $x \in X$ olmak üzere,

**i)** $x_n \xrightarrow{z} x$ ise $x \in X$ elemanı tektir,

**ii)** $x_n \xrightarrow{z} x$ ise ($\|x_n\|_X$ ) dizisi sınırlıdır.

**iii)** $x_n \xrightarrow{z} x$ ise $\left(x_n\right)$dizisinin her alt dizisi de $x \in X$ ya zayıf yakınsaktır,

**iv)** $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$ (bu önermenin tersi genel olarak doğru değildir),

**v)** $BoyX < \infty$ ise $x_n \to x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{z} x$ olur (Musayev ve Alp, 2000).

**Tanım 1.1.20.** $X$ normlu uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, $A$ kümesindeki elemanlar ile oluşan herhangi bir dizi, $X$ de yakınsak olan ( $A$ kümesindeki bir eleman yakınsayan) bir alt diziye sahip ise $A$ kümesine bir *dizisel kompakt* denir. Eğer $A$ kümesinin kapanışı $\overline{A}$, $X$ normlu uzayında kompakt ise $A$ kümesine $X$ de *önkompakt* denir. $A$ kümesindeki elemanlar ile oluşan herhangi bir dizi, $X$ normlu uzayında zayıf yakınsak olan ( $A$ daki bir elemana yakınsayan) bir alt diziye sahipse $A$ kümesine *zayıf dizisel kompakt* denir.

**Teorem 1.1.21.** Bir $\left(X,\|\cdot\|_X\right)$ Banach uzayı yansımalıdır ancak ve ancak $X$ deki bir

$$B_1[0] = \left\{x \in X : \|x\|_X \leq 1\right\}$$

kapalı yuvarı kompakttır (Musayev ve Alp, 2000).

## 1.2. Operatörler

**Tanım 1.2.1.** $X$ ve $Y$ normlu uzaylar olmak üzere, $L : D_L \subset X \to Y$ dönüşümü her bir $x \in D_L$ elemanını

$$L(x) = Lx = y$$

şeklinde $Y$ uzayında bir tek $y$ elemanına eşleştiriyorsa, $L$ ’e $X$ üzerinde tanımlanmış bir *operatör* veya *dönüşüm* denir. $D_L$ ’e de $L$ operatörünün *tanım kümesi* denir.

**Tanım 1.2.2.** $X$ ve $Y$ aynı $F$ cismi üzerinde iki lineer uzay ve $L{:}X \to Y$ bir operatörü olsun. Eğer $L$ operatör her $x_1, x_2 \in X$ ve $c_1, c_2 \in F$ için

$$L\left(c_1x_1 + c_2x_2\right) = c_1Lx_1 + c_2Lx_2$$

koşulunu sağlanıyorsa $L$’e *lineer operatör* denir.

**Tanım 1.2.3.** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay ve bu uzaylar üzerinde $L: X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer her $(x_n) \subset X$ dizisi için n$\to \infty$ iken

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|Lx_n - Lx\|_Y \to 0$$

oluyorsa *$L$ operatörü $x \in X$ noktasında süreklidir* denir. Ayrıca, $L$ operatörü $X$ uzayında her noktada sürekli ise $L$ operatörü $X$ üzerinde *süreklidir* denir.

**Tanım 1.2.4.** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay ve $L:X \to Y$ operatör olmak üzere, her $x \in X$ için

$$\|Lx\|_Y \leq k\|x\|_X \tag{1.1}$$

olacak şekilde $k > 0$ sabit reel sayısı varsa $L$ operatörüne $X$ üzerinde *sınırlıdır* denir. Ayrıca (1.1) eşitsizliğini sağlayan $k$ reel sayılarının infimumuna *$L$ operatörünün normu* denir ve bu norm aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\|L\| := \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Lx\|_Y}{\|X\|_X}$$

**Tanım 1.2.5**. $X$ ve $Y$ normlu uzayları, $L:X \to Y$ operatörü ve $X$ uzayının sınırlı bir $A$ alt kümesi verilsin. Eğer $L(A)$, $Y$ uzayında ön kompakt ise $L$ *operatörüne kompakt operatör* denir. Eğer $L$ operatörü sürekli ve kompakt ise o zaman $L$ operatörüne *tamamen sürekli operatör* denir.

Her kompakt operatör sınırlı, her sınırlı lineer operatör sürekli olduğundan her kompakt lineer operatör tamamen sürekli olur.

**Tanım 1.2.6.** $X$ ve $Y$ normlu uzaylar olsun. Eğer,

**i)** $X$ uzayı, $Y$ uzayının alt uzayı,

**ii)** Her $x \in X$ için, $I: X \to Y$, $I(x) = x$ şeklinde tanımlanan $I$ birim operatörü

(gömme operatörü) sürekli ise, $X$ uzayı $Y$ uzayına gömülür ve bu gömülme

$$X \to Y$$

veya $X \hookrightarrow Y$ biçiminde gösterilir. $I$ birim operatörü lineer olduğundan **(ii)** koşulu, her $x \in X$ için

$$\|Ix\|_Y \leq k\|x\|_X$$

olacak şekilde bir pozitif $k$ sabitinin varlığına denktir. Ayrıca, eğer $I$ birim operatörü kompakt ise, yani $I$ sürekli ve $X$ uzayına kompakt gömülür.

## 1.3. Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

**Tanım 1.3.1.** $\Omega, R^N$ de açık bölge olsun. Bu bölge üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların oluşturduğu kümeye *sürekli fonksiyonlar uzayı* denir ve $C^0(\Omega)$ ile gösterilir, yani

$$C^0(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to R^N ; f \text{ } fonksiyonu \text{ } sürekli \right\}.$$

Bu uzay üzerinde tanımlanan norm;

$$\| f \|_{C^0(\Omega)} = \sup_{X \in \Omega} \left| f(x) \right| < \infty$$

olup ve bu norm altında $C^0(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır. $|\cdot|, R^N$'da tanımlanan normdur.

**Tanım 1.3.2.** $f$, $R^N$ nin $\Omega$ açık bölgesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in \Omega$ için

$$\left| f(x) - f(y) \right| \le L \left| x - y \right|$$

olacak şekilde bir $L = L(f) \ge 0$ sabiti varsa, $f$ fonksiyonu *Lipschitz koşulunu* sağlar veya *Lipschitz-süreklidir* denir. $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ ile Lipschitz-sürekli fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon sınıfı gösterilir.

## 1.4. Differansiyellenebilir Fonksiyon Uzayı

**Tanım 1.4.1.** $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N)$ negatif olmayan $\beta_i$'lerin $N$-bileşenlisi ise $\beta$'ya *çoklu-indis* denir ve $|\beta| = \sum_{i=1}^{N} \beta_i$ şeklinde yazılır.

Buna göre $1 \le i \le N$ için $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere $D^\beta = D^{\beta_1} D^{\beta_2}, ..., D^{\beta_n}$ olup,

$$D^\beta f(x) = \frac{\partial^{|\beta|} f(x)}{\partial x_1^{\beta_1} ... \partial x_N^{\beta_N}} = D^{\beta_1} f(x) D^{\beta_2} f(x) ... D^{\beta_N} f(x),$$

ifadesine $|\beta|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir.

**Tanım 1.4.2.** Bir $A \subset R^N$ kümesinin kapanışı $\overline{A}$ olmak üzere, $\Omega$, $R^N$ nin bir bölgesi için $\overline{A} \subset \Omega$ ve $\overline{A}$ kümesi $R^N$ in kompakt bir alt kümesi oluyorsa, bu durum $\overline{A} \subset\subset \Omega$

ile gösterilir. $R^N$ de tanımlı ve sonlu bir bölge dışında kendisi ve bütün mertebeden türevleri sıfır olan fonksiyonların sınıfına *kompakt destekli fonksiyonlar* denir ve

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$ oluyorsa, o zaman $u$ fonksiyonu $\Omega$ bölgesinde *kompakt desteğe sahiptir* denir.

**Tanım 1.4.3.** $\Omega$, $R^N$ de açık bir bölge ve $m$ negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. $\Omega$ bölgesinde, $|\alpha| \leq m$ mertebeye kadar bütün $D^\alpha f$ kısmi türevleri sürekli olan $f$ fonksiyonların oluşturduğu uzay $C^m(\Omega)$ vektör uzayıdır. Böylece,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

yazılbilir. Ayrıca, $\Omega$ bölgesinde kompakt desteğe sahip olan ve $C^\infty(\Omega)$ uzayındaki bütün fonksiyonlardan oluşan uzayı $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir ve bu uzayın elamanlarına da *test fonksiyonları* denir.

**Tanım 1.4.4.** Eğer $\Omega$, $R^N$ de açık bir bölge ve $m$ negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. $\Omega$ bölgesinde, $|\alpha| \leq m$ mertebeye kadar bütün $D^\alpha f$ kısmi türevleri sınırlı olduğu $f \in C^m(\Omega)$ fonksiyonların oluşturduğu uzaya $C_B^m(\Omega)$ vektör uzayı adı verilir. Yani,

$$C_B^m(\Omega) := \left\{ f \in C^m(\Omega) : \textit{her } x \in \Omega \textit{ için } D^\alpha \textit{ kısmi türevleri } \Omega \textit{ da sınırlıdır}, 0 \leq |\alpha| \leq \mathrm{m} \right\}$$

Olarak yazılabilir. Bu uzayda tanımlanan norm

$$\|f\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)| \tag{1.2}$$

olup, bu norm altında $C_B^m(\Omega)$ uzayı Banach uzayı olur.

**Tanım 1.4.5.** Eğer $\Omega$, $R^N$ de açık bir bölge ve $m$ negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. $\Omega$ bölgesinde $0 \leq |\alpha| \leq m$ için $D^\alpha u$ kısmi türevleri sınırlı ve düzgün sürekli olan $u \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarından oluşan uzay $C^m(\overline{\Omega})$ ile gösterilir. Bununla beraber, $C^m(\overline{\Omega})$, $C_B^m(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt uzayı olduğu için $C^m(\overline{\Omega})$ uzayı da (1.2)'de tanımlanan norma ile bir Banach uzayı oluşturur.

**Tanım 1.4.6.** $X$ ve $Y$ iki Banach uzay olsun. Eğer, $\varphi : X \to Y$ operatörü her $h \in X$ için

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\left\| \varphi(x+\delta h) - \varphi(x) \right\|_Y}{\delta} = Lh$$

olacak şekilde bir $L$ sınırlı lineer operatörü varsa $\varphi$'e $x \in X$ *noktasında ve h yönünde* *Gâteaux diferansiyellenebilirdir* denir. Böylece $L$ operatörüne de $\varphi$'nin $x$ noktasındaki *Gâteaux türevi* denir ve $u^{'}(x) = L$ şeklinde gösterilir. Eğer, bu durum her $x \in X$ için sağlanıyorsa *u 'a Gâteaux diferansiyellenebilirdir* denir.

**Teorem 1.4.7.** ( Ortalama Değer Teoremi )

$X$ bir Banach uzayı ve $x, y \in X$ olsun. Eğer, $\varphi : X \to Y$ fonksiyoneli Gâteaux diferansiyellenebilir ise o zaman

$$\varphi(x+y) - \varphi(x) = \varphi'(x+ty)y$$

olacak şekilde bir $t \in (0,1)$ reel sayısı vardır (Siddiqi, 2004).

**Tanım 1.4.8.** $X$ ve $Y$ iki Banach uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer, $\varphi : X \to Y$ operatör her $h \in X$ için

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\left\| \varphi(x+h) - \varphi(x) - Lh \right\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

olacak şekilde bir $L$ sınırlı lineer operatörü varsa $\varphi$ operatörüne $x \in X$ noktasında *Frêchet diferansiyellenebilirdir* denir. Burada $L$'ye $\varphi$ operatörünün $x$ noktasındaki *Frêchet türevi* denir ve bu türev $\varphi^{'}(x) = L$ şeklinde gösterilir. Eğer, bu durum her $x \in X$ için mevcut ise $\varphi$ operatörü *Frêchet diferansiyellenebilirdir* denir.

$\varphi : R^N \to R^N$ şeklinde tanımlandığında $\varphi$ operatörünün $x_0$ noktasındaki *Frêchet* türevi, Jacobian matrisi olarak da

$$\varphi'(x_0) = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \Big|_{x=x_0} \right)$$

ile gösterilir.

$\varphi : R^N \to R^N$ şeklinde tanımlandığında ise $\varphi$ fonksiyoneli $x_0$ noktasındaki Frêchet türevi gradient vektörü ile

$$\varphi^{'}(x_0)h = \nabla \varphi(x_0) \cdot h$$

gibi gösterilir. Yukarıdaki eşitlikte "." ise $R^N$ de tanımlanmış olan iç çarpımdır. Yukarıdaki tanımlardan da kolayca anlaşılacağı üzere, eğer $\varphi$ fonksiyonu Frêchet diferansiyellenebilir ise o zaman her $h \in X$ $ve\ \varepsilon > 0$ için

$$\left\|\varphi(x+h)-\varphi(x)-\varphi'(x)h\right\|_Y \le \varepsilon\|h\|_X$$

eşitsizliği sağlayacak ve $\|h\|_X \le \delta$ olacak şekilde $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı bulunabilir.

**Teorem 1.4.9.** $X$ ve $Y$ iki Banach uzay ve $\varphi: X \to Y$ bir operatör olarak verilsin. Eğer $\varphi$ operatörü $x \in X$ noktasında Frêchet diferansiyellenebilir ise $\varphi$ operatörü $x \in X$ noktasında süreklidir. Bu teorem, Gâteaux diferansiyellenebilir fonksiyonlar için genelde geçerli değildir (Siddiqi, 2004).

**Teorem 1.4.10.** Bir fonksiyonel bir noktada Frêchet türeve sahip ise o noktada Gâteaux türevene de sahiptir ve bu iki türev birbirine eşittir (Siddiqi, 2004).

**Tanım 1.4.11.** $X$ ve $Y$ Banach uzayları ve $\varphi: X \to Y$ bir operatörü olmak üzere, eğer $\varphi$ operatörü $x \in X$ noktasında Frêchet diferansiyellenebilir ve $\varphi'$ Frêchet türevi $x \in X$ noktasında sürekli oluyorsa, $\varphi$ fonksiyonu $x \in X$ *noktasında sürekli Frêchet diferansiyellenebilirdir* denir. Eğer, bu durum $X$ uzayındaki her eleman için mevcut ise, $\varphi$ fonksiyonu *sürekli Frêchet diferansiyellenebilirdir* denir ve $\varphi \in C^1(X,Y)$ biçiminde gösterilir ($Y = R$ olduğunda $\varphi \in C^1(X,R)$ yerine kısaca $\varphi \in C^1(X)$ kullanılır ).

## 1.5. Lebesgue Ölçüm ve Ölçülebilir Fonksiyon

**Tanım 1.5.1.** $\mathcal{A}$, $R^N$ nin altkümelerinin bir sınıfı olmak üzere,

**i)** $R^N \in \mathcal{A}$

**ii)** $A \in \mathcal{A}$ iken $A^C \in \mathcal{A}$ oluyor ( $A^C$, $A$ nın tümleyen kümesi)

**iii)** $A_i \in \mathcal{A}$ , $i$=1,2,… iken $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

koşullarını sağlayan $\mathcal{A}$ sınıfına bir $\sigma - cebir$ adı verilir.

**Tanım 1.5.2.** $\mathcal{A}$, $\sigma -$cebir üzerinde tanımlanan $\mu$: $\mathcal{A} \to R^+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu, $\mathcal{A}$ sınıfındaki ayrık kümelerin bir $\{A_i\}_{i \in N}$ topluluğunun sayılabilir her birleşimi için

$$\forall i \ne k \text{ için } A_i \cap A_k = \varnothing \quad \text{ve} \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Eşitliği mevcut ise, $\mu$ fonksiyonuna $\mathcal{A}$ sınıfı üzerinde tanımlanmış bir *ölçüm* denir.

**Tanım 1.5.3.** $R^N$ nin alt kümeleri;

**i)** $R^N$ deki her açık kümeye $\mathcal{A}$ ya aittir,

**ii)** Eğer $A \subset B, B \in \mathcal{A}$ ve $\mu(B) = 0$ ise $A \in \mathcal{A}$ ve $\mu(A) = 0$,

**iii)** $A = \left\{ x \in R^N : a_i \le x_i \le b_i, i = 1, 2, ..., N \right\}$ ise $A \in \mathcal{A}$ ve $\mu(A) = \prod_{i=1}^{\infty} \left( b_i - a_i \right)$,

**iv)** $x \in R^N$ ve $A \in \mathcal{A}$ için

$$x + A = \{ x + y : y \in A \} \in \mathcal{A} \text{ ve } \mu(x + A) = \mu(A)$$

ise $\mu$ ölçümü öteleme altında değişmezdir,

bu özelliklere sahip ise $\sigma$-cebiri olan bir $\mathcal{A}$ sınıfının varlığı ve bu $\mathcal{A}$ sınıfı üzerinde bir $\mu$ ölçümünün varlığı kolaylıkla görülebilir.

