



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



DOKTORA TEZİ

ORLICZ UZAYLARININ BAZI HOMOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Rüya ÜSTER

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof.Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Ekim, 2019

İSTANBUL

Bu alışma 24.10.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



Prof.Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



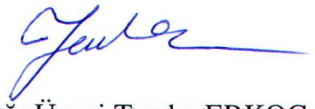
Prof.Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof.Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



Prof.Dr. Talin BUDAK
Boğaziçi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



Dr.Öğr.Üyesi Temha ERKOÇ
YILMAZTÜRK
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 29526 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübeleriyle yön gösteren, emeğini hiçbir zaman esirgemeyen ve bir matematikçinin nasıl olması gerektiği konusunda her zaman ilham aldığım danışman hocam Prof.Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU'na teşekkür ederim.

Ayrıca, daima yanımda bulunan, verilebilecek bütün özveri ile her zaman destek olan ve eğitim hayatım boyunca en az benim kadar emek sahibi olan aileme de teşekkür ederim.

Ekim, 2019

Rüya ÜSTER



İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	x
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	8
2.1. BANACH CEBİRLERİ	8
2.2. YEREL KOMPAKT GRUPLAR VE HAAR ÖLÇÜSÜ	12
2.3. ORLICZ UZAYLARI	17
2.4. HOMOLOJİK ÖZELLİKLER	22
2.5. ZAYIF TOPOLOJİLER VE EŞLENİK OPERATÖRLER	28
3. MALZEME VE YÖNTEM	31
4. BULGULAR	32
4.1. PROJEKTİFLİK, İNJEKTİFLİK VE FLATNESS	32
4.1.1. Orlicz Uzaylarının Projektif Modül Yapısı	33
4.1.2. Orlicz Uzaylarının İnjektif ve Flat Modül Yapısı	37
4.2. $L^\Phi(G)$ ORLICZ UZAYI İÇİN KOMPAKT ÇARPANLAR UZAYI	38
4.2.1. $L^\Phi(G)$ nin Ötelemeler Altında Değişmez Alt Kümeleri	41
4.2.2. Afin Dönüşümler	45
4.2.3. Kompakt Çarpanlar Uzayı	48
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	53
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	59

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
G	: Yerel kompakt grup
$\mathbb{K}$	: $\mathbb{R}$ (reel sayılar) veya $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar) cismi
$\text{co}A$	: A kümesinin konveks zarfı
μ	: G üzerindeki Haar ölçüsü
$C_0(G)$	: G üzerinde tanımlı sürekli ve sonsuzda sıfır olan fonksiyonlar uzayı
$C_b(G)$	: G üzerinde tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C_c(G)$	: G üzerinde tanımlı kompakt destekli sürekli fonksiyonlar uzayı
$M(G)$	: G üzerinde tanımlı kompleks değerli sınırlı regüler Borel ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$L^p(G)$	: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere G üzerinde tanımlı reel veya kompleks değerli ölçülebilir ve $\int_G f(x) ^p dx < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı
$\ f\ _p$	: $L^p(G)$ Lebesgue uzayındaki f fonksiyonunun normu
L_x	: x ile sol öteleme operatörü
$f * g$	: f ve g fonksiyonlarının girişim (convolution) çarpımı
$\text{supp } f$	: f fonksiyonunun desteği
δ_a	: Dirac ölçüsü
$X \widehat{\otimes} Y$	: X ve Y normlu uzaylarının projektif tensör çarpımı
$\ \cdot\ _\pi$	: projektif norm
X^*	: X uzayının dual uzayı
z^*	: zayıf yıldız
Φ	: Young fonksiyonu
Ψ	: Φ Young fonksiyonunun tamlayan Young fonksiyonu
$L^\Phi(G)$	: Orlicz uzayı
$\ f\ _\Phi$	: $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayındaki f fonksiyonunun normu
$M(L^\Psi(G), L^\Phi(G))$	: $L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden çarpanlar (multipliers) uzayı
$\square$	: İspat bitti

