



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ORLICZ UZAYLARINDA P-AMEMİYA NORMUNA GÖRE BAZI
GEOMETRİK ÖZELLİKLER**

Badik Hüseyin UYSAL

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Haziran, 2021

İSTANBUL

Bu alışma 04.06.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Erhan ALIřKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Alen OSANÇLIOL
Beykent Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimim ve tez çalışmalarım boyunca çalışkanlığıyla ve yaptığı konuşmalarla daima daha iyisini yapabileceğimi gösterip bu yolda ıstık olup yolumu aydınlatıp ufkumu genişleten, umutsuzluğa kapıldığım her an yanımda olup bana güven veren danışman hocam Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU'na, her konuda desteğini esirgemeyen Araş. Gör. Rüya ÜSTER'e, Araş. Gör. Büşra ÜNAL'a ve yardımlarından dolayı Araş. Gör. Esra BAŞAR'a, Araş. Gör. Şeyma YAŞAR'a teşekkür ederim.

Ayrıca, daima yanımda bulunan, verebileceği bütün özveri ile her zaman destek olan Araş. Gör. Gamze AKAR'a, eğitim hayatım boyunca her zaman yanı başımda duran ve en az benim kadar emek sahibi olan aileme teşekkür ederim.

Haziran, 2021

Badik Hüseyin UYSAL

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1 GİRİŞ	1
2 GENEL KISIMLAR	3
2.1 ÖN BİLGİLER	3
2.2 ORLİCZ FONKSİYONLARI	7
2.3 ORLİCZ UZAYLARI	14
2.4 P-AMEMİYA NORMU	18
2.5 NORM ELDE EDİLEBİLİRLİK	25
2.6 K_p^* -SONLULUK , K_p^{**} -SONLULUK VE K_p -TEKLİK	56
2.7 UÇ NOKTALAR	68
2.8 YUVARLAKLIK	85
3 MALZEME VE YÖNTEM	96
4 BULGULAR	97
5 TARTIŞMA VE SONUÇ	102
KAYNAKLAR	104
ÖZGEÇMİŞ	107

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler

Açıklama

(G, Σ, μ)	: σ -sonlu atomsuz tam ölçü
Φ	: Orlicz fonksiyonu
Ψ	: Φ fonksiyonunun bütünler Orlicz fonksiyonu
φ	: Φ fonksiyonunun sağ türevi
ψ	: φ fonksiyonunun ters fonksiyonu
$L_{\rho_{\Phi}}(G)$	: Orlicz uzayı
$B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$	: $L_{\rho_{\Phi}}$ uzayının kapalı birim yuvarı
$S(L_{\rho_{\Phi}}(G))$	: $L_{\rho_{\Phi}}$ uzayının birim yuvar yüzeyi
$ExtB(L_{\rho_{\Phi}}(G))$	: $L_{\rho_{\Phi}}$ normlu uzayının kapalı birim yuvarının uç noktalarının kümesi
$\nearrow$	: Artarak yakınsama
$L^0(G)$	: G üzerindeki reel değerli, Σ -ölçülebilir, μ denklik sınıflarının kümesi
$L^p(G)$	: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere G üzerinde tanımlı reel veya kompleks değerli ölçülebilir ve $\ f\ _p = (\int_G f ^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty$ koşulunu sağlayan $f \in L^0(\mu)$ fonksiyonlarının uzayı
$L^\infty(G)$	: Esas olarak sınırlı yani $\ f\ _\infty = \sup_{t \in G} f(t) < \infty$ koşulunu sağlayan $f \in L^0(\mu)$ fonksiyonlarının uzayı
$supp f$	: f fonksiyonunun desteği
$card G$	: G kümesinin kardinalitesi
$conv G$	: G kümesinin konveks zarfı

Kisaltmalar

Açıklama

μ -hhh	: μ ölçüsüne göre "hemen hemen her"
------------	---

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORLICZ UZAYLARINDA p -AMEMİYA NORMUNA GÖRE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Badik Hüseyin UYSAL

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Bu tez çalışmasının iki temel amacı vardır.

İlk olarak, modüler uzayların bir örneği olan Orlicz uzayları üzerinde p -Amemiya norm ailesini ($1 \leq p \leq \infty$) tanıtmak ve infimum değerini aldığı parametreleri sınıflandırmaktır.

İkinci olarak, Orlicz uzaylarının Luxemburg ve Orlicz normlarına göre incelenen uç noktaları ve yuvarlaklığı gibi geometrik özelliklerini p -Amemiya normuna göre incelemektir. Bu tez kapsamında [5] makalesinde incelenen geometrik özellikler derlenerek Orlicz uzayları üzerinde bütüncül olarak ele alınıp karşılaştırılmış ve ispatları ayrıntılı olarak verilmiştir.

Haziran 2021, 116 sayfa.

Anahtar kelimeler: Orlicz uzayları, p -Amemiya normu, uç nokta, yuvarlaklık.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

SOME GEOMETRIC PROPERTIES ON ORLICZ SPACES ENDOWED WITH P-AMEMIYA NORM

Badik Hüseyin UYSAL

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

This thesis has two main purposes.

The first aim is to introduce the p -Amemiya norm family ($1 \leq p \leq \infty$) on Orlicz spaces, which are examples of modular spaces, and to classify the parameters at which the norms attain their infimums.

The second aim is to examine geometric properties such as extreme points and rotundity in Orlicz spaces with respect to p -Amemiya norms, which are studied with respect to Luxemburg and Orlicz norms. In this thesis the geometric properties examined in the article [5] are considered and compared in a unified manner on Orlicz spaces and their proofs are given in detail.

June 2021, 116 pages.

Keywords: Orlicz spaces, p -Amemiya norm, extreme points, rotundity.

1 GİRİŞ

Bu tezin temel amacı, Lebesgue uzaylarının doğal bir genişlemesi olan Orlicz uzayları üzerinde yeni bir norm olan p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normunu tanıtip bu norma göre Orlicz uzayının geometrik yapısını incelemektir.

Orlicz uzayları Orlicz normu kullanılarak W. Orlicz tarafından 1932 yılında tanıtılmıştır [17]. Daha sonra Orlicz uzayları üzerinde denk norm olan Luxemburg normu tanıtılmıştır [12]. 1983 yılında J. Musielak tarafından Orlicz uzaylarının modüler uzaylarla ilişkileri incelenmiş ve Orlicz uzaylarının bir modüler uzay olduğu gösterilmiştir [14]. Öte yandan, Orlicz uzaylarının geometrik özellikleri H. Hudzik ve M. Wisla tarafından, Orlicz normu ile incelenmiştir [9]. Orlicz uzaylarının geometrik özellikleri daha ayrıntılı şekilde S. Chen tarafından çalışılmıştır [1]. İlk kez 2008 yılında, Y. Cui, L. Duan, H. Hudzik ve M. Wisla tarafından Orlicz ve Luxemburg normlarını kapsayan p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normu Orlicz uzaylarında tanıtılmış ve bu norma göre Orlicz uzaylarında birim yuvarın uç noktaları, yuvarlaklık gibi bazı geometrik özellikleri incelenmiştir [5].

Orlicz uzaylarında verilen Orlicz, Luxemburg ve p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normları için literatürde verilen geometrik özelliklerin karşılaştırıp yorumlanmasını amaçlayan bu tez çalışmasının genel kısımları sekiz bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm ön bilgilerden oluşmaktadır. Tezde kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. σ -sonlu, atomsuz ve tam ölçü uzayı (G, Σ, μ) üzerinde yoğunlaşmıştır.

İkinci bölümde, Orlicz fonksiyonları ve özellikleri tanıtılarak sonraki bölümlerde kullanılmak üzere önemli önermeler ve sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, modüler fonksiyon aracılığıyla oluşturulan modüler uzay tanıtılmıştır. Yine, Φ bir Orlicz fonksiyonu ve $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\rho_{\Phi}(f) = \int_G \Phi(f(t)) d\mu$$

şeklinde tanımlanan modüler fonksiyon aracılığıyla modüler uzayların bir örneği $L_{\rho_{\Phi}}(G)$

Orlicz uzayı tanıtılarak bu uzayda denk normlar Luxemburg ve Orlicz normları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı üzerinde $1 \leq p \leq \infty$ ve her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için p -Amemiya fonksiyonu

$$\|f\|_{\rho_{\Phi},p} = \begin{cases} \inf_{k>0} k^{-1} (1 + \rho_{\Phi}^p(kf))^{\frac{1}{p}} & , 1 \leq p < \infty \\ \inf_{k>0} k^{-1} \max\{1, \rho_{\Phi}(kf)\} & , p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Daha sonra, Önerme 2.4.2 de $p = \infty$ için ∞ -Amemiya fonksiyonunun Luxemburg normuna eşit olduğu gösterilmiştir. Bu ifade kullanılarak $1 \leq p < \infty$ için p -Amemiya fonksiyonunun Teorem 2.4.6 da Luxemburg ve Orlicz normuna denk bir norm olduğu gösterilmiş ve $p = 1$ durumunda Orlicz normuna eşit olduğu elde edilmiştir.

Beşinci ve altıncı bölümlerde, öncelikle p -Amemiya normunun elde edilebilirliği diğer bir deyişle infimum değerini aldığı $k \geq 0$ sayılarının çalışılabilmesi için gerekli altyapı oluşturulmuş ve daha sonra p -Amemiya normunun elde edilebilirliği Teorem 2.5.24 de ele alınmıştır. Daha sonra bu k sayılarının sınıflandırılması yapılarak p -Amemiya normunun çalışılması daha kolay hale getirilmiştir.

Yedinci ve sekizinci bölümlerde, ise tezin temel amaçlarından biri olan $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzaylarında verilen tüm normlara göre birim yuvarın uç noktaları ve yuvarlaklık gibi bazı geometrik özellikleri incelenmiştir. Buna göre, $1 < p < \infty$ için p -Amemiya normunun Orlicz ve Luxemburg normlarından daha güçlü bir norm olduğunu gösteren çeşitli örnekler verilmiştir.

Ayrıca, tezin bulgular, tartışma ve sonuç kısmında tezde ele alınan konuların önemli noktaları özetlenerek, literatürde mevcut çalışmalar bütüncül bir bakış açısıyla yorumlanmıştır. Konuyla ilgili yapılması planlanan çalışmalar belirtilerek ileriye dönük hedefler sunulmuştur.

2 GENEL KISIMLAR

Genel kısımlar sekiz bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm olan ön bilgilerde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, Φ Orlicz fonksiyonları tanıtılarak ilerleyen bölümler için altyapı oluşturulmuştur. Üçüncü bölümde, modüler uzayların bir örneği olan $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayları ve üzerinde tanımlı normlar çalışılmıştır. Dördüncü bölümde, Orlicz uzayları üzerinde yeni ve daha genel bir norm olan p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) norm ailesi tanıtılıp Luxemburg ve Orlicz normlarına denkliği verilmiştir. Beşinci bölümde, p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normunun elde edilebilirliği diğer bir deyişle infimum değerini aldığı $k \geq 0$ sayıları çalışılmıştır. Altıncı bölümde, bu sayıların sınıflandırılması yapılmıştır. Yedinci bölümde, Orlicz uzaylarının kapalı birim yuvarının uç noktaları çalışılmıştır. Sekizinci bölümde, Orlicz uzaylarının yuvarlaklığı incelenerek $1 < p < \infty$ için p -Amemiya normunun, Orlicz ve Luxemburg normlarından ayıran özellikleri sunulmuştur.

2.1 ÖN BİLGİLER

Bu kısımda, Ölçü teorisine ilişkin tanım ve teoremler verilmiştir. Bu kısımdaki genel bilgiler [4] kaynağından alınmıştır.

Tanım 2.1.1 G boştan farklı bir küme olsun. G kümesinin $\Sigma \subset \mathcal{P}(G)$ alt kümelerinin bir ailesi

1. $\emptyset, G \in \Sigma$,
2. Her $A \in \Sigma$ için $G \setminus A \in \Sigma$,
3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \Sigma$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

koşullarını sağlıyorsa, bir σ -cebiri denir.

G boştan farklı bir küme ve Σ da G üzerinde bir σ -cebiri olmak üzere (G, Σ) ikilisine ölçülebilir uzay, Σ daki her bir kümeye de Σ -ölçülebilir küme veya sadece ölçülebilir küme denir.

Tanım 2.1.2 (G, Σ) ölçülebilir uzay olmak üzere σ -cebiri üzerinde tanımlı μ fonksiyonu,

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. Her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) \geq 0$,
3. (A_n) , Σ da ikişerli ayrık kümeler dizisi ise $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

koşullarını sağlıyorsa μ ye Σ üzerinde bir ölçü denir. Bu durumda, (G, Σ, μ) ölçü uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 (G, Σ, μ) ölçü uzayı olsun. $G \in \Sigma$ için $\mu(G) < \infty$ ise μ ölçüsüne sonlu ölçü, (G, Σ, μ) ölçü uzayına sonlu ölçü uzayı denir. Daha genel olarak, Σ daki bir (A_n) dizisi için

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ve} \quad \mu(A_n) < \infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

ise μ ölçüsüne σ -sonlu ölçü ve (G, Σ, μ) üçlüsüne de σ -sonlu ölçü uzayı denir.

Tanım 2.1.4 (G, Σ, μ) ölçü uzayı, $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) > 0$ olmak üzere her $B \subseteq A$ ölçülebilir kümesi için $\mu(B) = 0$ veya $\mu(B) = \mu(A)$ oluyor ise A kümesine μ ölçüsünün bir atomudur denir.

Eğer $\mu(A) > 0$ olacak şekilde bir $A \in \Sigma$ kümesi bir atom içeriyor ise μ ölçüsüne atomik ölçü ve bu durumda (G, Σ, μ) ölçü uzayına atomik ölçü uzayı denir.

Eğer (G, Σ, μ) uzayında hiç bir atom yok ise μ ölçüsüne atomsuz (atomik olmayan) ölçü ve (G, Σ, μ) uzayına atomsuz ölçü uzayı denir.

Örnek 2.1.5 $G = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(G)$ ve μ sayma ölçüsü olmak üzere her tek nokta kümesi μ ölçüsünün birer atomudur.

Ayrıca $G = \mathbb{R}$ için Σ Borel cebiri, μ Lebesgue ölçüsü olmak üzere (G, Σ, μ) uzayı atomsuz ölçü uzayıdır.

Tanım 2.1.6 (G, Σ, μ) ölçü uzayı olsun. Eğer

$$A \subset B \in \Sigma \quad \text{ve} \quad \mu(B) = 0 \quad \text{iken} \quad A \in \Sigma$$

koşulunu sağlıyorsa μ ölçüsüne tam ölçü denir.

Tanım 2.1.7 (G, Σ, μ) ölçü uzayı olsun. Eğer belirli bir özellik $\mu(A) = 0$ olan bir $A \in \Sigma$ kümesinin dışındaki her noktada geçerli ise bu özellik G üzerinde μ -hemen hemen her yerde (μ - h.h.h) geçerlidir denir.

Tanım 2.1.8 (G, Σ_G) , (H, Σ_H) iki ölçülebilir uzay ve $f : G \rightarrow H$ bir fonksiyon olmak üzere her $E \in \Sigma_H$ için

$$f^{-1}(E) \in \Sigma_G$$

oluyorsa, f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Teorem 2.1.9 (Monoton Yakınsaklık Teoremi) (G, Σ, μ) ölçü uzayı ve (f_n) , G üzerinde tanımlı aşağıdaki koşulları sağlayan ölçülebilir fonksiyon dizisi olsun.

1. G üzerinde her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq f_n(t) \leq f_{n+1}(t) \leq \infty$ μ - h.h.h.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ μ - h.h.h.

Bu durumda f ölçülebilir fonksiyondur ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f_n d\mu = \int_G f d\mu$$

geçerlidir.

Teorem 2.1.10 (Fatou Lemması) (G, Σ, μ) ölçü uzayı olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : G \rightarrow [0, \infty]$ ölçülebilir fonksiyon dizisi ise

$$\int_G \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_G f_n d\mu$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.1.11 (Lebesgue Sınırlı Yakınsalık Teoremi) (G, Σ, μ) ölçü uzayı olmak üzere g , G üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve (f_n) G üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan ölçülebilir fonksiyon dizisi olsun.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ μ - h.h.h
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(t)| \leq |g(t)|$ μ - h.h.h.

Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $f, f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonları integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f_n d\mu = \int_G f d\mu$$

bulunur.

Tanım 2.1.12 (G, Σ, μ) ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\int_G |f(t)|^p d\mu < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlarının hemen hemen her yerde eşitlik bağıntısına göre denklik sınıflarının oluşturduğu uzay $L^p(G)$ ile gösterilir. Yani,

$$L^p(G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \int_G |f(t)|^p d\mu < \infty \right\}$$

olur ve bu uzay üzerinde norm

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile verilir. Ayrıca $p = \infty$ ise

$$L^\infty(G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \operatorname{ess\,sup}_{t \in G} |f(t)| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıdır ve esasen sınırlı fonksiyonların uzayı olarak adlandırılır. $L^\infty(G)$ üzerinde norm

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t \in G} |f(t)|$$

ile verilir.

2.2 ORLICZ FONKSİYONLARI

Aşağıda verilen tanım ve özellikler için [1], [5] ve [20] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.2.1 Bir konveks $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu

1. Her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(-u) = \Phi(u)$,
2. $\Phi(0) = 0$,
3. $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ üzerinde sol sürekli,
4. $\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) = \infty$

koşullarını sağlıyorsa Φ fonksiyonuna Orlicz fonksiyonu denir.

Tanım 2.2.2 Φ Orlicz fonksiyonu olmak üzere

$$\Psi(v) = \sup\{u|v| - \Phi(u) : u \geq 0\}$$

ile tanımlanan Ψ fonksiyonuna Φ fonksiyonunun bütünler (tamlayan / tümleyen) fonksiyonu denir. Ψ fonksiyonu da bir Orlicz fonksiyonudur ve (Φ, Ψ) ikilisi bütünler Orlicz fonksiyon çifti olarak adlandırılır.

Örnek 2.2.3 Aşağıda (Φ, Ψ) bütünler Orlicz fonksiyon çifti için örnekler verilmiştir.

1. $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p}$ Orlicz fonksiyonunun bütünler fonksiyonu

$$\Psi(v) = \frac{|v|^q}{q}$$

şeklindedir.

2. $\Phi(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ Orlicz fonksiyonunun bütünler fonksiyonu

$$\Psi(v) = (1 + |v|) \ln(1 + |v|) - |v|$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.4 $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda Φ fonksiyonu için

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(t) dt, \quad u \geq 0$$

temsili geçerlidir. Burada, Φ fonksiyonunun sağ türevi $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, \infty]$, $\varphi(0) = 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^+$ üzerinde artan ve soldan sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, φ fonksiyonunun sonsuz değerini aldığı yerlerde Φ fonksiyonu da sonsuz değerini alır. Yine, φ fonksiyonunun tersi ψ fonksiyonu olmak üzere Φ Orlicz fonksiyonunun bütünler fonksiyonu

$$\Psi(v) = \int_0^v \psi(t) dt, \quad v \geq 0$$

ile tanımlanan Ψ bir Orlicz fonksiyonudur.

Önerme 2.2.5 (Young Eşitsizliği) $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ bir Orlicz fonksiyonu ve Ψ , Φ fonksiyonunun bütünler Orlicz fonksiyonu olsun. O halde,

$$uv \leq \Phi(u) + \Psi(v), \quad u \geq 0, v \geq 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik, $v = \varphi(u)$ veya $u = \psi(v)$ için geçerlidir.

Tanım 2.2.6 (Δ_2 Koşulu) Φ bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bir $K > 0$ sayısı

$$\Phi(2u) \leq K\Phi(u), \quad u \geq 0$$

olacak şekilde varsa Φ Orlicz fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.7 Φ bir Orlicz fonksiyonu olsun. O halde her $0 \leq u \leq v$ için,

$$0 \leq \frac{\Phi(u)}{u} \leq \frac{\Phi(v)}{v}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Φ konveks fonksiyon olduğundan,

$$0 \leq \frac{\Phi(u) - \Phi(0)}{u - 0} \leq \frac{\Phi(v) - \Phi(0)}{v - 0}$$

gerçeklenir ve $\Phi(0) = 0$ olduğunu kullanarak

$$0 \leq \frac{\Phi(u)}{u} \leq \frac{\Phi(v)}{v}$$

bulunur.

□

Tanım 2.2.8 Φ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere

$$a_\Phi := \sup\{u \geq 0 : \Phi(u) = 0\} \quad \text{ve} \quad c_\Phi := \sup\{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.2.9 (Φ, Ψ) bütünler Orlicz fonksiyon çifti olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $u < c_\Phi$
2. $\varphi(|u|) < \infty$
3. $\Psi(\varphi(|u|)) = |u|\varphi(|u|) - \Phi(u) < \infty$

İspat. Kabul edelim ki, $u < c_\Phi$ olsun. O halde, $\varphi(|u|) < \infty$ bulunur. Aksi halde, $u < c_\Phi$ olmasıyla çelişilir.

Tersine, $\varphi(|u|) < \infty$ olsun. O halde, $u < c_\Phi$ sağlanır. Aksi halde, $\varphi(|u|) < \infty$ olmasıyla çelişilir. Dolayısıyla, (1) ve (2) ifadeleri denktir.

Kabul edelim ki, $\varphi(|u|) < \infty$ olsun. O halde Önerme 2.2.5 kullanılırsa

$$\Phi(u) + \Psi(\varphi(|u|)) = |u|\varphi(|u|) \Rightarrow \Psi(\varphi(|u|)) = |u|\varphi(|u|) - \Phi(u) < \infty$$

bulunur. Terside benzer şekilde elde edilir. Böylece (2) ve (3) ifadeleri denktir.

□

Gözlem 2.2.10 Her $|u| < c_\Phi$ için

$$\Phi(u) < \infty \quad \text{ve} \quad \Psi(\varphi(|u|)) < \infty$$

olur. Ayrıca, her $|u| > c_\Phi$ için

$$\Phi(u) = \Psi(\varphi(|u|)) = \infty$$

bulunur. Öte yandan,

$$\Phi(c_\Phi) \leq \Psi(\varphi(c_\Phi)) = +\infty$$

sağlanır.

Önerme 2.2.11 Φ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere, $u > 0$ için,

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{u}{2}\right) \leq \frac{\Phi(u)}{u} \leq \varphi(u)$$

elde edilir. Benzer şekilde, Ψ bütünler Orlicz fonksiyonu olmak üzere $v > 0$ için,

$$\frac{1}{2}\psi\left(\frac{v}{2}\right) \leq \frac{\Psi(v)}{v} \leq \psi(v)$$

bulunur.

İspat. Her $u > 0$ için, Φ fonksiyonunun tanımından

$$\varphi(u) \leq \frac{\Phi(2u) - \Phi(u)}{2u - u} \tag{2.1}$$

gerçeklenir. Böylece, her $u > 0$ için (2.1) ifadesi düzenlenirse

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{u}{2}\right) \leq \frac{\Phi(u)}{u} \tag{2.2}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\frac{\Phi(u)}{u} = \frac{1}{u} \int_0^u \varphi(t) dt \leq \frac{1}{u} \varphi(u) \int_0^u 1 dt = \frac{1}{u} u \varphi(u) \tag{2.3}$$

bulunur. O halde (2.3) ifadesi düzenlenirse,

$$\frac{\Phi(u)}{u} \leq \varphi(u) \tag{2.4}$$

sağlanır. Böylece (2.2) ve (2.4) ifadelerinden

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{u}{2}\right) \leq \frac{\Phi(u)}{u} \leq \varphi(u)$$

elde edilir.

Benzer şekilde Ψ fonksiyonu için de gösterilir.

□

Önerme 2.2.12 Her $c > 0$ ve $0 \leq u < v \leq \infty$ için aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

1. $\Phi(u) = cu$

2. $\Psi(\varphi(u)) = u\varphi(u) - \Phi(u) = 0$

İspat. Kabul edelim ki, $\Phi(u) = cu$ olsun. O halde, $\varphi(u)$ fonksiyonu $\Phi(u)$ fonksiyonun sağ türevi olduğundan $\varphi(u) = c$ bulunur. Dolayısıyla, Önerme 2.2.5 kullanılarak

$$\Psi(\varphi(u)) = u\varphi(u) - \Phi(u) = uc - cu = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\Psi(\varphi(u)) = 0$$

bulunur.

Tersine, $\Psi(\varphi(u)) = 0$ olsun. O halde, Önerme 2.2.5 kullanılırsa $u \neq 0$ olmak üzere

$$u\varphi(u) - \Phi(u) = 0 \Rightarrow \Phi(u) = u\varphi(u)$$

elde edilir. Buradan $\varphi(u) = c$ bulunur ve böylece, $\Phi(u) = cu$ gerçekleşir. O halde, (1) ve (2) ifadeleri denktir.

□

Önerme 2.2.13 Φ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere $a > 0$ için

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (au - \Phi(u)) < \infty \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = a$$

gerçeklenir.

İspat. Kabul edelim ki, $\lim_{u \rightarrow \infty} (au - \Phi(u)) < \infty$ olsun. O halde,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\Phi(u)}{u} - a \right) = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\Phi(u) - au}{u} \right) = 0$$

olur.

Tersine $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = a$ olsun. Böylece, Önerme 2.2.11 kullanılarak

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) \geq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = a$$

elde edilir. Ayrıca, Φ fonksiyonunun tanımından

$$\varphi(2u) \leq \frac{\Phi(3u) - \Phi(2u)}{3u - 2u} = \frac{\Phi(3u) - \Phi(2u)}{u}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\Phi(3u) - \Phi(2u)}{u} \right) \\ &= 3 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(3u)}{3u} - 2 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(2u)}{2u} \\ &= 3a - 2a = a \end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = a$ elde edilir. Böylece Önerme 2.2.5 kullanılarak

$$\begin{aligned} ua - \Phi(u) &= \Psi(\varphi(u)) + u(a - \varphi(u)) \\ &\leq \Psi(\varphi(u)) + \int_{\varphi(u)}^a \psi(t) dt \\ &= \Psi(\varphi(u)) + \int_0^a \psi(t) dt - \int_0^{\varphi(u)} \psi(t) dt \\ &= \Psi(a) < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $\lim_{u \rightarrow \infty} (ua - \Phi(u)) < \infty$ olur.

Önerme 2.2.14

1. Φ Orlicz fonksiyonunun $0 < u \leq \infty$ için $[0, v)$ aralığında doğrusal olabilmesi için gerek ve yeter koşul $u \in [0, v)$ için $\Psi(\varphi(u)) = 0$ olmasıdır.

2. Φ Orlicz fonksiyonunun orijinden geçen eğik asimptotu olabilmesi için gerek ve yeterli koşul $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) < \infty$ olmasıdır.

İspat. 1. Kabul edelim ki Φ fonksiyonu $[0, v)$ aralığında doğrusal bir fonksiyon olsun. O halde Önerme 2.2.12 gereğince $u \in [0, v)$ için

$$\Psi(\varphi(u)) = 0$$

elde edilir.

Tersine her $u \in [0, v)$ için $\Psi(\varphi(u)) = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde 2.2.12 önermesinden Φ fonksiyonunun $[0, v)$ aralığında doğrusal olduğu elde edilir.

2. Kabul edelim ki, Φ Orlicz fonksiyonunun orijinden geçen eğik asimptotu var olsun. O halde bir $a > 0$ için

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (au - \Phi(u)) < +\infty \quad (2.5)$$

gerçeklenir. Böylece, Önerme 2.2.13 uygulanırsa

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = a = \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u)$$

elde edilir. O halde, Önerme 2.2.5 kullanılırsa

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) = \lim_{u \rightarrow \infty} (u\varphi(u) - \Phi(u)) = \lim_{u \rightarrow \infty} (ua - \Phi(u))$$

bulunur. Böylece, (2.5) ifadesinden

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) < +\infty$$

gerçeklenir.

Tersine kabul edelim ki, $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) < +\infty$ olsun. O halde Ψ bütünler Orlicz fonksiyonu sürekli olduğu kullanılarak

$$a = \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) < +\infty$$

bulunur. O halde Önerme 2.2.13 kullanılırsa,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (ua - \Phi(u)) < +\infty$$

elde edilir. O halde, Φ fonksiyonunun orijinden geçen eğik asimptotu vardır.

□

2.3 ORLICZ UZAYLARI

Modüler uzaylar 1950 yılında H. Nakano tarafından çalışılmıştır [16]. 1959 yılında W. Orlicz ve J. Musielak tarafından modüler uzaylarda norm yapısı sunulmuştur [14]. Daha sonra, bu çalışmada verilenlerden yola çıkarak 1983 yılında J. Musielak modüler uzayların Orlicz uzayları ile ilişkisini inceleyip Orlicz uzaylarının özel bir modüler uzay olduğunu göstermiştir [14]. Bu tarihsel gelişim doğrultusunda, bu bölümde modüler uzayların tanımı verilerek, Φ Orlicz fonksiyonu ile tanımlanan bir modüler fonksiyon aracılığıyla Orlicz uzayları ve üzerindeki denk normlar, Luxemburg ve Orlicz normları tanıtılacaktır.

Bu bölümde verilen tanım ve özellikler için [14], [15] ve [20] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.3.1 X reel bir vektör uzayı olsun. Bir $\rho : X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

1. her $u \in X$ için $\rho(u) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $u = 0$,
2. her $u \in X$ için $\rho(-u) = \rho(u)$,
3. her $u, v \in X$ ve $a, b \geq 0$, $a + b = 1$ için $\rho(au + bv) \leq a\rho(u) + b\rho(v)$

koşullarını sağlıyorsa ρ fonksiyonuna konveks modüler fonksiyon denir.

Örnek 2.3.2 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere $\rho(\cdot) = \|\cdot\|$ norm fonksiyonu bir konveks modüler fonksiyondur.