Bu özelliklere sahip bir $\mathcal{A}$ sınıfının elemanlarına $R^N$ nin *Lebesgue ölçülebilir altkümeleri,* $\mu$ ölçüm fonksiyonuna $R^N$ *de Lebesgue ölçümü* ve $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A)$ gösterimine ise *A kümesinin ölçümü* denir. Bu çalışma boyunca, $\Omega \subset R^N$ bölgesinin Lebesgue ölçümü $|\Omega|$ ile gösterilecektir.

**Tanım 1.5.4.** $B \subset A \subset R^N$ ve $B \neq 0$ olmak üzere $A - B$ kümesinin her noktasında geçerli olan bir özellik $A$ kümesinin hemen hemen her yerde (h.h.h) geçerli bir özellik adını alır.

**Tanım 1.5.5.** A ölçülebilir bir küme olmak üzere $f : A \to B \cup \{\pm\infty\}$ ile tanımlanan bir $f$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $r \in R$ için

$$\{x \in A : f(x) > r\}$$

kümesi ölçülebilir ise, $f$ fonksiyonuna *ölçülebilir fonksiyon* denir.

**Tanım 1.5.6.** Eğer $f$ fonksiyonu ölçülebilir ve reel değerli ise, o zaman $f$ fonksiyonu $f^+ = \max\{ f, 0 \}$ ve $f^- = -\min\{ f, 0 \}$ ölçülebilir ve negatif olmayan fonksiyonları cinsinden $f = f^+ - f^-$ olarak yazılabilir. Bir $\Omega$ bölgesi üzerinde tanımlanan $\int_\Omega f^+(x)dx$ ve $\int_\Omega f^-(x)dx$ integrallerinden en az biri sonlu olacak şekilde,

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega f^+(x)dx - \int_\Omega f^-(x)dx$$

Olarak yazılabilir.

Eğer her iki integral de sonlu ise $f$ fonksiyonuna $\Omega$ bölgesinde *Lebesgue integrallenebilir* denir. $L^1(\Omega)$, $\Omega$ bölgesinde Lebesgue integrallenebilen fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon sınıfını temsil eder.

## 1.6. Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

**Tanım 1.6.1.** $\Omega$, $R^N$ de ölçülebilir bir küme ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$L^p(\Omega) := \left\{ u \,\middle|\, u : \Omega \to R \ \text{ ölçülebilir fonksiyon; } \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty \right\}$$

ile tanımlanan fonksiyon uzayına *Lebesgue uzayı* adı verilir. $1 \le p < \infty$ olmak üzere $L^p(\Omega)$ uzayında tanımlanan norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := |u|_p = \left( \int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

olup bu norm altında $L^p(\Omega)$ uzayı bir *Banach uzayı* olur.

**Tanım1.6.2.** $u, \Omega$ bölgesinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere h.h.h $|u(x)| \le M$ olacak şekilde bir $M$ sabiti mevcut varsa $u$ fonksiyonuna *hemen hemen sınırlıdır* denir. Bu şekilde elde edilen $M$ sabitlerinin en büyük alt sınırına $|u|$'nun $\Omega$ *bölgesindeki esas (essential) supremumu* denir ve $\operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega} |u(x)|$ ile gösterilir. $L^\infty(\Omega), \Omega$ bölgesinde hemen hemen sınırlı $u$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzayı göstermekte olup, bu uzay

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := |u|_\infty = \operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

**Tanım 1.6.3.** $1 < p < \infty$ iken $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $1 < q < \infty$ olacak şekilde $q = \frac{p}{p-1}$ sayısına $p$ nin *eşleniği (conjugate)* denir.

Bu durumda, $1 < p < \infty$ olmak üzere $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ alınırsa, böylece her $u \in L^p(\Omega)$ için

$$\varphi(u) = \int_\Omega u(x) v(x)\, dx$$

olacak şekilde bir $v \in L^q(\Omega)$ bulunabilir. Ayrıca,

$$|v|_{L^q(\Omega)} = |\varphi|_{(L^p(\Omega))'}$$

normlar arası yukarıdaki ilişki de mevcut olduğundan, $L^{p'}(\Omega) \cong (L^p(\Omega))'$ olduğu görülebilir, yani bu iki uzay izomorfiktir. Dolayısıyla elemanları birbirinden farklı olmasına rağmen, her iki uzay da Banach uzayı olmalarından dolayı aynı kabul edilebilir.

**Teorem 1.6.4.** (*Hölder Eşitsizliği*) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$ ve $v \in L^{p'}(\Omega)$ ise, o zaman $uv \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| dx \leq |u(x)|_p |v(x)|_q$$

eşitsizliği sağlanır (Fan ve Zhao, 2001 ).

**Teorem 1.6.5.** $|\Omega| = \int_\Omega dx < \infty$ ve $1 \leq p \leq q < \infty$ olmak üzere, $u \in L^p(\Omega)$ ise, o zaman $u \in L^q(\Omega)$ olur ve

$$|\boldsymbol{u}|_p \leq |\boldsymbol{\Omega}|^{(1/p)-(1/q)} |\boldsymbol{u}|_q$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece,

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Fan,2003).

**Tanım 1.6.6.** $L^p(\Omega)$ uzayında *p=2* alındığında $L^2(\Omega)$ uzayı

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)} dx \qquad (1.4)$$

iç çarpımı ile Hilbert uzayı olur.

**Teorem 1.6.7.** Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir ve $C_0(\Omega)$ ile $C_0^\infty(\Omega)$ uzayları $L^p(\Omega)$ uzayında yoğundur. Ayrıca, $L^p(\Omega)$ uzayının yansımalıdır ancak ve ancak $1 < p < \infty$. (Adams, 2003).

## 1.7. Sobolev Uzayı $\left(W^{m,p}(\Omega)\right)$

**Tanım 1.7.1.** $\Omega$, $R^N$ de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, $\Omega$ bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde *p*. kuvvetten integralleri $\Omega$ bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L^p_{loc}(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay $p = 1$ için, lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfını gösterir.

**Tanım 1.7.2.** $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $\alpha$ çoklu-indisi verilsin. Eğer, her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega g\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega fD^\alpha \phi dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna $f$ fonksiyonunun $\alpha$*.zayıf türevi* denir. Ayrıca, $g$ fonksiyonuna $f$ fonksiyonunun *genelleştirilimiş türevi* denir ve $g = D^\alpha f$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 1.7.3.** $\Omega$, $R^N$ de bir bölge, $m$ negatif olmayan bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \le |\alpha| \le m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. Yani, kendisi ve $m$. mertebeye kadar bütün genellleştirilmiş türevleri $L^p(\Omega)$ uzayında olan fonksiyonlar uzayına *Sobolev uzayı* denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$1 \le p < \infty \text{ için } \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} |D^\alpha u|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$p = \infty \text{ için } \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} |D^\alpha u|_\infty$$

tanımlanan normlar ile bir Banach uzayı olur.

**Tanım 1.7.4.** $\Omega$, $R^N$ de bir bölge, $m$ negatif olmayan bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere, $\|\cdot\|_{m.p}$ normu ile aşağıda verilen vektör uzayları tanımlanabilir;

**i)** $\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m.p} < \infty\}$ kümesinin tanımlanışı (*comletion*), $H^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı olarak tanımlanır,

**ii)** $C_0^\infty(\Omega)$ uzayını $W^{m,p}(\Omega)$ deki kapanışı, $W_0^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı olarak tanımlanır.

Dikkat edelim ki, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ olup, $1 \le p < \infty$ olduğunda $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğu için $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ olarak yazılabilir. Ayrıca

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi de vardır(Adams, 1975).

**Teorem 1.7.5.** Eğer $1 \le p < \infty$ ve $m$ negatif olmayan bir tamsayı ise $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir. Buna ek olarak, $1 < p < \infty$ ise $W^{m.p}(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve bundan dolayı da yansımalı olur (Fan, 2003).

**Teorem 1.7.6.** Eğer $1 \le p < \infty$ ve $m > 0$ bir tamsayı ise herhangi bir $\Omega$ bölgesi için

$$W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega)$$

eşitliği vardır(Willem, 1996).

**Teorem 1.7.7.** $\Omega$ , $R^N$ de bir bölge olsun.

Eğer $1 \le p < \infty$, $m > 0$ bir tamsayı , $mp < N$ ve $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ise

$$\|u\|_{p^*} \le c\|u\|_{m,p}$$

olacak şekilde bir $C(N,m,p)$ sabiti bulunur(Adams, 1975). Burada

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{n-mp}; N > mp \\ \infty; N \le mp \end{cases}$$

ile tanımlanan p* sayısına *Sobolev kritik kuvveti* denir.

Bir $\Omega \subset R^N$ bölgesinde tanımlanan *Sobolev* uzaylarının özelliklerinin bir çoğu ve özellikle bu uzaylardaki gömülme özelliği, $\Omega$ bölgesinin düzgünlüğüne (*regularity*) bağlıdır. Buna benzer özellikler, verilen bölgede sağlanan veya sağlanmayan geometrik ya da analitik koşullar türünden ifade edilir. Aşağıda bu geometrik özelliklerden biri olan koni özelliğinden bahsedilecektir.

**Tanım 1.7.8.** $R^N$ de $B_{r1}(x)$ ve $x$ noktasını içermeyen $B_{r2}(y)$ açık yuvarlarını ele alalım

$$K_x = B_{r1}(x) \cap \{x + \lambda(z-x) : z \in B_{r2}(y), \lambda > 0\}$$

kümesine *x* tepe noktalı bir *sonlu koni* denir. $\Omega$ ,$R^N$ 'de açık bir bölge olmak üzere, eğer $\Omega$ nın her *x* noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün $K_x$ konileri bir sonlu $K$ konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde edilebiliyor ise, o zaman $\Omega$ *bölgesi koni özelliğini sağlar* denir.

**Teorem 1.7.9.** (*Sobolev Gömme Teoremi*) $\Omega$, $R^N$ de koni özelliğine sahip açık bir bölge , $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

**i)** $mp < N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), \qquad p \leq q \leq q*$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq q*$$

gömmesi elde edilir.

**ii)** $mp = N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), \qquad 1 \leq p < \infty$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad 1 \leq p < \infty$$

gömmesi elde edilir. Ayrıca *p=1* olarak alınırsa

$$W^{j+n,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

**iii)** $mp > N$ ise

$$W^{j+n,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömmesi elde edilir.

Yukarıdaki gömmelerde $W$ yerine $W_0$ uzayı alınırsa, $\Omega$ bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın gömülmeler yine geçerli olur (Adams, 2003).

**Teorem 1.7.10.** Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömmesi bazı $p \leq q$ değerleri için kompaktsa, o zaman $|\Omega| < \infty$ olur (Willem, 1996).

**Teorem 1.7.11.** Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömmesi $1 \leq q < p$ özelliğini sağlayan bazı $p$ ve $q$ değerleri için varsa o zaman $|\Omega| < \infty$ olur (Willem, 1996

**Teorem 1.7.12.** (*Rellich-Kondrachov Teoremi*) $\Omega$, $R^N$ de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $\Omega_0 \subset \Omega$ sınırlı bir alt küme, , $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

i) $mp < N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega_0), \qquad 1 \leq q < q*$$

ii) $mp = N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega_0), \qquad 1 \le q \le \infty$$

iii) $mp > N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega),$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0), \qquad 1 \le q \le \infty$$

gömmeleri kompakttır.

Eğer $\Omega$ bölgesi sınırlı ise, yukarıdaki teoremde $\Omega_0 = \Omega$ alınabilir. $\Omega$ bölgesi $R^N$ de keyfi bir bölge ise $W^{j+m,p}(\Omega)$ yerine $W_0^{j+m,p}(\Omega)$ konulması şartıyla yukarıdaki gömmeler kompakt olur (Adams, 2003).

# 2. ORLICZ UZAYLARI VE ORLICZ-SOBOLEV UZAYLARI

## 2.1. Giriş

Bu bölümde, Lebesque ve Sobolev uzaylarının genelleştirilmeleri üzerine sonuçlar sunacağız. Bu uzaylar, Orlicz uzayı olarak adlandırılan $L_A(\Omega)$ uzayları olup daha önce Krasnosel'skii ve Rutickii, 1961 de yoğun olarak çalışılmış ve daha sonra Luxemburg, 1955 tarafından doktora tezi olarak yapılmıştır. Lineer olmayan analizde belli problemlerde Orlicz uzayının uygulamaları vardır.
Teorem 1.7.9 de Sobolev Gömme Teoremin de oluşan boşluğu Orlicz uzayı ile doldurulacağına dikkat edelim. Özellikle,

Eğer $mp = n$ ve $p > 1$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \to L(\Omega),$$

Fakat $p \le q < \infty$ iken $W^{m,p}(\Omega) \not\to L^{\infty}(\Omega)$

olarak yazabiliriz. Gömme için hedeflenen $L^p$ uzayı bulunamaz. Krasnosel'skii ve Rutickii, 1961 de yaptığı çalışmayı izleyerek Orlicz uzayları için tanımlanan $A$ fonksiyonları olarak 'N-fonksiyonlar' sınıfını kullanacağız. Bu sınıf Luxemburg (1955) un kullandığı Young fonksiyonları kadar geniş değildir. N-fonksiyonlar amacımıza ulaşmamızı ve işlemlerimizi daha kolay hale getirmemizi sağlar. Eğer $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayının tanımında $L^p(\Omega)$ ile üstlenilen rol $L_A(\Omega)$ Orlicz uzayının yerine geçer ise elde edilen uzay $W^m L_A(\Omega)$ ile gösterilir ve bu uzaya da *Orlicz-Sobolev uzayı* denir. Daha sonra, Donaldson ve Trudinger ( 1971) tarafından Orlicz-Sobolev uzaylarına genişletilmiştir. Bu bölümde de bu sonuçların bazıları sunulmuştur.

## 2.2. N-Fonksiyonu

**Tanım 2.2.1.** (N-Fonksiyonu) $a$, $[0,\infty)$ üzerinde reel değerli fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlasın.

**i)** $t > 0$ için $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$ ve $a(0) = 0$, $a(t) > 0$;

**ii)** $a(t)$ azalmayan bir fonksiyon; Yani, $s > t$ için $a(s) \ge a(t)$ olur;

**iii)** $a(t)$ sağdan sürekli bir fonksiyon; Yani, $t \geq 0$ iken $\lim_{s \to t^+} a(s) = a(t)$ olur;

Bu durumda, $A : [0,\infty) \to R$ olmak üzere

$$A(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *N-fonksiyonu* denir.

**NOT 2.2.2.** $A(t)$ fonksiyonu için aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

**i)** $A(t)$ fonksiyonu, $[0,\infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyon;

**ii)** $A(t)$ fonksiyonu, kesin artan bir fonksiyon; Yani, $s > t > 0$ için $A(s) > A(t)$ olur;

**iii)** $A(t)$ fonksiyonu konvekstir; Yani, $s,t > 0$ ve $0 < \lambda < 1$ olduğu zaman

$$A(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda A(s) + (1-\lambda) A(t)$$

Olur;

**iv)** $\lim_{t \to 0} \dfrac{A(t)}{t} = 0$ ve $\lim_{t \to \infty} \dfrac{A(t)}{t} = \infty$;

**v)** Eğer $s > t > 0$ ise, o zaman $\dfrac{A(s)}{s} > \dfrac{A(t)}{t}$.

**Örnek 2.2.3.** Aşağıdaki $A(t)$ fonksiyonları birer N-fonksiyonu olur.

**i)** $A(t) = t^p$, $1 < p < \infty$;

**ii)** $A(t) = e^t - t - 1$,

**iii)** $A(t) = e^{t^p} - 1$, $1 < p < \infty$;

**iv)** $A(t) = (1+t)\log(1+t) - t$.

**Tanım 2.2.4.** (N-Fonksiyonun Tamamlayıcısı ) $a$ fonksiyonu Tanım 2.2.1 deki **(i)-(iii)** koşulları sağlasın ve $\tilde{a}$ fonkiyonu

$$\tilde{a}(s) = \sup_{a(t) \leq s} t$$

ile tanımlıyalım. Bu durumda, $\tilde{a}$ fonksiyonu da Tanım 2.2.1 deki **(i)-(iii)** sağladığından dolayı ve $a$ ile $\tilde{a}$

$$a(t) = \sup_{\tilde{a}(s) \leq t} s$$

eşitliği yazılabilir.