ÖZET

DOKTORA TEZİ

ORLICZ UZAYLARININ BAZI HOMOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Rüya ÜSTER

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Bu tez çalışmasının konusu genel olarak harmonik analizin, özel olarak da soyut harmonik analizin kapsamındadır. Çalışmanın temel amacı $1 \leq p < \infty$ ve G yerel kompakt grup olmak üzere $L^p(G)$ Lebesgue uzaylarının bir genelleştirmesi olan Orlicz uzaylarına ilişkin bazı homolojik özelliklerin incelenmesi ve kompakt çarpanlar uzayının belirlenmesi üzerinedir.

Banach cebirlerinin homolojik özellikleri ilk kez A. YA. Helemskii'nin [14] kitabında incelenmiştir. Yine 2003 yılında Dales ve Polyakov [8] G yerel kompakt grup ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $L^p(G)$ uzayının $L^1(G)$ Banach cebiri üzerinde girişim (convolution) işlemine göre Banach modül olmasını kullanarak $L^p(G)$ Banach modülleri için homolojik özellikleri araştırmışlardır. Öte yandan Banach cebirleri ve Banach modüllerinin çarpanlarını araştırmak oldukça önemlidir. Özellikle kompakt grupların temsil teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Lebesgue uzayları için çeşitli çarpanlar uzayı pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır ([2], [5], [12], [17] [43]).

Bu tezde, G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere Orlicz uzaylarının $L^1(G)$ üzerinde girişim işlemine göre modül olması kullanılarak, projektiflik, injektiflik, flatnesslık gibi homolojik özellikleri araştırılmış ve çarpanlar uzayı, özellikle kompakt çarpanlar uzayı belirlenmiştir. Böylece, Lebesgue uzayında yapılan çalışmalar genelleştirilmiş olmuştur.

Yine, Lau [21] çalışması temel alınarak ve $L^\Phi(G)$ Orlicz uzaylarının $L^1(G)$ Banach modül yapısı kullanılarak kapalı, konveks, değişmez alt kümeleri belirlenmiş, afin dönüşümler aracılığıyla kompakt çarpanlar uzayı incelenmiştir. Böylece grubun kompaktlığının çarpanlar uzayının kompaktlığı ile belirlenebilmesi için bir ölçüt de elde edilmiştir.

Ekim 2019, 70 sayfa.

Anahtar kelimeler: Yerel kompakt grup, Orlicz uzayı, ötelemeler altında değişmez kümeler, konveks küme, grup cebiri, Banach modül, projektif, injektif, flat, kompakt çarpanlar.



SUMMARY

Ph.D. THESIS

SOME HOMOLOGICAL PROPERTIES OF ORLICZ SPACE

Rüya ÜSTER

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Mathematics Program

Supervisor: Prof.Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

The subject of this thesis is in the scope of harmonic analysis in general and abstract harmonic analysis in particular. The main purpose of this study is to examine some homological properties of Orlicz spaces which are generalizations of $L^p(G)$ Lebesgue spaces, including $1 \leq p < \infty$ and locally compact group G .

Homological properties of Banach algebras are examined in the book of A. YA. Helemskii [14] for the first time. Also in 2003, Dales and Polyakov [8] examined the homological properties of $L^p(G)$ Banach modules, including the locally compact group G and $1 \leq p \leq \infty$, by using the fact that $L^p(G)$ is a Banach module over the Banach algebra $L^1(G)$ with respect to the convolution product. On the other hand, it is important to investigate the multipliers of Banach algebras and Banach modules. It is especially important in the theory of representation of compact groups. Multipliers space for the Lebesgue spaces has been studied by many mathematicians ([2], [5], [12], [17] [43]).

