



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ORLİCZ UZAYLARINDA P -AMEMİYA NORMUNA GÖRE BİRİM
YUVARLARIN İNCELENMESİ**

Esra BAŞAR

Matematik Ana Bilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Haziran, 2021

İSTANBUL

Bu alışma 04.06.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Erhan ALIřKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Alen OSANÇLIOL
Beykent Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmalarım boyunca desteğini asla esirgemeyen, engin bilgileriyle her zaman yol gösteren ve her geçen gün matematiği daha çok sevmemi sağlayan değerli danışman hocam Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU'na tüm emekleri için bir teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca her daim yanımda olan aileme, çalışmalarım boyunca destek olan arkadaşlarım Araş. Gör. Şeyma YAŞAR ve Araş. Gör. Badik Hüseyin UYSAL'a, yardımlarını eksik etmeyen Araş. Gör. Dr. Rüya ÜSTER ve Araş. Gör. Büşra ÜNAL'a teşekkür ederim.

Haziran, 2021

Esra BAŞAR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1 GİRİŞ	1
2 GENEL KISIMLAR	3
2.1 ÖN BİLGİLER	3
2.2 P -AMEMİYA NORMLARI	15
2.3 LUXEMBURG NORMU İLE VERİLEN ORLICZ UZAYLARI ($L_\infty^\Phi(G)$)	34
2.4 $EXT B(L_1^\Phi)$ KÜMESİNİN BOŞ KÜMEDEN FARKLILIĞI	41
2.5 ORLICZ NORMU İLE VERİLEN ORLICZ UZAYLARI (L_1^Φ)	48
2.6 $L^\infty(G)$ UZAYININ ALT KÜMESİ OLAN $L_1^\Phi(G)$ UZAYLARI	58
2.7 SONLU DEĞERLİ Φ FONKSİYONU TARAFINDAN ÜRETİLEN $L_1^\Phi(G)$ UZAYLARI	66
2.8 $1 < P < \infty$ İÇİN $L_P^\Phi(G)$ UZAYLARI	79
3 MALZEME VE YÖNTEM	82
4 BULGULAR	83
5 TARTIŞMA VE SONUÇ	86
KAYNAKLAR	87
ÖZGEÇMİŞ	89

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar kümesi
G	: Ayrık olmayan lokal kompakt grup
μ	: G üzerindeki Haar ölçüsü
Φ	: Orlicz fonksiyonu
Ψ	: Φ 'nin tümleyen Orlicz fonksiyonu
p_+	: Φ fonksiyonunun sağ türevi
p_-	: Φ fonksiyonunun sol türevi
L_p^Φ	: p -Amemiya normu ile verilen Orlicz uzayı
$B(X)$	: X normlu uzayının kapalı birim yuvarı
$S(X)$	: X normlu uzayının birim yuvar yüzeyi
X^*	: X uzayının topolojik duali
$ExtB(X)$	: X normlu uzayının kapalı birim yuvarının uç noktalarının kümesi
$\xrightarrow{\ \cdot\ }$	: $\ \cdot\ $ normuna göre yakınsama
$\nearrow$	: Artarak yakınsama
$\searrow$	: Azalarak yakınsama
$L^0(G)$	: G üzerindeki reel değerli ve ölçülebilir, μ denklik sınıflarının kümesi
$L^p(G)$	: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ f\ _p = (\int f ^p d\mu)^{1/p} < \infty$ koşulunu sağlayan $f \in L^0(G)$ fonksiyonlarının uzayı
$L^\infty(G)$	: $\ f\ _\infty = \sup_{t \in G} f(t) < \infty$ koşulunu sağlayan $f \in L^0(G)$ fonksiyonlarının uzayı
$C(Z)$	: Z üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$supp f$	: f fonksiyonunun desteği
$card A$	: A kümesinin kardinalitesi
$\aleph_0$	: Sayılabilir kümelerin kardinalitesi
$coh A$	: A kümesinin konveks zarfı

Kisaltmalar	Açıklama
μ -hhh	: μ ölçüsüne göre "hemen hemen her"

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORLICZ UZAYLARINDA p -AMEMİYA NORMUNA GÖRE BİRİM YUVARLARIN İNCELENMESİ

Esra BAŞAR

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Bu tezin amacı genel anlamda fonksiyonel analizin kapsamındaki bir konuyu soyut harmonik analiz bakış açısıyla yorumlamaktır.

Genel olarak bir X Banach uzayı için $B(X)$ kapalı birim yuvarının uç noktalarının kümesinin kapalı olması gerekmez. M. Wisła ve A.S. Granero, Orlicz uzaylarının birim yuvarının uç noktalarının kümesinin kapalılığını, daha geniş bir norm sınıfı olan p -Amemiya normlarına göre incelemiştir [7, 17].

Bu tez kapsamında ise [7], [9] ve [17] çalışmaları derlenerek, genel ölçü uzayı yerine G lokal kompakt grup ve sol Haar ölçüsü için ele alınmıştır. İlk olarak p -Amemiya normları tanıtılmış ve önemli özellikleri verilmiştir. Daha sonra Orlicz uzaylarının birim yuvarlarının uç noktalarının kümesinin kapalılığı sırasıyla $p = \infty$, $p = 1$ ve $1 < p < \infty$ durumları için p -Amemiya normlarına göre incelenmiştir.

Haziran 2021, 98 sayfa.

Anahtar kelimeler: Orlicz uzayı, p -Amemiya normu, uç nokta, lokal kompakt grup.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

INVESTIGATING UNIT BALLS IN ORLICZ SPACES ENDOWED WITH P -AMEMIYA NORM

Esra BAŞAR

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

The aim of this thesis is to interpret a topic that is generally in the scope of functional analysis from the point of view of abstract harmonic analysis.

In general the set of extreme points of the closed unit ball $B(X)$ of a Banach space X does not need to be closed. M. Wiśła and A.S. Granero examined the closedness of the set of extreme points of the unit ball in Orlicz spaces for p -Amemiya norms which is a wider class of norms [7, 17].

In the thesis, the works of [7], [9] and [17] have been discussed in the context of a locally compact group G and the left Haar measure instead of a general measure space. First, p -Amemiya norms were introduced and significant properties of these norms were given. Then the closedness of the set of extreme points of the unit balls in Orlicz spaces has been examined with respect to the p -Amemiya norms for the cases of $p = \infty$, $p = 1$ and $1 < p < \infty$.

June 2021, 98 pages.

Keywords: Orlicz spaces, p -Amemiya norm, extreme point, locally compact group.

1 GİRİŞ

Bir Z kompakt Hausdorff uzayı üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı $C(Z)$ olsun. X bir Banach uzayı olmak üzere $K(X, C(Z))$ ile X uzayından $C(Z)$ uzayına giden doğrusal kompakt operatörlerin uzayı gösterilsin. Bir X Banach uzayının topolojik duali olan X^* uzayının kapalı birim yuvarı $B(X^*)$ olsun. Yine, $B(X^*)$ kümesinin uç noktalarının kümesi $\text{Ext}B(X^*)$ ile gösterilsin. Bir $T \in K(X, C(Z))$ için, $x \in X$ ve $z \in Z$ olmak üzere $(T'z)(x) = (Tx)(z)$ şeklinde tanımlanan $T' : Z \rightarrow X^*$ sürekli dönüşümünün varlığı biliniyor [5, s.490]. Eğer $T'(Z) \subseteq \text{Ext}B(X^*)$ ise T uygun operatör olarak adlandırılır. Ayrıca $K(X, C(Z))$ uzayından alınan bir uygun operatör, $B(K(X, C(Z)))$ birim yuvarı için bir uç noktadır [5]. Öte yandan, $\text{Ext}B(X^*)$ kümesi kapalı ise $T : X \rightarrow C(Z)$ operatörünün uygun olması için gerek ve yeter koşul; $T' : Z \rightarrow X^*$ sürekli operatörünün bir $Z_0 \subset Z$ yoğun alt kümesi için $T'(Z_0) \subseteq \text{Ext}B(X^*)$ olmasıdır (Önerme 2.1.4). Ancak $\text{Ext}B(X^*)$ kümesi her zaman kapalı olmak zorunda değildir. Kapalı birim yuvara ilişkin bu özellik, [1, 7, 17] çalışmalarında, p -Amemiya normu ile bir Banach uzayı olan Orlicz uzayları için incelenmiştir.

Orlicz uzayları W. Orlicz tarafından, L^p Lebesgue uzaylarının genelleştirmesi olarak 1932'de, Orlicz normu ile tanıtılmıştır [13]. Bu genelleştirme, $1 \leq p < \infty$ için Lebesgue uzayları tanımında yer alan $\Phi(u) = u^p$ fonksiyonu yerine daha genel bir Φ konveks fonksiyonu alınarak yapılmıştır. Daha sonraki yıllarda Orlicz uzayları farklı normlar ile incelenmiştir. Orlicz uzayları, 1955 yılında Orlicz normuna denk bir norm olan Luxemburg normu ile çalışılmıştır [11]. Luxemburg normu ile verilen ve genel bir M ölçü uzayı üzerinde tanımlanan $L^\Phi(M)$ Orlicz uzayı için $\text{Ext}B(L^\Phi(M))$ kümesinin bu norma göre kapallığı, A.S. Granero ve M. Wisła tarafından 1992 yılında incelenmiştir [7]. Ardından 1993 yılında S. Chen ve M. Wisła tarafından, Orlicz normu ile verilen Orlicz uzayında $\text{Ext}B(L^\Phi(M))$ kümesinin kapallığı sonraki senelerde yapılan çalışmalara kıyasla daha yüzeysel bir şekilde ele alınmıştır [1]. 2000 yılında, H. Hudzik ve L. Maligranda tarafından Orlicz uzaylarının, Orlicz normu ve Luxemburg normunu da kapsayan daha geniş bir norm ailesi olan p -Amemiya normları ile araştırılması önerilmiştir [9]. Bundan sonra, 2008 yılında p -Amemiya normları ile verilen Orlicz uzaylarının temel teorisi çalışılmış ve birim yuvarın

uç noktaları, yuvarlaklık gibi bazı geometrik özellikleri incelenmiştir [4].

Bir Φ Orlicz fonksiyonunun tümleyeni Ψ fonksiyonu olsun. Burada, $1 \leq p \leq \infty$ için, p -Amemiya normu ile verilen L_p^Φ Orlicz uzayının duali $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan $1 \leq q \leq \infty$ sayısı için L_q^Ψ uzayı olur [9]. Buna göre, atomsuz genel bir M ölçü uzayı üzerinde tanımlanan ve $1 \leq p < \infty$ için p -Amemiya normu ile verilen $L_p^\Phi(M)$ Orlicz uzaylarında, $\text{Ext}B(L_p^\Phi(M))$ kümesinin bu norma göre kapalılığı, M. Wiśła tarafından 2018 yılında çalışılmıştır [17]. Yine bu çalışmada, Orlicz normu yani 1-Amemiya normu ile verilen Orlicz uzaylarında $\text{Ext}B(L_1^\Phi)$ kümesinin kapalılığı için de [1] çalışmasına göre daha ayrıntılı sonuçlar verilmiştir. Öte yandan, $p = \infty$ için p -Amemiya normu Luxemburg normuna eşit olduğundan, bu durum da [7] çalışmasında ele alınmıştır.

Yapılan tüm bu çalışmalar derlenerek, bir yorum niteleğinde olan bu tezde ayrık (diskret) olmayan bir lokal kompakt grup G üzerinde p -Amemiya normlarına ilişkin temel özellikler ve $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Tez, genel anlamda sekiz bölümden oluşmaktadır. İlk olarak ön bilgiler kısmında, tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, p -Amemiya normu tanıtılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Sonraki bölümlerde sırasıyla $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı, $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı ve $1 < p < \infty$ olmak üzere $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı çalışılmıştır. Tez boyunca, temel alınan [7], [9] ve [17] makaleleri ile uyumlu olarak reel değerli fonksiyonların Orlicz uzayları göz önünde bulundurulmuştur.

2 GENEL KISIMLAR

Genel kısımlar sekiz bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm olan ön bilgilerde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilecektir. İkinci bölümde, p -Amemiya normu tanıtılacak ve bazı özellikleri verilecektir. Üçüncü bölümde, $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı araştırılacaktır. Sonraki bölümde, $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin boş küme olması için bir ölçüt verilecektir. Beşinci bölümde, $L_1^\Phi(G)$ için sonraki bölümlerde kullanılmak amacıyla bazı yardımcı sonuçlar elde edilecektir. Altıncı ve yedinci bölümlerde ise b_Φ sabitinin sonlu ve sonsuz olma durumuna göre $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı çalışılacaktır. Sekizinci ve son bölümde ise, $1 < p < \infty$ durumu için $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı incelenecektir.

2.1 ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1.1 (Birim Yuvarın Uç Noktası, [17]) Bir X normlu uzayı verilsin. X uzayının kapalı birim yuvarı $B(X)$ ve birim yuvar yüzeyi $S(X)$ olmak üzere eğer $x \in S(X)$ noktası $y \neq z$ olacak şekilde $y, z \in B(X)$ elemanlarının aritmetik ortalaması olarak yazılamıyorsa yani her $y \neq z \in B(X)$ için $x \neq \frac{1}{2}(y+z)$ ise x noktasına, $B(X)$ kümesinin bir uç noktası denir. $B(X)$ kümesinin uç noktalarının kümesi $\text{Ext}B(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 (Kompakt Doğrusal Operatör, [5]) X ve Y birer normlu uzay ve $S(X)$ kümesi, X uzayının birim yuvar yüzeyi olmak üzere eğer $T(S(X))$ görüntü kümesinin Y uzayının norm topolojisine göre kapanışı kompakt ise, $T : X \rightarrow Y$ doğrusal operatörüne kompakt doğrusal operatör adı verilir.

Bir X Banach uzayı ve Z kompakt Hausdorff uzayı için $K(X, C(Z))$ ile X uzayından, Z üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların $C(Z)$ uzayına giden doğrusal kompakt operatörlerin uzayını gösterelim. $T \in K(X, C(Z))$ için, $x \in X$ ve $z \in Z$ olmak üzere $(T'z)(x) = (Tx)(z)$ şeklinde tanımlanan $T' : Z \rightarrow X$ sürekli dönüşümü vardır.

Tanım 2.1.3 (Uygun Operatör, [5]) Eğer $T'(Z) \subseteq \text{Ext}B(X^*)$ ise T uygun operatör olarak adlandırılır.

Önerme 2.1.4 Eğer $\text{Ext}B(X^*)$ kümesi kapalıysa, bir $T \in K(X, C(Z))$ operatörünün "uygun

operatör" olması için gerek ve yeter koşul bir $Z_0 \subseteq Z$ yoğun alt kümesi için,

$$T'(Z_0) \subseteq \text{Ext}B(X^*)$$

olmasıdır.

İspat. T' sürekli olduğundan, $T'(Z) = T'(\overline{Z_0}) \subseteq \overline{T'(Z_0)} \subseteq \overline{\text{Ext}B(X^*)} = \text{Ext}B(X^*)$ olur.

Uyarı : Bir X Banach uzayı için $\text{Ext}B(X)$ kümesi kapalı olmak zorunda değildir.

Örnek : $\mathbb{R}^3$ uzayını ele alalım. $C = \text{coh}(\{(\pm 1, 0, \pm 1)\} \cup \{(0, y, z) : y^2 + z^2 = 1\})$ olmak üzere bir $x \in \mathbb{R}^3$ için $\|x\| = \inf\{r > 0 : x \in rC\}$ olsun. Eğer $(0, \sin \frac{1}{n}, \cos \frac{1}{n}) \subseteq \text{Ext}B(\mathbb{R}^3)$ dizisi alınırsa, $(0, \sin \frac{1}{n}, \cos \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0, 1)$ olur. Ancak $(0, 0, 1) = \frac{1}{2}((1, 0, 1) + (-1, 0, 1))$ olarak yazıldığı için $(0, 0, 1)$ noktası $B(\mathbb{R}^3)$ kümesinin bir uç noktası değildir. O halde, $\text{Ext}B(\mathbb{R}^3)$ kümesi kapalı değildir.

Tanım 2.1.5 (Yuvarlak Normlu Uzay, [4]) X bir normlu uzay olmak üzere eğer $\text{Ext}B(X) = S(X)$ eşitliği sağlanıyorsa, X uzayına yuvarlak normlu uzay adı verilir.

Tanım 2.1.6 ([3]) (M, Σ, ν) bir ölçü uzayı olsun. Eğer M kümesi her $n \in \mathbb{N}$ için $\nu(A_n) < \infty$ koşulunu sağlayan A_n kümelerinin sayılabilir birleşimi olarak yazılabiliyorsa, ν ölçüsüne σ -sonlu ölçü adı verilir.

Tanım 2.1.7 ([3]) Bir (M, Σ, ν) ölçü uzayı için, $\nu(A) > 0$ olmak üzere her $B \subseteq A$ için $\nu(B) = 0$ veya $\nu(B) = \nu(A)$ koşulunu sağlayan bir $A \in \Sigma$ kümesi varsa bu A kümesine atom adı verilir. Eğer bu koşulu sağlayan hiçbir A ölçülebilir kümesi yoksa ν ölçüsüne atomsuz veya atomik olmayan ölçü denir.

Aşağıdaki lemma ve teoremler, [15] numaralı kaynaktan alınmıştır.

Teorem 2.1.8 (Egoroff Teoremi) Bir (M, Σ, ν) ölçü uzayı verilsin. $E \in \Sigma$ sonlu ölçülü bir küme olsun. (f_n) ise μ -hhh $t \in E$ için $f_n(t) \rightarrow f(t)$ noktasal yakınsaması gerçekleşecek şekilde, E üzerinde tanımlı reel değerli ve ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. O zaman, her $\varepsilon > 0$ için $\nu(E \setminus F) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $F \subseteq E$ kapalı kümesi vardır öyle ki F kümesi üzerinde (f_n) dizisi, f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

Lemma 2.1.9 (Fatou Lemması) (M, Σ, ν) bir ölçü uzayı olsun. M üzerinde tanımlı reel

değerli fonksiyonların ölçülebilir ve negatif olmayan bir (f_n) dizisi için

$$\int f d\nu = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\nu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\nu$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.1.10 (Monoton Yakınsaklık Teoremi) Bir ölçü uzayı (M, Σ, ν) verilsin. (f_n) , M üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların ölçülebilir, artan ve negatif olmayan bir dizisi ve f , M üzerinde tanımlı reel değerli ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer ν -h h $t \in M$ için $f_n(t) \rightarrow f(t)$ noktasal yakınsaması gerçekleşiyorsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\nu = \int f d\nu$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.11 (Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi) (M, Σ, ν) bir ölçü uzayı olsun. (f_n) , M üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların ölçülebilir bir dizisi olsun öyle ki her $t \in M$ için $f_n(t) \rightarrow f(t)$ noktasal yakınsaması gerçeklensin. Her $t \in M$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(t)| \leq g(t)$ olacak şekilde bir $g \in L^1(M)$ varsa $f \in L^1(M)$ olur. Ayrıca $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\nu = \int f d\nu$ sağlanır.

Tanım 2.1.12 (Ölçüde Yakınsama) Bir (M, Σ, ν) ölçü uzayında (f_n) , M üzerinde tanımlı reel değerli ve ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi, f , M üzerinde tanımlı, ölçülebilir ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\{t \in M : |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

koşulu sağlanıyorsa, (f_n) fonksiyon dizisi, f fonksiyonuna ν ölçüsünde yakınsar denir.

Önerme 2.1.13 (Ölçünün Sürekliliği, [3]) (M, Σ, ν) bir ölçü uzayı olsun.

i) Eğer $(M_n) \subset \Sigma$ artan bir küme dizisi ise,

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(M_n)$$

sağlanır.

ii) Eğer $(D_n) \subset \Sigma$ azalan bir küme dizisi ve en azından bir terimi sonlu ölçüye sahipse

$$v\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(D_n)$$

sağlanır.

Aşağıdaki tanımlar ve teorem, [6] numaralı kaynaktan alınmıştır.

Tanım 2.1.14 (Topolojik Grup) Grup işlemlerinin sürekli olduğu yani her $t, x \in G$ için $t \mapsto t^{-1}$ ve $(t, x) \mapsto tx$ fonksiyonlarını sürekli kılan topoloji ile donatılmış bir G grubuna topolojik grup denir.

Tanım 2.1.15 (Lokal Kompakt Grup) Her elemanının kompakt bir komşuluğu olacak şekilde Hausdorff bir topoloji ile donatılmış olan topolojik grup, lokal kompakt grup olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.16 (Haar Ölçüsü) G bir lokal kompakt grup ve μ , G üzerinde bir regüler Borel ölçüsü olsun. Eğer her ölçülebilir $A \subseteq G$ alt kümesi ve her $t \in G$ için $\mu(tA) = \mu(A)$ ise μ ölçüsüne sol Haar ölçüsü denir. Benzer şekilde her ölçülebilir $A \subseteq G$ alt kümesi ve her $t \in G$ için $\mu(At) = \mu(A)$ sağlanıyorsa μ ölçüsüne sağ Haar ölçüsü denir.

Teorem 2.1.17 G bir lokal kompakt grup olmak üzere, G grubunun üzerinde bir sol Haar ölçüsü vardır ve pozitif bir skaler çarpımı kadar tektir.

Buradan itibaren, μ ölçüsü sol Haar ölçüsü olarak alınacak ve genelliği bozmaksızın kısaca Haar ölçüsü olarak bahsedilecektir. Bununla beraber, G bir lokal kompakt grup ve μ ölçüsü G üzerindeki tam, σ -sonlu Haar ölçüsü olarak kabul edilecektir. Ayrıca ayrık gruplar hariç tutulacak, dolayısıyla atomsuz olan Haar ölçüleriyle çalışılacaktır.

Lokal kompakt grup G üzerindeki ölçülebilir ve reel değerli fonksiyonların μ denklik sınıflarının kümesi ise $L^0(G)$ ile gösterilecektir.

Uyarı : Bu tez için, genişletilmiş reel sayılar kümesi $[-\infty, \infty]$ üzerinde $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, $0 \cdot \infty = 0$, $\inf \emptyset = \infty$ olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.1.18 (Orlicz Fonksiyonu, [8]) Bir $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu;

i) $\Phi(0) = 0$,

ii) $(0, \infty)$ üzerinde $\Phi \neq 0$ ve $\Phi \neq \infty$,

iii) her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(-u) = \Phi(u)$,

iv) $b_\Phi = \sup\{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$ olmak üzere b_Φ noktasında soldan sürekli,

v) $(-b_\Phi, b_\Phi)$ üzerinde konveks

koşullarını sağlıyorsa Orlicz fonksiyonu olarak adlandırılır.

Burada $(0, \infty)$ üzerinde, $\Phi \equiv 0$ ile her $u \in (0, \infty)$ için $\Phi(u) = 0$ ve $\Phi \equiv \infty$ ile her $u \in (0, \infty)$ için $\Phi(u) = \infty$ olması anlaşılabacaktır.

Ayrıca, Orlicz fonksiyonu için bir diğer sabit $a_\Phi := \sup\{u \geq 0 : \Phi(u) = 0\}$ ile tanımlanır. Bu tez için a_Φ ve b_Φ sabitleri önemli rol oynayacaktır.

Öte yandan Orlicz fonksiyonu, $\Phi(0) = 0$ koşulunu sağlayan konveks bir fonksiyon olduğundan $[0, \infty)$ üzerinde artandır.

Örnek : Her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p}$ şeklinde tanımlanan Φ fonksiyonu, $a_\Phi = 0$ ve $b_\Phi = \infty$ koşullarını sağlayan bir Orlicz fonksiyonudur.

Tez boyunca, p_+ ile Φ Orlicz fonksiyonunun sağ türevini, p_- ile de sol türevini gösterecek ve aşağıdaki kabulleri yapacağız.

1) $p_-(0) = 0$, $p_-(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} p_-(u)$ ve $b_\Phi < \infty$ ise her $u > b_\Phi$ için $p_-(u) = \infty$ olsun.

2) $p_+(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u)$ ve $b_\Phi < \infty$ ise her $u \geq b_\Phi$ için $p_+(u) = \infty$ olsun.

Tanım 2.1.19 (Tümleyen Orlicz Fonksiyonu) Bir Φ Orlicz fonksiyonu için

$$\Psi(u) := \sup\{|u|v - \Phi(v) : v \geq 0\}$$

ile tanımlanan $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonuna tümleyen Orlicz fonksiyonu denir.

Kolayca görülebileceği gibi tümleyen Orlicz fonksiyonu da bir Orlicz fonksiyonudur. Dolayısıyla Ψ fonksiyonu, $[0, \infty)$ artan ve negatif olmayan bir fonksiyondur.

Önerme 2.1.20 (Young Eşitsizliği, [14]) Φ bir Orlicz fonksiyonu ve Ψ , Φ için tümleyen Orlicz fonksiyonu olsun. O halde $u, v \in \mathbb{R}$ için Young eşitsizliği adı verilen,

$$uv \leq \Phi(u) + \Psi(v)$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik $v = p_+(u)$ alınırsa eşitlik durumu yani,

$$up_+(u) = \Phi(u) + \Psi(p_+(u))$$

elde edilir. Bu durum "Young eşitliği" olarak anılacaktır.

Önerme 2.1.21 ([14]) Verilen u, v reel sayıları ve Φ Orlicz fonksiyonunun sağ ve sol türevleri için

- i) $p_-(u) \leq p_+(u)$,
 - ii) $u < v$ ise $p_+(u) \leq p_-(v)$,
 - iii) $H = \{t \in G : p_-(t) \neq p_+(t)\}$ ise $\text{card}(H) \leq \aleph_0$
- koşulları gerçekleşir.

Önerme 2.1.22 ([4]) Bir Φ Orlicz fonksiyonu ve onun tümleyen Orlicz fonksiyonu Ψ verilsin.

- i) $\Psi \circ p_+$ fonksiyonu artan ve negatif olmayan bir fonksiyondur.
- ii) Herhangi bir $u \in [0, \infty)$ alınsın. Bu durumda $\Psi(p_+(u)) < \infty$ olması için gerek ve yeter koşul $\Phi(u) < \infty$ olmasıdır.
- iii) $\Psi \circ p_+$ fonksiyonunun sınırlı olması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun orijinden geçen bir eğik asimptotunun olması ve denk olarak $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) < \infty$ koşulunun sağlanmasıdır.
- iv) Φ Orlicz fonksiyonunun doğrusal olması için gerek ve yeter koşul her $u \in \mathbb{R}$ için $\Psi(p_+(u)) = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 2.1.23 (Δ_2 -Koşulu, [17]) i) Her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa Φ fonksiyonu, $\Delta_2(\mathbb{R})$ koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2(\mathbb{R})$ şeklinde yazılır.

ii) Her $|u| \geq u_0$ için $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$ eşitsizliği ve $\Phi(u_0) < \infty$ sağlanacak şekilde bir $K > 0$ ve bir $u_0 > 0$ sabiti varsa Φ fonksiyonu, $\Delta_2(\infty)$ koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ şeklinde yazılır.

iii) Her $|u| \leq u_0$ için $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$ eşitsizliği ve $\Phi(u_0) > 0$ sağlanacak şekilde bir $K > 0$ ve bir $u_0 > 0$ sabiti varsa Φ fonksiyonu, $\Delta_2(0)$ koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2(0)$ şeklinde yazılır.

iv) $\mu(G) < \infty$ şartı altında $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ ve $\mu(G) = \infty$ şartı altında $\Phi \in \Delta_2(\mathbb{R})$ sağlanıyorsa Φ

fonksiyonu, $\Delta_2(\mu)$ koşulunu sağlar denir.

Tanım 2.1.24 (Orlicz Uzayı) Bir Φ Orlicz fonksiyonu ve bir $f \in L^0(G)$ için I_Φ fonksiyonu

$$I_\Phi(f) := \int \Phi(f(t)) d\mu(t)$$

şeklinde tanımlanır.

Bir Φ Orlicz fonksiyonunun ürettiği Orlicz uzayı ise

$$L^\Phi(G) = \{f \in L^0(G) : \exists \lambda > 0, I_\Phi(\lambda f) < \infty\}$$

ile tanımlanır.

Bu şekilde tanımlanan $L^\Phi(G)$ uzayı, reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır [14]. $f \in L^\Phi(G)$ olmak üzere, $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayı genelde,

$$\|f\|_\Phi = \inf \left\{ \lambda > 0 : I_\Phi \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

ile tanımlı Luxemburg normu veya buna denk bir norm olan ve

$$\|f\|_\Phi^o = \sup \left\{ \int |f(t)g(t)| d\mu(t) : g \in L^\Psi(G), I_\Psi(g) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlı Orlicz normu ile verilir [14].

Bu bölümün geri kalanında [17] makalesi esas alınarak, temel tanımlar ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.1.25 (Kesin Konvekslik Noktası) Birbirinden farklı herhangi $u, v \in \mathbb{R}$ için

$w = \frac{1}{2}(u + v)$ olmak üzere $\Phi(w) < \frac{1}{2}(\Phi(u) + \Phi(v))$ eşitsizliği gerçekleşiyorsa, $w \in \mathbb{R}$ noktasına Φ fonksiyonunun bir kesin konvekslik noktası denir. Ayrıca Φ fonksiyonunun kesin konvekslik noktalarının kümesi SC_Φ ile gösterilir.

SC_Φ^+ ile de Φ fonksiyonunun negatif olmayan kesin konvekslik noktalarının kümesi yani $SC_\Phi \cap [0, \infty)$ kümesi gösterilecektir.

Ayrıca, kesin konvekslik noktası tanımı göz önüne alınırsa her $w \in SC_\Phi$ için $\Phi(w) < \infty$ olduğu kolayca elde edilir.

Uyarı : i) M_Φ ile p_+ fonksiyonunun kesin monotonluk noktalarının kümesini göstereceğiz. O halde,

$$M_\Phi = \{u > 0 : p_+ \text{ bir } \varepsilon > 0 \text{ için } (u - \varepsilon, u + \varepsilon) \text{ üzerinde sürekli ve kesin artan}\}$$

kümesidir. Bir $u \in M_\Phi$ için $(u - \frac{\varepsilon}{2}, u + \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq M_\Phi$ olacağından M_Φ , reel sayıların açık bir alt kümesidir. Dolayısıyla en fazla sayılabilir sayıda açık aralığın birleşimi olarak yazılabilir.

ii) D_Φ ile Φ Orlicz fonksiyonunun sağ türevinin sol türevine eşit olmadığı noktaların kümesini göstereceğiz; yani

$$D_\Phi = \{u \geq 0 : p_-(u) < p_+(u)\}$$

kümesidir. Öte yandan p_+ fonksiyonunun sürekli olduğu noktalarda $p_- = p_+$ olur [14]. Böylece D_Φ kümesi, p_+ türev fonksiyonunun süreksizlik noktalarının tümünü içerir.

Tanım 2.1.26 (Afin Noktaları) i) Eğer $\Phi(u) < \infty$ ve $(u, u + \varepsilon)$ üzerinde p_+ 'nın sonlu ve sabit olacağı şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa, $u \geq 0$ noktası Φ fonksiyonunun bir sağ afin noktasıdır. Φ fonksiyonunun sağ afin noktalarının kümesi RA_Φ şeklinde gösterilir.

ii) Eğer $\Phi(u) < \infty$ ve $(u - \varepsilon, u)$ üzerinde p_+ 'nın sonlu ve sabit olacağı şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa, $u > 0$ noktası Φ fonksiyonunun bir sol afin noktasıdır. Φ fonksiyonunun sol afin noktalarının kümesi LA_Φ ile gösterilir.

iii) Eğer $\Phi(u) < \infty$ ve $u > 0$ ise $(u - \varepsilon, u + \varepsilon)$ üzerinde p_+ 'nın sonlu ve sabit olacağı şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa; eğer $u = 0$ ise her $x \in [0, \varepsilon)$ için $p_+(x) = 0$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa, $u \geq 0$ noktası Φ fonksiyonunun bir afin noktasıdır. Φ fonksiyonunun afin noktalarının kümesi A_Φ şeklinde gösterilir.

Uyarı : Bir afin noktası hem sağ hem sol afin noktasıdır ancak hem sağ hem sol afin noktası olan bir nokta afin noktası olmak zorunda değildir.

Örnek : Birbirinden ve sıfırdan farklı a, b, c reel sayıları ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\Phi(x) = \begin{cases} ax + b & x \in [u, u + \varepsilon) \\ bx + c & x \in (u - \frac{\varepsilon}{2}, u) \end{cases}$$

şeklinde alınırsa u noktası, Φ fonksiyonu için hem sağ hem sol afin noktasıdır ancak afin noktası değildir.

Aşağıda Φ Orlicz fonksiyonu'nun kesin konvekslik noktaları ve afin noktalarına ilişkin bir gözlem verilecektir.

Gözlem 2.1.27 i) Bir Φ Orlicz fonksiyonunun herhangi bir afin noktasının, bir komşuluğu üzerinde p_+ sabit ve sonlu olacağından, afin noktaları kesin konvekslik noktası olamazlar. Ayrıca, Φ fonksiyonunun sonlu değer aldığı ve afin noktası olmayan herhangi noktanın bir komşuluğunda p_+ türev fonksiyonu kesin artan olacağından, bu nokta kesin konvekslik noktası olur. Dolayısıyla,

$$SC_{\Phi}^+ = \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\} \setminus A_{\Phi}$$

olduğu gözlemlenir.

ii) Hem sağ hem sol afin noktası olan ancak bir afin noktası olmayan noktalar p_+ için süreksizlik noktası olacağından,

$$(LA_{\Phi} \cup RA_{\Phi}) \setminus A_{\Phi} \subseteq D_{\Phi}$$

olmalıdır.

Bu gözlemden aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 2.1.28 Afin noktası tanımından A_{Φ} kümesi, her bir noktasının en az bir komşuluğunu içerir. Bu sebeple reel sayıların açık bir alt kümesidir. O halde, Φ fonksiyonunun sürekliliği göz önüne alınırsa $SC_{\Phi} = \Phi^{-1}[0, \infty) \setminus A_{\Phi}$ olduğundan SC_{Φ} kapalı bir kümedir.

Bu bölümün geri kalanında, sonraki bölümlerde kullanılacak olan kesin konvekslik ve afin noktalarına ilişkin önemli özellikler önermelerle verilecektir.

Lemma 2.1.29 Bir $\varepsilon > 0$ ve $u \geq 0$ için Φ fonksiyonu, $(u - \varepsilon, u + \varepsilon)$ üzerinde sonlu olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i) Eğer $u \notin RA_{\Phi}$ ise $u \in \overline{M_{\Phi} \cap (u, \infty)} \cup \overline{D_{\Phi} \cap (u, \infty)}$ olur.

ii) Eğer $u \notin LA_{\Phi} \cup \{0\}$ ise $u \in \overline{M_{\Phi} \cap (0, u)} \cup \overline{D_{\Phi} \cap (0, u)}$ olur.

İspat. i) : Kabul edelim ki $u \notin RA_\Phi$ olsun ancak $u \notin \overline{M_\Phi \cap (u, \infty)} \cup \overline{D_\Phi \cap (u, \infty)}$ olsun. O halde, $u \notin \overline{M_\Phi \cap (u, \infty)}$ ve $u \notin \overline{D_\Phi \cap (u, \infty)}$ olur. Bu durumda, bir $\eta > 0$ bulunabilir öyle ki $\eta < \varepsilon$, $B(u, \eta) \cap M_\Phi \cap (u, \infty) = \emptyset$ ve $B(u, \eta) \cap D_\Phi \cap (u, \infty) = \emptyset$ sağlanır. Bu ise, $D_\Phi \cap (u, u + \eta) = \emptyset$ ve $M_\Phi \cap (u, u + \eta) = \emptyset$ olmasını gerektirir.