Eğer $a$ kesin artan ise o zaman $\tilde{a} = a^{-1}$. Ayrıca,

$$A(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau, \qquad \tilde{A}(s) = \int_0^s \tilde{a}(\sigma) d\sigma$$

şeklinde tanımlanan $A$ ve $\tilde{A}$ fonksiyonları aynı zaman da birer N-fonksiyonudur ve her biri diğerinin tamamlayıcıdır denir.

**Örnek 2.2.5.** Aşağıdaki $A$ ve $\tilde{A}$ fonksiyonları birer N-fonksiyonu olur.

$$A(t) = \frac{t^p}{p}, \quad \tilde{A}(s) = \frac{s^{p'}}{p'}, \; 1 < p < \infty, \; \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

ve

$$A(t) = e^t - t - 1, \quad \tilde{A}(s) = (1+s)\log(1+s) - s.$$

**Not 2.2.6.** $\tilde{A}(s)$, şekil 2.2.2 de gösterildiği gibi $\sigma = 0$ dan $\sigma = s$ ye $\sigma = a(\tau)$ ( veya $\tau = \tilde{a}(\sigma)$ ) grafiğinin sol tarafındaki alan ile gösterilir.

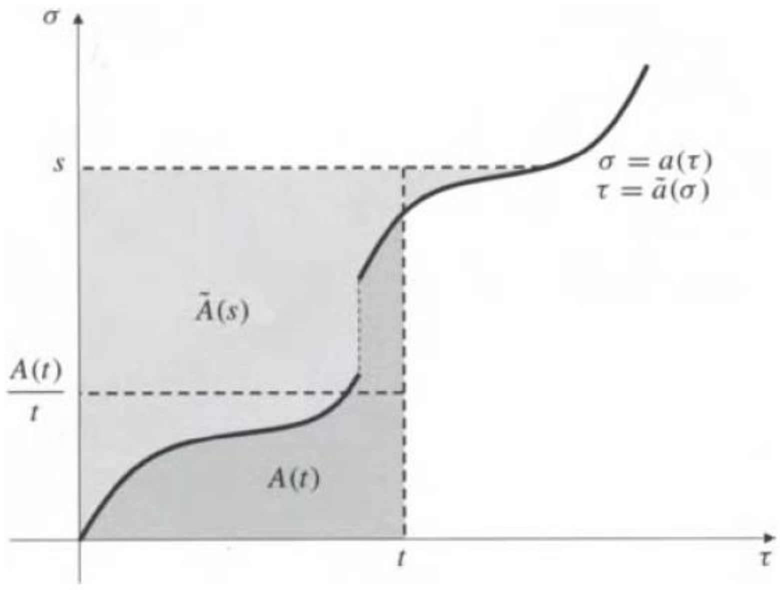
**Not 2.2.7.** $A$ ve $\tilde{A}$ fonksiyonları arasında

$$st \leq A(t) + \tilde{A}(s) \tag{2.2}$$

Young eşitsizliği olarak bilinen ifadeyi elde edebiliriz. Bu durumda, (2.2) ifadesinde eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $t = \tilde{a}(s)$ veya $s = a(t)$ olmasıdır. Ayrıca, (2.2) ifadesinde $t = \tilde{a}(s)$ alındığı zaman eşitlik durumu söz konusu olduğu için

$$\tilde{A}(s) = \max_{t \geq 0}(st - A(t))$$

olur.




**Şekil 2.2.1**

$A$ ve $\tilde{A}$ kesin artan olduğu için tersleri de vardır ve her $t \geq 0$ için (2.2) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$A^{-1}(t)\tilde{A}^{-1}(t) \leq A\left(A^{-1}(t)\right)+\tilde{A}\left(\tilde{A}^{-1}(t)\right)=2t$$

Diğer taraftan, $A(t) \leq ta(t)$ ve Şekil 2.2.2 ele alındığında her $t>0$ için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\tilde{A}\left(\frac{A(t)}{t}\right)<\frac{A(t)}{t}t=A(t) \tag{2.3}$$

(2.3) te $A(t)$ yerine $t$ yazıldığı zaman $\tilde{A}\left(\frac{t}{A^{-1}(t)}\right)<t$ ifadesi elde edilir. Bundan dolayı herhangi bir $t>0$ için

$$t<A^{-1}(t)\tilde{A}^{-1}(t) \leq 2t \tag{2.4}$$

**Tanım 2.2.8.** (N-Fonksiyonların Baskınlığı)

N-fonksiyonları arasında belli bir kısmı sıralama bağıntısı gerektirmeliyiz. Eğer *A ve B* iki N-fonksiyon ise, öyle bir $k$ pozitif sabiti var ve her $t \geq 0$ için

$$A(t) \leq B(kt) \tag{2.5}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise *B* evrensel olarak *A* ya baskındır.

**Tanım 2.2.9** ($\Delta_2$-*koşulu*) Bir *A*, N-fonksiyonu $\forall t > 0$ için

$$A(2t) \leq kA(t) \tag{2.6}$$

eşitsizliğini sağlayacak pozitif bir $k$ sabiti varsa N-fonksiyonu evrensel $\Delta_2$- *koşulunu* sağlar denir.
Bu durumda, her $t \geq 0$ için

$$A(rt) \leq kA(t) \tag{2.7}$$

olacak şekilde her $r > 1$ için bir pozitif $k = k(r)$ vardır.

**Örnek 2.2.10.** N-fonksiyonu $A_p(t) = \dfrac{t^p}{p}$, $(1 < p < \infty$ ) şeklindeki N-fonksiyonu bir evrensel $\Delta_2$- koşulunu sağladığı açıktır.

## 2.3. Orlicz Uzayları

**Tanım 2.3.1. (**$K_A(\Omega)$ Orlicz sınıfı**)** $\Omega$, $R^n$ de bir bölge ve $A$ bir N-fonksiyon olsun. $K_A(\Omega)$ Orlicz sınıfı, $\Omega$ üzerinde aşağıdaki koşulu sağlayan tüm ölçülebilir $u$ fonksiyonlarının kümesidir.

$$\int_\Omega A(|u(x)|)dx < \infty$$

*A* konveks olduğu için, $K_A(\Omega)$ fonksiyonların kümesi de bir konveks kümedir. Fakat $K_A(\Omega)$ bir vektör uzayı olmayabilir. Örneğin, $u \in K_A(\Omega)$ ve $\lambda > 0$ var olabilir öyle ki $\lambda u \notin K_A(\Omega)$ dır.

**Tanım 2.3.2.** $(A,\Omega)$ ikilisine $\Delta$-*düzenlidir* denir. Ya

a) *A* bir evrensel $\Delta_2$-koşulunu sağlar.

yada

b) Sonsuza yakın *A* bir $\Delta_2$-koşulunu sağlar ve $\Omega$ sonlu hacime sahiptir.

**Tanım 2.3.3. (**$L_A(\Omega)$ Orlicz Uzayı) $L_A(\Omega)$ Orlicz uzayı, $K_A(\Omega)$ kapsayan en küçük vektör uzayıdır. Dolayısıyla; $L_A(\Omega)$, $u \in K_A(\Omega)$ elemanlarının tüm $\lambda u$ skaler çarpımlarını kapsadığından dolayı $K_A(\Omega) \subset L_A(\Omega)$ olur. Bu kümeler eşit olması için gerekli ve yeterli koşul $(A,\Omega)$ ikilisi düzenlidir.

O halde

$$\|u\|_A = \|u\|_{A,\Omega} = \inf\left\{k > 0; \int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)dx \le 1\right\}$$

fonksiyoneli $L_A(\Omega)$ üzerinde bir norm olur. Bu norma *Lüxemburg normu* denir. Eğer

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)dx \le 1 \tag{2.8}$$

eşitsizliğinde $k$, $\|u\|_A$ normunun yönünde azalırsa

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_A}\right)dx \le 1 \tag{2.9}$$

monoton yakınsaması elde edilir.

**Teorem 2.3.4.** $L_A(\Omega)$ uzayı Lüxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır (Adams ve Fournier, 2003).

Eğer $1 < p < \infty$ ve $A_p(t) = \dfrac{t^p}{p}$ ise, o zaman $L^p(\Omega) = L_{A_p}(\Omega) = K_{A_p}(\Omega)$ olur. Ayrıca,

$$\|u\|_{A_p,\Omega} = p^{-\frac{1}{p}}\|u\|_{p,\Omega}$$

olur.

**Örnek 2.3.5.**

**(i)** $p \ge 1$ koşulu altında $L^p(\Omega)$ Lebesgue uzay, $L_A(\Omega)$ Orlicz uzaylarının özel durumudur. Burada $A = c^p$ ve $c$ yerine pozitif keyfi bir sabit yazılır.

**(ii)** Eğer, $t \in (0,\infty)$ için $A = t\log^+ t$ fonksiyonu olarak seçilirse $L_A(\Omega)$ karşılık gelen sınıf $L^1(\Omega)$ Lebesgue uzayı olur. Burada, $\log^+ t = \max(0, \log t)$ olarak alınıyor.

**Tanım 2.3.6. ( Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği)** $A$ ve $\widetilde{A}$ fonksiyonları eşlenik N-fonksiyonlar ise Hölder eşitsizliğin bir genelleştirilmiş versiyonu

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \le 2\|u\|_{A,\Omega}\|u\|_{\widetilde{A},\Omega} \tag{2.10}$$

**Teorem 2.3.7.** (Orlicz Uzayında Gömme Teoremi) $L_B(\Omega)\to L_A(\Omega)$ gömmesi sağlanır $B$ ancak ve ancak ya $A$ ye evrensel olarak baskındır yada $B$, $A$ ya sonsuz yakın baskındır ve $Vol(\Omega)<\infty$ (Adams ve Fournier, 2003).

**Tanım 2.3.8.** (Ortalama yakınsaklık) $L_A(\Omega)$ da fonksiyonların bir $\{u_j\}$ dizisi,

$$\lim_{j\to\infty}\int_A A\left(\left|u_j(x)-u(x)\right|\right)dx=0$$

eşitliğini sağlıyorsa, o zaman $\{u_j\}$ dizisi $u\in L_A(\Omega)$ ya *ortalama yakınsaktır* denir. Eğer $A$ nın dışbükeyliği $0<\varepsilon\le 1$ için

$$\int_\Omega A\left(\left|u_j(x)-u(x)\right|\right)dx\le\varepsilon\int_\Omega A\left(\frac{u_j(x)-u(x)}{\varepsilon}\right)dx$$

oluyorsa $L_A(\Omega)$ uzayında normun yakınsaklığı ortalama yakınsaklığı ifade eder. Tersi durumda yani ortalama yakınsaklık norm yakınsaklığı ifade etmesi ancak ve ancak $(A,\Omega)$, $\Delta$-düzenli olduğunda sağlanır.

**Yardımcı Teorem 2.3.9**. $v\in L_{\tilde{A}}(\Omega)$ verilsin ve $F_v$ lineer fonksiyoneli

$$F_v(u)=\int_\Omega u(x)v(x)\,dx \tag{2.11}$$

$u\in L_A(\Omega)$ olmak üzere (2.11) gösterilir. Bu fonksiyonele $[L_A(\Omega)]'$ dual uzayına aittir ve uzaydaki normu $\|F_v\|$ dır. Ayrıca,

$$|F_v(u)|\le 2\|u\|_A\|v\|_{\tilde{A}} \tag{2.12}$$

aşağıdaki eşitsizlik sağlar (Adams ve Fournier, 2003).

**Teorem 2.3.10.** (Orlicz uzayının Yansıması) Hem $(A,\Omega)$ hem de $(\tilde{A},\Omega)$ $\Delta$-düzenli ise $L_A(\Omega)$ yansımalıdır (Kufner, John ve Fuˇcik, 1977).

**Teorem 2.3.11**. $A$, $\Delta_2$-koşulunu sağlıyorsa $L_A(\Omega)$ Orlicz uzayı ayrılabilirdir.

**Not 2.3.12.** $A$, $\Delta_2$-koşulunu koşulunu sağlaması tek başına yeterli değildir, aynı zamanda $L_A(\Omega)$' nin de ayrılabilir olması gerekir (Krasnosel'skiî, Rutickiî ve Luxemburg, 1961).

**Tanım 2.3.13.** (Ölçülü yakınsama ) Ölçülebilir fonksiyonların bir $\{u_j\}$ dizisi, her bir $\varepsilon>0$ *ve* $\delta>0$ için $M$ tamsayısı var ve öyle ki $J>M$ ise, o zaman

$$Vol\left(\left\{x\in\Omega;\left|u_j\left(x\right)-u\left(x\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\leq\delta.$$

**Not 2.3.14.** Eğer $mp=n$ ve $p=1$ ise sobolev gömme teoremi (1.7.9) ve $W^{mp}\left(\Omega\right)$ gömülebildiği en iyi hedef uzayı (başka bir ifade ile en küçük) sağlanmaz bu durumda uygun düzenli $\Omega$ için
$W^{mp}\left(\Omega\right)\rightarrow L^q\left(\Omega\right)$ , $p\leq q<\infty$ fakat $W^{mp}\left(\Omega\right)\not\subset L^\infty\left(\Omega\right)$ dır. Eğer gömme için uygun uzayları sınıfı Orlicz uzayına genişletilirse, o zaman bir en iyi uygun uzay bulunabilir.

**Teorem 2.3.15.** (Trudinger's Theorem) $\Omega$ koni koşulunu sağlayan $R^n$ de sınırlı bir bölge olsun. Eğer, $mp=n$ ve $p>1$ ise

$$A\left(t\right)=\exp\left(t^{\frac{n}{n-m}}\right)-1=\exp\left(t^{p(p-1)}\right)-1 \tag{2.12}$$

O zaman $W^{mp}\left(\Omega\right)\rightarrow L_A\left(\Omega\right)$ gömmesi vardır (Krasnosel'skiî, Rutickiî ve Luxemburg, 1961).

## 2.4. Orlicz-Sobolev Uzayları

**Tanım 2.4.1.** $\Omega$, $R^n$ de bir bölgesi ve $A$ bir N-fonksiyonu olmak üzere, tüm $\left|\alpha\right|\leq m$ için $\alpha$. mertebeden kısmi türevlerinin $\left(D^\alpha u\right)L_A\left(\Omega\right)$ ya ait olduğu $L_A\left(\Omega\right)$ uzayındaki $u$ fonksiyonlarını oluşturduğu uzaya $W^mL_A\left(\Omega\right)$ Orlicz-Sobolev uzayı adı verilir. $W^mL_A\left(\Omega\right)$ aşağıdaki norma göre bir Banach uzayıdır.

$$\left\|u\right\|_{m,A}=\left\|u\right\|_{m,A,\Omega}=\max_{0\leq\left|\alpha\right|\leq m}\left\|D^\alpha u\right\|_{A,\Omega}$$

Eğer $1<p<\infty$ ve $A_p\left(t\right)=t^p$ ise, o zaman $W^mL_{Ap}\left(\Omega\right)=W^m$ olur. $W_0^mL_A\left(\Omega\right),W^mL_A\left(\Omega\right)$ da $C_0^\infty\left(\Omega\right)$ nın kapanışı olarak alınabilir

**Not 2.4.2**. ( Orlicz-Sobolev uzaylarının Gömme Teoremleri)

Sıralı sobolev uzaylarının durumundaki gibi,bu gömme sonuçlarının en çoğu,koni koşulunu sağlayan bölgeler için elde edilir. istisnalar hölder süreklilik tahminleri(genelleştirilmiş) durumlarıdır, bu gerektirmeler güçlü yerel Lipschitz koşullarıdır. Aşağıda verilen bazı sonuçlar sadece sınırlı bölgeler için sağlanır.sınırlı olmayan bölgeler sıralı sobolev uzayları için benzer sonuçların genişletilmesinde kullanılan sonuçlar, genel Orlicz uzaylarının dahil olduğunda ki gibi basit değildir.

Bu gömme gibi düşündüğümüzde eksik kalır. Mümkün olan en iyi Orlicz-sobolev uzayı gömmeleri, yeniden düzenleme çalışmaları kapsayarak, Cianchi ve Andrea (1996) tarafından bulunmuştur.