In this thesis, homological properties of Orlicz spaces, including the locally compact group G and Young function Φ , such as projectivity, injectivity and flatness are examined and multipliers space, in particular compact multipliers space is determined by using the fact Orlicz spaces are modules over $L^1(G)$ with respect to the convolution. Thus, the studies in Lebesgue space have been generalized.

Again, based on Lau's study [21], closed convex invariant subsets of Orlicz spaces are determined and compact multipliers space is examined by affine transformations by using the fact that Orlicz spaces are $L^1(G)$ Banach modules. Thus, a criterion is obtained to determine the compactness of the group by the compactness of the multiplier space.

October 2019, 70 pages.

Keywords: Locally compact group, Orlicz space, invariant set, convex set, group algebra, Banach module, projectivity, injectivity, flatness, compact multiplier.



1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasının temel amacı, Lebesgue uzaylarının bir genelleştirmesi olan Orlicz uzaylarının Banach modül yapısından gelen homolojik özelliklerinin incelenmesi ve özellikle kompakt çarpanlarının karakterize edilmesi üzerinedir.

G yerel kompakt grup ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(G)$ Lebesgue uzaylarının girişim (convolution) işlemine göre Banach cebiri ve Banach modülü yapısı ile buradan gelen özelliklerin incelenmesi soyut harmonik analizin temel konularından biridir. Orlicz uzaylarının ve ağırlıklı Orlicz uzaylarının Banach cebiri yapısı ve özellikleri birçok matematikçi tarafından incelenmiştir, ([1], [29], [31], [32], [33]), fakat Orlicz uzaylarının modül yapısı kullanılarak homolojik özellikleri incelenmemiştir. Bu tez çalışmasında bu alandaki boşluğu doldurmak amaçlanmaktadır.

Lebesgue integral teorisinin analiz problemlerinde önemli bir yer tutmasından bu yana, L^p Lebesgue ailelerinden daha kapsamlı bir sınıf ihtiyacı doğal olarak ortaya çıkmıştır. Bu kapsamda değişken üstel Lebesgue uzayları literatürde ilk kez 1931 yılında W. Orlicz [27] tarafından sunulmuştur. Ardından 1932 yılında W. Orlicz [28] Orlicz uzaylarını klasik Lebesgue uzaylarının bir genelleştirmesi olarak tanıtmıştır. Bu genelleştirmede Lebesgue uzayları tanımındaki x^p fonksiyonu yerine Young fonksiyonu olarak adlandırılan daha genel bir konveks fonksiyon kullanmıştır. L^p uzaylarının yanı sıra pek çok çeşitli fonksiyon uzayları da Orlicz uzaylarında içerilir. Örneğin Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonları çalışmasında ortaya çıkan $L \log L$ uzayı bunlardan biridir. Burada $L \log L$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log |f(x)| dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlarının uzayıdır. Bunun dışında belirli Sobolev uzayları da Orlicz uzaylarının alt uzayı olarak içerilir.

İlerleyen yıllarda Orlicz uzaylarının yapısı [24], [26] çalışmalarında ele alınmıştır. 1961 yılında Krasnosel'skii ve Rutickii'nin [19] çalışması tamamen Orlicz uzaylarına ayrılmış ve harmonik analizin yanı sıra diferansiyel ve integral denklemlerde, olasılıkta ve istatistikte

etkin olarak kullanılan teoriyi geliştirmiştir.

1991 yılında Rao ve Ren (X, S, μ) ölçü uzayı olmak üzere [35] çalışmalarında Orlicz uzaylarının daha genel teorisini Φ Young fonksiyonu için incelemiştir.

Rao ve Ren'in bu çalışması temel alınarak G yerel kompakt grup, μ , G üzerinde Haar ölçüsü ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere $L^\Phi(G)$ ile gösterilen Orlicz uzayı

$$L^\Phi(G) := \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ ölçülebilir, } \exists \alpha > 0, \int_G \Phi(\alpha|f(x)|) d\mu(x) < \infty \right\}$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca Ψ , Φ Young fonksiyonunun tamlayan fonksiyonu olmak üzere her $f \in L^\Phi(G)$ için

$$\|f\|_\Phi := \sup \left\{ \int_G |f(x)v(x)| d\mu(x) : \int_G \Psi(|v(x)|) d\mu(x) \leq 1 \right\}$$

normu ile $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayı Banach uzayıdır [35].