Burada, $D_\Phi \cap (u, u + \eta) = \emptyset$ olduğundan p_+ fonksiyonu, $(u, u + \eta)$ üzerinde sürekli ve $M_\Phi \cap (u, u + \eta) = \emptyset$ olduğundan p_+ , $(u, u + \eta)$ üzerinde sabittir. Yani $u \in RA_\Phi$ olduğu elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

ii) : Benzer şekilde kabul edelim ki $u \notin LA_\Phi \cup \{0\}$ olsun ancak $u \notin \overline{M_\Phi \cap (0, u)} \cup \overline{D_\Phi \cap (0, u)}$ yani $u \notin \overline{M_\Phi \cap (0, u)}$ ve $u \notin \overline{D_\Phi \cap (0, u)}$ olsun. Buradan, bir $\eta > 0$ bulunabilir öyle ki $D_\Phi \cap (u - \eta, u) = \emptyset$ ve $M_\Phi \cap (u - \eta, u) = \emptyset$ bulunur. Dolayısıyla p_+ fonksiyonu, $(u - \eta, u)$ üzerinde süreklidir ve kesin artan değildir. Böylece p_+ fonksiyonu, $(u - \eta, u)$ üzerinde ya tek bir pozitif değer ya da 0 değerini alabilir. Bu ise $u \notin LA_\Phi \cup \{0\}$ olması ile çelişir.

Sonuç 2.1.30 Bir Φ Orlicz fonksiyonu için $SC_\Phi^+ = (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$ eşitliği elde edilir.

İspat. $b_\Phi = \sup\{u > 0 : \Phi(u) < \infty\}$ olmak üzere Φ artan bir fonksiyon olduğundan $\Phi(b_\Phi) = 0$ ise $M_\Phi = \emptyset$ olur. Ayrıca her $u > b_\Phi$ için $\Phi(u) = \infty$ olacağından $SC_\Phi^+ = \{b_\Phi\}$ ve her $u \leq b_\Phi$ için $\Phi(u) = 0$ olacağından $D_\Phi = \{b_\Phi\}$ yani istenen eşitlik sağlanır. Çünkü $(\emptyset \cup \{b_\Phi\}) \cap [0, b_\Phi] = \{b_\Phi\} = SC_\Phi^+$ olmalıdır.

Şimdi $\Phi(b_\Phi) > 0$ kabulüyle $SC_\Phi^+ \subseteq (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$ kapsamasını göstereyim.

Durum 1 : Eğer $b_\Phi \in SC_\Phi^+$ ise $\Phi(b_\Phi) < \infty$ olacağından $b_\Phi < \infty$ elde edilir. Kabul edelim ki b_Φ , $(\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$ kümesinin bir elemanı olmasın. O halde bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $D_\Phi \cap (b_\Phi - \eta, b_\Phi) = \emptyset$ ve $M_\Phi \cap (b_\Phi - \eta, b_\Phi) = \emptyset$ olur. Bu sebeple p_+ , $(b_\Phi - \eta, b_\Phi)$ üzerinde sürekli ve kesin artan olmayan bir fonksiyondur yani p_+ , $(b_\Phi - \eta, b_\Phi)$ üzerinde sabittir. Ayrıca, p_- ile p_+ 'nın tanımından $p_-(b_\Phi) < \infty = p_+(b_\Phi)$ sağlanır. Bu ise $b_\Phi \in D_\Phi$ olmasını gerektirir ki bu da $b_\Phi \notin (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$ olması ile çelişir.

Durum 2 : Eğer $0 \in SC_\Phi^+$ ve $p_+(0) > 0$ ise $0 = p_-(0) < p_+(0)$ dolayısıyla $0 \in D_\Phi$ yani $0 \in (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$ olur.

Kabul edelim ki $0 \in SC_\Phi^+$, $p_+(0) = 0$ ve $0 \notin (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$ olsun. O halde, bir $\eta > 0$ bulunabilir öyle ki $\Phi(\eta) < \infty$, $D_\Phi \cap (-\eta, \eta) = \emptyset$ ve $M_\Phi \cap (-\eta, \eta) = \emptyset$ sağlanır.

Böylece, p_+ fonksiyonu, $(-\eta, \eta)$ üzerinde sürekli ve kesin artan değildir. Dolayısıyla p_+ sabit ve $u \in [0, \eta)$ için $p_+(u) = 0$ dır yani $0 \in A_\Phi$ olur. Önerme 2.1.27'den $0 \in A_\Phi$ ise $0 \notin SC_\Phi$ olacağından bu $0 \in SC_\Phi^+$ olması ile çelişir yani $0 \in (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$ olmalıdır.

Durum 3 : Eğer $u \in SC_\Phi^+ \setminus RA_\Phi$ veya $u \in SC_\Phi^+ \setminus (LA_\Phi \cup \{0\})$ ise Lemma 2.1.29'dan sırasıyla $u \in \overline{M_\Phi} \cap (u, \infty) \cup \overline{D_\Phi} \cap (u, \infty) \subseteq (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$ veya $u \in \overline{M_\Phi} \cap (0, u) \cup \overline{D_\Phi} \cap (0, u) \subseteq (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$ olur.

Durum 4 : $u \in SC_\Phi^+ \setminus \{0\}$, $u \in RA_\Phi$ ve $u \in LA_\Phi$ ise $u \notin A_\Phi$ olduğundan $u \in (LA_\Phi \cup RA_\Phi) \setminus A_\Phi \subseteq D_\Phi$ ve buradan $u \in D_\Phi \subseteq (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$ olduğu elde edilir.

O halde, dört durum altında da

$$SC_\Phi^+ \subseteq (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$$

kapsaması gerçekleşir.

Şimdi ise ters kapsamanın yani $(\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\} \subseteq SC_\Phi$ kapsamasının sağlandığını gösterelim.

$u_0 \geq 0$ olacak şekilde $u_0 \in (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) = (\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi})$ alalım öyle ki $\Phi(u_0) < \infty$ olsun. O halde bir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M_\Phi \cup D_\Phi \subseteq SC_\Phi^+$ dizisi vardır öyle ki $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_0$ yakınsaması gerçekleşir.

Eğer $u_0 = b_\Phi$ ise Sonuç 2.1.28'den SC_Φ^+ kapalı olduğu için $\Phi(b_\Phi) < \infty$ dolayısıyla $b_\Phi < \infty$ olur. $\Phi(b_\Phi) < \infty$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\Phi(b_\Phi + \varepsilon) = \infty$ olacağından $b_\Phi \notin A_\Phi$ yani $b_\Phi = u_0 \in SC_\Phi^+$ elde edilir.

Eğer $0 \leq u_0 < b_\Phi$ ise $\Phi(b_\Phi) \geq \Phi(u_0)$ olacağından $c < \infty$ olacak şekilde bir $c \geq 0$ sayısı vardır öyle ki $\Phi(u_0) \leq c \leq \Phi(b_\Phi)$ sağlanır. Φ fonksiyonunun sürekliliğinden $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = \Phi(u_0)$ yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) \leq c \leq \Phi(b_\Phi)$ elde edilir. Bu sebeple yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için $\Phi(u_n) \leq c$ ve dolayısıyla, $(u_n) \subseteq \{u \geq 0 : \Phi(u) \leq c\} \cap SC_\Phi^+$ olur. Φ fonksiyonunun sürekliliğinden bu küme iki kapalı kümenin kesişimi halindedir ve dolayısıyla kapalıdır. Bu durumda $u_0 \in SC_\Phi^+$ olur. O halde,

$$(\overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}) \cap \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\} \subseteq SC_\Phi$$

sağlanır.

Sonuç olarak elde edilen iki kapsamadan eşitlik sağlanır.

Lemma 2.1.31 $p_-(u) < \infty$ koşulunu sağlayan her $u \in SC_\Phi^+$ için negatif olmayan (u_n) ve (ξ_n) dizileri bulunabilir öyle ki $u_n \rightarrow u$, $\xi_n \rightarrow p_+(u)$ ve $(u_n) \subseteq SC_\Phi^+$ sağlanır. Bunun yanı sıra $0 < \xi_n < b_\Psi$ ve $p_+(\beta u_n) < \xi_n < p_+\left(\frac{1}{\beta}u_n\right)$ eşitsizlikleri her $n \in \mathbb{N}$ ve her $0 < \beta < 1$ için sağlanır.

İspat. Durum 1 : İlk olarak $u \in D_\Phi$ kabul edelim yani $p_-(u) < p_+(u)$ sağlansın.

$d = p_+(u) - p_-(u)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = u$ şeklinde seçelim. $p_+(u) < \infty$ şartı altında $\xi_n = p_+(u) - \frac{d}{n+1}$, $p_+(u) = \infty$ şartı altında ise $\xi_n = p_-(u) + n$ olarak belirlensin. Ayrıca $u \in D_\Phi$ olduğundan, $0 = p_-(0) < p_+(u)$ olduğu biliniyor.

$p_+(u) < \infty$ için, Young eşitliğinden $up_+(u) = \Phi(u) + \Psi(p_+(u))$ olur. Burada u , $p_+(u)$ ve $\Phi(u)$ sonlu olduğundan $\Psi(p_+(u))$ da sonludur. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < \xi_n < p_+(u) \leq b_\Psi = \sup\{v > 0 : \Psi(v) < \infty\}$$

olur. Eğer $p_+(u) < \infty$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$0 < \xi_n = p_-(u) + n < \infty = \lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u) = b_\Psi$$

olur. Böylece, her $n \in \mathbb{N}$ için, $u = u_n \in SC_\Phi^+$, $\xi_n \rightarrow p_+(u)$ ve her $0 < \beta < 1$ için

$$p_+(\beta u_n) = p_+(\beta u) \leq p_-(u) < \xi_n < p_+(u) \leq p_+\left(\frac{1}{\beta}u\right) = p_+\left(\frac{1}{\beta}u_n\right)$$

elde edilir.

Durum 2 : Şimdi $u \notin D_\Phi$ olsun. Bu sebeple p_+ , u noktasında süreklidir. Φ ve p_+ bir $\varepsilon > 0$ için $[0, u + \varepsilon)$ üzerinde sonludur. Aksi takdirde her $v > u$ için $p_+(v) = \infty$ sağlanırdı, dolayısıyla p_+ fonksiyonu, D_Φ kümesi dışında sürekli olduğundan $p_-(u) < \infty = p_+(u) = \lim_{v \rightarrow u^+} p_+(v)$ olurdu ve bu da $u \notin D_\Phi$ olması ile çelişirdi.

Eğer $u \in \overline{M_\Phi}$ ise $u_n \rightarrow u$ olacak şekilde bir $(u_n) \subseteq M_\Phi \cap [0, u + \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq SC_\Phi^+$ dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\xi_n = p_+(u_n)$ olarak seçilirse, p_+ 'nın bu küme üzerindeki kesin artanlığı ve Young eşitliğinden $\xi_n < p_+(u + \frac{\varepsilon}{2}) \leq b_\Psi$ olur. Ayrıca p_+ fonksiyonu, u noktasında sürekli olduğu

için $\xi_n \rightarrow p_+(u)$ olmalıdır. O halde p_+ fonksiyonu, M_Φ üzerinde kesin artan olduğundan her $0 < \beta < 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$p_+(\beta u_n) < p_+(u_n) = \xi_n < p_+\left(\frac{1}{\beta}u_n\right)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Eğer $u \notin \overline{M_\Phi}$ ise Sonuç 2.1.30'dan $u \in \overline{D_\Phi}$ olmalıdır. O zaman, $u_n \rightarrow u$ olacak şekilde bir $(u_n) \subseteq D_\Phi \cap (0, u + \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq SC_\Phi^+$ dizisi vardır. Şimdi ise

$$d_n = p_+(u_n) - p_-(u_n) \text{ ve } \xi_n = p_+(u_n) - \frac{d_n}{n+1}$$

olarak seçilsin. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için, $0 < d_n \leq p_+(u_n) \leq p_+(u + \frac{\varepsilon}{2}) < \infty$ olur ve dolayısıyla

$$\xi_n \leq p_+(u_n) \leq p_+\left(u + \frac{\varepsilon}{2}\right) < b_\Psi$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada (d_n) sınırlı ve p_+ fonksiyonu, u noktasında sürekli olduğundan, $\xi_n \rightarrow p_+(u)$ olur, her $0 < \beta < 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$p_+(\beta u_n) \leq p_-(u_n) < \xi_n < p_+(u_n) \leq p_+\left(\frac{1}{\beta}u_n\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Böylece üç durum için de aranan dizilerin varlığı gösterilmiş olur.

2.2 P-AMEMİYA NORMLARI

Orlicz uzayları üzerinde Luxemburg ve Orlicz normlarının tanımlı olduğundan bahsedilmişti. Şimdi $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere aşağıda tanımlanacak olan s_p fonksiyonu aracılığıyla üretilen p -Amemiya normları tanımlanacak ve [4, 9] çalışmaları temel alınarak bu normlara ilişkin sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.2.1 i) $1 \leq p \leq \infty$ ve $u \geq 0$ için

$$s_p(u) = \begin{cases} (1 + u^p)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max\{1, u\}, & p = \infty \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Böyle tanımlanan s_p fonksiyonu konvektir ve $1 \leq p < \infty$ için $[0, \infty)$ üzerinde kesin artandır. $p = \infty$ için $[1, \infty)$ üzerinde kesin artan ve $(0, 1)$ üzerinde sabit bir fonksiyondur.

ii) Bir $f \in L^0(G)$ için $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\|\cdot\|_{\Phi, p}$ p -Amemiya fonksiyonu, s_p fonksiyonu aracılığıyla

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi, p} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} s_p(I_{\Phi}(kf)) = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s_p\left(\int \Phi(kf) d\mu\right) \\ &= \begin{cases} (1 + (\int \Phi(kf) d\mu)^p)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max\{1, \int \Phi(kf) d\mu\}, & p = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $L^{\Phi}(G)$ Orlicz uzayı üzerinde p -Amemiya fonksiyonunun bir norm olduğu daha sonra gösterilecektir.

Önerme 2.2.2 Luxemburg normu ve ∞ -Amemiya fonksiyonu aynı formüle sahiptir.

İspat. Kabul edelim ki $f \in L^0(G)$ olsun.

Eğer $I_{\Phi}(f) > 1$ iken $I_{\Phi}(f) < \|f\|_{\Phi} = \inf\{\lambda > 0 : I_{\Phi}(\frac{f}{\lambda}) \leq 1\}$ olursa, I_{Φ} fonksiyonunun konveksliğinden $1 < I_{\Phi}\left(\frac{f}{I_{\Phi}(f)}\right) \leq \frac{1}{I_{\Phi}(f)} I_{\Phi}(f) = 1$ olurdu ve $1 < 1$ çelişkisi elde edilirdi. O halde, $I_{\Phi}(f) > 1$ ise $I_{\Phi}(f) \geq \|f\|_{\infty}$ olmalıdır. Böylece, $I_{\Phi}(\frac{f}{\lambda}) > 1$ olacağından $I_{\Phi}(\frac{f}{\lambda}) \geq \frac{\|f\|_{\Phi}}{\lambda}$ elde edilir ve denk olarak $\lambda I_{\Phi}(\frac{f}{\lambda}) \geq \|f\|_{\Phi}$ olur. Üçüncü adımda $\lambda = \frac{1}{k}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi} &= \inf_{I_{\Phi}(kf) \leq 1} \lambda = \min \left\{ \inf_{I_{\Phi}(\frac{f}{\lambda}) \leq 1} \lambda, \inf_{I_{\Phi}(\frac{f}{\lambda}) > 1} \lambda I_{\Phi}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \right\} \\ &= \min \left\{ \inf_{I_{\Phi}(kf) \leq 1} \frac{1}{k}, \inf_{I_{\Phi}(kf) > 1} \frac{1}{k} I_{\Phi}(kf) \right\} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$A = \inf_{I_{\Phi}(kf) \leq 1} \frac{1}{k} \text{ ve } B = \inf_{I_{\Phi}(kf) > 1} \frac{1}{k} I_{\Phi}(kf) \text{ olsun.}$$

$$\text{Eğer } \min\{A, B\} = A \text{ ise } \min\{A, B\} = \inf_{I_{\Phi}(kf) \leq 1} \frac{1}{k} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} \max\{1, I_{\Phi}(kf)\} \text{ ve}$$

$$\min\{A, B\} = B \text{ ise } \min\{A, B\} = \inf_{I_{\Phi}(kf) > 1} \frac{1}{k} I_{\Phi}(kf) = \inf_{k>0} \frac{1}{k} \max\{1, I_{\Phi}(kf)\} \text{ olur.}$$

Sonuç olarak, her $f \in L^0(G)$ için $\|f\|_{\Phi} = \|f\|_{\Phi, \infty}$ eşitliği elde edilmiş olur.

Teorem 2.2.3 Orlicz uzayı üzerinde $1 \leq p \leq \infty$ için p -Amemiya fonksiyonu, Luxemburg normuna denk olan bir normdur. Ayrıca bir $f \in L^0(G)$ ve $1 \leq p < \infty$ için $\|f\|_\Phi \leq \|f\|_{\Phi,p} \leq 2^{1/p} \|f\|_\Phi$ eşitsizliği sağlanır. Üstelik $(L^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,p})$ bir Banach uzayıdır.

İspat. Bir $f \in L^0(G)$ alınsın. Burada $p = \infty$ için $\|f\|_\Phi = \|f\|_{\Phi,\infty}$ olduğundan $1 \leq p < \infty$ kabul edilebilir.

$\|f\|_\Phi = \inf_{k>0} \frac{1}{k} \max\{1, I_\Phi(kf)\}$ eşitliği Önerme 2.2.2'den biliniyor. Eğer

$$\max\{1, I_\Phi(kf)\} = 1 \text{ ise } \inf_{k>0} \frac{1}{k} \leq \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi^p(kf))^{1/p}$$

olur. Diğer yandan,

$$\max\{1, I_\Phi(kf)\} = I_\Phi(kf) \text{ ise } \max\{1, I_\Phi(kf)\} = (I_\Phi^p(kf))^{1/p} \leq (1 + I_\Phi^p(kf))^{1/p}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin iki tarafından $k > 0$ üzerinden infimum alınırsa,

$$\inf_{k>0} \frac{1}{k} \max\{1, I_\Phi(kf)\} \leq \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi^p(kf))^{1/p}$$

bulunur. Dolayısıyla iki durumda da $\|f\|_\Phi \leq \|f\|_{\Phi,p}$ sağlanır.

Diğer yandan, $2^{1/p} \|f\|_\Phi = 2^{1/p} \inf\{\frac{1}{k} : I_\Phi(kf) \leq 1\}$ olur. İnfimum tanımından, her $\varepsilon > 0$ için bir $k_\varepsilon > 0$ vardır öyle ki

$$2^{1/p} \|f\|_\Phi + \varepsilon \geq \frac{1}{k_\varepsilon} (1 + I_\Phi^p(k_\varepsilon f))^{1/p} \geq \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi^p(kf))^{1/p} = \|f\|_{\Phi,p}$$

sağlanır. O halde, $\|f\|_{\Phi,p} \leq 2^{1/p} \|f\|_\Phi$ eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $\|\cdot\|_{\Phi,p}$ fonksiyonunun Orlicz uzayı üzerinde bir norm olduğunu gösterelim.

1) Bir $f \in L^0(G)$ için $\|f\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s_p(I_\Phi(kf))$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir $k_\varepsilon > 0$ bulunur öyle ki $\|f\|_{\Phi,p} + \varepsilon \geq \frac{1}{k_\varepsilon} s_p(I_\Phi(k_\varepsilon f)) \geq 0$ dolayısıyla $\|f\|_{\Phi,p} \geq 0$ sağlanır.

2) $f_1, f_2 \in L^0(G)$ olsun. Yine infimum tanımından, her $\varepsilon > 0$ için $k_1, k_2 > 0$ bulunabilir öyle ki $\frac{1}{k_i} s_p(I_\Phi(k_i f_i)) \leq \|f_i\|_{\Phi,p} + \frac{\varepsilon}{2}$, $i \in \{1, 2\}$ sağlanır. Kabul edelim ki $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ olsun. Burada, s_p ve I_Φ fonksiyonları, artan ve konveks olduğundan $s_p \circ I_\Phi$ fonksiyonu da aynı özelliklere

sahiptir. O halde, her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_{\Phi,p} &\leq \frac{1}{k} s_p(I_\Phi(k(f_1 + f_2))) = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} s_p \circ I_\Phi \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} f_1 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} f_2 \right) \\ &\leq \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \frac{k_2}{k_1 + k_2} s_p \circ I_\Phi(k_1 f_1) + \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \frac{k_1}{k_1 + k_2} s_p \circ I_\Phi(k_2 f_2) \\ &= \frac{1}{k_1} s_p \circ I_\Phi(k_1 f_1) + \frac{1}{k_2} s_p \circ I_\Phi(k_2 f_2) \leq \|f_1\|_{\Phi,p} + \frac{\varepsilon}{2} + \|f_2\|_{\Phi,p} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için $\|f_1 + f_2\|_{\Phi,p} \leq \|f_1\|_{\Phi,p} + \|f_2\|_{\Phi,p} + \varepsilon$ olur. O halde, $\|f_1 + f_2\|_{\Phi,p} \leq \|f_1\|_{\Phi,p} + \|f_2\|_{\Phi,p}$ eşitsizliği elde edilir.

3) $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$$\|\lambda f\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s_p \circ I_\Phi(k\lambda f) = |\lambda| \inf_{k>0} \frac{1}{k|\lambda|} s_p \circ I_\Phi(k\lambda f) = |\lambda| \|f\|_{\Phi,p}$$

bulunur.

4) $f = 0$ ise $\|f\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + (\int \Phi(kf) d\mu)^p)^{1/p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} = 0$ olur.

$\|f\|_{\Phi,p} = 0$ ise $\|f\|_{\Phi,p} \geq \|f\|_\Phi \geq 0$ olduğundan $\|f\|_\Phi = 0$ ve Luxemburg normu bir norm olduğu için $f = 0$ olmalıdır. O halde, $\|f\|_{\Phi,p} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $f = 0$ olmasıdır.

Sonuç olarak, $\|\cdot\|_{\Phi,p}$, $L^\Phi(G)$ üzerinde bir normdur ve Luxemburg normuna denktir. O halde, Orlicz uzayları Luxemburg normuyla Banach uzayı olduklarından $(L^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,p})$ bir Banach uzayıdır [14].

Uyarı : Buradan sonra $1 \leq p \leq \infty$ için p -Amemiya normu ile verilen Orlicz uzayını $L_p^\Phi(G)$ ile yani $(L^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,p}) = L_p^\Phi(G)$ şeklinde gösterilecektir.

Teorem 2.2.5'in ispatı için [9] çalışmasındaki yöntemlerin benzerleri kullanılacak ve bunun için aşağıdaki özellik tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.4 (Fatou Özelliği, [9]) Bir $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayı için, $(f_n) \subset L^\Phi(G)$ ve bir $f \in L^0(G)$ alınsın. Ayrıca $\|\cdot\|$, $L^\Phi(G)$ üzerinde bir norm olsun. Eğer $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$ ise $f \in L^\Phi(G)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \|f\|$ gerçekleşirse, $\|\cdot\|$ normu Fatou özelliğine sahiptir denir.

Teorem 2.2.5 Orlicz normu ve 1-Amemiya normu aynı formüle sahiptir.

İspat. Bir $f \in L^0(G)$ için Young eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \int |f(t)g(t)|d\mu(t) &= \frac{1}{k} \int k|f(t)g(t)|d\mu(t) \\ &\leq \frac{1}{k} \int \Phi(kf(t))d\mu(t) + \frac{1}{k} \int \Psi(g(t))d\mu(t) \\ &= \frac{1}{k} (I_\Phi(kf) + I_\Psi(g)) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $I_\Psi(g) \leq 1$ olacak şekilde $g \in L^\Psi(G)$ fonksiyonları üzerinden supremum alınırsa, $\|f\|_\Phi^o \leq \frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kf))$ eşitsizliği elde edilir. Şimdi ise $k > 0$ değerleri üzerinden infimum alınırsa,

$$\|f\|_\Phi^o \leq \|f\|_{\Phi,1} \quad (2.1)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi 1-Amemiya normunun Fatou özelliğine sahip olduğunu yani $f_n \subset L_1^\Phi(G)$ ve $f \in L^0(G)$ için $0 \leq f_n \nearrow f$ ve $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\Phi,1} < \infty$ ise $f \in L_1^\Phi(G)$ ve $\|f\|_{\Phi,1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi,1}$ koşullarının sağlandığını iddia ediyoruz.

Bu iddiayı ispatlamak amacıyla kabul edelim ki $0 \leq f_n \nearrow f$, $f_n \subset L_1^\Phi(G)$, $f \in L^0(G)$ ve $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\Phi,1} < \infty$ koşulları sağlansın. $\alpha_n := \|f_n\|_{\Phi,1}$ olarak tanımlansın. Böylece,

$$\alpha_n = \|f_n\|_{\Phi,1} = \inf_{k>0} \frac{1 + I_\Phi(kf_n)}{k} \leq \inf_{k>0} \frac{1 + I_\Phi(kf)}{k} = \|f\|_{\Phi,1}$$

olur. Bu eşitsizliğin iki tarafından $\alpha := \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$ belirlenerek supremum alınırsa,

$$\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f\|_{\Phi,1} = \|f\|_{\Phi,1}$$

sağlanır. Dolayısıyla $\|f\|_{\Phi,1} \leq \alpha$ eşitsizliği gösterilirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi,1} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\Phi,1} = \|f\|_{\Phi,1}$$

olduğu gösterilmiş olacaktır.

$\|f\|_{\Phi,1} > \alpha$ olursa, $\|f\|_{\Phi,1} > \alpha + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunurdu. Bu ise her $k > 0$ için $\frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kf)) \geq \alpha + \delta$ olması demektir. Fatou Lemması'ndan

$I_\Phi(kf) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I_\Phi(kf_n)$ eşitsizliği gerçekleşir. O halde,

$$\frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kf_{n_m})) \geq \frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kf)) \geq \alpha + \delta$$

olacak şekilde $(f_{n_m}) \subset (f_n)$ alt dizisi vardır. Bu da her $m \in \mathbb{N}$ için $\|f_{n_m}\|_{\Phi,1} \geq \alpha + \delta > \alpha$ olmasını gerektirir. Bu ise α sayısının supremum olması ile çelişir. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi,1} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\Phi,1} = \|f\|_{\Phi,1} < \infty$$

olduğu elde edilir. Ayrıca $\|f\|_{\Phi,1} < \infty$ olduğundan $f \in L_1^\Phi(G)$ olur. Dolayısıyla 1-Amemiya normu Fatou özelliğini sağlar.

Hem 1-Amemiya normu hem de Orlicz normu Fatou özelliğini sağladığından negatif olmayan bir $f \in L^\Phi(G)$ basit fonksiyonu için $\|f\|_{\Phi,1} \leq \|f\|_\Phi^o$ olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır. Çünkü bir $g \in L^\Phi(G)$ için $|g|$ negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan, $|g|$ fonksiyonuna yakınsayan ve negatif olmayan basit fonksiyonların bir dizisi olan (f_n) bulunabilir [3]. Ayrıca hem Amemiya normu hem de Orlicz normu için $\|f\|_{\Phi,1} = \| |f| \|_{\Phi,1}$ ve $\|f\|_\Phi^o = \| |f| \|_\Phi^o$ eşitlikleri sağlandığından, $f \in L^\Phi(G)$ basit fonksiyonu için $\|f\|_{\Phi,1} \leq \|f\|_\Phi^o$ eşitsizliğinin gösterilmesi yeterlidir.

Şimdi, Φ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $(-b_{M_\varepsilon}, b_{M_\varepsilon})$ üzerinde pürüzsüz yani türevi sürekli olan ve her $u \geq 0$ için $\Phi(u) \leq M_\varepsilon(u) \leq \Phi((1 + \varepsilon)u)$ eşitsizliklerini sağlayan bir M_ε Orlicz fonksiyonu bulunabileceğini ve bunun yanı sıra $L^\Phi(G)$ ve $L^{M_\varepsilon}(G)$ uzaylarının aynı olduğunu iddia ediyoruz.

Bu iddiayı ispatlarken her $u \geq 0$ ve keyfi bir $\varepsilon > 0$ için

$$M_\varepsilon(u) = \frac{1}{\ln(1 + \varepsilon)} \int_u^{(1+\varepsilon)u} \frac{\Phi(s)}{s} ds$$

alalım. Φ fonksiyonunun sürekliliğinden M_ε pürüzsüz bir Orlicz fonksiyonudur. Şimdi eşitsizliklerin sağlandığını gösterelim. Φ fonksiyonunun artanlığı ve integralin monotonluğundan, $\varepsilon > 0$ için

$$\int_u^{(1+\varepsilon)u} \frac{\Phi(u)}{s} ds \leq \int_u^{(1+\varepsilon)u} \frac{\Phi(s)}{s} ds$$

elde edilir. O halde,

$$\Phi(u)(\ln((1+\varepsilon)u) - \ln u) \leq \int_u^{(1+\varepsilon)u} \frac{\Phi(s)}{s} ds$$

olur. Buradan,

$$\Phi(u) \ln \left(\frac{(1+\varepsilon)u}{u} \right) \leq \int_u^{(1+\varepsilon)u} \frac{\Phi(s)}{s} ds$$

ve denk olarak

$$\Phi(u) \leq \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} \int_u^{(1+\varepsilon)u} \frac{\Phi(s)}{s} ds = M_\varepsilon(u)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\int_u^{(1+\varepsilon)u} \frac{\Phi(s)}{s} ds \leq \int_u^{(1+\varepsilon)u} \frac{\Phi((1+\varepsilon)u)}{s} ds = \Phi((1+\varepsilon)u) \ln(1+\varepsilon)$$

elde edilir ve buradan

$$M_\varepsilon(u) = \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} \int_u^{(1+\varepsilon)u} \frac{\Phi(s)}{s} ds \leq \Phi((1+\varepsilon)u)$$

bulunur. Böylece,

$$\Phi(u) \leq M_\varepsilon(u) \leq \Phi((1+\varepsilon)u) \quad (2.2)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Eğer $f \in L^{M_\varepsilon}(G)$ ise $\int M_\varepsilon(kf) d\mu < \infty$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı vardır. Her $u \geq 0$ için $\Phi(u) \leq M_\varepsilon(u)$ olduğundan $\int \Phi(kf) d\mu \leq \int M_\varepsilon(kf) d\mu < \infty$ yani $f \in L^\Phi(G)$ dolayısıyla $L^{M_\varepsilon}(G) \subseteq L^\Phi(G)$ kapsaması elde edilir.

Diğer taraftan, $f \in L^\Phi(G)$ ise $\int \Phi(kf) d\mu < \infty$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı vardır. Her $u \geq 0$ için $M_\varepsilon(u) \leq \Phi((1+\varepsilon)u)$ olduğundan $\int M_\varepsilon\left(\frac{k}{(1+\varepsilon)}kf\right) d\mu \leq \int \Phi(kf) d\mu < \infty$ sağlanır. Bu ise $f \in L^{M_\varepsilon}(G)$ olması anlamına gelir. Dolayısıyla $L^\Phi(G) \subseteq L^{M_\varepsilon}(G)$ kapsaması da elde edilir. Bu iki kapsamadan $L^\Phi(G) = L^{M_\varepsilon}(G)$ eşitliği gösterilmiş olur.

Ayrıca $N_\varepsilon, M_\varepsilon$ fonksiyonunun tümleyen Orlicz fonksiyonu olmak üzere $\Phi \leq M_\varepsilon$ olduğundan $\sup_{u \geq 0} \{u|v| - M_\varepsilon(u)\} \leq \sup_{u \geq 0} \{u|v| - \Phi(u)\}$ elde edilir. O halde, her $v \in \mathbb{R}$ için

$N_\varepsilon(v) \leq \Psi(v)$ sağlanır ve bu sebeple $L^\Psi(G) \subseteq L^{N_\varepsilon}(G)$ olur. Bu durumda,

$$\left\{ \int |f(t)g(t)|d\mu(t) : g \in L^\Psi(G), I_\Psi(g) \leq 1 \right\} \subseteq \left\{ \int |f(t)g(t)|d\mu(t) : g \in L^{N_\varepsilon}(G), I_{N_\varepsilon}(g) \leq 1 \right\}$$

olur. Böylece

$$\|f\|_\Phi^o \leq \|f\|_{M_\varepsilon}^o \leq (1 + \varepsilon)\|f\|_\Phi^o \quad (2.3)$$

elde edilir.

Ek olarak (2.2)'den

$$\begin{aligned} \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi(kf)) &\leq \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_{M_\varepsilon}(kf)) \\ &\leq \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi((1 + \varepsilon)kf)) \\ &= (1 + \varepsilon) \inf_{k>0} \frac{1}{k(1 + \varepsilon)} (1 + I_\Phi((1 + \varepsilon)kf)) \end{aligned}$$

sağlanır ve buradan,

$$\|f\|_{\Phi,1} \leq \|f\|_{M_\varepsilon,1} \leq (1 + \varepsilon)\|f\|_{\Phi,1} \quad (2.4)$$

olduğu elde edilir.

O halde, pürüzsüz bir Orlicz fonksiyonu için 1-Amemiya normunun Orlicz normuna eşit olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Eğer bu eşitliği gösterebilirsek (2.1), (2.3) ve (2.4)'ten

$$\|f\|_\Phi^o \leq \|f\|_{\Phi,1} \leq \|f\|_{M_\varepsilon,1} = \|f\|_{M_\varepsilon}^o \leq (1 + \varepsilon)\|f\|_\Phi^o$$

olur ve buradan

$$\|f\|_\Phi^o \leq \|f\|_{\Phi,1} \leq (1 + \varepsilon)\|f\|_\Phi^o$$

olduğu elde edilir. Burada $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan her $f \in L^\Phi(G)$ için $\|f\|_\Phi^o = \|f\|_{\Phi,1}$ eşitliği sağlanır.

Buradan, normların eşitliğini negatif olmayan $f \in L^\Phi(G)$ basit fonksiyonu için, Φ Orlicz fonksiyonunun pürüzsüz olması kabulü altında ispatlamamız yeterli olacaktır. Bu eşitliği aşağıdaki üç durum için ayrı ayrı inceleyeceğiz.

I. Φ Orlicz fonksiyonu sonlu değerli ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$

II. $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} < \infty$

III. $b_\Phi < \infty$

Durum I: Kabul edelim ki $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$ ve Φ sonlu değerler alıyor olsun. Φ fonksiyonunun pürüzsüzlüğünden $\lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u) = \infty$ olur. Ayrıca bir negatif olmayan $f \in L^\Phi(G)$ basit fonksiyonu için Φ sonlu değerler aldığından herhangi bir $k > 0$ için $I_\Psi(p_+(kf)) < \infty$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} I_\Psi(p_+(kf)) = \infty$ sağlanır. $I_\Psi(p_+(kf))$ sürekli olduğundan ara değer özelliğini sağlar ve bu sebeple $I_\Psi(p_+(k_0f)) = 1$ olacak şekilde bir $k_0 > 0$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi,1} &\leq \frac{1}{k_0}(1 + I_\Phi(k_0f)) = \frac{1}{k_0}(I_\Psi(p_+(k_0f)) + I_\Phi(k_0f)) \\ &= \frac{1}{k_0} \int k_0 f(t) p_+(k_0 f(t)) d\mu(t) \\ &= \int f(t) p_+(k_0 f(t)) d\mu(t) \leq \|f\|_\Phi^o \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum II: Kabul edelim ki $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} < \infty$ olsun. O zaman Φ orijinden geçen bir eğik asimptota sahiptir dolayısıyla $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u)$ bulunur [4]. O halde, Young eşitliğinden $b_\Psi = \lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u)$ olduğu bilindiğinden, $b_\Psi = \lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u}$ ve buradan pürüzsüz Φ Orlicz fonksiyonu için $u \rightarrow \infty$ iken $p_+(u) \nearrow b_\Psi$ elde edilir. Şimdi negatif olmayan $f \in L^\Phi(G)$ basit fonksiyonu için iki alt durumu düşüneceğiz.