**Teorem 2.4.3.** $\Omega$, $R^n$ de keyfi bir bölge olsun. Eğer, $A$ bir N-fonksiyon

$$\int_0^1 \frac{A^{-1}(t)}{t^{\frac{n+1}{n}}}dt < \infty \qquad \text{ve} \qquad \int_0^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{\frac{n+1}{n}}}dt = \infty$$

sağlıyor ise, o zaman $W_0^m L_A(\Omega) \to L_{A_*}(\Omega)$ dır. Ayrıca, Eğer $\Omega_0$, $\Omega$ nın sınırlı bir alt bölgesi ise, o zaman $W_0^m L_A(\Omega) \to L_B(\Omega_0)$ gömmesi vardır (Adams ve Fournier, 2003).

**Teorem 2.4.5.** (Genel Orlicz-sobolev Gömme Teoremi) $\Omega$, $R^n$ de koni koşulunu sağlayan sınırlı bir bölge ve $J(A)$ negatif olmayan en küçük tam sayı olsun. Bu durumda, $A$ bir N-fonksiyon olmak üzere

**(i)** Eğer $m \le J(A)$ ise o zaman $W^m L_A(\Omega) \to L_{B_n}(\Omega)$ ayrıca, eğer $B$ sonsuza yakın $B_m$ den esasen daha yavaş artan bir N-fonksiyon ise, o zaman $W^m L_A(\Omega) \to L_B(\Omega)$ vardır ve kompaktır,

**(ii)** Eğer $m > J(A)$ ise o zaman $W^m L_A(\Omega) \to C_B^0(\Omega) = C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ olur,

**(iii)** Eğer $m > J(A)$ ve $\Omega$ güçlü yerel Lipschitz koşulunu sağlıyor ise, o zaman

$W^m L_A(\Omega) \to C_\mu^{m-j-1}(\bar{\Omega})$ olur. Burada

$$\mu(t) = \int_{t^{-n}}^{\infty} \frac{(B_j)^{-1}(\tau)}{\tau^{(n+1)/n}} d\tau.$$

Ayrıca, $W^m L_A(\Omega) \to C_\mu^{m-j-1}(\bar{\Omega})$ gömmesi kompaktır. Bu durumda, $v \in M$ ve $\mu / v \in M$ sağlayan $W^m L_A(\Omega) \to C_v^{m-j-1}(\bar{\Omega})$ gömmesidir (Adams ve Fournier, 2003).

# 3. DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN VARYASYONEL YAKLAŞIM

Bu bölümde standart büyüme koşullu Diferansiyel ve Kısmi Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve katlılığı için sık kullanılan tanım, teorem ve yaklaşımları hakkında bilgi verilecektir.

## 3.1. Temel Kavramlar

**Tanım 3.1.1.** $X$ bir Banach uzay olsun. $A: X \to X^*$ bir diferansiyel operatör olmak üzere

$$A(u) = \Psi'(u)$$

olacak şekilde bir $\Psi(u) \in C^1(X, R)$ fonksiyoneli bulunabiliyorsa, bu $A$ operatörüne *varyasyonel operatör* denir.

$A: X \to X^*$ bir diferansiyel operatör olarak tanımlandığında

$$A(u) = 0 \tag{3.1}$$

(3.1) deki diferansiyel denklemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli $\Psi(u) \in C^1(X, R)$ olmak üzere

$$A(u) = \Psi'(u)$$

olarak yazılabiliyorsa bu probleme *Varyasyonel problem* adı verilir

**Örnek 3.1.2.**

$$\Psi(u) = \int_\Omega F(x, u, u^1, u^2, ..., u^n)dx$$

biçiminde verilen $\Psi$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\partial F}{\partial u} + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial u^{(n)}}\right) = 0$$

formülü ile verilir.

**Tanım 3.1.3.** $X$ bir Banach uzay ve $\Psi: X \to R$**,** $C^1$sınıfından bir fonksiyonel ($\Psi$ fonksiyoneli Frechet türevlenebilir ) olarak tanımlansın. Eğer, her $v \in X$ için

$$\langle \Psi'(u), v \rangle = 0$$

eşitliğini sağlayan her bir $u \in X$ elamanına $\Psi$ fonksiyonelinin bir *kritik noktası* denir

**Uyarı 3.1.4.** Tanım 3.1.3 tersi genel olarak doğru değildir. Yani Euler-Lagrange denkleminin her çözümünün bu denkleme karşılık gelen enerji fonksiyoneline bir minimum vermesi gerekmez.

**Tanım 3.1.5.** $X$ Banach uzayı ve $\Psi : X \to R$ fonksiyoneli verilsin. Eğer, her $u \in X$ için

$$|\Psi(u)| \leq K$$

olacak şekilde $K > 0$ reel sayısı varsa $\Psi$ fonksiyoneli *sınırlıdır* veya *iyi tanımlıdır* denir.

**Tanım 3.1.6.** $X$ Banach uzayı ve $\Psi : X \to R$ fonksiyoneli şeklinde tanımlansın. Eğer, her $u \in X$ için

$$\inf_{u \in X} \Psi(u) = -\infty \text{ veya } \sup_{u \in X} \Psi(u) = +\infty$$

eşitliklerinden biri varsa, o zaman $\Psi$ fonksiyoneli *iyi tanımlı değildir* veya *sınırsızdır* denir.

**Tanım 3.1.7.** $X$ bir Banach uzay olsun. Ayrıca, $\Psi : X \to R$ fonksiyoneli ve $(u_n) \subset X$ dizisi verilsin. Bu durumda,

$$\lim_{n \to +\infty} \Psi(u) = \inf_{u \in X} \Psi(u)$$

ifadesini sağlayan $(u_n)$ dizisine $\Psi$ fonksiyonelinin bir *minimize(edici) dizisi* denir veya her $u \in X$ için

$$\Psi(v) \leq \Psi(u)$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $v \in X$ varsa, bu $v$ fonksiyonuna $\Psi$ fonksiyonelinin bir *minimize dizisi* adı verilir.

**Tanım 3.1.8** $u : \Omega \subset R^N \to R$ ölçülebilir fonksiyon ve $p > 1$ için $|u|^{p-2} u = |u|^{p-2} \operatorname{sgn} u$ olmak üzere, $p$ -Laplace operatörü

$$\Delta_p u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 + .........+ \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)^2} \right)^{p-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right]$$

şeklinde veya

$$|\nabla u(x)| = \left| \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, ........ \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right) \right| = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)^2}$$

şeklinde yazılır. Öklid normu kullanılarak

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) = div\left( \left|\nabla u(x)\right|^{p-2} \nabla u(x) \right)$$

biçiminde de yazılabilir.

$\Omega$, $R^N(N \geq 2)$sınırlı bir bölge, $F \in C^1(\Omega x R, R)$ ve $\Psi : X \to R$ fonksiyonelini olarak tanımlandığında $\Psi(u) = \int_\Omega F(x, \nabla u(x))dx$ enerji integrali $p$-büyüme koşuluna sahip olur.

**Örnek 3.1.9.** $\Omega$, $R^N(N \geq 2)$sınırlı bir bölge ve $\Psi : X \to R$ fonksiyoneli verilsin. Eğer, $\Psi(u)$ fonksiyoneli

$$\int_\Omega \frac{\left|\nabla u(x)\right|^p}{p} dx$$

olarak seçildiğinde

$$\frac{\partial F(x, \nabla u(x))}{\partial u(x)} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left( \frac{\partial F(x, \nabla u(x))}{\partial(\nabla u(x))} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

şeklindeki Euler-Lagrange denklemine göre düzenlenirse

$$-\Delta_p u(x) = -div\left( \left|\nabla u(x)\right|^{p-2} \left|\nabla u(x)\right| \right) = 0$$

biçiminde tanımlanan ve $p$-Laplace denklemi olarak adlandırılan denklem elde edilir. Ayrıca;

$$\int_\Omega \frac{\left|\nabla u(x)\right|^p}{p} dx$$

integralinde $p = 2$ olarak seçilirse, o zaman

$$\Delta u(x) = div(\nabla u(x)) = \nabla \cdot \nabla u(x) = \nabla^2 u(x)$$
$$= \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} = 0$$

yukarıdaki 2-boyutlu Laplace denklemi elde edilir.

**Tanım 3.1.10.** $\Omega$, $R^N(N \geq 2)$sınırlı bir bölge, $f : \Omega x R \to R$sürekli bir fonksiyon ve her bir $(x, t) \in \Omega x R$ için $F(x, t) = \int_0^t f(x, t)dt$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$-\Delta_p u = -div\left( \left|\nabla u\right|^{p-2} \left|\nabla u\right| \right) = -f(x, u) \tag{3.2}$$

şeklinde verilen diferansiyel denklemi ele alalım. Bu durumda, (3.2) denklemine karşılık gelen

$$\Psi(u)=\int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u|^p-\int_\Omega F(x,u)dx$$

$\Psi(u)\in C^1\left(W_0^{m,p},R\right)$ fonksiyoneline, (3.2) denkleminin *Euler-Lagrange fonksiyoneli* veya *Enerji fonksiyoneli* denir.

**Tanım 3.1.11.** *p*-Laplace denklemi

$$-\Delta_p u=-div\left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|\right)=0$$

olarak yazılır. Buna göre *p*-Laplace denklemine karşılık gelen $\Psi(u)\in C^1(X,R)$ fonksiyoneli

$$\Psi(u)=\int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u|^p$$

şeklinde tanımlıyoruz ve bu fonksiyonelin türevi de, $\Psi':X\to X^*$ olmak üzere

$$\langle\Psi'(u),v\rangle=\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx$$

ile ifade edilir. Bu durumda, aşağıdaki koşullar sağlanır.

**i)** $\Psi':X\to X^*$ operatörü sürekli, sınırlı ve kesin monotondur,

**ii)** $\Psi':X\to X^*$ operatörü $(S_+)$ koşulunu sağlar: eğer $(u_n)\subset X$ dizisi için uzayında $u_n \xrightarrow{z} u$ (zayıf yakınsama) iken

$$\lim_{n\to\infty}\sup\langle\Psi'(u_n)-\Psi'(u),u_n-u\rangle\le 0$$

oluyorsa, o zaman $X$ uzayında $u_n\to u$ güçlü yakınsaması vardır,

**iii)** $\Psi':X\to X^*$ operatörü bir homeomorfizmadır.

**Tanım 3.1.12.** $X$ bir Banach uzayı ve $f:\Omega xR\to R$ tanımlı bir fonksiyonel olsun. Eğer $f$ fonksiyoneli

**i)** Hemen hemen her $x\in\Omega$ için $\xi\to f(x,\xi)$ fonksiyoneli sürekli,

**ii)** Her $\xi\in R$ için $x\to f(x,\xi)$ fonksiyoneli $\Omega$ da ölçülebilir,

koşullarını sağlıyorsa, $f$ fonksiyoneli $X$ üzerinde *Carathéodory koşulunu* sağlar denir.

**Tanım 3.1.13.** (Palais-Smale Dizisi ) $X$ bir Banach uzayı ve $\Psi\in C^1(X,R)$ fonksiyoneli verilsin. Eğer, herhangi bir $(u_n)\subset X$ dizisi için

**i)** $|\Psi(u_n)|\le c$, $c\in R$

**ii)** $X^*$ uzayında $n\to\infty$ iken $\Psi'(u_n)\to 0$

koşulları sağlanıyorsa, o zaman $(u_n)$ dizisine $\Psi \in C^1(X,R)$ fonksiyonelinin *Palais-Smale* (PS) *dizisi* denir. Ayrıca, $\Psi$ fonksiyonelinin (PS) dizisi bu fonksiyonelin bir minimize dizisidir. Bu dizileri yakınsak bir alt diziye sahipse $\Psi$ için kritik nokta (lar) üretirler. Ançak, $\Psi$ fonksiyoneli alttan sınırlı değilse bu durumda $\Psi$ fonksiyoneli için bir (PS) dizisinin varlığı hakkında kesin bir şey söylenemez. Eğer, $\Psi$ alttan sınırlı ise $\Psi$ fonksiyoneli için bir (PS) dizisi daima bulunabilir.

**Tanım 3.1.14.** $X$ bir Banach uzayı ve $\Psi \in C^1(X,R)$ olarak verilsin. Eğer $\Psi$ 'nin her (PS) dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa $\Psi$ fonksiyoneli (PS) *koşulunu sağlar* denir. Ayrıca, bir $\Psi$ fonksiyoneli alttan sınırlı ve (PS) koşulunu sağlıyorsa, tanımlı olduğu bölgede bir minimuma sahip olur.

**Tanım 3.1.15.** $X$ bir Banach uzay ve $\Psi \in C^1(X,R)$ fonksiyonel olmak üzere,

**i)** $\lim_{n\to\infty} \Psi(u_n) = c$, $c \in R$

**ii)** $X^*$ uzayında $n \to \infty$ iken $\Psi'(u_n) \to 0$

koşullarını sağlayan bir $(u_n) \subset X$ dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahipse, o zaman $\Psi$ fonksiyoneli $c \in R$ seviyesinde $(PS)_c$ *koşulunu sağlar* denir. Eğer, $\Psi$ fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlarsa her $c \in R$ için $(PS)_c$ koşulunu da sağlar.

**Tanım 3.1.16. (Cerami Dizisi)** $(X, \|.\|_X)$ bir Banach uzayı ve $\Psi \in C^1(X,R)$ fonksiyoneli verilsin. Eğer, herhangi bir $(u_n) \subset X$ dizisi

**i)** $|\Psi(u_n)| \le c$, $c \in R$

**ii)** $X^*$ uzayında $n \to \infty$ iken $(1+\|u_n\|_X)|\Psi'(u_n)| \to 0$, $\Psi' : X \to X^*$

özelliklerini sağlıyorsa, o zaman $(u_n)$ dizisine $\Psi \in C^1(X,R)$ fonksiyonelinin *Cerami dizisi* denir. Bununla birlikte, eğer bu $(u_n)$ dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahipse $\Psi$ fonksiyoneli *Cerami koşulunu sağlar* denir.

**Not 3.1.17.** Cerami koşulu, (PS) koşulundan daha zayıf bir koşuldur. Bu iki koşul arasındaki temel fark uygulamada ortaya çıkar. Yani, sınırsız bir bölge üzerinde çalışılırken (PS) koşulunun sağlanmadığı durumlarda Cerami koşulu sağlanabilir. Ayrıca, $\Psi \in C^1(X,R)$ fonksiyoneli alttan sınırlı ise bu iki koşul çakışır.

**Tanım 3.1.18.** $\Omega$, $R^N(N \geq 2)$sınırlı bir bölge, $f:\Omega x R \to R$sürekli bir fonksiyon ve için $F(x,t) = \int_0^t f(x,t)dt$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere olsun. Eğer, her $x \in \Omega$ ve $t \in R - \{0\}$için

$$0 < \theta F(x,t) \leq f(x,t)t$$

olacak şekilde bir $\theta > p$ ( $p \geq 2$ ) pozitif sayısı varsa, o zaman $f$ fonksiyonu *Ambrosetti-Rabinowitz* koşulunu sağlar denir.

Ambrosetti-Rabinowitz koşulu, ilgili $\Psi \in C^1(X,R)$ fonksiyonelinin (PS) dizisinin sınırlılığını elde etmek için kullanılan oldukça önemli bir koşuldur.

**Tanım 3.1.19.** $(X, \|.\|_X)$ bir Banach uzayı ve $\Psi \in C^1(X,R)$ bir fonksyonel olsun. Eğer, $u \in X$ için

$$\|u\|_X \to \infty \text{ iken } \quad \text{iken } \Psi(u) \to \infty$$

oluyorsa $\Psi$ fonksiyoneline *coercive fonksiyonel* denir.

**Tanım 3.1.20.** $X$ bir Banach uzay, $\Psi \in C^1(X,R)$ fonksiyonel olmak ve $u_n \to u$ olacak şekilde $(u_n) \subset X$ dizisi verilsin. Buna göre; bir $u \in X$ elemanı için

$$\Psi(u) \leq \liminf_{n \to \infty} \Psi(u_n) \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $\Psi$ fonksiyoneline $u \in X$ noktasında alttan *yarı-süreklidir* (*lower semi-continuous*) denir. Eğer, (3.3) eşitsizliğinde $u_n \xrightarrow{z} u$ dizisi için gerçekleşiyorsa, $\Psi$ fonksiyoneline $u \in X$ noktasında alttan zayıf yarı-süreklidir (*weakly lower semi-continuous*) denir.