G yerel kompakt grup ve $p = 1$ olmak üzere $L^1(G)$ uzayının Banach cebiri yapısı sayesinde çarpanlara ayırma, spektral sentez gibi birçok problem ortaya çıkmaktadır. Ancak $p > 1$ ve G grubu kompakt değilken $L^p(G)$ girişim işlemine göre Banach cebiri değildir. Saeki [41] çalışmasında $L^p(G)$ uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşulun G grubunun kompakt olması gerektiğini ispatlamıştır. Öte yandan $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $L^p(G)$ sol Banach $L^1(G)$ -modüldür [16]. $L^p(G)$ uzaylarının homolojik özellikleri Dales ve Polyakov [8] tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalarında, $L^1(G)$ Banach cebirlerine ilişkin homolojik özellikler verilmiştir. Özel olarak $C_0(G)$ uzayını sol Banach $L^1(G)$ -modül olarak ele alarak projektif, injektif ve flatness olması için gerek ve yeter koşulları vermişlerdir. Yine bu çalışmada $L^1(G)$ nin injektif sol Banach $L^1(G)$ -modül olması için gerek ve yeter koşulun G grubunun diskret ve amenable olması gerektiği ispatlanmıştır. Ayrıca $L^\infty(G)$ ve $L^p(G)$ uzaylarının projektif sol Banach $L^1(G)$ -modül olma koşulları verilmiştir.

Öte yandan, çarpanlar (multipliers) kavramı harmonik analizde ilk kez Fourier serilerinin toplanabilirliği teorisi ile ilişkili olarak ortaya çıkmıştır ve zamanla harmonik analizin diğer alanlarında da çalışılmıştır. Bunlara Fourier dönüşümlerinin özellikleri ve genişletmeleri çalışmaları, grup cebirlerinin homomorfizmalarının incelenmesi, grup

cebirlerinin karakterizasyonu, topolojik cebirlerde çarpanlara ayırma problemleri örnek olarak verilebilir. Ayrıca çarpanlar kavramı, Banach cebirlerinin ve yerel kompakt grupların temsil teorisi, yaklaşım süreçleri, kısmi diferansiyel denklemler gibi alanlarda da ele alınmıştır. Çarpanlar teorisinin bu uygulama alanları özel çalışma alanıdır. Bu çalışmada kompakt çarpanlar uzayı ele alınacaktır.

G yerel kompakt değişmeli grup, $1 \leq p, q < \infty$ olmak üzere $L^q(G)$ uzayından $L^p(G)$ uzayına giden çarpanlar uzayı, Figa-Talamanca ve Gaudry [12] tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalarında çarpanlar uzayı olarak adlandırılan, $L^q(G)$ uzayından $L^p(G)$ uzayına giden sınırlı, lineer, öteleme dönüşümleriyle değişmeli olan $M(L^q(G), L^p(G))$ ile gösterilen operatörler uzayını karakterize etmişlerdir.

Yine, Hörmander [17] çalışmasında $\mathbb{R}^n$ üzerinde çarpanlar uzayının temel özelliklerini incelemiş ve $q > p$ olmak üzere, G kompakt olmayan yerel kompakt bir grup olduğunda $M(L^q(G), L^p(G)) = \{0\}$ olduğunu ispatlamıştır.