II.a: $\text{supp} f$, f fonksiyonunun desteği olmak üzere $\mu(\text{supp} f) > \frac{1}{\Psi(b_\Psi)}$ olsun. O halde, $\mu(\text{supp} f) > \frac{1}{\Psi(b_\Psi - \delta)}$ sağlanacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Herhangi bir $\varepsilon \in (0, \delta]$ alalım ve $u_\varepsilon > 0$ her $u \geq u_\varepsilon$ için $p_+(u) \geq b_\Psi - \varepsilon$ olacak şekilde yeterince büyük olsun. $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{t \in G : f(t) > \frac{u_\varepsilon}{n}\}$ olarak tanımlansın. O halde, $\mu(A_n) > \frac{1}{\Psi(b_\Psi - \varepsilon)}$ olacak şekilde en azından bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. Bir $t \in A_m$ için $mf(t) > u_\varepsilon$ olduğundan $p_+(mf(t)) > p_+(u_\varepsilon) \geq b_\Psi - \varepsilon$ olur. Sonuç olarak, $\Psi(p_+(mf(t))) \geq \Psi(b_\Psi - \varepsilon)$ ve dolayısıyla

$$1 = \frac{\Psi(b_\Psi - \varepsilon)}{\Psi(b_\Psi - \varepsilon)} < \Psi(b_\Psi - \varepsilon) \mu(A_m) \leq I_\Psi(p_+(mf)) < \infty$$

olur. O halde Durum I'deki gibi bir $k_0 > 0$ için $I_\Psi(p_+(k_0f)) = 1$ ve buradan $\|f\|_{\Phi,1} \leq \|f\|_\Phi^o$ olduğu elde edilir.

II.b : Bu kez $\mu(\text{supp}f) \leq \frac{1}{\Psi(b_\Psi)}$ olsun. $I_\Psi(g) \leq 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman μ -h h $t \in G$ için $|g(t)| \leq b_\Psi$ olur çünkü her $u > b_\Psi$ için $\Psi(u) = \infty$ sağlanır. Buradan,

$$\left| \int f(t)g(t)d\mu(t) \right| \leq \int |f(t)g(t)|d\mu(t) \leq b_\Psi \int |f(t)|d\mu = b_\Psi \|f\|_1$$

bulunur. $h(t) = b_\Psi \chi_{\text{supp}f}(t)$ olarak belirlenirse aşağıdakileri elde edilir.

$$\int f(t)h(t)d\mu(t) = b_\Psi \|f\|_1 \text{ ve } I_\Psi(h) = \Psi(b_\Psi)\mu(\text{supp}f) \leq 1$$

Supremum alınırsa $\|f\|_\Phi^o = b_\Psi \|f\|_1$ olur. Diğer yandan Monoton Yakınsaklık Teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi,1} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi(kf)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi(kf)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} I_\Phi(kf) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\text{supp}f} \frac{|f(t)|}{k_n |f(t)|} \Phi(k_n |f(t)|) d\mu(t) \\ &= \int_{\text{supp}f} |f(t)| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(k_n |f(t)|)}{k_n |f(t)|} d\mu(t) = b_\Psi \|f\|_1 = \|f\|_\Phi^o \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum III : Bu durumu da iki alt duruma ayırarak inceleyeceğiz.

III.a : Kabul edelim ki $b_\Phi < \infty$ ve $p_-(b_\Phi) = \infty$ olsun. Normların homojenlik özelliğinden, eşitliği sadece $\|f\|_{\Phi,1} = 1$ olacak şekilde bir $f \in L^\Phi(G)$ basit fonksiyonu için göstermemiz yeterlidir.

Şimdi, $f \in L^\Phi(G)$ basit fonksiyonu her $i \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{R}$ ve (A_i) ölçülebilir küme dizisi için $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ kanonik gösterimine sahip olsun ve $\|f\|_{\Phi,1} = 1$ sağlansın. $m \in \mathbb{N}$ için $c_m = \max\{c_i : i = 1, \dots, n\}$ olsun. Tanımlarından Φ , $[0, b_\Phi)$ üzerinden sonlu değer alır ve $u \nearrow b_\Phi$ iken $p_+(u) \nearrow \infty$ sağlanır. O halde, $0 < k < \frac{b_\Phi}{c_m}$ sayısı bulunabilir öyle ki $\Psi(p_+(kc_m))\mu(A_m) > 1$ olur. Ayrıca her $t \in G$ için

$$0 \leq \Psi(p_+(kf(t))) \leq \Psi(p_+(kc_m)) < \infty$$

ve bu $1 < I_\Psi(p_+(kf)) < \infty$ olduğunu gösterir.

Ayrıca $\lambda \rightarrow 0$ için $I_\Psi(p_+(\lambda f)) \rightarrow 0$ sağlanır ve λ değişkenli $I_\Psi(p_+(\lambda f))$ fonksiyonu $\left[0, \frac{b_\Phi}{c_m}\right]$ üzerinde sürekli olduğundan bir $k_0 \in (0, k)$ için $I_\Psi(p_+(k_0 f)) = 1$ olur. Buradan, $\|f\|_{\Phi,1} \leq \|f\|_\Phi^o$ sağlanır.

III.b : Şimdi ise $b_\Phi < \infty$ ve $p_-(b_\Phi) < \infty$ olsun. f ve c_m , III.a şıkkında olduğu gibi tanımlansın. Basit fonksiyon tanımından $\Phi(c_m) > 0$ ise $0 < \mu(A_m) < \infty$ olmalıdır. Yine, $k = \frac{b_\Phi}{c_m}$ olsun. Eğer $I_\Psi(p_+(kf)) \geq 1$ ise bir $k_0 \in (0, k]$ için yine ara değer özelliğinden $I_\Psi(p_+(k_0 f)) = 1$ olur. Dolayısıyla $\|f\|_{\Phi,1} \leq \|f\|_\Phi^o$ sağlanır.

Eğer $I_\Psi(p_+(kf)) < 1$ ise k sayısının seçiminden her $t \in A_m$ için $kf(t) = b_\Phi$ olur. $A \subseteq A_m$ sonlu ve pozitif ölçülü bir alt küme olsun. Ψ sonlu değerler aldığından, bir $\beta > p_-(b_\Phi)$ bulabiliriz öyle ki $I_\Psi(p_+(kf)\chi_{G \setminus A}) + \Psi(\beta)\mu(A) = 1$ sağlanır.

Burada $g(t) = p_+(kf(t))\chi_{G \setminus A}(t) + \beta\chi_A(t)$ olarak tanımlarsak μ hemen hemen her $t \in G$ için $\Phi(kf(t)) + \Psi(g(t)) = kf(t)g(t)$ ve $I_\Psi(g) = 1$ olur. Ayrıca $\|f\|_{\Phi,1} = 1$ kabulü gereği $\|f\|_{\Phi,1} = 1 = \|f\|_\Phi^o$ bulunur.

(2.1) eşitsizliği göz önüne alınırsa, üç durumda da her $f \in L^0(G)$ için $\|f\|_{\Phi,1} = \|f\|_\Phi^o$ eşitliği elde edilir.

□

O halde Teorem 2.2.5 ve Önerme 2.2.2 göz önüne alınarak, buradan itibaren Luxemburg normu ile verilen Orlicz uzayı $L_\infty^\Phi(G)$ ve Orlicz normu ile verilen Orlicz uzayı $L_1^\Phi(G)$ gösterilecektir.

Aşağıda $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere bir $f \in S(L_p^\Phi(G))$ elemanının, $B(L_p^\Phi(G))$ kümesinin bir uç noktası olmasında ölçüt verilmesi için önemli role sahip olan fonksiyonlar tanımlanacaktır.

Tanım 2.2.6 $\alpha_p : L_p^\Phi(G) \rightarrow [-1, \infty]$, $\kappa_p^* : L_p^\Phi(G) \rightarrow [0, \infty)$ ve $\kappa_p^{**} : L_p^\Phi(G) \rightarrow (0, \infty]$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$i) \alpha_p(f) = \begin{cases} I_\Phi^{p-1}(f)I_\Psi(p_+(|f|)) - 1, & 1 \leq p < \infty \\ -1, & p = \infty \text{ ve } I_\Phi(f) \leq 1 \\ I_\Psi(p_+(|f|)), & p = \infty \text{ ve } I_\Phi(f) > 1 \end{cases}$$

$$ii) \kappa_p^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \geq 0\}$$

$$\text{iii) } \kappa_p^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \leq 0\}$$

Ayrıca, k arttığında $\alpha_p(kf)$ artacağından her $f \in L_p^\Phi(G)$ için $\kappa_p^*(f) \leq \kappa_p^{**}(f)$ olur [4].

Eğer,

$$K_p(f) := \{0 < k < \infty : \kappa_p^*(f) \leq k \leq \kappa_p^{**}(f)\}$$

olarak tanımlanırsa $K_p(f) = \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşulun $\kappa_p^*(f) = \kappa_p^{**}(f) = \infty$ olduğu kolayca görülür.

Aşağıda p -Amemiya normuna ilişkin önemli bir teorem verilecektir.

Teorem 2.2.7 ([4]) Bir $f \in L_p^\Phi(G) \setminus \{0\}$ için,

- i) $\kappa_p^*(f) = \kappa_p^{**}(f) = \infty$ ise $\|f\|_{\Phi,p} = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_p \circ I_\Phi)(kf)$,
 - ii) $\kappa_p^*(f) < \kappa_p^{**}(f) = \infty$ ise her $k \in [\kappa_p^*(f), \infty)$ için $\|f\|_{\Phi,p} = (s_p \circ I_\Phi)(kf)$,
 - iii) $\kappa_p^{**}(f) < \infty$ ise her $k \in [\kappa_p^*(f), \kappa_p^{**}(f)]$ için $\|f\|_{\Phi,p} = (s_p \circ I_\Phi)(kf)$,
- koşulları sağlanmaktadır.

Tanım 2.2.8 i) Bir Φ Orlicz fonksiyonuna, her $f \in L_p^\Phi(G)$ için $\kappa_p^*(f) < \infty$ koşulunu sağlıyorsa κ_p^* sonlu, eğer her $f \in L_p^\Phi(G)$ için $\kappa_p^{**}(f) < \infty$ koşulunu sağlıyorsa κ_p^{**} sonlu denir.

ii) Bir Φ Orlicz fonksiyonuna, her $f \in L_p^\Phi(G)$ için $\kappa_p^*(f) = \kappa_p^{**}(f) < \infty$ koşulunu sağlıyorsa κ_p tek denir.

Aşağıdaki teoremlerde, Φ Orlicz fonksiyonunun κ_p^* sonluluğu ve κ_p tekliği incelenecektir.

Teorem 2.2.9 i) Her $1 \leq p \leq \infty$ için $b_\Phi < \infty$ koşulunu sağlayan Φ Orlicz fonksiyonu κ_p^* sonludur.

ii) Eğer $b_\Phi = \infty$ ve $p = 1$ ise, Φ Orlicz fonksiyonunun κ_1^* sonlu olması için gerek ve yeter koşul Φ 'nin orijinden geçen bir eğik asimptotunun olmamasıdır.

iii) Eğer $b_\Phi = \infty$ ve $1 < p < \infty$ ise Φ Orlicz fonksiyonunun κ_p^* sonlu olması için gerek ve yeter koşul Φ 'nin $[0, \infty)$ üzerinde doğrusal olmamasıdır.

iv) Her Orlicz fonksiyonu κ_∞^* sonludur.

İspat. i): Kabul edelim ki

$$\theta(f) := \inf\{k > 0 : I_\Phi\left(\frac{f}{k}\right) < \infty\}$$

ve

$$A_p(f, k) := \frac{1}{k} s_p(I_\Phi(kf))$$

olsun. O halde,

$$\frac{1}{\theta(f)} = \sup\{k > 0 : I_\Phi(kf) < \infty\}$$

olmalıdır.

Öncelikle, iddia ediyoruz ki $\kappa_p^*(f) \leq \kappa_p^{**}(f) \leq \frac{1}{\theta(f)}$ eşitsizlikleri sağlanır.

Bunun için, $f \in L_p^\Phi(G)$ olmak üzere $\kappa_p^{**}(f) < \infty$ ise Teorem 2.2.7'den

$$A_p(f, \kappa_p^{**}(f)) = \inf_{k>0} A_p(f, k) = \|f\|_{\Phi, p} < \infty$$

bulunur. Dolayısıyla $I_\Phi(\kappa_p^{**}(f)f) < \infty$ olur. Buradan $\kappa_p^{**}(f) \in \{k > 0 : I_\Phi(kf) < \infty\}$ elde edilir. Böylece

$$\kappa_p^{**}(f) \leq \sup\{k > 0 : I_\Phi(kf) < \infty\} = \frac{1}{\theta(f)}$$

yazılır. Ayrıca $\kappa_p^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \leq 0\} = \infty$ ise her $k \geq 0$ için $\alpha_p(kf) \leq 0$ ve dolayısıyla her $k \geq 0$ için $I_\Phi(kf) < \infty$ olur. Bu ise $\frac{1}{\theta(f)} = \infty$ yani $\kappa_p^{**}(f) = \frac{1}{\theta(f)} = \infty$ olduğunu gösterir. O halde,

$$\kappa_p^*(f) \leq \kappa_p^{**}(f) \leq \frac{1}{\theta(f)}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Şimdi $b_\Phi < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\frac{1}{\theta(f)} < \infty$ olmalıdır çünkü $\frac{1}{\theta(f)} = \infty$ olursa her $k > 0$ için $I_\Phi(kf) < \infty$ olurdu ancak $kf > b_\Phi$ için $I_\Phi(kf)$ sonlu olamaz. O halde,

$$\kappa_p^*(f) \leq \kappa_p^{**}(f) \leq \frac{1}{\theta(f)}$$

olduğundan $b_\Phi < \infty$ iken, κ_p^* sonludur.

ii) : Teoremin i) şikkından dolayı $b_\Phi = \infty$ şartı altında incelememiz yeterlidir.

Gerekliklik : Φ Orlicz fonksiyonu, κ_1^* sonlu ve orijinden geçen bir eğik asimptota sahip olsun. Önerme 2.1.22'den $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) < \infty$ olur. Kabul edelim ki $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) = c \in \mathbb{R}$ olsun. Burada μ ölçüsü atomsuz olduğundan $0 < \mu(A) < \infty$ ve $c\mu(A) < 1$ olacak şekilde

ölçülebilir A kümesi bulunabilir. $f = \chi_A$ olsun. Buradan,

$$\int \Psi(p_+(k|f|))d\mu = \int_A \Psi(p_+(k))d\mu \leq c\mu(A) < 1$$

bulunur. O halde, her $k \geq 0$ için $\alpha_1(kf) \leq 0$ olacağından $\kappa_1^*(f) = \infty$ olur ve dolayısıyla Φ fonksiyonu, κ_1^* sonlu olamaz.

Yeterlilik : Kabul edelim ki $f \in L_p^\Phi(G)$ ve Φ orijinden geçen bir eğik asimptota sahip olmasın. Önerme 2.1.22'nin iii) şikkından Φ fonksiyonunun orijinden geçen bir eğik asimptotu olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) < \infty$ olduğundan, kabülümüzden dolayı $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) = \infty$ olmalıdır.

$\lim_{k \rightarrow \infty} I_\Psi(p_+(k|f|)) = \infty$ olduğundan $\{k \geq 0 : I_\Psi(p_+(k|f|)) \geq 0\} \neq \emptyset$ olur. O halde,

$$\kappa_1^*(f) = \inf\{k \geq 0 : I_\Psi(p_+(k|f|)) \geq 0\} < \infty$$

elde edilir. Böylece, Φ Orlicz fonksiyonu κ_1^* sonludur.

iii) : Kabul edelim ki $1 < p < \infty$ olsun.

Gereklilik : Φ Orlicz fonksiyonu, κ_p^* sonlu ve doğrusal olsun. O halde, bir $c > 0$ ve her $u \in [0, \infty)$ için $\Phi(u) = cu$ şeklindedir. Dolayısıyla her u için $p_+(u) = c$ yani

$$\Psi(p_+(u)) = \Psi(c) = up_+(u) - \Phi(u) = uc - cu = 0$$

olur. Böylece her $f \in L_p^\Phi(G)$ ve her $k > 0$ için

$$\alpha_p(kf) = I_\Phi^{p-1}(kf)I_\Psi(p_+(k|f|)) = 0 < 1$$

yani

$$\kappa_p^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \geq 0\} = \inf \emptyset = \infty$$

bulunur. Bu ise, Φ fonksiyonunun κ_p^* sonlu olması ile çelişir.

Yeterlilik : Kabul edelim ki $f \in L_p^\Phi(G)$ ve Φ fonksiyonu, $[0, \infty)$ üzerinde doğrusal olmasın. Φ fonksiyonunun doğrusal olması için gerek ve yeter koşul her u için $\Psi(p_+(u)) = 0$ olduğundan bir $k_0 > 0$ ve bir $f = 0$ için $\Psi(p_+(k_0|f|)) > 0$ olur. Dolayısıyla sıfırdan farklı

ölçüsü olan bir küme üzerinde $\int \Psi(p_+(k_0|f|))d\mu = I_\Psi(p_+(k_0|f|)) > 0$ olmalıdır. O halde,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_\Phi^{p-1}(kf)I_\Psi(p_+(k|f|)) = \infty$$

yani $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_p(kf) = \infty$ olduğundan $\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \geq 0\} \neq \emptyset$ elde edilir. Bu da

$$\kappa_p^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_p(kf) \geq 0\} < \infty$$

olmasını gerektirir yani Φ fonksiyonu, κ_p^* sonludur.

iv) : Bir $f \in L_\infty^\Phi(G) \setminus \{0\}$ alınsın.

Önerme 2.2.2'den $\|f\|_{\Phi, \infty} = \|f\|_\Phi = \inf\{k > 0 : \int \Phi\left(\frac{f}{k}\right) d\mu \leq 1\}$ olur. Fatou Lemması'ndan,

$$\int \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \Phi\left(\frac{f}{k_n}\right) d\mu \leq 1 \text{ ise } \int \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu \leq 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $\alpha_\infty\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right) = -1$ ve buradan $\frac{1}{\|f\|_\Phi} \leq \kappa_\infty^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_\infty(kf) \geq 0\}$ olur.

Şimdi $\kappa_\infty^*(f) = \frac{1}{\|f\|_\Phi}$ olması gerektiğini iddia ediyoruz. Bunun için kabul edelim ki $\frac{1}{\|f\|_\Phi} < \kappa_\infty^*(f)$ olsun. O halde, bir $t > 0$ bulunabilir öyle ki $\frac{1}{\|f\|_\Phi} < t < \kappa_\infty^*(f)$ ve buradan $t \notin \{k \geq 0 : \alpha_\infty(kf) \geq 0\}$ sağlanır. Dolayısıyla $\alpha_\infty(tf) < 0$, yani $\alpha_\infty(tf) = -1$ ve $I_\Phi(tf) \leq 1$ bulunur.

Ayrıca

$$\frac{1}{\|f\|_\Phi} = \frac{1}{\inf\{k > 0 : I_\Phi\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1\}} = \sup\{k > 0 : I_\Phi(kf) \leq 1\}$$

olur. Böylece, $t \leq \frac{1}{\|f\|_\Phi} < t$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $0 < \frac{1}{\|f\|_\Phi} = \kappa_\infty^*(f)$ ve $f \in L_\infty^\Phi(G) \setminus \{0\}$ olduğundan $\kappa_\infty^*(f) = \frac{1}{\|f\|_\Phi} < \infty$ elde edilir, yani Φ fonksiyonu κ_∞^* sonludur.

Teorem 2.2.10 i) Bir Φ Orlicz fonksiyonunun, $p = 1$ ve $a := \sup\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) < 1\}$ olmak üzere, κ_1 tek olması için gerek ve yeter koşul

- a) $a = b_\Phi$ veya Φ fonksiyonunun $[a, b_\Phi)$ üzerinde kesin konveks olması ve
 - b) Φ fonksiyonunun orijinden geçen bir eğik asimptotu olmaması
- koşullarının sağlanmasıdır.

ii) Φ Orlicz fonksiyonunun, $1 < p < \infty$ için κ_p tek olması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun, $[0, \infty)$ üzerinde doğrusal olmamasıdır.

iii) Bir Φ Orlicz fonksiyonunun, $b := \inf\{u \geq 0 : \Phi(u)\mu(G) > 1\}$ olmak üzere, κ_∞ tek olması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $[0, b + \varepsilon]$ aralığı üzerinde doğrusal olmamasıdır.

İspat. i): Eğer $\Psi(p_+(u))\mu(G) < 1$ ise $\Psi(p_+(u)) < \infty$ olur. Young eşitliğinden $\Psi(p_+(u)) = |u|p_+(u) - \Phi(u) < \infty$ ve dolayısıyla $\Phi(u) < \infty$ elde edilir. Buradan,

$$\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) < 1\} \subseteq \{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}$$

olur. İki taraftan supremum alınırsa $a \leq b_\Phi$ sağlanır.

Gereklilik: Φ Orlicz fonksiyonu κ_1 tek olsun. Yani her $f \in L_1^\Phi(G)$ için $\kappa_1^*(f) = \kappa_1^{**}(f) < \infty$ sağlansın. O halde Φ fonksiyonu κ_1^* sonludur ve Teorem 2.2.9'un ii) şikkından κ_1^* sonluluk için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun orijinden geçen bir asimptotunun olmamasıdır.

Şimdi kabul edelim ki (a) şıkkı sağlanmasın yani $a \neq b_\Phi$ olsun. Böylece, $a < b_\Phi$ ve $\Phi, [a, b_\Phi]$ üzerinde kesin konveks olmasın. Önerme 2.1.27'den kesin konvekslik noktası olmayan noktalar afin noktası olacağından, $c < d$ olacak şekilde $[c, d] \subset [a, b_\Phi]$ bulabiliriz öyle ki p_+ fonksiyonu $[c, d]$ üzerinde sabit ve sonludur. O halde, $\Psi(p_+(c)) < \infty$ ve $c > a$ olduğundan $\Psi(p_+(c))\mu(G) \geq 1$ olmalıdır. Burada μ ölçüsü atomsuz olduğundan $\Psi(p_+(c))\mu(E) = 1$ olacak şekilde ölçülebilir bir E kümesi bulunur. Diyer yandan $f = \chi_E$ olsun. O zaman, her $k \in [c, d]$ için,

$$I_\Psi(p_+(kf)) = \int \Psi(p_+(kf))d\mu = \int_E \Psi(p_+(k))d\mu = \Psi(p_+(c))\mu(E) = 1$$

olarak bulunur. Ayrıca, $\kappa_1^*(f) = \inf\{k \geq 0 : I_\Psi(p_+(k|f|)) - 1 \geq 0\}$ ve

$\kappa_1^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : I_\Psi(p_+(k|f|)) - 1 \leq 0\}$ olduğundan $\kappa_1^*(f) \leq c < d \leq \kappa_1^{**}(f)$ olur ki bu Φ fonksiyonunun κ_1^* tek olması ile çelişir.

Yeterlilik: $f \in L_1^\Phi(G) \setminus \{0\}$ olsun. Kabul edelim ki (a) ve (b) koşulları sağlansın ancak Φ fonksiyonu κ_1 tek olmasın. Teorem 2.2.9 ii) şikkından (b) sağlanıyorsa Φ fonksiyonu κ_1^* sonludur. Ayrıca $\kappa_1^*(f) < k < \kappa_1^{**}(f)$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı vardır. O halde, $I_\Psi(p_+(k|f|)) = 1$ olmalıdır. Böylece, $I_\Phi(kf) \geq 0$ elde edilir ve $\mu - \text{hhh}$ $t \in \text{supp} f$ için $kf(t) \notin SC_\Phi$ olur ([4], Lemma 4.2). Bu durumda (a) şikkından $a > 0$, $\mu(G) < \infty$ ve $\mu - \text{hhh}$ $t \in G$ için $k|f(t)| < a$ sonuçlarını elde ederiz. Buradan $\mu - \text{hhh}$ $\Psi(p_+(k|f(t)|)) < \frac{1}{\mu(G)}$ ve $I_\Psi(p_+(k|f|)) < 1$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

ii) : Burada $1 < p < \infty$ kabul edilsin.

Gereklilik : Eğer Φ Orlicz fonksiyonu, κ_p tek ise tanımından her $f \in L_p^\Phi(G)$ için $\kappa_p^*(f) = \kappa_p^{**}(f) < \infty$ dolayısıyla Φ fonksiyonu, κ_p^* sonludur. Teorem 2.2.9'un iii) şıkkından Φ , $[0, \infty)$ üzerinde doğrusal olamaz.

Yeterlilik : Kabul edelim ki Φ fonksiyonu, κ_p^* sonlu ve $f \in L_p^\Phi(G)$ için $\kappa_p^*(f) \neq \kappa_p^{**}(f)$ olsun. O halde,

$\kappa_p^*(f) < k_1 < k_2 < \kappa_p^{**}(f)$ sağlanacak şekilde $0 < k_1 < k_2 < \infty$ sayıları vardır. Bu durumda $i \in \{1, 2\}$ için $\alpha_p(k_i f) = 0$ olmalıdır. Çünkü $k_1 > \kappa_p^*(f)$ ve $k_2 > \kappa_p^*(f)$ olduğundan $\alpha_p(k_i f) \geq 0$ ve benzer şekilde $k_1 < \kappa_p^{**}(f)$ ve $k_2 < \kappa_p^{**}(f)$ olduğundan $\alpha_p(k_i f) \leq 0$ elde edilir. Bu durumda, $i \in \{1, 2\}$ için $0 < I_\Phi(k_i f) < \infty$ ve $0 < I_\Psi(p_+(k_i f)) < \infty$ bulunur. Ayrıca, I_Φ sonlu ve sıfırdan farklı olduğu yerlerde yani (a_Φ, b_Φ) üzerinde kesin artan ve $I_\Psi \circ p_+$ artan olduğundan,

$$0 = \alpha_p(k_1 f) = I_\Phi^{p-1}(k_1 f) I_\Psi(p_+(k_1 |f|)) - 1 < I_\Phi^{p-1}(k_2 f) I_\Psi(p_+(k_2 |f|)) - 1 = \alpha_p(k_2 f) = 0$$

çelişkisi elde edilir. O halde, her $f \in L_p^\Phi(G)$ için $\kappa_p^*(f) = \kappa_p^{**}(f) < \infty$ olmalıdır yani Φ , κ_p tektir.

iii) : *Gereklilik* : Φ fonksiyonu κ_∞ tek ve bir $\varepsilon > 0$ için $[0, b + \varepsilon]$ üzerinde doğrusal olsun. Burada $b = \inf\{u \geq 0 : \Phi(u)\mu(G) > 1\}$ ve Φ artan olduğundan $\Phi(b + \varepsilon)\mu(G) > 1$ olur. Bir $u \in (0, b + \varepsilon)$ alalım. μ atomsuz olduğundan $f = u\chi_E$ iken $I_\Phi(f) > 1$ olacak şekilde bir ölçülebilir E kümesi bulunabilir. $k = 1$ için $I_\Phi(kf) = I_\Phi(f) > 1$ olduğundan $\alpha_\infty(kf) = \alpha_\infty(f) = I_\Psi(p_+(|f|)) \geq 0$ ve dolayısıyla $1 \in \{k \geq 0 : \alpha_\infty(kf) \geq 0\}$ olur. Buradan $\inf\{k \geq 0 : \alpha_\infty(kf) \geq 0\} = \kappa_\infty^*(f) \leq 1$ elde edilir. Öte yandan, $0 < k < \frac{b+\varepsilon}{u}$ için,

$$I_\Psi(p_+(k|f|)) = \int_E \Psi(p_+(ku)) d\mu \leq \int_E \Psi(p_+(b + \varepsilon)) d\mu = \Psi(p_+(b + \varepsilon))\mu(E) = 0$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. O halde, $\kappa_\infty^*(f) \leq 1 < \frac{b+\varepsilon}{u} \leq \kappa_\infty^{**}(f)$ olur. Bu ise Φ fonksiyonunun κ_∞ tek olması ile çelişir.

Yeterlilik : Kabul edelim ki Φ fonksiyonu, κ_∞ tek olmasın ve bununla birlikte herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $[0, b + \varepsilon]$ üzerinde doğrusal olmasın. $f \in L_\infty^\Phi(G) \setminus \{0\}$ ve $v = \kappa_\infty^{**}(f) \|f\|_\infty$ olsun. Seçiminden $0 < v \leq \infty$ olur. Teorem 2.2.9'dan Orlicz fonksiyonu Φ , κ_∞^* sonludur.

$\kappa_{\infty}^*(f) < k < \kappa_{\infty}^{**}(f)$ olsun. O halde $I_{\Psi}(p_+(k|f|)) = \alpha_{\infty}(kf) = 0$ ve dolayısıyla $\mu - \text{hhh}$ $t \in G$ için $\Psi(p_+(k|f(t)|)) = 0$ olur. O halde $k|f(t)| \leq k\|f\|_{\infty} < v$ olduğundan $u \in [0, v)$ için $\Psi(p_+(u)) = 0$, bu sebeple $[0, v)$ üzerinde Φ doğrusaldır. O zaman $v \leq b$ olmalıdır çünkü $v > b$ olsaydı bir $\varepsilon > 0$ için $\Phi, [0, b + \varepsilon]$ üzerinde doğrusal olurdu. $v \leq b$ olduğundan $\Phi(v)\mu(G) \leq 1$ ve bu $I_{\Phi}(kf) \leq I_{\Phi}(v) \leq 1$ olmasını gerektirir. Ancak, $\Psi(p_+(kf)) = 0 \neq -1$ olduğundan α_{∞} fonksiyonunun tanımı göz önüne alındığında $I_{\Phi}(kf) > 1$ olmalıdır. Bu ise $I_{\Phi}(kf) \leq 1$ olması ile çelişir. O halde Φ fonksiyonu κ_{∞} tek olmalıdır.

Sonuç 2.2.11 Her $1 < p \leq \infty$ için $(-b_{\Phi}, b_{\Phi})$ üzerinde kesin konveks olan herhangi bir Φ Orlicz fonksiyonu, κ_p tektir. Ayrıca Φ Orlicz fonksiyonu, eğer $b_{\Phi} = \infty$ koşulunu sağlıyorsa ve orijinden geçen bir eğik asimptota sahip değilse her $1 \leq p \leq \infty$ için κ_p tektir.

İspat. $(-b_{\Phi}, b_{\Phi})$ üzerinde kesin konveks olan bir fonksiyon doğrusal olamayacağı için Φ , κ_p tektir.

Teorem 2.2.12 ([4]) Her $1 \leq p \leq \infty$ için $f \in S(L_p^{\Phi}(G))$ elemanının $B(L_p^{\Phi}(G))$ kümesinin bir uç noktası olması için gerek ve yeter koşul

- i) $\kappa_p^*(f) = \kappa_p^{**}(f) < \infty$,
 - ii) $\mu - \text{hhh}$ $t \in G$ için $\kappa_p^*(f)f(t) \in SC_{\Phi}$,
 - iii) $I_{\Phi}(\kappa_p^*(f)f) \geq \chi_{\{\infty\}}(p)$ veya $\mu - \text{hhh}$ $t \in G$ için $|f(t)| = b_{\Phi}$
- koşullarının sağlanmasıdır. Burada,

$$\chi_{\{\infty\}}(p) = \begin{cases} 0, & 1 \leq p < \infty \\ 1, & p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.2.13 Eğer Φ Orlicz fonksiyonu doğrusal ise, $1 < p < \infty$ için $L_p^{\Phi}(G)$ Orlicz uzayı, $L^1(G)$ Lebesgue uzayına doğrusal bir dönüşüm aracılığı ile izometriktir.

İspat. Eğer Φ Orlicz fonksiyonu doğrusal bir fonksiyon ise bir $c > 0$ ve her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(u) = cu$ şeklindedir.

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi, p} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} s_p(I_{\Phi}(kf)) = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s_p(kc\|f\|_1) = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + (kc\|f\|_1)^p)^{1/p} \\ &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} kc\|f\|_1 \left(\frac{1}{kc\|f\|_1} + 1 \right)^{1/p} = c\|f\|_1 \end{aligned}$$

O halde, her $f \in L_p^\Phi(G)$ için $T(f) = \frac{1}{c}f$ ile verilen $T: L_p^\Phi(G) \rightarrow L^1(G)$ dönüşümü $L_p^\Phi(G)$ ve $L^1(G)$ arasında doğrusal olan bir izometridir.

Önerme 2.2.14 ([2]) (M, Σ, ν) genel bir ölçü uzayı olmak üzere,

$$\text{Ext } B(L^1) = \left\{ c\chi_A : A \in \Sigma \text{ bir atom, } c = \frac{1}{\nu(A)} \text{ veya } c = -\frac{1}{\nu(A)} \right\}$$

olur.

Teorem 2.2.12'den yola çıkılarak aşağıdaki iki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.2.15 Eğer $1 < p < \infty$ ise $f \in S(L_p^\Phi(G))$ elemanının, $B(L_p^\Phi(G))$ kümesinin bir uç noktası olması için gerek ve yeter koşul

i) Φ fonksiyonunun $[0, \infty)$ üzerinde doğrusal olmaması,

ii) $K_p(f) = \{k\}$ ise μ -hhh $t \in G$ için $kf(t) \in SC_\Phi$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat. *Gereklik* : Kabul edelim ki f , kapalı birim yuvar için bir uç nokta ve Φ fonksiyonu, $[0, \infty)$ üzerinde doğrusal olsun. Önerme 2.2.13'den $L_p^\Phi(G)$, $L^1(G)$ uzayına doğrusal olarak izometriktir. Öte yandan, Önerme 2.2.14 ve μ ölçüsünün atomsuz olduğu göz önüne alınırsa $\text{Ext } B(L_p^\Phi(G)) = \emptyset$ olacağı biliniyor. Bu ise f elemanının bir uç nokta olması ile çelişir yani Φ fonksiyonu, $[0, \infty)$ üzerinde doğrusal olamaz.

Yeterlilik : Kabul edelim ki i) ve ii) şıkları sağlansın ve $K_p(f) = \{0 < t < \infty : \kappa_p^*(f) \leq t \leq \kappa_p^{**}(f)\} = \{k\}$ olsun. Böylece $\kappa_p^*(f) = \kappa_p^{**}(f) < \infty$ yani Teorem 2.2.12'nin i) şıkkı sağlanır. Ayrıca $1 < p < \infty$ olduğundan $I_\Phi(kf) \geq 0 = \chi_{\{\infty\}}(p)$ dolayısıyla Teorem 2.2.12'nin iii) şıkkı da sağlanır. $K_p(f) = \{k\}$ ise $k = \kappa_p^*(f)$ olacağından Teorem 2.2.12'nin ii) şıkkı da sağlanmaktadır. O halde, $f \in \text{Ext } B(L_p^\Phi(G))$ elde edilir.

Sonuç 2.2.16 ([4]) Eğer $p = \infty$ ise $f \in S(L_p^\Phi(G))$ elemanının, $B(L_p^\Phi(G))$ kümesinin bir uç noktası olması için gerek ve yeter koşul

i) $I_\Phi(f) = 1$, μ -hhh $t \in G$ için $f(t) \in SC_\Phi$,

ii) μ -hhh $t \in G$ için $|f(t)| = b_\Phi < \infty$

şıklarından birinin sağlanmasıdır.

Teorem 2.2.17 ([4]) $1 \leq p \leq \infty$ için $L_p^\Phi(G)$ uzayının yuvarlak olması için gerek ve yeter koşul

- i) Φ Orlicz fonksiyonunun κ_p tek olması ve
 - ii) Φ fonksiyonunun $(-b_\Phi, b_\Phi)$ üzerinde kesin konveks olması ve
 - iii) a) $1 \leq p < \infty$ veya
b) $p = \infty$ ve $\Phi \in \Delta_2(\mu)$
- koşullarının sağlanmasıdır.

2.3 LUXEMBURG NORMU İLE VERİLEN ORLICZ UZAYLARI ($L_\infty^\Phi(G)$)

Bu bölümde $p = \infty$ durumu için $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ kümesinin kapallılığı, [7] çalışmasındakilerin lokal kompakt gruplar için düzenlenmesiyle incelenecektir.