**Teorem 3.1.21.** (Genelleştirilmiş Mountain-Pass Teoremi)

$(X, \|.\|_X)$ bir Banach uzayı, $\Psi \in C^1(X,R)$ fonksiyoneli (PS) koşulunu ve $\Psi(0) = 0$ olsun. Farzedelim ki

**i)** $\|u\|_X > \tau$ iken $\Psi(u) \leq \Psi(0)$,

**ii)** $\alpha = \inf\{\Psi(u) : u \in X, \|u\|_X = \tau\} > 0$

olacak şekilde bir $\tau$ pozitif sayısı ve $u \in X$ olsun. Ayrıca $G \neq 0$ olacak şekilde

$$G = \{\phi \in (C[0,1], X) : \phi(0) = 0, \phi(1) = v\}$$

ve

$$\beta = \inf \max\{\psi([0,1], X) : \phi \in G\}$$

Kümelerini tanımlayalım. Bu durumda; $\alpha \le \beta < \infty$ olduğunda $\beta$, $\Psi$ için bir kritik değer olur. (Willem. 1996)

**Teorem 3.1.22.** ( Mountain-Pass Geometrisi )

$\left(X, \|.\|_X\right)$ bir Banach uzayı ve $\Psi \in C^1(X,R)$ fonksiyoneli (PS) koşulunu ve $\Psi(0)=0$ şartını sağlasın. Farzedelimki $\Psi$ aşağıdaki geometrik koşulları sağlasın:

**i)** $\|u\|_X = \tau$ olmak üzere her $u \in X$ için $\Psi(u) \ge \sigma > 0$ olacak şekilde $\tau$ ve $\sigma$ pozitif sayıları vardır,

**ii)** $\Psi(v) < 0$ $(t \to \infty \Rightarrow \Psi(tv) < -\infty)$ olacak şekilde $\|u\|_X > \tau$ koşulunu sağlayan bir $v \in X$ fonksiyonu vardır,

Bu durumda $\Psi$ fonksiyonelinin en az bir kritik noktası vardır. (Willem. 1996)

**Teorem 3.1.23.** ( $Z_2$ -Simetrik Mountain-Pass Teoremi)

$\left(X, \|.\|_X\right)$ bir Banach uzayı ve $\Psi \in C^1(X,R)$ fonksiyoneli, (PS) koşulunu ve $\Psi(0)=0$ şartını sağlayan çift fonksiyonel olsun. Farzedelim ki $\Psi$ aşağıdaki koşulları sağlasın:

**i)** Her $u \in X$ için

$$\|u\|_X = \tau \text{ ise } \Psi(u) \ge \sigma > 0$$

olacak şekilde $\tau$ ve $\sigma$ pozitif sayıları vardır,

**ii)** $X$ 'in her sonlu $X_1$ alt uzayı için oluşturulan

$$\{u \in X_1 : \Psi(u) \ge 0\}$$

kümesi sınırlıdır,

Bu durumda $\Psi$ fonksiyoneli sınırsız olan bir kritik değerler dizisine, yani sonsuz çözüme sahiptir ( Fan ve Zhao, 2001).

**Tanım 3.1.24.** $X$ ayrılabilir ve yansımalı bir Banach uzayı olarak verilsin. Bu durumda,

$$\left\langle e_i, e_j^* \right\rangle = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \ne m \end{cases}$$

ve

$$X = \overline{span\{e_i : i = 1,2,...\}} \text{ ve } X^* = \overline{span\{e_j^* : j = 1,2,...\}}$$

şeklinde tanımlı $\{e_i\} \in X$ ve $\{e_j^*\} \in X^*$ yazılabilir.

Dolayısıyla, $k = 1,2,...$ için

$$X_k = span\{e_k\}, \; Y_k = \bigoplus_{i=1}^{k} X_i \text{ ve } Z_k = \overline{\bigoplus_{i=k}^{\infty} Z_i}$$

olmak üzere $X$ uzayını $X = Y_k \oplus Z_k$ şeklinde iki uzayıntoplamı olarak yazılabilir.

**Teorem 3.1.25.** (Fountain Teoremi)

$\left(X, \|.\|_x\right)$ bir Banach uzayı, $\Psi \in C^1(X,R)$ bir çift fonksiyonel ve $X_k, Y_k$ *ve* $Z_k$ alt uzayları Tanım 3.1.24. tanımlanan uzaylar olsun. Eğer, her bir $k = 1,2,...$ için

**i)** $k \to \infty$ iken $\inf\limits_{u \in Z_k, \|.\|_X = \gamma_k} \Psi(u) \to \infty$,

**ii)** $\max\limits_{u \in Y_k, \|.\|_X = \rho_k} \Psi(u) \leq 0$ ,

**ii)** Her $c > 0$ için $\Psi$ fonksiyoneli $(PS)_c$ koşulunu sağlasın,

Bu durumda, yukarıdaki koşullarını sağlayacak şekilde $\rho_k > \gamma_k > 0$ pozitif sayıları bulunabiliyorsa $\Psi$ fonksiyonelinin $+\infty$'a yakınsayan bir kritik değerler dizisine sahiptir ( Fan ve Han 2004).

## 3.2. Varyasyonel Yaklaşım

Varyasyonel yaklaşım, özellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analizinde kullanılan çok etkili bir araçtır. Varyasyonel yaklaşım, bir diferansiyel denklemi doğrudan çözmek yerine bu denklemin çözümlerini ilgili enerji fonksiyonelinin kritik noktalarına veya minimize dizisine karşılık getirerek bulmayı amaçlayan bir yaklaşımdır. Varyasyonel analiz yaklaşımda temel iki yöntem kullanılır. Birincisi *klasik metot* olarak adlandırılır.

Bu metoda göre; $A: X \to X^*$ bir diferansiyel operatör olarak tanımlandığında

$$A(u) = 0 \tag{3.4}$$

(3.4) deki diferansiyel denklemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli $\Psi(u) \in C^1(X,R)$ olmak üzere

$$A(u) = \Psi'(u)$$

olarak yazılabiliyorsa bu probleme Varyasyonel problem adı verilir. Dolayısıyla; (3.4) denklemini sağlayan $u$ bilinmeyen fonksiyonlarını bulma problemi, $\Psi'(u) = 0$ denklemini sağlayan $u$ bilinmeyen fonksiyonlarını bulma problemini dönüşecektir. Bu durum; $\Psi(u)$ enerji fonksiyonelini sağlayan $u$ kritik noktaları aynı zamanda (3.4) denkleminin (zayıf ) çözümleri olur. Yani, $\Psi(u)$ enerji fonksiyonelini minimize eden bir minimum fonksiyonunu bulmak, varyasyonel yaklaşımın temel amacıdır.

İkincisi *direkt metot* olarak adlandırılır. Bu metoda göre, $X$ bir Banach uzayı ve $A(u)=0$ diferansiyel denklemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli $\Psi : X \to R$ olmak üzere

$$\Psi(u_n) \to \inf\{\Psi(u) : u \in X\}$$

olacak şekilde bir $(u_n) \subset X$ dizisi hesaba katılarak

$$u_{n_k} \to u_0 \in X \text{ ve } \Psi(u_0) \leq \inf_{u \in X} \Psi(u)$$

olacak şekilde bir $(u_{n_k})$ alt dizisinin varlığı gösterilir. Bu durumda, $(u_n)$ dizisi $\Psi$ fonksiyonelini minimize eder ve $(u_{n_k})$ alt dizisinin yakınsadığı $u_0$ değeri de $\Psi$ fonksiyonelinin minimumu (kritik değeri) dolayısıyla $A(u)=0$ diferansiyel denkleminin bir ( zayıf) çözümü olur.

# 4. ORLICZ-SOBOLEV UZAYLARINDA LOKAL OLMAYAN ELİPTİK DENKLEMLERİN BİR SINIFI

## 4.1. Giriş

Bu bölümde tez çalışmamızın özgün kısmı oluşturmaktadır. Bu çalışma, Mardin'de yapılan EJONS International Congress On Mathematic, Engineering and Natural Sciense-III sempozyumunda bildiri olarak da sunulmuştur.

Bu bölümde aşağıdaki denklem üzerinde çalışılmıştır.

$$\begin{cases} -A\left(\int_\Omega \Phi\left(\left|\nabla u(x)\right|\right)dx\right)div\left(a\left(\left|\nabla u(x)\right|\right)\nabla u(x)\right)+\alpha(x)\left(\dfrac{\left|u(x)\right|^q}{q}-\beta(x)\right)\left|u(x)\right|^{q-2}u = f(x,u) & \Omega \ da \\ u = 0 & \partial\Omega \ üzerinde \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Yukarıdaki; lokal olmayan eliptik denkleminin sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümünün varlığını, varyasyonel yaklaşım altında Moutain-Pass Geometrisi Teoremini kullanarak Musielak–Orlicz–Sobolev uzaylarında araştıracağız.

(4.1.1) denkleminde; $\Omega, R^N\,(N \geq 3)$ sınırlı bir bölge, $q \geq 2$, $\alpha$ ve $\beta \in L^\infty(\Omega)$ için $\inf_{x\in\Omega} \alpha(x)\beta(x) > 0$, $A:(0,\infty)\to(0,\infty)$ sürekli bir fonksiyon, $f:\bar{\Omega}xR \to R$ Carathêodory fonksiyonu ve $\varphi:\Omega xR \to R$ fonksiyonu $\varphi(t)=\int_0^t a(|t|)t$ şeklinde tanımlı artan bir homeomorfizma olup $\Phi(t)=\int_0^t \varphi(s)ds$ şeklinde yazılabilen bir fonksiyondur.

Son yıllarda, (4.1.1) deki standart ve standart olmayan denklemler birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bunlardan bazıları; Alves ve Ferreira, 2005; Avci ve ark, 2011; Avci ve Pankov, 2018; Avci ve ark, 2011; Bonanno ve ark, 2012; Boureanu ve Udrea, 2013; Colasuonno ve Pucci, 2011; Correa ve Figueiredo, 2009; Fan, 2010; Fang ve Tan, 2012; Galewski, 2005; Heidarkhani ve ark, 2016; Mihailescu ve Radelescu, 2008; Radelescu ve Repovs, 2015; Yücedağ, 2015.

Ayıca, (4.1.1) denkleminde özel olarak $\varphi(t) = p|t|^{p-2}t$ alındığı zaman (4.1.1) denklemi aşağıdaki p-Kirchhoff tipi denkleme dönüşür.

$$\begin{cases} -A\left(\int_\Omega \Phi \dfrac{\left|\nabla u(x)^p\right|}{p}dx\right) div\left(\left|\nabla u(x)\right|^{p-2}\nabla u(x)\right)+\alpha(x)\left(\dfrac{\left|u(x)\right|^q}{q}-\beta(x)\right)\left|u(x)\right|^{q-2}u & = f(x,u) \quad \Omega \ da \\ u & =0 \quad \partial\Omega \ \ddot{u}zerinde \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Problem (4.1.2) de, $A(t)=p_0+p_1t$ ve $p(x)=2$ alındığı zaman aşağıdaki (4.1.3) denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\left[p_0+p_1\int_0^1\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0 \quad x\in(0,1).t>0, \tag{4.1.3}$$

Yukarıdaki denklemde; $p_0$ burada ilk gerilim ile bağlantılıdır, $p_1$ telin materyal özelliğine bağlıdır ve $u(x,t)$, $t$ zamanında telin $x$ noktasının dikey yer değiştirmesini gösterir. (4.1.3) denklemi, elastik tellerin bağımsız titreşimleri için klasik Dalembert'in dalga denklemlerinin bir genişlemesi olarak 1983 de G. Kirchhoff tarafından önerilmiştir.

## 4.2. Temel kavramlar

Orlicz-Sobolev uzayları ile ilgili detaylı bilgi 2.bölümde verilmişti. Burada, çalışmamızda ihtiyaç duyacağımız bazı ek tanım ve teoremlere yer verilip daha sonra da temel sonuçlarımızı ispatlayacağız. Orlicz uzayı hakkında daha genel bilgiye; Adams, 1975; Krasnosels'kii ve Rutic'kii, 1961; Kufner v.d. ,1977; Musielak, 1983; Fan, 2012; Fang ve Tan, 2012; Harjulehto v.d., 2016; Hudzik, 1976; Mihilescu ve Radulescu, 2008) çalışmalarına bakılabilir.

$\alpha(t): R\to R$ bir fonksiyon olmak üzere $\varphi(t): R\to R$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$\varphi(t)=\begin{cases}\alpha(|t|)t, & t\neq 0 \ \ i\c{c}in \\ 0 & t=0 \ \ i\c{c}in\end{cases} \tag{4.2.1}$$

tek, eşyapılı birebir ve örten) bir fonksiyondur. Yukarıdaki $\varphi$ fonksiyonu için,

$$\Phi(t)=\int_0^t \varphi(s)ds, \quad t\geq 0, \tag{4.2.2}$$

(4.2.2) ile tanımlanan fonksiyon $\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ $N-$fonksiyon olarak adlandırılır ve **Not 2.2.2** koşullarını da sağlar (Adams,1975; Musielak,1983; Rao ve Ren,1991).

Ayrıca, tüm genelleştirilmiş $N-$fonksiyonun kümesi $N(\Omega)$ olarak ve $\Phi$ fonksiyonun tanımlayıcısı veya konjugesi $\bar{\Phi}$ ile gösterilir. $\bar{\Phi}$ fonksiyonu,

$$\bar{\Phi}(t)=\int_0^t \varphi^{-1}(s)\,ds, t\geq 0 \tag{4.2.3}$$

olarak tanımlanır ve

$$\bar{\Phi}(t)=\sup_{s>0}\{st-\Phi(s):s\in R\}, t\geq 0$$

özelliğini sağlar. Ayrıca, $\bar{\Phi}$ nin $N(\Omega)$ elemanı olduğunu ve young eşitsizliğini yani

$$st\leq\Phi(t)+\bar{\Phi}(s), t\in R \tag{4.2.4}$$

sağlamaktadır. $\Phi$ fonksiyonu, Orlicz uzayını aşağıda verilen şekilde tanımlamamıza yardımcı olur,

$$L^{\Phi}(\Omega)=\left\{u:\Omega\to R \text{ ölçülebilir } \; \exists\lambda>0, \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)dx<\infty\right\}.$$

Üstelik $\Delta_2$ koşulundan dolayı $L^{\bar{\Phi}}(\Omega)$ uzayı, $L^{\Phi}(\Omega)$ uzayının dual uzayıdır. Yani

$$\left(L^{\Phi}(\Omega)\right)^{*}=L^{\bar{\Phi}}(\Omega).$$

Üstelik, $\Phi$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edeceğiz;

$$1<\varphi_0:=\inf_{t>0}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}\leq\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}\leq\varphi^0:=\sup_{t>0}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}<\infty, \quad \forall t\geq 0; \tag{4.2.5}$$

$$\inf_{t>0}\Phi(t)>0; \tag{4.2.6}$$

$\forall t\geq 0;$ için $t\to\Phi\left(\sqrt{t}\right)$ fonksiyonu konvekstir. (4.2.7)

(4.2.5) koşulu ile Orlicz uzayı ( $L^{\Phi}(\Omega)$ ) , $u:\Omega\to R$ ölçülebilir fonksiyonları olmak üzere

$$\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx<\infty \tag{4.2.8}$$

olur ve Luxemburg normu

$$|u|_{\Phi}:=\inf\left\{\mu>0:\int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\mu}\right)dx\leq 1\right\} \tag{4.2.9}$$

şeklinde tanımlanır. Orlicz uzayları için, Hölder eşitsizliği aşağıdaki şekilde tanımlanır (Adams,1975; Rao ve Ren, 1991);

$$\int_{\Omega} uvdx \leq 2\|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} \|v\|_{L^{\bar{\Phi}}(\Omega)}$$

Orlicz Sobolev uzayı ($W^{1,\Phi}(\Omega)$),

$$W^{1,\Phi}(\Omega) := \left\{ u \in L^{\Phi}(\Omega) : \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \in L^{\Phi}(\Omega). i = 1.2......N \right\}.$$

ile tanımlanır ve bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{1,\Phi} := |u|_{\Phi} + |\nabla u|_{\Phi} \tag{4.2.10}$$

olur. $W^{1,\Phi}(\Omega)$ uzayının, $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayındaki kapanış $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uzayıdır. Üstelik iyi bilinen Poincare eşitsizşiği yardımı ile

$$\|u\|_{1,\Phi} := |\nabla u|_{\Phi} \tag{4.2.11}$$

yukarıdaki $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ üzerindeki $\|.\|_{\Phi}$ denk normu tanımlanabilir.

**Önerme 4.2.1.** Eğer (4.2.5) ve (4.2.7) sağlanırsa o zaman $L^{\Phi}(\Omega)$ ve $W^{1,\Phi}(\Omega)$ uzayları ayrılabilir ve reflexive Banach uzayıdır (Adams,1975;F.Fang, Z.Tan,2012).