Norm fonksiyonunun özelliklerini kullanarak aşağıdaki eşitsizlikler kolaylıkla elde edilir.

$$1. \text{ Her } u \in X \text{ için } \rho(u) = 0 \Leftrightarrow \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

$$2. \text{ Her } u \in X \text{ için } \rho(-u) = \|-u\| = \|u\| = \rho(u).$$

$$3. \text{ Her } u, v \in X, a, b \geq 0, a + b = 1 \text{ için}$$

$$\rho(au + bv) = \|au + bv\| \leq a\|u\| + b\|v\| = a\rho(u) + b\rho(v)$$

O halde $\rho(\cdot) = \|\cdot\|$ bir konveks modüler fonksiyondur.

Önerme 2.3.3 $X_\rho = \left\{ u \in X : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda u) = 0 \right\}$ reel bir vektör uzayıdır.

İspat. 1. Her $u, v \in X_\rho$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda u) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta'_\varepsilon > 0, 0 \leq \lambda < \delta'_\varepsilon \text{ için } \rho(\lambda u) < \varepsilon,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda v) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta''_\varepsilon > 0, 0 \leq \lambda < \delta''_\varepsilon \text{ için } \rho(\lambda v) < \varepsilon$$

elde edilir. O halde, $\delta_\varepsilon = \min\{1, \delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon\}$ alınırsa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, 0 \leq \lambda < \delta_\varepsilon \text{ için } \rho(\lambda(u+v)) < \varepsilon$$

olur. Yine, ρ fonksiyonunun konveksliğinden

$$0 \leq \rho(\lambda(u+v)) \leq \lambda \rho(u+v)$$

gerçeklenir. Böylece,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda(u+v)) = 0$$

bulunur.

$$2. \text{ Her } u \in X_\rho, \alpha \in \mathbb{R} \text{ için, benzer şekilde,}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta'''_\varepsilon > 0, 0 \leq \lambda < \delta'''_\varepsilon \text{ için } \rho(\lambda u) < \varepsilon$$

olur. O halde, $\delta_\varepsilon = \min\{1, \delta'''_\varepsilon\}$ alınırsa,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, 0 \leq \lambda < \delta_\varepsilon \text{ için } \rho(\lambda(\alpha u)) < \varepsilon$$

olur. Yine, ρ fonksiyonunun konveksliğinden

$$0 \leq \rho(\lambda(\alpha u)) \leq \lambda \rho(\alpha u)$$

bulunur. Buradan,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda \alpha u) = 0$$

elde edilir. O halde X_ρ , $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

□

Bu tez boyunca reel vektör uzayları ile çalışılacaktır. Kompleks vektör uzayları durumu L. Chen, Y. Cui tarafından [2] makalesinde çalışılmıştır. Ayrı bir çalışma konusudur.

Tanım 2.3.4 $X_\rho = \left\{ u \in X : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda u) = 0 \right\}$ vektör uzayı modüler vektör uzayı olarak adlandırılır.

Bundan sonra (G, Σ, μ) σ -sonlu, atomsuz ve tam ölçüye sahip bir ölçü uzayı olarak kabul edilecektir.

Önerme 2.3.5 $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve Φ bir Orlicz fonksiyonu olsun.

$$\rho_\Phi(f) = \int_G \Phi(f(t)) d\mu$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon konveks modüler bir fonksiyondur.

İspat. Φ Orlicz fonksiyonunun tanımı kullanılırsa, her $t \in G$ ve f ölçülebilir fonksiyonu için

$$\rho_\Phi(f) = \int_G \Phi(f(t)) d\mu \geq 0$$

olur. Yine,

$$1. \ f = 0 \text{ olmak üzere } \rho_\Phi(0) = \int_G \Phi(0(t)) d\mu = \int_G 0 d\mu = 0 \text{ ve her } a > 0 \text{ için } \rho_\Phi(af) = 0$$

$$2. \ \rho_\Phi(-f) = \int_G \Phi(-f(t)) d\mu = \int_G \Phi(f(t)) d\mu = \rho_\Phi(f)$$

3. G üzerinde tanımlı ölçülebilir her f, g fonksiyonu ve $a, b \geq 0, a + b = 1$ için Φ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\begin{aligned}\rho_{\Phi}(af + bg) &= \int_G \Phi(af(t) + bg(t)) d\mu \\ &\leq \int_G a\Phi(f(t)) + b\Phi(g(t)) d\mu \\ &= a \int_G \Phi(f(t)) d\mu + b \int_G \Phi(g(t)) d\mu \\ &= a\rho_{\Phi}(f) + b\rho_{\Phi}(g)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\rho_{\Phi}(\cdot)$ fonksiyonu bir konveks modüler fonksiyondur.

□

$L^0(G)$ ile G üzerinde tanımlı Σ -ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarının kümesini gösterelim.

Tanım 2.3.6 Φ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere

$$L_{\rho_{\Phi}}(G) = \{f \in L^0(G) : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho_{\Phi}(\lambda f) = 0\} = \{f \in L^0(G) : \exists \lambda > 0, \int_G \Phi(\lambda f(t)) d\mu < \infty\}$$

şeklinde tanımlanan uzay bir modüler uzaydır ve bu uzay Orlicz uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.7 Φ bir Orlicz fonksiyonu olsun. Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için

$$\|f\|_{\Phi} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{\Phi}(\lambda^{-1}f) \leq 1\} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_G \Phi(\lambda^{-1}f(t)) d\mu \leq 1\right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon Orlicz uzayı üzerinde bir normdur ve bu norma Luxemburg normu denir.

Yine, Orlicz uzayı üzerinde tanımlanan diğer norm aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.3.8 (Φ, Ψ) bütünler Orlicz fonksiyon çifti olsun. Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için

$$\|f\|_{\Phi}^o = \sup\left\{\int_G |f(t)g(t)| d\mu : \rho_{\Psi}(g) = \int_G \Psi(|g(t)|) d\mu \leq 1\right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon Orlicz uzayı üzerinde bir normdur ve bu norma Orlicz normu denir.

Önerme 2.3.9 [20] Orlicz uzayı üzerinde tanımlanan Orlicz ve Luxemburg normları denktir. Diğer bir deyişle her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için,

$$\|f\|_{\Phi} \leq \|f\|_{\Phi}^o \leq 2\|f\|_{\Phi}$$

gerçeklenir.

Tanım 2.3.10 (Φ, Ψ) bütünler Orlicz fonksiyon çifti olsun. Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için,

$$\|f\|_{\Phi, A} = \inf_{k>0} k^{-1}(1 + \rho_{\Phi}(kf))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon Amemiya formülü / fonksiyonu olarak adlandırılır.

İlk kez, 2000 yılında H. Hudzik ve L. Maligranda Orlicz uzayında, Amemiya formülü ile verilen $\|\cdot\|_{\Phi, A}$ fonksiyonunun Orlicz normuna eşit olduğunu göstermiştir [8].

Teorem 2.3.11 (Φ, Ψ) bütünler Orlicz fonksiyon çifti olmak üzere her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için

$$\|f\|_{\Phi}^o = \inf_{k>0} k^{-1}(1 + \rho_{\Phi}(kf))$$

eşitliği geçerlidir.

Bu tez çalışmasında genel olarak Orlicz normu olarak Amemiya fonksiyonu alınacaktır. Diğer bir deyişle her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için

$$\|f\|_{\Phi}^o = \|f\|_{\Phi, A} = \inf_{k>0} k^{-1}(1 + \rho_{\Phi}(kf))$$

anlaşılacaktır.

Teorem 2.3.12 [20] $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz Uzayı, $\|\cdot\|_{\Phi}$ Luxemburg normuna göre Banach uzayıdır.

2.4 P-AMEMİYA NORMU

Bir $1 \leq p \leq \infty$ için p-Amemiya normu ilk olarak 1988 yılında S. Reisner tarafından Calderon-Lozanovskii uzaylarında tanıtıldı [19]. Daha sonra, 2000 yılında H. Hudzik ve

L. Maligranda tarafından 1-Amemiya (Amemiya) normunun Orlicz normuna eşit olduğunu gösterildi [8]. 2008 yılında Y. Cui, L. Duan, H. Hudzik ve M. Wisla tarafından p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normu Orlicz uzaylarında çalışıldı. Buna göre p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) için $p = \infty$ durumunda ∞ -Amemiya normunun Luxemburg normuna eşit olduğu ve $1 < p < \infty$ durumunda ise Luxemburg ve Orlicz normuna denk olduğu gösterildi [5]. Böylece, Orlicz uzaylarının p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normu için bir Banach uzayı olduğu elde edilmiştir. Bu bölümde ifade edilen bu sonuçlar [5] çalışmasından alınmıştır ve ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Tanım 2.4.1 Φ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı üzerinde $1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için

$$\|f\|_{\rho_{\Phi},p} = \begin{cases} \inf_{k>0} k^{-1} (1 + \rho_{\Phi}^p(kf))^{\frac{1}{p}} & , \quad 1 \leq p \leq \infty \\ \inf_{k>0} k^{-1} \max\{1, \rho_{\Phi}(kf)\} & , \quad p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona p -Amemiya fonksiyonu denir. Bu fonksiyonun Teorem 2.4.6 da bir norm olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için $\|f\|_{\rho_{\Phi},p}$ yerine $\|f\|_{\Phi,p}$ simgesi kullanılacaktır.

Önerme 2.4.2 Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için,

$$\|f\|_{\Phi} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{\Phi}(\lambda^{-1}f) \leq 1\} = \inf_{k>0} k^{-1} \max\{1, \rho_{\Phi}(kf)\}$$

gerçeklenir. Diğer bir deyişle, Luxemburg normu ve ∞ -Amemiya fonksiyonu birbirlerine eşittir.

İspat. Öncelikle her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ ve $\rho_{\Phi}(f) > 1$ için $\rho_{\Phi}(f) \geq \|f\|_{\Phi}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki, bir $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için $\rho_{\Phi}(f) > 1$ iken $\rho_{\Phi}(f) < \|f\|_{\Phi}$ olsun. O halde,

$$1 < \rho_{\Phi}\left(\frac{f}{\rho_{\Phi}(f)}\right) \leq \frac{1}{\rho_{\Phi}(f)} \rho_{\Phi}(f) = 1$$

çelişkisi elde edilir. Böylece, her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için

$$\rho_{\Phi}(f) > 1 \text{ iken } \rho_{\Phi}(f) \geq \|f\|_{\Phi} \quad (2.6)$$

bulunur. Burada (2.6) ifadesini $\rho_{\Phi}(\lambda^{-1}f) > 1$ için uygularsak

$$\rho_{\Phi}(\lambda^{-1}f) \geq \|\lambda^{-1}f\|_{\Phi} \Rightarrow \lambda \rho_{\Phi}(\lambda^{-1}f) \geq \|f\|_{\Phi}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\rho_{\Phi}(\lambda^{-1}f) > 1 \Rightarrow \lambda \rho_{\Phi}(\lambda^{-1}f) \geq \|f\|_{\Phi}$$

bulunur. O halde bu ifade kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi} &= \inf_{\rho_{\Phi}(\lambda^{-1}f) \leq 1} \lambda \\ &= \min \left\{ \inf_{\rho_{\Phi}(\lambda^{-1}f) \leq 1} \lambda, \inf_{\rho_{\Phi}(\lambda^{-1}f) > 1} \lambda \rho_{\Phi}(\lambda^{-1}f) \right\} \\ &= \min \left\{ \inf_{\rho_{\Phi}(kf) \leq 1} k^{-1}, \inf_{\rho_{\Phi}(kf) > 1} k^{-1} \rho_{\Phi}(kf) \right\} \\ &= \inf_{k > 0} k^{-1} \max\{1, \rho_{\Phi}(kf)\} \\ &= \|f\|_{\Phi, \infty} \end{aligned}$$

gerçeklenir. Böylece, ∞ -Amemiya fonksiyonu ile Luxemburg normu eşittir.

□

Bu tez boyunca kullanılan $1 \leq p \leq \infty$ için p -Amemiya fonksiyonu için önemli bir fonksiyon olan s_p fonksiyonunu tanımlayalım.

Tanım 2.4.3 $s_p : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu

$$s_p(u) = \begin{cases} (1 + u^p)^{\frac{1}{p}} & , \quad 1 \leq p < \infty \\ \max\{1, u\} & , \quad p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Kolayca görülebilir ki, $1 \leq p \leq \infty$ için s_p fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artan, $1 \leq p < \infty$ için $[0, \infty)$ aralığında kesin artan ve $p = \infty$ için $[1, \infty)$ aralığında kesin artan, konveks bir fonksiyondur.

Tanım 2.4.4 Her $1 \leq p \leq \infty$ için s_p fonksiyonu Tanım 2.4.3 de verilen fonksiyon olmak

üzere

$$\sigma_p := \max\{u \geq 0 : s_p(u) = 1\}$$

şeklinde tanımlanır. Daha açık olarak

$$\sigma_p = \begin{cases} 0 & , \quad 1 \leq p < \infty \\ 1 & , \quad p = \infty \end{cases}$$

olarak alınabilir.

Önerme 2.4.5 Herhangi bir $1 \leq p \leq \infty$ olsun.

$$\rho_\Phi : L_{\rho_\Phi}(G) \rightarrow [0, \infty) \quad \text{ve} \quad s_p : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$$

konveks fonksiyonları için $s_p \circ \rho_\Phi$ bileşke fonksiyonu konveks bir fonksiyondur.

İspat. Her $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $\alpha \in [0, 1]$ için $1 \leq p \leq \infty$ iken, s_p fonksiyonu bir artan fonksiyon olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (s_p \circ \rho_\Phi)(\alpha f + (1 - \alpha)g) &= s_p(\rho_\Phi(\alpha f + (1 - \alpha)g)) \\ &\leq s_p(\alpha \rho_\Phi(f) + (1 - \alpha)\rho_\Phi(g)) \\ &\leq \alpha s_p(\rho_\Phi(f)) + (1 - \alpha)s_p(\rho_\Phi(g)) \end{aligned}$$

bulunur. O halde $s_p \circ \rho_\Phi$ fonksiyonu konveks bir fonksiyondur.

□

Şimdi Tanım 2.4.1 de verilen fonksiyonun bir norm olduğunu ve Orlicz uzayı üzerinde tanımlı Luxemburg ve Orlicz normuna denk olduğunu verelim.

Teorem 2.4.6 Her $f \in L_{\rho_\Phi}(G)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\|f\|_{\Phi, p} = \inf_{k > 0} k^{-1} (1 + [\rho_\Phi(kf)]^p)^{\frac{1}{p}} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $L_{\rho_\Phi}(G)$ üzerinde bir normdur ve bu norma p -Amemiya normu denir. Ayrıca, $1 \leq p < \infty$ için

$$\|f\|_{\Phi, \infty} \leq \|f\|_{\Phi, p} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\Phi, \infty}$$

geçerlidir. Böylece Luxemburg normu ile p -Amemiya normu denktir.

İspat. Önerme 2.4.2 gereğince $p = \infty$ durumu ∞ -Amemiya fonksiyonunun Luxemburg normuna eşit olmasıyla gösterildi. O halde, $p = \infty$ için ∞ -Amemiya fonksiyonu bir normdur. Dolayısıyla, $1 \leq p < \infty$ durumu için $\|f\|_{\Phi,p}$ fonksiyonunun bir norm olduğunu gösterelim.

1. Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için

$$\|f\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} k^{-1} (1 + (\rho_{\Phi}(kf))^p)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

olduğu kolayca elde edilir.

2. Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_{\Phi,p} &= \inf_{k>0} k^{-1} (s_p \circ \rho_{\Phi})(k\lambda f) \\ &= |\lambda| \inf_{k>0} (k|\lambda|)^{-1} (s_p \circ \rho_{\Phi})(k\lambda f) \\ &= |\lambda| \|f\|_{\Phi,p} \end{aligned}$$

bulunur.

3. Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için Önerme 2.4.2 kullanılarak

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi,\infty} &= \inf_{k>0} k^{-1} \max\{1, \rho_{\Phi}(kf)\} \\ &\leq \inf_{k>0} k^{-1} (1 + (\rho_{\Phi}(kf))^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{\Phi,p} \leq 2^{\frac{1}{p}} \inf_{\rho_{\Phi}(kf) \leq 1} k^{-1} \\ &= 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\Phi,\infty} \end{aligned} \tag{2.8}$$

elde edilir. Böylece (2.8) gereğince,

$$\|f\|_{\Phi,\infty} \leq \|f\|_{\Phi,p} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\Phi,\infty}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla,

$$\|f\|_{\Phi,p} = 0 \Leftrightarrow \|f\|_{\Phi,\infty} = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

bulunur.

4. Herhangi $f_1, f_2 \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ olsun. Yine, infimum özelliğinden $\varepsilon > 0$ olmak üzere $k_1, k_2 > 0$ sayıları vardır öyle ki $i = 1, 2$ için,

$$k_i^{-1}(s_p \circ \rho_{\Phi})(k_i f_i) = k_i^{-1}(1 + (\rho_{\Phi}(k_i f_i))^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_i\|_{\Phi,p} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Böylece, $k := \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ alınırsa $s_p \circ \rho_{\Phi}$ fonksiyonunun konveksliğinden,

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_{\Phi,p} &\leq \frac{1}{k}(s_p \circ \rho_{\Phi})(k(f_1 + f_2)) \\ &= \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}(s_p \circ \rho_{\Phi})\left(\frac{k_2}{k_1 + k_2}k_1 f_1 + \frac{k_1}{k_1 + k_2}k_2 f_2\right) \\ &\leq \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \frac{k_2}{k_1 + k_2}(s_p \circ \rho_{\Phi})(k_1 f_1) + \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \frac{k_1}{k_1 + k_2}(s_p \circ \rho_{\Phi})(k_2 f_2) \\ &= k_1^{-1}(s_p \circ \rho_{\Phi})(k_1 f_1) + k_2^{-1}(s_p \circ \rho_{\Phi})(k_2 f_2) \\ &\leq \|f_1\|_{\Phi,p} + \|f_2\|_{\Phi,p} + \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. O halde, bu ifade her $\varepsilon > 0$ için geçerli olduğundan

$$\|f_1 + f_2\|_{\Phi,p} \leq \|f_1\|_{\Phi,p} + \|f_2\|_{\Phi,p}$$

elde edilir.

Böylece $1 \leq p \leq \infty$ için $\|\cdot\|_{\Phi,p}$ fonksiyonu $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı üzerinde bir normdur. O halde, $(L_{\rho_{\Phi}}(G), \|\cdot\|_{\Phi,p})$ bir normlu uzaydır.

□

Sonuç 2.4.7 Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için

$$\|f\|_{\Phi,1} = \inf_{k>0} k^{-1}(1 + \rho_{\Phi}(kf)) = \|f\|_{\Phi}^o$$

olduğu tanım kullanarak kolayca elde edilir.

Uyarı 2.4.8 Bu tez çalışmasında her $f \in L_{\rho_\Phi}(G)$ için Orlicz normu $\|f\|_{\Phi,1}$ ve Luxemburg normu $\|f\|_{\Phi,\infty}$ sembolü ile gösterilecektir.

Teorem 2.4.9 Her $1 \leq p \leq \infty$ için $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayı $\|\cdot\|_{\Phi,p}$ p -Amemiya normuna göre bir Banach uzayıdır.

İspat. Teorem 2.3.12, Teorem 2.4.6 ve Sonuç 2.4.7 kullanılırsa, $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayının bir Banach uzayı olduğu elde edilir. $\square$

Uyarı 2.4.10 Bir $1 \leq p < \infty$ ve her $f \in L_{\rho_\Phi}(G)$ için $(\rho_\Phi(f))^p$ ifadesinden $\rho_\Phi^p(f)$ olduğu anlaşılabacaktır.

Önerme 2.4.11 Bir Φ Orlicz fonksiyonu doğrusal ise p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normuna göre $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayı $L^1(G)$ uzayına doğrusal olarak izometriktir.

İspat. Kabul edelim ki Φ Orlicz fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olsun. O halde her $u \geq 0$ için, $c > 0$ olmak üzere $\Phi(u) = cu$ olur. Böylece,

$$\rho_\Phi(kf) = \int_G \Phi(kf(t)) d\mu = ck \int_G |f(t)| d\mu = ck \|f\|_1$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi,p} &= c \|f\|_1 \left\| \frac{f}{c\|f\|_1} \right\|_{\Phi,p} \\ &= \begin{cases} c \|f\|_1 \inf_{k>0} k^{-1} \left(1 + k^p c^p \left\| \frac{f}{c\|f\|_1} \right\|_1^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ c \|f\|_1 \inf_{k>0} k^{-1} \max \left\{ 1, kc \left\| \frac{f}{c\|f\|_1} \right\|_1 \right\}, & p = \infty \end{cases} \\ &= \begin{cases} c \inf_{k>0} \left(\frac{\|f\|_1^p}{k^p} + \|f\|_1^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ c \inf_{k>0} \max \left\{ \|f\|_1 k^{-1}, \|f\|_1 \right\}, & p = \infty \end{cases} \\ &= \begin{cases} c \|f\|_1, & 1 \leq p < \infty \\ c \|f\|_1, & p = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayı $L^1(G)$ uzayına doğrusal olarak izometriktir.

$\square$

2.5 NORM ELDE EDİLEBİLİRLİK

Bu bölümde $1 \leq p \leq \infty$ için p -Amemiya normunun elde edilebilir olduğu yani infimum veya supremum değerine ulaştığı $k \geq 0$ sayıları sınıflandırılacaktır. Öncelikle bu sayıları belirleyebilmek için gerekli olan tanım ve önermeler verilecektir.

Bu bölümde verilen tanım ve teoremler için [1], [20] kaynaklarından yararlanılmıştır. Temel olarak [5] kaynağı kullanılmıştır.

Tanım 2.5.1 Bir $\alpha_p : L_{\rho_\Phi}(G) \rightarrow [-1, \infty]$, fonksiyonu

$$\alpha_p(f) = \begin{cases} \rho_\Phi^{p-1}(f) \rho_\Psi(\varphi(|f|)) - 1 & , \quad 1 \leq p < \infty \\ -1 & , \quad p = \infty, \rho_\Phi(f) \leq 1 \\ \rho_\Psi(\varphi(|f|)) & , \quad p = \infty, \rho_\Phi(f) > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Gözlem 2.5.2 Burada Tanım 2.5.1 gereğince $\alpha_p(\cdot)$ fonksiyonu $1 \leq p \leq \infty$ sayısının ve $\rho_\Phi(\cdot)$ fonksiyonunun değerlerine göre farklı olduğundan $\alpha_p(\cdot)$ fonksiyonu farklı durumlar için incelenecektir.

Tanım 2.5.1 de verilen fonksiyon yardımıyla çalışmamızın temeli olacak aşağıdaki dört fonksiyonu tanımlayalım.

Tanım 2.5.3 Her $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\theta : L_{\rho_\Phi}(G) \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad \theta(f) = \inf\{k > 0 : \rho_\Phi(k^{-1}f) < +\infty\}$$

$$k_p^* : L_{\rho_\Phi}(G) \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad k_p^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \geq 0\}$$

$$k_p^{**} : L_{\rho_\Phi}(G) \rightarrow (0, \infty] \quad , \quad k_p^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \leq 0\}$$

$$A_p : L_{\rho_\Phi}(G) \times (0, \infty] \rightarrow (0, \infty] \quad , \quad A_p(f, k) = k^{-1} s_p(\rho_\Phi(kf))$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bölümde bu fonksiyonların özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileri incelenecektir. Daha sonra p -Amemiya normunun elde edilebilirliği için gerekli altyapı oluşturulacaktır.

Uyarı 2.5.4 Bu tez çalışmasında $\inf \emptyset = +\infty$ ve $\frac{1}{0} = \infty$ olarak alınacaktır.

Önerme 2.5.5 Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için $k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f)$ olur.

İspat. Her $1 \leq p < \infty$ ve $p = \infty$ için $\alpha_p(\cdot)$ fonksiyonunun tanımı farklı olduğundan durumlara ayırarak inceleme yapalım.

Durum 1 : Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için $p = \infty$ ve $\rho_{\Phi}(kf) \leq 1$ ise

$$k_p^*(f) = \inf\{k \geq 0 : -1 \geq 0\} = \inf \emptyset = +\infty$$

ve

$$k_p^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : -1 \leq 0\} = +\infty$$

olduğundan $k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f)$ eşitsizliği elde edilir.

Durum 2 : Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için $p = \infty$ ve $\rho_{\Phi}(kf) > 1$ ise,

$$k_p^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \rho_{\Psi}(\varphi(|f|)) \geq 0\} = 0$$

ve

$$k_p^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : \rho_{\Psi}(\varphi(|f|)) \leq 0\} \geq 0$$

olduğundan $k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f)$ eşitsizliği elde edilir.

Durum 3 : Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ ve $1 < p < \infty$ için $k_p^{**}(f) < k_p^*(f)$ olduğunu kabul edelim. O halde,

$$A := \{k > 0 : k \in (k_p^{**}(f), k_p^*(f))\} \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir A kümesi var olsun. Böylece, $k_p^{**}(f) < k_1 < k_p^*(f)$ olacak şekilde bir $k_1 \in A$ sayısı mevcuttur. Diğer bir deyişle,

$$\sup\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \leq 0\} < k_1 < \inf\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \geq 0\}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $k_1 \in A$ mevcuttur. Buradan, $0 < \alpha_p(k_1 f) < 0$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $1 < p < \infty$, için $k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f)$ bulunur. O halde bu üç durumdan dolayı,

$$1 \leq p \leq \infty \quad \text{için} \quad k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f)$$

gerçeklenir. □

Tanım 2.5.6 Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ ve $1 \leq p \leq \infty$, için, $k_p^*(f)$ ve $k_p^{**}(f)$ arasında kalan $0 < k < \infty$ sayılarının kümesi

$$K_p(f) := \{0 < k < \infty : k_p^*(f) \leq k \leq k_p^{**}(f)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Gözlem 2.5.7 $K_p(f)$ kümesinin tanımından $K_p(f) = \emptyset$ ancak ve ancak $k_p^*(f) = k_p^{**}(f) = +\infty$ olur.

Önerme 2.5.8 Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ ve $1 \leq p \leq \infty$, $a > 0$ için,

$$1. \quad k_p^*(f) = ak_p^*(af)$$

$$2. \quad k_p^{**}(f) = ak_p^{**}(af)$$

gerçeklenir.

İspat.

1. Eğer $k_p^*(f) = +\infty$ ise her $k \geq 0$ için,

$$\alpha_p(kf) < 0 \Leftrightarrow \alpha_p(kaf) < 0$$

bulunur. Böylece, $k_p^{**}(af) = +\infty$ olur. Dolayısıyla, $a > 0$ için $k_p^*(f) = ak_p^*(af)$ gerçekleşir.

O halde, kabul edelim ki $k_p^*(f) < +\infty$ olsun. Böylece, her $k_p^*(f) < k < +\infty$ için,

$$\alpha_p(kf) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha_p(a^{-1}kaf) \geq 0 \Leftrightarrow a^{-1}k \geq k_p^*(af) \Leftrightarrow k \geq ak_p^*(af)$$

elde edilir. Yine, $k \rightarrow k_p^*(f)$ için $k_p^*(f) \geq ak_p^*(af)$ bulunur.

Tersine, varsayalım ki $k_p^*(f) > k > ak_p^*(af)$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı var olsun. O halde,

$$0 \leq \alpha_p(a^{-1}kaf) = \alpha_p(kf) < 0$$

çelişkisi elde edilir. Böylece $k_p^*(f) = ak_p^*(af)$ sağlanır.

2. Eğer $k_p^{**}(f) = +\infty$ ise her $k \geq 0$ için,

$$\alpha_p(kf) \leq 0 \Leftrightarrow \alpha_p(kaf) \leq 0$$

olur. O halde, $k_p^{**}(af) = +\infty$ bulunur. Böylece, $a > 0$ için $k_p^*(f) = ak_p^*(af)$ gerçekleşir.

Yine, $k_p^{**}(f) < +\infty$ olsun. Her $k_p^{**}(f) \leq k < +\infty$ için,

$$\alpha_p(kf) > 0 \Leftrightarrow \alpha_p(a^{-1}kaf) > 0 \Leftrightarrow \frac{k}{a} \geq k_p^{**}(af)$$

bulunur. Böylece $k \rightarrow k_p^{**}(f)$ alınarak $k_p^{**}(f) \geq ak_p^{**}(af)$ elde edilir.

Tersine, $ak_p^{**}(af) < k < k_p^{**}(f)$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı var olsun. Böylece,

$$0 < \alpha_p(kf) = \alpha_p(a^{-1}kaf) \leq 0$$

çelişkisi elde edilir. O halde

$$k_p^{**}(f) = ak_p^{**}(af)$$

sağlanır.

□

Önerme 2.5.9 Her $1 \leq p \leq \infty$ ve her $f \in L_{p\Phi}(G) \setminus \{0\}$, $a > 0$ için $\text{card}K_p(f) = \text{card}K_p(af)$ olur.

İspat.

$$h : K_p(f) \rightarrow K_p(af)$$

$$k \longrightarrow \frac{k}{a}$$

şeklinde tanımlanan h fonksiyonun birebir ve örten fonksiyon olduğunu gösterelim.

1. İlk olarak her $k \in K_p(f)$ için $h(k)$ nın bir fonksiyon olduğunu gözlemleyelim.

(a) Her $k \in K_p(h)$ için Önerme 2.5.8 kullanılarak,

$$k_p^*(h) \leq k \leq k_p^{**}(h) \Leftrightarrow ak_p^*(ah) \leq k \leq ak_p^{**}(ah) \Leftrightarrow k_p^*(ah) \leq \frac{k}{a} \leq k_p^{**}(ah) \Leftrightarrow \frac{k}{a} \in K_p(ah)$$

elde edilir. O halde her $k \in K_p(f)$ için $h(k) = \frac{k}{a} \in K_p(af)$ bulunur.

(b) Her $k_1 = k_2 \in K_p(h)$ için

$$k_1 = k_2 \Rightarrow \frac{k_1}{a} = \frac{k_2}{a} \Rightarrow h(k_1) = h(k_2)$$

sağlanır. O halde (a) ve (b) ifadelerinden yukarıda tanımlanan h bir fonksiyondur.