Tanım 2.3.1 (Γ_a Koşulu) Eğer her $u \in SC_\Phi \cap [0, cv]$ ve $v \in SC_\Phi$ için $d \cdot \mu(G) < \infty$ ve $\Phi(u) \leq K \cdot \Phi(v) + d$ olacak şekilde $c > 1$, $K > 1$ ve $d \geq 0$ sabitleri varsa, Φ Orlicz fonksiyonuna Γ_a koşulunu sağlıyor denir ve $\Phi \in \Gamma_a$ şeklinde yazılır.

Önerme 2.3.2 Bir Φ Orlicz fonksiyonu Γ_a koşulunu sağlamasın ve $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesi kapalı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a := \min\{\mu(G), 1\}$, $K_n := \frac{2^{n+2}}{a}$, $c_n := 1 + 2^{-(n+2)}$ olmak üzere $\Phi(u_n) > K_n \Phi(v_n)$ koşulunu sağlayan $(v_n) \subset SC_\Phi$ ve $(u_n) \subset SC_\Phi \cap [0, c_n v_n]$ dizileri göz önüne alınsın. $\mu(G) = \infty$ şartı altında (v_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç $\Phi(v_n) > 0$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki Φ fonksiyonu Γ_a koşulunu sağlamasın, $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesi kapalı ve her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n = \frac{2^{n+2}}{a}$, $c_n = 1 + 2^{-(n+2)}$ olsun. Burada

$$d_n := \sup\{\Phi(u) > K_n \Phi(v) : u \in SC_\Phi \cap [0, c_n v] \text{ ve } v \in SC_\Phi\}$$

olarak tanımlansın. O zaman, her $n \in \mathbb{N}$ için, $u \in SC_\Phi \cap [0, c_n v]$ ve $v \in SC_\Phi$ olmak üzere kabullerimizden $\Phi(u) \leq d_n \leq K_n \Phi(v) + d_n$ ve dolayısıyla $\Phi(u) \leq K_n \Phi(v) + d_n$ olur.

$\Phi \notin \Gamma_a$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\Phi(u) \leq K_n \Phi(v) + d_n$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $d_n \cdot \mu(G) = \infty$ olmalıdır. Aksi takdirde $\Phi \in \Gamma_a$ olurdu.

$\Phi(u_n) > K_n \Phi(v_n)$ koşulunu sağlayan $v_n \subset SC_\Phi$ ve $u_n \subset SC_\Phi \cap [0, c_n v_n]$ dizilerini alalım. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $d_n = \infty$ ise $K_n = \frac{2^{n+2}}{a}$ olduğundan $\Phi(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ sağlanır. Eğer bir $k \in \mathbb{N}$ için $d_k < \infty$ ise $\Phi(u_n) \leq d_k$ olacağından $\Phi(u_n)$ dizisi sınırlı bir dizi olur. Ayrıca n doğal sayıları arttığında supremumu alınan kümeler azalacağından (d_n) azalan bir dizidir.

$\mu(G) = \infty$ şartı altında (v_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç $\Phi(v_n) > 0$ eşitsizliği

sağlanmıyorsa bir $(v_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset v_n$ alt dizisi bulabiliriz öyle ki her $m \in \mathbb{N}$ için $\Phi(v_{n_m}) = 0$ şeklinde olur. $SC_\Phi \subseteq [a_\Phi, b_\Phi]$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $v_{n_m} \in SC_\Phi$ olduğundan,

$$|v_{n_m}| = a_\Phi = \sup\{u \geq 0 : \Phi(u) = 0\}$$

olmalıdır. Kabulümüzden her $m \in \mathbb{N}$ için $\Phi(u_{n_m}) > K_n \Phi(v_{n_m}) = 0$ olur. Dolayısıyla Φ artan olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ için $v_{n_m} < u_{n_m}$ ve tanımlanışından $u_{n_m} \leq c_{n_m} v_{n_m}$ olur. $c_{n_m} = 1 + 2^{-(n_m+2)}$ ve $|v_{n_m}| = a_\Phi$ olduğu biliniyor. O halde Sıkıştırma Teoremi'nden $u_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_\Phi$ elde edilir. Öte yandan her $m \in \mathbb{N}$ için $v_{n_m} < u_{n_m}$ olduğundan $0 < a_\Phi < b_\Phi$ sağlanır.

Şimdi μ Haar ölçüsünün atomsuzluğunu kullanarak $(X_m) \subset G$ alt kümeler dizisini alalım öyle ki $\Phi(u_{n_m})\mu(X_m) = 1$ olsun.

Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$f = a_\Phi \chi_G \text{ ve } g_m = |u_{n_m}| \chi_{X_m} + a_\Phi \chi_{G \setminus X_m}$$

olarak tanımlansın. Yine, Φ Orlicz fonksiyonu artan ve $f \leq a_\Phi$ olduğundan $\Phi(f) = 0$ olmalıdır. Böylece $I_\Phi(f) = 0 \neq 1$ olur. Ayrıca $\Phi(b_\Phi) > 0$ olduğundan μ -h h h $t \in G$ için $|f(x)| = b_\Phi$ olamaz. Bu durumda, Sonuç 2.2.16'dan $f \notin \text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ sağlanır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} I_\Phi(g_m) &= \int \Phi((u_{n_m} \chi_{X_m} + a_\Phi \chi_{G \setminus X_m})(t)) d\mu(t) \\ &= \int_{X_m} \Phi(u_{n_m}) d\mu + \int_{G \setminus X_m} \Phi(a_\Phi) d\mu \\ &= \Phi(u_{n_m})\mu(X_m) + 0 = 1 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $a_\Phi, u_{n_m} \in SC_\Phi$ olduğundan $(g_m) \subset SC_\Phi$ olur. Dolayısıyla (g_m) , $B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesinin uç noktalarının bir dizisidir. Bir $\lambda > 0$ alınsın. Yeterince büyük $m \geq m_0$ doğal sayıları için $\lambda(c_{n_m} - 1) = \lambda 2^{-(n_m+2)} \leq 1$ yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} 0 \leq I_\Phi(\lambda(g_m - f)) &= \Phi(\lambda(u_{n_m} - a_\Phi))\mu(X_m) \\ &= \Phi(\lambda(u_{n_m} - v_{n_m}))\mu(X_m) \\ &\leq \Phi(\lambda(c_{n_m} - 1)a_\Phi)\mu(X_m) \\ &\leq \Phi(a_\Phi)\mu(X_m) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\inf \left\{ k > 0 : I_\Phi \left(\frac{g_m - f}{k} \right) \leq 1 \right\} = \|g_m - f\|_\Phi \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ bulunur.

Bu ise $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesinin kapalı olması ile çelişir çünkü $(g_m) \subset \text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ dizisinin $f \notin \text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ elemanına yakınsadığı elde edildi. O halde önermenin kabulleri altında (v_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç $\Phi(v_n) > 0$ olmalıdır.

Teorem 2.3.3 Bir Φ Orlicz fonksiyonu verilsin. $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun Γ_a koşulunu sağlamasıdır.

İspat. *Gereklik:* Kabul edelim ki $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesi kapalı olsun ve Φ Orlicz fonksiyonu Γ_a koşulunu sağlamasın. Her $n \in \mathbb{N}$ için K_n, c_n ve a sabiti Önerme 2.3.2’teki gibi tanımlansın. Önerme 2.3.2’den, $\mu(G) = \infty$ şartı altında her $n \in \mathbb{N}$ için $\Phi(v_n) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Eğer $\mu(G) = \infty$ ise atomsuz ve σ -sonlu Haar ölçüsü için her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(X_n)\Phi(v_n) = a2^{-(n+1)}$ olacak şekilde ayrık ve ölçülebilir bir (X_n) ailesi bulabiliriz. Φ, Γ_a koşulunu sağlamadığından $\Phi(u_n) > K_n\Phi(v_n) = \frac{2^{n+2}}{a}\Phi(v_n)$ olmalıdır. Dolayısıyla, $\Phi(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ve ayrıca $u_n > v_n > \frac{1}{c_n}u_n$ olduğundan $\Phi(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ sağlanır. Ayrıca, bu X_n seçimi, $\mu(G) < \infty$ şartı altında yine aynı eşitsizlikler sağlanacağı için mümkündür. Yine,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \chi_{X_n} + a\Phi \chi_{G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}$$

olarak tanımlansın. O halde,

$$\begin{aligned} I_\Phi(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} \Phi(v_n) d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} \Phi(a\Phi) d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(v_n) \mu(X_n) \\ &= \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{a}{2} \leq \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

elde edilir. $I_\Phi(f)$ sonlu olduğundan f iyi tanımlıdır. Ayrıca Sonuç 2.2.16 göz önüne alınırsa $I_\Phi(f) < 1$ olduğundan $f, B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesinin bir uç noktası değildir. $\Phi \notin \Gamma_a$ olduğundan her $i \in \mathbb{N}$ için $\Phi(u_i) > K_i\Phi(v_i) = \frac{2^{i+2}}{a}\Phi(v_i)$ olmalıdır. Buradan,

$$\Phi(u_i) > \frac{2^{i+2}}{a}\Phi(v_i)\mu(X_i) = 2 > 1$$

elde edilir. O zaman μ ölçüsünün atomsuzluğundan her $i \in \mathbb{N}$ için X_i kümelerinin, $\Phi(u_i)\mu(A_i) = 1 - \frac{a}{2}$ ve $\Phi(v_i)\mu(A_i) = \frac{a}{2^{i+1}}$ olacak şekilde ölçülebilir A_i alt kümeleri

bulunabilir. Her $i \in \mathbb{N}$ için

$$g_i = \sum_{n \neq i} (v_n \chi_{X_n} + u_i \chi_{A_i} + v_i \chi_{X_i \setminus A_i} + a_\Phi \chi_{G \setminus \bigcup_{n=1}^\infty X_n})$$

olarak tanımlansın. Böylece,

$$\begin{aligned} I_\Phi(g_i) &= \sum_{n \neq i} \int_{X_n} \Phi(v_n) d\mu + \sum_{n \neq i} \int_{G \setminus \bigcup_{n=1}^\infty X_n} \Phi(a_\Phi) d\mu + \int_{A_i} \Phi(u_i) d\mu + \int_{X_i \setminus A_i} \Phi(v_i) d\mu \\ &= \sum_{n \neq i} \frac{a}{2^{n+1}} + \Phi(u_i) \mu(A_i) + \Phi(v_i) \mu(X_i) - \Phi(v_i) \mu(A_i) \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca her $i \in \mathbb{N}$ için $g_i \in SC_\Phi$ olduğundan (g_i) , $B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesinin uç noktalarının bir dizisidir. O halde,

$$\begin{aligned} g_i - f &= \left(\sum_{n \neq i} (v_n \chi_{X_n} + u_i \chi_{A_i} + v_i \chi_{X_i \setminus A_i} + a_\Phi \chi_{G \setminus \bigcup_{n=1}^\infty X_n}) \right) - \left(\sum_{n \neq i} v_n \chi_{X_n} + a_\Phi \chi_{G \setminus \bigcup_{n=1}^\infty X_n} + v_i \chi_{X_i} \right) \\ &= u_i \chi_{A_i} - v_i \chi_{A_i} \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} I_\Phi(\lambda(g_i - f)) &= \Phi(\lambda(u_i - v_i)) \mu(A_i) \\ &\leq \Phi(\lambda(c_i - 1)v_i) \mu(A_i) = \Phi(\lambda 2^{-(i+2)} v_i) \mu(A_i) \\ &\leq \Phi(\lambda 2^{-(i+2)} v_i) \mu(X_i) \leq \lambda 2^{-(i+2)} \Phi(v_i) \mu(X_i) = \lambda a 2^{-(2i+3)} \end{aligned}$$

olur. Ancak $\lambda a 2^{-(2i+3)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ yakınsamasından $\|g_i - f\|_\Phi \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ elde edilir. O zaman, $\text{Ext} B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesi kapalı olamaz.

Sonuç olarak, $\Phi \notin \Gamma_a$ ise $\text{Ext} B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesi kapalı değildir dolayısıyla bu gerektirmenin karşıt tersi gerçekleşir. $\text{Ext} B(L_\infty^\Phi(G))$ kapalı ise $\Phi \in \Gamma_a$ olduğu elde edilmiştir.

Yeterlilik: Genelliği kaybetmeksizin, kabul edelim ki $K \geq \max\{2, \frac{c}{c-1}\}$ ve $\Phi \in \Gamma_a$ iken $\text{Ext} B(L_\infty^\Phi) \neq \overline{\text{Ext} B(L_\infty^\Phi(G))}$ olsun. Bir $f \in \text{Ext} B(L_\infty^\Phi(G)) \setminus \overline{\text{Ext} B(L_\infty^\Phi(G))}$ alınsın. SC_Φ kümesi Gözlem 2.1.28 gereği kapalıdır. Sonuç 2.2.16'dan $\text{Ext} B(L_\infty^\Phi(G)) \subseteq SC_\Phi$ olduğu biliniyor. Buradan, $\overline{\text{Ext} B(L_\infty^\Phi(G))} \subseteq \overline{SC_\Phi} = SC_\Phi$ bulunur. O halde μ -h h h $x \in G$ için $f(x) \in SC_\Phi$ sağlanır. Ayrıca $f \notin \text{Ext} B(L_\infty^\Phi)$ olduğundan $I_\Phi(f) < 1$ olmalıdır. Çünkü $I_\Phi(f) = 1$ olursa f

fonksiyonunun birim yuvar için bir uç nokta olmaması kabulüyle çelişilirdi. Yine, $I_\Phi(f) > 1$ olursa $\|f\|_{\Phi,p} > 1$ olur ve dolayısıyla birim yuvarın uç noktalarının bir dizisinin birim yuvar dışındaki bir elemana yakınsaması çelişkisi elde edilirdi. Böylece $0 < \delta \leq 1$ için $I_\Phi(f) = 1 - \delta < 1$ olsun.

$$\tilde{H}_k = \begin{cases} \left\{ x \in G : \frac{1}{n_k} \leq |f(x)| \right\}, & \mu(G) = \infty \\ \left\{ x \in G : \frac{1}{n_k} \leq |f(x)| \text{ veya } f(x) = 0 \right\}, & \mu(G) < \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve $k > K$ doğal sayısını sabitleyip n_k terimlerini $n_k \geq k$ olacak şekilde seçelim. Burada k doğal sayıları arttığında n_k doğal sayıları artacağı için $\frac{1}{n_k}$ azalır dolayısıyla $\tilde{H}_k$ kümeleri artar ve buradan $f\chi_{\tilde{H}_k}(x) \nearrow f(x)$ sağlanır. Φ artan ve sürekli olduğundan $\Phi(f\chi_{\tilde{H}_k}(x)) \nearrow \Phi(f(x))$ olur. Bu durumda, Monoton Yakınsaklık Teoremi'nden $I_\Phi(f) - I_\Phi(f\chi_{\tilde{H}_k}) < \frac{\delta}{4k}$ elde edilir. O halde $\mu(\tilde{H}_k) < \infty$ olmalıdır. Aksi takdirde, $\int \Phi(f)d\mu \geq \int \Phi(\frac{1}{n_k})d\mu = \infty$ olurdu.

Yine, $I_\Phi(f) < 1$ olduğundan $E = \{x \in G : f(x) \neq b_\Phi\}$ olarak tanımlanırsa $\mu(E) > 0$ olmalıdır. $f \in \overline{\text{Ext}B(L_\infty^\Phi)}$ olduğundan en azından bir $(e_k) \subset \text{Ext}B(L_\infty^\Phi)$ dizisi vardır öyle ki $k \rightarrow \infty$ için $e_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,\infty}} f$ yakınsaması gerçekleşir. Burada (e_k) birim yuvarın uç noktalarının bir dizisi olduğundan Sonuç 2.2.16 göz önüne alınırsa her $k \in \mathbb{N}$ için $I_\Phi(e_k) = 1$ ve μ -hhh $x \in G$ için $e_k(x) \in SC_\Phi$ olmalıdır. Egoroff Teoremi'nden $H_k \subseteq \tilde{H}_k$ kapalı alt kümelerini bulabiliriz öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu(\tilde{H}_k \setminus H_k) < \frac{1}{k}$ olur ve $f\chi_{H_k}$ dizisi f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar. Her $k \in \mathbb{N}$ için $I_\Phi(e_k) = 1$ olduğu biliniyor. O halde, $\mu(\{x \in E : e_k(x) \neq b_\Phi\}) > 0$ olur. Öte yandan, $e_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,\infty}} f$ yakınsamasından

$$\|f - e_k\|_{\Phi,\infty} \leq \frac{\delta}{4k} \quad (2.5)$$

olur. Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi'nden

$$|I_\Phi(f\chi_{H_k}) - I_\Phi(e_k\chi_{H_k})| < \frac{\delta}{4} \quad (2.6)$$

olarak alınabilir. Monoton Yakınsaklık Teoremi'nden ise $1 - \delta = I_\Phi(f)$ olduğu kullanılarak,

$$I_\Phi(f) - I_\Phi(f\chi_{H_k}) < \frac{\delta}{4k} \quad (2.7)$$

yazılabilir. Yine, $e_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,\infty}} f$ yakınsaması ve I_Φ fonksiyonunun sürekliliğinden $I_\Phi(K(e_k - f)) \leq 1$ olur ve dolayısıyla

$$I_\Phi(K(e_k - f)) \leq \|K(f - e_k)\|_{\Phi,\infty} = K\|(f - e_k)\|_{\Phi,\infty} \leq K\frac{\delta}{4k} \leq \frac{\delta}{4} \quad (2.8)$$

elde edilir. Eğer, (2.6) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} I_\Phi(e_k \chi_{G \setminus H_k}) &= I_\Phi(e_k \chi_G) - I_\Phi(e_k \chi_{H_k}) = 1 - I_\Phi(e_k \chi_{H_k}) \\ &= 1 - I_\Phi(f \chi_{H_k}) + I_\Phi(f \chi_{H_k}) - I_\Phi(e_k \chi_{H_k}) \\ &> 1 - I_\Phi(f \chi_{H_k}) - \frac{\delta}{4} \\ &= I_\Phi(f \chi_{G \setminus H_k}) + \delta - \frac{\delta}{4} \geq \frac{3\delta}{4} \end{aligned} \quad (2.9)$$

olur. Burada,

$$B_k = \{x \in G \setminus H_k : \Phi(e_k(x)) > k\Phi(f(x))\} \text{ ve } A_k = G \setminus (H_k \cup B_k)$$

olarak tanımlansın. O zaman,

$$I_\Phi(e_k \chi_{A_k}) \leq kI_\Phi(f \chi_{A_k}) \leq I_\Phi(f \chi_{G \setminus H_k}) < \delta \frac{\delta}{4k} = \frac{\delta}{4}$$

olur. Böylece,

$$I_\Phi(e_k \chi_{B_k}) = I_\Phi(e_k \chi_{G \setminus H_k}) - I_\Phi(e_k \chi_{A_k}) \geq \frac{3\delta}{4} - I_\Phi(e_k \chi_{A_k}) > \frac{3\delta}{4} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} \quad (2.10)$$

elde edilir. O halde, (2.8) ve (2.10) eşitsizlikleri kullanılarak,

$$I_\Phi(K(f - e_k) \chi_{B_k}) \leq I_\Phi(K(f - e_k)) \leq \frac{\delta}{4} < \frac{\delta}{2} < I_\Phi(e_k \chi_{B_k}) \quad (2.11)$$

bulunur. Ayrıca, (2.11) eşitsizliğinden dolayı

$$C_k = \{x \in B_k : \Phi(e_k(x)) > \Phi(K(f(x) - e_k(x)))\}$$

ile tanımlanan küme için $\mu(C_k) > 0$ olur. Eğer $\mu(G) < \infty$ ise seçiminden gerekirse bir alt diziye geçerek $\mu(G \setminus \tilde{H}_k) < \frac{1}{k}$ olduğunu kabul edebiliriz. O halde $\mu(G) < \infty$ ise

$$\mu(C_k) \leq \mu(G \setminus H_k) = \mu((G \setminus \tilde{H}_k) \cup (\tilde{H}_k \setminus H_k)) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$$

sağlanır. Böylece,

$$\begin{aligned} I_\Phi(e_k \chi_{C_k}) &= I_\Phi(e_k \chi_{B_k}) - I_\Phi(e_k \chi_{B_k \setminus C_k}) \\ &\geq I_\Phi(e_k \chi_{B_k}) - I_\Phi(K(f - e_k) \chi_{B_k \setminus C_k}) \\ &> \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{4} \end{aligned} \quad (2.12)$$

olur. (2.12) eşitsizliklerinden $\mu(\{x \in C_k : \Phi(e_k(x)) \geq \frac{\delta k}{8}\}) > 0$ olmalıdır. Öte yandan, $k \in \mathbb{N}$ ve μ —hhh $x \in C_k$ için $f(x), e_k(x) \in SC_\Phi$ olduğundan $\Phi(e_k(x_k)) \geq \frac{\delta k}{8}$ ve $f(x_k), e_k(x_k) \in SC_\Phi$ olacak şekilde $x_k \in C_k$ seçebiliriz. Eğer $\mu(G) = \infty$ ise, $\mu(C_k) > 0$ ve $f(x), e_k(x) \in SC_\Phi$ olduğundan yine $f(x_k), e_k(x_k) \in SC_\Phi$ olacak şekilde $x_k \in C_k$ seçebiliriz.

$\mu(G)$ 'nin sonluluğu için iki durumda da $v_k = |f(x_k)|$ ve $u_k = |e_k(x_k)|$ yani $u_k, v_k \in SC_\Phi$ ve $x_k \in C_k \subseteq B_k$ dolayısıyla $x_k \in B_k$ sağlanır. B_k kümesinin seçiminden $\Phi(u_k) > k\Phi(v_k) > K\Phi(v_k)$ olur, Φ artan olduğundan $u_k > v_k$ bulunur. Ayrıca $x_k \in C_k$ olduğundan,

$$K(u_k - v_k) \leq K|f(x_k) - e_k(x_k)| \leq |e_k(x_k)| = u_k$$

olur. Dolayısıyla $u_k \in (v_k, (1 + \frac{1}{K-1})v_k) \subseteq [0, cv_k]$ elde edilir. Ancak $\mu(G) = \infty$ ise bu $\Phi \in \Gamma_a$ olması ile çelişir.

Eğer $\mu(G) < \infty$ ise $\Phi(u_k) - K\Phi(v_k) \geq (1 - \frac{K}{k})\Phi(u_k)$ ve $\Phi(u_k) \geq \frac{\delta k}{8}$ bulunur. Böylece

$$d \geq \sup_k (\Phi(t_k) - K\Phi(v_k)) \geq \sup_k \left(1 - \frac{K}{k}\Phi(u_k)\right) = \infty$$

elde edilir. Bu ise yine $\Phi \in \Gamma_a$ olması ile çelişir. O halde $\Phi \in \Gamma_a$ ise $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır.

Önerme 2.3.4 Eğer Φ Orlicz fonksiyonu, $\Delta_2(\mu)$ koşulunu sağlıyorsa Γ_a koşulunu da sağlar.

İspat. Kabul edelim ki Φ Orlicz fonksiyonu, $\Delta_2(\mu)$ koşulunu sağlasın. O halde, $\mu(G) < \infty$ ise $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ yani, her $|u| \geq u_0$ için $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $K > 0$ ve $\Phi(u_0) < \infty$ olmak üzere bir $u_0 > 0$ sabiti ve $\mu(G) = \infty$ ise $\Phi \in \Delta_2(\mathbb{R})$ yani her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $K > 0$ sabiti var olsun. Γ_a koşulunun tanımındaki c ve d sabitlerini sırasıyla 2 ve 0 olarak alalım. Burada $d = 0$ olduğundan

$d \cdot \mu(G) = 0 < \infty$ sağlanır. Φ , $\Delta_2(\mu)$ koşulunu sağladığından, her $t \in SC_\Phi \cap [0, 2u]$ ve $u \in SC_\Phi$ için

$$\Phi(t) \leq \Phi(2u) \leq K\Phi(u) = K\Phi(u) + d$$

olur. Buradan $\Phi \in \Gamma_a$ olduğu elde edilir.

Sonuç 2.3.5 Eğer Φ Orlicz fonksiyonu $\Delta_2(\mu)$ koşulunu sağlıyorsa, $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır.

İspat. Önerme 2.3.4'ten $\Phi \in \Delta_2(\mu)$ olması, $\Phi \in \Gamma_a$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $\Phi \in \Delta_2(\mu)$ ise $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır. $\square$

Bu tezin sonraki bölümleri için [17] çalışması temel oluşturacaktır.

2.4 $\text{EXT}B(L_1^\Phi)$ KÜMESİNİN BOŞ KÜMEDEN FARKLILIĞI

Teorem 2.2.5'ten $f \in L^0(G)$ için $\|f\|_{\Phi,1} = \|f\|_\Phi^0$ eşitliği biliniyor. Şimdi aşağıdaki sabitleri tanımlayalım.

$$b_\Phi^* := \inf\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \geq 1\}$$

$$b_\Phi^{**} := \sup\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1\}$$

Tanım 2.2.6'da verilen α_p fonksiyonunda $p = 1$ alınarak $b_\Phi^* = \kappa_1^*(\chi_G)$ ve $b_\Phi^{**} = \kappa_1^{**}(\chi_G)$ olduğu kolayca görülür.

Lemma 2.4.1 Bir Φ Orlicz fonksiyonu için aşağıdakiler sağlanır.

i) $a_\Phi \leq b_\Phi^* \leq b_\Phi^{**} \leq b_\Phi$

ii) Eğer $b_\Phi^{**} < \infty$ ise $\Psi(p_-(b_\Phi^*))\mu(G) \leq \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G) \leq 1$ olur.

iii) Eğer $b_\Phi^* < b_\Phi^{**}$ ise $\mu(G) < \infty$ ve $\Psi(p_+(b_\Phi^*))\mu(G) = \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G) = 1$ olarak bulunur.

iv) Eğer $\mu(G) = \infty$ ise

$b_\Phi^* = b_\Phi^{**} = \sup\{u \geq 0 : p_-(u) = a_\Psi\} = \sup\{u \geq 0 : \Phi \text{ fonksiyonu } (0, u) \text{ üzerinde doğrusal}\}$
ve $\Psi(p_-(b_\Phi^*))\mu(G) = \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G) = 0$ eşitlikleri sağlanır.

v) Eğer $\mu(G) = \infty$ ve $a_\Phi > 0$ ise $b_\Phi^* = b_\Phi^{**} = a_\Phi$ elde edilir.

vi) Eğer $b_\Phi^{**} < \infty$ ise $\Phi(b_\Phi^{**}) < \infty$ olmalıdır.

İspat. i): Eğer $a_\Phi = 0$ ve $b_\Phi = \infty$ ise, $\kappa_1^*(\chi_G) \leq \kappa_1^{**}(\chi_G)$ olduğundan $a_\Phi = 0 \leq b_\Phi^* \leq b_\Phi^{**} \leq \infty = b_\Phi$ olacağı açıktır. Şimdi kabul edelim ki $b_\Phi < \infty$ olsun. Bir $b_\Phi < k < \infty$ için

biliyoruz ki $\Phi(k) = \infty$ sağlanmalıdır ve Young eşitliğinden $kp_+(k) = \Phi(k) + \Psi(p_+(k)) = \infty$ olur. Dolayısıyla $p_+(k) = \infty$ olmalı ve buradan $\Psi(p_+(k)) = \infty$ ve $\Psi(p_+(k))\mu(G) = \infty > 1$ bulunur. O halde tanımından $b_\Phi^{**} \leq b_\Phi$ sağlanır. Benzer şekilde, $a_\Phi > 0$ ise $0 < k < a_\Phi$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{R}$ bulunabilir. a_Φ sabitinin tanımından $\Phi(k) = 0$ ve $[0, a_\Phi]$ üzerinde $\Phi \equiv 0$ olduğundan $p_+(k) = 0$ bulunur. Buradan $\Psi(p_+(k)) = 0$ ve $\Psi(p_+(k))\mu(G) = 0 < 1$ elde edilir. O halde tanımından $a_\Phi \leq b_\Phi^*$ gerçekleşir.

ii): Kabul edelim ki $b_\Phi^{**} < \infty$ olsun. $b_\Phi^{**} = 0$ ise

$$\Psi(p_-(b_\Phi^*))\mu(G) = \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G) = 0 \leq 1$$

olacağından istenen elde edilir. $b_\Phi^{**} > 0$ kabul edelim. $\Psi \circ p_-$ artan ve $b_\Phi^* \leq b_\Phi^{**}$ olduğundan $\Psi(p_-(b_\Phi^*))\mu(G) \leq \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G)$ sağlanır. Şimdi $\Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G) > 1$ olduğunu kabul edelim. $\Psi \circ p_-$ soldan sürekli olduğundan $\Psi(p_-(\beta b_\Phi^{**}))\mu(G) > 1$ sağlanacak şekilde bir $\beta \in (0, 1)$ vardır. $p_+(\beta b_\Phi^{**}) \geq p_-(\beta b_\Phi^{**})$ olduğundan

$$\Psi(p_+(\beta b_\Phi^{**}))\mu(G) \geq \Psi(p_-(\beta b_\Phi^{**}))\mu(G) > 1$$

olur. Ancak b_Φ^{**} tanımından, her $u < b_\Phi^{**}$ için $\Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1$ olması gerekirdi.

$\beta b_\Phi^{**} < b_\Phi^{**}$ olduğundan bu bir çelişkidir. $\Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G) \leq 1$ olmalıdır.

iii): Eğer $b_\Phi^* < b_\Phi^{**}$ ise $u, v \in (b_\Phi^*, b_\Phi^{**})$ sayıları bulunur. $u < v$ ise Önerme 2.1.21'den $p_+(u) \leq p_-(v)$ olur ve buradan

$$1 \leq \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq \Psi(p_-(v))\mu(G) \leq \Psi(p_+(v))\mu(G) \leq 1$$

elde edilir. p_+ sağdan sürekli olduğundan,

$$\Psi(p_+(b_\Phi^*))\mu(G) = \lim_{u \rightarrow b_\Phi^{*+}} \Psi(p_+(u))\mu(G) = \lim_{u \rightarrow b_\Phi^{*+}} 1 = 1$$

ve p_- soldan sürekli olduğundan

$$\Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G) = \lim_{v \rightarrow b_\Phi^{**}-} \Psi(p_-(v))\mu(G) = \lim_{v \rightarrow b_\Phi^{**}-} 1 = 1$$

olur. Böylece,

$$\Psi(p_+(b_\Phi^*))\mu(G) = 1 = \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G)$$

sağlanır. Ayrıca $b_\Phi^{**} > a_\Phi$ olduğundan $\Psi(p_-(b_\Phi^{**})) > 0$ dolayısıyla $\mu(G) < \infty$ olmalıdır.

iv): Lemmanın iii) şikkından $\mu(G) = \infty$ ise $b_\Phi^* = b_\Phi^{**}$ olacağı biliniyor. Ayrıca $\Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1 < \infty$ olması için gerek ve yeter koşul $\Psi(p_+(u)) = 0$ olmasıdır. Önerme 2.1.22'den $\Psi(p_+(u)) = 0$ olması içinse gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun $[0, u]$ üzerinde doğrusal olmasıdır. O halde,

$$\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1\} = \{u \geq 0 : \Phi \text{ fonksiyonu } [0, \infty) \text{ üzerinde doğrusal}\}$$

ve dolayısıyla

$$b_\Phi^{**} = \sup\{u \geq 0 : \Phi \text{ fonksiyonu } [0, \infty) \text{ üzerinde doğrusal}\}$$

eşitliği elde edilir. Önerme 2.1.21'den $x < y$ için $p_+(x) \leq p_-(y)$ olduğundan $\Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1$ olması için gerek ve yeter koşul $\Psi(p_+(u)) = \Psi(p_-(u)) = 0$ olmasıdır. Bu durumda,

$$\{u \geq 0 : p_-(u) = a_\Psi\} \subseteq \{u \geq 0 : p_-(u) \leq a_\Psi\} = \{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1\}$$

sağlanır. Ancak p_- artan olduğundan,

$$\sup\{u \geq 0 : p_-(u) = a_\Psi\} = \sup\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1\} = b_\Phi^{**}$$

bulunur. Böylece, $b_\Phi^{**} < \infty$ koşulu ve i) şikkından $\Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G) \leq 1$ elde edilir. Dolayısıyla $\mu(G) = \infty$ olduğundan $\Psi(p_-(b_\Phi^{**})) = 0$ ve buradan

$$0 \leq \Psi(p_-(b_\Phi^*))\mu(G) \leq \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G) = 0$$

bulunur. O halde,

$$\Psi(p_-(b_\Phi^*))\mu(G) = 0 = \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G)$$

eşitliği sağlanır.

v): a_Φ sabitinin tanımından $a_\Phi > 0$ ise $[-a_\Phi, a_\Phi]$ üzerinde $\Phi \equiv 0$ olur. Öte yandan,

$\mu(G) = \infty$ olduğu için $b_{\Phi}^* = b_{\Phi}^{**}$ ve

$$\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1\} = \{u \geq 0 : \Psi(p_+(u)) = 0\}$$

olmalıdır. Bu küme eşitliği için supremum alınırsa $b_{\Phi}^{**} = a_{\Phi}$ yani $b_{\Phi}^* = b_{\Phi}^{**} = a_{\Phi}$ elde edilir.

vi): Eğer $b_{\Phi}^{**} = 0$ ise $\Phi(b_{\Phi}^{**}) = 0$ olacağından $b_{\Phi}^{**} > 0$ kabul edebiliriz. $b_{\Phi}^{**} < \infty$ olduğu için ii) şıkkından $\Psi(p_-(b_{\Phi}^{**}))\mu(G) \leq 1$ olmalıdır. Dolayısıyla $\Psi(p_-(b_{\Phi}^{**})) < \infty$ ve buradan $p_-(b_{\Phi}^{**}) < \infty$ bulunur. Young eşitliğinden

$$\Phi(b_{\Phi}^{**}) = b_{\Phi}^{**} p_-(b_{\Phi}^{**}) - \Psi(p_-(b_{\Phi}^{**})) < \infty$$

elde edilir. □

Şimdi $b_{\Phi}^* \leq b_{\Phi}^{**} < \infty$ olması durumunda, bu iki sabitin Φ için birer kesin konvekslik noktası olduğuna dair bir lemma vereceğiz.

Lemma 2.4.2 Bir Φ Orlicz fonksiyonu için $b_{\Phi}^*, b_{\Phi}^{**} \in SC_{\Phi}^+ \cup \{\infty\}$ olur.

İspat. $a_{\Phi} \in SC_{\Phi}^+$ olduğundan $a_{\Phi} < b_{\Phi}^*$ ve $b_{\Phi}^{**} < \infty$ durumları için incelememiz yeterli olacaktır.

Kabul edelim ki $b_{\Phi}^* \notin SC_{\Phi}^+$ olsun. O halde Önerme 2.1.27'den $b_{\Phi}^* \in A_{\Phi}$ olur. Dolayısıyla bir $0 < \varepsilon < b_{\Phi}^* - a_{\Phi}$ için p_+ , $(b_{\Phi}^* - \varepsilon, b_{\Phi}^* + \varepsilon)$ üzerinde sonlu ve sabittir. Ayrıca, $u \in (b_{\Phi}^*, b_{\Phi}^* + \varepsilon)$ için $\Psi(p_+(u))\mu(G) \geq 1$ olur. p_+ , $(b_{\Phi}^* - \varepsilon, b_{\Phi}^* + \varepsilon)$ üzerinde sabit olduğundan $\Psi(p_+(b_{\Phi}^* - \frac{\varepsilon}{2}))\mu(G) \geq 1$ olur. Bu ise b_{Φ}^* 'ın b_{Φ}^* , $\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \geq 1\}$ kümesi için bir alt sınır olması ile çelişir.