**Önerme 4.2.2.** (Fan,2012; Mihalescu ve Radulescu, 2008) $\rho$ modüleri fonksiyonu $\rho(u): W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to R$ ve $\rho(u) := \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|)dx$ şeklinde tanımlansın. O zaman her $u, u_n \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ için aşağıdakiler koşullar sağlanır.

i. Eğer $\|u\|_{\Phi} < 1$ ise $\|u\|_{\Phi}^{\varphi^0} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{\Phi}^{\varphi_0}$

ii. Eğer $\|u\|_{\Phi} > 1$ ise $\|u\|_{\Phi}^{\varphi_0} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{\Phi}^{\varphi^0}$

iii. $\|u\|_{\Phi} \leq \rho(u) + 1$

iv. $\|u_n - u\|_{\Phi} \to 0 \Leftrightarrow \rho(u_n - u) \to 0$

v. $\|u_n - u\|_{\Phi} \to \infty \Leftrightarrow \rho(u_n - u) \to \infty$

**Not 4.2.3.** $\rho$ fonksiyoneli $C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), R)$ de türevi ile birlikte aşağıdaki gibidir.

$$\langle \rho'(u), v \rangle = \int_{\Omega} a(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx,$$

Üstelik $\rho'$ operatörü $(S_+)$ tipidir. Yani; $u, u_n \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ olmak üzere $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uzayında $u_n \xrightarrow{z} u$ ve $\limsup \langle \rho'(u_n), u_n - u \rangle \leq 0$ ise $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uzayında $u_n \to u$ olur.

(Mihalescu ve Radulescu, 2008). $\Phi$ fonksiyonu $\Delta_2$ koşulunu sağlar. Eğer sabit pozitif bir M sayısı varsa öyle ki $\forall t \geq 0$ için

$$\Phi(2t) \leq M\Phi(t) \tag{4.2.12}$$

Olur.

**Önerme 4.2.4.** ( Fan ve Zhao, 2001) Farz edelim ki $\Omega$, $R^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge ve $\Omega$ 'nın sınırı ($\partial\Omega$) Lipschitz sınıra sahip olsun. Eğer $p > 1$ ve $1 < r < p^*$ ise $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ gömmesi sürekli ve kompaktır. Burada $p < N$ için $p^* := \dfrac{Np}{N-p}$ ve $p \geq N$ için $p^* := +\infty$.

**Not 4.2.5.** Orlicz-Sobolev uzayı $W^{1,\Phi}(\Omega)$, $W^{1,\varphi^0}(\Omega)$ Sobolev uzayına sürekli olarak gömülür. Ayrıca, $1 \leq r < \varphi_0^* := \dfrac{N\varphi_0}{N-\varphi_0}$. ise $W^{1,\varphi_0}(\Omega)$ Sobolev uzayı, Lebesgue uzayı $L^r(\Omega)$ kompakt gömülür. Sonuç olarak; $W^{1,\Phi}(\Omega)$ Sobolev uzayı, $L^r(\Omega)$ Lebesgue uzayının sürekli ve kompakt gömülür.

## 4.3. Temel Sonuçlar

(4.1.1) problemine karşılık gelen enerji fonksiyoneli $\varepsilon : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to R$

$$\varepsilon(u) = \hat{A}\left(\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx\right) + \int_\Omega \frac{\alpha(x)}{2}\left(\frac{|u|^q}{q} - \beta(x)\right)^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx \tag{4.3.1}$$

olur. (4.3.1) eşitliğinde, $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$ ve $\hat{A}(t) = \int_0^t A(s)ds$ şeklinde tanımlanır.

Eğer her $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ fonksiyonu için

$$A\left(\rho(u)\langle \rho'(u), v\rangle\right) + \int_\Omega \alpha(x)\left(\frac{|u|^q}{q} - \beta(x)\right)|u|^{q-2} uvdx - \int_\Omega f(x,u)vdx = 0 \tag{4.3.3}$$

eşitliği sağlanıyorsa, o zaman $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ fonksiyonuna (4.1.1) probleminin zayıf çözümü olur.

Çalışmamızda, aşağıdaki varsayımlar altında (4.1.1) problemini çalışacağız. Ayrıca, çalışmamızın tamamında $2 \leq q < p < \infty$ olarak kabul edeceğiz.

**(AO)** $A:(0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu, $t > 0, \sigma > 1$ ve $m_2 \geq m_1 > 1$ olmak üzere

$$m_1 t^{\sigma-1} \le A(t) \le m_2 t^{\sigma-1}$$

koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyondur,

**(f1)** $f:\Omega x R \to R$ Caratheodory fonksiyonu, $s \in C\left(\bar{\Omega}\right)$ olmak üzere $s < \alpha\varphi_0$ ve $c_1 > 0$ sabiti için

$$\left|f(x,t)\right| \le c_1 |t|^{s-1}$$

eşitsizliğini sağlasın

**(f2)** Ambrosetti-Rabinowitzs koşulu sağlansın: Yani, her bir $x \in \Omega$ için

$$0 < \theta F(x,t) \le f(x,t)t, |t| \ge M, \forall x \in \Omega$$

eşitsizliğini sağlayan $M, \theta > 0$ sabit sayıları ve $2q \le \sigma\varphi^0 < \theta < \varphi_0^*$ vardır,

**(f3)** Her $x \in \Omega$ için $t \to 0$ olduğunda

$$f(x,t) = o\left(|t|^{q-1}\right),$$

olur,

**(f4)** $f(x,-t) = -f(x,t)$

**Not 4.3.1.** $\sigma > q$ olmak üzere $f(x,t) = |t|^{\sigma-2} t$ fonksiyonu **(f1)** ve **(f4)** koşulunu sağlar.

**Not 4.3.2.** **(f2)** koşuluna göre, tüm $x \in \Omega$ ve $|t| \ge M$ için $F(x,t) \ge c|t|^{\theta}$ eşitsizliğini sağlayan bir $c > 0$ sabiti vardır.

**Teorem 4.3.3.** Farzedelim ki **(f1), (f3) ve (A0)** koşuları sağlansın. O zaman, (4.1.1) probleminin $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uzayında aşikar olmayan bir çözüme sahiptir.

İlk olarak çalışmamızın ana ispatlarının önemli bir kısmı olan $\varepsilon$ fonksiyonelinin temel düzgünlük özelliğini sağladığını göstermemiz gereklidir.

**Yardımcı Teorem 4.3.4.** $\varepsilon$ fonksiyoneli $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ üzerinde iyi tanımlı ve Frechet türevlenebilirdir. Yani, $\varepsilon \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), R)$ sınıfındadır ve $\varepsilon$ türevi aşağıdaki gibidir;

$$\left\langle \varepsilon'(u), v \right\rangle = A\left(\rho(u)\left\langle \rho'(u), v \right\rangle\right) + \int_\Omega \alpha(x)\left(\frac{|u|^q}{q} - \beta(x)\right)|u|^{q-2} uv dx - \int_\Omega f(x,u) v dx \quad (4.3.4)$$

**İspat.** Herhangi bir $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ için $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \text{Ğ} L^{2q}(\Omega) \text{Ğ} L^q(\Omega)$ gömmelerinin yardımıyla

$$\left(\frac{|u|^q}{q}-\beta(x)\right)^2 \in L^1(\Omega) \tag{4.3.5}$$

elde edilir.

Ayrıca, **(f1), (AO)** koşulları ve $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$Ğ$L^s(\Omega)$ gömmesi (4.3.5) ifadesinde kullanıldığında

$$|\varepsilon(u)| \le A(\rho(u)) + \int_\Omega \frac{\alpha(x)}{2}\left(\frac{|u|^q}{q}-\beta(x)\right)^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx < \infty$$

olur. O halde, $\varepsilon$ fonksiyoneli, $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ üzerinden iyi tanımlı olduğunu gösterir.

Şimdi de $\varepsilon \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega),R)$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle, $K := W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to R$ şeklinde tanımlı $K(u) := A(\rho(u))$ fonksiyonunu olarak gösterelim. Diğer taraftan, $\rho$ fonksiyoneli $C^1(W^{1,\Phi}(\Omega),R)$ sınıfında yer aldığından ve $A$ sürekli fonksiyonu **(A0)** büyüme koşulunu sağladığından dolayı, her $u,v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ için $K(u) := A(\rho(u))$ birleşim fonksiyoneli $C^1(W^{1,\Phi}(\Omega),R)$ sınıfı üzerinde iyi tanımlı olup ve türev fonksiyonu $K' := W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \left(W_0^{1,\Phi}(\Omega)\right)^*$

$$\langle K'(u),v\rangle = A(\rho(u))\langle \rho'(u),v\rangle$$

olur. Yani, $\varepsilon \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega),R)$ olduğunu göstermek için,

$$\Lambda(u) = \int_\Omega \frac{\alpha(x)}{2}\left(\frac{|u|^q}{q}-\beta(x)\right)^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx$$

şeklinde verilen $\Lambda : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to R$ operatörünün $C^1(W^{1,\Phi}(\Omega),R)$ sınıfında olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için de, ilk olarak bütün $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ için,

$$\langle \Lambda'(u),v\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{\Lambda(u+tv)-\Lambda(u)}{t} = \int_\Omega \alpha(x)\left(\frac{|u|^q}{q}-\beta(x)\right)|u|^{q-2}uvdx - \int_\Omega f(x,u)vdx$$

olduğunu göstermemiz gerekir. Ardından $\Lambda' := W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \left(W_0^{1,\Phi}(\Omega)\right)^*$ operatörünün sürekli olduğunu elde etmemiz gerekiyor.

O halde, $|.|$ özellikleri, $f$ fonksiyonunun sürekli özellikleri ve $F$ nın tanımını bir arada düşünüldüğünde aşağıdaki denklem için Ortalama Değer teoremini kullanabiliriz;

$$\left\langle \Lambda'(u),v\right\rangle = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\alpha(x)}{2t}\left(\left(\frac{|u+tv|^q}{q}-\beta(x)\right)^2-\left(\frac{|u|^q}{q}-\beta(x)\right)^2\right)dx$$

$$-\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}dx,$$

$$=\lim_{t\to 0}\int_\Omega \alpha(x)\left(\frac{|u+t\epsilon v|}{q}\right)|u+t\epsilon v|^{q-2}(u+t\epsilon v)vdx-\lim_{t\to 0}\int_\Omega f(u+t\epsilon v)vdx$$

eşitliği elde edilir. Eşitlikte, $u,v\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ ve $0\le \epsilon\le 1$ dır. Bu son eşitlikte üçgen şitsizliğini kullanırsak,

$$\left|\alpha(x)\left(\frac{|u+t\epsilon v|^q}{q}-\beta(x)\right)|u+t\epsilon v|^{q-2}(u+t\theta v)\right|$$

$$\le \alpha(x)\left(\frac{|u+t\epsilon v|^q}{q}+\beta(x)\right)|u+t\epsilon v|^{q-1}|v|$$

$$\le \alpha(x)\left(\frac{|u+t\epsilon v|^{2q-1}}{q}|v|+\beta(x)|u+t\epsilon v|^{q-1}|v|\right)$$

elde edilir. Ayrıca, tüm $a,b\in R^N$ ve $m\ge 1$ için $|a+b|^m\le 2^{m-1}\left(|a|^m+|b|^m\right)$ eşitsizliği ile birlikte Young eşitsizliğini ardışık olarak yukarıdaki ifadenin sağ tarafına uygularsak,

$$\frac{|u+t\epsilon v|^{2q-1}}{q}|v|\le \frac{(2q-1)2^{2q-1}}{2q^2}\left[|u|^{2q}+|v|^{2q}\right]+\frac{1}{2q}|v|^{2q} \tag{4.3.6}$$

ve

$$|u+t\epsilon v|^{q-1}|v|\le \frac{2^{q-1}(q-1)}{qq^2}\left(|u|^q+|v|^q\right)+\frac{1}{q}|v|^q \tag{4.3.7}$$

elde edilir. Benzer şekilde, **(f1)** koşulunu da kullanırsak

$$\left|f(x,u+t\epsilon v)v\right|\le c\left(\frac{2^{s-1}(s-1)}{s}|u|^s+\left(\frac{2^{s-1}(s-1)+1}{s}\right)|v|^s\right) \tag{4.3.8}$$

Olur. Bu durumda, (4.3.6) ve (4.3.7) eşitsizliklerinin sağ tarafı $L^1(\Omega)$ olur. Bu yüzden lebesgue güçlü yakınsama teoremine göre $f$ ve $|.|$ süreklilik özelliği ile birlikte integral ve limit sıralaması değiştirilebilir. Yani,

$$\left\langle \Lambda^{/}(u),v\right\rangle = \int_{\Omega}\alpha(x)\lim_{t\to 0}\left(\frac{|u+t\epsilon v|^{q}}{q}-\beta(x)\right)|u+t\epsilon v|^{q-2}(u+t\epsilon v)vdx-\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}f(x,u+t\epsilon v)vdx$$

$$=\int_{\Omega}\alpha(x)\left(\frac{|u|^{q}}{q}-\beta(x)\right)|u|^{q-2}uvdx-\int_{\Omega}f(x,u)vdx$$

olur. Yukardaki denklemin, sağ tarafı $v$ nin fonksiyonu olarak $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ üzerinden sürekli lineer fonksiyonel olduğundan dolayı, $\Lambda$ Gateaux türevlenebilirdir. Şimdi de $\Lambda$ sürekliliğini göstereceğiz. Bunun için de, $(u_n)\subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ de $u_n\to u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ olacak bir dizi varsayalım. O zaman

$$\left|\left\langle \Lambda^{/}(u_n)-\Lambda^{/}(u),v\right\rangle\right|\le\left|\int_{\Omega}\alpha(x)I_n vdx\right|+\left|\int_{\Omega}\left(f(x,u)-f(x,u_n)\right)vdx\right|$$

yazılabilir. Burada

$$I_n:=\Theta(u_n)-\Theta(u)=\left[\left(\frac{|u_n|^{q}}{q}-\beta(x)\right)|u_n|^{q-2}u_n-\left(\frac{|u|^{q}}{q}-\beta(x)\right)|u|^{q-2}u\right]$$

ve

$$\theta(.)=\left(\frac{|.|^{q}}{q}-\beta(x)\right)|.|^{q-2}$$

Hölder eşitsizliğinden yaralanarak,

$$\left|\int_{\Omega}\alpha(x)I_n vdx\right|\le c|I_n|_{\frac{q}{q-1}}|v|_q \tag{4.3.9}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega)\text{Ğ}L^{q}(\Omega)\text{Ğ}L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$$

Gömmesinden dolayı $u_n\to u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ yı (4.3.9) a uygulayabiliriz. Diğer taraftan,

$$|I_n|=|\Theta(u_n)-\Theta(u)|\le\beta(x)\left(|u_n|^{q-1}+|u|^{q-1}\right)+\frac{1}{q}\left(|u_n|^{2q-1}+|u|^{2q-1}\right)$$

$$\le C\left(|u_n|^{q-1}+|u|^{q-1}+|u_n|^{2q-1}+|u|^{2q-1}\right) \tag{4.3.10}$$

yazabiliriz. Burada $C := \max\left(\dfrac{1}{p}, \sup_{x\in\Omega} \beta(x)\right)$. Ayrıca, $u_n \to u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ olduğundan dolayı $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\text{Ğ}L^{\frac{(q-1)q}{q-1}}(\Omega)$, $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\text{Ğ}L^{\frac{(2q-1)q}{q-1}}(\Omega)$ ve $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\text{Ğ}L^{s}(\Omega)$ kompakt gömmelerinden $(u_n)$ ile gösterilen alt dizi için

$$L^{\frac{(q-1)q}{q-1}}(\Omega) \text{ uzayında } u_n \to u$$

$$L^{\frac{(2q-1)q}{q-1}}(\Omega) \text{ uzayında } u_n \to u$$

$$L^{s}(\Omega) \text{ uzayında } u_n \to u$$

$$\text{hhh } x\in\Omega \text{ için } u_n \to u$$

yazabiliriz. ve her $x\in\Omega$ ve $n\in N$ için, $|u_n(x)| \le w_1(x)$, $|u_n(x)| \le w_2(x)$ ve $|u_n(x)| \le w_3(x)$ olacak şekilde $w_1 \in L^{\frac{(q-1)q}{q-1}}(\Omega)$, $w_2 \in L^{\frac{(2q-1)q}{q-1}}(\Omega)$ ve $w_3 \in L^{s}(\Omega)$ vardır. Bundan dolayı, bu bilgileri (4.3.10) da kullanarak,

$$|I_n|_{\frac{q}{q-1}} = |\Theta(u_n)-\Theta(u)|_{\frac{q}{q-1}} = \left(\int_\Omega |\Theta(u_n)-\Theta(u)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx\right)^{\frac{q}{q-1}}$$

ve

$$|\Theta(u_n)-\Theta(u)|^{\frac{q}{q-1}} \le c\left(1+|u_n|^{q-1}+|u|^{q-1}+|u_n|^{2q-1}+|u|^{2q-1}\right)^{\frac{q}{q-1}}$$

$$\le c\left(1+|w_1|^{\frac{(q-1)q}{q-1}}+|u|^{\frac{(q-1)q}{q-1}}+|w_2|^{\frac{(2q-1)q}{q-1}}+|u|^{\frac{(2q-1)q}{q-1}}\right) \in L^1(\Omega)$$

elde edilir. Şimdi de $n\to\infty$ iken $|\Theta(u_n(x))-\Theta(u(x))| \to 0$ olduğunu göstereceğiz. Aslında,

$$|\Theta(u_n)-\Theta(u)| = \left|\left(\frac{|u_n|^q}{q}-\beta(x)\right)|u_n|^{q-2}u_n - \left(\frac{|u|^q}{q}-\beta(x)\right)|u|^{q-2}u\right|$$

$$\le \frac{1}{q}\left||u_n|^{2q-2}u_n-|u|^{2q-2}u\right| + \beta(x)\left||u_n|^{q-2}u_n-|u|^{q-2}u\right|$$

yazabiliriz. Şimdi de $1<k<\infty$ için $c_k>0$ sabiti mevcuttur.