2. Her $k_1, k_2 \in K_p(h)$ için

$$h(k_1) = h(k_2) \Rightarrow \frac{k_1}{a} = \frac{k_2}{a} \Rightarrow k_1 = k_2$$

olduğundan h birebir fonksiyondur.

3. Her $b \in K_p(ah)$ için Önerme 2.5.8 gereğince,

$$b \in K_p(ah) \Rightarrow k_p^*(ah) \leq b \leq k_p^{**}(ah) \Rightarrow \frac{k_p^*(h)}{a} \leq b \leq \frac{k_p^{**}(h)}{a}$$

ifadesi sağlanır ve $a > 0$ olduğundan

$$k_p^*(h) \leq ab \leq k_p^{**}(h)$$

gerçeklenir. O halde, $ab \in K_p(h)$ bulunur. Böylece $c = ab$ alınırsa $h(c) = b$ olduğundan h fonksiyonunun örten olduğu elde edilir. Dolayısıyla,

$$\text{card}K_p(h) = \text{card}K_p(ah)$$

bulunur.

□

Önerme 2.5.10 Eğer Φ Orlicz fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal ise her $1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için $k_p^{**}(f) = +\infty$ olur. Diğer bir deyişle

$$K_p(f) = \emptyset \text{ veya } K_p(f) = [k_p^*(f), +\infty)$$

gerçeklenir.

İspat. Kabul edelim ki Φ Orlicz fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olsun. O halde, her $u \in [0, v)$ için $\Phi(u) = cu$ bulunur. Böylece, Önerme 2.2.14 gereğince her $k > 0$ ve

$f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ için

$$\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) = 0$$

bulunur. O halde

$$\alpha_p(kf) = \begin{cases} -1 & , \quad 1 \leq p < \infty \\ -1 & , \quad p = \infty, \rho_{\Phi}(kf) \leq 1 \\ 0 & , \quad p = \infty, \rho_{\Phi}(kf) > 1 \end{cases}$$

elde edilir. Böylece, her $k \geq 0$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için $\alpha_p(kf) \leq 0$ bulunur. Buradan

$$k_p^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : -1 \leq 0\} = +\infty$$

olur.

□

Tanım 2.5.11 Bir $f \in L^0(G)$ fonksiyonunun desteği

$$\text{supp} f := \{t \in G : f(t) \neq 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bundan sonra $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$G_n \subset G_{n+1}, \quad \mu(G_n) < \infty \quad \text{ve} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$$

kümeler dizisinin bir alt kümesi olan

$$H_n = \{t \in G_n : |f(t)| \leq n\}$$

kümesi üzerinde tanımlı sonlu destekli

$$f_n(t) := f(t)\chi_{H_n} \tag{2.9}$$

fonksiyon dizileri kullanılacaktır.

Önerme 2.5.12 Eğer $0 < k < \theta^{-1}(f)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $k\|f_n\|_\infty < \min\{k(n+1), c_\Phi\}$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $0 < k < \theta^{-1}(f)$ olsun. O halde

$$k\|f_n\|_\infty = k \inf\{c > 0 : \text{h.h her } t \in G \text{ için } |f_n(t)| \leq c\} \leq kn < k(n+1)$$

bulunur. Ayrıca, $k\|f_n\|_\infty \geq c_\Phi$ ise $A = \{t \in G : k\|f_n(t)\| \geq c_\Phi\}$ pozitif ölçüye sahip bir küme olmak üzere,

$$\begin{aligned} \rho_\Phi(k_0 f) &= \int_G \Phi(k_0 f(t)) d\mu \\ &\geq \int_G \Phi(k_0 f_n(t)) d\mu \\ &\geq \int_A \Phi(k_0 f_n(t)) d\mu \\ &= \int_G \Phi(k_0 f_n(t) \chi_A(t)) d\mu \\ &\geq \int_G \Phi\left(\frac{k_0}{k} c_\Phi\right) d\mu = +\infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $0 < k < \theta^{-1}(f)$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$k\|f_n\|_\infty < \min\{k(n+1), c_\Phi\}$$

bulunur.

□

Gözlem 2.5.13 Eğer $0 < k < \theta^{-1}(f)$ ise

$$\rho_\Phi(k f_n) < +\infty \text{ ve } \rho_\Psi(\varphi(k|f_n|)) < +\infty$$

gerçeklenir.

Önerme 2.5.14 Her $k \in \mathbb{R}$ için

$$\rho_\Phi(k f_n) \nearrow \rho_\Phi(k f) \text{ ve } \rho_\Psi(\varphi(k|f_n|)) \nearrow \rho_\Psi(\varphi(k|f|))$$

elde edilir.

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $t \in G$ için $f_n(t) \leq f(t)$ olduğundan Teorem 2.1.11 kullanılarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Phi}(kf_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G \Phi(kf_n(t)) d\mu = \int_G \Phi(kf(t)) d\mu = \rho_{\Phi}(kf)$$

gerçeklenir. Benzer şekilde, $\rho_{\Psi}(\varphi(k|f_n|)) \nearrow \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|))$ olduğu elde edilir.

Önerme 2.5.15 Φ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ için $c_{\Phi} < \infty$ ise $\theta^{-1}(f) < \infty$ olur.

İspat. Kabul edelim ki, $\theta^{-1}(f) = \infty$ olsun. O halde $\theta(f) = 0$ ise $\rho_{\Phi}(k^{-1}f) < +\infty$ olacak şekilde bir $k_0 > 0$ sayısı yoktur. Fakat bu ifade $c_{\Phi} < +\infty$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\theta^{-1}(f) < +\infty$ bulunur.

□

Önerme 2.5.16 Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\theta^{-1}(f) < \theta^{-1}(f_n)$ bulunur.

İspat. $\theta(f_n) = \inf\{k > 0 : \rho_{\Phi}(k^{-1}f_n) < +\infty\}$ ve $\theta(f) = \inf\{k > 0 : \rho_{\Phi}(k^{-1}f) < +\infty\}$ olmak üzere

$$\{k > 0 : \rho_{\Phi}(k^{-1}f) < +\infty\} \subset \{k > 0 : \rho_{\Phi}(k^{-1}f_n) < +\infty\}$$

olduğunu gözlemleyelim. O halde $k_1 \in \{k > 0 : \rho_{\Phi}(k^{-1}f) < +\infty\}$ olarak alınırsa

$$\rho_{\Phi}(k_1^{-1}f) < +\infty$$

elde edilir. Buradan, bu ifade yardımıyla

$$\begin{aligned} \rho_{\Phi}(k_1^{-1}f_n) &= \int_G \Phi(k_1^{-1}f_n(t)) d\mu \\ &\leq \int_G \Phi(k_1^{-1}f(t)) d\mu \\ &= \rho_{\Phi}(k_1^{-1}f) < +\infty \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $\rho_{\Phi}(k_1^{-1}f_n) < +\infty$ sağlanır. Buradan, $k_1 \in \{k > 0 : \rho_{\Phi}(k^{-1}f_n) < +\infty\}$ olur.

Dolayısıyla,

$$\{k > 0 : \rho_{\Phi}(k^{-1}f) < +\infty\} \subset \{k > 0 : \rho_{\Phi}(k^{-1}f_n) < +\infty\}$$

gerçeklenir. O halde,

$$\begin{aligned}\theta(f_n) &= \inf\{k > 0 : \rho_\Phi(k^{-1}f_n) < +\infty\} \\ &\leq \inf\{k > 0 : \rho_\Phi(k^{-1}f) < +\infty\} \\ &= \theta(f)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\theta^{-1}(f) \leq \theta^{-1}(f_n)$ olur.

□

Önerme 2.5.17 Esas olarak sınırlı, ölçülebilir ve desteği sonlu ölçüye sahip her $f \in L^0(G)$ için,

$$\theta_0(f) = \inf\{k > 0 : \rho_\Psi(\varphi(k^{-1}|f|)) < +\infty\} \text{ ise } \theta(f) = \theta_0(f)$$

olur.

Burada $\theta^{-1}(f) = \frac{1}{\theta(f)}$ şeklinde alınacaktır.

İspat. Kabul edelim ki $\theta^{-1}(f) < k_0 < \theta_0^{-1}(f)$ olacak şekilde k_0 sayısı var olsun. O halde, $\rho_\Psi(\varphi(k_0|f|)) < +\infty$ bulunur ve böylece $k_0\|f\|_\infty < c_\Phi$ elde edilir. Aksi halde, her $k > k_0$ için $\rho_\Psi(\varphi(k|f|)) = +\infty$ olursa $k_0 \geq \theta_0^{-1}(f)$ çelişkisi elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\rho_\Phi(k_0f) &= \int_G \Phi(k_0f(t))d\mu \\ &\leq \int_G \Phi(k_0\|f\|_\infty)d\mu \\ &= \Phi(k_0\|f\|_\infty)\mu(\text{supp}f) < +\infty\end{aligned}$$

olur. Bu ifade $\theta^{-1}(f) < k_0$ olmasıyla çelişir.

Benzer şekilde, eğer $\theta_0^{-1}(f) < k_0 < \theta^{-1}(f)$ ise $\rho_\Phi(k_0f) < +\infty$ ve buradan, $k_0\|f\|_\infty < c_\Phi$

olduğunu elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned}\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|f|)) &= \int_G \Psi(\varphi(k_0|f|)) d\mu \\ &\leq \int_G \Psi(\varphi(k_0\|f\|_{\infty})) d\mu \\ &= \Psi(\varphi(k_0\|f\|_{\infty}))\mu(\text{supp}f) < +\infty\end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu ise, $\theta_0^{-1}(f) < k_0$ olmasıyla çelişir. O halde,

$$\theta(f) = \theta_0(f) = \inf\{k > 0 : \rho_{\Psi}(\varphi(k^{-1}|f|)) < +\infty\}$$

eşitliği elde edilir.

□

Gözlem 2.5.18 Önerme 2.5.17 yardımıyla bu tez boyunca $\theta(f)$ üzerinde ile yapılan işlemler $\theta_0(f)$ üzerinde uygulanabilir.

Önerme 2.5.19 Eğer $c_{\Phi} = +\infty$ ise her $k \in \mathbb{R}$ ve her esas olarak sınırlı, desteği sonlu ölçüye sahip ölçülebilir f fonksiyonu için,

$$\rho_{\Phi}(kf) < +\infty \text{ ve } \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) < +\infty$$

sağlanır.

İspat. Kabulümüz gereği, $c_{\Phi} = +\infty$ olduğundan her $u \geq 0$ için $\Phi(u) < +\infty$ gerçekleşir. Buradan, $\rho_{\Phi}(kf) < +\infty$ bulunur. Diğer taraftan, Önerme 2.5.17 kullanılarak

$$\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) < +\infty$$

elde edilir.

□

Önerme 2.5.20 Her $1 \leq p < \infty$ ve her $a > 0$ için,

$$\max_{u \geq 0} \frac{1 + u^{p-1}a}{(1 + u^p)^{1-\frac{1}{p}}} = (1 + a^p)^{\frac{1}{p}}$$

olur.

İspat. $f(u) = \frac{1 + u^{p-1}a}{(1 + u^p)^{1-\frac{1}{p}}}$ denirse,

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{(p-1)u^{p-2}a(1+u^p)^{1-\frac{1}{p}} - (1-p^{-1})(1+u^p)^{-\frac{1}{p}} pu^{p-1}(1+u^{p-1}a)}{(1+u^p)^{(1-\frac{1}{p})^2}} \\ &= \frac{(p-1)u^{p-2}(1+u^p)^{-\frac{1}{p}}(a(1+u^p) - u(1+u^{p-1}a))}{(1+u^p)^{(1-\frac{1}{p})^2}} \\ &= \frac{(p-1)u^{p-2}(1+u^p)^{-\frac{1}{p}}(a-u)}{(1+u^p)^{(1-\frac{1}{p})^2}} = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece f fonksiyonu maksimum değerini $u = a$ noktasında alır. O halde,

$$\max_{u \geq 0} \frac{1 + u^{p-1}a}{(1 + u^p)^{1-\frac{1}{p}}} = (1 + a^p)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir.

□

Önerme 2.5.21 Her $f \in L_{p_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ ve her $1 \leq p < \infty$ için aşağıdakiler geçerlidir.

1. $k \mapsto \alpha_p(kf)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyondur.
2. $(0, \theta^{-1}(f)) \subset \{k > 0 : A_p(f, k) < +\infty\}$ olur.
3. $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(0, \theta^{-1}(f))$ aralığında süreklidir.
4. $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(0, k_p^*(f))$ aralığında kesin azalan bir fonksiyondur.
5. $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(0, k_p^{**}(f))$ aralığında azalan bir fonksiyondur.
6. $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(k_p^{**}(f), \theta^{-1}(f))$ aralığında kesin artan bir fonksiyondur.
7. $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(k_p^*(f), \theta^{-1}(f))$ aralığında artan bir fonksiyondur.

İspat.

1. Her $0 \leq k_1 < k_2 < \infty$ için $\alpha_p(kf) = \rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) - 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun artan bir fonksiyon olduğunu yani, $k_1 \leq k_2$ iken

$$\alpha_p(k_1f) \leq \alpha_p(k_2f)$$

olduğunu gösterelim.

Burada $\alpha_p(kf)$ fonksiyonun $[0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyon olduğunu göstermek için $\rho_{\Phi}(\cdot)$ ve $\rho_{\Psi}(\cdot)$ fonksiyonlarının $[0, \infty)$ aralığında artan fonksiyon olduklarını göstermek yeterli olacaktır. Bunun için, Φ ve Ψ fonksiyonları artan fonksiyon olduklarından $k_1 < k_2$ için,

$$\begin{aligned} \rho_{\Phi}(k_1f) &= \int_G \Phi(k_1f(t))d\mu \\ &\leq \int_G \Phi(k_2f(t))d\mu \\ &= \rho_{\Phi}(k_2f) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde, $k_1 < k_2$ iken

$$\begin{aligned} \rho_{\Psi}(\varphi(k_1|f|)) &= \int_G \Psi(\varphi(k_1|f(t)|))d\mu \\ &\leq \int_G \Psi(\varphi(k_2|f(t)|))d\mu \\ &= \rho_{\Psi}(\varphi(k_2|f|)) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Böylece $\rho_{\Phi}(\cdot)$ ve $\rho_{\Psi}(\cdot)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığında birer artan pozitif fonksiyonlar olduklarından $k_1 < k_2$ için

$$\begin{aligned} \alpha_p(k_1f) &= \rho_{\Phi}^{p-1}(k_1f)\rho_{\Psi}(\varphi(k_1|f|)) - 1 \\ &\leq \rho_{\Phi}^{p-1}(k_2f)\rho_{\Psi}(\varphi(k_2|f|)) - 1 = \alpha_p(k_2f) \end{aligned}$$

olur. O halde $k \mapsto \alpha_p(kf)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyondur.

2. Her $0 < k < \theta^{-1}(f)$ için $A_p(f, k) = k^{-1} s_p(\rho_\Phi(kf)) = k^{-1} (1 + \rho_\Phi^p(kf))^{\frac{1}{p}}$ olsun. O halde, $\rho_\Phi(kf) < +\infty$ olduğundan

$$A_p(f, k) = k^{-1} (1 + \rho_\Phi^p(kf))^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

elde edilir. Buradan $k \in \{k > 0 : A_p(f, k) < +\infty\}$ sağlanır. Böylece,

$$(0, \theta^{-1}(f)) \subset \{k > 0 : A_p(f, k) < +\infty\}$$

bulunur.

3. Her $0 < k < \theta^{-1}(f)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < k_n < \theta^{-1}(f)$ olsun. O halde $k_n \rightarrow k$ ise

$$A_p(f, k_n) = k_n^{-1} (1 + \rho_\Phi^p(k_n f))^{\frac{1}{p}} \rightarrow k^{-1} (1 + \rho_\Phi^p(kf))^{\frac{1}{p}} = A_p(f, k)$$

olduğundan $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(0, \theta^{-1}(f))$ aralığında süreklidir.

4. Her $0 < k_1 < k_2 < k_p^*(f)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\rho_\Phi^{p-1}(k f_n) \rho_\Psi(\varphi(k|f_n|)) < 1$$

olur. Böylece Önerme 2.5.17 gereğince, $i=1,2$ için $\rho_\Phi(k_i f_n)$ ve $\rho_\Psi(\varphi(k_i|f_n|))$ fonksiyonları sonludur. Ayrıca $0 < k_2 < k_p^*(f)$ olduğu için,

$$\begin{aligned} \alpha_p(k_2 f_n) &= \rho_\Phi^{p-1}(k_2 f_n) \rho_\Psi(\varphi(k_2|f_n|)) - 1 \\ &= \left(\int_G \Phi(k_2 f_n(t)) d\mu \right)^{p-1} \left(\int_G \Psi(\varphi(k_2|f_n(t)|)) d\mu \right) - 1 \\ &\leq \left(\int_G \Phi(k_2 f(t)) d\mu \right)^{p-1} \left(\int_G \Psi(\varphi(k_2|f(t)|)) d\mu \right) - 1 \\ &= \alpha_p(k_2 f) < 0 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer bir deyişle $\alpha_p(k_2 f_n) \leq \alpha_p(k_2 f) < 0$ elde edilir. Ayrıca,

$$\varepsilon_n := \min \left\{ 1, (k_2^{-1} - k_1^{-1}) \alpha_p(k_2 f_n) (1 + \rho_\Phi^p(k_2 f_n))^{-1 + \frac{1}{p}} \right\}$$

şeklinde alınırsa Önerme 2.2.5 ve Önerme 2.5.20 gereğince,

$$\begin{aligned}
A_p(f_n, k_2) &= k_2^{-1} (s_p \circ \rho_\Phi(k_2 f_n)) \\
&= k_2^{-1} (1 + \rho_\Phi^p(k_2 f_n))^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1 + \rho_\Phi^{p-1}(k_2 f_n) \rho_\Phi(k_2 f_n)}{k_2 (1 + \rho_\Phi^p(k_2 f_n))^{1-\frac{1}{p}}} \\
&= \frac{1 + \rho_\Phi^{p-1}(k_2 f_n) \left(\int_G k_2 |f_n(t)| \varphi(k_2 |f_n(t)|) d\mu - \rho_\Psi(\varphi(k_2 |f_n|)) \right)}{(1 + \rho_\Phi^p(k_2 f_n))^{1-\frac{1}{p}}} \\
&= \frac{\rho_\Phi^{p-1}(k_2 f_n) \left(\int_G |f_n(t)| \varphi(k_2 |f_n(t)|) d\mu \right) + \frac{1}{k_2} (1 - \rho_\Phi^{p-1}(k_2 f_n) \rho_\Psi(\varphi(k_2 |f_n|)))}{(1 + \rho_\Phi^p(k_2 f_n))^{1-\frac{1}{p}}} \\
&= \frac{\rho_\Phi^{p-1}(k_2 f_n) \left(\int_G |f_n(t)| \varphi(k_2 |f_n(t)|) d\mu \right) - k_2^{-1} \alpha_p(k_2 f_n)}{(1 + \rho_\Phi^p(k_2 f_n))^{1-\frac{1}{p}}} \\
&\leq \frac{\rho_\Phi^{p-1}(k_2 f_n) \int_G |f_n(t)| \varphi(k_2 |f_n(t)|) d\mu - \frac{1}{k_1} (k_2 f_n)}{(1 + \rho_\Phi^p(k_2 f_n))^{1-\frac{1}{p}}} - \varepsilon_n \\
&= \frac{1 + \rho_\Phi^{p-1}(k_2 f_n) \left(\int_G k_1 |f_n(t)| \varphi(k_2 |f_n(t)|) d\mu - \rho_\Psi(\varphi(k_2 |f_n|)) \right)}{k_1 (1 + \rho_\Phi^p(k_2 f_n))^{1-\frac{1}{p}}} - \varepsilon_n \\
&\leq \frac{1 + \rho_\Phi^{p-1}(k_2 f_n) \rho_\Phi(k_1 f_n)}{k_1 (1 + \rho_\Phi^p(k_2 f_n))^{1-\frac{1}{p}}} - \varepsilon_n \\
&\leq \frac{1}{k_1} (1 + \rho_\Phi^p(k_1 f_n))^{\frac{1}{p}} - \varepsilon_n \\
&= A_p(f_n, k_1) - \varepsilon_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$A_p(f_n, k_2) \leq A_p(f_n, k_1) - \varepsilon_n$$

bulunur. Burada, her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limit alınır,sa,

$$\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon_0 := \min \left\{ 1, (k_2^{-1} - k_1^{-1}) \alpha_p(k_2 f) (1 + \rho_{\Phi}^p(k_2 f))^{-1 + \frac{1}{p}} \right\} > 0$$

sağlandığından

$$A_p(f, k_2) \leq A_p(f, k_1) - \varepsilon_0 < A_p(f, k_1)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(0, k_p^*(f))$ aralığında artan bir fonksiyondur.

5. Her $0 < k_1 < k_2 < k_p^{**}(f)$ ise,

$$\rho_{\Phi}^{p-1}(k f_n) \rho_{\Psi}(\varphi(k | f_n |)) \leq 1$$

bulunur. Böylece Önerme 2.5.17 gereğince $i = 1, 2$ için $\rho_{\Phi}(k_i f_n)$ ve $\rho_{\Psi}(\varphi(k_i | f_n |))$ fonksiyonları sonludur. Ayrıca benzer şekilde $0 < k_2 < k_p^{**}(f)$ olduğu için bir önceki ifadenin gösterimine benzer şekilde $\alpha_p(k_2 f_n) \leq \alpha_p(k_2 f) \leq 0$ bulunur. Burada

$$\varepsilon_n := \min \left\{ 1, (k_2^{-1} - k_1^{-1}) \alpha_p(k_2 f_n) (1 + \rho_{\Phi}^p(k_2 f_n))^{-1 + \frac{1}{p}} \right\}$$

şeklinde alınır,sa, Önerme 2.2.5 ve Önerme 2.5.20 gereğince 4. ifadesine benzer şekilde

$$\begin{aligned} A_p(f_n, k_2) &= k_2^{-1} (1 + \rho_{\Phi}^p(k_2 f_n))^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1 + \rho_{\Phi}^{p-1}(k_2 f_n) \left(\int_G k_2 |f_n(t)| \varphi(k_2 | f_n(t) |) d\mu - \rho_{\Psi}(\varphi(k_2 | f_n |)) \right)}{k_2 (1 + \rho_{\Phi}^p(k_2 f_n))^{1 - \frac{1}{p}}} \\ &\leq \frac{1 + \rho_{\Phi}^{p-1}(k_2 f_n) \left(\int_G k_1 |f_n(t)| \varphi(k_2 | f_n(t) |) d\mu - \rho_{\Psi}(\varphi(k_2 | f_n |)) \right)}{k_1 (1 + \rho_{\Phi}^p(k_2 f_n))^{1 - \frac{1}{p}}} - \varepsilon_n \\ &\leq \frac{1 + \rho_{\Phi}^{p-1}(k_2 f_n) \rho_{\Phi}(k_1 f_n)}{k_1 (1 + \rho_{\Phi}^p(k_2 f_n))^{1 - \frac{1}{p}}} - \varepsilon_n \\ &\leq \frac{1}{k_1} (1 + \rho_{\Phi}^p(k_1 f_n))^{\frac{1}{p}} - \varepsilon_n \\ &= A_p(f_n, k_1) - \varepsilon_n \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ olur. Böylece,

$$A_p(f, k_2) \leq A_p(f, k_1)$$

elde edilir. Bu ifade ise $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonunun $(0, k_p^{**}(f))$ aralığında azalan bir fonksiyon olduğunu gösterir.

6. $k_p^{**}(f) < k_1 < k_2 < \theta^{-1}(f)$ ise bir (f_n) dizisi için $i = 1, 2$ iken $\rho_\Phi(k_i f_n) < +\infty$ sağlanır. Böylece, Önerme 2.5.17 gereğince, $\rho_\Psi(\varphi(k_i |f_n|)) < +\infty$ olur. Ayrıca, $k_p^{**}(f) < k_1$ için,

$$0 < \alpha_p(k_1 f) = \rho_\Phi^{p-1}(k_1 f) \rho_\Psi(\varphi(k_1 |f|)) - 1 < \infty$$

olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$0 < \alpha_p(k_1 f_n) = \rho_\Phi^{p-1}(k_1 f_n) \rho_\Psi(\varphi(k_1 |f_n|)) - 1 < \infty$$

elde edilir. O halde, benzer şekilde,

$$\varepsilon_n := \min\{1, (k_1^{-1} - k_2^{-1}) \alpha_p(k_1 f_n) (1 + \rho_\Phi^p(k_1 f_n))^{-1 + \frac{1}{p}}\}$$

şeklinde alınırsa,

$$\begin{aligned} A_p(f_n, k_1) &= \frac{\rho_\Phi^{p-1}(k_1 f_n) \int_G |f_n(t)| \varphi(k_1 |f_n(t)|) d\mu - k_1^{-1} \alpha_p(k_2 f_n)}{(1 + \rho_\Phi^p(k_1 f_n))^{1 - \frac{1}{p}}} \\ &\leq \frac{\rho_\Phi^{p-1}(k_1 f_n) \int_G |f_n(t)| \varphi(k_1 |f_n(t)|) d\mu - k_2^{-1} \alpha_p(k_2 f_n)}{(1 + \rho_\Phi^p(k_1 f_n))^{1 - \frac{1}{p}}} - \varepsilon_n \\ &\leq \frac{1 + \rho_\Phi^{p-1}(k_1 f_n) \rho_\Phi(k_2 f_n)}{k_2 (1 + \rho_\Phi^p(k_1 f_n))^{1 - \frac{1}{p}}} - \varepsilon_n \\ &\leq \frac{1}{k_2} (1 + \rho_\Phi^p(k_2 f_n))^{\frac{1}{p}} - \varepsilon_n \\ &= A_p(f_n, k_2) - \varepsilon_n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade, her $n \in \mathbb{N}$ için gerçeğlendiğinden $n \rightarrow +\infty$ için limit alınır,

$$\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon_0 := \min\{1, (k_1^{-1} - k_2^{-1})\alpha_p(k_1 f)(1 + \rho_\Phi^p(k_1 f))^{-1+\frac{1}{p}}\} > 0$$

olduğundan, $A_p(f, k_1) \leq A_p(f, k_2) - \varepsilon_0 < A_p(f, k_2)$ eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla,

$$A_p(f, k_1) < A_p(f, k_2)$$

eşitsizliği sağlanır. O halde, $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(k_p^{**}(f), \theta^{-1}(f))$ aralığında kesin artan bir fonksiyondur.

7. Herhangi $k_p^*(f) < k_1 < k_2 < \theta^{-1}(f)$ ve (f_n) dizisi için $i = 1, 2$ iken $\rho_\Phi(k_i f_n) < +\infty$ olur. Böylece 2.5.17 gereğince, $\rho_\Psi(\varphi(k_i |f_n|)) < +\infty$ bulunur. Ayrıca, $k_p^*(f) < k_1$ için,

$$0 \leq \alpha_p(k_1 f) = \rho_\Phi^{p-1}(k_1 f) \rho_\Psi(\varphi(k_1 |f|)) - 1 < +\infty$$

olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$0 \leq \alpha_p(k_1 f_n) = \rho_\Phi^{p-1}(k_1 f_n) \rho_\Psi(\varphi(k_1 |f_n|)) - 1 < +\infty$$

olur. O halde benzer şekilde,

$\varepsilon_n := \min\{1, (k_1^{-1} - k_2^{-1})\alpha_p(k_1 f_n)(1 + \rho_\Phi^p(k_1 f_n))^{-1+\frac{1}{p}}\}$ şeklinde alınır,

$$\begin{aligned} A_p(f_n, k_1) &= \frac{\rho_\Phi^{p-1}(k_1 f_n) \int_G |f_n(t)| \varphi(k_1 |f_n(t)|) d\mu - k_1^{-1} \alpha_p(k_2 f_n)}{(1 + \rho_\Phi^p(k_1 f_n))^{1-\frac{1}{p}}} \\ &\leq \frac{\rho_\Phi^{p-1}(k_1 f_n) \int_G |f_n(t)| \varphi(k_1 |f_n(t)|) d\mu - k_2^{-1} \alpha_p(k_2 f_n)}{(1 + \rho_\Phi^p(k_1 f_n))^{1-\frac{1}{p}}} - \varepsilon_n \\ &\leq \frac{1 + \rho_\Phi^{p-1}(k_1 f_n) \rho_\Phi(k_2 f_n)}{k_2 (1 + \rho_\Phi^p(k_1 f_n))^{1-\frac{1}{p}}} - \varepsilon_n \\ &\leq \frac{1}{k_2} (1 + \rho_\Phi^p(k_2 f_n))^{\frac{1}{p}} - \varepsilon_n \\ &= A_p(f_n, k_2) - \varepsilon_n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade, her $n \in \mathbb{N}$ için gerçeklendiğinden $n \rightarrow +\infty$ için limit alınır,sa,

$$\varepsilon_n := \min\{1, (k_1^{-1} - k_2^{-1})\alpha_p(k_2 f_n)(1 + \rho_{\Phi}^p(k_2 f_n))^{-1+\frac{1}{p}}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

olur. Böylece,

$$A_p(f, k_1) \leq A_p(f, k_2)$$

bulunur. O halde, $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(k_p^*(f), \theta^{-1}(f))$ aralığında artan bir fonksiyondur.

□

Önerme 2.5.21 de $1 \leq p < \infty$ durumunu incelendi. Şimdi ise $p = \infty$ durumunu inceleyelim.

Önerme 2.5.22 Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ ve $p = \infty$ için aşağıdakiler geçerlidir.