Benzer şekilde $b_{\Phi}^{**} \notin SC_{\Phi}^+$ olsun. O halde Önerme 2.1.27'den $b_{\Phi}^{**} \in A_{\Phi}$ olur. Dolayısıyla bir $0 < \delta < b_{\Phi}^{**} - a_{\Phi}$ için $(b_{\Phi}^{**} - \delta, b_{\Phi}^{**} + \delta)$ üzerinde p_+ sabit ve sonludur. $(b_{\Phi}^{**} - \delta, b_{\Phi}^{**})$ üzerinde $(\Psi \circ p_+)\mu(G) \leq 1$ olur. Ayrıca p_+ verilen komşulukta sabit olduğundan $p_+(b_{\Phi}^{**}) = p_+(b_{\Phi}^{**} + \frac{\delta}{2})$ ve buradan $\Psi(p_+(b_{\Phi}^{**}))\mu(G) = \Psi(p_+(b_{\Phi}^{**} + \frac{\delta}{2}))\mu(G) \leq 1$ elde edilir ki bu ise b_{Φ}^{**} 'ın üst sınır olması ile çelişir.

Lemma 2.4.3 Eğer $b_{\Phi}^{**} < \infty$ ise,

i) her $\varepsilon > 0$ için $\Psi(p_+(b_{\Phi}^{**} + \varepsilon))\mu(G) > 1$ olur.

ii) $b_{\Phi}^{**} < b_{\Phi}$ ise aşağıdakiler sağlanır.

(a) $\Psi(p_+(b_{\Phi}^{**}))\mu(G) \geq 1$ olur.

(b) $\Psi(p_+(u_0))\mu(G) > 1$ olacak şekilde bir $u_0 \in SC_{\Phi}^+ \cap [b_{\Phi}^{**}, \infty)$ vardır.

İspat. i): Bir $\varepsilon > 0$ için $\Psi(p_+(b_{\Phi}^{**} + \varepsilon))\mu(G) \leq 1$ olsaydı, b_{Φ}^{**} bu eşitsizliği saylayan noktaların supremumu olduğundan $b_{\Phi}^{**} \geq b_{\Phi}^{**} + \varepsilon > b_{\Phi}^{**}$ çelişkisi elde edilirdi.

ii) a): Eğer $b_{\Phi}^{**} < b_{\Phi}$ ise bir $0 < \delta \leq b_{\Phi} - b_{\Phi}^{**}$ için Φ fonksiyonu, $[b_{\Phi}^{**}, b_{\Phi}^{**} + \delta]$ üzerinde sonlu, dolayısıyla p_+ sonludur. Eğer i) şikkını göz önüne alırsak, her $x \in (b_{\Phi}^{**}, b_{\Phi}^{**} + \delta]$ için $\Psi(p_+(x))\mu(G) > 1$ olmalıdır. Ayrıca $\Psi \circ p_+$ sağdan sürekli olduğundan

$$\Psi(p_+(b_{\Phi}^{**}))\mu(G) = \lim_{x \rightarrow b_{\Phi}^{**}+} \Psi(p_+(x))\mu(G) \geq 1$$

elde edilir.

b): Lemma 2.4.2'den $b_{\Phi}^{**} \in [b_{\Phi}^{**}, \infty) \cap SC_{\Phi}^+$ olması gerektiği biliniyor. Eğer $\Psi(p_+(b_{\Phi}^{**}))\mu(G) > 1$ ise $u_0 = b_{\Phi}^{**}$ için istenen elde edilir. $b_{\Phi}^{**} < b_{\Phi}$ kabulü ve ii).a)'dan $\Psi(p_+(b_{\Phi}^{**}))\mu(G) < 1$ olamayacağı için $\Psi(p_+(b_{\Phi}^{**}))\mu(G) = 1$ kabul edilebilir. Eğer $SC_{\Phi}^+ \cap [b_{\Phi}^{**}, \infty) = \{b_{\Phi}^{**}\}$ ise $(b_{\Phi}^{**}, \infty) \subseteq A_{\Phi}$ olur. O halde, her $c > 0$ için $b_{\Phi}^{**} + c \in A_{\Phi}$ olmalıdır. p_+ sağdan sürekli olduğundan $\lim_{u \rightarrow b_{\Phi}^{**}+} p_+(u) = p_+(b_{\Phi}^{**})$ ve dolayısıyla $p_+(b_{\Phi}^{**} + c) = p_+(b_{\Phi}^{**})$ olarak bulunur. Buradan, $u \geq b_{\Phi}^{**}$ için

$$1 = \Psi(p_+(b_{\Phi}^{**}))\mu(G) = \Psi(p_+(u))\mu(G)$$

elde edilir. Böylece, $\sup\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1\} = \infty = b_{\Phi}^{**}$ elde edilir ki bu $b_{\Phi}^{**} < \infty$ olması ile çelişir. O halde, b_{Φ}^{**} sayısından farklı bir $u_0 \in SC_{\Phi}^+ \cap [b_{\Phi}^{**}, \infty)$ vardır. Şimdi kabul edelim ki $\Psi(p_+(u_0))\mu(G) = 1$ olsun. O zaman her $u \in [b_{\Phi}^{**}, u_0]$ için $\Psi(p_+(u))\mu(G) = 1$ olur. Bu durumda $u_0 \in \{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1\}$ olduğundan $b_{\Phi}^{**} \geq u_0 > b_{\Phi}^{**}$ çelişkisi elde edilir. Yani $\Psi(p_+(u_0))\mu(G) > 1$ olmalıdır.

□

Bu bölümün geri kalanında $\text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ kümesinin boş kümeden farklılığı araştırılacaktır.

Teorem 2.4.4 Bir Φ Orlicz fonksiyonu için $b_{\Phi}^{**} < \infty$ ise $\text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ boş kümeden farklıdır.

İspat. Eğer $b_{\Phi}^{**} < b_{\Phi}$ ise Lemma 2.4.3'ten bir $u_0 \in SC_{\Phi}^+ \cap [b_{\Phi}^{**}, \infty)$ için $\Psi(p_+(u_0))\mu(G) > 1$ olacağı biliniyor. Ancak $b_{\Phi}^{**} < \infty$ olduğu için Lemma 2.4.1 ii) şikkından $\Psi(p_-(u_0))\mu(G) \leq 1$

dolayısıyla $p_-(u_0) < \infty$ olur. Eğer $b_\Phi^{**} = b_\Phi < \infty$ ise $u_0 = b_\Phi^{**}$ seçebiliriz. Çünkü,

$$p_+(u_0) = \lim_{u \rightarrow b_\Phi^{**+}} \frac{\Phi(u) - \Phi(b_\Phi^{**})}{u - b_\Phi^{**}} = \lim_{u \rightarrow b_\Phi^+} \frac{\Phi(u) - \Phi(b_\Phi)}{u - b_\Phi} = \infty$$

ise $\Psi(p_+(u_0))\mu(G) = \infty > 1$ ve $b_\Phi^{**} < \infty$ olduğu için Lemma 2.4.1'den $\Psi(p_-(u_0))\mu(G) \leq 1$ dolayısıyla $p_-(u_0) < \infty$ elde edilir.

İki durumda da $p_-(u_0) < \infty$ olacak şekilde bir $u_0 \in SC_\Phi^+$ sayısının varlığı biliniyor. O halde, Lemma 2.1.31'den öyle (u_n) ve (ξ_n) dizileri bulunabilir ki $u_n \rightarrow u_0$, $\xi_n \rightarrow p_+(u_0)$, her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n \in SC_\Phi^+$, $\xi_n < b_\Psi$ ve her $\beta \in (0, 1)$ için $p_+(\beta u_n) < \xi_n < p_+\left(\frac{1}{\beta}u_n\right)$ sağlanır. $\Psi(p_+(u_0))\mu(G) > 1$ ve $\xi_n \rightarrow p_+(u_0)$ olduğundan yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için $\Psi(\xi_n)\mu(G) > 1$ olmalıdır. Bir $n_0 \in \mathbb{N}$ indisini sabitleyelim öyle ki $\Psi(\xi_{n_0})\mu(G) > 1$ olsun. Öte yandan her $n \in \mathbb{N}$ için $\xi_n < b_\Psi$ olduğundan $\Psi(\xi_{n_0}) < \infty$ ve μ atomsuz olduğundan $\Psi(\xi_{n_0})\mu(A) = 1$ olacak şekilde bir ölçülebilir A kümesi bulunabilir.

$$k_0 = 1 + \Phi(u_{n_0})\mu(A) \text{ ve } f = \frac{1}{k_0}(a_\Phi \chi_{G \setminus A} + u_{n_0} \chi_A)$$

olarak alınsın. O halde, her $t \in G$ için $k_0 f(t) \in \{a_\Phi, u_{n_0}\} \subseteq SC_\Phi^+$ olur. Diğer yandan, $p_+(0) < p_-(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} p_-(u)$ olmalıdır. Çünkü $p_-(\infty) \leq p_+(0)$ olursa p_- , $(0, \infty)$ üzerinde sabit bir fonksiyon olurdu ve dolayısıyla Φ bir doğrusal fonksiyon olurdu. Ayrıca, Önerme 2.1.22'den Φ fonksiyonunun $(0, \infty)$ üzerinde doğrusal olması için gerek ve yeter koşul her $u \in (0, \infty)$ için $\Psi(p_+(u)) = 0$ olmasıdır. Böylece $b_\Phi^{**} = \sup\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1\} = \infty$ elde edilir ki bu $b_\Phi^{**} < \infty$ olması ile çelişir. Young eşitliğinden $a_\Psi = p_+(0)$, $b_\Psi = p_-(\infty)$ ve Ψ , (a_Ψ, b_Ψ) üzerinde kesin artan olduğu için Ψ , $(p_+(0), p_-(\infty))$ üzerinde kesin artandır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ ve $\beta \in (0, 1)$ için $p_+(\beta u_n) < \xi_n < p_+\left(\frac{1}{\beta}u_n\right)$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} I_\Psi(p_+(\beta k_0 f)) &= \int \Psi(p_+(\beta k_0 f)) d\mu = \Psi(p_+(\beta u_{n_0}))\mu(A) < \Psi(\xi_{n_0})\mu(A) = 1 \\ &< \Psi\left(p_+\left(\frac{1}{\beta}u_{n_0}\right)\right)\mu(G) = \int \Psi\left(p_+\left(\frac{1}{\beta}k_0 f\right)\right) d\mu \\ &= I_\Psi\left(p_+\left(\frac{1}{\beta}k_0 f\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $\beta \in (0, 1)$ için $I_\Psi(p_+(\beta k_0 f)) < 1$ olduğundan $\kappa_1^{**}(f) = k_0$ ve $\beta \in (0, 1)$ için $I_\Psi\left(p_+\left(\frac{1}{\beta}k_0 f\right)\right) > 1$ olduğundan $\kappa_1^*(f) = k_0$ olur. Yani

$$K_1(f) = \{0 < k < \infty : \kappa_1^*(f) \leq k \leq \kappa_1^{**}(f)\} = \{k_0\}$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 2.2.12'den $f \in \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ olur. Bu ise $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin boş kümeden farklı olduğunu gösterir.

Teorem 2.4.5 $L_1^\Phi(G)$ Orlicz uzayının $L^1(G)$ Lebesgue uzayına doğrusal olarak izometrik olması için gerek ve yeter koşul $b_\Phi^{**} = \infty$ olmasıdır.

İspat. *Gereklik:* Eğer $L_1^\Phi(G)$ Orlicz uzayı, $L^1(G)$ Lebesgue uzayına doğrusal olarak izometrik ise Önerme 2.2.14'ten $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G)) = \emptyset$ olur. Teorem 2.4.4'ün karşıt tersi olarak eğer $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi boş küme ise $b_\Phi^{**} = \infty$ olmalıdır.

Yeterlilik: Kabul edelim ki $b_\Phi^{**} = \sup\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1\} = \infty$ olsun. O halde her $u \geq 0$ için $\Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1$ olduğu açıktır. Bu eşitsizliğin iki tarafından supremum alınırsa, $\sup_{u \geq 0} \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1$ elde edilir. Her $f \in L_1^\Phi \setminus \{0\}$ ve $k > 0$ için

$$0 < I_\Psi(p_+(kf)) = \int \Psi(p_+(kf))d\mu \leq \int \sup_{u \geq 0} \Psi(p_+(u))d\mu = \sup_{u \geq 0} \Psi(p_+(u))\mu(G) \leq 1$$

olur. Buradan, her $u \geq 0$ için $\Psi(p_+(u)) < \infty$ ve $\kappa_1^{**}(f) = \infty$ olduğu elde edilir. Young eşitliğinden her $u \geq 0$ için $\Psi(p_+(u)) < \infty$ olmasına denk koşul her $u \geq 0$ için $\Phi(u) < \infty$ olmasıydı. Dolayısıyla $b_\Phi = \sup\{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\} = \infty$ olmalıdır. Bunların yanı sıra $\mu(G) < \infty$ ve $p_+(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u) = a < \infty$ olduğu gözlemlenir. Yine Young eşitliğinden biliyoruz ki her $u > 0$ için $\Phi(u) = up_+(u) - \Psi(p_+(u))$ sağlanır. Bu eşitliğin iki tarafını $u > 0$ ile bölüp, $0 < \mu(A) < \infty$ olacak şekilde ölçülebilir A alt kümesini göz önüne alınarak limite geçilirse,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(p_+(u) - \frac{\Psi(p_+(u))\mu(A)}{u} \frac{1}{\mu(A)} \right) = a$$

bulunur. Öte yandan, $\kappa_1^{**}(f) = \infty$ olarak bulunduğu için Teorem 2.2.7'den $\|f\|_{\Phi,1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kf))$ elde edilir. Φ bir Orlicz fonksiyonu olduğundan, $u \mapsto \frac{\Phi(u)}{u}$ artandır.

Böylece, Monoton Yakınsaklık Teoremi'nden,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\Phi,1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (1 + I_{\Phi}(kf)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (I_{\Phi}(kf)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} (I_{\Phi}(k_n f)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\text{supp} f} \frac{\Phi(k_n f(t))}{k_n f(t)} |f(t)| d\mu(t) \\
&= \int_{\text{supp} f} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(k_n f(t))}{k_n f(t)} |f(t)| d\mu(t) \\
&= a \int_{\text{supp} f} |f(t)| d\mu(t) = a \|f\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $T(f) = \frac{1}{a}f$ ile verilen $T: L_1^{\Phi}(G) \rightarrow L^1(G)$ dönüşümü $L_1^{\Phi}(G)$ ve $L^1(G)$ arasında doğrusal olan bir izometridir.

2.5 ORLICZ NORMU İLE VERİLEN ORLICZ UZAYLARI (L_1^{Φ})

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılmak üzere bazı yardımcı sonuçlar verilecektir.

Lemma 2.5.1 Bir Φ Orlicz fonksiyonu alınsın. Bu durumda, $f \in L_1^{\Phi}(G) \setminus \{0\}$ fonksiyonu için aşağıdakiler sağlanır.

i) $\|f\|_{\infty} < \infty$ ise

$$a) \frac{b_{\Phi}^*}{\|f\|_{\infty}} \leq \kappa_1^*(f) \leq \kappa_1^{**}(f) \leq \frac{b_{\Phi}}{\|f\|_{\infty}} \quad \text{ve}$$

$$b) b_{\Phi}^{**} < \infty \text{ ise } \frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}} \leq \|f\|_{\Phi,1} \leq (1 + \Phi(b_{\Phi}^{**})\mu(G)) \frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}^{**}}$$

şıkları sağlanır.

ii) Eğer $b_{\Phi}^* = b_{\Phi} < \infty$ ise $\|f\|_{\infty} < \infty$ ve $\kappa_1^*(f) = \kappa_1^{**}(f)$ yani $K_1(f)$ tek nokta kümesidir.

iii) Φ Orlicz fonksiyonu, $b_{\Phi}^{**} < b_{\Phi}$ olmak üzere $(b_{\Phi}^{**}, b_{\Phi})$ aralığı üzerinde kesin konveks ise aşağıdakiler sağlanır.

$$a) \text{card}(K_1(f)) > 1 \text{ ise } \|f\|_{\infty} < \infty \text{ ve } \frac{b_{\Phi}^*}{\|f\|_{\infty}} \leq \kappa_1^*(f) < \kappa_1^{**}(f) \leq \frac{b_{\Phi}^{**}}{\|f\|_{\infty}} \text{ olur. Böylece,}$$

$$\frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}^{**}} \leq \|f\|_{\Phi,1} \leq (1 + \Phi(b_{\Phi}^{**})\mu(G)) \frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}^{**}}$$

elde edilir.

b) $b_{\Phi}^* = b_{\Phi}^{**} < \infty$ ise $K_1(f)$ tek nokta kümesidir.

iv) Eğer $b_{\Phi}^{**} = b_{\Phi} < \infty$ ise $\|f\|_{\infty} < \infty$ ve $\kappa_1^{**}(f) = \frac{b_{\Phi}}{\|f\|_{\infty}}$ olur. Buradan,

$$\frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}} \leq \|f\|_{\Phi,1} \leq (1 + \Phi(b_{\Phi})\mu(G)) \frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}}$$

sağlanır. O halde $b_{\Phi}^{**} = b_{\Phi} < \infty$ ve $\Phi(b_{\Phi})\mu(G) < \infty$ iken $L_1^{\Phi}(G)$ Orlicz uzayı, $L^{\infty}(G)$ uzayına doğrusal olarak izomorfiktir.

v) Eğer $a_{\Phi} = b_{\Phi}$ ise $\kappa_1^*(f) = \kappa_1^{**}(f) = \frac{b_{\Phi}}{\|f\|_{\infty}}$ ve $\|f\|_{\infty} = b_{\Phi}\|f\|_{\Phi,1}$ yani $L_1^{\Phi}(G)$ Orlicz uzayı, $L^{\infty}(G)$ uzayına doğrusal olarak izometriktir.

İspat. Bir $f \in L_1^{\Phi}(G) \setminus \{0\}$ alınsın.

i) : Kabul edelim ki $0 < \|f\|_{\infty} < \infty$ olsun. Eğer $b_{\Phi}^* = 0$ ise $\kappa_1^*(f) \geq 0$ olduğundan a) şıkkının ilk kısmı açıktır dolayısıyla $b_{\Phi}^* > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Tanımından, $b_{\Phi}^* = \inf\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \geq 1\}$ şeklindedir ve buradan $0 \leq k \leq \frac{b_{\Phi}^*}{\|f\|_{\infty}}$ için $\Psi(p_+(k\|f\|_{\infty}))\mu(G) < 1$ olması gerekir. O halde,

$$I_{\Psi}(p_+(kf)) \leq I_{\Psi}(p_+(k\|f\|_{\infty})) = \Psi(p_+(k\|f\|_{\infty})) < 1$$

olur. Dolayısıyla $k \in \left[0, \frac{b_{\Phi}^*}{\|f\|_{\infty}}\right)$ için $\alpha_1(kf) < 0$ sağlanır. Bu durumda,

$$\kappa_1^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_1(kf) \geq 0\} \text{ olduğu için } \kappa_1^*(f) \geq \frac{b_{\Phi}^*}{\|f\|_{\infty}} \text{ sağlanır.}$$

Eğer $k > \frac{b_{\Phi}^*}{\|f\|_{\infty}}$ alınırsa $k\|f\|_{\infty} > b_{\Phi}$ olur. Ayrıca, $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in G} |f(x)|$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için $k(f(x_{\varepsilon}) + \varepsilon) \geq k\|f\|_{\infty} > b_{\Phi}$ elde edilir. Bu eşitsizlikler kullanılırsa,

$$\int_G \Psi(p_+(kf + k\varepsilon))d\mu \geq \int_{\{x_{\varepsilon}\}} \Psi(p_+(kf + k\varepsilon))d\mu \geq \int_G \Psi(p_+(k\|f\|_{\infty}))d\mu = \infty$$

bulunur. Böylece, $I_{\Psi}(p_+(kf)) = \infty$ ve $\alpha_1(kf) > 0$ olur. O halde,

$$\kappa_1^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : \alpha_1(kf) \leq 0\} \leq \frac{b_{\Phi}}{\|f\|_{\infty}}$$

yani (a) şıkkındaki eşitsizlik sağlanır.

(b) şıkkının sağlandığını göstermek için $b_{\Phi}^{**} < \infty$ kabul edelim. O halde, $\Psi(p_+(u))\mu(G) > 1$ olacak şekilde bir $u \geq 0$ vardır. $\kappa_1^{**}(f) \leq \frac{b_{\Phi}}{\|f\|_{\infty}}$ olduğundan $\frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}} \leq \frac{1}{\kappa_1^{**}(f)}$ elde edilir. Diğer

yandan $\frac{1}{\kappa_1^{**}(f)} \leq \frac{1}{\kappa_1^*(f)} \leq \|f\|_{\Phi,1}$ olur ([4], Teorem 4.3.ii). Böylece,

$$\frac{\|f\|_\infty}{b_\Phi} \leq \frac{1}{\kappa_1^{**}} \leq \|f\|_{\Phi,1}$$

bulunur. Ayrıca $\|f\|_\infty < \infty$, $0 < b_\Phi^{**} < \infty$ koşulları ve 1-Amemiya normunun tanımından

$$\left\| \frac{b_\Phi^{**}}{\|f\|_\infty} f \right\|_{\Phi,1} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} \left(1 + I_\Phi \left(k \frac{b_\Phi^{**}}{\|f\|_\infty} f \right) \right)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik göz önüne alınırsa,

$$\|f\|_{\Phi,1} = \frac{\|f\|_\infty}{b_\Phi^{**}} \left\| \frac{b_\Phi^{**}}{\|f\|_\infty} f \right\|_{\Phi,1} \leq \frac{\|f\|_\infty}{b_\Phi^{**}} \left(1 + I_\Phi \left(\frac{b_\Phi^{**}}{\|f\|_\infty} f \right) \right)$$

elde edilir. Öte yandan, $\frac{f}{\|f\|_\infty} \leq 1$ olduğu için,

$$I_\Phi \left(b_\Phi^{**} \frac{f}{\|f\|_\infty} \right) \leq \int \Phi(b_\Phi^{**}) d\mu = \Phi(b_\Phi^{**}) \mu(G)$$

olur ve dolayısıyla

$$\frac{\|f\|_\infty}{b_\Phi^{**}} \left(1 + I_\Phi \left(\frac{b_\Phi^{**}}{\|f\|_\infty} f \right) \right) \leq \frac{\|f\|_\infty}{b_\Phi^{**}} (1 + \Phi(b_\Phi^{**}) \mu(G))$$

elde edilir. Sonuç olarak (b) şıkkındaki

$$\frac{\|f\|_\infty}{b_\Phi} \leq \|f\|_{\Phi,1} \leq (1 + \Phi(b_\Phi^{**}) \mu(G)) \frac{\|f\|_\infty}{b_\Phi^{**}}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

ii): Bir $f \in L_1^\Phi(G) \setminus \{0\}$ alınırsa, $\int \Phi(kf) d\mu < \infty$ olacak şekilde bir $k > 0$ olmalıdır ve $b_\Phi < \infty$ olduğundan Φ fonksiyonu her yerde sonlu değildir. Bu durumda $\|f\|_\infty = \infty$ olursa f fonksiyonunun $L_1^\Phi(G) \setminus \{0\}$ uzayının bir elemanı olmadığı elde edilirdi.

Eğer $b_\Phi^* = b_\Phi$ ise i) şıkkının (a) kısmından

$$\frac{b_\Phi^*}{\|f\|_\infty} \leq \kappa_1^*(f) \leq \kappa_1^{**}(f) \leq \frac{b_\Phi^*}{\|f\|_\infty} < \infty \text{ dolayısıyla, } k = \kappa_1^*(f) = \kappa_1^{**}(f) < \infty$$

elde edilir. O halde,

$$K_1(f) = \{0 < k < \infty : \kappa_1^*(f) \leq k \leq \kappa_1^{**}(f)\} = \{k\}$$

bulunur yani $K_1(f)$ bir tek nokta kümesidir.

iii) a): $\text{card}K_1(f) > 1$ olsun ve sıfırdan farklı sonlu ölçüye sahip bir A kümesi bulabileceğimizi kabul edelim öyle ki her $t \in A$ için $\kappa_1^*(f) < k < \kappa_1^{**}(f)$ sayısı için $b_\Phi^{**} < k|f(t)| \leq b_\Phi$ olsun. Φ fonksiyonu (b_Φ^{**}, b_Φ) üzerinde kesin konveks olduğundan bu küme üzerindeki hiçbir noktanın afin noktası olamayacağı Önerme 2.1.27'den biliniyor. Yani p_+ , (b_Φ^{**}, b_Φ) aralığının bir alt aralığı üzerinde sabit olamaz. $\kappa_1^*(f) < k$ olduğundan $p_+(\kappa_1^*(f)) < p_+(kf)$ olmalıdır. Ayrıca $\kappa_1^*(f) < k < \kappa_1^{**}(f)$ olduğundan $\alpha_1(kf) = 0$ yani $I_\Psi(p_+(kf)) = 1$ bulur. O halde ölçülebilir, A kümesi için $p_+(kf\chi_A) \in (a_\Psi, b_\Psi)$ olur. $\Psi \circ p_+$ sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için $I_\Psi(p_+(\kappa_1^*(f)|f|)) = 1$ sağlanır. (a_Ψ, b_Ψ) aralığı üzerinde Ψ kesin artan olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= I_\Psi(p_+(k|f|)) = I_\Psi(p_+(k|f|\chi_A)) + I_\Psi(p_+(k|f|\chi_{G \setminus A})) \\ &> I_\Psi(p_+(\kappa_1^*(f)|f|\chi_A)) + I_\Psi(p_+(\kappa_1^*(f)|f|\chi_{G \setminus A})) \\ &= I_\Psi(p_+(\kappa_1^*(f)|f|)) = 1 \end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. Öte yandan, $k|f(t)| > b_\Phi$ olsaydı $\Psi(p_+(k|f(t)|)) = \infty$ olurdu ki bu $k \in K_1(f)$ olmasıyla çelişirdi. O halde $k|f(t)| \leq b_\Phi^{**}$ yani $|f(t)| \leq \frac{b_\Phi^{**}}{k}$ olmalıdır. Bu eşitsizliğin iki tarafından supremum alınırsa, $\|f\|_\infty \leq \frac{b_\Phi^{**}}{k} < \infty$ olur. Elde edilen bu eşitsizliğin ise iki tarafından $k \in (\kappa_1^*(f), \kappa_1^{**}(f))$ değerleri üzerinden infimum alınırsa,

$$\|f\|_\infty \leq \inf_{k \in (\kappa_1^*(f), \kappa_1^{**}(f))} \frac{b_\Phi^{**}}{k} = \frac{b_\Phi^{**}}{\kappa_1^*(f)}$$

olur. Sonuç olarak, $\frac{b_\Phi^{**}}{\|f\|_\infty} \leq \kappa_1^*(f) < \kappa_1^{**}(f) \leq \frac{b_\Phi^{**}}{\|f\|_\infty}$ eşitsizliği sağlanır. Buradan,

$$\frac{\|f\|_\infty}{b_\Phi^{**}} \leq \frac{1}{\kappa_1^{**}(f)} \leq \|f\|_{\Phi,1} \leq (1 + \Phi(b_\Phi^{**})\mu(G)) \frac{\|f\|_\infty}{b_\Phi^{**}}$$

elde edilir yani iii) şıkkının (a) kısmındaki eşitsizlik gerçekleşmektedir.

b) : Şimdi kabul edelim ki $b_{\Phi}^* = b_{\Phi}^{**}$ ve $\text{card}K_1(f) > 1$ olsun. O halde iii'nin (a) şıkkından

$$\frac{b_{\Phi}^*}{\|f\|_{\infty}} \leq \kappa_1^*(f) < \kappa_1^{**}(f) \leq \frac{b_{\Phi}^{**}}{\|f\|_{\infty}} = \frac{b_{\Phi}^*}{\|f\|_{\infty}} \text{ yani } \kappa_1^*(f) = \kappa_1^{**}(f) \text{ eşitliği sağlanır.}$$

Ancak bu $\text{card}K_1(f) > 1$ olmasıyla çelişir. O halde, $\text{card}K_1(f) = 1$ olmalıdır.

iv) : $b_{\Phi}^{**} = b_{\Phi} < \infty$ olsun. $b_{\Phi} < \infty$ kabulünden $\|f\|_{\infty} < \infty$ olur. Teorem 2.4.1'in ii) şıkkı ve Önerme 2.1.21 göz önüne alınırsa, $0 \leq k < \frac{b_{\Phi}}{\|f\|_{\infty}}$ için

$$\begin{aligned} I_{\Psi}(p_+(k|f|)) &\leq I_{\Psi}(p_+(k\|f\|_{\infty})) \leq I_{\Psi}(p_-(b_{\Phi})) \\ &= \Psi(p_-(b_{\Phi}))\mu(G) \\ &= \Psi(b_{\Phi}^{**})\mu(G) \leq 1 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\alpha_1(kf) \leq 0$ olur.

Öte yandan, $k > \frac{b_{\Phi}}{\|f\|_{\infty}}$ ise $k\|f\|_{\infty} > b_{\Phi}$ olur. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için bir $t_{\varepsilon} \in G$ bulunabilir öyle ki $k(|f(t_{\varepsilon})| + \varepsilon) > k\|f\|_{\infty} > b_{\Phi}$ sağlanır. Bundan dolayı,

$$\int_G \Psi(p_+(k(|f| + \varepsilon)))d\mu \geq I_{\Psi}(p_+(k\|f\|_{\infty})) = \infty \text{ ve buradan } I_{\Psi}(p_+(k|f|)) = \infty$$

elde edilir. Bu durumda $\alpha_1(kf) > 0$ olması gerekir. O halde,

$$\kappa_1^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : \alpha_1(kf) \leq 0\} = \frac{b_{\Phi}}{\|f\|_{\infty}} < \infty$$

olur. Böylece, $\kappa_1^{**}(f)$ değeri için Teorem 2.2.7'den 1-Amemiya normu elde edilebilir yani

$\|f\|_{\Phi,1} = \frac{1}{\kappa_1^{**}(f)}(1 + I_{\Phi}(\kappa_1^*(f)f))$ sağlanır. Eğer i) şıkkının (b) kısmı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi,1} &= \frac{1}{\kappa_1^{**}(f)}(1 + I_{\Phi}(\kappa_1^{**}(f)f)) \leq (1 + \Phi(b_{\Phi}^{**})\mu(G)) \frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}} \\ &\leq (1 + \Phi(b_{\Phi})\mu(G)) \frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}} \end{aligned}$$

bulunur ve $\frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}} = \frac{1}{\kappa_1^{**}(f)}$ olduğundan

$$\frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}} \leq \|f\|_{\Phi,1} \leq (1 + \Phi(b_{\Phi})\mu(G)) \frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten dolayı, $b_{\Phi}^{**} = b_{\Phi} < \infty$ ve $\Phi(b_{\Phi})\mu(G) < \infty$ ise $L_1^{\Phi}(G)$ ve $L^{\infty}(G)$ doğrusal olarak izomorfiktir. Çünkü $T(f) = \frac{1}{b_{\Phi}}f$ ile tanımlanan $T : L_1^{\Phi}(G) \rightarrow L^{\infty}(G)$ dönüşümü doğrusal bir izomorfizmdir.

v) : Eğer $a_{\Phi} = b_{\Phi}$ ise $a_{\Phi} > 0$ olmalıdır. Aksi takdirde $(0, \infty)$ üzerinde Φ sonsuza özdeş olarak eşit olurdu ve bu ise Φ fonksiyonunun Orlicz fonksiyonu olması ile çelişirdi. Böylece, $0 < a_{\Phi} = b_{\Phi}^{*} = b_{\Phi}^{**} = b_{\Phi} < \infty$ gerçekleşir. Bundan dolayı, $\Phi(b_{\Phi}) = \Phi(a_{\Phi}) = 0$ bulunur.

Ayrıca iv) şikkından $\kappa_1^{*}(f) = \kappa_1^{**}(f) = \frac{b_{\Phi}}{\|f\|_{\infty}}$ olur ve dolayısıyla

$$\frac{b_{\Phi}}{\|f\|_{\infty}} \leq \|f\|_{\Phi,1} \leq (1 + \Phi(b_{\Phi})\mu(G)) \frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}} = \frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}}$$

bulunur. Buradan, $\frac{\|f\|_{\infty}}{b_{\Phi}} = \|f\|_{\Phi,1}$, denk olarak $\|f\|_{\infty} = b_{\Phi}\|f\|_{\Phi,1}$ eşitliği elde edilir.

O halde, $a_{\Phi} = b_{\Phi}$ ise $L_1^{\Phi}(G)$, $L^{\infty}(G)$ uzayına doğrusal olarak izometriktir. Çünkü $T(f) = \frac{1}{b_{\Phi}}f$ ile tanımlanan $T : L_1^{\Phi}(G) \rightarrow L^{\infty}(G)$ dönüşümü doğrusal bir izometridir.

Lemma 2.5.2 Bir Φ Orlicz fonksiyonu $b_{\Phi}^{**} < \infty$ koşulunu sağlasın. $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,1}} f$ olacak şekilde $(f_n) \subset \text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ ve $f \in L_1^{\Phi}(G)$ verilsin. Bununla birlikte, her $n \in \mathbb{N}$ için $K_1(f_n) = \{k_n\}$ olsun. Eğer

i) $0 < b_{\Phi}^{**} \leq b_{\Phi} < \infty$,

ii) Φ fonksiyonunun orijinden geçen eğik bir asimptot almaması,

iii) $\sup SC_{\Phi} < b_{\Phi} < \infty$

koşullarından biri sağlanıyorsa, bir $(k_{n_m}) \subset (k_n)$ alt dizisi ve bir $k_0 \in K_1(f)$ vardır öyle ki $k_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} k_0$ ve $\mu - \text{h} t \in G$ için $k_0|f(t)| \in SC_{\Phi}$ sağlanır.

İspat. Bir $f \in L_1^{\Phi}(G)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in \text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ alınsın öyle ki $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,1}} f$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $K_p(f_n) = \{k_n\}$ olsun. (k_n) dizisinin; i), ii) veya iii) koşullarından birinin sağlanması durumunda sınırlı olduğunu gösterelim.

Eğer $(f_n) \subset \text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ ise Teorem 2.2.12'den her $n \in \mathbb{N}$ için $\kappa_1^{*}(f_n) = \kappa_1^{**}(f_n) = k_n < \infty$ olması gerektiği biliniyor. Ayrıca Teorem 2.2.7'den $\|f_n\|_{\Phi,1} = \frac{1}{k_n}(1 + I_{\Phi}(k_n f_n))$ sağlanır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in S(L_1^{\Phi}(G))$ olduğundan $k_n = (1 + I_{\Phi}(k_n f_n))$ ve dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n \geq 1$ olur yani (k_n) dizisi alttan 1 ile sınırlı bir dizidir.

i) : Kabul edelim ki $0 < b_{\Phi}^{**} \leq b_{\Phi} < \infty$ olsun.

$b_\Phi < \infty$ olduğundan $\|f_n\|_\infty < \infty$ sağlanır. Lemma 2.5.1'in i) şikkından,

$$\|f_n\|_\infty \geq \frac{b_\Phi^{**}}{1 + \Phi(b_\Phi^{**})\mu(G)} \|f_n\|_{\Phi,1} = \frac{b_\Phi^{**}}{1 + \Phi(b_\Phi^{**})\mu(G)} > 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{\|f_n\|_\infty} \leq \frac{1 + \Phi(b_\Phi^{**})\mu(G)}{b_\Phi^{**}} \text{ olur ve dolayısıyla } \frac{b_\Phi}{\|f_n\|_\infty} \leq \frac{b_\Phi}{b_\Phi^{**}} (1 + \Phi(b_\Phi^{**})\mu(G)) \text{ sağlanır.}$$

$$\frac{b_\Phi}{\|f_n\|_\infty} \leq \frac{b_\Phi}{b_\Phi^{**}} (1 + \Phi(b_\Phi^{**})\mu(G)) \text{ ve } \|f_n\|_\infty < \infty \text{ olduğu için Lemma 2.5.1'in i) şikkından,}$$

$$\kappa_1^{**}(f_n) \leq \frac{b_\Phi}{\|f_n\|_\infty}$$

olur. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$k_n = \kappa_1^{**}(f_n) \leq \frac{b_\Phi}{\|f_n\|_\infty} \leq \frac{b_\Phi}{b_\Phi^{**}} (1 + \Phi(b_\Phi^{**})\mu(G)) < \infty$$

bulunur. Ayrıca, $b_\Phi^{**} < \infty$ ise $\Phi(b_\Phi^{**}) < \infty$ olduğu Lemma 2.4.1'in vi) şikkından biliniyor.