$$\left||\xi|^{k-2}\xi-|\varsigma|^{k-2}\varsigma\right|\leq C_k|\xi-\varsigma|\left(|\xi|+|\varsigma|\right)^{k-2},\forall\xi,\varsigma\in R^N$$

$c_k>0$ sabiti mevcuttur (Chipot, 2009). Bu yüzden $u_n\to u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left|\Theta\left(u_n(x)\right)-\Theta\left(u(x)\right)\right|=0$$

elde edilir. Bu son eşitlikte, **(f1),** Hölder eşitsizliği, $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\text{Ğ}L^s(\Omega)\text{Ğ}L^{s-1}(\Omega)$ sürekli gömmeyi $\left|\int_\Omega\left(f(x,u)-f(x,u_n)\right)vdx\right|$ terimi için kullanırsak

$$\left|\int_\Omega\left(f(x,u)-f(x,u_n)\right)vdx\right|\leq c_2\int_\Omega\left(|w_3|^{s-1}+|u|^{s-1}\right)|v|dx$$

$$\leq c_3\int_\Omega\left(\left\||w_3|^{s-1}\right\|_{\frac{s}{s-1}}+\left\||u|^{s-1}\right\|_{\frac{s}{s-1}}\right)|v|\in L^1(\Omega)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Üstelik, $f$ in sürekliliğini ve hhh $x\in\Omega$ için $u_n(x)\to u(x)$ göz önünde bulundurursak

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega\left(f\left(x,(u_n)\right)-f\left(x,u(x)\right)\right)\right|=0$$

elde ederiz. Yukardaki elde edilen bütün bilgileri dikkate alıp ve Lebesque güçlü yakınsama teoremini uygularsak

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega\left(f(x,u_n)-f(x,u)\right)\right|=0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|\Theta(u_n)-\Theta(u)\right|^{\frac{q}{q-1}}dx=0$$

Eşitliklerini elde ederiz. Sonuç olarak, son iki denklem birlikte

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\Lambda'(u_n)-\Lambda'(u)\right\|_{\left(W_0^{1,\Phi}(\Omega)\right)^*}=\lim_{n\to\infty}\sup_{\|x\|_\Phi\leq1}\left|\left\langle\Lambda'(u_n)-\Lambda'(u),v\right\rangle\right|=0$$

sonucuna varırız. O halde, $\Lambda':=W_0^{1,\Phi}(\Omega)\to\left(W_0^{1,\Phi}(\Omega)\right)^*$ süreklidir.

**Not 4.3.5** Yardımcı Teorem 4.3.4 sonucunda, türevi (4.3.4) verilen $\varepsilon\in C^1\left(W_0^{1,\Phi}(\Omega),R\right)$ sahibiz. Eğer (4.3.3) ve (4.3.4) karşılaştırırsak, $\varepsilon$ fonksiyonelinin kritik noktaları aynı zamanda (4.3.2) ve (4.3.3) sağlayan fonksiyonlardır. Bu yüzden (4.1.1) problemin çözümünü elde etmek için $\varepsilon$ fonksiyonelinin kritik noktalarını araştıracağız. Bu amaçla, fonksiyonel $\varepsilon$ kritik noktalarının olduğunu ispat etmemize yardımcı olacak aşağıda verilen bazı sonuçlar elde edeceğiz.

**Yardımcı Teorem 4.3.6.** **(f1)** ve **(f3)** koşullarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, $\varepsilon$ fonksiyoneli aşağıdaki koşulları sağlar.

**i)** $\|u\|_{\Phi} = \eta < 1$ olmak üzere bütün $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ için $\varepsilon(u) \geq \tau > 0$ olacak şekilde $\eta$ ve $\tau$ pozitif reel sayıları vardır.

**ii)** $\|e\|_{\Phi} > 1, \varepsilon(e) < 0$ olacak şekilde $e \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ mevcuttur.

**İspat**

**i)** **(f3)** koşulundan, $\delta \in (0,1)$ ile birlikte verilen herhangi bir $\epsilon \in \left(0, \delta^{\varphi^0} / 2\sigma c_0^q\right)$ için

$$\left|F(x,t)\right| \leq \frac{\epsilon |t|^q}{q}, \forall x \in \Omega, |t| \leq \delta$$

yazabiliriz. Diğer taraftan,

$$\|u\|_{\Phi} = \eta := \left(\frac{1}{m_1 q}\right)^{1/\sigma\varphi^0 - q} \delta^{\varphi^0/\sigma\varphi^0 - q} < 1$$

olacak şekilde $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ olsun. Ayrıca, Önerme 4.2.3 ve $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ sürekli gömmesinden, yani; $\forall u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ için $|u|_q \leq c_0 \|u\|_{\Phi}$ olacak şekilde $\exists c_0 = c(|\Omega|) > 0$ vardır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(u) &\geq \frac{m_1}{\sigma}\left(\int_{\Omega} \Phi(x,|\nabla|)dx\right)^{\sigma} - \frac{\epsilon}{q}\int_{\Omega} |u|^q dx \\
&\geq \frac{m_1}{\sigma}\|u\|_{\Phi}^{\sigma\varphi^0} - \frac{\epsilon}{q} c_0^q \|u\|_{\Phi}^q \\
&\geq \left(\frac{m_1}{\sigma}\|u\|_{\Phi}^{\sigma\varphi^0 - q} - \frac{\epsilon}{q}\right)\|u\|_{\Phi}^q = \left(\frac{1}{\sigma q}\delta^{\varphi^0} - \frac{\epsilon}{q} c_0^q\right)\eta^q = \tau
\end{aligned}$$

yani $\varepsilon(u) \geq \tau > 0$ olduğu elde edilir.

**ii)** Öncelikle, $t > 1$ ve $s > 0$ için $\Phi(ts) \leq t^{\varphi^0}\Phi(s)$ sağlanır. Gerçekten, (4.2.5) varsayımına göre

$$\frac{z\varphi(z)}{\Phi(z)} \leq \varphi^0, \forall z \geq 0$$

yukardaki denkleme mevcuttur. Buradan da aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$\int_s^{ts} \frac{\varphi(z)}{\Phi(z)} \leq \int_s^{ts} \frac{\varphi^0}{z} dz$$

$$\log\Phi(ts)-\log\Phi(s)\le\log t^{\varphi^0}$$

$$\Phi(ts)\le t^{\varphi^0}\Phi(s)$$

Ayrıca, $0\ne\phi\in W^{1,\Phi}(\Omega)$ ve $1<t\in R$ olsun. Bu durumda, (4.3.2.) ve $\theta>\sigma\varphi^0>2q$ yardımıyla

$$\varepsilon(t\phi)=\frac{m_2}{\sigma}t^{\sigma\varphi^0}\left(\int_\Omega\Phi(x,|\nabla u|)dx\right)^\sigma+\frac{t^{2q}}{2q^2}\int_\Omega\alpha(x)|\phi|^{2q(x)}dx+t^q\int_\Omega\alpha(x)\beta(x)|\phi|^q dx$$
$$+\int_\Omega\alpha(x)\beta^2(x)dx-ct^0\int_\Omega|\phi|^\theta dx$$

denklemi elde edilir. Bu son eşitsizlikte, $t\to+\infty$ iken $\varepsilon(t\phi)\to-\infty$ elde ederiz. Daha sonra da yeteri kadar büyük $t>1$ için, eğer $\|e\|_\Phi>\eta$ ile birlikte $t\phi=e$ alınırsa $\varepsilon(e)<0$ elde ederiz.

**Yardımcı Teorem 4.3.7.** **(f1)** ve **(f2)** koşulları altında $\varepsilon$, (PS) koşulunu sağlar.

**İspat**

Herhangi bir $\{u_n\}\subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ dizisi ve $\hat{c}>0$ sabiti için

$$\varepsilon(u_n)\to\hat{c} \text{ ve } \|\varepsilon'(u_n)\|_{(W^{1,\Phi}(\Omega))^*}\to 0 \tag{4.3.11}$$

koşullarının sağlandığını kabul edelim.

İlk olarak, $(u_n)$ dizisinin $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ de sınırlı olduğunu gösterelim. Aksine, $(u_n)$ dizisi $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ de sınırlı olmasın. Yani, $n\to\infty$ iken $\|u_n\|_\Phi\to\infty$ ve ek olarak $\|u_n\|_\Phi>1$ olsun. Daha sonra, (4.3.11) den dolayı mevcuttur bir $C>0$ reel sayısı için

$$C+\|u_n\|\ge\varepsilon(u_n)=\hat{A}(\rho(u_n))+\int_\Omega\frac{\alpha(x)}{2}\left(\frac{|u_n|^q}{q}-\beta(x)\right)^2dx-\int_\Omega F(x,u_n)dx$$
$$\ge\frac{m_1}{\sigma}\|u_n\|_\Phi^{\sigma\varphi_0}-\frac{c_1}{s}\int_\Omega|u_n|^s dx$$
$$\ge\frac{m_1}{\sigma}\|u_n\|_\Phi^{\sigma\varphi_0}-c\|u_n\|_\Phi^s$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Diğer taraftan, yukardaki eşitsizliği $\|u_n\|_\Phi^s$ bölüp ve $n\to+\infty$ alındığında zaman $\sigma\varphi_0>s>1$ ifadesi ile çelişki elde ederiz. Bu yüzden $(u_n)$, $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ de sınırlıdır. Dolayısıyla, $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ Yansımalı Banach uzayı olduğundan, $(u_n)$

dizisinin zayıf olarak $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ ya yakınsayan bir alt dizi mevcuttur. Şimdi, bu yakınsamanın güçlü olduğunu göstereceğiz. O halde, (4.3.11) kullanırsak

$$\langle \varepsilon'(u_n), u_n - u \rangle = A\big(\rho(u_n)\langle \rho'(u_n), u_n - u\rangle\big) + \int_\Omega \alpha(x)\left(\frac{|u_n|^q}{q} - \beta(x)\right)|u_n|^{q-2} u_n (u_n - u)\,dx$$
$$-\int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u)\,dx \to 0$$

yazabiliriz. Diğer taraftan, **(f1)** , $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\text{Ğ}L^s(\Omega)$ kompakt gömmesi ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|\int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u)\,dx\right| \le \int_\Omega |u_n|^{s-1}|u_n - u|\,dx \le \left\||u_n|^{s-1}\right|_{\frac{s}{s-1}} |u_n - u|_s \to 0 \qquad (4.3.12)$$

elde ederiz. Benzer şekilde, $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\text{Ğ}L^{2q}(\Omega)$, $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\text{Ğ}L^q(\Omega)$ kompakt gömmelerinden ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|\int_\Omega \alpha(x)\left(\frac{|u_n|^q}{q} - \beta(x)\right)|u_n|^{q-2} u_n (u_n - u)\,dx\right| \le \overline{c}\int_\Omega \left(|u_n|^q + 1\right)|u_n|^{q-1}|u_n - u|\,dx$$
$$\le \overline{c}\left(\int_\Omega |u_n|^{2q-1}|u_n - u|\,dx + \int_\Omega |u_n|^{q-1}|u_n - u|\,dx\right)$$
$$\le \overline{c}\left(\left\||u_n|^{2q-1}\right|_{\frac{2q}{2q-1}} |u_n - u|_{2q} + \left\||u_n|^{q-1}\right|_{\frac{q}{q-1}} |u_n - u|_q\right) \to 0 \qquad (4.3.13)$$

olarak buluruz. Burada $\overline{c} := 2\max\left(\sup_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x)\, X \sup_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x), \frac{1}{q}\right)$ dır. O halde, (4.3.12) ve (4.3.13) eşitsizliklerini kullanarak

$$A\big(\rho(u_n)\langle \rho'(u_n), u_n - u\rangle\big) \to 0$$

elde ederiz. Bu durumda, (4.2.4) ve **(AO)** koşullarından dolayı $(u_n)$ güçlü bir şekilde $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ ye yakınsar. Sonuç olarak; $\varepsilon$, (PS) koşulunu sağlar.

**Teorem 4.3.3 ün ispatı;**

Yardımcı teorem (4.3.7) ve ( 4.3.9) den dolayı fonksiyonel $\varepsilon$ Mountain-Pass teoreminin (Ambrosetti ve Rabinowitz, 1973) koşullarını sağlar. Bu yüzden (4.1.1) probleminin sıfırdan farklı en az bir zayıf çözümü vardır. Bu çözüm $\varepsilon$ fonksiyonelinin aynı zamanda kritik noktasıdır.

### 4.4. Örnekler

Bu bölümde, sonuçlarımızı başarılı bir şekilde uygulayacağımız somut problemler sunacağız. Farz edelim ki

$$\begin{cases} A(t)=1 \\ a(t)=|t|^{p-2} \\ \beta(x)=1 \\ \alpha(x)=\alpha=const>0 \\ f(x,t)=|t|^{\gamma-2}t, \gamma\in R, \gamma>1 \\ p=q=2 \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Daha sonra (4.1.1) denklemi Ginzburg-Landan (GL) sınıfı denklemi

$$\begin{cases} -\nabla^2\psi+\alpha\left(\frac{|\psi|^2}{2}-1\right)\psi=|\psi|^{\gamma-2}\psi, \Omega \\ \psi=0, \partial\Omega \end{cases} \tag{4.4.2}$$

denklemine dönüşür. Burda $\psi$ süper iletken durumu tanımlayan microdalga fonksiyonu ve $|\psi|^2$ süper iletken elektronların yoğunluğunu gösteriyor. Bu denklem, ilk olarak (Ginzburg, Landau, 1950) önerildi. Süper iletkenlik alanında GL denklemi makroskobik süper iletkenlik olaylarını anlamada önemli bir rol oynar. GL denklemleri ile ilgili detaylı bilgi için (Bethuel, Bresiz, ve Hlein, 1994; Bethuel, Bresiz, ve Hlein, 1993; Comte ve Mironezcu, 1999; Jimbo ve Morito, 2001; Lefter ve Radulescu, 1996; Lu ve Pan, 1996;Lu ve Pan, 1996 Mironescu, 1995; Morito, 2001;Struwe, 1993.) referanslarına bakınız.

Problem (4.4.2) ye karşılık gelen enerji fonksiyoneli, GL enerji olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\varepsilon_*: W_0^{1,2}\to R,$$

$$\varepsilon_*(\psi)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\psi|^2dx+\int_\Omega\left(\frac{|\psi|^2}{2}-1\right)^2dx-\frac{1}{\gamma}\int_\Omega|\psi|^\gamma dx$$

ve fonksiyonel $\varepsilon_*$ ın kritik noktaları eşdeğer norm $\|.\|_{W^{1,2}}$ ( poincare eşitsizliğine göre ) ile birlikte

$$W_0^{1,2}(\Omega)=\left\{\psi\in W_0^{1,2}(\Omega):\psi=0,\partial\Omega\right\}$$

içinde

$$\|\psi\|_{W_0^{1,2}} = \|\psi\|_W = \left(\int_\Omega |\nabla \psi|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

deki gibi tanımlanmıştır. Burada,

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{ \psi \in L^2(\Omega) : \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, ..., N \right\} \text{ dir.}$$

**Teorem 4.4.1.** $4 < \gamma < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ ve $0 < \alpha < 1$ in sağladığını varsayalım. Daha sonra (4.4.2) probleminin $W_0^{1,2}(\Omega)$ de sonsuz çoklukta çözümü vardır.