1. $k \mapsto \alpha_{\infty}(kf)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyondur.
2. $(0, \theta^{-1}(f)) \subset \{k > 0 : A_{\infty}(f, k) < +\infty\}$ olur.
3. $k \mapsto A_{\infty}(f, k)$ fonksiyonu $(0, \theta^{-1}(f))$ aralığında süreklidir.
4. $k \mapsto A_{\infty}(f, k)$ fonksiyonu $(0, k_{\infty}^*(f))$ aralığında kesin azalan bir fonksiyondur.
5. $k \mapsto A_{\infty}(f, k)$ fonksiyonu $(0, k_{\infty}^{**}(f))$ aralığında azalan bir fonksiyondur.
6. $k \mapsto A_{\infty}(f, k)$ fonksiyonu $(k_{\infty}^{**}(f), \theta^{-1}(f))$ aralığında kesin artan bir fonksiyondur.
7. $k \mapsto A_{\infty}(f, k)$ fonksiyonu $(k_{\infty}^*(f), \theta^{-1}(f))$ aralığında artan bir fonksiyondur.

İspat. $p = \infty$ için

$$\alpha_{\infty}(kf) = \begin{cases} -1 & , p = \infty, \rho_{\Phi}(f) \leq 1 \\ \rho_{\Psi}(\varphi(|f|)) & , p = \infty, \rho_{\Phi}(f) > 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun tanımlanışından ispat aşağıdaki gibi farklı durumlara ayrılacaktır.

1. Herhangi $0 \leq k_1 < k_2 < \infty$ için

Durum 1: Eğer $p = \infty$ ve $\rho_{\Phi}(k_1 f) \leq 1, \rho_{\Phi}(k_2 f) \leq 1$ ise

$$\alpha_{\infty}(k_1 f) = -1 = \alpha_{\infty}(k_2 f)$$

eşitliği elde edilir.

Durum 2: Eğer $p = \infty, \rho_{\Phi}(k_1 f) > 1$ ve $\rho_{\Phi}(k_2 f) > 1$ ise

$$\alpha_{\infty}(k_1 f) = \rho_{\Psi}(\varphi(k_1 |f|)) \leq \rho_{\Psi}(\varphi(k_2 |f|)) = \alpha_{\infty}(k_2 f)$$

eşitsizliği elde edilir.

Durum 3: Eğer $p = \infty, \rho_{\Phi}(k_1 f) > 1$ ve $\rho_{\Phi}(k_2 f) \leq 1$ ise ρ_{Φ} artan bir fonksiyon olduğundan

$$1 < \rho_{\Phi}(k_1 f) \leq \rho_{\Phi}(k_2 f) \leq 1$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla bu durum geçersizdir.

Durum 4: Eğer $p = \infty$ ve $\rho_{\Phi}(k_1 f) \leq 1, \rho_{\Phi}(k_2 f) > 1$ ise

$$\alpha_{\infty}(k_1 f) = -1 \leq \rho_{\Psi}(\varphi(k_2 |f|)) = \alpha_{\infty}(k_2 f)$$

eşitsizliği sağlanır dolayısıyla yukarıdaki 4 durumdan dolayı $k \mapsto \alpha_{\infty}(kf)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyondur.

Uyarı 2.5.23 Bir sonraki ifadeleri gösterirken $p = \infty$ için $\rho_{\Phi}(k_1 f) > 1$ ve $\rho_{\Phi}(k_2 f) \leq 1$ olması durumundan yukarıdaki gibi çelişki elde edileceğinden bu durum ihmal edilecektir.

2. Her $0 < k < \theta^{-1}(f)$ için $\rho_{\Phi}(k_1 f) < \infty$ olur. Ayrıca

$$A_{\infty}(f, k_1) = k_1^{-1} \max\{1, \rho_{\Phi}(k_1 f)\} < +\infty$$

gerçeklendiğinden $k_1 \in \{k \geq 0 : A_{\infty}(f, k) < +\infty\}$ bulunur. O halde,

$$(0, \theta^{-1}(f)) \subset \{k > 0 : A_{\infty}(f, k) < +\infty\}$$

elde edilir.

3. Her $k_n, k \in (0, \theta^{-1}(f))$ için ve $k_n \rightarrow k$ olsun.

Durum 1: Eğer $p = \infty$ ve $\rho_\Phi(kf) > 1, \rho_\Phi(k_nf) > 1$ ise,

$$A_\infty(f, k_n) = k_n^{-1} \max\{1, \rho_\Phi(k_nf)\} = k_n^{-1} \rho_\Phi(k_nf) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k^{-1} \rho_\Phi(kf)$$

bulunur. Böylece,

$$A_\infty(f, k_n) \rightarrow k^{-1} \rho_\Phi(kf) = k^{-1} \max\{1, \rho_\Phi(kf)\} = A_\infty(f, k)$$

olduğundan $A_\infty(f, k_n) \rightarrow A_\infty(f, k)$ elde edilir.

Durum 2: Eğer $p = \infty, \rho_\Phi(kf) \leq 1$ ve $\rho_\Phi(k_nf) \leq 1$ ise,

$$A_\infty(f, k_n) = k_n^{-1} \max\{1, \rho_\Phi(k_nf)\} = k_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k^{-1} = k^{-1} \max\{1, \rho_\Phi(kf)\} = A_\infty(f, k)$$

olur. O halde, $A_\infty(f, k_n) \rightarrow A_\infty(f, k)$ bulunur.

Durum 1 ve Durum 2 den $k \mapsto A_\infty(f, k)$ fonksiyonu $(0, \theta^{-1}(f))$ aralığında süreklidir.

4. Her $0 < k_1 < k_2 < k_\infty^*(f)$ için $\rho_\Phi(k_1f) \leq \rho_\Phi(k_2f) \leq 1$ olur. Dolayısıyla,

$$A_\infty(f, k_2) = k_2^{-1} \max\{1, \rho_\Phi(k_2f)\} = k_2^{-1} < k_1^{-1} = k_1^{-1} \max\{1, \rho_\Phi(k_1f)\} = A_\infty(f, k_1)$$

olur. Böylece, $A_\infty(f, k_2) < A_\infty(f, k_1)$ gerçekleşir. Bu ise $k \mapsto A_\infty(f, k)$ fonksiyonunun $(0, k_\infty^*(f))$ aralığında kesin azalan bir fonksiyon olduğunu gösterir.

5. $0 < k_1 < k_2 < k_\infty^{**}(f)$ olsun.

Durum 1: Eğer $\rho_\Phi(k_2f_n) \leq 1$ ise,

$$A_\infty(f_n, k_2) = k_2^{-1} \max\{1, \rho_\Phi(k_2f_n)\} = k_2^{-1} < k_1^{-1} = k_1^{-1} \max\{1, \rho_\Phi(k_1f_n)\} = A_\infty(f_n, k_1)$$

elde edilir.

Durum 2: Eğer $\rho_\Phi(k_2f_n) > 1$ ise $\alpha_\infty(k_2f_n) \leq \alpha_\infty(k_2f) \leq 0$ olduğundan $\rho_\Psi(\varphi(k_2|f_n|)) = 0$

olur. Böylece $\rho_\Phi(k_2 f_n)$ fonksiyonunun artanlığından ve Önerme 2.2.5 gereğince,

$$\begin{aligned}
k_2^{-1} \rho_\Phi(k_2 f_n) &= k_2^{-1} \int_G \Phi(k_2 f_n(t)) d\mu \\
&= \int_G k_2^{-1} k_2 |f_n(t)| \varphi(k_2 |f_n(t)|) d\mu - k_2^{-1} \rho_\Psi(\varphi(k_2 |f_n|)) \\
&= \int_G |f_n(t)| \varphi(k_2 |f_n(t)|) d\mu - k_2^{-1} \rho_\Psi(\varphi(k_2 |f_n|)) \\
&= \int_G |f_n(t)| \varphi(k_2 |f_n(t)|) d\mu \\
&= \int_G |f_n(t)| \varphi(k_2 |f_n(t)|) d\mu - k_1^{-1} \rho_\Psi(\varphi(k_2 |f_n|)) \\
&= k_1^{-1} \int_G k_1 |f_n(t)| \varphi(k_2 |f_n(t)|) d\mu - k_1^{-1} \rho_\Psi(\varphi(k_2 |f_n|)) \\
&\leq k_1^{-1} \int_G (\Phi(k_1 |f_n(t)|) + \Psi(\varphi(k_2 |f_n(t)|))) d\mu - k_1^{-1} \rho_\Psi(\varphi(k_2 |f_n|)) \\
&= k_1^{-1} \int_G \Phi(k_1 |f_n(t)|) d\mu + k_1^{-1} \rho_\Psi(\varphi(k_2 |f_n(t)|)) - k_1^{-1} \rho_\Psi(\varphi(k_2 |f_n|)) \\
&= k_1^{-1} \int_G \Phi(k_1 |f_n(t)|) d\mu \\
&= k_1^{-1} \rho_\Phi(k_1 f_n) \\
&\leq k_2^{-1} \rho_\Phi(k_2 f_n) < +\infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$A_\infty(f_n, k_2) = \max\{k_2^{-1}, k_2^{-1} \rho_\Phi(k_2 f_n)\} \leq \max\{k_1^{-1}, k_1^{-1} \rho_\Phi(k_1 f_n)\} = A_\infty(f_n, k_1)$$

olur ve $n \rightarrow +\infty$ için limit alınarak,

$$A_\infty(f, k_2) \leq A_\infty(f, k_1)$$

bulunur. O halde, $k \mapsto A_\infty(f, k)$ fonksiyonu $(0, k_\infty^{**}(f))$ aralığında azalan bir fonksiyondur.

6. Herhangi $k_\infty^{**}(f) < k_1 < k_2 < \theta^{-1}(f)$ ise $\alpha_\infty(kf) > 0$ bulunur. Dolayısıyla, $\rho_\Phi(k_1f) > 1$ ve $\rho_\Psi(\varphi(k_1|f|)) > 0$ olur. O halde,

$$\varepsilon_n := \min\{1, (k_1^{-1} - k_2^{-1})\rho_\Psi(\varphi(k_1|f_n|))\}$$

şeklinde alınırsa Önerme 2.2.5 kullanılarak,

$$\begin{aligned} A_\infty(f_n, k_1) &= k_1^{-1} \max\{1, \rho_\Phi(k_1f_n)\} \\ &= k_1^{-1} \rho_\Phi(k_1f_n) \\ &= \int_G |f_n(t)| \varphi(k_1|f_n(t)|) d\mu - k_1^{-1} \rho_\Psi(\varphi(k_1|f_n|)) \\ &= \int_G |f_n(t)| \varphi(k_1|f_n(t)|) d\mu - k_2^{-1} \rho_\Psi(\varphi(k_1|f_n|)) - \varepsilon_n \\ &= k_2^{-1} \left(\int_G k_2 |f_n(t)| \varphi(k_1|f_n(t)|) d\mu - \rho_\Psi(\varphi(k_1|f_n|)) \right) - \varepsilon_n \\ &\leq k_2^{-1} \left(\int_G \Phi(k_2f_n(t)) + \Psi(\varphi(k_1|f_n(t)|)) d\mu - \rho_\Psi(\varphi(k_1|f_n|)) \right) - \varepsilon_n \\ &= k_2^{-1} \left(\int_G \Phi(k_2f_n(t)) d\mu + \rho_\Psi(\varphi(k_1|f_n|)) - \rho_\Psi(\varphi(k_1|f_n|)) \right) - \varepsilon_n \\ &= k_2^{-1} \int_G \Phi(k_2f_n(t)) d\mu - \varepsilon_n \\ &= k_2^{-1} \rho_\Phi(k_2f_n) - \varepsilon_n \\ &= k_2^{-1} \max\{1, \rho_\Phi(k_2f_n)\} - \varepsilon_n \\ &= A_\infty(f_n, k_2) - \varepsilon_n \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $n \rightarrow +\infty$ için limit alırsak,

$$\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_0 := \min\{1, (k_1^{-1} - k_2^{-1})\rho_\Psi(\varphi(k_1|f_n|))\} > 0$$

sağlanır. O halde,

$$A_\infty(f, k_1) \leq A_\infty(f, k_2) - \varepsilon_0 < A_\infty(f, k_2)$$

bulunur. Böylece, $A_\infty(f, k_1) < A_\infty(f, k_2)$ gerçekleşir. Buradan, her $k_\infty^{**}(f) < k_1 < k_2 < \theta^{-1}(f)$ için $k \mapsto A_\infty(f, k)$ fonksiyonunun artan olduğunu elde edilir.

7. Herhangi $k_\infty^*(f) < k_1 < k_2 < \theta^{-1}(f)$ olsun. Bu durumda

$$k_\infty^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_\infty(kf) \geq 0\} < k_1 < k_2 < \inf\{k \geq 0 : \rho_\Phi(k^{-1}f) < +\infty\}$$

gerçeklendiğinden $\alpha_\infty(k_1f) \geq 0$ olur. Buradan $\rho_\Phi(k_1f) > 1$ ve $\rho_\Psi(\varphi(k_1|f|)) = 0$ bulunur. O halde ,

$$\varepsilon_n := \min\{1, (k_1^{-1} - k_2^{-1})\rho_\Psi(\varphi(k_1|f_n|))\}$$

şeklinde alınırsa Önerme 2.2.5 kullanılarak,

$$\begin{aligned} A_\infty(f_n, k_1) &= k_1^{-1} \max\{1, \rho_\Phi(k_1f_n)\} \\ &= k_1^{-1} \rho_\Phi(k_1f_n) \\ &= \int_G |f_n(t)| \varphi(k_1|f_n(t)|) d\mu - k_1^{-1} \rho_\Psi(\varphi(k_1|f_n|)) \\ &= \int_G |f_n(t)| \varphi(k_1|f_n(t)|) - k_2^{-1} \rho_\Psi(\varphi(k_1|f_n|)) - \varepsilon_n \\ &\leq k_2^{-1} \rho_\Phi(k_2f_n) - \varepsilon_n \\ &= A_\infty(f_n, k_2) - \varepsilon_n \end{aligned}$$

olur ve $n \rightarrow +\infty$ için limit alırsak, $\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_0 := \min\{1, (k_1^{-1} - k_2^{-1})\rho_\Psi(\varphi(k_1|f|))\} = 0$ olduğundan

$$A_\infty(f, k_1) \leq A_\infty(f, k_2)$$

bulunur. Böylece $k \mapsto A_\infty(f, k)$ fonksiyonu $(k_\infty^*(f), \theta^{-1}(f))$ aralığında artan bir fonksiyondur. $\square$

Çalışmalarımızın temel noktasını oluşturacak aşağıdaki teoremi verelim. Bu teorem bize p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normunun hangi $k \in \mathbb{R}$ için elde edilebilir olduğunu verecektir.

Teorem 2.5.24 Her $1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ için aşağıdaki durumlar geçerlidir.

1. Eğer $k_p^*(f) = k_p^{**}(f) = +\infty$ ise $\|f\|_{\Phi,p} = \lim_{k \rightarrow \infty} A_p(f, k)$
2. Eğer $k_p^*(f) < k_p^{**}(f) = +\infty$ ise her $k \in [k_p^*(f), +\infty)$ için $\|f\|_{\Phi,p} = A_p(f, k)$
3. Eğer $k_p^{**}(f) < +\infty$ ise her $k \in [k_p^*(f), k_p^{**}(f)]$ için $\|f\|_{\Phi,p} = A_p(f, k)$

İspat. 1. Kabul edelim ki $k_p^*(f) = k_p^{**}(f) = +\infty$ olsun. O halde,

$$k_p^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \geq 0\} = +\infty$$

olduğundan $\alpha_p(kf) \geq 0$ olacak şekilde bir $k_0 > 0$ sayısı bulunamaz. Diğer taraftan,

$$k_p^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \leq 0\} = +\infty$$

sağlandığından her $k \geq 0$ için $\alpha_p(kf) \leq 0$ bulunur.

Durum 1: Eğer $p = \infty$ ve $\rho_{\Phi}(kf) \leq 1$ ise, her $k \geq 0$ için $\alpha_p(kf) \leq 0$ olur. Böylece, $\rho_{\Phi}(kf) \leq 1$ olduğundan $\alpha_p(kf) = -1$ bulunur. O halde,

$$\|f\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} k^{-1} \max\{1, \rho_{\Phi}(kf)\} = \inf_{k>0} k^{-1} = 0$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_p(f, k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max\{1, \rho_{\Phi}(kf)\} = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} = 0$$

gerçeklendiğinden $p = \infty$ ve $\rho_{\Phi}(kf) \leq 1$ ise

$$\|f\|_{\Phi,p} = \lim_{k \rightarrow \infty} A_p(f, k)$$

elde edilir.

Durum 2: Eğer $p = \infty$ ve $\rho_{\Phi}(kf) > 1$ ise, her $k \geq 0$ için $\alpha_p(kf) = \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \leq 0$ olduğundan her $k \geq 0$ için $\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) = 0$ bulunur. Ancak, $\rho_{\Phi}(0) = 0 > 1$ çelişkisi elde

edilir. Dolayısıyla böyle bir durumdan söz edilemez.

Durum 3: Eğer $1 \leq p < \infty$ ise, her $k \geq 0$ için $\alpha_p(kf) \leq 0$ olduğundan

$$\rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \leq 1$$

elde edilir. Böylece, $\rho_{\Phi}(kf) < +\infty$ gerçekleşir. Buradan Önerme 2.5.17 gereğince, $\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) < +\infty$ bulunur. O halde, Önerme 2.5.21 ve Önerme 2.5.22 kullanılarak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_p(f, k) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1}(1 + \rho_{\Phi}^p(kf))^{\frac{1}{p}} = \inf_{k > 0} k^{-1}((1 + \rho_{\Phi}^p(kf))^{\frac{1}{p}}) = \|f\|_{\Phi, p}$$

elde edilir. Böylece $1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ için $k_p^*(f) = k_p^{**}(f) = \infty$ ise

$$\|f\|_{\Phi, p} = \lim_{k \rightarrow \infty} A_p(f, k)$$

bulunur. Diğer durumlar benzer şekilde yapılır.

□

Önerme 2.5.25 Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\left(0, \|f\|_{\Phi, p}^{-1}\right] \subset \left\{k > 0 : \rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \leq 1\right\}$$

gerçeklenir.

İspat. Kabul edelim ki $1 \leq p < \infty$ için $k_1 \in (0, \|f\|_{\Phi, p}^{-1})$ olsun. O halde, ilk olarak

$$\|f\|_{\Phi, p}^{-1} \leq \theta^{-1}(f)$$

olduğunu gözlemleyelim. Teorem 2.4.6 ve $\rho_{\Phi}(\cdot)$ artan bir fonksiyon olduğundan,

$$\rho_{\Phi}\left(\|f\|_{\Phi, p}^{-1}f\right) \leq \rho_{\Phi}\left(\|f\|_{\Phi, \infty}^{-1}f\right) \quad (2.10)$$

elde edilir. Burada, $\|f\|_{\Phi, \infty}$ normunun tanımından $\rho_{\Phi}(\|f\|_{\Phi, \infty}^{-1}f) \leq 1$ bulunur. Böylece (2.10) ifadesinden $\rho_{\Phi}(\|f\|_{\Phi, p}^{-1}f) < \infty$ olur ve buradan $\|f\|_{\Phi, p}^{-1} \leq \theta^{-1}(f)$ eşitsizliği elde edilir.

Varsayalım ki, $0 < k_0 < \|f\|_{\Phi, p}^{-1}$ ve $\rho_{\Phi}^{p-1}(k_0f)\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|f|)) > 1$ olacak şekilde bir k_0 var olsun. Önerme 2.5.16 gereğince $k_0 < \theta^{-1}(f)$ ise $\rho_{\Phi}(k_0f) < +\infty$ bulunur ve Önerme 2.5.17

kullanılarak $\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|f_n|)) < \infty$ gerçeklenir. Böylece, $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 < \rho_{\Phi}^{p-1}(k_0 f_n) \rho_{\Psi}(\varphi(k_0|f_n|)) < \infty$$

elde edilir. O halde,

$$\rho_{\Phi}(k_0 f_n) \leq \rho(\|f\|_{\Phi,p}^{-1} f) \leq 1$$

gerçeklenir. Ayrıca μ lüsü atomsuz olduğundan, ölçülebilir bir E kümesi bulunabilir ve $g = f_n \chi_E$ için

$$1 < \rho_{\Phi}^{p-1}(k_0 g) \rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|)) \leq \rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|)) < 2^{\frac{1}{p}} \quad (2.11)$$

gerçeklenir. Buna ek olarak (2.11) ifadesinden $\rho_{\Phi}^{p-1}(k_0 g) < +\infty$ ve $1 < \rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|)) < +\infty$ bulunur. Ayrıca,

$$\rho_{\Phi}^{p-1}(k_0 g) \rho_{\Psi} \left(\frac{\varphi(k_0|g|)}{\rho_{\Phi}^{p-1}(k_0 g) \rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))} \right) \leq \frac{\rho_{\Phi}^{p-1}(k_0 g) \rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))}{\rho_{\Phi}^{p-1}(k_0 g) \rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))} = 1 \quad (2.12)$$

olur. Önerme 2.2.5 ve Önerme 2.5.20 kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_0} &> \|f\|_{\Phi,p} = \inf \left\{ k^{-1} (1 + \rho_{\Phi}^p(kf))^{\frac{1}{p}} : k \geq 0 \right\} \\ &\geq \inf \left\{ k^{-1} (1 + \rho_{\Phi}^p(kg))^{\frac{1}{p}} : k \geq 0 \right\} \\ &\geq \inf_{k \geq 0} \frac{1 + \rho_{\Phi}^p(k_0 g) \rho_{\Phi}(k_0 g)}{k (1 + \rho_{\Phi}^p(k_0 g))^{1-\frac{1}{p}}} \\ &\geq \inf_{k \geq 0} \frac{\rho_{\Phi}^{p-1}(k_0 g) \rho_{\Psi} \left(\frac{\varphi(k_0|g|)}{\rho_{\Phi}^{p-1}(k_0 g) \rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))} \right) + \rho_{\Phi}^{p-1}(k_0 g) \rho_{\Phi}(kg)}{k (1 + \rho_{\Phi}^p(k_0 g))^{1-\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{1}{k_0} \frac{1}{(1 + \rho_{\Phi}^p(k_0 g))^{1-\frac{1}{p}}} \frac{\rho_{\Phi}(k_0 g) + \rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))}{\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))} \end{aligned}$$

olur. Eğer,

Durum 1: $p = 1$ ise

$$\frac{1}{k_0} > \frac{1}{k_0} \frac{1}{(1 + \rho_{\Phi}(k_0 g))^{1-1}} \frac{\rho_{\Phi}(k_0 g) + \rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))}{\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))} > \frac{1}{k_0}$$

çelişkisi elde edilir.

Durum 2: Eğer $1 < p < \infty$ ise, $\frac{(1+u^p)^{\frac{1}{p}}}{u^{p-1}}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında kesin azalandır. O halde, her $u \in (0, 1]$ için $\frac{(1+u^p)^{\frac{1}{p}}}{u^{p-1}} \geq 2^{\frac{1}{p}}$ olur. Böylece, (2.11) ifadesinden

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k_0} &> \frac{1}{k_0} \frac{1}{(1 + \rho_{\Phi}^p(k_0g))^{1-\frac{1}{p}}} \frac{\rho_{\Phi}(k_0g) + \rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))}{\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))} \\
 &= \frac{1}{k_0} \frac{1}{(1 + \rho_{\Phi}^p(k_0g))^{1-\frac{1}{p}}} \frac{\rho_{\Phi}^p(k_0g) + \rho_{\Phi}^{p-1}(k_0g)\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))}{\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))\rho_{\Phi}^{p-1}(k_0g)} \\
 &> \frac{1}{k_0} \frac{\rho_{\Phi}^p(k_0g) + 1}{\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))\rho_{\Phi}^{p-1}(k_0g)(1 + \rho_{\Phi}^p(k_0g))^{1-\frac{1}{p}}} \\
 &= \frac{1}{k_0} \frac{(1 + \rho_{\Phi}^p(k_0g))^{\frac{1}{p}}}{\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))\rho_{\Phi}^{p-1}(k_0g)} \\
 &\geq \frac{1}{k_0} \frac{2^{\frac{1}{p}}}{\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|g|))} > \frac{1}{k_0}
 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $\frac{1}{k_0} > \frac{1}{k_0}$ çelişkisi elde edilir. O halde

$$(0, \|f\|_{\Phi,p}^{-1}) \subset \{k > 0 : \rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \leq 1\}$$

elde edilir. Son olarak $k = \|f\|_{\Phi,p}^{-1}$ ise, kabul edelim ki, $\rho_{\Phi}^{p-1}(\|f\|_{\Phi,p}^{-1}f)\rho_{\Psi}(\varphi(\|f\|_{\Phi,p}^{-1}|f|)) > 1$ olsun. O halde,

$$k_p^{**}(f) \leq \|f\|_{\Phi,p}^{-1}$$

gerçeklenir. Varsayalım ki, $k_p^{**}(f) < \|f\|_{\Phi,p}^{-1}$ olsun. Böylece,

$$k_p^{**}(f) < k_2 < \|f\|_{\Phi,p}^{-1}$$

olacak şekilde bir k_2 sayısı vardır. Ancak $k_2 < \|f\|_{\Phi,p}^{-1}$ sayısı için bir önceki ifade de olduğu gibi bir çelişki elde edilir. Böylece, $k_p^{**}(f) = \|f\|_{\Phi,p}^{-1}$ bulunur. O halde Teorem 2.5.24 kullanılarak,

$$\|f\|_{\Phi,p} = A_p(f\|f\|_{\Phi,p}^{-1}) = \|f\|_{\Phi,p}(1 + \rho_{\Phi}^p(\|f\|_{\Phi,p}^{-1}f))^{\frac{1}{p}} > \|f\|_{\Phi,p}$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla,

$$\rho_{\Phi}^{p-1}(\|f\|_{\Phi,p}^{-1}f)\rho_{\Psi}(\varphi(\|f\|_{\Phi,p}^{-1}|f|)) \leq 1$$

bulunur. O halde

$$\left(0, \|f\|_{\Phi,p}^{-1}\right] \subset \left\{k > 0 : \rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \leq 1\right\}$$

gerçeklenir.

□

Önerme 2.5.26 Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1. Eğer $k_p^{**}(f) = +\infty$ ise $k_p^{**}(f) = \theta^{-1}(f) = +\infty$
2. $k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f) \leq \theta^{-1}(f)$

İspat.

1. Kabul edelim ki $k_p^{**}(f) = +\infty$ olsun. O halde her $k \geq 0$ için $\alpha_p(kx) \leq 0$ olur. Bu ifadeyi kullanarak aşağıdaki üç durumu inceleyelim.

Durum 1: Eğer $p = \infty$ ve $\rho_{\Phi}(kf) > 1$ ise,

$$\alpha_p(kf) = \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \leq 0 \Rightarrow \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) = 0$$

olur. Böylece,

$$\theta(f) = \theta_0(f) = \inf\{k \geq 0 : \rho_{\Psi}(p_+(k^{-1}|f|)) = 0 < +\infty\} = 0$$

olduğundan $\theta^{-1}(f) = +\infty$ ifadesi elde edilir.

Durum 2: Eğer $p = \infty$ ve $\rho_{\Phi}(kf) \leq 1$ ise her $k \geq 0$ için $\alpha_p(kf) = -1$ şeklinde tanımlı olduğundan

$$\theta(f) = \inf\{k > 0 : \rho_{\Phi}(k^{-1}f) \leq 1 < \infty\} = 0$$

ifadesini elde ederiz ve bu ifade yardımıyla $\theta^{-1}(f) = +\infty$ elde edilir.

Durum 3: $1 \leq p < \infty$ olsun. Her $k \geq 0$ için

$$\alpha_p(kf) = \rho_{\Phi}^{p-1}(kf) \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \leq 1$$

olur ve böylece Önerme 2.5.17 ve her $k \geq 0$ için, $\rho_{\Phi}(kf) < +\infty$, $\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) < +\infty$ olur. Buradan,

$$\theta(f) = \theta_0(f) = \inf\{k > 0 : \rho_{\Phi}(k^{-1}f) < +\infty\} = \inf\{k > 0 : \rho_{\Psi}(\varphi(k^{-1}|f|)) < +\infty\} = 0$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $\theta^{-1}(f) = +\infty$ olur. Böylece Durum 1,2,3 ifadelerinden eğer $k_p^{**}(f) = +\infty$ ise

$$\theta^{-1}(f) = k_p^{**}(f) = +\infty$$

elde edilir.

2. Önerme 2.5.5 gereğince her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için

$$k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f)$$

gerçeklenir. O halde $k_p^{**}(f) \leq \theta(f)^{-1}$ olduğunu gözlemleyelim.

Durum 1: Eğer $k_p^{**}(f) = \infty$ ise Önerme 2.5.26 (1) kullanılarak, $\theta^{-1}(f) = \infty$ bulunur. Dolayısıyla her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için,

$$k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f) \leq \theta^{-1}(f)$$

elde edilir.

Durum 2: Eğer $k_p^{**}(f) < \infty$ ise her $k < k_p^{**}(f)$ için $\alpha_p(kf) \leq 0$ bulunur. Buradan,

$$\rho_{\Phi}^{p-1}(kf) \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \leq 1$$

elde edilir. O halde, $\rho_{\Phi}(kf) < +\infty$ ve $\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) < \infty$ olur. Ayrıca Teorem 2.5.24 kullanılarak

$$A_p(f, k_p^{**}(f)) = \inf_{k>0} A_p(f, k) = \|f\|_{\Phi, p} < +\infty$$

gerçeklenir. O halde,

$$A_p(f, k_p^{**}(f)) = (k_p^{**}(f))^{-1} (1 + \rho_\Phi^p(k_p^{**}(f)f))^{1/p} < +\infty$$

olur. Dolayısıyla, $\rho_\Phi(k_p^{**}(f)f) < +\infty$ bulunur. Buradan $k_p^{**}(f) \leq \theta^{-1}(f)$ elde edilir. Böylece, $1 \leq p \leq \infty$ için

$$k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f) \leq \theta^{-1}(f)$$

eşitsizliği sağlanır.