G yerel kompakt grup ve $p = 1$ olmak üzere Wendel [43] çalışmasında $L^1(G)$ için çarpanlar uzayının, G üzerinde tanımlı kompleks değerli sınırlı regüler Borel ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $M(G)$ olduğunu göstermiştir. G grubunun kompakt olmadığı durumda Sakai [42] çalışmasında $L^1(G)$ üzerinde öteleme dönüşümleriyle değişmeli, sınırlı, lineer, kompakt operatörlerin sıfır olduğunu ispatlamıştır. Diğer yandan Akemann [2] çalışmasında G kompakt grup ise $M(L^1(G), L^1(G))$ çarpanlar uzayının sadece kompakt operatörlerden oluştuğunu göstermiştir.

Ayrıca, Lau [21] çalışmasında Lebesgue uzaylarının $1 \leq p < \infty$ için kapalı, konveks, sol (sağ) ötelemeler altında değişmez kalan alt kümelerini çalışmıştır, özel olarak $L^p(G)$ Lebesgue uzaylarının bir tek kompakt konveks sol (sağ) ötelemeler altında değişmez kalan alt kümesinin orijin olduğunu göstermiştir. Ayrıca bu çalışmada $L^q(G)$ uzayının kapalı, konveks, ötelemeler altında değişmez olan herhangi bir alt kümesinden $L^p(G)$ uzayının kapalı, konveks, ötelemeler altında değişmez olan herhangi bir alt kümesine giden öteleme operatörleriyle değişmeli afin dönüşümler karakterize edilmiştir.

G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere Orlicz uzaylarının homolojik özelliklerinin incelenmesini ve kompakt çarpanlar uzayının karakterize edilmesini temel alan bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm olan Giriş bölümünde, projektif, injektif, flatness ve çarpanlar kavramlarıyla ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalara yer verilmiş ve tez çalışmasının temel motivasyonu ifade edilmiştir.

İkinci bölüm olan Genel Kısımlar bölümünde, bu tez çalışması boyunca kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar ile literatürde yer alan bazı teorem ve sonuçlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm olan Malzeme ve Yöntem bölümünde, tezde kullanılan yöntemlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm olan Bulgular bölümü iki kısım halinde incelenecektir. Birinci kısımda G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere $L^\Phi(G)$ Orlicz uzaylarının projektif modül olabilmesi için gerek ve yeter koşulun G grubunun kompakt olması gerektiği ispatlanmıştır. Ayrıca hangi koşullar altında injektif ve flat modül olacağı incelenmiştir.

Çalışmanın temel amaçlarından biri de Orlicz uzayları için kompakt çarpanlar uzayının karakterize edilmesidir. Bunun için ikinci kısımda ilk olarak $L^\Phi(G)$ uzaylarının kapalı, konveks ve sol ötelemeler altında değişmez olan alt kümeleri incelenmiştir. Ardından Orlicz uzaylarının alt kümeleri üzerinde sürekli ve afin dönüşümler karakterize edilmiştir ve bu kısımda elde edilen sonuçlar kullanılarak kompakt çarpanlar uzayı belirlenmiştir.

Bulgular bölümünün son kısmında ise çeşitli kompakt ve kompakt olmayan topolojik grup örnekleri verilmiştir. Dördüncü bölüm boyunca elde edilen sonuçlar verilen bu gruplara uygulanarak somut örnekler gözlemlenebilir.

Bulgular bölümünde elde edilen özgün Teorem ve Sonuçlar aşağıdaki gibidir:

Teorem 1.1 *G yerel kompakt grup ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda $L^\Phi(G)$ uzayının projektif sol Banach $L^1(G)$ -modül olabilmesi için gerek ve yeter koşul G grubunun kompakt olmasıdır.*

Gözlem: G yerel kompakt grup, (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyonu çifti ve $\Psi \in \Delta_2$ olsun. Eğer $L^\Phi(G)$ projektif sol Banach $L^1(G)$ -modül ve G ayrılabilir (2. sayılabilir) ise G kompakttır.