**İspat**

(4.1.1) probleminde görünen bütün fonksiyonların, (4.4.1) sağladığından bütün gerekli şartlar (**AO) ve (f1)-(f4)** (4.4.2) problemi için sağlar. Bu yüzden, (4.4.2) problemi için yardımcı teorem 4.3.6. ve yardımcı teorem 4.3.7 sağlandığını kolayca gösterebiliriz. Bunu söylemek ile birlikte, farklı bir yaklaşım gerektirdiğinde yardımcı teorem 4.3.7. ispatının özlü anahatını vermek istiyoruz. Bu amaçla, Palais-Smale dizisi $(u_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ için

$$\varepsilon_*(u_n) \to c \text{ ve } \|\varepsilon_*'(u_n)\|_{\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*} \to 0 \tag{4.4.3}$$

Tekrar çelişki ile $\|u_n\|_w > 1$ olduğunu varsayalım. (4.4.3) gerçeklerinden dolayı $C$, $4 < \kappa < \gamma$ şartını sağlayan $\kappa$ pozitif reel sayılarının varlığı ve $W_0^{1,2}(\Omega)$Ğ$L^2(\Omega)$ gömmesi ile birlikte

$$C \geq \varepsilon_*(u_n) - \frac{1}{\kappa}\left\langle \varepsilon_*'(u_n), u_n \right\rangle$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \left(\frac{|u_n|^2}{2} - 1\right)^2 dx - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega |u_n|^\gamma \, dx$$

$$-\frac{1}{\kappa}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \frac{\alpha}{\kappa}\int_\Omega \left(\frac{|u_n|^2}{2} - 1\right) dx + \frac{1}{\kappa}\int_\Omega |u_n|^\gamma \, dx$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa}\right)\|u_n\|_w^2 + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \left(\frac{|u_n|^4}{4} - |u_n|^2 + 1\right) dx$$

$$-\frac{\alpha}{\kappa}\int_\Omega\left(\frac{|u_n|^4}{2}-|u_n|^2\right)dx+\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\gamma}\right)\int_\Omega|u_n|^\gamma\,dx$$

$$\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\kappa}\right)\|u_n\|_w^2+\left(\frac{\alpha}{8}-\frac{\alpha}{2\kappa}\right)\int_\Omega|u_n|^4dx$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega|u_n|^2\,dx+\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\gamma}\right)\int_\Omega|u_n|^\gamma dx$$

$$\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\kappa}\right)\|u_n\|_w^2+\left(\frac{\alpha}{\kappa}-\frac{\alpha}{2}\right)\|u_n\|_w^2$$

$$\geq(1-\alpha)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\kappa}\right)\|u_n\|_w^2$$

$\kappa>4$ ve $0<\alpha<1$ olduğundan $(u_n)$, $W_0^{1,2}(\Omega)$ içinde sınırlıdır. $W_0^{1,2}(\Omega)$ nın Yansımalı bir Banach uzay olduğunu göz önünde bulundurursak, $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ ya zayıf bir şekilde yakınsayan $(u_n)$ alt dizisi vardır. Daha sonra (4.4.3) ü kullanarak

$$\langle\varepsilon_*'(u_n),u_n-u\rangle=\int_\Omega\nabla u_n(\nabla u_n-\nabla u)dx+\int_\Omega\left(\frac{|u_n|^2}{2}-1\right)u_n(u_n-u)\,dx-\int_\Omega|u_n|^{\gamma-2}u_n(u_n-u)\,dx\to$$

Ayrıca, Hölder eşitsizliğinden ve $W_0^{1,2}(\Omega)\text{Ğ}L^4(\Omega)$ ve $W_0^{1,2}(\Omega)\text{Ğ}L^\gamma(\Omega)$ kompakt gömmesinden dolayı

$$\left|\int_\Omega|u_n|^{\gamma-2}u_n(u_n-u)\,dx\right|\to 0 \tag{4.4.4}$$

ve

$$\left|\int_\Omega\left(\frac{|u_n|^2}{2}-1\right)u_n(u_n-u)\,dx\right|\to 0 \tag{4.4.5}$$

sağlandığını sırasıyla (4.3.12) ve (4.3.13) de olduğu gibi kolayca görülebilir. Bu yüzden, (4.4.4) ve (4.4.5) dolayı

$$\int_\Omega\nabla u_n(\nabla u_n-\nabla u)dx\to 0 \tag{4.4.6}$$

elde ederiz. Diğer taraftan,

$$\langle L(v)w\rangle=\int_\Omega|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla w dx,\ p>1 \tag{4.4.7}$$

olarak tanımlanan $L: W_0^{1,2}(\Omega)$Ğ$\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*$ operatörü $S_+$ tipindedir ( bkz Teorem 3.1, Fan ve Zhang, 2003). Dolayısıyla, $p=2, v=u_n$ ve $w=u_n-u$ ifadelerini (4.4.7) denkleminde yerine koyarsak $\int_\Omega \nabla u_n \left(\nabla u_n - \nabla u\right) dx$ olarak elde ederiz. Bu da $S_+$ sınıfında olduğunu gösterir. Bu yüzden (4.4.6) dan ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ içinde $u_n \to u$ yakınsamasından dolayı $\varepsilon_*$ fonksiyoneli (PS) şartını sağlar. Sonuç olarak (4.4.2) problemi $W_0^{1,2}(\Omega)$ da basit olmayan çözüme sahiptir.

# 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

## 5.1 Sonuçlar

Bu çalışmamızda

$$\begin{cases} -A\left(\int_{\Omega}\Phi\left(\left|\nabla u(x)\right|\right)dx\right)div\left(a\left(\left|\nabla u(x)\right|\right)\nabla u(x)\right)+\alpha(x)\left(\dfrac{\left|u(x)\right|^{q}}{q}-\beta(x)\right)\left|u(x)\right|^{q-2}u & = f(x,u) \quad \Omega \; da \\ u & =0 \quad \partial\Omega \; üzerinde \end{cases}$$

denklemini sıfırdan farklı zayıf çözümleri araştırılmıştır. Bu zayıf çözümleri bulmak için Mountain Pass geometrisi teoremi kullanılnıştır.

## 5.2 Öneriler

**1)** Çalışmamızda kullandığımız (4.1.1) denkleminde Fountain teoremini uygulayarak sıfırdan farklı en az iki kritik noktasının varlığı gösterilebilir.

**2)** Çalışmamızda (4.1.1) denkleminde p yerine p(x) alınıp; Mountain Pass teoremleri kullanılarak sıfırdan farklı en az bir kritik noktasının varlığı gösterilebilir.

**3)** (4.1.1) denkleminde p yerine p(x) kullanılarak Fountain teoremi çalışılabilir. Böylece sıfırdan farklı en az iki kritik noktasının varlığı gösterilebilir.

**KAYNAKLAR**


Adams, R.A., 1975, Sobolev spaces, *Academic Press*, New York.

Adams,R.A. ve Fournier,J.J., 2003,Sobolev Space. *Elsevier Science*.

Alves, C.O. ve Ferreira, M. C., 2015, Existence of solutions for a class of p(x)-Laplacian equations involving a concave- convex nonlinearity with critical growth in RN, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 45 (2), 399-422.

Ambrosetti, A. ve Rabinowitz, P. H., 1973, Dual variational methods in critical point theory, *J. Funct. Anal*., 14, 349-381.

Avci, M., Cekic, B. ve Mashiyev, R.A., 2011, Existence and multiplicity of the solutions of the p(x)-Kirchhoff type equation via genus theory, *Math. Meth. Appl. Sci*. 34 (14) 1751-1759.

Avci, M. ve Pankov, A., 2018, Multivalued Elliptic Operators with Nonstandard Growth, *Advances in Nonlinear Analysis* 7 (1) 35-48.

Ayazoglu (Mashiyev), R. ve Avci, M., 2016, N.T. Chung, Existence of Solutions for Nonlocal Problems in Sobolev- Orlicz Spaces via Monotone Method, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Appl.* 4 (1) 63-73.

Bethuel, F., Brezis, H.ve Hlein, F.,1994, Ginzburg-Landau Vortices, *Birkhuser*,

Bethuel, F., Brezis, H. ve Hlein, F., 1993, Asymptotics for the minimization of a Ginzburg-Landau functional, *Calculus of Variations and PDE* 1 123-148.

Bonanno, G., Molica Bisci, G. ve R˘adulescu, V., 2012, Quasilinear elliptic non-homogeneous Dirichlete problems through Orlicz-Sobolev spaces, *Nonlinear Anal. TMA* 75 4441-4456.

Boureanu, M.M. ve Udrea, D.N., 2013, Existence and multiplicity results for elliptic problems with p(.)-Growth conditions, Nonlinear Analysis: *Real World Applications* 14 (4) 1829-1844.

Chipot, M., 2009, Elliptic Equations: *An Introductory Course, Birkhuser Verlag AG, Basel,*

Colasuonno, F. ve Pucci, P., 2011, Multiplicity of solutions for p(x)-polyharmonic Kirchhoff equations, *Nonlinear Anal.* 74 5962-5974.

Corr´ea, F.J.S.A. ve Figueiredo, G.M., 2009, On a p-Kirchhoff equation via Krasnoselskiis genus, *Appl. Math. Letters* 22 819-822.

Comte, M. ve Mironescu, P., 1999, Minimizing properties of arbitrary solutions to the GinzburgLandau equation, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics* 129 (6) 1157-1169.

Cruz-Uribe, D.V.ve Fiorenza, A., 2013, Variable Lebesgue Spaces*: Foundations and Harmonic Analysis, Springer, Basel,*

Cianchi, ve Andrea.,1996, A Sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev Spaces, indiana Univ.J.45,39-65

Diening, L., Harjulehto, P., Hasto, P. ve Ruzicka, M., 2011, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017, *Springer-Verlag, Heidelberg,*

Donaldson, T.K. ve Trudinger, N.S.,1971, Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems, *J.Funct.Anal.*, 8, 52-75.

Fan X.L. ve Han X.,2004, Existence and multiplicity of solutions for p(x)-Laplacian equations in $R^N$. *Nonlinear Anal*.59:173-188.

Fan, X.L.,2012, Differential equations of divergence form in Musielak-Sobolev spaces and a sub-supersolution method, *J. Math. Anal. Appl*. 386 593-604.

Fan, X.L., 2010, On nonlocal p(x)-Laplacian Dirichlet problems, Nonlinear Anal. 72 3314-3323.

Fan, X.L. ve Zhang, Q.H.,2003, Existence of solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet problem, *Nonlinear Anal.* 52 1843-1852.

Fan, X.L. ve Zhao, D., 2001, On the spaces Lp(x)(Ω) and W m,p(x)(Ω), *J. Math. Anal. Appl.* 263 424-446.

Fang, F. ve Tan, Z.,2012, Existence and Multiplicity of solutions for a class of quasilinear elliptic equations: An Orlicz-Sobolev setting, *J. Math. Anal. Appl*. 389 420-428.

Fukagai, N., Ito, M. ve Narukawa, K. 2006, Positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Orlicz- Sobolev nonlinearity on RN, *Funkcial. Ekvac*. 49 235-267.

Galewski, M. 2005, A new variational method for the p(x)-Laplacian equation, Bull. *Australian Math. Soc*. 72 (1) 53-65.

Ginzburg, V. ve Landau, L.,1950, On the theory of superconductivity, *Zh.exper.teor.Fiz*. 20 1064-1082.

Harjulehto, P., Hasto, P. ve Kl´en, R., 2016, Generalized Orlicz spaces and related PDE, Nonlinear Analysis: *Theory, Methods and Appl.* 143 155173.

Hudzik, H., 1976, On generalized Orlicz-Sobolev space, *Funct. Approx. Comment. Math.* 4 37-51.

Heidarkhani, S., Caristi, G. ve Ferrara, M., 2016, Perturbed Kirchhoff-type Neumann problems in Orlicz-Sobolev spaces, *Comput. Math. Appl*. 71 2008-2019.

Jimbo, S.ve Morito, Y., 2001, Notes on the limit equation of vortex motion for the Ginzburg-Landau equation with Neumann condition, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 18 483-501.

Kirchhoff, G., *Mechanik,* Teubner, Leipzig, 1883.

Krasnosels'kii, M. ve Rutic'kii, J., 1961, Convex Functions and Orlicz Spaces, *Noordhoff, Groningen*.

Krasnosel'skii, M.A., ve Rutickii, Ya.B., 1961, Convex Functions and Orlicz Spaces.*Noordhoff, Groningen*, The Netherlands.

Kufner, A., John, O.ve Fuˇcik, S., 1977, Function Spaces, Noordhoff, Leyden.

Lefter, C. ve Rˇadulescu, V.D., 1996, On the Ginzburg-Landau energy with weight, Annales de l'Institut Henri Poincar C, Analyse Non Linaire 13 (2) 171-184.

Lu, K. ve. Pan, X.B., 1996, Ginzburg-Landau equation with DeGennes boundary condition, *J. Differential Equations* 129 136-165.

Luxemburg, W.,1955, Banach Function Spaces, (Thesis), Technishe Hogeschool te Delft, The Netherlands.

Mihˇailescu, M. ve Radulescu, V. 2008, Neumann problems associated to non-homogeneous differential operators in Orlicz-Sobolev spaces, *Ann. Inst. Fourier* 58 2087-2111.

Mironescu, P.,1995, On the stability of radial solutions of the Ginzburg-Landau equation, *J.Func. Anlaysis* 130 334-344.,

Morito, Y.,2001, Stable solutions to the Ginzburg-Landau equation with magnetic effect in a thin domain, *Japan J. Indust. Appl*. 21 129-147.

Musielak, J.,1983, Modular spaces and Orlicz spaces, Lecture Notes in Math, vol.1034, Springer-Verlag, Berlin.

Musayev B. ve Alp M., 2000, Fonksiyonel Analiz. *Balcı Yayınları Tic.Ltd.Şti*.Kütahya.

Rabinowitz, P.H., 1986. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations, *Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*

Rao, M.M. ve. Ren, Z.D., 1991, Theory of Orlicz Spaces, *Marcel Dekker Inc.,* New York.

R˘adulescu, V.D. ve Repov˘s, D.D.,2015, Partial Differential Equations with Variable Equations: *Variational Methods and Qualitative Analysis, CRC press*, New York,.

Struwe, M., 1993, Une estimation asymptotique pour le modle de Ginzburg-Landau, *C. R. Acad. Sc.* Paris 317 677-680.

Siddiqi A.H.,2004, Applied Functional Analysis. *Marcel Dekker Inc*. New York.

Willem M.,1996, Minimax Theorems. *Birkhauser*.Basel

Yucedag, Z., 2015, Existence of Solutions for p(x)-Laplacian Equations Without Ambrosetti-Rabinowitz Type Condition, *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc*. 38 (3) 1023-1033

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER


| | | |
|---|---|---|
| **Adı Soyadı** | **:** | Berat SÜER |
| **Uyruğu** | **:** | T.C. |
| **Doğum Yeri ve Tarihi** | **:** | Derik-01.06.1979 |
| **Telefon** | **:** | |
| **Faks** | **:** | |
| **e-mail** | **:** | beratsuer72@gmail.com |


## EĞİTİM

| **Derece** | | **Adı, İlçe, İl** | | **Bitirme Yılı** |
|---|---|---|---|---|
| Lise | : | Fatih lisesi | Diyarbakır | 1996 |
| Üniversite | : | Dicle Üniversitesi | Diyarbakır | 2001 |

## İŞ DENEYİMLERİ

| **Yıl** | **Kurum** | **Görevi** |
|---|---|---|
| 2001-2019 | M.E.B | Öğretmen |

**UZMANLIK ALANI** Fonksiyonel Analiz

**YABANCI DİLLER** İngilizce

## BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

## YAYINLAR

**Süer, B.**, Yücedağ, Z. ve Avcı, M., 2018, A class of nonlocal elliptic equations in orlicz-sobolev spaces, *EJONS International Congress On Mathematic, Engineering and Natural Sciences-III,* Mardin- Türkiye, 41.(**Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır).**

**Süer, B**., Yücedağ, Z. ve Avcı, M., 2018, Solutions of ginzburg-landau-type equations involving variable exponent, *EJONS International Congress On Mathematic, Engineering and Natural Sciences-III,* Mardin- Türkiye, 36.

Avcı, M. ve **Süer, B.,** 2019, On a nonlocal problem involving a nonstandard nonhomogeneous differential operatör, *Journal of Eliptic and Parabolic Equations,*5(1), 47-67.