□

Tanım 2.5.27 (Kesin konvekslik) Φ bir Orlicz fonksiyonu ve $u \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $v, w \in \mathbb{R}$ için $v \neq w$ ve $2u = v + w$ olmak üzere

$$2\Phi(u) < \Phi(v) + \Phi(w)$$

koşulu sağlanıyorsa u noktasına Φ fonksiyonunun kesin konveks noktası denir ve Φ fonksiyonunun tüm kesin konveks noktalarının kümesi SC_Φ ile gösterilir.

Gözlem 2.5.28 $SC_\Phi \subset \{u \in \mathbb{R} : \Phi(u) < \infty\} \cup \{\pm c_\Phi\}$ olur. Eğer $u \notin SC_\Phi \cup \{\pm c_\Phi\}$ ise $\mathbb{R} \setminus (SC_\Phi \cup \{+c_\Phi, -c_\Phi\})$ sayılabilir sayıda açık aralıklarının birleşimi olarak yazılır.

Önerme 2.5.29 Her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için $k_p^*(f) < k_p^{**}(f)$ ve $\rho_\Phi(kf) > \sigma_p$ ise μ -h.h.h $t \in \text{supp} f$ için $kf(t) \notin SC_\Phi$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $k_p^*(f) < 2k < k_p^{**}(f)$ olacak şekilde bir $0 < k < \infty$ sayısı var ve $\rho_\Phi(2kf) \geq \sigma_p$ olsun. O halde, $\alpha_p(2kf) = 0$ bulunur. Ayrıca,

$$k_p^*(f) < k_1 < 2k < k_2 < k_p^{**}(f) \text{ ve } k := \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

olacak şekilde k_1 ve k_2 sayıları bulunabilir. Böylece Teorem 2.5.24 kullanılırsa,

$$A_p(f, k_1) = A_p(f, 2k) = A_p(f, k_2) = \|f\|_{\Phi, p}$$

eşitliği sağlanır. O halde, $s_p \circ \rho_\Phi$ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\begin{aligned}
2\|f\|_{\Phi,p} &= 2A_p(f, 2k) \\
&= 2(2k)^{-1}(s_p \circ \rho_\Phi)(2kf) \\
&= \frac{1}{k}((s_p \circ \rho_\Phi)\left(\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}f\right)) \\
&= \frac{k_1+k_2}{k_1k_2}(s_p \circ \rho_\Phi)\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}k_1f + \frac{k_1}{k_1+k_2}k_2f\right) \\
&\leq \frac{k_1+k_2}{k_1k_2} \frac{k_2}{k_1+k_2}(s_p \circ \rho_\Phi)(k_1f) + \frac{k_1+k_2}{k_1k_2} \frac{k_1}{k_1+k_2}(s_p \circ \rho_\Phi)(k_2f) \\
&= k_1^{-1}(s_p \circ \rho_\Phi(k_1f)) + k_2^{-1}(s_p \circ \rho_\Phi)(k_2f) \\
&= A_p(f, k_1) + A_p(f, k_2) \\
&= 2\|f\|_{\Phi,p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\rho_\Phi(kf) \geq \sigma_p$ ve s_p fonksiyonunun $[\sigma_p, \infty)$ aralığında kesin artan olduğu kullanarak μ h.h.h $t \in \text{supp} f$ için

$$\Phi(2kf(t)) = \Phi\left(\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}f(t)\right) = \frac{k_2}{k_1+k_2}\Phi(k_1f(t)) + \frac{k_1}{k_1+k_2}\Phi(k_2f(t))$$

gerçeklendiğini, yani $2kf(t) \notin SC_\Phi$ olduğunu gösterelim. Bu ifadeyi iki duruma ayıracağız ikinci durum benzer şekilde yapılır.

Kabul edelim ki $p = \infty$ iken $\rho_\Phi(2kf) \geq 1$, $\rho_\Phi(k_2f) \geq 1$ ve $\rho_\Phi(k_1f) \geq 1$ olsun. Böylece,

$$\frac{1}{k}(s_\infty \circ \rho_\Phi)(2kf) = \frac{1}{k_1}s_\infty \circ \rho_\Phi(k_1f) + \frac{1}{k_2}s_\infty \circ \rho_\Phi(k_2f)$$

bulunur bu ifade s_∞ fonksiyonunun tanımı kullanılarak yeniden düzenlenirse,

$$\frac{1}{k} \max\{1, \rho_\Phi(2kf)\} = \frac{1}{k_1} \max\{1, \rho_\Phi(k_1f)\} + \frac{1}{k_2} \max\{1, \rho_\Phi(k_2f)\}$$

eşitliği elde edilir. O halde $k^{-1}\rho_\Phi(2kf) = k_1^{-1}\rho_\Phi(k_1f) + k_2^{-1}\rho_\Phi(k_2f)$ olur. Böylece, μ

h.h.h $t \in \text{supp } f$ için

$$\Phi\left(\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}f(t)\right) = \frac{k_2}{k_1+k_2}\Phi(k_1f(t)) + \frac{k_1}{k_1+k_2}\Phi(k_2f(t))$$

bulunur. Dolayısıyla, μ -h.h.h $t \in \text{supp } f$ için $kf(t) \notin SC_\Phi$ gerçekleşir.

□

Önerme 2.5.30 Eğer $p = \infty$ ve $k_\infty^*(f) < k_\infty^{**}(f)$ ise Φ Orlicz fonksiyonu $[0, k_\infty^{**}(f)||f||_\infty)$ aralığında doğrusaldır.

İspat. Kabulümüz gereği

$$k_\infty^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_\infty(kx) \geq 0\} < k < \sup\{k \geq 0 : \alpha_\infty(kx) \leq 0\} = k_\infty^{**}(f)$$

olacak şekilde bir k sayısı vardır. Böylece, $\alpha_\infty(kf) = 0$ bulunur. Dolayısıyla, $\rho_\Phi(kf) > 1$ olduğundan $\rho_\Psi(\varphi(k|f|)) = 0$ olur. Diğer bir deyişle,

$$\int_G \Psi(\varphi(k|f|)) = 0$$

olduğundan her $0 \leq k \leq k_\infty^{**}(f)$ ve μ h.h.h $t \in G$ için $\Psi(\varphi(k|f|)) = 0$ olur. Dolayısıyla, Önerme 2.2.14 ifadesinden Φ fonksiyonunun $[0, k_\infty^{**}(f)||f||_\infty)$ aralığında doğrusal bir fonksiyon olduğu elde edilir.

□

2.6 K_p^* -SONLULUK, K_p^{**} -SONLULUK VE K_p -TEKLİK

Bu bölümde, Orlicz uzayında tanımlı Orlicz normu için Rao Ren tarafından [20] kaynağında ve Luxemburg normu için S.Chen tarafından [1] kaynağında çalışılan $k^*(\cdot)$ ve $k^{**}(\cdot)$ fonksiyonları $1 \leq p \leq \infty$ için $k_p^*(\cdot)$ ve $k_p^{**}(\cdot)$ fonksiyonlarına genelleştirilecektir. Daha sonra sonluluk durumlarını tanımlayarak gerek ve yeter koşullar verilecektir. Ardından, k_p -tek tanımı verilerek p -Amemiya normunun elde edilebilir olduğu $k \geq 0$ sayısının tek türlü olması için gerek ve yeter koşullar verilecektir. Bu bölümde verilen tanım ve teoremler için [5] makalesinden yararlanılmıştır.

Tanım 2.6.1 Bir Φ Orlicz fonksiyonu $1 \leq p \leq \infty$ için her $f \in L_{\rho_\Phi} \setminus \{0\}$ için

$$0 < k_p^*(f) < +\infty$$

koşulunu sağlıyorsa Φ fonksiyonuna k_p^* -sonlu fonksiyon denir. Denk olarak, Φ Orlicz fonksiyonu k_p^* -sonlu olması için gerek ve yeterli koşul her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için

$$K_p(f) = \{0 < k < \infty : k_p^*(f) \leq k \leq k_p^{**}(f)\} \neq \emptyset$$

olmasıdır.

Teorem 2.6.2

1. Bir $1 \leq p \leq \infty$ için $c_\Phi < \infty$ koşulunu sağlayan her Φ Orlicz fonksiyonu k_p^* -sonludur.
2. Eğer $c_\Phi = +\infty$ ve $p = 1$ ise,
 - (a) her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için $0 < \|f\|_{\Phi,1}^{-1} < k_1^*(f)$ geçerlidir.
 - (b) Φ Orlicz fonksiyonu k_1^* -sonlu olması için gerek ve yeterli koşul Φ Orlicz fonksiyonunun orijinden geçen eğik asimptotu olmamasıdır.
3. Eğer $c_\Phi = +\infty$ ve $1 < p < \infty$ ise,
 - (a) her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için $0 < \|f\|_{\Phi,p}^{-1} < k_p^*(f)$ geçerlidir.
 - (b) Φ Orlicz fonksiyonu k_p^* -sonlu olması için gerek ve yeterli koşul Φ Orlicz fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında doğrusal bir fonksiyon olmamasıdır.
4. Eğer $c_\Phi = +\infty$ ve $p = \infty$ ise,
 - (a) her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için $0 < \|f\|_{\Phi,\infty}^{-1} = k_\infty^*(f)$ olur.
 - (b) Her Φ Orlicz fonksiyonu k_∞^* -sonludur.

İspat.

1. Her $f \in L_{\rho_\Phi}(G)$ için Önerme 2.5.26 gereğince $1 \leq p \leq \infty$ için

$$k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f) \leq \theta^{-1}(f)$$

gerçeklenir. Ayrıca Önerme 2.5.15 kullanılarak $\theta^{-1}(f) < +\infty$ elde edilir. Böylece,

$$k_p^*(f) < +\infty$$

bulunur. Dolayısıyla Φ fonksiyonu k_p^* -sonludur.

2.(a) ve 3.(a) ifadelerini ispatlayalım. Kabul edelim ki, $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_{\rho_{\Phi}} \setminus \{0\}$ için $k_p^*(f) \leq \|f\|_{\Phi,p}^{-1}$ olsun. O halde Teorem 2.5.24 kullanılarak

$$\|f\|_{\Phi,p} = A_p(f, \|f\|_{\Phi,p}^{-1}) = \|f\|_{\Phi,p} (1 + \rho_{\Phi}^p(\|f\|_{\Phi,p}^{-1} f))^{\frac{1}{p}} > \|f\|_{\Phi,p}$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla,

$$0 < \|f\|_{\Phi,p}^{-1} < k_p^*(f)$$

olduğu bulunur. O halde $p = 1$ için

$$0 < \|f\|_{\Phi,1}^{-1} < k_1^*(f)$$

elde edilir. Dolayısıyla teoremin 2.(a) ifadesi geçerlidir. Benzer şekilde $1 < p < \infty$ için

$$0 < \|f\|_{\Phi,p}^{-1} < k_p^*(f)$$

gerçeklenir. Öyleyse 3.(a) elde edilir.

2.b. Eğer Φ Orlicz fonksiyonunun orijinden geçen eğik asimptotu yok ise Önerme 2.2.14 uygulanırsa

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) = +\infty \quad (2.13)$$

bulunur. Böylece, $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) = +\infty$ olur. O halde

$$k_1^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \geq 1\} < +\infty$$

olur. Aksi halde, $k_1^*(f) = +\infty$ ise, $\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|f|)) \geq 1$ olacak şekilde bir $k_0 > 0$ sayısı yoktur. Böylece, her $k \geq 0$ için $\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) < 1$ olduğundan (2.13) ifadesiyle çelişir. Dolayısıyla,

$k_1^*(f) < +\infty$ bulunur. O halde Φ Orlicz fonksiyonu k_1^* -sonludur.

Tersine kabul edelim ki, Φ Orlicz fonksiyonu k_1^* -sonlu olsun. Varsayalım ki, Φ fonksiyonunun orijinden geçen eğik asimptotu var olsun. O halde, Önerme 2.2.14 gereğince

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) < +\infty$$

elde edilir. Böylece $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) = c$ olarak alınırsa, μ ölçüsü atomsuz olduğundan öyle bir ölçülebilir A kümesi bulunabilir ki,

$$0 < \mu(A) < +\infty \text{ ve } c\mu(A) < 1$$

olur. Ayrıca, $f = \chi_A$ şeklinde alınırsa, her $k > 0$ için,

$$\begin{aligned} \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) &= \int_G \Psi(\varphi(k|f(t)|)) d\mu \\ &= \int_A \Psi(\varphi(k)) d\mu \\ &= \Psi(\varphi(k))\mu(A) \\ &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u))\mu(A) \\ &= c\mu(A) < 1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

gerçeklenir. Böylece,

$$\begin{aligned} k_1^*(f) &= \inf\{k \geq 0 : \alpha_1(kf) \geq 0\} \\ &= \inf\{k \geq 0 : \rho_{\Phi}^{(1-1)}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \geq 1\} \\ &= \inf\{k \geq 0 : \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \geq 1\} \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat (2.14) ifadesinden, $\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) < 1$ olduğu kullanılarak,

$$k_1^*(f) = \inf \emptyset = +\infty$$

bulunur. Bu ifade Φ Orlicz fonksiyonunun k_1^* -sonlu olması ile çelişir. O halde, Φ orlicz fonksiyonu orijinden geçen eğik asimptota sahip değildir.

3.b. Kabul edelim ki $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ için Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olmasın. O halde Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olmadığı için Önerme 2.2.14 gereğince, bir $k_0 > 0$ vardır ve $\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|f|)) > 0$ olur. Böylece

$$\rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$$

bulunur. Dolayısıyla $k_p^*(f) < +\infty$ olur. Çünkü,

$$k_p^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \geq 1\} = +\infty$$

olsaydı. $\rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \geq 1$ olacak şekilde bir $k_0 \geq 0$ sayısı var olmazdı. Dolayısıyla her $k \geq 0$ için $\rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) < 1$ olur. Ancak, bu ise

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) = +\infty$$

ile çelişir. O halde, $k_p^*(f) < +\infty$ olur. Dolayısıyla, Φ Orlicz fonksiyonu k_p^* -sonludur.

Tersine kabul edelim ki Φ Orlicz fonksiyonu k_p^* -sonlu olsun. Varsayalım ki Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olsun. O halde, bir $c > 0$ vardır ve her $u \in [0, \infty)$ için $\Phi(u) = cu$ olur. Böylece, Önerme 2.2.12 kullanılırsa her $u \geq 0$ için,

$$\Psi(\varphi(u)) = \Psi(c) = 0$$

bulunur ve böylece her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ ve $k > 0$ için

$$\rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) = 0 < 1$$

gerçeklenir. O halde,

$$k_p^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) - 1 \geq 1\} = \inf\{k \geq 0 : -1 \geq 1\} = \inf \emptyset = +\infty$$

elde edilir. Bu ise Φ Orlicz fonksiyonunun k_p^* -sonlu olması ile çelişir. Böylece Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal değildir.

4.a. Kabul edelim ki, $p = \infty$ ve $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ olsun. Luxemburg normunun tanımı

gereği, $\rho_\Phi(\|f\|_{\Phi,\infty}^{-1}) \leq 1$ olduğu için, $\alpha_\infty(\|f\|_{\Phi,\infty}^{-1}) = -1$ bulunur. Böylece,

$$\|f\|_{\Phi,\infty}^{-1} \leq k_\infty^*(f)$$

olur. Varsayalım ki bir $k > 0$ için $\|f\|_{\Phi,\infty}^{-1} < k < k_\infty^*(f)$ olsun. Böylece $\alpha_\infty(kf) < 0$ olur. O halde, $\rho_\Phi(kf) \leq 1$ olduğundan Luxemburg normunun tanımından, $k < \|f\|_{\Phi}^{-1}$ çelişkisi elde edilir. O halde,

$$0 < \|f\|_{\Phi,\infty}^{-1} = k_\infty^*(f)$$

ifadesi elde edilir

4.b. Eğer $p = \infty$ ise Φ Orlicz fonksiyonu için 4.(a) gereğince,

$$0 < k_\infty^*(f) = \|f\|_{\Phi,\infty}^{-1} < +\infty$$

gerçeklenir. Bu ise Φ fonksiyonunun k_∞^* -sonlu olduğunu gösterir.

□

Tanım 2.6.3 Bir Φ Orlicz fonksiyonu $1 \leq p \leq \infty$ ve her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için

$$0 < k_p^{**}(f) < +\infty$$

koşulunu sağlıyorsa Φ fonksiyonuna k_p^{**} -sonlu fonksiyon denir. Denk olarak Φ Orlicz fonksiyonunun k_p^{**} -sonlu olması için gerek ve yeterli koşul her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için

$$K_p(f) = \{0 < k < \infty : k_p^*(f) \leq k \leq k_p^{**}(f)\} \neq \emptyset$$

olmasıdır.

Teorem 2.6.4

1. $1 \leq p \leq \infty$ için $c_\Phi < \infty$ koşulunu sağlayan her Φ Orlicz fonksiyonu k_p^{**} -sonludur.
2. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise Φ Orlicz fonksiyonunun k_p^{**} -sonlu olması için gerek ve yeter koşul k_p^* -sonlu olmasıdır.
3. Eğer $p = \infty$ ise Φ Orlicz fonksiyonunun k_∞^{**} -sonlu olması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olmasıdır.

İspat.

1. Her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ için Önerme 2.5.26 gereğince $1 \leq p \leq \infty$ için

$$0 < k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f) \leq \theta^{-1}(f)$$

gerçeklenir. Ayrıca Önerme 2.5.15 kullanılırsa, $\theta^{-1}(f) < +\infty$ elde edilir. Böylece,

$$k_p^{**}(f) < +\infty$$

bulunur. Dolayısıyla Φ fonksiyonu k_p^{**} -sonludur.

2. Kabul edelim ki, Φ Orlicz fonksiyonu k_p^{**} -sonlu olsun. O halde her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ için, Önerme 2.5.26 ifadesinden,

$$0 < k_p^*(f) \leq k_p^{**}(f) < +\infty$$

olur. Böylece Φ Orlicz fonksiyonu k_p^* -sonludur.

Tersine Φ Orlicz fonksiyonunun k_p^* -sonlu olduğunu kabul edelim.

Durum 1: Eğer, $1 < p < \infty$ için, Φ Orlicz fonksiyonu k_p^* -sonlu ise, Teorem 2.6.2 gereğince, Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal değildir. Böylece, Önerme 2.2.14 kullanılırsa $\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|f|)) > 0$ olacak şekilde bir $k_0 > 0$ bulunur. Böylece,

$$\rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \quad (2.15)$$

gerçeklenir. Varsayalım ki $k_p^{**}(f) = +\infty$ olsun. O halde, (2.15) ifadesiyle çelişilir. Böylece, $k_p^{**}(f) < +\infty$ olmalıdır. Diğer bir deyişle Φ fonksiyonu k_p^{**} -sonludur.

Durum 2: $p = 1$ için, Φ Orlicz fonksiyonu k_p^* -sonlu ise Önerme 2.6.2 gereğince, orijinden geçen eğik asimptotu yoktur. Böylece, Önerme 2.2.14 kullanılarak,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(k|f|)) = +\infty$$

bulunur. Böylece, $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) = +\infty$ olur. Benzer şekilde, bir $k_0 > 0$ sayısı vardır, öyle

ki

$$\rho_{\Phi}^{p-1}(kf)\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \quad (2.16)$$

sağlanır. Eğer $k_p^{**}(f) = +\infty$ ise (2.16) ifadesiyle çelişilir. Böylece,

$$k_p^{**}(f) < +\infty$$

olmalıdır. Diğer bir deyişle Φ fonksiyonu k_p^{**} -sonludur.

Durum 3: Kabul edelim ki $p = \infty$ için Φ Orlicz fonksiyonu k_{∞}^{**} -sonlu olsun. Varsayalım ki, Φ Orlicz fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olsun. O halde Önerme 2.2.14 kullanılarak aşağıdaki iki durum incelenir.

i) Eğer $\rho_{\Phi}(kf) \leq 1$ ise,

$$k_{\infty}^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : -1 \leq 0\} = +\infty$$

olur. Fakat bu ise Φ fonksiyonunun k_{∞}^{**} -sonlu olmasıyla çelişir.

ii) Eğer $\rho_{\Phi}(kf) > 1$ ise

$$k_{\infty}^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : 0 \leq 0\} = +\infty$$

olur. Bu ise Φ fonksiyonunun k_{∞}^{**} -sonlu olmasıyla çelişir.

Dolayısıyla, i) ve ii) ifadelerinden Φ Orlicz fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olamaz.

Tersine, Φ Orlicz fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olmasın. O halde Önerme 2.2.14 gereğince, bir $k_0 > 0$ vardır ve $\rho_{\Psi}(\varphi(k_0|f|)) > 0$ olur. Böylece $k_1 > k_0$ için, $\rho_{\Phi}(k_1 f) > 1$ olur. Böylece

$$\alpha_{\infty}(k_1 f) = \rho_{\Psi}(\varphi(k_1|f|)) > 0$$

ifadesi elde edilir. O halde, $k_{\infty}^{**}(f) \leq k_1 < +\infty$ gerçekleşir. Diğer bir deyişle Φ Orlicz fonksiyonu k_{∞}^{**} -sonludur.

□

Tanım 2.6.5 Bir Φ Orlicz fonksiyonu $1 \leq p \leq \infty$ ve her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için

$$0 < k_p^*(f) = k_p^{**}(f) < +\infty$$

koşulunu sağlıyorsa Φ fonksiyonuna k_p -tek fonksiyondur denir. Denk olarak Φ Orlicz fonksiyonunun k_p -tek olabilmesi için gerek ve yeterli koşul her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için $\text{card}K_p(f) = 1$ olmasıdır.

Teorem 2.6.6

1. $p = 1$ ve $a := \sup\{u \geq 0 : \Psi(\varphi(u))\mu(G) < 1\}$ olsun. O halde Φ Orlicz fonksiyonunun k_1 -tek olabilmesi için gerek ve yeterli koşul

(a) $a = c_\Phi$ veya Φ , $[a, c_\Phi)$ üzerinde kesin konveks bir fonksiyondur.

(b) Φ Orlicz fonksiyonu orijinden geçen eğik asimptota sahip değildir.

2. Eğer $1 < p < \infty$ ise Φ Orlicz fonksiyonunun k_p -tek olabilmesi için gerek ve yeterli koşul Φ fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında doğrusal bir fonksiyon olmamasıdır.

3. $p = \infty$ ve $b := \inf\{u \geq 0 : \Phi(u)\mu(G) > 1\}$ olsun. Φ Orlicz fonksiyonunun k_∞ -tek olabilmesi için gerek ve yeterli koşul Φ fonksiyonunun her $\varepsilon > 0$ için $[0, b + \varepsilon]$ aralığında doğrusal olmamasıdır.

İspat.

1. Kabul edelim ki, $p = 1$ için Φ Orlicz fonksiyonu k_1 -tek olsun. Varsayalım ki, Teoremin 1.(a) şıkkı sağlanmasın. O halde, $\varphi(u)$ fonksiyonu $c < d$ için $[c, d) \subset [a, c_\Phi)$ aralığında sabit bir fonksiyondur. Ayrıca, $c < c_\Phi$ olduğundan $\Psi(\varphi(c)) < +\infty$ bulunur. Dahası, Önerme 2.5.17 kullanılarak, $a \leq \varphi(u) < c_\Phi$ ise $\Psi(\varphi(c)) < +\infty$ ve $a \leq \varphi(u)$ için

$$a = \sup\{u \geq 0 : \Psi(\varphi(u))\mu(G) < 1\} \leq \varphi(u) \Rightarrow \Psi(\varphi(u))\mu(G) \geq 1$$

elde edilir. Ayrıca, μ atomsuz ölçü olduğundan öyle bir $E \in \Sigma$ kümesi bulunabilir ki $\Psi(\varphi(c))\mu(E) = 1$, $f = \chi_E$ ve $k \in [c, d]$ için,

$$\rho_\Psi(\varphi(k|f|)) = \int_G \Psi(\varphi(k|f|))d\mu = \Psi(\varphi(k))\mu(E) = 1$$

olur. Böylece, $k_1^*(f) \leq c < d < k_1^{**}(f)$ bulunur. Bu ise k_1 -tek olması ile çelişir. Dolayısıyla $a = c_\Phi$ olmak zorundadır.

Tersine, Φ , $[a, c_\Phi)$ üzerinde kesin konveks olsun. O halde $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ ve $p = 1$ için $\rho_\Phi(kf) \geq 0 = \sigma_1$ olduğundan Önerme 2.5.29 gereğince, $k_1^*(f) = k_1^{**}(f)$ bulunur. Böylece, Φ Orlicz fonksiyonu k_1 -tektir.

1.(b). Kabul edelim ki Φ Orlicz fonksiyonu orijinden geçen asimptota sahip olmasın. O halde Teorem 2.6.2 gereğince, Φ fonksiyonu k_1^* -sonludur. Ayrıca Teorem 2.6.4 gereğince, k_1^{**} -sonludur. Dolayısıyla, her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için, $k_1^*(f) = k_1^{**}(f)$ olduğunu gözlemleyelim.

Varsayalım ki, $k_1^*(f) < k < k_1^{**}(f)$ olsun. Diğer bir deyişle,

$$k_1^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_1(kf) \geq 0\} < k < \sup\{k \geq 0 : \alpha_1(kf) \leq 0\} = k_1^{**}(f)$$

olacak şekilde bir k sayısı vardır. O halde, $\alpha_1(kf) = 0$ bulunur. Buradan,

$$\rho_\Phi^{(1-1)}(kf) \rho_\Psi(\varphi(k|f|)) = 1 \Rightarrow \rho_\Psi(\varphi(k|f|)) = 1$$

elde edilir. Böylece, $p = 1$ olduğu için $\rho_\Phi(kf) \geq 0 = \sigma_1$ olur. Böylece Önerme 2.5.29 gereğince, μ -h.h.h $t \in \text{supp } f$ için $kf(t) \notin SC_\Phi$ dir. O halde, Teoremin 1.(a) ifadesini kullanarak $a > 0$, $\mu(G) < \infty$ ve μ -h.h.h $t \in \text{supp } f$ için $k|f(t)| < a$ olur. Dolayısıyla, μ h.h.h $t \in \text{supp } f$ için $\Psi(\varphi(k|f(t)|)) < \mu^{-1}(G)$ olur. Böylece,

$$\rho_\Psi(\varphi(k|f|)) = \int_G \Psi(\varphi(k|f|)) < \int_G \mu^{-1}(G) = \mu^{-1}(G)\mu(G) = 1$$

sağlanır. O halde, $\rho_\Psi(\varphi(k|f|)) < 1$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, Φ Orlicz fonksiyonu k_1 -tektir.

Tersine, kabul edelim ki Φ Orlicz fonksiyonu k_1 -tek olsun. O halde Φ Orlicz fonksiyonunun orijinden geçen asimptotunun olmadığını gösterebiliriz. Kabulümüz gereği Φ k_1 -tek ise, Φ fonksiyonu k_1 tekliliğin tanımı gereği hem k_1^* -sonludur hem de k_1^{**} -sonludur. O halde, Teorem 2.6.2 gereğince, Φ Orlicz fonksiyonunun orijinden geçen asimptotu yoktur.

2. Kabul edelim ki, $1 < p < \infty$ için Φ k_p -tek olsun. O halde Φ fonksiyonunun $[0, \infty)$

aralığında doğrusal olmadığını gösterelim.

Kabulümüz gereği Φ , k_p -tek olduğundan k_p -tekliğin tanımı gereği k_p^* -sonludur. Ayrıca, Teorem 2.6.2 gereğince, Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal değildir.

Tersine, kabul edelim ki Φ fonksiyonu k_p^* -sonlu olsun. O halde Φ k_p -tek olduğunu gösterelim. Kabulümüz gereği Φ k_p^* -sonlu olduğundan Teorem 2.6.4 gereğince, k_p^{**} -sonludur. O halde, her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için varsayalım ki ,

$$0 < k_p^*(f) < k_1 < k_2 < k_p^{**}(f) < +\infty$$

olacak şekilde $0 < k_1 < k_2 < +\infty$ var olsun. Diğer bir deyişle,

$$k_p^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \geq 0\} < k_1 < k_2 < \sup\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \leq 0\} = k_p^{**}(f)$$

olacak şekilde $0 < k_1 < k_2 < +\infty$ elde edilir. Böylece, $i = 1, 2$ için $\alpha_p(k_i f) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\alpha_p(k_i f) = \rho_\Phi^{p-1}(k_i f) \rho_\Psi(\varphi(k_i |f|)) = 1$$

elde edilir. Böylece, $i = 1, 2$ için,

$$0 < \rho_\Phi(k_i f) < +\infty \text{ ve } 0 < \rho_\Psi(\varphi(k_i |f|)) < +\infty$$

bulunur. Ayrıca, $u \mapsto \Phi(u)$ fonksiyonu $\{u > 0 : 0 < \Phi(u) < +\infty\}$ aralığında kesin artan ve $u \mapsto \Psi(\varphi(u))$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artan olduğundan,

$$0 = \alpha_p(k_1 f) = \rho_\Phi^{p-1}(k_1 f) \rho_\Psi(\varphi(k_1 |f|)) - 1 < \rho_\Phi^{p-1}(k_2 f) \rho_\Psi(\varphi(k_2 |f|)) - 1 = \alpha_\Phi(k_2 f) = 0$$

çelişkisi elde edilir. Böylece $k_p^*(f) = k_p^{**}(f)$ olur. O halde, Φ Orlicz fonksiyonu k_p -tekdir.

3. Kabul edelim ki, $p = \infty$ ve $b := \inf\{u \geq 0 : \Phi(u)\mu(G) > 1\}$ iken Φ fonksiyonu $[0, b + \varepsilon]$ aralığında doğrusal olmasın. O halde, $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ ve $v = k_\infty^{**}(f) \|f\|_\infty$ olmak üzere varsayalım ki

$$k_\infty^*(f) < k < k_\infty^{**}(f)$$

olacak şekilde $k > 0$ sayısı var olsun. O halde $\alpha_\infty(kf) = 0$ olur. Böylece μ h.h.h $t \in G$ için

$\Psi(\varphi(k|f(t)|)) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $0 \leq u < v$ için,

$$\rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) = 0$$

sağlanır. Teorem 2.6.4 ve Önerme 2.2.14 den Φ fonksiyonu $[0, v)$ aralığında doğrusaldır. Böylece $v \leq b$ bulunur. Dolayısıyla $\Phi(v)\mu(G) \leq 1$ olduğu elde edilir.