Önerme 1.2 *G yerel kompakt grup ve (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyonu çifti olsun. Eğer*

G amenable grup ise aşağıdakiler gerçekleşir:

1. $L^\Phi(G)$ flat sol Banach $L^1(G)$ -modüldür;
2. $L^\Phi(G)$ nin dual modülü $L^\Psi(G)$ injektif sağ Banach $L^1(G)$ -modüldür;
3. eğer Φ ve Ψ Young fonksiyonlarının her ikisi de Δ_2 koşulunu sağlarsa $L^\Phi(G)$ dual modül olduğundan hem injektif hem flat sol Banach $L^1(G)$ -modüldür.

Lemma 1.3 G yerel kompakt bir grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

1. Her bir $f \in L^\Phi(G)$ için $\mu \mapsto \mu * f$ dönüşümü $(M(G), z^*)$ uzayından $(L^\Phi(G), z)$ uzayına süreklidir;
2. her bir $f \in L^1(G)$ için $h \mapsto f * h$ dönüşümü $(L^\Phi(G), z)$ uzayından $(L^\Phi(G), z)$ uzayına süreklidir.

Teorem 1.4 G yerel kompakt grup, Φ Young fonksiyonu ve C , $L^\Phi(G)$ uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda C kümesinin sol ötelemeler altında değişmez olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $h \in P_1(G)$ için $h * C \subseteq C$ olmasıdır.

Sonuç 1.5 G yerel kompakt grup, Φ Young fonksiyonu olmak üzere I , $L^\Phi(G)$ uzayının kapalı bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda $L^1(G) * I \subseteq I$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul I alt vektör uzayının sol ötelemeler altında değişmez olmasıdır.

Sonuç 1.6 G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere, her $f \in L^\Phi(G)$ için

$$\overline{\text{co}\{L_x f : x \in G\}}^{\|\cdot\|_\Phi} = \overline{\{\varphi * f : \varphi \in P_1(G)\}}^{\|\cdot\|_\Phi}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 1.7 G yerel kompakt grup, Φ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda G grubunun kompakt olmaması için gerek ve yeter koşul $L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı her kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez alt kümesinin orijini içermesidir.

Teorem 1.8 G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda G grubunun kompakt olmaması için gerek ve yeter koşul $L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı her kompakt, konveks, sol ötelemeler altında değişmez alt kümesinin orijin olmasıdır.

Teorem 1.9 G yerel kompakt grup, Φ, Ψ Young fonksiyonları ve B, C sırasıyla $L^\Psi(G)$ ve $L^\Phi(G)$ uzaylarının kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez olan alt kümeleri olsun. $T : B \rightarrow C$ sürekli ve afin bir dönüşüm ise aşağıdakiler denktir:

1. T dönüşümü tüm sol ötelemelerle değişmelidir. Bir başka deyişle her $x \in G$ ve her $f \in B$ için $T(L_x f) = L_x T f$ sağlanır.
2. Her $h \in P_1(G)$ ve her $f \in B$ için $T(h * f) = h * T(f)$ gerçekleşir.

Sonuç 1.10 G yerel kompakt grup, Φ ve Ψ Young fonksiyonları olmak üzere $T : L^\Psi(G) \rightarrow L^\Phi(G)$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

1. Her $x \in G$ ve her $f \in L^\Psi(G)$ için $T(L_x f) = L_x T f$ sağlanır.
2. Her $h \in L^1(G)$ ve her $f \in L^\Psi(G)$ için $T(h * f) = h * T(f)$ gerçekleşir.

Teorem 1.11 G kompakt olmayan yerel kompakt bir grup, Φ Young fonksiyonu olmak üzere $C, L^1(G)$ uzayının boştan farklı, kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi ve $B, L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı, zayıf kompakt, kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi olsun. Eğer $T : B \rightarrow C$ dönüşümü sürekli, afin ve her $x \in G$, her $f \in B$ için $T(L_x f) = L_x T f$ koşulunu sağlıyor ise $T(f) = 0$ olur.