Eğer $\mu(G) < \infty$ ise (k_n) dizisi $\frac{b_\Phi}{b_\Phi^{**}} (1 + \Phi(b_\Phi^{**})\mu(G)) < \infty$ sayısı ile üstten sınırlanır.

Eğer $\mu(G) = \infty$ ise, $b_\Phi^{**} > 0$ olduğundan her $u \in (0, b_\Phi^{**})$ için $\Psi(p_+(u)) = 0$ olur. Dolayısıyla

Önerme 2.1.22'den Φ fonksiyonu, $(0, b_\Phi^{**})$ üzerinde doğrusaldır. Böylece $(0, b_\Phi^{**}) \subseteq A_\Phi$ olur.

$f_n \subseteq \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ olduğu için Teorem 2.2.12'den μ -hhh $t \in G$ için $\kappa_1^{**}(f_n)|f_n(t)| \in SC_\Phi$

olmalıdır. Bu sebeple pozitif ölçülü bir küme üzerinde $\kappa_1^{**}(f_n)|f_n(t)| \geq b_\Phi^{**}$ eşitsizliği

sağlanmalıdır. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(t)| \geq \frac{b_\Phi^{**}}{\kappa_1^{**}(f_n)} \geq b_\Phi^{**}$ ve $\|f_n\|_\infty \geq b_\Phi^{**} > 0$ olur.

Lemma 2.5.1'in i) şikkından her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$k_n = \kappa_1^{**}(f_n) \leq \frac{b_\Phi^{**}}{\|f_n\|_\infty} \leq \frac{b_\Phi}{b_\Phi^{**}} < \infty$$

bulunur. Dolayısıyla (k_n) dizisi, $\frac{b_\Phi}{b_\Phi^{**}} < \infty$ sayısı ile üstten sınırlıdır. Bu durumda ispatımızın geri kalanında lemmanın i) şikkının sağlanmadığını kabul edebiliriz.

Şimdi $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ olduğunu kabul edelim. f birim yuvarın bir uç noktası olduğundan $f \neq 0$ dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{t \in G : |f_n(t) - 0| < \varepsilon\}) = 0$ yani (f_n) dizisi μ ölçüsünde 0'a yakınsayamaz. O halde $\eta \leq \mu(A_m) < \infty$ ve $A_m \subseteq \{t \in G : f_{n_m}(t) \geq \eta\}$ olacak şekilde $\eta > 0$, $n_m \subset n$ alt dizisi ve ölçülebilir (A_m) küme dizisi bulunabilir.

ii): Φ Orlicz fonksiyonu orijinden geçen bir eğik asimptota sahip olmasın. Bu durumda, Teorem 2.2.9'un ii) şikkından $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) = \infty$ olmalıdır. $k_n \rightarrow \infty$ olduğundan, $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi(p_-(k_{n_m} \eta))$ elde edilir. O halde $\eta \leq \mu(A_m)$ eşitsizliğinden ve (A_m) dizisinin seçiminden,

$$\eta \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi(p_-(k_{n_m} \eta)) \mu(A_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} I_\Psi(p_-(k_{n_m} f_{n_m})) \quad (2.13)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\sup\{k \geq 0 : I_\Psi(p_+(kf_n)) - 1 = \alpha_1(kf_n) \geq 0\} = \kappa_1^*(f_n) = k_n$$

ve $k_n \rightarrow \infty$ olduğundan $\lim_{m \rightarrow \infty} I_\Psi(p_-(k_{n_m} f_{n_m})) \leq 1$ olmalıdır. Diğer yandan, (2.13) eşitsizliğinden $\eta \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) \leq 1$ ve buradan $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) \leq \frac{1}{\eta} < \infty$ elde edilir. Ancak bu Φ fonksiyonunun bir asimptota sahip olmasını gerektirir ki bu kabulümüzle çelişir. Yani (k_n) dizisi üstten de sınırlı olmalıdır.

iii): Kabul edelim ki $b_\Phi = \infty$ ve $\sup SC_\Phi < \infty = b_\Phi$ olsun. $k_n \rightarrow \infty$ olduğundan $k_{n_m} \eta \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$ ve A_m üzerinde $|f_{n_m}(t)| \geq \eta$ olduğundan $\inf_{t \in A_m} |f_{n_m}(t)| \geq \eta$ sağlanır. Buradan,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (k_{n_m} \inf_{t \in A_m} |f_{n_m}(t)|) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} k_{n_m} \eta = \infty > \sup SC_\Phi$$

elde edilir. O halde yeterince büyük $m \in \mathbb{N}$ ve $t \in A_m$ için $k_{n_m} |f_{n_m}(t)|$, Φ fonksiyonu için bir kesin konvekslik noktası değildir yani $k_{n_m} |f_{n_m}(t)| \notin SC_\Phi$ olur. Bunun sonucu olarak Teorem 2.2.12'den $f_{n_m} \notin \text{Ext} B(L_1^\Phi(G))$ bulunur. Bu ise (f_n) dizisinin birim yuvarının uç noktalarının bir dizisi olması ile çelişir.

Lemmanın üç koşulu altında da (k_n) dizisinin sınırlı bir dizi olması gerektiğini elde ettik. Alınan (k_n) dizisi sınırlı olduğundan bir $k_0 > 0$ için $k_n \rightarrow k_0$ yakınsamasının gerçekleştiği varsayılabilir çünkü eğer gerekirse Bolzano-Weierstrass Teoremi'nden (k_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisini bularak (k_n) dizisinin terimleri yakınsak alt dizisinin terimleri olarak belirlenebilir. Öte yandan, Teorem 2.2.12 göz önüne alındığında $(f_n) \subset \text{Ext} B(L_1^\Phi(G))$ olduğu için μ -hhh $t \in G$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n f_n(t) \in SC_\Phi$ olmalıdır. Gözlem 2.1.28'den SC_Φ kümesinin kapalı olduğu biliniyor. Kesin konvekslik noktalarının kümesi kapalı olduğundan μ -hhh $t \in G$ için $k_0 f(t) \in SC_\Phi$ gerçekleşir.

Teorem 2.2.7'den $\|f_n\|_{\Phi,1} = \frac{1}{k_n}(1 + I_{\Phi}(k_n f_n))$ olduğu biliniyor. Fatou Lemması ve Φ fonksiyonunun sürekliliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_0}(1 + I_{\Phi}(k_0 f)) &\leq \|f\|_{\Phi,1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi,1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n}(1 + I_{\Phi}(k_n f_n)) \\ &\geq \frac{1}{k_0} \left(1 + \int \Phi(\liminf_{n \rightarrow \infty} k_n |f_n(t)|) d\mu(t) \right) \\ &= \frac{1}{k_0}(1 + I_{\Phi}(k_0 f)) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan, $\|f\|_{\Phi,1} = \frac{1}{k_0}(1 + I_{\Phi}(k_0 f))$ sağlanır. Bu eşitlik ve [4] numaralı makaledeki Lemma 3.5'in iv) ve vi) şıklarından, k_0 sayısının $K_1(f)$ kümesinin bir elemanı olması gerektiği bulunur.

Gözlem 2.5.3 Teorem 2.2.12 göz önüne alındığında, $I_{\Phi}(k_0 f) \geq 0 = \chi_{\{\infty\}}(1)$ ve μ -h h h $t \in G$ için $k_0 f(t) \in SC_{\Phi}$ olduğundan, $f \in \text{Ext} B(L_1^{\Phi}(G))$ olması için $K_1(f)$ kümesinin bir tek nokta kümesi olması gerekir.

Lemma 2.5.4 Kabul edelim ki Φ Orlicz fonksiyonu, $0 < a_{\Phi} = b_{\Phi}^* = b_{\Phi}^{**} < \infty$ koşulunu sağlasın. Eğer bir $k \in K_1(f)$ ve μ -h h h $t \in G$ için $k|f(t)| = a_{\Phi}$ ise $K_1(f)$ bir tek nokta kümesidir.

İspat. Bir $k \in K_1(f)$ ve μ -h h h $t \in G$ için $k|f(t)| = a_{\Phi}$ olsun. Kabulden her $\beta > 1$ için

$$\begin{aligned} I_{\Psi}(p_+(\beta k|f|)) &= \int \Psi(p_+(\beta k|f|)) d\mu = \int \Psi(p_+(\beta a_{\Phi})) d\mu \\ &= \Psi(p_+(\beta a_{\Phi})) \mu(G) \\ &= \Psi(p_+(\beta b_{\Phi}^{**})) \mu(G) > 1 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $r > k$ ise $I_{\Psi}(p_+(r|f|)) > 1$ ve dolayısıyla $\alpha_1(r|f|) > 0$ olur.

Öte yandan, her $0 < \gamma < 1$ ve μ -h h h $t \in G$ için $\gamma^2 k|f(t)| < \gamma k|f(t)| = \gamma a_{\Phi}$ olur. Önerme 2.1.21'den $p_+(\gamma^2 k|f(t)|) \leq p_-(\gamma a_{\Phi})$ ve buradan

$$0 \leq I_{\Psi}(p_+(\gamma^2 k|f|)) \leq \Psi(p_-(\gamma a_{\Phi})) \mu(G) \leq \Psi(p_-(a_{\Phi})) \mu(G) = 0 < 1$$

olur. O halde $r < k$ ise $I_{\Psi}(p_+(r|f|)) < 1$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha_1(r|f|) < 0$ sağlanır.

Burada $\alpha_1(k|f|) = 0$ ve her $r > k$ için $\alpha_1(r|f|) > 0$, her $r < k$ için $\alpha_1(r|f|) < 0$ olduğundan $\kappa_1^*(f) = \kappa_1^{**}(f) = k$ yani $K_1(f) = \{k\}$ olur.

Teorem 2.5.5 Bir Φ Orlicz fonksiyonu için $a_\Phi = \sup SC_\Phi < \infty$ ise $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır.

İspat. Eğer $0 = a_\Phi = \sup SC_\Phi$ ise $[0, \infty) \subseteq A_\Phi$ dolayısıyla Φ fonksiyonu, $[0, \infty)$ üzerinde doğrusaldır. O zaman $L_1^\Phi(G)$, Önerme 2.2.13'ten $L^1(G)$ 'e doğrusal olarak izometriktir. Bu durumda $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G)) = \emptyset$ olacağından kapalı bir kümedir. O halde artık $a_\Phi > 0$ kabul edebiliriz.

Lemma 2.4.2'den $b_\Phi^*, b_\Phi^{**} \in SC_\Phi$ olduğu biliniyor. $a_\Phi \leq b_\Phi^* \leq b_\Phi^{**}$ ve $\sup SC_\Phi = a_\Phi$ olduğundan $0 < a_\Phi = b_\Phi^* = b_\Phi^{**} < \infty$ olur. O halde $SC_\Phi = \{-a_\Phi, a_\Phi\}$ sağlanır.

Şimdi $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,1}} f$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $K_1(f_n) = \{k_n\}$ olacak şekilde $f_n \in \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ dizisi ve bir $f \in L_1^\Phi(G)$ alınsın. Eğer $b_\Phi < \infty$ ise Lemma 2.5.2'nin i) şikkından (k_n) dizisinin bir $k_0 \in K_1(f)$ elemanına yakınsadığını ve μ -h h h $t \in G$ için $k_0|f(t)| \in SC_\Phi$ olduğunu kabul edebiliriz. O halde μ -h h h $t \in G$ için $k_0|f(t)| = a_\Phi$ bulunur. Lemma 2.5.4'ten $K_1(f)$ bir tek nokta kümesidir yani f , $L_1^\Phi(G)$ uzayının birim yuvarının bir uç noktasıdır. $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin keyfi bir dizisi bir $f \in \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ elemanına yakınsadığından $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kapalı bir kümedir.

Sonuç 2.5.6 Eğer herhangi $0 \leq a < \infty$, $0 < c \leq \infty$ sayıları için $\Phi(u) = c \max\{0, u - a\}$ ise $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır. Özel olarak $\text{Ext}B(L^\infty(G))$ ve $\text{Ext}B(L^1(G) + L^\infty(G))$ kümeleri de kapalıdır.

İspat. Bir $u \leq a$ için $\Phi(u) = 0$ ve $u > a$ için $\Phi(u) = cu - ca > 0$ olduğundan $a_\Phi = a$ bulunur. Ayrıca (a, ∞) üzerinde Φ afin olduğundan, $(a, \infty) \subseteq A_\Phi$ olmalıdır. Dolayısıyla $\sup SC_\Phi = a = a_\Phi$ gerçekleşir. Teorem 2.5.5'ten $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır.

1) Eğer $a = 1$ ve $c = \infty$ olarak alınırsa,

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 1 \\ \infty & u > 1 \end{cases}$$

olur. Böylece, $b_\Phi = \sup\{u > 0 : \Phi(u) < \infty\} = 1 = \sup\{u \geq 0 : \Phi(u) = 0\} = a_\Phi$ eşitliği sağlanır. Lemma 2.5.1'in v) şikkından $\|f\|_{\Phi,1} = \|f\|_\infty$ ve dolayısıyla $L_1^\Phi(G) = L^\infty(G)$ olur. Ayrıca $\sup SC_\Phi = a_\Phi$ olduğundan $\text{Ext}B(L^\infty(G))$ kümesi kapalıdır.

2) Eğer $a = c = 1$ olarak alınırsa,

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 1 \\ u - 1 & u > 1 \end{cases}$$

olur. Φ_1 Orlicz fonksiyonu, her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi_1(u) = |u|$ olarak verilsin. Dolayısıyla $[0, \infty)$ üzerinde $\Phi_1(u) = u$ şeklindedir ve $L^{\Phi_1}(G) = L^1(G)$ eşitliği kolayca elde edilir. Eğer

$$\Phi_2(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 1 \\ \infty & u > 1 \end{cases}$$

olarak alınırsa 1) şikkından $L^{\Phi_2}(G) = L^\infty(G)$ olduğu biliniyor.

Her $u \in [0, \infty)$ için $\Phi(u) = \int_0^u \frac{(\min\{\Phi_1, \Phi_2\})(s)}{s} ds$ olarak belirlenirse,

$L_1^\Phi(G) = L^{\Phi_1}(G) + L^{\Phi_2}(G)$ olmalıdır [12]. Öte yandan,

$$\int_0^u \frac{(\min\{\Phi_1, \Phi_2\})(s)}{s} ds = \begin{cases} 0 & u \leq 1 \\ u - 1 & u > 1 \end{cases}$$

olduğu için $L_1^\Phi = L^1(G) + L^\infty(G)$ eşitliği elde edilir.

Orlicz fonksiyonu Φ için $\sup SC_\Phi = 1 = a_\Phi$ şeklinde olduğu açıktır ve dolayısıyla $\text{Ext}B(L^1(G) + L^\infty(G))$ kümesi kapalıdır.

2.6 $L^\infty(G)$ UZAYININ ALT KÜMESİ OLAN $L_1^\Phi(G)$ UZAYLARI

Bu bölümde, $b_\Phi < \infty$ koşulunu sağlayan Orlicz fonksiyonu Φ tarafından üretilen Orlicz uzayları için $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapallığı incelenecektir.

Gözlem 2.6.1 Eğer Φ Orlicz fonksiyonu, bir reel sayıdan sonra sonsuz değer alıyorsa yani $b_\Phi < \infty$ koşulunu sağlıyorsa, bir $f \in L^0(G)$ elemanının $L_1^\Phi(G)$ Orlicz uzayına ait olması için $\lambda \|f\|_\infty \leq b_\Phi$ sağlanacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısının olması gerekir. O halde $L_1^\Phi(G) \subseteq L^\infty(G)$ olur.

Lemma 2.6.2 Bir Φ Orlicz fonksiyonu $0 < b_\Phi^{**} \leq b_\Phi < \infty$ koşulunu sağlasın. Bununla birlikte, $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,1}} f$ olacak şekilde $(f_n) \subset \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ ve $f \in L_1^\Phi(G)$ alınsın. Eğer aşağıdaki

iki koşuldan birini sağlayan bir $a > 0$ sayısı varsa f , $L_1^\Phi(G)$ uzayının birim yuvarının bir uç noktasıdır.

- i) $\mu - \text{hhh } t \in G$ için $\kappa_1^*(f)|f(t)| \geq a$,
- ii) Φ fonksiyonu $(0, a)$ üzerinde doğrusal.

İspat. Lemma 2.5.2'den $k_n \rightarrow k_0$ ve $\mu - \text{hhh } t \in G$ için $k_0|f(t)| \in SC_\Phi \subset [a, b_\Phi] \cup \{0\}$ olacak şekilde bir $k_0 \in K_1(f)$ bulunabileceği biliniyor.

Burada $k_0 \in K_1(f)$ olduğu için, $k_0 \geq \kappa_1^*(f)$ ve dolayısıyla her $t \in G$ için $k_0|f(t)| \geq \kappa_1^*(f)|f(t)|$ olmalıdır. Ayrıca $(f_n) \subset \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ olduğundan $\mu - \text{hhh } t \in G$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n f_n(t) \in SC_\Phi$ olur. O halde, $\mu - \text{hhh } t \in G$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n|f_n(t)| \geq a$ dolayısıyla $k_0|f(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n|f_n(t)| \geq a$ elde edilir. $A := \{t \in G : f(t) \neq 0\}$ olarak tanımlansın. $b_\Phi < \infty$ olduğundan $b_\Phi^{**} < \infty$ ve Lemma 2.5.1'in i) şikkından $\|f_n - f\|_\infty \leq b_\Phi \|f_n - f\|_{\Phi,1}$ elde edilir. Dolayısıyla $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ sağlanır.

Kabul edelim ki f fonksiyonu, $L_1^\Phi(G)$ uzayının birim yuvarının bir uç noktası olmasın yani $K_1(f)$ kümesi bir tek nokta kümesi olmasın. O halde bir $0 < \varepsilon < 1$ sayısı vardır öyle ki $((1 - \varepsilon)^2 k_0, k_0] \subset K_1(f)$ veya $[k_0, \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}) \subset K_1(f)$ olur. İki durumda da $k_n f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} k_0 f$ olduğundan $0 < \varepsilon < 1$ için $\|k_n|f_n| - k_0|f|\|_\infty \leq \|k_n f_n - k_0 f\|_\infty < \varepsilon a$ sağlanacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Şimdi $\mu - \text{hhh } t \in G$ için $f(t) = 0$ olmasının her $n \geq n_0$ için $f_n(t) = 0$ eşitliğini gerektireceğini iddia ediyoruz.

- i) sağlanıyorsa $\mu - \text{hhh } t \in G$ için $\kappa_1^*(f)|f(t)| \geq a > 0$ olacağından $\mu(G \setminus A) = 0$ olur ve dolayısıyla $\mu - \text{hhh } t \in G$ için $f(t) = 0$ olamaz.

Eğer $a_\Phi > 0$ ise $(f_n) \subset \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ olduğundan $\mu - \text{hhh } t \in G$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n|f_n(t)| \in SC_\Phi$ dolayısıyla $k_n|f_n(t)| \geq a_\Phi$ sağlanır. Bu eşitsizlik için limite geçilirse, $k_0|f(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n|f_n(t)| \geq a_\Phi > 0$ elde edilir. Bu durumda $\mu - \text{hhh } t \in G$ için $|f(t)| > 0$ olmalıdır. Bunun için iddiamızı ispatlarken $a_\Phi = 0$ kabul edebiliriz.

Eğer ii) sağlanıyorsa Φ fonksiyonu, $(0, a)$ üzerinde doğrusaldır ve dolayısıyla $(-a, a) \cap SC_\Phi = \{0\}$ olur. $\mu - \text{hhh } t \in G$ için $f(t) = 0$ ise her $n \geq n_0$ için $k_n|f_n(t)| \leq \|k_n f_n\|_\infty < \varepsilon a < a$ ve $k_n|f_n(t)| \in SC_\Phi \cap (-a, a) = \{0\}$ olur. Böylece $f_n(t) = 0$ olduğu elde edilir.

O halde eğer i) veya ii) sağlanıyorsa her $\beta, \gamma > 0$ ve $n \geq n_0$ için

$$I_{\Psi}(p_+(\beta k_0|f|\chi_{G \setminus A})) = \Psi(p_+(0))\mu(G \setminus A) = I_{\Psi}(p_+(\gamma k_n f_n \chi_{G \setminus A})) \quad (2.14)$$

elde edilir. Şimdi $((1 - \varepsilon)^2 k_0, k_0] \subset K_1(f)$ olduğunu kabul edelim. Her $n \geq n_0$ ve $t \in A$ için

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)^2 k_0|f(t)| &\leq (1 - \varepsilon)(k_0|f(t)| - \varepsilon a) < (1 - \varepsilon)k_n|f_n(t)| \\ &\leq (1 - \varepsilon)(k_0|f| + \varepsilon a) \\ &\leq (1 - \varepsilon)^2 k_0|f(t)| < k_0|f(t)| \end{aligned} \quad (2.15)$$

sağlanır. Diğer yandan, p_+ 'nın sağdan sürekliliğinden $I_{\Psi}(p_+((1 - \varepsilon)^2 k_0|f|)) = 1$ olmalıdır.

O halde $G \setminus A$ üzerindeki (2.14) eşitliği ve (2.15) eşitsizliğinden, G üzerinde her $n \geq n_0$ için

$$1 = I_{\Psi}(p_+((1 - \varepsilon)^2 k_0|f|)) \leq I_{\Psi}(p_+((1 - \varepsilon)k_n|f_n|)) \leq I_{\Psi}(p_+((1 - \varepsilon)^2 k_0|f|)) = 1$$

elde edilir. Her $n \geq n_0$ için $\alpha_1((1 - \varepsilon)k_n f_n) = 0$ olduğundan $(1 - \varepsilon)k_n \in K_1(f_n)$ olur.

Dolayısıyla $K_1(f_n)$ bir tek nokta kümesi olamaz. Bu ise $n \geq n_0$ için $f_n \notin \text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ olduğu anlamına gelir ki bu kabulümüzle çelişir.

Şimdi $[k_0, \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}] \subset K_1(f)$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $t \in A$ ve $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} k_0|f(t)| &\leq \frac{1}{1-\varepsilon}(k_0|f(t)| - \varepsilon a) < \frac{1}{1-\varepsilon}k_n|f_n(t)| \\ &\leq \frac{1}{1-\varepsilon}(k_0|f(t)| + \varepsilon a) \\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}k_0|f(t)| \end{aligned} \quad (2.16)$$

sağlanır. Öte yandan, p_- 'nin soldan sürekliliğinden ve I_{Ψ} tanımından

$$I_{\Psi}\left(p_+\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}k_0|f|\right)\right) = I_{\Psi}\left(p_-\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}k_0|f|\right)\right) = 1$$

olur. O halde $G \setminus A$ üzerindeki (2.14) eşitliği ve (2.16) eşitsizliğinden G üzerinde, her $n \geq n_0$ için

$$1 = I_{\Psi}(p_+(k_0|f|)) \leq I_{\Psi}\left(p_+\left(\frac{1}{1-\varepsilon}k_n|f_n|\right)\right) \leq I_{\Psi}\left(p_+\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}k_0|f|\right)\right) = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla her $n \geq n_0$ için $\frac{1}{1-\varepsilon}k_n \in K_1(f_n)$ olur. Bu durumda $K_1(f_n)$ bir tek nokta kümesi olamaz. Bu ise (f_n) dizisinin $L_1^\Phi(G)$ uzayının birim yuvarının uç noktalarının bir dizisi olması ile çelişir.

Sonuç olarak $K_1(f)$ kümesi bir tek nokta kümesi olmalıdır yani $f, L_1^\Phi(G)$ uzayının birim yuvarının bir uç noktasıdır.

Teorem 2.6.3 Kabul edelim ki bir Φ Orlicz fonksiyonu, bir reel sayıdan sonra sonsuz değer alsın yani $b_\Phi < \infty$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul

- i) $b_\Phi^{**} = b_\Phi$,
 - ii) $b_\Phi^{**} < b_\Phi$ ve Φ fonksiyonunun (b_Φ^{**}, b_Φ) üzerinde kesin konveks olması,
 - iii) bir $a > 0$ için Φ fonksiyonunun $(0, a)$ üzerinde doğrusal olması
- koşullarından birinin sağlanmasıdır.

İspat. *Gereklik:* $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kapalı olsun ve i), ii), iii) şıklarının hiçbiri sağlanmasın. Bir diğer deyişle, $b_\Phi^{**} < b_\Phi < \infty$, $b_\Phi^{**} \leq c < d \leq b_\Phi$ olmak üzere Φ fonksiyonu, bir $(c, d) \subset (b_\Phi^{**}, b_\Phi)$ üzerinde afin ve Φ hiçbir $a > 0$ için $(0, a)$ üzerinde doğrusal olmasın. O halde hiçbir $a > 0$ için $(0, a)$ üzerinde $\Psi \circ p_+$, sıfır değerini alamaz. $a_\Phi > 0$ olsaydı $(0, a_\Phi)$ üzerinde $\Phi \equiv 0$ olacağından $\Psi \circ p_+$ bu aralık üzerinde 0 değerini alırdı ki bu kabulümüzle çelişirdi. Bu durumda $a_\Phi = 0$ olduğu elde edilir. $a_\Phi \in SC_\Phi^+$ olduğundan $0 \in SC_\Phi^+$ olmalıdır. Sonuç 2.1.30'dan $SC_\Phi = \overline{M_\Phi} \cup \overline{D_\Phi}$ olduğu biliniyor. O halde, $0 \in \overline{M_\Phi}$ veya $0 \in \overline{D_\Phi}$ olmalıdır.

Eğer $0 \in \overline{M_\Phi}$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < a_n \in M_\Phi$ olacak şekilde 0'a yakınsayan bir (a_n) dizisi bulunabilir. Bu durumda $\eta_n = p_+(a_n)$ olarak alalım. Φ fonksiyonu $(0, \frac{1}{2}a_n)$ aralığı üzerinde doğrusal olmadığından $\eta_n = p_+(a_n) > 0$ olur.

Eğer $0 \notin \overline{M_\Phi}$ ise Sonuç 2.1.30'den $0 \in \overline{D_\Phi}$ olmalıdır. O halde $a_n \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $(a_n) \subset D_\Phi \subset SC_\Phi^+$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $p_-(a_n) < p_+(a_n)$ sağlanır. Bu durumda ise (η_n) dizisinin terimleri $(p_-(a_n), p_+(a_n))$ aralığından seçilsin yani her $n \in \mathbb{N}$ için $p_-(a_n) < \eta_n < p_+(a_n)$ olsun.

Şimdi, $p_+(c) > p_+(b_\Phi^{**})$ olduğunu iddia ediyoruz. $b_\Phi^{**} \leq c$ olduğundan $p_+(b_\Phi^{**}) \leq p_+(c)$ biliniyor. Eğer $p_+(b_\Phi^{**}) = p_+(c)$ olursa Φ fonksiyonu, (c, d) üzerinde afin olduğundan $c \leq u < d$ için $p_+(u) = p_+(c) = p_+(b_\Phi^{**})$ olur. Buradan,

$$\Psi(p_+(u))\mu(G) = \Psi(p_+(c))\mu(G) = \Psi(p_+(b_\Phi^{**}))\mu(G)$$

bulunur. Her $u \in (c, d)$, Φ fonksiyonu için bir afin noktası olacağından $\mu(G)$ 'nin sonlu olup olmadığına bakılmaksızın $b_{\Phi}^{**} \geq d$ elde edilir. Buradan, $b_{\Phi}^{**} \geq d > c \geq b_{\Phi}^{**}$ çelişkisi elde edilirdi. O halde $p_+(c) > p_+(b_{\Phi}^{**})$ olmalıdır. Önerme 2.1.21'den p_+ fonksiyonunun artan olduğu biliniyor. Böylece, $p_+(c) > p_+(b_{\Phi}^{**})$ olduğu için $c > b_{\Phi}^{**}$ olmalıdır. Bundan dolayı $\Psi(p_+(u))\mu(G) > 1$ sağlanır.

Eğer c sayısını herhangi $0 < \varepsilon < c$ için, Φ Orlicz fonksiyonunun $(c - \varepsilon, d)$ üzerinde afin olmayacağı şekilde yeterince küçük seçersek, $c \notin A_{\Phi}$ yani $c \in M_{\Phi} \subseteq SC_{\Phi}^+$ olur. Ayrıca $c < b_{\Phi}$ olduğundan $p_-(c) < \infty$ sağlanır. O halde Lemma 2.1.31'den (c_n) , (ξ_n) dizileri bulabiliriz öyle ki $c_n \rightarrow c$, $\xi_n \rightarrow p_+(c)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $c_n \in SC_{\Phi}^+$, $0 < \xi_n < b_{\Psi}$ ve her $\beta \in (0, 1)$ için $p_+(\beta c_n) < \xi_n < p_+(\frac{1}{\beta} c_n)$ sağlanır. Φ fonksiyonu, (c, d) üzerinde afin ve $(c_n) \subset SC_{\Phi}^+$ olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için $0 < c_n \leq c$ olur. Her $\beta \in (0, 1)$ için $\xi_n < p_+(\frac{1}{\beta} c_n)$ ve $(c, d) \subseteq A_{\Phi}$ olduğundan

$$\xi_n < p_+\left(\frac{1}{\beta} c_n\right) \leq p_+\left(\frac{1}{\beta} c\right) = p_+(c)$$

elde edilir. Her reel dizinin monoton bir alt dizisi olduğundan, gerekirse bir alt diziye geçerek $c_n \nearrow c$ ve $\xi_n \nearrow p_+(c)$ olduğunu varsayabiliriz.

Haar ölçüsü atomsuz alındığından ölçülebilir bir B alt kümesi bulabiliriz öyle ki $\Psi(p_+(c))\mu(B) = 1$ sağlanır. Burada, $c > b_{\Phi}^{**}$ olduğundan $\Psi(p_+(c))\mu(G) > 1$ dolayısıyla $\mu(G \setminus B) > 0$ olur. O halde pozitif ölçülü bir $A \subseteq G \setminus B$ kümesi bulunabilir.

Ψ fonksiyonunun soldan sürekliliğinden $\xi_n \nearrow p_+(c)$ ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Psi(\xi_m)\mu(B) = \Psi(p_+(c))\mu(B) = 1$$

olduğu elde edilir. Ayrıca $\eta_n = p_+(a_n) > a_{\Phi}$ veya $p_-(a_n) < \eta_n < p_+(a_n)$ şeklinde olacağından ve Φ fonksiyonu, pozitif ölçülü bir küme üzerinde doğrusal olmadığından her $n \in \mathbb{N}$ için $\Psi(\eta_n) > 0$ olur. Böylece $\Psi(\eta_n)\mu(A) > 0$ elde edilir. O halde, $\lim_{m \rightarrow \infty} \Psi(\eta_n)\mu(A) + \Psi(\xi_m)\mu(B) > 1$ sağlanır. Dolayısıyla $\Psi(\eta_n)\mu(A) + \Psi(\xi_{m_n})\mu(B) > 1$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $(m_n) \subset m$ alt dizisi bulabiliriz. Öte yandan, Haar ölçüsü atomsuz olduğu için her $n \in \mathbb{N}$ için $\Psi(\eta_n)\mu(A_n) + \Psi(\xi_{m_n})\mu(B) = 1$ olacak şekilde pozitif ölçülü (A_n) ölçülebilir küme dizisi bulabiliriz.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$k_n = 1 + \Phi(a_n)\mu(A_n) + \Phi(c_{m_n})\mu(B) \text{ ve } f_n = \frac{1}{k_n}(a_n\chi_{A_n} + c_{m_n}\chi_B)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ ve her $t \in G$ için $k_n f_n(t) \in \{0, a_n, c_{m_n}\} \subseteq SC_\Phi$ olur. Eğer her $\beta \in (0, 1)$ için $p_+(\beta c_n) < \xi_n < p_+\left(\frac{1}{\beta} c_n\right)$ eşitsizliğini ve (η_n) dizisinin seçimini göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} I_\Psi(p_+(\beta k_n |f_n|)) &= \Psi(p_+(\beta a_n))\mu(A_n) + \Psi(p_+(\beta c_{m_n}))\mu(B) \\ &< \Psi(\eta_n)\mu(A_n) + \Psi(\xi_{m_n})\mu(B) = 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} I_\Psi\left(p_+\left(\frac{1}{\beta} k_n |f_n|\right)\right) &= \Psi\left(p_+\left(\frac{1}{\beta} a_n\right)\right)\mu(A_n) + \Psi\left(p_+\left(\frac{1}{\beta} c_{m_n}\right)\right)\mu(B) \\ &> \Psi(\eta_n)\mu(A_n) + \Psi(\xi_{m_n})\mu(B) = 1 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için $\kappa_1^*(f_n) \leq k \leq \kappa_1^{**}(f_n)$ eşitsizliğini sağlayan tek bir k değeri k_n olduğundan $K_1(f_n) = \{k_n\}$ ve bu sebeple Teorem 2.2.7'den $\|f_n\|_{\Phi,1} = \frac{1}{k_n}(1 + I_\Phi(k_n f_n))$ olur. Buradan,

$$\|f_n\|_{\Phi,1} = \frac{1}{k_n}(1 + I_\Phi(k_n f_n)) = \frac{1}{k_n} \left(\int (\Phi(a_n)\chi_{A_n} + \Phi(c_{m_n})\chi_B) d\mu \right) = \frac{1}{k_n} k_n = 1$$

bulunur. Böylece, Teorem 2.2.12'den $(f_n) \subset \text{Ext} B(L_1^\Phi(G))$ elde edilir. Bununla birlikte,

$$k_0 = 1 + \Phi(c)\mu(B) \text{ ve } f = \frac{1}{k_0} c \chi_B$$

olarak tanımlansın. $n \rightarrow \infty$ iken $a_n \rightarrow 0$ ve $c_{m_n} \rightarrow c$ olduğu için, Φ fonksiyonunun sürekliliğinden $k_n \rightarrow k_0$ olur. Şimdi $\|f_n - f\|_{\Phi,1} \rightarrow 0$ yakınsamasını gösterelim.

$n \rightarrow \infty$ için limit alındığında $a_n \rightarrow 0$ ve $c - c_{m_n} \rightarrow 0$ olduğundan herhangi bir $\lambda > 0$ için $\lambda \max\{a_n, c_{m_n}\} \rightarrow 0$ olur. Tanımından, $I_\Phi(\lambda(k_n f_n - k_0 f)) = \Phi(\lambda a_n)\mu(A_n) + \Phi(\lambda(c - c_{m_n}))\mu(B)$ olduğu için Φ fonksiyonunun sürekliliği de kullanılırsa $I_\Phi(\lambda(k_n f_n - k_0 f)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ bulunur. O halde $\lambda > 0$ keyfi olduğundan

$$\|k_n f_n - k f\|_{\Phi,1} = \inf_{\lambda > 0} \left(\frac{1}{\lambda} (1 + I_\Phi(\lambda(k_n f_n - k_0 f))) \right) \rightarrow 0$$

yani $k_n f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,1}} k_0 f$ elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\Phi,1} &= \frac{1}{k_0} \|k_0 f_n - k_0 f\|_{\Phi,1} \leq \frac{1}{k_0} (\|k_0 f_n - k_n f_n\|_{\Phi,1} + \|k_n f_n - k_0 f\|_{\Phi,1}) \\ &= \frac{1}{k_0} (|k_0 - k_n| \|f_n\|_{\Phi,1} + \|k_n f_n - k_0 f\|_{\Phi,1}) \\ &= \frac{1}{k_0} (|k_0 - k_n| + \|k_n f_n - k_0 f\|_{\Phi,1}) \end{aligned}$$

sağlanır ve dolayısıyla $\|f_n - f\|_{\Phi,1} \rightarrow 0$ elde edilir.