Varsayalım ki, $\rho_{\Phi}(kf) > 1$ olsun. O halde,

$$1 < \rho_{\Phi}(kf) = \int_G \Phi(kf(t))d\mu \leq \int_G \Phi(v)d\mu = \Phi(v)\mu(G) \leq 1$$

çelişkisi elde edilir. Böylece, $k_{\infty}^*(f) = k_{\infty}^{**}(f)$ olur ki buradan Φ fonksiyonu k_{∞} -tekdir.

Tersine, kabul edelim ki k_{∞} -tek olsun. O halde Φ fonksiyonunun her $\varepsilon > 0$ için $[0, b + \varepsilon]$ aralığında doğrusal olmadığını gösterelim.

Varsayalım ki Φ Orlicz fonksiyonu her $\varepsilon > 0$ için, $[0, b + \varepsilon]$ aralığında doğrusal olsun. O halde, $b \leq b + \varepsilon$ ise,

$$\inf\{u \geq 0 : \Phi(u)\mu(G) > 1\} \leq b + \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $\Phi(b + \varepsilon)\mu(G) > 1$ bulunur. Ayrıca, $0 < u < b + \varepsilon$ için öyle bir ölçülebilir E kümesi alalım ki $f = u\chi_E$ ve $\rho_{\Phi}(f) > 1$ olsun. Böylece,

$$k_{\infty}^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) \geq 0\} = 0 \leq 1$$

olur. Buradan $0 < uk < (b + \varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} \rho_{\Psi}(\varphi(k|f|)) &= \int_G \Psi(\varphi(k|f(t)|))d\mu \\ &\leq \int_G \Psi(\varphi(b + \varepsilon))d\mu \\ &= \Psi(\varphi(b + \varepsilon))\mu(E) = 0 \end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde, $k_{\infty}^*(f) \leq 1 < (b + \varepsilon)u^{-1} \leq k_{\infty}^{**}(f)$ elde edilir. Bu ise Φ fonksiyonunun k_{∞} - tek olmasıyla çelişir. Dolayısıyla, Φ fonksiyonu her $\varepsilon > 0$ için $[0, b + \varepsilon]$ aralığında doğrusal değildir.

□

Sonuç 2.6.7 Eğer Φ Orlicz fonksiyonu $(-c_\Phi, c_\Phi)$ aralığında kesin konveks ise $1 < p \leq \infty$ için k_p -tekdir. Dahası, $c_\Phi = \infty$ ve Φ Orlicz fonksiyonu orijinden geçen eğik asimptota sahip ise Φ Orlicz fonksiyonu her $1 \leq p \leq \infty$ için k_p -tek olur

2.7 UÇ NOKTALAR

Orlicz uzaylarında Orlicz normu kullanılarak uç noktalar H. Hudzik ve M. Wisla tarafından çalışılmıştır [9]. 1996 yılında S. Chen uç noktaları Orlicz ve Luxemburg normu kullanarak ele almıştır [1]. Yine, Y. Cui, H. Hudzik, M. Nowak, R. Pluciennik tarafından uç noktalar dizisel Orlicz uzaylarına taşınmıştır [6]. Ardından, Orlicz uzaylarında Orlicz ve Luxemburg normu ile verilen bu geometrik kavramlar p -Amemiya normu kullanılarak Y. Cui, L. Duan, H. Hudzik, M. Wisla tarafından [5] makalesinde çalışılmıştır. Bu doğrultuda [5] makalesinde elde edilen sonuçlar bu bölümde ayrıntılı bir şekilde ele alınarak, diğer çalışmalarla karşılaştırma yapılacaktır.

Tanım 2.7.1 (Uç Nokta) $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayının kapalı birim yuvarı ve yuvar yüzeyini sırasıyla $B(L_{\rho_\Phi}(G))$ ve $S(L_{\rho_\Phi}(G))$ ile gösterelim. Eğer $f \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ fonksiyonu, her $g, h \in B(L_{\rho_\Phi}(G))$ için $2f = g + h$ iken $g = h$ oluyorsa bu f fonksiyonuna $B(L_{\rho_\Phi}(G))$ kapalı birim yuvarın uç noktası denir. $B(L_{\rho_\Phi}(G))$ kapalı birim yuvarının tüm uç noktalarının kümesi $ExtB(L_{\rho_\Phi}(G))$ ile gösterilir.

Tanım 2.7.2 Orlicz uzayının boş olmayan bir alt kümesi için

$$A_* = \{f \in A : k_p^*(f) < +\infty\} \text{ ve } A_{**} = \{f \in A : k_p^{**}(f) < +\infty\}$$

şeklinde tanımlansın.

Önerme 2.7.3 Yukarıdaki gibi tanımlanan A_* ve A_{**} kümeleri için

$$A_{**} \subset A_* \subset A$$

sağlanır.

İspat. İlk olarak A_* kümesinin tanımından $A_* = \{f \in A : k_p^*(f) < +\infty\} \subset A$ elde edilir. Şimdi $A_{**} \subset A_*$ olduğunu gözlemleyelim. Bir $f \in A_{**}$ alalım. Böylece, $f \in L_{\rho_\Phi}(G)$ için

$k_p^{**}(f) < +\infty$ olur. Ayrıca, Önerme 2.5.5 gereğince, $k_p^*(f) < +\infty$ bulunur. Böylece

$$A_{**} \subset A_* \subset A$$

elde edilir.

□

Gözlem 2.7.4 Eğer Φ Orlicz fonksiyonu k_p^* -sonlu ise her $A \subset L_{\rho_\Phi}(G)$ için $A_{**} = A_* = A$ olur.

Önerme 2.7.5 Her $1 \leq p \leq \infty$ için,

1. $ExtB(L_{\rho_\Phi}(G)) \subset S_*(L_{\rho_\Phi}(G))$,
2. $S(L_{\rho_\Phi}(G)) \cap conv(B(L_{\rho_\Phi}(G)) \setminus B_{**}(L_{\rho_\Phi}(G))) \subset S(L_{\rho_\Phi}(G)) \setminus S_{**}(L_{\rho_\Phi}(G))$,
3. Eğer $f \in B(L_{\rho_\Phi}(G))$ ve $\mu(\{t \in G : |f(t)| = c_\Phi\}) > 0$ ise

$$f \in S(L_{\rho_\Phi}(G)), k_p^*(f) = k_p^{**}(f) = 1 \text{ ve } \rho_\Phi(f) \leq \sigma_p$$

olur.

4. Eğer $p = \infty$ iken $\rho_\Phi(f) = 1$ ve $\mu(\{t \in G : f(t) \in SC_\Phi\}) > 0$ ise,

$$f \in S(L_{\rho_\Phi}(G)) \text{ ve } k_\infty^*(f) = k_\infty^{**}(f) = 1$$

olur.

İspat. 1. İspatı üç duruma ayıracağız.

Durum 1: Kabul edelim ki $p = \infty$ ve $f \in ExtB(L_{\rho_\Phi}(G))$ olsun. O halde, $f \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ olur.

Ayrıca, Teorem 2.6.2 nedeniyle her Φ Orlicz fonksiyonu k_∞^* -sonlu olduğundan her $f \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ için $k_\infty^*(f) < +\infty$ bulunur. Dolayısıyla $f \in S_*(L_{\rho_\Phi}(G))$ elde edilir.

Durum 2: $1 < p < \infty$ olsun. Eğer Φ Orlicz fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal değil ise, Teorem 2.6.2 gereğince, Φ Orlicz fonksiyonu k_p^* -sonludur. Dolayısıyla,

$$ExtB(L_{\rho_\Phi}(G)) \subset S_*(L_{\rho_\Phi}(G))$$

olur. Eğer Φ Orlicz fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal ise Önerme 2.4.11 gereğince, $L_{\rho_{\Phi}}(G)$, $L^1(G)$ uzayına lineer izometriktir. Böylece $L^1(G)$ uzayının uç noktalar kümesi boş küme olduğu kullanılarak

$$ExtB(L_{\rho_{\Phi}}(G)) = ExtB(L^1(G)) = \emptyset$$

bulunur. O halde, $ExtB(L_{\rho_{\Phi}}(G)) \subset S_*(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ elde edilir.

Durum 3 : $p = 1$ ve $f \in ExtB(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ olsun. O halde $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için $k_1^*(f) < +\infty$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $k_1^*(f) = +\infty$ olsun. Teorem 2.5.24 kullanılarak

$$\|f\|_{\Phi,1} = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1}(1 + \rho_{\Phi}(kf))$$

gerçeklenir. Ayrıca, $a, b > 0$ sayıları için

$$A := \{t \in G : a \leq f(t) \leq b\}$$

kümesini tanımlayalım. Burada, A kümesinin $\mu(E) = \mu(F)$ olacak şekilde sonlu ve pozitif ölçüye sahip olan ayrık $E, F \in \Sigma$ alt kümeleri vardır. Kabulümüzden Φ Orlicz fonksiyonu k_1^* -sonlu değildir. Böylece Teorem 2.6.2 kullanılarak

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) < +\infty$$

elde edilir. Yine, Ψ sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$c = \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) < +\infty \tag{2.17}$$

olur. Böylece, (2.17) ifadesinden bir $u_0 > 0$ ve $d \in \mathbb{R}$ sayıları bulunabilir ve her $u > u_0$ için

$$cu + d \leq \Phi(u) \leq (c + \varepsilon)u + d$$

olur. Ayrıca $0 < v < a$ olmak üzere,

$$(g(t), h(t)) := \begin{cases} (f(t), f(t)) & , \quad t \in G \setminus (E \cup F) \\ (f(t) - v, f(t) + v) & , \quad t \in E \\ (f(t) + v, f(t) - v) & , \quad t \in F \end{cases} \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlayalım. G üzerinde $g \neq h$ ve $g + h = 2f$ olduğu bulunur. Ayrıca $k > u_0(a - v)^{-1}$ için,

$$\begin{aligned} \|g\|_{\Phi,1} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} (1 + \rho_{\Phi}(kg)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \left(1 + \rho_{\Phi}(kf \chi_{G \setminus (E \cup F)}) + \rho_{\Phi}(k(f - v) \chi_E) + \rho_{\Phi}(k(f + v) \chi_F) \right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \left(1 + \int_{G \setminus E \cup F} \Phi(kf(t)) d\mu + \int_{E \cup F} ((c + \varepsilon)kf(t) + d) d\mu \right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \left(1 + \int_{G \setminus E \cup F} \Phi(kf(t)) d\mu + \int_{E \cup F} (ckf(t) + d) d\mu + \int_{E \cup F} \varepsilon kf(t) d\mu \right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \left(1 + \int_{G \setminus E \cup F} \Phi(kf(t)) d\mu + \int_{E \cup F} \Phi(kf(t)) d\mu \right) + k^{-1} \int_{E \cup F} \varepsilon kf(t) d\mu \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \left(1 + \int_G \Phi(kf(t)) d\mu \right) + \int_{E \cup F} \varepsilon f(t) d\mu \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \left(1 + \rho_{\Phi}(kf) \right) + \int_{E \cup F} \varepsilon b d\mu \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \left(1 + \rho_{\Phi}(kf) \right) + 2\varepsilon \mu(E) \\ &= \|f\|_{\Phi,1} + 2\varepsilon b \mu(E) \\ &= 1 + 2\varepsilon b \mu(E) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\varepsilon \rightarrow 0$ için $\|g\|_{\Phi,1} \leq 1$ ve benzer şekilde $\|h\|_{\Phi,1} \leq 1$ bulunur. Buradan, $g, h \in B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ olur. Ayrıca $g \neq h$ ve $g+h=2f$ olduğundan f fonksiyonu $B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ kapalı birim yuvarının bir uç noktası değildir. Ancak, bu ifade $f \in \text{Ext}B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla, $k_1^*(f) < +\infty$ bulunur. Böylece,

$$\text{Ext}B(L_{\rho_{\Phi}}(G)) \subset S_*(L_{\rho_{\Phi}}(G))$$

elde edilir.

2. Bir $f \in S(L_{\rho_{\Phi}}(G)) \cap \text{conv}(B(L_{\rho_{\Phi}}(G)) \setminus B_{**}(L_{\rho_{\Phi}}(G)))$ alalım. O halde, $0 \leq a \leq 1$ için $f = ag + (1-a)h$ olur ve $\|f\|_{\Phi,p} = 1$, $g, h \in B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ için $g, h \notin B_{**}(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ bulunur. Diğer bir deyişle,

$$k_p^{**}(h) = +\infty \text{ ve } k_p^{**}(g) = +\infty \quad (2.19)$$

bulunur. Her $k \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \rho_{\Phi}(kf) &= \int_G \Phi(kf(t)) d\mu \\ &= \int_G \Phi(k(ag(t) + (1-a)h(t))) d\mu \\ &\leq a \int_G \Phi(kg(t)) d\mu + (1-a) \int_G \Phi(kh(t)) d\mu \\ &= a\rho_{\Phi}(kg) + (1-a)\rho_{\Phi}(kh) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (2.19) ifadesinden $\rho_{\Phi}(kg)$ ve $\rho_{\Phi}(kh)$ fonksiyonlarının sonlu olur. Bunu gösterelim.

Durum 1 : Eğer $p = 1$ ve $k_1^{**}(h) = k_1^{**}(g) = +\infty$ ise,

$$\text{her } k \geq 0 \text{ için } \alpha_1(kh) \leq 0 \text{ ve } \alpha_1(kg) \leq 0$$

olur. Böylece,

$$\alpha_1(kh) = \rho_{\Phi}^{(1-1)}(kh) \rho_{\Psi}(\varphi(k|h|)) \leq 1 \text{ ve } \alpha_1(kg) = \rho_{\Phi}^{(1-1)}(kg) \rho_{\Psi}(\varphi(k|g|)) \leq 1$$

elde edilir. Buradan, $\rho_{\Psi}(\varphi(k|h|)) \leq 1$ ve $\rho_{\Psi}(\varphi(k|g|)) \leq 1$ bulunur. Buradan, $\rho_{\Phi}(kh) < +\infty$ ve $\rho_{\Phi}(kg) < +\infty$ elde edilir.

Durum 2 : Eğer $1 < p < \infty$ ve $k_p^{**}(h) = k_p^{**}(g) = +\infty$ ise

$$\text{her } k \geq 0 \text{ için } \alpha_p(kh) \leq 0 \text{ ve } \alpha_p(kg) \leq 0$$

olur. Böylece

$$\alpha_1(kh) = \rho_{\Phi}^{(p-1)}(kh) \rho_{\Psi}(\varphi(k|h|)) \leq 1 \text{ ve } \alpha_p(kg) = \rho_{\Phi}^{(p-1)}(kg) \rho_{\Psi}(\varphi(k|g|)) \leq 1$$

bulunur. O halde

$$\rho_{\Phi}(kg) < +\infty \text{ ve } \rho_{\Phi}(kh) < +\infty$$

elde edilir.

Durum 3 : Eğer $p = \infty$ ise

(a) $\rho_{\Phi}(kh) \leq 1, \rho_{\Phi}(kg) \leq 1$ alınırsa $\rho_{\Phi}(kh) < +\infty$ ve $\rho_{\Phi}(kg) < +\infty$ elde edilir.

(b) Eğer $\rho_{\Phi}(kg) > 1$ ve $\rho_{\Phi}(kh) > 1$ olsun. Ayrıca, $k_{\infty}^{**}(g) = k_{\infty}^{**}(h) = +\infty$ olduğundan her $k \geq 0$ için $\alpha_{\infty}(kg) \leq 0$ ve $\alpha_{\infty}(kh) \leq 0$ eşitsizlikleri elde edilir. Buradan, her $k \geq 0$ için

$$\alpha_{\infty}(kg) = \rho_{\Psi}(\varphi(k|g|)) \leq 0 \text{ ve } \alpha_{\infty}(kh) = \rho_{\Psi}(\varphi(k|h|)) \leq 0$$

bulunur. Böylece, Önerme 2.5.17 gereğince, $\rho_{\Phi}(kg)$ ve $\rho_{\Phi}(kh)$ sonlu olmak zorundadır. O halde, $1 \leq p \leq +\infty$ için $\rho_{\Phi}(kg) < +\infty$ ve $\rho_{\Phi}(kh) < +\infty$ olur. Bu durumda $\theta^{-1}(f) = +\infty$ olduğunu gösterelim. Her $k \geq 0$ için $\rho_{\Phi}(kf) < +\infty$ olduğundan,

$$\theta(f) = \inf\{k > 0 : \rho_{\Phi}(k^{-1}f) < +\infty\} = 0$$

elde edilir. Böylece $\frac{1}{\theta(f)} = +\infty$ gerçekleşir. Buradan, $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ için $k_p^{**}(f) = \theta^{-1}(f)$ olduğunu gözlemleyelim. Varsayalım ki $k_p^{**}(f) < \theta^{-1}(f) = +\infty$ olsun. O halde $k_p^{**}(f) < k_0 < +\infty$ için Teorem 2.5.26 kullanılarak

$$\begin{aligned}
1 &= \|f\|_{\Phi,p} \\
&= (k_p^{**}(f))^{-1}(s_p \circ \rho_\Phi)(k_p^{**}(f)f) \\
&< k_0^{-1}(s_p \circ \rho_\Phi)(k_0 f) \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1}(s_p \circ \rho_\Phi)(kf) \\
&\leq a \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1}(s_p \circ \rho_\Phi(kg)) + (1-a) \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1}(s_p \circ \rho_\Phi)(kh) \\
&= a\|g\|_{\Phi,p} + (1-a)\|h\|_{\Phi,p} \\
&\leq a + (1-a) = 1
\end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla Önerme 2.5.26 gereğince,

$$k_p^{**}(f) = \theta^{-1}(f) = +\infty$$

olur. Dolayısıyla,

$$f \in S(L_{\rho_\Phi}(G)) \setminus S_{**}(L_{\rho_\Phi}(G))$$

bulunur.

3. Eğer $f \in B(L_{\rho_\Phi}(G))$ ve $\mu(\{t \in G : |f(t)| = c_\Phi\}) > 0$ ise her $k > 1$ için

$$(s_p \circ \rho_\Phi)(kf) = +\infty > \|f\|_{\Phi,p}$$

olur ve Teorem 2.5.24 ile çelişir, benzer şekilde her $k < 1$ için,

$$k^{-1}(s_p \circ \rho_\Phi)(kf) \geq k^{-1} > 1 \geq \|f\|_{\Phi,p}$$

bulunur ve Teorem 2.5.24 ile çelişir. Böylece, $k = 1$ için

$$1 \geq \|f\|_{\Phi,p} = (s_p \circ \rho_\Phi)(f) \geq s_p(0) = 1$$

elde edilir. Böylece $\|f\|_{\Phi,p} = 1$ olduğundan $f \in S(L_\Phi(G))$ bulunur. $\rho_\Phi(f) \leq \sigma_p$ olduğunu

gözlemleyelim.

Durum 1 : $1 \leq p < \infty$ olsun. O halde,

$$(1 + \rho_{\Phi}^p(f))^{\frac{1}{p}} = s_p(0) = 1 \Rightarrow \rho_{\Phi}(f) = 0$$

olur. Böylece, $\rho_{\Phi}(f) \leq 0 = \sigma_p$ sağlanır.

Durum 2. $p = \infty$ ise,

$$\max\{1, \rho_{\Phi}(f)\} = 1 \Rightarrow \rho_{\Phi}(f) \leq 1 = \sigma_{\infty}$$

elde edilir. Böylece her $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\rho_{\Phi}(f) \leq \sigma_p$$

bulunur. Son olarak, $f \in B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ ve $\mu(\{t \in G : |f(t)| = c_{\Phi}\}) > 0$ olduğu için $c_{\Phi} < +\infty$ olur. Böylece Teorem 2.6.4 gereğince, Φ k_p^{**} -sonlu olur. Dolayısıyla Teorem 2.6.6 kullanılarak k_p -tek olduğu elde edilir. O halde,

$$k_p^*(f) = k_p^{**}(f) = 1$$

bulunur.

4. Kabul edelim ki $p = \infty$ olsun. Eğer $\rho_{\Phi}(f) = 1$ ve $\mu(\{t \in G : f(t) \in SC_{\Phi}\}) > 0$ ise $\|f\|_{\Phi, \infty} \leq 1$ elde edilir. Böylece, her $k > 1$ için,

$$k^{-1}(s_{\infty} \circ \rho_{\Phi})(kf) \geq \rho_{\Phi}(f) = 1 \geq \|f\|_{\Phi, \infty}$$

olur ve Teorem 2.5.24 ile çelişir, benzer şekilde her $k < 1$ için,

$$k^{-1}(s_{\infty} \circ \rho_{\Phi})(kf) = k^{-1} \max\{1, \rho_{\Phi}(kf)\} \geq k^{-1} > 1 \geq \|f\|_{\Phi, \infty}$$

bulunur ve Teorem 2.5.24 ile çelişir. Böylece $k = 1$ için,

$$k_{\infty}^*(f) = k_{\infty}^{**}(f) = 1$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|f\|_{\Phi, \infty} = (s_{\infty} \circ \rho_{\Phi})(f) = 1$$

olur.

□

Sonuç 2.7.6 Her $f \in B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ için eğer $1 \leq p < \infty$ ve $\mu(\{t \in G : |f(t)| = c_{\Phi}\}) > 0$ ise,

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq u \leq c_{\Phi} \\ +\infty & , \quad u > c_{\Phi} \end{cases} \quad (2.20)$$

olur. Ayrıca p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normuna göre $L_{\rho_{\Phi}}(G)$, $L^{\infty}(G)$ uzayına izometriktir. Yani,

$$\|\cdot\|_{\Phi, p} = c_{\Phi}^{-1} \|\cdot\|_{\infty}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Eğer $1 \leq p < \infty$ için $\sigma_p = 0$ olduğundan Teorem 2.7.5 kullanılırsa

$$\rho_{\Phi}(f) \leq \sigma_p = 0 \Rightarrow \rho_{\Phi}(f) = 0$$

elde edilir. Böylece, $0 \leq u \leq c_{\Phi} < +\infty$ için $\Phi(u) = 0$ bulunur. Ayrıca, $u > c_{\Phi}$ için $\Phi(u) = +\infty$ olur. Dolayısıyla, (2.20) temsili elde edilir. Son olarak $g \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için,

$$\begin{aligned} \|g\|_{\Phi, p} &= \inf\{k^{-1} : \rho_{\Phi}(kg) = 0\} \\ &= \inf\{c_{\Phi}^{-1}k : \text{h.h.h } t \in G \text{ için } |g(t)| \leq k\} \\ &= c_{\Phi}^{-1} \|g\|_{\infty} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı $L^{\infty}(G)$ uzayına izometriktir.

□

Önerme 2.7.7 Her $f \in S_{**}(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ için $2f = (g+h)$ olacak şekilde $g, h \in B(L_{\rho_{\Phi}}(G)) \setminus \{0\}$ fonksiyonları var olsun. O halde $k_p^*(f) \leq k \leq k_p^{**}(f)$ ve μ - h.h.h $t \in G$ için $kf(t) \in SC_{\Phi}$ ise $g, h \in B_*(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ olur.

İspat. İspatı iki duruma ayıracağız.

Durum 1: Kabul edelim ki $L_{\rho_\Phi}(G)$ uzayı k_p^* -sonlu olsun. O halde,

$$k_p^*(g) < +\infty \text{ ve } k_p^*(h) < +\infty$$

bulunur. Ayrıca hipotezden, $g, h \in B(L_{\rho_\Phi}(G))$ olduğundan $g, h \in B_*(L_{\rho_\Phi}(G))$ olur.

Durum 2: Varsayalım ki $L_{\rho_\Phi}(G)$ uzayı k_p^* -sonlu olmasın. O halde $p = 1$ için Teorem 2.6.2 gereğince, Φ fonksiyonunun orijinden geçen asimptotu yoktur. Önerme 2.2.14 kullanılırsa,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) < +\infty$$

olur. Ayrıca, Önerme 2.7.5 gereğince, $k_1^{**}(g)$ veya $k_1^{**}(h)$ sonludur. Genelliği bozmaksızın $k_h \in (0, \infty)$ olsun. O halde, $k_1^* \leq k_h \leq k_1^{**}(h)$ olacak şekilde bir k_h sayısı vardır.

Kabul edelim ki $k_1^*(g) = +\infty$ olsun. Önerme 2.5.26 gereğince, $\theta(g) = 0$ olur. O halde, $0 < k_g < +\infty$ için

$$\begin{aligned} 2 &\geq \|g\|_{\Phi,1} + \|h\|_{\Phi,1} \\ &= \lim_{k_g \rightarrow +\infty} (k_g^{-1}(s_1 \circ \rho_\Phi)(k_g g) + \|h\|_{\Phi,1}) \\ &\geq \lim_{k_g \rightarrow +\infty} \frac{k_g + k_h}{k_g k_h} (s_1(\frac{k_h}{k_g + k_h} \rho_\Phi(k_g g) + \frac{k_g}{k_g + k_h} \rho_\Phi(k_h h))) \\ &\geq \lim_{k_g \rightarrow +\infty} \frac{k_g + k_h}{k_g k_h} (s_1 \circ \rho_\Phi)(\frac{k_g}{k_g + k_h} k_h g + \frac{k_g}{k_g + k_h} k_h h) \\ &\geq \frac{1}{k_h} (s_1 \circ \rho_\Phi)(k_h g + k_h h) \\ &\geq 2(2k_h)^{-1} (s_1 \circ \rho_\Phi)(2k_h f) \\ &\geq 2\|f\|_{\Phi,1} = 2 \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\|g\|_{\Phi,1} = \|h\|_{\Phi,1} = \|f\|_{\Phi,1} = 1 = (2k_h)^{-1} (s_1 \circ \rho_\Phi)(2k_h f)$$

elde edilir. Buradan, $k_1^*(f) \leq 2k_h \leq k_1^{**}(f)$ gerçeklenir. O halde,

$$\lim_{k_g \rightarrow +\infty} \frac{k_g + k_h}{k_g k_h} s_1 \left(\frac{k_h}{k_g + k_h} \rho_\Phi(k_g g) + \frac{k_g}{k_g + k_h} \rho_\Phi(k_h h) \right) = \frac{1}{k_h} s_1(\rho_\Phi(2k_h f))$$

bulunur. Ayrıca, $\rho_\Phi(2k_h f) \geq \sigma_1 = 0$ olur. Dahası, s_1 fonksiyonunun sürekliliğinden ve Teorem 2.1.10 gereğince, μ -h.h.h. $t \in G$ için

$$\lim_{k_g \rightarrow +\infty} \left(\frac{k_h}{k_g + k_h} \Phi(k_g g(t)) + \frac{k_g}{k_g + k_h} \Phi(k_h h(t)) \right) = \Phi(2k_h f(t))$$

elde edilir.

$$A := \{t \in G : |f(t)| < +\infty \text{ ve } |g(t)| \neq 0\}$$

şeklinde tanımlayalım. Yine, $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) < +\infty$ olduğu için, Ψ sürekli olduğundan, $d = \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) < +\infty$ bulunur. Ayrıca, Önerme 2.2.13 kuulanılırsa

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = d < +\infty$$

sağlanır. Böylece, her $t \in A$ için,

$$dk_h |g(t)| + \Phi(k_h \text{sign} g(t) h(t)) = \Phi(k_h |g(t)| + k_h \text{sign} g(t) h(t))$$

elde edilir. O halde, herhangi bir $t \in A$ için $2k_h f(t) \in SC_\Phi$ olur.

Burada, $u = k_h \text{sign} g(t) h(t)$, $v = k_h |g(t)|$ denilirse, $\Phi(u + v) = \Phi(u) + dv$ elde edilir. Ayrıca Φ fonksiyonunun konveksliğinden her $u \geq 0, w \geq v$ için,

$$d \geq \varphi(u + w) \geq \frac{\Phi(u + w) - \Phi(u)}{w} \geq \frac{\Phi(u + v) - \Phi(u)}{v} = d$$

bulunur. Benzer şekilde, her $0 \leq w < v$ için,

$$d \geq \varphi(u + v) \geq \frac{\Phi(u + v) - \Phi(u + w)}{v - w} \geq \frac{\Phi(u + v) - \Phi(u)}{v} = d$$

gerçeklenir. Böylece her $w \geq 0$ için $\Phi(u + w) = \Phi(u) + dw$ olur. Buradan, $u + v \notin SC_\Phi$ bulunur. Dolayısıyla, $2k_h f(t) = \mp(u + v) \notin SC_\Phi$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $g, h \in B_*(L_{\rho_\Phi}(G))$ olur. □

Teorem 2.7.8 Her bir $1 \leq p \leq \infty$ için, $f \in S(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ fonksiyonunun $B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ kapalı birim yuvarının uç noktası olabilmesi için gerek ve yeterli koşul aşağıdaki özellikleri sağlamasıdır.

1. $k_p^*(f) = k_p^{**}(f) < +\infty$,
2. Her μ h.h.h $t \in G$ için $k_p^*(f)f(t) \in SC_{\Phi}$,
3. (a) $\rho_{\Phi}(k_p^*(f)f) \geq \sigma_p$ veya
(b) μ -h.h.h $t \in G$ için $|f(t)| = c_{\Phi}$

İspat. (3) ifadesi için iki farklı inceleme yapacağız.