Bu durumda, $1 \leq \beta < \frac{d}{c}$ için Φ fonksiyonu, (c, d) üzerinde afin olduğundan,

$$I_{\Psi}(p_+(\beta k_0 |f|)) = \Psi(p_+(\beta c))\mu(B) = \Psi(p_+(c))\mu(B) = 1$$

bulunur, dolayısıyla $[k_0, \frac{d}{c}k_0) \subset K_1(f)$ gerçekleşir. Böylece, Teorem 2.2.12'den $f, L_1^{\Phi}(G)$ uzayının birim yuvarının bir uç noktası olamaz.

Sonuç olarak teoremin i), ii), iii) şıklarının üçü birden sağlanmıyorsa $\text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ kümesi kapalı olamaz.

Yeterlilik : Burada $b_{\Phi} < \infty$ olduğu için, Teorem 2.2.9'un i) şikkından bir $f \in L_1^{\Phi}(G) \setminus \{0\}$ için $\kappa_1^*(f) = \kappa_1^{**}(f) = \infty$ olamayacağı biliniyor. Dolayısıyla $K_1(f) \neq \emptyset$ olmalıdır. Eğer $b_{\Phi}^{**} = 0$ ise $b_{\Phi}^* \leq b_{\Phi}^{**}$ olduğundan

$$0 = b_{\Phi}^* = \inf\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \geq 1\}$$

bulunur. O halde, her $u > 0$ için $\Psi(p_+(u))\mu(G) = 1$ olur. Böylece $\Psi(p_+(u))$, bir $a > 0$ için $(0, a)$ üzerinde sıfır değerini alamaz. Bu sebeple bir $a > 0$ için Φ , $(0, a)$ üzerinde doğrusal değildir. Dolayısıyla iii) koşulu sağlanamaz. Ayrıca $b_{\Phi}^{**} = 0$ olduğundan, $b_{\Phi} = b_{\Phi}^{**} = 0$ eşitliği sağlanamaz. Çünkü Φ bir Orlicz fonksiyonudur yani $(0, \infty)$ üzerinde $\Phi \equiv \infty$ olamaz. Buradan, $b_{\Phi}^{**} = 0$ ise i) koşulunun da sağlanamayacağı görülür. O halde $b_{\Phi}^{**} = 0$ iken yalnızca ii) şikkını inceleyebiliriz. Eğer ii) sağlanıyorsa Φ fonksiyonu, $(0, b_{\Phi})$ üzerinde kesin konveks olacağından, Teorem 2.2.17 göz önüne alınırsa $L_1^{\Phi}(G)$ uzayının yuvarlak olduğu yani $\text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G)) = S(L_1^{\Phi}(G))$ olduğu sonucuna varılır. Bu sebeple $\text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ kümesi kapalı bir kümedir.

Buradan sonra $b_{\Phi}^{**} > 0$ kabulüyle; teoremin i), ii), iii) şıklarından birinin sağlanması durumunda $\text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ kümesinin kapalı olduğunu göstereceğiz.

Şimdi $\|f_n - f\|_{\Phi,1} \rightarrow 0$ olacak şekilde $(f_n) \subset \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ dizisi ve $f \in L_1^\Phi(G)$ elemanını göz önüne alalım. Lemma 2.5.2'den μ -hhh $t \in G$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{k_n\} = K_1(f_n)$, $k_0 \in K_1(f)$, $k_n \rightarrow k_0$ ve $k_0|f(t)| \in SC_\Phi^+ \subset [a_\Phi, b_\Phi]$ olduğunu kabul edebiliriz.

$\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek için f fonksiyonunun, $L_1^\Phi(G)$ uzayının birim yuvarının bir uç noktası olduğunun gösterilmesi gerekir. Bunun için de $K_1(f)$ kümesinin bir tek nokta kümesi olduğunun gösterilmesi yeterliydi.

Lemma 2.5.1'in ii) ve iii) şıklarından, $b_\Phi^* = b_\Phi^{**} = b_\Phi$ veya $b_\Phi^* = b_\Phi^{**} < b_\Phi$ ve Φ fonksiyonunun (b_Φ^{**}, b_Φ) üzerinde kesin konveks olması koşullarından biri sağlanırsa, $K_1(f)$ kümesinin bir tek nokta kümesi olacağı biliniyor. O halde i) ve ii) şıkları için $b_\Phi^* < b_\Phi^{**} \leq b_\Phi$ olduğunu ve $b_\Phi^{**} = b_\Phi$ olduğunu veya $b_\Phi^{**} < b_\Phi$ ise Φ fonksiyonunun (b_Φ^{**}, b_Φ) üzerinde kesin konveks olduğunu kabul edelim. Bu durumda, Lemma 2.4.1'in iii) şikkından $\mu(G) < \infty$ ve $\Psi(p_+(b_\Phi^*))\mu(G) = \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G) = 1$ olur. Bu nedenle, $b_\Phi^* > 0$ ve $\Psi(p_+(b_\Phi^*)) > 0$ olur. Kabul edelim ki $K_1(f)$ bir tek nokta kümesi olmasın yani $\kappa_1^*(f) < \kappa_1^{**}(f)$ eşitsizliği sağlansın. Bir $\kappa_1^*(f) < k < \kappa_1^{**}(f)$ için $I_\Psi(p_+(kf)) = 1$ olduğu biliniyor. Böylece, p_+ 'nın sağdan sürekliliğinden

$$\lim_{k \rightarrow \kappa_1^*(f)^+} I_\Psi(p_+(kf)) = \lim_{k \rightarrow \kappa_1^*(f)^+} 1 = 1 = I_\Psi(p_+(\kappa_1^*(f)f))$$

elde edilir. O halde $\kappa_1^*(f) \leq k < \kappa_1^{**}(f)$ için $\alpha_1(kf) = 0$ olduğundan $I_\Psi(p_+(k|f|)) = 1$ olmalıdır.

Şimdi μ hemen hemen her yerde $\kappa_1^*(f)|f(t)| \geq b_\Phi^*$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksi takdirde, bir $k \in (\kappa_1^*(f), \kappa_1^{**}(f))$ ve pozitif ölçülü bir A kümesi bulabiliriz öyle ki her $t \in A$ için $\kappa_1^*(f)|f(t)| < b_\Phi^*$ olur. $b_\Phi^* < b_\Phi^{**}$ olduğundan, Lemma 2.4.1'in iii) şikkı dolayısıyla $\Psi(p_+(b_\Phi^*))\mu(G) = 1$ olur. Ayrıca tanımından her $u \in (b_\Phi^*, b_\Phi^{**})$ için $\Psi(p_+(u))\mu(G) = 1$ bulunur. Yine, $\Psi(p_+(b_\Phi^*))\mu(G) = 1$ olduğundan $\Psi(p_+(b_\Phi^*)) > 0$ ve dolayısıyla

$$p_+(b_\Phi^*) > a_\Psi = \sup\{u \geq 0 : \Psi(u) = 0\}$$

sağlanır. Ψ fonksiyonu, (a_Ψ, b_Ψ) üzerinde kesin artan olduğundan her $u \in (b_\Phi^*, b_\Phi^{**})$ için $p_+(b_\Phi^*) = p_+(u)$ olur. Böylece, b_Φ^* bir sağ afin noktasıdır. Bu durumda her $t \in A$ için $p_+(k|f(t)|) < p_+(b_\Phi^*)$ olmalıdır. Aksi takdirde b_Φ^* bir afin noktası olurdu. Bu ise b_Φ^* sabitinin bir kesin konvekslik noktası olması yani Lemma 2.4.2 ile çelişirdi. Ayrıca, $\Psi(p_+(b_\Phi^*)) > 0$

olduğundan her $t \in A$ için

$$\Psi(p_-(k|f|)) \leq \Psi(p_+(k|f|)) < \Psi(p_+(b_\Phi^*))$$

eşitsizliği sağlar.

$b_\Phi^{**} = b_\Phi$ şartı altında Lemma 2.5.1'in i) şikkından, Φ fonksiyonunun (b_Φ^{**}, b_Φ) üzerinde kesin konveks olması şartı altında ise Lemma 2.5.1'in iii) şikkından $k\|f\|_\infty \leq b_\Phi^{**}$ olduğu elde edilir. Ayrıca sayılabilir sayıda nokta haricinde $p_- = p_+$ ve μ atomsuz olduğundan μ -hhh $t \in G$ için $p_-(t) = p_+(t)$ sağlanır. Böylece,

$$\begin{aligned} 1 &= I_\Psi(p_+(p_+(k|f|))) = I_\Psi(p_-(k|f|)) < \Psi(p_-(b_\Phi^*))\mu(A) + \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G \setminus A) \\ &= \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(A) + \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G \setminus A) \\ &= \Psi(p_-(b_\Phi^{**}))\mu(G) = 1 \end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. O halde μ -hhh $t \in G$ için $\kappa_1^*(f)|f(t)| \geq b_\Phi^*$ olmalıdır. Lemma 2.6.2'in i) şikkından $K_1(f)$ kümesi bir tek nokta kümesi olur yani $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır.

Şimdi teoremin iii) şikkının sağlandığını kabul edelim yani bir $a > 0$ için Φ fonksiyonu, $(0, a)$ üzerinde doğrusal olsun. Bu durumda da Lemma 2.6.2'in ii) şikkından $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır.

2.7 SONLU DEĞERLİ Φ FONKSİYONU TARAFINDAN ÜRETİLEN $L_1^\Phi(G)$ UZAYLARI

Bu kısımda sadece sonlu değerler alan yani $b_\Phi = \infty$ koşulunu sağlayan Orlicz fonksiyonları tarafından üretilen Orlicz uzayları göz önüne alınacaktır.

Lemma 2.7.1 Kabul edelim ki Φ Orlicz fonksiyonu, $b_\Phi^* \leq b_\Phi^{**} < b_\Phi = \infty$ şartını sağlasın. Eğer Φ pozitif ölçülü bir $(a, b) \subset (b_\Phi^*, \infty)$ alt aralığı üzerinde afin ise ve

i) bir $u \in SC_\Phi$ için $b \leq u$,

ii) $b = \infty$ ve $a_\Phi = 0$,

iii) $b = \infty$, $\mu(G) < \infty$ ve Φ fonksiyonunun $(c, d) \subset (a_\Phi, a)$ aralığı üzerinde afin olması

koşullarından biri sağlanıyorsa $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalı değildir.

İspat. Φ fonksiyonu, bir $(a, b) \subset (b_\Phi^*, \infty)$ alt aralığı üzerinde afin olsun. Genelliği

bozmaksızın, (a, b) aralığının Φ fonksiyonunun maksimal afinlik aralığı olduğunu kabul edelim; yani her $\varepsilon > 0$ için Φ , $a > 0$ ise $(a - \varepsilon, b)$ üzerinde, $b < \infty$ ise $(a, b + \varepsilon)$ üzerinde afin olmasın. O halde $a \in SC_\Phi$ olur çünkü $a > 0$ ise a bir sol afin noktası olmadığından afin noktası da olamaz yani kesin konvekslik noktasıdır. Eğer $a = 0$ ise $(a, b) \subset (b_\Phi^*, \infty)$ olduğundan $a = b_\Phi^* = 0$ bulunur. Dolayısıyla $0 = a = a_\Phi \in SC_\Phi$ olur. Ayrıca eğer $b < \infty$ ise b bir sağ afin noktası olmadığından $b \in SC_\Phi$ olur.

İspata ilk olarak bir $(d_n) \subset SC_\Phi$ ve buna tekabül eden (ξ_n) dizilerini seçerek başlayacağız.

Şimdi kabul edelim ki i) sağlansın yani bir $u \in SC_\Phi$ için $b \leq u$ olsun. Burada $u < \infty$ olduğundan $b < \infty$ sağlanır. O halde, $b \in SC_\Phi$ olur. Öte yandan, eğer Φ fonksiyonu bir $\varepsilon > 0$ için $(b, b + \varepsilon)$ üzerinde de afince p_+ , hem (a, b) hem de $(b, b + \varepsilon)$ üzerinde sabit olacağından b noktasının p_+ için bir süreksizlik noktası olması gerekir. Aksi takdirde p_+ , $(a, b + \varepsilon)$ üzerinde sabit olacağından bu durum, (a, b) aralığının maksimal afinlik aralığı olması ile çelişirdi. Dolayısıyla $p_-(b) < p_+(b)$ olmalıdır. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $d_n = b$ ve $\xi_n \in (p_-(b), p_+(b))$ ve $\xi_n \searrow p_-(b)$ olacak şekilde dizilerimizi seçelim. Eğer bir $\varepsilon > 0$ sayısı için Φ fonksiyonu, $(b, b + \varepsilon)$ üzerinde afin değilse, bir $(d_n) \subset SC_\Phi$ dizisi bulabiliriz öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $d_n > b$ ve $d_n \searrow b$ sağlanır. Bu durumda ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\xi_n = p_-(d_n)$ olarak seçilsin. Burada, Ψ fonksiyonunun (a_Ψ, b_Ψ) üzerinde kesin artan olması, p_- 'nin soldan sürekliliği ve Φ fonksiyonunun (a, b) üzerinde afin olması kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Psi(\xi_n)\mu(G) > \Psi(p_-(b))\mu(G) = \Psi(p_+(a))\mu(G) \geq 1$$

eşitsizlikleri elde edilir. Çünkü $\Psi(p_+(a))\mu(G) < 1$ olursa $a < b_\Phi^*$ bulunurdu. Bu ise $(a, b) \subseteq (b_\Phi^*, \infty)$ olması ile çelişirdi. Dolayısıyla $\Psi(p_+(a))\mu(G) \geq 1$ olmalıdır. O halde, ölçünün atomsuzluğu ve σ -sonluluğundan bir $X_0 \subset G$ sonlu ölçülü kümesi bulabiliriz öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\Psi(\xi_n)\mu(X_0) > 1$ olur. Ayrıca yine μ ölçüsünün atomsuzluğundan öyle artan $(A_n) \subset X_0$ dizisi bulabiliriz ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\Psi(\xi_n)\mu(A_n) = 1$ olur. Bununla beraber, $A_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset X_0$ olsun ve $g = d_1\chi_{X_0}$ olarak tanımlansın. Burada $b_\Phi = \infty$ olduğundan her $\lambda > 0$ için

$$I_\Phi(\lambda g) = \int_{X_0} \Phi(\lambda d_1) d\mu = \Phi(\lambda d_1)\mu(X_0)$$

olur. Öte yandan,

$$e = a_\Phi, k_n = 1 + \Phi(d_n)\mu(A_n) \text{ ve } f_n = \frac{1}{k_n}(e\chi_{G \setminus A_n} + d_n\chi_{A_n})$$

olarak seçilsin.

Şimdi kabul edelim ki lemmanın ii) veya iii) şıkları sağlansın ancak i) sağlanmasın. O halde Φ fonksiyonu, $(a, \infty) \subseteq (b_\Phi^*, \infty)$ sınırsız aralığı üzerinde afindir ve tüm kesin konvekslik noktaları (b_Φ^*, a) üzerindedir. Öte yandan, $\Psi(p_+(a))\mu(G) > 1$ olmalıdır. Çünkü $\Psi(p_+(a))\mu(G) \leq 1$ olursa her $u \in (a, \infty)$ için $\Psi(p_+(u))\mu(G) = \Psi(p_+(a))\mu(G) \geq 1$ olurdu. Dolayısıyla $b_\Phi^{**} = \sup\{u \geq 0 : \Psi(p_+(u))\mu(G) \geq 1\} = \infty$ bulunurdu. Bu ise $b_\Phi^{**} < \infty$ kabulü ile çelişirdi. Diğer yandan $\Psi(p_+(a))\mu(G) > 1$ ise $a > 0$ ve $a > b_\Phi^{**}$ sağlanır. Eğer bir $\varepsilon > 0$ için Φ fonksiyonu, $(a - \varepsilon, a)$ üzerinde afinse, $a \in SC_\Phi$ olduğundan a noktasının p_+ için bir süreksizlik noktası olması gerekir yani $p_-(a) < p_+(a)$ olmalıdır. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $d_n = a$, $\xi_n \in (p_-(a), p_+(a))$ ve $\xi_n \nearrow p_+(a)$ olacak şekilde belirleyelim. Eğer Φ fonksiyonu, $(a - \varepsilon, a)$ üzerinde afin değilse her $n \in \mathbb{N}$ için $a_\Phi < d_n < a$ ve $d_n \nearrow a$ olacak şekilde $d_n \subset SC_\Phi$ dizisi bulunabilir. Bu durumda da $\xi_n = p_+(d_n)$ olarak seçelim. Ψ sürekli olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(\xi_n)\mu(G) = \Psi(p_+(a))\mu(G) > 1$$

olduğu elde edilir. O halde, gerekirse eşitsizliği sağlamayan sonlu sayıdaki terimleri atarak her $n \in \mathbb{N}$ için $\Psi(\xi_n)\mu(G) > 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Yine, μ ölçüsünün atomsuzluğu ve σ -sonluluktan her $n \in \mathbb{N}$ için $\Psi(\xi_n)\mu(X_0) > 1$ olacak şekilde $X_0 \subset G$ sonlu ölçülü kümesi bulabiliriz.

Şimdi ii)'nin sağlandığını kabul edelim. $(A_n) \subset X_0$ azalan, $\mu(A_n \setminus A_{n+1}) \searrow 0$ ve $\Psi(\xi_n)\mu(A_n) = 1$ koşullarını sağlayan bir küme dizisi olsun. Burada ise, $A_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ve $g = a\chi_{X_0}$ olarak belirlensin. Diğer yandan, $b_\Phi = \infty$ olduğu için

$$I_\Phi(\lambda g) = \int_{X_0} \Phi(\lambda a) d\mu = \Phi(\lambda a)\mu(X_0) < \infty$$

bulunur. Ayrıca,

$$e = a_\Phi, \quad k_n = 1 + \Phi(d_n)\mu(A_n) \quad \text{ve} \quad f_n = \frac{1}{k_n}(e\chi_{G \setminus A_n} + d_n\chi_{A_n}) = \frac{1}{k_n}d_n\chi_{A_n}$$

olarak alınsın. Bu durumda, ii) şıkkı sağlanıyorsa $e = a_\Phi = 0$ olacağından $e = 0$ ve $f_n = \frac{1}{k_n}d_n\chi_{A_n}$ olur.

Son olarak lemmanın iii) şıkkının sağlandığını kabul edelim. Dolayısıyla $\mu(G) < \infty$ olsun.

Benzer şekilde $(c, d) \subset (a_\Phi, a)$ aralığının Φ fonksiyonu için maksimal afinlik alt aralığı olduğunu kabul edelim. Bundan dolayı, $c \in SC_\Phi$ olur. Burada, $e = c$ ve $(A_n) \subset G$ bir küme dizisi olsun öyle ki A_n azalan, $\mu(A_n \setminus A_{n+1}) \searrow 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\Psi(\xi_n)\mu(A_n) + \Psi(p_+(e))\mu(G \setminus A_n) = 1$ sağlansın. Bununla birlikte, $A_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $g = a\chi_G$ olarak belirlensin ve

$$k_n = 1 + \Phi(d_n)\mu(A_n) + \Phi(e)\mu(G \setminus A_n) \text{ ve } f_n = \frac{1}{k_n}(e\chi_{G \setminus A_n} + d_n\chi_{A_n})$$

olarak seçilsin. Ayrıca her $\lambda > 0$ için $I_\Phi(\lambda g) = \int \Phi(\lambda a) d\mu = \Phi(\lambda a)\mu(G) < \infty$ elde edilir.

Lemmanın i) ve ii) kabulleri altında her $\beta \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned} I_\Psi(p_+(\beta^2 k_n f_n)) &= \Psi(p_+(\beta^2 e))\mu(G \setminus A_n) + \Psi(p_+(\beta^2 d_n))\mu(A_n) \\ &\leq \Psi(p_-(\beta e))\mu(G \setminus A_n) + \Psi(p_-(\beta d_n))\mu(A_n) \\ &< \Psi(p_-(e))\mu(G \setminus A_n) + \Psi(\xi_n)\mu(A_n) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Lemmanın iii) kabulü altında ise her $\beta \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned} I_\Psi(p_+(\beta^2 k_n f_n)) &= \Psi(p_+(\beta^2 e))\mu(G \setminus A_n) + \Psi(p_+(\beta^2 d_n))\mu(A_n) \\ &\leq \Psi(p_-(\beta e))\mu(G \setminus A_n) + \Psi(p_-(\beta d_n))\mu(A_n) \\ &< \Psi(p_-(e))\mu(G \setminus A_n) + \Psi(\xi_n)\mu(A_n) \\ &\leq \Psi(p_+(e))\mu(G \setminus A_n) + \Psi(\xi_n)\mu(A_n) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan, her $\gamma > 1$ içinse, i) ve ii) kabulleri altında,

$$\begin{aligned} I_\Psi(p_+(\gamma k_n f_n)) &= \Psi(p_+(\gamma e))\mu(G \setminus A_n) + \Psi(p_+(\gamma d_n))\mu(A_n) \\ &\geq \Psi(p_+(\gamma d_n))\mu(A_n) > \Psi(\xi_n)\mu(A_n) = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Lemmanın iii) kabulü altında, yine her $\gamma > 1$ için

$$\begin{aligned} I_\Psi(p_+(\gamma k_n f_n)) &= \Psi(p_+(\gamma e))\mu(G \setminus A_n) + \Psi(p_+(\gamma d_n))\mu(A_n) \\ &> \Psi(p_+(c))\mu(G \setminus A_n) + \Psi(\xi_n)\mu(A_n) = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $K_1(f_n) = \{k_n\}$ olur ve Teorem 2.2.7'den

$$\|f_n\|_{\Phi,1} = \frac{1}{k_n}(1 + I_{\Phi}(k_n f_n))$$

eşitliği sağlanır. O halde,

$$\|f_n\|_{\Phi,1} = \frac{1}{k_n}(1 + I_{\Phi}(k_n f_n)) = \frac{1}{k_n}(1 + \Phi(d_n)\mu(A_n) + \Phi(e)\mu(G \setminus A_n)) = \frac{1}{k_n}k_n = 1$$

bulunur. Her $t \in G$ için $k_n f_n(t) \in \{e, d_n\} \subset SC_{\Phi}$ olduğundan, Teorem 2.2.12 göz önüne alınırsa, $(f_n) \subset \text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ elde edilir.

Şimdi,

$$k_0 = 1 + \Phi(d_0)\mu(A_0) + \Phi(e)\mu(G \setminus A_0), f = \frac{1}{k_0}(d_0\chi_{A_0} + e\chi_{G \setminus A_0}) \text{ ve } d_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$$

olarak belirlensin. Bu durumda, i) koşulu altında $d_0 = b$, ii) ve iii) koşulları altında $d_0 = a$ olacağından $d_0 \in SC_{\Phi}$ bulunur.

Bir $t \in G \setminus A_n$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n f_n(t) = e$, $t \in A_n$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n f_n(t) = d_n$ olur. Ayrıca, $t \in G \setminus A_0$ için $k_0 f(t) = e$ ve $t \in A_0$ için $k_0 f(t) = d_0$ elde edilir. Ek olarak, Önerme 2.1.13 yani ölçünün sürekliliğinden i), ii) ve iii) kabulleri altında da

$$\mu(A_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \text{ ve } \mu(G \setminus A_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G \setminus A_n)$$

olur. O halde, her $t \in G$ için $k_n f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k_0 f(t)$ sağlanır.

Kabullerimizden her $t \in G \setminus X_0$ için $k_n f_n(t) = k_0 f(t) = e$ olur. Dolayısıyla her $t \in G$ için

$$|k_n f_n(t) - k_0 f(t)|\chi_{G \setminus X_0}(t) = 0 \text{ ve } |k_n f_n(t) - k_0 f(t)| = |k_n f_n(t) - k_0 f(t)|\chi_{X_0}(t) = 0$$

bulunur. Diğer yandan, (d_n) dizisi ve g fonksiyonunun seçimlerinden her $\lambda > 0$ için,

$$\lambda |k_n f_n(t) - k_0 f(t)| \leq \lambda |k_n f_n(t)| = \lambda d_n \leq \lambda g$$

olur. Böylece her $\lambda > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$I_{\Phi}(\lambda(k_n f_n - k_0 f)) \leq I_{\Phi}(\lambda g) < \infty$$

sağlanır. O halde Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi'nden ve Φ fonksiyonunun sürekliliğinden,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} I_{\Phi}(\lambda(k_n f_n - k_0 f)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \Phi(\lambda(k_n f_n - k_0 f)) d\mu \\ &= \int \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(k_n f_n - k_0 f)\right) d\mu = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sebeple,

$$\|k_n f_n - k_0 f\|_{\Phi,1} = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} (1 + I_{\Phi}(\lambda(k_n f_n - k_0 f))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

sağlanır. O halde, $k_n f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,1}} k_0 f$ ve $k_n \rightarrow k_0$ olduğundan $\frac{1}{k_n} k_n f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,1}} \frac{1}{k_0} k_0 f$ yani $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,1}} f$ elde edilir.

Şimdi ise f fonksiyonunun $L_1^{\Phi}(G)$ uzayının birim yuvarının bir uç noktası olmadığını iddia ediyoruz. Eğer $b < \infty$ ise, i) şikkının kabulleri altında her $\frac{a}{b} < \beta < 1$ için

$$\begin{aligned}I_{\Psi}(p_+(\beta(k_0 f))) &= \int_{G \setminus A_0} \Psi(p_+(\beta e)) d\mu + \int_{A_0} \Psi(p_+(\beta d_0)) d\mu \\ &= \Psi(p_+(\beta d_0)) \mu(A_0) \stackrel{d_0=b}{=} \Psi(p_+(\beta b)) \mu(A_0) \\ &= \Psi(p_-(d_0)) \mu(A_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(\xi_n) \mu(A_n) = 1\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan $(\frac{a}{b} k_0, k_0) \subseteq K_1(f)$ olur. Dolayısıyla $f \notin \text{Ext } B(L_1^{\Phi}(G))$ elde edilir.

Eğer $b = \infty$ ise ii) veya iii) kabulleri altında, $d_0 = a$ ve Φ fonksiyonu, (a, ∞) üzerinde afin olacağından, bir $\beta > 1$ bulunabilir öyle ki $\Psi(p_+(\beta d_0)) = \Psi(p_+(d_0))$ sağlanır. Ayrıca ii) kabulleri altında $a_{\Phi} = 0$ ve iii) kabulleri altında Φ fonksiyonu, (a_{Φ}, a) üzerinde afin olacağından $\Psi(p_+(\beta e)) = \Psi(p_+(e))$ sağlanır.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}I_{\Psi}(p_+(\beta k_0 f)) &= \Psi(p_+(\beta d_0)) \mu(A_0) + \Psi(p_+(\beta e)) \mu(G \setminus A_0) \\ &= \Psi(p_+(d_0)) \mu(A_0) + \Psi(p_+(e)) \mu(G \setminus A_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\Psi(\xi_n) \mu(A_n) + \Psi(p_+(e)) \mu(G \setminus A_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1\end{aligned}$$

bulunur ve bundan dolayı $(k_0, \beta k_0) \subseteq K_1(f)$ olur. Böylece $f \notin \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ elde edilir.

Sonuç olarak; i), ii) veya iii)'den biri sağlanıyorsa $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalı olamaz.

Teorem 2.7.2 Kabul edelim ki Φ Orlicz fonksiyonu, $a_\Phi < \sup SC_\Phi < b_\Phi = \infty$ koşulunu sağlasın. Bu durumda, $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul

i) $b_\Phi^{**} = \infty$,

ii) Φ fonksiyonunun $(a_\Phi, \sup SC_\Phi)$ üzerinde kesin konveks olması

koşullarından birinin sağlanmasıdır.

İspat. Notasyonu kolaylaştırmak adına $c_\Phi = \sup SC_\Phi$ diyelim. Gözlem 2.1.27'den Φ fonksiyonu kesin konveks olmadığı yerlerde afin olduğu için, (c_Φ, ∞) üzerinde afindir yani her $u \geq c_\Phi$ için $p_+(u) = p_+(c_\Phi)$ sağlanır.

Gereklik : Kabul edelim ki $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalı olsun ve ne i) ne de ii) sağlanmasın. Yani $b_\Phi^{**} < \infty$ ve Φ fonksiyonu, $(c, d) \subset (a_\Phi, c_\Phi)$ pozitif ölçülü aralığı üzerinde afin olsun. Ayrıca b_Φ^* , Lemma 2.4.2'den bir kesin konvekslik noktası olduğu için $b_\Phi^* \notin (c, d)$ olmalıdır. Dahası, $(c, d) \subset (b_\Phi^*, c_\Phi) \subset (b_\Phi^*, \infty)$ ise Lemma 2.7.1'den $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kapalı değildir.

Eğer $a_\Phi > 0$ ve $\mu(G) = \infty$ ise Lemma 2.4.1'in v) şikkından $a_\Phi = b_\Phi^* = b_\Phi^{**} > 0$ bulunur. Dolayısıyla $(c, d) \subset (a_\Phi, c_\Phi) = (b_\Phi^*, c_\Phi)$ olur ve Lemma 2.7.1'den $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalı olamaz.

O halde, artık Φ fonksiyonunun $(c, d) \subset (a_\Phi, b_\Phi^*)$ alt aralığı üzerinde afin olduğunu ve bununla birlikte, ya $a_\Phi = 0$ ya da $\mu(G) < \infty$ olduğunu kabul edebiliriz. Ancak bu durumda da yine Lemma 2.7.1'den $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalı olamaz. O halde, teoremin hem i) hem de ii) şıkları sağlanmıyorsa $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalı olamaz.

Yeterlilik : Eğer $b_\Phi^{**} = \infty$ ise Teorem 2.4.5'ten $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır. Şimdi ii) şikkının sağlandığını kabul edelim yani Φ fonksiyonu, (a_Φ, c_Φ) üzerinde kesin konveks olsun. O halde, teoremin i) şikkından, $b_\Phi^{**} \leq c_\Phi < \infty = b_\Phi$ olduğunu kabul edebiliriz. Lemma 2.4.3'ün ii) şikkından $\Psi(p_+(c_\Phi))\mu(G) > 1$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ ve $f \in L_1^\Phi(G)$ alalım öyle ki $\|f_n - f\|_{\Phi,1} \rightarrow 0$ ve $K_1(f_n) = \{k_n\}$ olsun. Lemma 2.5.2'den μ -hhh $t \in G$ için $k_n \rightarrow k_0$ ve $k_0|f(t)| \in SC_\Phi \subseteq [a_\Phi, c_\Phi]$ olacak şekilde $k_0 \in K_1(f)$ bulunabilir. Bunun için $K_1(f)$ kümesinin bir tek nokta kümesi olduğunu iddia ediyoruz. Aksine kabul edelim ki $K_1(f)$ bir tek nokta kümesi olmasın. Burada, $I_\Psi \circ p_+$ fonksiyonunun sağ sürekliliğinden $\kappa_1^*(f) \leq k < \kappa_1^{**}(f)$ için $I_\Psi(p_+(kf)) = 1$ olduğu biliniyor. O zaman bir

$\beta > 1$ için $\mu(\{t \in G : k_0|f(t)| > \beta a_\Phi\}) > 0$ bulunur. Aksi takdirde her $\beta \leq 1$ için μ —hemen hemen her yerde $k_0 f \leq \beta a_\Phi$ ve böylece $I_\Psi(p_+(k_0 f)) = 0$ olurdu. Bu ise $k_0 \in K_1(f)$ olması ile çelişirdi.

Şimdi $k_0 \in K_1(f)$ ve $K_1(f)$ kümesi bir tek nokta kümesi değilse $k_0 < \kappa_1^{**}(f)$ olması gerektiğini gösterelim.

Eğer $k_0 = \kappa_1^{**}(f)$ olursa her $\max\{\kappa_1^*(f), \frac{1}{\beta}k_0\} < k < k_0$ için pozitif ölçülü bir küme üzerinde,

$$a_\Phi < \frac{1}{\beta}k_0|f(t)| = \frac{1}{\beta}\kappa_1^*(f)|f(t)| < k|f(t)| < k_0|f(t)| \leq c_\Phi$$

elde edilir. Diğer yandan, $I_\Psi(p_+(\frac{1}{\beta}k_0|f|)) = I_\Psi(p_+(|kf|)) = 1$ olduğu biliniyor. Ψ fonksiyonu, (a_Ψ, b_Ψ) üzerinde kesin artan olduğundan $\frac{1}{\beta}k_0|f| < k|f|$ iken bu eşitliğin sağlanabilmesi için, bir $(u, v) \subset (a_\Phi, c_\Phi)$ alt aralığı üzerinde p_+ 'nın sabit olması gerekir. Bu ise Φ fonksiyonunun (a_Φ, c_Φ) üzerinde kesin konveks olması ile çelişir yani $k_0 < \kappa_1^{**}(f)$ olmalıdır.

Ayrıca, $k_0|f(t)| = c_\Phi$ eşitliğinin μ —hhh $t \in G$ için geçerli olamayacağını gösterelim. Aksine, kabul edelim ki μ —hhh $t \in G$ için $k_0|f(t)| = c_\Phi$ eşitliği sağlansın. Böylece, $I_\Psi(p_+(k_0|f|)) = I_\Psi(p_+(c_\Phi))\mu(G) > 1$ bulunur, $k_0 > \kappa_1^{**}(f)$ ve $k_0 \in K_1(f)$ olduğundan $k_0 = \kappa_1^{**}(f)$ çelişkisi elde edilirdi. Dolayısıyla, bir $0 < \gamma < 1$ için $\mu(\{t \in G : k_0|f(t)| < \gamma c_\Phi\}) > 0$ olmalıdır. Aksi takdirde her $0 < \gamma < 1$ ve μ —hhh $t \in G$ için $k_0|f(t)| \geq \gamma c_\Phi$ olurdu ve bu $k_0|f(t)| \neq c_\Phi$ olması ile çelişirdi.

O halde, $k_0 \in K_1(f)$ ve $K_1(f)$ kümesinin bir tek nokta kümesi olmaması kabulleriyle, $k_0 < \kappa_1^{**}(f)$ ve bir $0 < \gamma < 1$ için $\mu(\{t \in G : k_0|f(t)| < \gamma c_\Phi\}) > 0$ elde edilir. Böylece, her $k_0 < k < \min\left\{\frac{1}{\gamma}k_0, \kappa_1^{**}(f)\right\}$ için pozitif ölçülü bir küme üzerinde

$$a_\Phi < k_0|f(t)| < k|f(t)| < \frac{1}{\gamma}k_0|f(t)| < c_\Phi$$

olur. Burada $I_\Psi(p_+(k_0|f|)) = I_\Psi(p_+(k|f|)) = 1$ ve Ψ fonksiyonu (a_Ψ, b_Ψ) üzerinde kesin artan olduğundan yine bir $(w, t) \subset (a_\Phi, c_\Phi)$ alt aralığı üzerinde p_+ 'nın sabit olması gerekir. Bu ise Φ fonksiyonunun (a_Φ, c_Φ) üzerinde kesin konveks olması ile çelişir. Yani $K_1(f)$ bir tek nokta kümesi ve $K_1(f) = \{k_0\}$ olmalıdır. Dolayısıyla $f \in \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ olur ve buradan $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kapalı bir kümedir.

Lemma 2.7.3 Φ Orlicz fonksiyonu, $b_{\Phi}^{**} < \sup SC_{\Phi} = \infty$ koşulunu sağlasın. Eğer Φ , orijinden geçen bir eğik asimptota sahipse $\text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ kümesi kapalı değildir.

İspat. Eğer Φ orijinden geçen eğik asimptota sahipse, bir $a > 0$ için

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (au - \Phi(u)) = \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) = c \in \mathbb{R}$$

olur ve bunun için de gerek yeter koşul $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = a$ olmasıdır. Ayrıca Teorem 2.4.5'te $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = a = \lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u)$ olduğu gösterilmişti.

Burada, $c_{\Phi} = \infty$ olduğundan $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) = c > 0$ olur. Diğer yandan, Φ Orlicz fonksiyonu, orijinden geçen bir eğik asimptota sahip olduğundan sadece sonlu değerler alabilir yani $b_{\Phi} = \sup\{u > 0 : \Phi(u) < \infty\} = \infty$ sağlanır.