Durum 1: Kabul edelim ki 3(b) sağlansın. O halde (1) ve (2) şıklarının sağlandığını gözlemleyelim. Önerme 2.7.5 gereğince, $k_p^*(f) = k_p^{**}(f) = 1 < +\infty$ bulunur. Böylece (1) sağlanır. Ayrıca, kesin konvekslik tanımından kabul edelim ki (2) sağlanmasın yani $k_p^*(f)f(t) = f(t) \notin SC_{\Phi}$ olsun. Diğer bir deyişle $t \in G$ için

$$g(t), h(t) \in \mathbb{R} \text{ öyle ki } g(t) \neq h(t) \text{ iken, } 2f(t) = g(t) + h(t)$$

iken buradan,

$$\infty > 2\Phi(f(t)) \geq \Phi(g(t)) + \Phi(h(t)) = \infty$$

çelişkisi elde edilir. Böylece, $k_p^*(f)f(t) \in SC_{\Phi}$ olmak zorundadır. Böylece (2) ifadesi geçerlidir. Dolayısıyla, 3(b) sağlanıyor ise (1) ve (2) sağlanır. Yine, kabul edelim ki, $f \notin ExtB(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ olsun. O halde, $g, h \in B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ ve $g + h = 2f$ iken $g \neq h$ olsun. Böylece, $\mu(\{t \in G : |f(t)| = c_{\Phi}\}) > 0$ olduğundan, μ ölçüsünün atomsuzluğundan

$$E_g = \{t \in G : c_{\Phi} = |f(t)| < |g(t)|\} \text{ ya da } E_h = \{t \in G : c_{\Phi} = |f(t)| < |h(t)|\}$$

pozitif ölçüye sahip kümeler mevcuttur. Genelliği bozmadan, $\mu(E_g) > 0$ olsun. O halde,

$$\rho_{\Phi}(g) = \int_G \Phi(g(t))d\mu \geq \int_{E_g} \Phi(g(t))d\mu = \rho_{\Phi}(g\chi_{E_g}) = +\infty$$

bulunur. Şimdi ise her $k \geq 0$ için iki duruma ayıracağız.

$$\text{Her } k \geq 1 \text{ için, } \rho_{\Phi}(kg) \geq \rho_{\Phi}(g) = +\infty$$

olur. Böylece, $k_p^{**}(g) = -\infty$ olduğundan (1) ile çelişilir. Dolayısıyla $k \geq 1$ olamaz. Her $k < 1$ için, $k_p^{**}(g) < 1$ olduğu kullanılarak

$$1 \geq \|g\|_{\Phi,p} = (k_p^*(g))^{-1} s_p \circ \rho_{\Phi}(k_p^*(g)g) \geq (k_p^*(g))^{-1} > 1$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, $g = h$ olmak zorundadır. O halde $f \in \text{Ext}B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ bulunur.

Durum 2: Varsayalım ki (1)(2) ve 3(a) ifadeleri sağlansın ve $g + h = 2f$ olacak şekilde $g, h \in B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ var olsun. O halde, $g = h$ olduğunu gözlemleyelim. (1) ve (2) ve Önerme 2.7.5 kullanılırsa

$$k_p^*(g) < +\infty \text{ ve } k_p^*(h) < +\infty$$

elde edilir. Çünkü $f \in S(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ için (1) ifadesinden $f \in S_{**}(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ sağlanır ve $g, h \in B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ için (2) ifadesinden $k_p^*(f)f(t) \in SC_{\Phi}$ ve $k_p^*(f) = k = k_p^{**}(f)$ gerçekleşir. Dolayısıyla, $g, h \in B_*(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ olur. Diğer bir deyişle

$$k_p^*(g) < +\infty \text{ ve } k_p^*(h) < +\infty$$

bulunur. Burada $k_g = k_p^*(g)$ ve $k_h = k_p^*(h)$ şeklinde alarak $k := \frac{k_g k_h}{k_g + k_h}$ ile gösterelim. O halde s_p ve Φ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\begin{aligned} 2 &\geq \|g\|_{\Phi,p} + \|h\|_{\Phi,p} \\ &= k_g^{-1}(s_p \circ \rho_{\Phi})(k_g g) + k_h^{-1}(s_p \circ \rho_{\Phi})(k_h h) \\ &= \left(\frac{k_g + k_h}{k_g k_h}\right) \left(\frac{k_h}{k_g + k_h}\right) (s_p \circ \rho_{\Phi})(k_g g) + \left(\frac{k_g + k_h}{k_g k_h}\right) \left(\frac{k_g}{k_g + k_h}\right) (s_p \circ \rho_{\Phi})(k_h h) \\ &\geq \left(\frac{k_g + k_h}{k_g k_h}\right) s_p \left(\left(\frac{k_h}{k_g + k_h}\right) \rho_{\Phi}(k_g g) + \left(\frac{k_g}{k_g + k_h}\right) \rho_{\Phi}(k_h h) \right) \\ &\geq \left(\frac{k_g + k_h}{k_g k_h}\right) (s_p \circ \rho_{\Phi}) \left(\left(\frac{k_h}{k_g + k_h}\right) k_g g + \left(\frac{k_g}{k_g + k_h}\right) k_h h \right) \\ &\geq k^{-1} (s_p \circ \rho_{\Phi})(k g + k h) \\ &= 2(2k)^{-1} (s_p \circ \rho_{\Phi})(2k f) \\ &\geq 2\|f\|_{\Phi,p} = 2 \end{aligned}$$

olur. Böylece bu eşitsizlikten,

$$\|g\|_{\Phi,p} = \|h\|_{\Phi,p} = \|f\|_{\Phi,p} = 1 = (2k)^{-1}(s_p \circ \rho_\Phi)(2kf)$$

elde edilir. Ayrıca (1) ifadesinden $2k = k_p^*(f) = k_p^{**}(f)$ olur. Üstelik,

$$s_p \left(\left(\frac{k_h}{k_g + k_h} \right) \rho_\Phi(k_g g) + \left(\frac{k_g}{k_g + k_h} \right) \rho_\Phi(k_h h) \right) = s_p(\rho_\Phi(2kf))$$

bulunur. Yine, $\rho_\Phi(2kf) \geq \sigma_p$ ve $s_p(\cdot)$ fonksiyonu $[\sigma_p, +\infty)$ aralığında kesin artan olduğundan, $s_p(\cdot)$ fonksiyonunun tersi vardır. Dolayısıyla,

$$\left(\frac{k_h}{k_g + k_h} \right) \rho_\Phi(k_g g) + \left(\frac{k_g}{k_g + k_h} \right) \rho_\Phi(k_h h) = \rho_\Phi(2kf)$$

olur. O halde,

$$\left(\frac{k_h}{k_g + k_h} \right) \int_G \Phi(k_g g(t)) d\mu + \left(\frac{k_g}{k_g + k_h} \right) \int_G \Phi(k_h h(t)) d\mu = \int_G \Phi(2kf(t)) d\mu$$

bulunur. Böylece

$$\int_G \left(\left(\frac{k_h}{k_g + k_h} \right) \Phi(k_g g(t)) + \left(\frac{k_g}{k_g + k_h} \right) \Phi(k_h h(t)) - \Phi(2kf(t)) \right) d\mu = 0$$

elde edilir. O halde μ h.h.h $t \in G$ için,

$$\left(\frac{k_h}{k_g + k_h} \right) \Phi(k_g g(t)) + \left(\frac{k_g}{k_g + k_h} \right) \Phi(k_h h(t)) = \Phi(2kf(t))$$

gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul h.h.h $t \in G$ için $k_g g(t) = k_h h(t) = 2kf(t)$ olmasıdır. Dolayısıyla,

$$k_g = \|k_g g\|_{\Phi,p} = \|k_h h\|_{\Phi,p} = k_h = 2k$$

olur. Buradan, $f = g = h$ bulunur. Böylece $f \in \text{Ext}B(L_{\rho_\Phi}(G))$ bulunur.

Tersine, kabul edelim ki $f \in \text{Ext}B(L_{\rho_\Phi}(G))$ olsun. O halde μ ölçüsü atomsuz olduğundan

$$E \subset \{t \in G : |f(t)| < c_\Phi\} \text{ ve } 0 < \mu(E) < +\infty$$

olacak şekilde ölçülebilir bir E kümesi bulunabilir. Böylece Önerme 2.7.5 gereğince, $k_p^*(f) < +\infty$ bulunur. O halde varsayalım ki $\rho_\Phi(k_p^*(f)f) < \sigma_p$ olsun. Dolayısıyla bir $u > 0$ vardır ve $\rho_\Phi(k_p^*(f)(f + u\chi_E)) \leq \sigma_p$ olur. Böylece $\mu(E_1) = \mu(E_2)$ olacak şekilde ölçülebilir ayrık $E_1, E_2 \subset E$ kümesi vardır. Ayrıca,

$$(g(t), h(t)) = \begin{cases} (f(t), f(t)) & , t \in G \setminus (E_1 \cup E_2) \\ (f(t) - u, f(t) + u) & , t \in E_1 \\ (f(t) + u, f(t) - u) & , t \in E_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece

$$\begin{aligned} \|g\|_{\Phi, p} &\leq (k_p^*(f))^{-1} (s_p \circ \rho_\Phi)(k_p^*(f)g) \\ &\leq (k_p^*(f))^{-1} (s_p \circ \rho_\Phi)(k_p^*(f)(f + u\chi_E)) \\ &\leq (k_p^*(f))^{-1} s_p(\sigma_p) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $1 \leq p \leq \infty$ için $s(\sigma_p) = 1$ olduğundan,

$$\|g\|_{\Phi, p} \leq (k_p^*(f))^{-1} < \|f\|_{\Phi, p} \leq 1$$

bulunur. Böylece $g \in B(L_{\rho_\Phi}(G))$ olur. Benzer şekilde $\|h\|_{\Phi, p} \leq 1$ olur ve dolayısıyla $g, h \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ elde edilir. Ayrıca, g ve h fonksiyonlarının tanımından $g \neq h$ ve $g + h = 2f$ olduğundan $f \notin \text{Ext}B(L_{\rho_\Phi}(G))$ olur bu ise hipotezle çelişir. O halde $\rho_\Phi(k_p^*(f)f) \geq \sigma_p$ ifadesi sağlanır. Diğer bir değişle $3(a)$ ifadesi sağlanır.

Varsayalım ki, bir $k > 0$ için $k_p^*(f) < k < k_p^{**}(f)$ veya

$$k = k_p^*(f) \text{ ve } \mu(\{t \in G : kf(t) \notin SC_\Phi\}) > 0$$

olsun. Önerme 2.5.29 gereğince, her iki durum içinde $\mu(\{t \in G : kf(t) \notin SC_\Phi\}) > 0$ olur. Uç nokta kümesinin tanımından $(-c_\Phi, c_\Phi) \setminus SC_\Phi$ en fazla sayılabilir sayıda açık aralığın birleşimi olarak yazılabilir. Böylece ve $\mu(E) > 0$ olmak üzere bir $\varepsilon > 0$ ve (a, b) açık aralığı vardır ki Φ Orlicz fonksiyonu, $[a, b] \subset (-c_\Phi, c_\Phi)$ aralığı üzerinde afindir. Yine, $\mu(A) > 0$ olmak üzere $A = \{t \in G : kf(t) \in (a + \varepsilon, b - \varepsilon)\}$ ile tanımlıdır. Ayrıca Φ bir afin fonksiyon olduğundan, $u \in [a, b]$ için $\Phi(u) = cu + d$ şeklindedir. Şimdi ise A kümesinin $\mu(A_1) = \mu(A_2)$

olacak şekilde iki A_1 ve A_2 kümesine ayırılım ve g ve h fonksiyonlarını

$$(g(t), h(t)) := \begin{cases} (f(t), f(t)) & , \quad t \in G \setminus (A_1 \cup A_2) \\ (f(t) - \varepsilon, f(t) + \varepsilon) & , \quad t \in A_1 \\ (f(t) + \varepsilon, f(t) - \varepsilon) & , \quad t \in A_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde, $g \neq h$ ve $g + h = 2f$ olur. Böylece, $\Phi(u) = cu + d$ olduğundan

$$\begin{aligned} \rho_{\Phi}(kg\chi_{A_1 \cup A_2}) &= \int_G \Phi(kg(t)\chi_{A_1 \cup A_2}(t))d\mu \\ &= \int_{A_1 \cup A_2} \Phi(kg(t))d\mu \\ &= \int_{A_1} \Phi(kg(t))d\mu + \int_{A_2} \Phi(kg(t))d\mu \\ &= \int_{A_1} (ckg(t) + d)d\mu + \int_{A_2} (ckg(t) + d)d\mu \\ &= \int_{A_1} (ck(f(t) - \varepsilon) + d)d\mu + \int_{A_2} (ck(f(t) + \varepsilon) + d)d\mu \\ &= \int_{A_1 \cup A_2} (ckf(t) + d)d\mu \\ &= \int_{A_1 \cup A_2} \Phi(kf\chi_{A_1 \cup A_2}(t))d\mu \\ &= \rho_{\Phi}(kf\chi_{A_1 \cup A_2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\rho_{\Phi}(kh\chi_{A_1 \cup A_2}) = \rho_{\Phi}(kf\chi_{A_1 \cup A_2})$ olur. Buradan,

$$\rho_{\Phi}(kg) = \rho_{\Phi}(kh) = \rho_{\Phi}(kf)$$

sağlanır. Dolayısıyla Teorem 2.5.24 kullanılarak

$$\|g\|_{\Phi,p} \leq k^{-1}s_p \rho_{\Phi}(kg) = k^{-1}s_p \rho_{\Phi}(kf) = \|f\|_{\Phi,p} = 1$$

sağlanır. Benzer şekilde $\|h\|_{\Phi,p} \leq 1$ gerçekleşir. Böylece $g, h \in B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ bulunur. O halde, $g \neq h$ ve $g + h = 2f$ olduğundan, $f \notin \text{Ext}B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ elde edilir. Bu ise kabulümüz olan $f \in \text{Ext}B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ ile çelişir. O halde, $k_p^*(f) = k_p^{**}(f) < +\infty$ ve μ h.h.h $t \in G$ için, $k_p^*(f)f(t) \in SC_{\Phi}$ olur.

□

Sonuç 2.7.9 Herhangi bir $f \in S(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ fonksiyonunun $B(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ kapalı birim yuvarının uç noktası olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki ifadelerin sağlanmasıdır.

1. $p = 1$ için

$$(a) \quad k_1^*(f) = k_1^{**}(f) < +\infty,$$

$$(b) \quad \mu\text{-h.h.h } t \in G \text{ için } k_p^*(f)f(t) \in SC_{\Phi}$$

2. $1 < p < \infty$ ve μ - h.h.h $t \in G$ için $k_p^*f(t) \in SC_{\Phi}$ olmasıdır.

3. $p = \infty$ için

$$(a) \quad \rho_{\Phi}(f) = 1 \text{ ve } \mu\text{- h.h.h } t \in G \text{ için } f(t) \in SC_{\Phi} \text{ veya}$$

$$(b) \quad \mu\text{-h.h.h } t \in G \text{ için } |f(t)| = c_{\Phi}$$

İspat.

1. $\sigma_1 = 0$ olduğundan $\rho_{\Phi}(f) \geq 0 = \sigma_1$ olur. Böylece Teorem 2.7.8 kullanılarak

$$k_1^*(f) = k_1^{**}(f) < +\infty \text{ ve } \mu\text{-h.h.h } t \in G \text{ için } k_p^*(f)f(t) \in SC_{\Phi}$$

elde edilir.

2. $1 < p < \infty$ için $\sigma_p = 0$ olduğundan $\rho_{\Phi}(k_p^*(f)f) \geq 0$ bulunur. O halde Teorem 2.7.8 3(a) sağlanır. Üstelik, μ h.h.h $t \in G$ için $k_p^*(f)f \in SC_{\Phi}$ ise Φ , $(0, \infty)$ aralığında doğrusal değildir. Böylece Teorem 2.6.6 gereğince, Φ k_p -tektir. Dolayısıyla,

$$k_p^*(f) = k_p^{**}(f) < +\infty$$

olur. Böylece, Teorem 2.7.8 in koşulları sağlanır ve istenilen elde edilir.

3. Kabul edelim ki (a) veya (b) ifadeleri sağlansın. O halde Önerme 2.7.5 kullanılarak

$$k_{\infty}^*(f) = k_{\infty}^*(f) = 1$$

bulunur. Ayrıca, $\|f\|_{\Phi} \leq 1$ ise $\rho_{\Phi}(f) \leq 1 = \sigma_{\infty}$ olacağından $\rho_{\Phi}(f)$ birden büyük olamaz böylece Teorem 2.7.8 den istenilen elde edilir.

□

2.8 YUVARLAKLIK

Bu bölümde Orlicz uzayının $ExtB(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ uç noktalar kümesi aracılığıyla yuvarlaklık kavramı ele alınacaktır.

Bu bölümde verilen tanım ve teoremler için [5] ve [20] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.8.1 $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı için,

$$ExtB(L_{\rho_{\Phi}}(G)) = S(L_{\rho_{\Phi}}(G))$$

sağlanıyorsa $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayına yuvarlak Banach uzayı denir.

Önerme 2.8.2 Φ fonksiyonu $(-c_{\Phi}, c_{\Phi})$ aralığı üzerinde kesin konveks olmayan ve $\Phi(c_{\Phi}) < +\infty$ koşulunu sağlayan bir Orlicz fonksiyonu olsun. Eğer $\mu(G) < +\infty$ ve $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ için

$$k_p^{**}(f) = c_{\Phi} \|f\|_{\infty}^{-1}$$

koşulu sağlanıyorsa, $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı yuvarlak değildir.

İspat. $0 < u_0 < c_{\Phi} < \infty$ için $u_0 \notin SC_{\Phi}$ olmak üzere

Durum 1: Varsayalım ki $u_0 c_{\Phi}^{-1} s_p(\Phi(c_{\Phi})\mu(G)) \geq 1$ olsun. O halde μ ölçüsü atomsuz olduğundan, $u_0 c_{\Phi}^{-1} s_p(\Phi(c_{\Phi})\mu(E)) = 1$ olacak şekilde bir ölçülebilir E kümesi bulabiliriz.

Bu E kümesi üzerinde $f = u_0$ olsun. Yani, $f = u_0 \chi_E$ olarak tanımlayalım. Böylece,

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{c > 0 : \mu\text{-h.h.h } t \in G \mid |f(t)| \leq c\} = \inf\{c > 0 : \mu\text{-h.h.h } t \in E \mid u_0 \leq c\} = u_0$$

elde edilir. O halde, Teorem 2.5.24 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\Phi,p} &= (k_p^{**}(f))^{-1} s_p(\rho_\Phi(k_p^{**}(f)f)) \\
&= c_\Phi^{-1} \|f\|_\infty s_p\left(\rho_\Phi(c_\Phi \|f\|_\infty^{-1} f)\right) \\
&= c_\Phi^{-1} u_0 s_p\left(\int_G \Phi(c_\Phi \|f\|_\infty^{-1} f(t)) d\mu\right) \\
&= c_\Phi^{-1} u_0 s_p\left(\int_E \Phi(c_\Phi \|f\|_\infty^{-1} u_0) d\mu\right) \\
&= c_\Phi^{-1} u_0 s_p\left(\int_E \Phi(c_\Phi \|f\|_\infty^{-1} \|f\|_\infty) d\mu\right) \\
&= c_\Phi^{-1} u_0 s_p\left(\int_E \Phi(c_\Phi) d\mu\right) \\
&= c_\Phi^{-1} u_0 s_p(\Phi(c_\Phi)\mu(E)) = 1
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $f \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ olur. O halde kabul edelim ki, $f \in ExtB(L_{\rho_\Phi}(G))$ olsun. Buradan, Teorem 2.6.2 gereğince, $1 = \|f\|_{\Phi,p} < k_p^*(f)$ ve $k_p^*(f) < \theta^{-1}(f)$ olduğundan, μ -h.h.h $t \in G$ için

$$k_p^*(f)f(t) \leq k_p^*(f)\|f\|_\infty < c_\Phi$$

bulunur. Kabulümüzden, μ -h.h.h $t \in G$ için, $k_p^*(f)f(t) \notin SC_\Phi$ olur. Bu ise, Teorem 2.7.8 den $f \in ExtB(L_{\rho_\Phi}(G))$ kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla $f \notin ExtB(L_{\rho_\Phi}(G))$ olur. Böylece $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayı yuvarlak değildir.

Durum 2: Varsayalım ki, $s_p(\Phi(c_\Phi)\mu(G)) = 1$ olsun. O halde, $\mu(E) > 0$ ve $\mu(G \setminus E) > 0$ olacak şekilde ölçülebilir E kümesi bulabiliriz ve $f = u_0\chi_E + c_\Phi\chi_{G \setminus E}$ şeklinde alabiliriz. Böylece,

$$1 \leq s_p(\Phi(u_0)\mu(E) + \Phi(c_\Phi)\mu(G \setminus E)) \leq s_p(\Phi(c_\Phi)\mu(G)) = 1$$

olduğundan

$$s_p(\Phi(u_0)\mu(E) + \Phi(c_\Phi)\mu(G \setminus E)) = s_p(\Phi(c_\Phi)\mu(G)) = 1 \quad (2.21)$$

bulunur. Üstelik,

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &= \inf\{c > 0 : \mu\text{-h.h.h } t \in G \mid |f(t)| \leq c\} \\
&= \inf\{c > 0 : \mu\text{-h.h.h } t \in G \mid |u_0\chi_E(t) + c_\Phi\chi_{G \setminus E}(t)| \leq c\} \\
&= \inf\{c > 0 : \mu\text{-h.h.h } t \in G \mid u_0\chi_E(t) + c_\Phi\chi_{G \setminus E}(t) \leq c\} \\
&= c_\Phi
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\|f\|_\infty = c_\Phi$ gerçekleşir. Dolayısıyla (2.21) ifadesinden ve

$$k_p^{**}(f) = c_\Phi \|f\|_\infty^{-1} = c_\Phi c_\Phi^{-1} = 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\Phi,p} &= (k_p^{**}(f))^{-1} s_p(\rho_\Phi(k_p^{**}(f)f)) \\
&= s_p(\rho_\Phi(f)) \\
&= s_p\left(\int_G \Phi(f(t)) d\mu\right) \\
&= s_p\left(\int_E \Phi(u_0) d\mu + \int_{G \setminus E} \Phi(c_\Phi) d\mu\right) \\
&= s_p(\Phi(u_0)\mu(E) + \Phi(c_\Phi)\mu(G \setminus E)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $f \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ olur ve benzer şekilde $f \notin \text{Ext}B(L_{\rho_\Phi}(G))$ olduğu elde edilir.

Durum 3: Varsayalım ki, $u_0 c_\Phi^{-1} s_p(\Phi(c_\Phi)\mu(G)) < 1$ ve $s_p(\Phi(c_\Phi)\mu(G)) > 1$ olsun. Öyleyse $\mu(E) > 0$ ve $s_p(\Phi(c_\Phi)\mu(G \setminus E)) > 1$ olacak şekilde ölçülebilir bir E kümesi bulabiliriz. Böylece bu küme üzerinde f fonksiyonunu

$$f(u) = u c_\Phi^{-1} s_p(\Phi(u^{-1} c_\Phi u_0)\mu(E) + \Phi(c_\Phi)\mu(G \setminus E))$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon $[u_0, c_\Phi]$ aralığında süreklidir. Dahası, $f(u_0) < 1$ ve $f(c_\Phi) > 1$ olur. Çünkü:

$$\begin{aligned} f(u_0) &= u_0 c_\Phi^{-1} s_p(\Phi(u_0^{-1} c_\Phi u_0) \mu(E) + \Phi(c_\Phi) \mu(G \setminus E)) \\ &= u_0 c_\Phi^{-1} s_p(\Phi(c_\Phi) \mu(E) + \Phi(c_\Phi) \mu(G \setminus E)) \\ &= u_0 c_\Phi^{-1} s_p(\Phi(c_\Phi) \mu(G)) \\ &< 1 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} f(c_\Phi) &= c_\Phi c_\Phi^{-1} s_p(\Phi(c_\Phi^{-1} c_\Phi u_0) \mu(E) + \Phi(c_\Phi) \mu(G \setminus E)) \\ &= s_p(\Phi(u_0) \mu(E) + \Phi(c_\Phi) \mu(G \setminus E)) \\ &\geq s_p(\Phi(c_\Phi) \mu(G \setminus E)) \\ &> 1 \end{aligned}$$

bulunur. O halde, $f(u_1) = 1$ olacak şekilde bir $u_0 < u_1 < c_\Phi$ bulabiliriz. Ayrıca,

$$f = u_0 \chi_E + u_1 \chi_{G \setminus E}$$

olsun. Böylece, benzer şekilde, $\|f\|_\infty = u_1$ olur. Buradan,

$$\|f\|_{\Phi, p} = (k_p^{**}(f))^{-1} s_p(\rho_\Phi(k_p^{**}(f) f)) = u_1 c_\Phi^{-1} s_p(\rho_\Phi(u_1^{-1} c_\Phi f)) = f(u_1) = 1$$

elde edilir. O halde, $f \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ olur. Yine, benzer şekilde $f \notin \text{Ext}B(L_{\rho_\Phi}(G))$ ifadesi elde edilir. Durum 1,2 ve 3 gereği $L_{\rho_\Phi}(G)$ Banach uzayı yuvarlak değildir.

□

Teorem 2.8.3 $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayının yuvarlak olabilmesi için gerek ve yeterli koşul aşağıdaki ifadelerin sağlanmasıdır.

1. Φ Orlicz fonksiyonu k_p -tekdir.
2. Φ Orlicz fonksiyonu $(-c_\Phi, c_\Phi)$ aralığında kesin konvektir.
3. (a) $1 \leq p < \infty$ veya
(b) $p = \infty$ ve $\Phi \in \Delta_2$ olmalıdır.

İspat. Kabul edelim ki (1), (2) ve (3) sağlansın. O halde $L_{\rho_\Phi}(G)$ yuvarlak olduğunu gösterelim. Bunun için $ExtB(L_{\rho_\Phi}(G)) = S(L_{\rho_\Phi}(G))$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $f \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ olsun. O halde, (1) ifadesinden Φ Orlicz fonksiyonu k_p -tek olduğundan

$$0 < k_p^*(f) = k_p^{**}(f) < +\infty$$

bulunur. Ayrıca (2) şikkından Φ Orlicz fonksiyonu $(-c_\Phi, c_\Phi)$ aralığında kesin konveks olur. Böylece,

Durum 1: $1 \leq p < \infty$ ise Teorem 2.7.8 gereğince $ExtB(L_{\rho_\Phi}(G)) = S(L_{\rho_\Phi}(G))$ eşitliği geçerlidir. O halde, $L_{\rho_\Phi}(G)$ uzayı yuvarlaktır.

Durum 2: $\Phi \in \Delta_2$ olsun. Burada $\|f\|_{\Phi, \infty} = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho_\Phi(f) = 1$ olmasıdır. Böylece, Teorem 2.7.8 gereğince, $ExtB(L_{\rho_\Phi}(G)) = S(L_{\rho_\Phi}(G))$ gerçekleşir. O halde, $L_{\rho_\Phi}(G)$ uzayı yuvarlaktır.

Tersine ilk olarak Orlicz uzayı yuvarlak ise Φ Orlicz fonksiyonunun k_p -tek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki Φ k_p -tek olmasın. O halde $cardK_p(g) \neq 1$ olacak şekilde bir $g \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ vardır. O halde, $f = \|g\|_{\Phi, p}^{-1} g \in L_{\rho_\Phi}(G)$ olur. Yine,

$$\|f\|_{\Phi, p} = \|g\|_{\Phi, p}^{-1} \|g\|_{\Phi, p} = 1$$

olduğundan $f \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ bulunur. Ayrıca Önerme 2.5.9 ifadesinden $cardK_p(f) \neq 1$ bulunur. O halde Teorem 2.7.8 gereğince, $f \notin ExtB(L_{\rho_\Phi}(G))$ ifadesi elde edilir. Böylece $L_{\rho_\Phi}(G)$ Banach uzayı yuvarlak değildir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla Φ Orlicz fonksiyonu k_p -tekdir.

Yine, $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı yuvarlak ise Φ Orlicz fonksiyonu $(-c_{\Phi}, c_{\Phi})$ aralığında kesin konveks olduğunu gösterelim. Varsayalım ki Φ Orlicz fonksiyonu $(-c_{\Phi}, c_{\Phi})$ aralığında kesin konveks olmasın. O halde (1) şikkından Φ k_p -tekdir. Teorem 2.6.6 gereğince,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi^{p-1}(u) \Psi(\varphi(u)) = +\infty$$

bulunur. Böylece, yeteri kadar büyük $u > 0$ için

$$\Phi^{p-1}(u) \Psi(\varphi(u)) \mu(G) > 1$$

olur. Eğer $c_{\Phi} = +\infty$ ise Önerme 2.5.17 kullanılarak,

$$\Phi^{p-1}(u) \Psi(\varphi(u)) < +\infty$$

elde edilir. Ayrıca, $\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) = +\infty$ olduğu için yeteri kadar büyük $u > 0$ için $\Phi(u) \mu(G) > 1$ olur. Benzer durumları $c_{\Phi} < +\infty$ içinde elde etmemiz gerekir. O halde varsayalım ki $c_{\Phi} < +\infty$ olsun.

Eğer $1 \leq p < \infty$ ise

$$\text{her } 0 < u < c_{\Phi} \text{ için } \Phi^{p-1}(u) \Psi(\varphi(u)) \mu(G) < 1$$

veya $p = \infty$ ise,

$$0 < u < c_{\Phi} \text{ için } \Phi(u) \mu(G) \leq 1$$

olsun.

Eğer bu iki koşul sağlanıyorsa $\Phi(c_{\Phi}) < +\infty$ ve $\mu(G) < +\infty$ olur. Ayrıca her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ için

$$k_p^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \leq 0\} = c_{\Phi} \|f\|_{\infty}^{-1}$$

bulunur. Böylece, Önerme 2.8.2 gereğince, $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ yuvarlak değildir. Dolayısıyla bu kabuller altında çelişki elde edilir. O halde, $0 < u_1 < c_{\Phi}$ sayısı ve bir $E \in \Sigma$ ölçülebilir küme vardır. Ayrıca, $0 < \mu(E) < +\infty$ ve $\mu(G \setminus E) > 0$ koşulları sağlanır.

$$\text{Eğer } 1 \leq p < \infty \text{ ise, } \Phi^{p-1}(u_1) \Psi(\varphi(u_1)) \mu(E) \geq 1,$$

eğer $p = \infty$ ise, $\Phi(u_1)\mu(E) \geq 1$

olur. Yine ise $u_0 \notin SC_\Phi$ olacak şekilde bir $0 < u_0 < c_\Phi$ sayısı ve $E_0 \cap E = \emptyset$ ve $0 < \Phi(u_0)\mu(E_0) < 1$ olacak şekilde bir $E_0 \in \Sigma$ ve $E_1 \subset E$ olacak şekilde $E_1 \in \Sigma$ alt kümesi vardır. Eğer,

$$1 \leq p < \infty \text{ ise, } \Phi^{p-1}(u_0)\Psi(\varphi(u_0))\mu(E_0) + \Phi^{p-1}(u_1)\Psi(\varphi(u_1))\mu(E_1) = 1,$$

$$p = \infty \text{ ise, } \Phi(u_0)\mu(E_0) + \Phi(u_1)\mu(E_1) = 1$$

ifadeleri gerçekleşir. Şimdi,

$$b = s_p(\Phi(u_0)\mu(E_0) + \Phi(u_1)\mu(E_1)) \text{ ve } f = b^{-1}(u_0\chi_{E_0} + u_1\chi_{E_1})$$

şeklinde tanımlayalım. O halde her $1 \leq p < \infty$ için $\alpha_p(kf) = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$k_p^*(f) \leq b \leq k_p^{**}(f)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Eğer $p = \infty$ ise kabulümüzden dolayı $\Phi(u_1)\mu(E) \geq 1$ eşitsizliği elde edilir. Böylece Sonuç 2.6.7 ifadesinden $\rho_\Psi(\varphi(b|f|)) \geq \Psi(\varphi(u_1))\mu(E_1) > 0$ olur. Buradan,

$$k_\infty^*(f) = b = k_\infty^{**}(f)$$

elde edilir. Böylece her $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi,p} &= b^{-1}(s_p \circ \rho_\Phi)(bf) \\ &= b^{-1}s_p \left(\int_G \Phi(bf(t))d\mu \right) \\ &= b^{-1}s_p \left(\int_G \Phi(bb^{-1}(u_0\chi_{E_0}(t) + u_1\chi_{E_1}(t)))d\mu \right) \\ &= b^{-1}s_p \left(\int_G \Phi(u_0\chi_{E_0}(t) + u_1\chi_{E_1}(t))d\mu \right) \\ &= b^{-1}s_p(\Phi(u_0)\mu(E_0) + \Phi(u_1)\mu(E_1)) = 1 \end{aligned}$$

olur. Buradan $f \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ bulunur. Ancak $k_p^*(f) < k_p^{**}(f)$ olduğundan Teorem 2.7.8 gereğince $f \notin \text{Ext}B(L_{\rho_\Phi}(G))$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla, Φ Orlicz fonksiyonu $(-c_\Phi, c_\Phi)$ aralığında kesin konvektir.

Son olarak kabul edelim ki $L_{\rho_\Phi}(G)$ yuvarlak Banach uzayı olsun. Buradan, $p = \infty$ iken $\Phi \in \Delta_2$ olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $\Phi \notin \Delta_2$ olsun. O halde, $\rho_\Phi(g) < 1 = \sigma_\infty$ olacak şekilde bir $g \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ bulabiliriz. Ayrıca $\mu(\{t \in G : |g(t)| < c_\Phi\}) > 0$ ise, $g \notin \text{Ext}B(L_{\rho_\Phi}(G))$ olur. Bu nedenle, kabul edelim ki her μ - h.h.h $t \in G$ için $|g(t)| = c_\Phi$ olsun. O halde, $0 < \mu(E) < +\infty$ ve $\mu(G \setminus E) > 0$ olacak şekilde ölçülebilir bir E kümesi bulabiliriz. Eğer $f = g\chi_{G \setminus E}$ denirse, $\rho_\Phi(f) < 1$ ve her $k > 1$ için $\rho_\Phi(kf) = +\infty$ olur. Böylece $k_\infty^*(f) = k_\infty^{**}(f) = 1$ bulunur. Buradan,

$$\|f\|_\Phi = k_\infty^{**}(f) s_\infty(\rho_\Phi(k_\infty^{**}(f)f)) = s_\infty \circ \rho_\Phi(f) = 1$$

elde edilir. Böylece $f \notin \text{Ext}B(L_{\rho_\Phi}(G))$ olur. O halde $L_{\rho_\Phi}(G)$ yuvarlak değildir. Bu ise kabulümüz ile çelişeceğinden $\Phi \in \Delta_2$ olur. □

Sonuç 2.8.4 Eğer $1 < p < \infty$ ise $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayının yuvarlak olması için gerek ve yeter koşul Φ Orlicz fonksiyonu $(-c_\Phi, c_\Phi)$ aralığında kesin konveks olmasıdır.

Sonuç 2.8.5 $p = 1$ ve $p = \infty$ için $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayı p -Amemiya normuna göre yuvarlak ise her $1 < p < \infty$ için $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayı yuvarlaktır.

Ancak $p = 1$ durumunda $(-c_\Phi, c_\Phi)$ aralığında Φ Orlicz fonksiyonun kesin konveksliği $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayının yuvarlak olmasını gerektirmez. Aşağıdaki örnek bu durumla ilgilidir.

Örnek 2.8.6 $\Phi(u) = |u| - \arctan(|u|)$ Orlicz fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında kesin konvektir. Fakat $p = 1$ için $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayı yuvarlak değildir.

Gerçekten, $\Phi(u) = |u| - \arctan(|u|)$ ise $\varphi(u) = \frac{u^2}{1+u^2}$ olduğundan $[0, \infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artandır. Dahası,

$$u \in (0, +\infty) \text{ için } \frac{d^2\Phi(u)}{du^2} > 0$$

gerçeklenir. Böylece Φ Orlicz fonksiyonu $(0, +\infty)$ aralığında kesin konvektir ve her $u > 0$

için $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1$ olduğundan

$$\Psi(\varphi(u)) = u\varphi(u) - \Phi(u) = \arctan(u) - \frac{u}{1+u^2} \nearrow \frac{\pi}{2}$$

olur. O halde Teorem 2.6.2 gereğince Φ fonksiyonu k_1^* -sonlu değildir. Dolayısıyla Toerem 2.8.3 gereğince $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayı $p = 1$ için yuvarlak değildir. Bu ifade aşağıdaki gibi de gösterilebilir.

Bir $c > 0$ için $\mu(E) \leq \frac{2}{\pi}$ ve $c\mu(E) = 1$ olacak şekilde bir $E \in \Sigma$ kümesi var olsun ve $f = c\chi_E$ şeklinde tanımlansın. O halde, her $k > 0$ için

$$\begin{aligned} \rho_\Psi(\varphi(k|f|)) &= \int_G \Psi(\varphi(k|f(t)|)) d\mu \\ &= \int_G \Psi(\varphi(kc\chi_E(t))) d\mu \\ &= \int_E \Psi(\varphi(kc)) d\mu \\ &= \Psi(\varphi(kc))\mu(E) \\ &< \frac{\pi}{2}\mu(E) \leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $k_1^*(f) = k_1^{**}(f) = +\infty$ olur ve Teorem 2.5.24 gereğince,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi,1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} s_1(\rho_\Phi(kf)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} (1 + \rho_\Phi(kf)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \left(1 + \int_G \Phi(kf(t)) d\mu \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \left(1 + \int_E \Phi(kc) d\mu \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} (1 + (kc - \arctan(kc))\mu(E)) \\ &= c\mu(E) = 1 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $f \in S(L_{\rho_{\Phi}}(G)) \setminus ExtB(L_{\rho_{\Phi}}(G))$ olur.

Fakat Örnek 2.8.6 da verilen Φ fonksiyonu tarafından üretilen $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı $1 < p \leq \infty$ için yuvarlaktır.

Örnek 2.8.7 $\Phi(u) = |u| - \arctan(|u|)$ Orlicz fonksiyonu ve $1 < p \leq \infty$ için $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı yuvarlaktır.

Gerçekten, $\Phi = |u| - \arctan(|u|)$ fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında kesin konveks olduğundan Sonuç 2.6.7 ifadesinden Φ k_p -tek fonksiyondur. Ayrıca, $u \neq 0$ için

$$\frac{\Phi(2u)}{\Phi(u)} = \frac{2|u| - \arctan(2|u|)}{|u| - \arctan(|u|)}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde süreklidir. Ayrıca,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi(2u)}{\Phi(u)} = 8 \text{ ve } \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(2u)}{\Phi(u)} = 2$$

bulunur. Böylece $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlıdır. Dolayısıyla, bir $K > 0$ sayısı vardır ve her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$ gerçekleşir. O halde $\Phi \in \Delta_2$ olur. Dolayısıyla, Teorem 2.8.3 gereğince, $1 < p \leq \infty$ için $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı yuvarlaktır.

Bir sonraki örnek sadece $1 < p < \infty$ için $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayının yuvarlak olduğuyla ilgilidir.

Örnek 2.8.8 $\mu(G) = +\infty$ ve

$$\Phi(u) = \begin{cases} |u|e^{\frac{-1}{|u|}}, & u \neq 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases}$$

olsun. O halde $1 < p < \infty$ için, $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı yuvarlaktır. Fakat $p = 1$ ve $p = \infty$ durumlarında yuvarlak değildir. Gerçektende her $u \in (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$ için

$$\frac{d^2\Phi(u)}{du^2} = \frac{e^{\frac{-1}{|u|}}}{|u|^3} > 0$$

olduğundan Φ fonksiyonu kesin konvektir. Ayrıca $u = 0$ için $v = 1, w = -1$ olmak üzere $v + w = 2u$ ve $\Phi(0) = 0, \Phi(1) = 1e^{-1}, \Phi(-1) = e^{-1}$ ise $\Phi(0) = 0 < 2e^{-1}$ olduğundan $u = 0$

noktası Φ fonksiyonunun kesin konveks noktasıdır. Böylece,

$$\Phi(u) = \begin{cases} |u|e^{\frac{-1}{|u|}}, & u \neq 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases}$$

Orlicz fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında kesin konvektir. O halde, $1 < p < \infty$ için $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayı yuvarlaktır. Her $u > 0$ için,

$$\Psi(\varphi(u)) = u(1 + u^{-1})e^{\frac{-1}{u}} - ue^{\frac{-1}{u}} = e^{\frac{-1}{u}} \nearrow 1$$

olduğundan Φ Orlicz fonksiyonu Teorem 2.6.6 kullanılırsa k_1 -tek değildir. Böylece, Teorem 2.8.3 gereğince, $p = 1$ için $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayı yuvarlak değildir.

Dahası her $u > 0$ için,

$$\frac{\Phi(2u)}{\Phi(u)} = \frac{2ue^{\frac{-1}{2u}}}{ue^{\frac{-1}{u}}} = 2e^{\frac{-1}{2u}}e^{\frac{1}{u}} = 2e^{\frac{-1}{2u} + \frac{1}{u}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} +\infty$$

bulunur. Dolayısıyla, Φ Orlicz fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlamaz. Böylece Teorem 2.8.3 ifadesinden dolayı $p = \infty$ için $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayı yuvarlak değildir.

3 MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında genel olarak fonksiyonel analiz, ölçü teorisi ve Orlicz uzaylarına ilişkin temel teoremler ve metotlar kullanılmıştır. (G, Σ, μ) σ -sonlu, atomsuz ve tam ölçü uzayı olmak üzere μ ölçüsü atomsuz olduğundan herhangi bir $\alpha > 0$ sayısı için $\mu(A) = \alpha$ olacak şekilde ölçülebilir bir $A \in \Sigma$ kümesinin var olduğu kullanılarak ispatlar yapılmıştır.

Orlicz uzayı üzerinde $1 \leq p \leq \infty$ için p -Amemiya normunu çalışırken infimum değerini aldığı $k \geq 0$ sayıları sınıflandırılarak p -Amemiya normunun elde edilebilirliği çalışma boyunca kolaylık sağlamıştır. Ayrıca, Orlicz uzayı üzerinde tanımlı Luxemburg ve Orlicz normları için geçerli olan özellikler $1 \leq p \leq \infty$ için s_p fonksiyonunun artanlığı ve konveksliği kullanılarak p -Amemiya normu için verilmiştir. Yine, bu özellikler $L_{p_\Phi}(G)$ Banach uzayının geometrik yapısı çalışılırken kullanılmıştır. Konuyla ilgili literatürde çeşitli kaynaklar taranarak bu özelliklerin önemi hakkında bilgiler verilmiş ve karşılaştırmalar yapılmıştır. Kitap ve makaleler okunarak Orlicz uzayları için p -Amemiya normunun ve geometrik özelliklerinin daha rahat anlaşılıp çalışılması için gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

Bu tez boyunca [5] makalesi temel alınarak çalışmalar bütüncül olarak ele alınmıştır.

Kullanılan yöntem ve sonuçlar ile ilgili kitap ve makalelerin künyeleri Kaynaklar bölümünde belirtilmiştir. Ayrıca bu tez yazımı için LaTeX programı kullanılmıştır.

4 BULGULAR

Genel kısımları sekiz bölümden oluşan bu tez çalışmasında ilk bölümde, (G, Σ, μ) ölçü uzayının σ -sonlu, atomsuz ve tam ölçü uzayı olduğu belirtilerek ölçü teorisine ilişkin temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, Φ Orlicz fonksiyonu tanıtılıp bu tez boyunca kullanılan integral temsili Teorem 2.2.4 ifadesinde sunulmuştur ve Orlicz fonksiyonları için gerekli önermeler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ρ konveks modüler fonksiyon tanıtılıp modüler uzay tanımı yapılmıştır. Daha sonra Φ bir Orlicz fonksiyonu ve $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\rho_{\Phi}(f) = \int_G \Phi(f(t)) d\mu$$

şeklinde tanımlanan ρ_{Φ} fonksiyonunun bir konveks modüler fonksiyon olduğu gösterilmiştir. Ardından bu fonksiyon aracılığıyla $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayları verilip Orlicz uzayının modüler uzayların bir örneği olduğu görülmüştür. Bu doğrultuda Orlicz uzayı üzerinde tanımlı Orlicz ve Luxemburg normlarının denk normlar olduğu belirtilmiştir.

Dördüncü bölümde, Φ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı üzerinde p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normu her $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G)$ için

$$\|f\|_{\rho_{\Phi}, p} = \begin{cases} \inf_{k>0} k^{-1} (1 + \rho_{\Phi}^p(kf))^{\frac{1}{p}} & , 1 \leq p < \infty \\ \inf_{k>0} k^{-1} \max\{1, \rho_{\Phi}(kf)\} & , p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu normun Önerme 2.4.2 gereğince, $p = \infty$ için Luxemburg normu $p = 1$ için Orlicz normu olduğu elde edilmiştir. Böylece, p -Amemiya normunun Orlicz uzayı üzerinde tanımlı doğal normlar olan Luxemburg ve Orlicz normlarını içeren bir norm olduğu görülmüştür. Daha sonra $1 \leq p < \infty$ için Teorem 2.4.6 aracılığıyla Luxemburg ve Orlicz normuna denk olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normunun elde edilebilirliği, diğer bir deyişle infimum değerini bir noktada alması için gerekli altyapı hazırlanmıştır. Bunun için kullanılan $\theta(\cdot)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için $k_p^*(\cdot), k_p^{**}(\cdot), A_p(\cdot, k)$ fonksiyonlarının tanımı verilerek birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Bu kapsamda aşağıdaki Önerme elde edilmiştir.

Önerme 4.1.1 Her $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ ve her $1 \leq p \leq \infty$ için aşağıdakiler geçerlidir.

1. $k \mapsto \alpha_p(kf)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyondur.
2. $(0, \theta^{-1}(f)) \subset \{k > 0 : A_p(f, k) < +\infty\}$ olur.
3. $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(0, \theta^{-1}(f))$ aralığında süreklidir.
4. $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(0, k_p^*(f))$ aralığında kesin azalan bir fonksiyondur.
5. $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(0, k_p^{**}(f))$ aralığında azalan bir fonksiyondur.
6. $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(k_p^{**}(f), \theta^{-1}(f))$ aralığında kesin artan bir fonksiyondur.
7. $k \mapsto A_p(f, k)$ fonksiyonu $(k_p^*(f), \theta^{-1}(f))$ aralığında artan bir fonksiyondur.

Bu önerme kullanılarak p -Amemiya normunun elde edilebilirliği aşağıdaki Teoremde sunulmuştur.

Teorem 4.1.2

Her $1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in L_{\rho_\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için aşağıdaki durumlar geçerlidir.

1. Eğer $k_p^*(f) = k_p^{**}(f) = +\infty$ ise $\|f\|_{\Phi, p} = \lim_{k \rightarrow \infty} A_p(f, k)$
2. Eğer $k_p^*(f) < k_p^{**}(f) = +\infty$ ise her $k \in [k_p^*(f), +\infty)$ için $\|f\|_{\Phi, p} = A_p(f, k)$
3. Eğer $k_p^{**}(f) < +\infty$ ise her $k \in [k_p^*(f), k_p^{**}(f)]$ için $\|f\|_{\Phi, p} = A_p(f, k)$

Böylece p -Amemiya normunun hangi $k \geq 0$ sayıları için elde edilebilirliği bulunmuştur.

Altıncı bölümde $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayının geometrik yapıları olan uç nokta ve yuvarlaklık kavramlarını çalışmak için Φ fonksiyonunun k_p^* -sonlu k_p^{**} -sonlu ve k_p -tek olması durumları tanıtılıp incelenmiştir. Bu doğrultuda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç 4.1.3 Φ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere $c_\Phi = +\infty$ olması durumunda aşağıdaki durumlar geçerlidir.

1. $p = 1$ için,

(a) Φ fonksiyonunun orijinden geçen eğik asimptotu yoksa k_p^* -sonludur.

(b) Φ fonksiyonunun orijinden geçen eğik asimptotu yoksa k_p^{**} -sonludur.

(c) $a = \sup\{u : \Psi(\varphi(u))\mu(G) < 1\}$ olmak üzere Φ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında kesin konveks ve orijinden geçen eğik asimptotu yoksa k_p -tekdir.

2. $1 < p < \infty$ için,

(a) Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal değilse k_p^* -sonludur.

(b) Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal değilse k_p^{**} -sonludur.

(c) Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal değilse k_p -tek olur.

3. $p = \infty$ için,

(a) Φ fonksiyonu k_p^* -sonludur.

(b) Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal değilse k_p^{**} -sonludur.

(c) $b = \inf\{u : \Phi(u)\mu(G) > 1\}$ olmak üzere her $u > b$ için Φ fonksiyonu $[0, u]$ aralığında doğrusal değilse k_p -tek olur.

Sonuç 4.1.4 Ψ bütünler Orlicz fonksiyonu olmak üzere $c_\Phi = +\infty$ olması durumunda aşağıdaki durumlar geçerlidir.

1. $p = 1$ için,

(a) $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) = \infty$ ise k_p^* -sonludur.

(b) $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) = \infty$ ise k_p^{**} -sonludur.

(c) $a = \sup\{u : \Psi(\varphi(u))\mu(G) < 1\}$ olmak üzere $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(\varphi(u)) = \infty$ ise k_p -tek olur.

2. $1 < p < \infty$ için,

(a) Bir $u_0 > 0$ vardır ve $\Psi(\varphi(u_0)) > 0$ ise k_p^* -sonludur.

(b) Bir $u_0 > 0$ vardır ve $\Psi(\varphi(u_0)) > 0$ ise k_p^{**} -sonludur.

(c) Bir $u_0 > 0$ vardır ve $\Psi(\varphi(u_0)) > 0$ ise k_p -tek olur.

3. $p = \infty$ için,

(a) Φ fonksiyonu k_p^* -sonludur.

(b) Bir $u_0 > 0$ vardır ve $\Psi(\varphi(u_0)) > 0$ ise k_p^* -sonludur.

(c) $b = \inf\{u : \Phi(u)\mu(G) > 1\}$ olmak üzere her $u > b$ için $\Psi(\varphi(u)) > 0$ ise k_p -tek olur.

Yedinci bölümde, $L_{\rho_\Phi}(G)$ Banach uzayının uç noktalar tanıtılarak aşağıdaki önemli sonuç elde edilmiştir.

Teorem 4.1.5 Herhangi bir $f \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ fonksiyonunun $B(L_{\rho_\Phi}(G))$ kapalı birim yuvarının uç noktası olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki ifadelerin sağlanmasıdır.

1. $p = 1$ için

(a) $k_1^*(f) = k_1^{**}(f) < +\infty$,

(b) μ -h.h.h $t \in G$ için $k_p^*(f)f(t) \in SC_\Phi$

2. $1 < p < \infty$ ve μ h.h.h $t \in G$ için $k_p^*f(t) \in SC_\Phi$ olmasıdır.

3. $p = \infty$ için

(a) $\rho_\Phi(f) = 1$ ve h.h.h $t \in G$ için $f(t) \in SC_\Phi$ veya

(b) μ -h.h.h $t \in G$ için $|f(t)| = c_\Phi$

Son bölümde ise $L_{\rho_\Phi}(G)$ Banach uzayının yuvarlak olması araştırılarak aşağıdaki kullanışlı teorem verilmiştir.

Teorem 4.1.6 $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayının Yuvarlak olabilmesi için gerek ve yeterli koşul aşağıdaki ifadelerin sağlanmasıdır.

1. Φ Orlicz fonksiyonu k_p -tektir.
2. Φ Orlicz fonksiyonu $(-c_{\Phi}, c_{\Phi})$ aralığında kesin konvektir.
3. (a) $1 \leq p < \infty$ veya
(b) $p = \infty$ ve $\Phi \in \Delta_2$ olmalıdır.

Bu tez çalışmasında Orlicz uzaylarının geometrik yapısı [5] makalesi temel alınarak p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normuna göre ayrıntılarıyla incelenmiştir. Orlicz uzaylarının geometrik özelliklerine ilişkin, literatürde mevcut çalışmalar bütüncül olarak ele alınmış ve daha iyi anlaşılması için farklı ve ayrıntılı ispatlar sunulmuştur.

5 TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında (G, Σ, μ) σ -sonlu, atomsuz ve tam ölçü uzayı ve Φ Orlicz fonksiyonu olmak üzere $L_{\rho_{\Phi}}(G)$ Orlicz uzayı üzerinde p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normu çalışılmıştır. Bu tezin temel çalışma alanını oluşturan Orlicz uzaylarının geometrik yapısı [5] makalesi ve [20] ve [1] kitabı temel alınarak incelenmiştir.

Elde edilen sonuçlar üç ana bölüm halinde ele alınabilir. Öncelikle $\rho_{\Phi}(\cdot)$ konveks modüler fonksiyonu ile Orlicz uzaylarının özel bir modüler uzay olduğu gösterilmiştir. Ardından Φ Orlicz fonksiyonunun bazı özellikleri verilerek sınıflandırma yapılmıştır.

İkinci bölümde Orlicz uzayları üzerinde tanımlı Orlicz ve Luxemburg normlarına denk ve yeni bir norm olan p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normu tanıtılarak bu normun çalışılmasını kolaylaştıran yardımcı fonksiyonlar olan $\theta(\cdot)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için $k_p^*(\cdot), k_p^{**}(\cdot), A_p(\cdot, k)$ fonksiyonlarının tanıtılarak özellikleri incelenmiştir. Ardından p -Amemiya ($1 \leq p \leq \infty$) normunun çalışılmasını kolaylaştıran aşağıdaki ifade verilmiştir.

Her $1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in L_{\rho_{\Phi}}(G) \setminus \{0\}$ için aşağıdaki durumlar geçerlidir.

1. Eğer $k_p^*(f) = k_p^{**}(f) = +\infty$ ise $\|f\|_{\Phi, p} = \lim_{k \rightarrow \infty} A_p(f, k)$
2. Eğer $k_p^*(f) < k_p^{**}(f) = +\infty$ ise her $k \in [k_p^*(f), +\infty)$ için $\|f\|_{\Phi, p} = A_p(f, k)$
3. Eğer $k_p^{**}(f) < +\infty$ ise her $k \in [k_p^*(f), k_p^{**}(f)]$ için $\|f\|_{\Phi, p} = A_p(f, k)$

Böylece p -Amemiya normu için hangi $k \geq 0$ sayılarının elde edilebilirliği bulunmuştur.

Üçüncü bölümde ise bir önceki bölümlerde gösterilen önermeler ve teoremler aracılığıyla Orlicz uzaylarının Geometrik özellikleri olan uç nokta ve yuvarlaklık kavramları için aşağıdaki sonuçlar çıkartılmıştır.

Teorem 5.1.1 Her $1 \leq p \leq \infty$ için, $f \in S(L_{\rho_\Phi}(G))$ fonksiyonunun $B(L_{\rho_\Phi}(G))$ kapalı birim yuvarının uç noktası olabilmesi için gerek ve yeterli koşul aşağıdaki özellikleri sağlamasıdır.

1. $k_p^*(f) = k_p^{**}(f) < +\infty$
2. Her μ h.h.h $t \in G$ için $k_p^*(f)f(t) \in SC_\Phi$
- 3.

$$(a) \rho_\Phi(k_p^*(f)f) \geq \sigma_p \text{ veya}$$

$$(b) \mu\text{-h.h.h } t \in G \text{ için } |f(t)| = c_\Phi \text{ ifadelerini sağlaması gerekir.}$$

Teorem 5.1.2 $L_{\rho_\Phi}(G)$ Orlicz uzayının yuvarlak olabilmesi için gerek ve yeterli koşul aşağıdaki ifadelerin sağlanmasıdır.

1. Φ Orlicz fonksiyonu k_p - tektir.
2. Φ Orlicz fonksiyonu $(-c_\Phi, c_\Phi)$ aralığında kesin konvektir.
3. (a) $1 \leq p < \infty$ veya
(b) $p = \infty$ ve $\Phi \in \Delta_2$ olmalıdır.

Böylece Lebesgue uzayını kapsayan daha genel bir fonksiyon uzayında geometrik yapılar yeni ve daha güçlü bir normla çalışılmıştır. Elde edilen bu sonuçlar $1 \leq p_1 < \infty$ için

$$\Phi(f) = \frac{|f|^{p_1}}{p_1}$$

alınırsa Lebesgue uzaylarında da geçerlidir.

İleriye dönük olarak bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ağırlıklı Orlicz uzayları içinde incelenebilir. Öyle ki w ağırlık fonksiyonu için

$$L_w^\Phi(G) := \left\{ f : G \rightarrow F \mid f \text{ ölçülebilir, } \exists \lambda > 0 \int_G \Phi(\lambda |f(t)w(t)|) d\mu \right\}$$

ile tanımlanan ağırlıklı Orlicz uzaylarının geometrik özelliklerinin belirlenmesi planlanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1]. Chen, S., 1996, *Geometry of Orlicz spaces*, Dissertationes Math, Warszawa.
- [2]. Chen, L. and Cui, Y., 2010, Complex extreme points and complex rotundity in Orlicz function spaces equipped with the p -Amemiya norm, *Nonlinear Anal.*, 73(5), 1389–1393.
- [3]. Church, G.M., 1973, *Extreme Points in Banach Spaces*, Thesis (PhD), Oklahoma State University.
- [4]. Cohn, D.L., 2013, *Measure Theory*, Birkhäuser, Basel, ISBN: 978-1-4614-6955-1.
- [5]. Cui, Y., Duan, L., Hudzik, H., Wisła, M., Duan, L., 2008, Basic theory of p -Amemiya norm in Orlicz spaces: Extreme points and rotundity in Orlicz spaces endowed with these norms, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(5–6), 1796-1816.
- [6]. Cui, Y., Hudzik, H., Nowak, M., Pluciennik, R., 1999, Some geometric properties in Orlicz sequence spaces equipped with Orlicz norm, *J.Convex Anal.*, 6(1), 91-113.
- [7]. Hudzik, H., 1989, Strict convexity of Musielak-Orlicz spaces with Luxemburg norm, *Bull.Acad.Polon.Sci.Math.*, 29(5-6), 235-247.
- [8]. Hudzik, H., Maligranda L., 2000, Amemiya norm equals Orlicz norm in general, *Indag. Mathem., N.S.*, 11(4), 573-585.
- [9]. Hudzik, H., and Wisla, M., 1993, On extreme points of Orlicz spaces with Orlicz norm, *Collect. Math.*, 44(1-3) 135-146.
- [10]. Krasnosel'skii, M.A. and Rutickii Ya.B., 1961, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff, Groningen.
- [11]. Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., 1977, *Classical Banach Spaces I*, Springer Verlag, Berlin, ISBN: 978-3-642-66559-2.
- [12]. Luxemburg, W.A.J., 1955, *Banach Function Spaces Thesis*, Thesis (PhD), Dissertation Delft.
- [13]. Maligranda, L., 1989, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Universidade Estadual de Campinas, Brazil.
- [14]. Musielak, J., *Orlicz spaces and Modular spaces*, Springer Verlag, Berlin, ISBN: 0-387-12706-2.
- [15]. Musielak, J. and Orlicz, W., On Modular Spaces, *Studia Math.*, 18, 49-65.
- [16]. Nakano, H., 1950, *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*, Maruzen Co., Tokyo.

- [17]. Orlicz, W., 1932, Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B, *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Lett.*, Sér. A, 207-220.
- [18]. Orlicz, W., 1961, A note on modular spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Math.*, 9(3), 175-162.
- [19]. Reisner, S., 1988, *On two theorems of Lozanovskii concerning intermediate Banach lattices*, Geometric Aspects of Functional Analysis, In: Lindenstrauss, J., Milman, V., 1317, Springer, Berlin.
- [20]. Rao, M.M. and Ren, Z.D., 1991, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-84782.





ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Badik Hüseyin UYSAL
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2019

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2021