Yine, $c_{\Phi} = \infty$ olduğu için Lemma 2.7.1'in i) şıkkı sağlanacağından eğer Φ fonksiyonu, (b_{Φ}^*, ∞) üzerinde kesin konveks değilse $\text{Ext}B(L_1^{\Phi}(G))$ kapalı olamaz. O halde Φ fonksiyonunun (b_{Φ}^*, ∞) üzerinde kesin konveks olduğunu kabul edebiliriz. Türev fonksiyonu p_+ , (b_{Φ}^*, ∞) üzerinde sabit olamayacağından bu aralık üzerinde kesin artandır ve $\lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u) = a$ olduğundan sınırlıdır. Öte yandan, $b_{\Phi}^{**} < \infty$ olduğundan Lemma 2.4.3'ün ii) şıkkı göz önüne alınırsa, $c\mu(G) = \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u))\mu(G) > 1$ olur. Yine, μ ölçüsü atomsuz olduğundan $c\mu(A_0) = 1$ olacak şekilde bir ölçülebilir A_0 kümesi bulunabilir.

Kabul edelim ki $f = \frac{c}{a}\chi_{A_0}$ olsun. Böylece, $c_{\Phi} = \infty$ olduğundan her $k > 0$ için

$$I_{\Psi}(p_+(kf)) = \Psi\left(p_+\left(k\frac{c}{a}\right)\right)\mu(A_0) < \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u))\mu(A_0) = c\mu(A_0) = 1$$

bulunur. Her $k > 0$ için $\alpha_1(kf) + 1 = I_{\Psi}(p_+(kf)) < 1$ olduğundan

$$\kappa_1^{**}(f) = \sup\{k > 0 : \alpha_1(kf) \leq 0\} = \infty$$

olur.

Öte yandan, Φ fonksiyonu, orijinden geçen bir asimptot aldığı için Teorem 2.2.9'dan κ_1^* sonlu olmadığını biliyoruz yani $\kappa_1^*(f) = \infty$ değerini alabilir. Dolayısıyla

$$K_1(f) = \{0 < k < \infty : \kappa_1^*(f) \leq k \leq \kappa_1^{**}(f)\} = \emptyset$$

veya

$$\kappa_1^*(f) < \infty \text{ ise } K_1(f) = (\kappa_1^*(f), \infty)$$

olur. Ancak her $k > 0$ için $I_\Psi(p_+(kf)) < 1$ olduğundan $\alpha_1(kf) < 0$ bulunur. Bundan dolayı

$$\kappa_1^*(f) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_1(kf) \geq 0\} = \inf \emptyset = \infty$$

elde edilir. Böylece, Teorem 2.2.7'den $\|f\|_{\Phi,1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kf))$ sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi,1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kf)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I_\Phi(kf)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int \Phi(kf) d\mu}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_{A_0} \Phi\left(\frac{kc}{a}\right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \Phi\left(\frac{kc}{a}\right) \mu(A_0) \\ &= \frac{c}{a} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a}{kc} \Phi\left(\frac{kc}{a}\right) \mu(A_0) = \frac{c}{a} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi\left(\frac{kc}{a}\right)}{\frac{kc}{a}} \mu(A_0) \\ &= \frac{c}{a} a \mu(A_0) = 1 \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. $K_1(f)$ bir tek nokta kümesi olmadığından $f \in S(L_1^\Phi(G)) \setminus \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ olur. Diğer yandan, (A_n) ölçülebilir kümelerin pozitif ve sonlu ölçülü bir dizisi olsun öyle ki $A_n \cap A_0 = \emptyset$ ve $\mu(A_n) \searrow 0$ sağlansın. Bu durumda $\mu(A_n) \searrow 0$ olduğundan $1 + c\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ sağlanır. Bunun yanı sıra, $g_n = \frac{c}{a} \chi_{A_n \cup A_0}$ olarak belirleyelim. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} 1 = \|f\|_{\Phi,1} &\leq \|g_n\|_{\Phi,1} \leq \frac{1}{l} I_\Phi(lg_n) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} I_\Phi(kg_n) \\ &= \frac{c}{a} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a}{kc} \Phi\left(\frac{kc}{a}\right) \mu(A_0 \cup A_n) \\ &= c\mu(A_0 \cup A_n) = c\mu(A_0) + c\mu(A_n) \\ &= 1 + c\mu(A_n) \end{aligned} \tag{2.17}$$

olur. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $h_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_{\Phi,1}}$ olarak belirlersek $\|h_n\|_{\Phi,1} = 1$ ve

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} I_\Psi(p_+(kh_n)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi\left(p_+\left(\frac{kc}{a\|g_n\|_{\Phi,1}}\right)\right) \mu(A_0 \cup A_n) \\ &= c\mu(A_0 \cup A_n) = c\mu(A_0) + c\mu(A_n) \geq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $n \in \mathbb{N}$ için $\{k \geq 0 : \alpha_1(kh_n) \geq 0\} \neq \emptyset$ ve $\kappa_1^*(h_n) < \infty$ olur.

Şimdi, $k_n = \kappa_1^*(h_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ olduğunu gösterelim. Aksine $k_n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ olsun. Dolayısıyla $\sup_{n \in \mathbb{N}} k_n < \infty$ olur. O halde, $\sup_{n \in \mathbb{N}} k_n = k_0 \in \mathbb{R}$ diyelim. Öte yandan, p_+ türev fonksiyonu, (b_Φ^*, ∞) üzerinde kesin artan olduğundan, $\gamma > 1$ için $\Psi(p_+(\gamma k_0 f)) < \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) = c$ olur. O halde, her $\gamma > 1$ için bir $\delta_\gamma > 0$ sayısı bulabiliriz öyle ki $\Psi(p_+(\gamma k_0 g_n)) < c - \delta_\gamma < c$ sağlanır. Bu durumda (2.17) eşitsizliği göz önünde bulundurularak,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_\Psi(p_+(\gamma k_n h_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_\Psi\left(p_+\left(\gamma k_n \frac{g_n}{\|g_n\|_{\Phi,1}}\right)\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi\left(p_+\left(\frac{\gamma k_0 c}{a}\right)\right) \mu(A_n \cup A_0) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (c - \delta_\gamma)(\mu(A_n) + \mu(A_0)) \\ &= (c - \delta_\gamma)\mu(A_0) < 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\gamma > 1$ için $\gamma k_n < \kappa_1^*(h_n)$ olur çünkü $\alpha_1(\gamma k_n h_n) < 0$ ve dolayısıyla

$$\gamma k_n < \kappa_1^*(h_n) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_1(kh_n) \geq 0\}$$

olmalıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\kappa_1^*(h_n) = k_n$ olduğundan $\gamma k_n < k_n$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda, $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ olmalıdır. O halde, olduğundan her $M > 0$ pozitif sayısı ve her $n \geq N$ için $k_n > M$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabilir.

Ayrıca, (2.17)'den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{\Phi,1} = 1$ bulunur. Dolayısıyla $\frac{k_n c}{a \|g_n\|_{\Phi,1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ gerçekleşir.

Yine, $b_\Phi^* < \infty$ olduğundan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz öyle ki her $n \geq n_0$ için $\frac{k_n c}{a \|g_n\|_{\Phi,1}} > b_\Phi^*$ olur.

Bununla birlikte, Φ fonksiyonu, (b_Φ^*, ∞) üzerinde kesin konveks olduğundan p_+ bu aralık üzerinde kesin artandır. Üstelik, Ψ fonksiyonunun (a_Ψ, b_Ψ) üzerinde kesin artan olduğu biliniyor. Burada, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k \in [\kappa_1^*(h_n), \kappa_1^{**}(h_n)) = [\kappa_1^*(h_n), \infty)$ için $\alpha_1(kh_n) = 0$ yani $I_\Psi(p_+(kh_n)) = 1$ olacağından bu Ψ ve p_+ 'nın (b_Φ^*, ∞) üzerinde kesin artan olması ile çelişir. O halde her $n \geq n_0$ için $K_1(h_n)$ bir tek nokta kümesi ve $K_1(h_n) = \{k_n\}$ olmalıdır.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n = h_n \chi_{A_0 \cup A_n} + \frac{1}{k_n} a_\Phi \chi_{G \setminus (A_0 \cup A_n)}$$

dizisini tanımlayalım. Her $0 < \beta < 1$ ve $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} I_{\Psi}(p_+(\beta^2 k_n f_n)) &= \Psi(p_+(\beta^2 k_n h_n))\mu(A_0 \cup A_n) + \Psi(p_+(\beta^2 a_{\Phi}))\mu(G \setminus (A_0 \cup A_n)) \\ &= I_{\Psi}(p_+(\beta^2 \kappa_1^*(h_n)h_n)) \\ &< I_{\Psi}(p_+(\beta \kappa_1^*(h_n)h_n)) < 1 \end{aligned}$$

olur. Üstelik, $\gamma > 1$ ve $n \geq n_0$ için $\mu(G) = \infty$ ise

$$I_{\Psi}(p_+(\gamma k_n f_n)) = \Psi(p_+(\gamma k_n h_n))\mu(A_0 \cup A_n) + \Psi(p_+(\gamma a_{\Phi}))\mu(G \setminus (A_0 \cup A_n)) = \infty$$

elde edilir. Ancak eğer $\mu(G) < \infty$ ise

$$\begin{aligned} I_{\Psi}(p_+(\gamma^2 k_n f_n)) &= \Psi(p_+(\gamma^2 k_n h_n))\mu(A_0 \cup A_n) + \Psi(p_+(\gamma^2 a_{\Phi}))\mu(G \setminus (A_0 \cup A_n)) \\ &> I_{\Psi}(p_+(\gamma^2 \kappa_1^*(h_n)h_n)) \\ &> I_{\Psi}(p_+(\gamma \kappa_1^*(h_n)h_n)) \geq 1 \end{aligned}$$

olur. O halde $n \geq n_0$ için $K_1(f_n)$ tek nokta kümesidir ve $K_1(f_n) = \{k_n\}$ elde edilir. Ayrıca (f_n) dizisinin seçiminden her $t \in G$ ve $n \geq n_0$ için

$$k_n f_n(t) \in \left\{ \frac{k_n c}{a \|g_n\|_{\Phi,1}}, a_{\Phi} \right\} \subset (b_{\Phi}^*, \infty) \cup \{a_{\Phi}\} \subseteq SC_{\Phi}$$

olur. O halde Teorem 2.2.12'den her $n \geq n_0$ için $f_n \in \text{Ext} B(L_1^{\Phi}(G))$ olmalıdır.

Son olarak $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,1}} f$ yakınsamasının gerçekleştiğini gösterelim.

Eğer $a_{\Phi} = 0$ ise her $\lambda > 0$ için $\Phi\left(\frac{\lambda a_{\Phi}}{k_n}\right) = \Phi(0) = 0$ olur. Eğer $a_{\Phi} > 0$ ise $k_n \rightarrow \infty$ olduğundan her $\lambda > 0$ için $k_n > \lambda$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Dolayısıyla yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için $\Phi\left(\frac{\lambda a_{\Phi}}{k_n}\right) = 0$ olur. O halde, herhangi bir $\lambda > 0$ için,

$$\begin{aligned} I_{\Phi}(\lambda(f_n - f)) &= I_{\Phi}\left(\lambda\left(\frac{c}{a \|g_n\|_{\Phi,1}} \chi_{A_0 \cup A_n} + \frac{1}{k_n} a_{\Phi} \chi_{G \setminus (A_0 \cup A_n)} - \frac{c}{a} \chi_{A_0}\right)\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\lambda c}{a} \left(\frac{1}{\|g_n\|_{\Phi,1}} - 1\right)\right) \mu(A_0) + \Phi\left(\frac{\lambda c}{a \|g_n\|_{\Phi,1}}\right) \mu(A_n) + \Phi\left(\frac{\lambda a_{\Phi}}{k_n}\right) \mu(G \setminus (A_0 \cup A_n)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla beraber, Φ fonksiyonunun sürekliliği ve $\|g_n\|_{\Phi,1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ yakınsamasından

$$\Phi\left(\frac{\lambda c}{a}\left(\frac{1}{\|g_n\|_{\Phi,1}} - 1\right)\right)\mu(A_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(0)\mu(A_0) = 0$$

bulunur. Ayrıca $\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ yakınsamasından

$$\Phi\left(\frac{\lambda c}{a\|g_n\|_{\Phi,1}}\right)\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

sağlanır ve son olarak yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için $\Phi\left(\frac{\lambda a\Phi}{k_n}\right) = 0$ olacağından

$$\Phi\left(\frac{\lambda a\Phi}{k_n}\right)\mu(G \setminus (A_0 \cup A_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

elde edilir. Bu üç yakınsamadan herhangi bir $\lambda > 0$ için $I_\Phi(\lambda(f_n - f)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ sağlanır. Böylece,

$$\|f_n - f\|_{\Phi,1} = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} (1 + I_\Phi(\lambda(f_n - f))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak, lemmanın kabulleriyle $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,1}} f$ bir $(f_n) \subset \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ için $f \notin \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ elde edildi. O halde, lemmanın kabulleri altında $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalı değildir.

Teorem 2.7.4 Kabul edelim ki Φ Orlicz fonksiyonu, $\sup SC_\Phi = \infty$ koşulunu sağlasın. O zaman $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul

i) $b_\Phi^{**} = \infty$,

ii) Φ fonksiyonunun, (b_Φ^*, ∞) üzerinde kesin konveks olması ve orijinden geçen bir eğik asimptota sahip olmaması

durumlarından birinin sağlanmasıdır.

İspat. *Gereklik :* $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kapalı olsun ve hem i) hem de ii) koşulları sağlanmasın. Bu durumda $b_\Phi^{**} < \infty$ ve Φ fonksiyonu, (b_Φ^*, ∞) üzerinde kesin konveks değildir veya orijinden geçen bir eğik asimptota sahiptir. Ancak, Lemma 2.7.1'den $b_\Phi^{**} < \infty$ iken Φ fonksiyonunun (b_Φ^*, ∞) üzerinde kesin konveks ve Lemma 2.7.3'ten Φ fonksiyonunun orijinden geçen bir eğik asimptotunun olmaması gerektiğini biliyoruz. O halde $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalıysa teoremin i) veya ii) koşullarından birinin sağlanması gerekir.

Yeterlilik : i) şıkkı sağlanıyorsa Teorem 2.4.5'ten $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G)) = \emptyset$ olur yani kapalıdır.

Şimdi kabul edelim ki $b_\Phi^{**} < \infty$ ve teoremin ii) koşulu sağlansın. Ayrıca $(f_n) \subset \text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ ve $f \in L_1^\Phi(G)$ olsun öyle ki $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,1}} f$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $K_1(f_n) = \{k_n\}$ sağlansın. Öte yandan Lemma 2.5.2'den $k_n \rightarrow k_0$ ve μ -hhh $t \in G$ için $k_0|f(t)| \in SC_\Phi$ olacak şekilde $k_0 \in K_1(f)$ bulunabileceği biliniyor. Teoremin ii) şıkkının gerçekleştiği kabul edildiğinden Φ fonksiyonu (b_Φ^*, ∞) üzerinde kesin konvektir ve orijinden geçen bir eğik asimptota sahip değildir. O halde, Teorem 2.2.10'un i) şıkkı göz önüne alınırsa, Φ fonksiyonu κ_1 tektir. Böylece, $K_1(f)$ bir tek nokta kümesidir ve $K_1(f) = \{k_0\}$ bulunur. Buradan f fonksiyonunun $L_1^\Phi(G)$ uzayının birim yuvarının bir uç noktası olduğu elde edilir yani $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır.

2.8 $1 < p < \infty$ İÇİN $L_p^\Phi(G)$ UZAYLARI

Bir $1 < p < \infty$ için Tanım 2.2.1'de verilen $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ fonksiyonu, $[0, \infty)$ kümesi üzerinde kesin konveks olduğundan birim yuvarın uç noktalarının kümesi açısından çok daha kullanışlı sonuçlar elde edeceğiz.

Lemma 2.8.1 Bir Φ Orlicz fonksiyonu, $(0, \infty)$ üzerinde doğrusal olmasın. $1 < p < \infty$ için $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,p}} f$ olacak şekilde $(f_n) \subset \text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ ve $f \in L_p^\Phi(G)$ alınsın ve her $n \in \mathbb{N}$ için $K_p(f_n) = \{k_n\}$ olsun. Bu durumda, $k_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} k_0$ ve μ -hhh $t \in G$ için $k_0|f(t)| \in SC_\Phi$ koşulları sağlanacak şekilde bir $(k_{n_m}) \subset (k_n)$ alt dizisi ve bir $k_0 \in K_p(f)$ bulunabilir. Üstelik, $K_p(f) = \{k_0\}$ ve dolayısıyla $f \in \text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,p}} f$ olacak şekilde $(f_n) \subset \text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ dizisi ve bir $f \in \text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ alınsın. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $K_p(f_n) = \{k_n\}$ olsun. Birim yuvar yüzeyindeki bir dizi olan (f_n) için $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\Phi,p}} f$ olduğundan $f \neq 0$ olur. Dolayısıyla (f_n) dizisi, μ ölçüsünde 0'a yakınsayamaz. Bir diğer deyişle her $\varepsilon > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{t \in G : |f_n(t) - 0| < \varepsilon\}) = 0$ olur. O halde

$$\eta \leq \mu(A_m) < \infty \text{ ve } A_m \subset \{t \in G : |f_{n_m}(t)| \geq \eta\}$$

olacak şekilde bir $\eta > 0$ sayısı, $(n_m) \subset n$ alt dizisi ve ölçülebilir (A_m) küme dizisi bulunabilir.

Şimdi (k_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim. Teorem 2.2.7'den her $n \in \mathbb{N}$ için

$\|f_n\|_{\Phi,p} = \frac{1}{k_n}(1 + (I_{\Phi}(k_n f_n))^p)^{1/p} = 1$ olduğu için $k_n \geq 1$ yani dizinin alttan sınırlı olduğu elde edilir. Aksine kabul edelim ki $k_n \rightarrow \infty$ olsun. Φ fonksiyonu tüm $(0, \infty)$ aralığı üzerinde doğrusal olmadığından, Önerme 2.1.22 göz önüne alınırsa, $\Psi \circ p_+$ fonksiyonu 0'a özdeş olarak eşit olamaz yani $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) > 0$ olmalıdır. Böylece,

$$\begin{aligned} \infty &= \eta \lim_{u \rightarrow \infty} \Phi^{p-1}(u) \Psi(p_+(u)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi^{p-1}(k_{n_m}) \Psi(p_-(k_{n_m} \eta)) \mu(A_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{A_m} \Phi(k_{n_m} \eta) d\mu \right)^{p-1} \left(\int_{A_m} \Psi(p_-(k_{n_m} \eta)) d\mu \right) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} I_{\Phi}^{p-1}(k_{n_m} f_{n_m}) I_{\Psi}(p_-(k_{n_m} |f_{n_m}|)) \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan, her $m \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $\alpha_p(k_{n_m} f_{n_m}) = 0$ olduğundan

$$I_{\Phi}^{p-1}(k_{n_m} f_{n_m}) I_{\Psi}(p_+(k_{n_m} |f_{n_m}|)) = 1$$

olur. Bununla beraber, Önerme 2.1.21'den herhangi bir $u \in \mathbb{R}$ için $p_-(u) \leq p_+(u)$ olduğundan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_{\Phi}^{p-1}(k_{n_m} f_{n_m}) I_{\Psi}(p_-(k_{n_m} |f_{n_m}|)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} 1 = 1$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde (k_n) sınırlı bir dizidir. Buradan, Bolzano-Weierstrass Teoremi ile gerekirse bir alt diziye geçerek, bir $k_0 > 0$ için $k_n \rightarrow k_0$ olduğu kabul edilebilir. Teorem 2.2.12 göz önüne alınırsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in \text{Ext}B(L_p^{\Phi}(G))$ olduğundan μ -hhh $t \in G$ için $k_n f_n(t) \in SC_{\Phi}$ gerçekleşir. Böylece, μ -hhh $t \in G$ için $k_n f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k_0 f(t)$ ve SC_{Φ} kümesi kapalı olduğundan μ -hhh $t \in G$ için $k_0 f(t) \in SC_{\Phi}$ olduğu elde edilir.

Normun sürekliliğinden $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi,p} = \|f\|_{\Phi,p}$ olur. Bununla birlikte, Teorem 2.2.7'den her $n \in \mathbb{N}$ için $\|f_n\|_{\Phi,p} = \frac{1}{k_n} s_p(I_{\Phi}(k_n f_n))$ eşitliği biliniyor. Bunların yanı sıra Fatou Lemması

ve Φ fonksiyonunun sürekliliği de göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_0} s_p(I_\Phi(k_0 f)) &\geq \|f\|_{\Phi, p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi, p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} s_p(I_\Phi(k_n f_n)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} (1 + (I_\Phi(k_n f_n))^p)^{1/p} \\
&\geq \frac{1}{k_0} \left(1 + \left(\int \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(k_n f_n) d\mu \right)^p \right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{k_0} \left(1 + \left(\int \Phi(\liminf_{n \rightarrow \infty} (k_n f_n)) d\mu \right)^p \right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{k_0} \left(1 + \left(\int \Phi(k_0 f) d\mu \right)^p \right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{k_0} s_p(I_\Phi(k_0 f))
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\|f\|_{\Phi, p} = \frac{1}{k_0} s_p(I_\Phi(k_0 f)) = 1$ yani $f \in S(L_p^\Phi(G))$ olur.

Teorem 2.2.10'un ii) şikkından $K_p(f)$ bir tek nokta kümesidir. Kabul edelim ki $K_p(f) = \{k\}$ olsun. Teorem 2.2.7'den $\|f\|_{\Phi, p} = \frac{1}{k} s_p(I_\Phi(kf)) = 1$ olur. Eğer $k_0 < k$ ise $\frac{1}{k_0} s_p(I_\Phi(k_0 f)) < 1$ ve benzer şekilde $k_0 > k$ olursa $\frac{1}{k_0} s_p(I_\Phi(k_0 f)) > 1$ olurdu ([4], Lemma 3.5.iv ve vi). Buradan, $k = k_0$ olması gerektiği elde edilir ve dolayısıyla $K_p(f) = \{k_0\}$ olur. O halde, Teorem 2.2.12'den f , $L_p^\Phi(G)$ uzayının birim yuvarının bir uç noktasıdır.

Teorem 2.8.2 Herhangi bir Φ Orlicz fonksiyonu için $1 < p < \infty$ olmak üzere p -Amemiya normu ile verilen $L_p^\Phi(G)$ Orlicz uzayının birim yuvarının uç noktalarının kümesi, yani $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır.

İspat. Eğer Φ fonksiyonu, $(0, \infty)$ üzerinde doğrusal ise Önerme 2.2.13'ten $L_p^\Phi(G)$ Orlicz uzayının $L^1(G)$ Lebesgue uzayına doğrusal bir dönüşüm aracılığı ile izometrik olduğu biliniyor. Dolayısıyla Φ fonksiyonu, $(0, \infty)$ üzerinde doğrusal ise $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G)) = \text{Ext}B(L^1(G)) = \emptyset$ olur. Böylece, $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ kümesi kapalıdır.

Eğer Φ fonksiyonu, $(0, \infty)$ üzerinde doğrusal değilse $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ kümesi Lemma 2.8.1'den kapalıdır.

3 MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında matematiksel analiz, fonksiyonel analiz ve ölçü teorisindeki temel yöntemler ve teoremler, soyut harmonik analizin bakış açısıyla harmanlanarak kullanılmıştır. Bu çalışma, Marek Wiśła'nın atomsuz genel bir ölçü uzayı üzerinde tanımlanan Orlicz uzayları ile çalıştığı "Closedness of the set of extreme points of the unit ball in Orlicz spaces equipped with the p -Amemiya Norm" isimli [17] makalesi temel alınarak, ayrık olmayan lokal kompakt grup G üzerinde tanımlanan Orlicz uzayları için incelenmiştir. Burada, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere p -Amemiya normu ile verilen $L_p^\Phi(G)$ Orlicz uzayı için κ_p^* , κ_p^{**} fonksiyonları, $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ kümesinin karakterizasyonu ve Haar ölçüsünün atomsuzluğu sonuçların elde edilmesinde önemli bir rol oynamıştır. Ele alınan konular ile ilgili makaleler ve kitaplar okunarak gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Kullanılan makale ve kitaplar "Kaynaklar" kısmında belirtilmiştir.

4 BULGULAR

Genel kısımları sekiz bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde kullanılan temel teorem, tanım ve sonuçlara yer verilmiştir. Ardından Φ Orlicz fonksiyonunun kesin konvekslik noktalarının kümesi ve afin noktalarının kümesi incelenmiş ve bu kümelere ilişkin, daha sonraki bölümlerde kullanılmak üzere önemli lemma ve sonuçlar verilmiştir.

İkinci bölümde öncelikli olarak p -Amemiya normları tanıtılmıştır. $1 \leq p \leq \infty$ için p -Amemiya formülüne sahip fonksiyonun, Orlicz uzayı üzerinde Luxemburg normuna denk bir norm olduğu Teorem 2.2.3'te, ∞ -Amemiya normu ile Luxemburg normunun ve 1 -Amemiya normu ile Orlicz normunun aynı formüllere sahip olduğu sırasıyla Önerme 2.2.2 ve Teorem 2.2.5'te gösterilmiştir. Bu teoremler ışığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1 Bir $1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in L^\Phi(G)$ için $\|f\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s_p(I_\Phi(kf))$ şeklinde tanımlanan normlar alınsın. O halde $\{\|\cdot\|_{\Phi,p} : 1 \leq p \leq \infty\}$ ailesi $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayı üzerindeki normların bir ailesidir. Üstelik bu aile, Orlicz normu ve Luxemburg normunu da kapsamaktadır.

Bu bölümün devamında, κ_p^* ve κ_p^{**} fonksiyonları tanımlanarak, Φ Orlicz fonksiyonunun κ_p^* sonluluğu ve κ_p tekliği için gerek yeter koşullar [4] makalesindeki yöntemlerin benzerleri uygulanarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Luxemburg normuyla yani ∞ -Amemiya normuyla verilen Orlicz uzaylarında $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı, [7] makalesindekilerin lokal kompakt gruplar için düzenlenmesiyle çalışılmış ve aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem 4.1.2 Bir Φ Orlicz fonksiyonu alınsın. $\text{Ext}B(L_\infty^\Phi(G))$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun Γ_a koşulunu sağlamasıdır.

Dört, beş, altı ve yedinci bölümlerde Orlicz normu yani 1 -Amemiya normu ile verilen Orlicz uzayları, bu tez için bir temel olan Marek Wisła'nın "Closedness of the set of extreme points of the unit ball in Orlicz spaces equipped with the p -Amemiya Norm" isimli makalesindeki metodlar kullanılarak lokal kompakt gruplar için çalışılmıştır. Dördüncü ve beşinci bölümlerde b_Φ^* ve b_Φ^{**} sabitleri tanımlanmış, ardından bu sabitler aracılığıyla

$\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin boş kümeden farklılığı araştırılmış ve bazı yardımcı sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlardan yola çıkılarak, $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin boş kümeden farklılığı için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.3 $L_1^\Phi(G)$ Orlicz uzayının birim yuvarının uç noktalarının kümesinin boş küme yani $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G)) = \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul $L_1^\Phi(G)$ Orlicz uzayının $L^1(G)$ Lebesgue uzayına doğrusal olarak izometrik olması ve bunun için de gerek yeter koşul $b_\Phi^{**} = \infty$ olmasıdır.

İspat. Teorem 2.4.4'ün karşıt tersi dikkate alınırsa $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G)) = \emptyset$ ise $b_\Phi^{**} = \infty$ olur. Teorem 2.4.5'ten ise $b_\Phi^{**} = \infty$ olması için gerek ve yeter koşulun $L_1^\Phi(G)$ Orlicz uzayının $L^1(G)$ Lebesgue uzayına doğrusal olarak izometrik olması, dolayısıyla $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G)) = \emptyset$ olması gerektiğini biliyoruz. O halde bu üç koşul birbirine denktir.

Altıncı ve yedinci bölümlerde Φ Orlicz fonksiyonu için b_Φ sabitinin sonluluğuna göre iki duruma ayırarak $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı için gerek ve yeter koşul elde edilmiştir. Bir reel sayıdan sonra sonsuz değerini alan yani $b_\Phi < \infty$ koşulunu sağlayan Orlicz fonksiyonları alınarak $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı için sıradaki teorem ile elde edilmiştir.

Teorem 4.1.4 Bir Φ Orlicz fonksiyonu, bir reel sayıdan sonra sonsuz değer alsın yani $b_\Phi < \infty$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul

- i) $b_\Phi^{**} = b_\Phi$,
 - ii) $b_\Phi^{**} < b_\Phi$ ve Φ fonksiyonunun (b_Φ^{**}, b_Φ) üzerinde kesin konveks olması,
 - iii) bir $a > 0$ için Φ fonksiyonunun $(0, a)$ üzerinde doğrusal olması
- koşullarından birinin sağlanmasıdır.

Sadece sonlu değerler alan Orlicz fonksiyonları göz önüne alınarak yani $b_\Phi = \infty$ koşulu altında $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı için Teorem 2.5.5, 2.7.2 ve 2.7.4'te elde edilenleri aşağıdaki teorem ile özetleyelim.

Teorem 4.1.5 Bir Φ Orlicz fonksiyonu, sadece sonlu değerler alsın yani $b_\Phi = \infty$ koşulunu sağlasın. $\text{Ext}B(L_1^\Phi(G))$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul

- i) $b_\Phi^{**} = \infty$,
- ii) $a_\Phi = \sup SC_\Phi > 0$,

- iii) $a_\Phi < \sup SC_\Phi < \infty$ ve Φ fonksiyonunun $(a_\Phi, \sup SC_\Phi)$ üzerinde kesin konveks olması,
 - iv) $\sup SC_\Phi = \infty$, Φ fonksiyonunun (b_Φ^*, ∞) üzerinde kesin konveks olması ve orijinden geçen bir eğik asimptota sahip olmaması
- koşullarından en az birinin sağlanmasıdır.

Son olarak sekizinci bölümde, $1 < p < \infty$ için p -Amemiya normunu üreten s_p fonksiyonunun kesin konveksliğinden $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ kümesinin kapalı olduğu gösterilmiştir. Teorem 2.2.3'ten p -Amemiya normunun Luxemburg normuna denk olduğu biliniyor. Ayrıca Luxemburg normunun Orlicz normuna denk olduğu da biliniyor [14]. Dolayısıyla p -Amemiya normu hem Luxemburg normuna hem de Orlicz normuna denk bir normdur. O halde, Teorem 2.8.2 göz önüne alınarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.6 Orlicz veya Luxemburg normu ile verilen Orlicz uzayı, birim yuvarının uç noktalarının kümesi kapalı olacak şekilde, topolojik olarak denk olan bir norm ile yeniden donatılabilir.

5 TARTIŞMA VE SONUÇ

X bir Banach uzayı ve topolojik duali X^* olsun. $\text{Ext}B(X^*)$ kümesi ile, X^* uzayının kapalı birim yuvarının uç noktalarının kümesi gösterilsin. $\text{Ext}B(X^*)$ kümesinin norm kapalılığının bilinmesi, $\text{Ext}B(K(X, C(Z)))$ kümesinin karakterizasyonunu kolaylaştırır [5]. Bu amaca yönelik olarak, bir Banach uzayı için dual uzayın kapalı birim yuvarının uç noktalarının kümesinin kapalılığı araştırılmaktadır. Kapalı birim yuvara ilişkin bu özellik, p -Amemiya normu ile bir Banach uzayı olan Orlicz uzayları için farklı makalelerde incelenmiştir [7, 17]. Bu çalışmalarda Orlicz uzayı genel bir ölçü uzayı üzerinde tanımlanmıştır. Bu tez kapsamında ise, p -Amemiya normu ile verilen Orlicz uzayları için bu özellik, genel bir ölçü uzayı yerine lokal kompakt grup alınarak, $1 \leq p \leq \infty$ durumlarının tümü için araştırılmıştır. Burada, $1 < p < \infty$ durumu için p -Amemiya normunu üreten s_p fonksiyonunun sağladığı avantajdan dolayı, $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ kümesinin ek bir koşula ihtiyaç duymaksızın kapalı olduğu gösterilmiştir. Bununla beraber, p -Amemiya normlarının, Orlicz ve Luxemburg normlarını da kapsayan daha geniş bir sınıf olduğu da gösterilmiştir.

Fonksiyonel analiz ve harmonik analiz için öneminin yanı sıra uygulama alanları da güçlü olan Orlicz uzayları, p -Amemiya normları ile ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve ele alınan konular ile ilgili kaynaklar taranıp yorumlanarak, kolay anlaşılabilir bir hale getirilmiştir.

Atomsuz bir M ölçü uzayı üzerinde tanımlanan ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere p -Amemiya normu ile verilen $L_p^\Phi(M)$ Orlicz uzayları için $\text{Ext}B(L_p^\Phi(M))$ kümesinin kapalılığı [17] makalesinde, M. Wiśła tarafından çalışılmıştır. Bu tezde ise genel bir ölçü uzayı yerine ayırık olmayan dolayısıyla atomsuz lokal kompakt grup G alınarak, $\text{Ext}B(L_p^\Phi(G))$ kümesinin kapalılığı incelenmiştir.

Bu çalışmalar, atomik bir ölçü uzayı olan ayırık lokal kompakt alınarak, p -Amemiya normu ile verilen Orlicz dizi uzayları için de yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1]. Chen, S. and Wisła, M., 1993, Extreme compact operators from Orlicz spaces to $C(\Omega)$, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 34(1), 63-77.
- [2]. Church, G.M., 1973, *Extreme Points in Banach Spaces*, Thesis (PhD), Oklahoma State University.
- [3]. Cohn, D.L., 2013, *Measure Theory*, Birkhäuser, Basel, ISBN: 978-1-4614-6955-1.
- [4]. Cui, Y., Duan, L., Hudzik, H., Wisła, M., 2008, Basic theory of p -Amemiya norm in Orlicz spaces: Extreme points and rotundity in Orlicz spaces endowed with these norms, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(5–6), 1796-1816.
- [5]. Dunford, N. and Schwarz, J.T., 1958, *Linear Operators I: General Theory*, Interscience, New York, ISBN: 0-470-22605-6.
- [6]. Folland, G.B., 2016, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, ISBN: 0-8493-8490-7.
- [7]. Granero, A.S. and Wisła, M., 1992, Closedness of the Set of Extreme Points in Orlicz Spaces, *Math. Nachr.*, 157, 319-334.
- [8]. Hudzik, H., Kamińska, A., Musielak, J., 1987, On Some Banach Algebras Given by a Modular, *A. Haar Mem. Conf., Budapest/Hung. 1985, Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 49, 445-463.
- [9]. Hudzik, H. and Maligranda, L., 2000, Amemiya norm equals Orlicz norm in general, *Indag. Mathem. (N.S.)*, 11(4), 573-585.
- [10]. Krasnosel'skii, M.A. and Rutickii, Ya.B., 1961, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff, Groningen.
- [11]. Luxemburg, W.A.J., 1955, *Banach Function Spaces*, Thesis (PhD), Delft University of Technology.
- [12]. Maligranda, L., 1989, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Universidade Estadual de Campinas, Brazil.
- [13]. Orlicz, W., 1932, Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B, *Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett., Sér. A.*, 207-220.
- [14]. Rao, M.M. and Ren, Z.D., 1991, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8478-2.
- [15]. Royden, H.L. and Fitzpatrick, P.M., 2010, *Real Analysis*, 4th Edition, Pearson Education, Boston, ISBN:978-0-13143747-0.

- [16]. Rudin, W., 1991, *Functional Analysis*, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, ISBN: 0-07-054236-8.
- [17]. Wiśła, M., 2018, Closedness of the set of extreme points of the unit ball in Orlicz spaces equipped with the p -Amemiya Norm, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 461, 378-400.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Esra Başar	Esra BAŞAR
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2019

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Ana Bilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2021