Teorem 1.12 G yerel kompakt grup, Φ Young fonksiyonu olmak üzere $C, L^\Phi(G)$ uzayının zayıf kompakt, kapalı, sınırlı ve sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi ve $T : P_1(G) \rightarrow C$ sürekli, afin bir dönüşüm olsun. Aşağıdakiler denktir:

1. T tüm sol öteleme dönüşümleri ile değişmelidir.
2. Öyle bir $f \in C$ fonksiyonu her $h \in P_1(G)$ için $T(h) = h * f$ koşulunu sağlayacak biçimde mevcuttur.

Teorem 1.13 *G yerel kompakt grup, (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyonu çifti ve $\Phi, \Psi \in \Delta_2$ olmak üzere $T : L^1(G) \rightarrow L^\Phi(G)$ sınırlı, lineer bir operatör olsun. Bu durumda $T \in M(L^1(G), L^\Phi(G))$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul öyle bir $f \in L^\Phi(G)$ fonksiyonunun her $h \in L^1(G)$ için $T(h * f) = h * f$ koşulunu gerçekleyecek şekilde mevcut olmasıdır.*

Teorem 1.14 *G kompakt bir grup olmak üzere $L^1(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden her T çarpanı kompakttır.*

Teorem 1.15 *G kompakt olmayan yerel kompakt bir grup ve Φ, Ψ Young fonksiyonları olsun. Bu durumda $L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden tek kompakt çarpan sıfırdır.*

Teorem 1.16 *G kompakt olmayan bir yerel kompakt grup ve $A, L^\Phi(G)$ uzayının zayıf kompakt, kapalı, sol ötelemeler altında değişmez alt uzayı olsun. Eğer $T : A \rightarrow L^1(G)$ sınırlı lineer operatörü sol öteleme dönüşümleriyle değişmeli ise T operatörü sıfırdır.*

Son olarak beşinci bölüm olan Tartışma ve Sonuç bölümünde, Bulgular kısmında elde edilenlerin değerlendirmesi yapılmıştır ve ileride çalışma konusu olabilecek kavramlara yer verilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu kısımda, tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, kavramlar ve bazı önemli sonuçlar verilmiştir.

2.1. BANACH CEBİRLERİ

Aşağıda verilen tanım ve özellikler için [4], [16] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.1.1 $(A, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $A, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer norm alt çarpımsallık özelliğini sağlıyorsa, bir başka deyişle her $x, y \in A$ için

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A cebiri $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir normlu cebirdir denir. Özel olarak $(A, \|\cdot\|)$ normlu uzayı Banach uzayı ise A normlu cebirine Banach cebiri denir. Eğer her $x, y \in A$ için $xy = yx$ koşulu sağlanıyorsa A cebirine değişmelidir denir. Ayrıca her $x \in A$ için $ex = xe = x$ olacak şekilde bir $e \in A$ elemanı varsa A cebirine birimli normlu cebir denir. Bu durumda e elemanına da A cebirinin birimi denir.

Tanım 2.1.2 $A, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir Banach cebiri ve $E, \mathbb{K}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\begin{aligned} A \times E &\rightarrow E \\ (a, x) &\rightarrow ax \end{aligned}$$

dönüşümü için

1. her $a \in A$ için $x \mapsto ax$ dönüşümü E üzerinde lineer,
2. her $x \in E$ için $a \mapsto ax$ dönüşümü A üzerinde lineer,
3. her $a, b \in A$ ve her $x \in E$ için $a(bx) = (ab)x$

koşulları sağlanıyorsa E , sol A -modüldür denir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} E \times A &\rightarrow E \\ (x, a) &\rightarrow xa \end{aligned}$$

dönüşümü için

1. her $a \in A$ için $x \mapsto xa$ dönüşümü E üzerinde lineer,
2. her $x \in E$ için $a \mapsto xa$ dönüşümü A üzerinde lineer,
3. her $a, b \in A$ ve her $x \in E$ için $(xa)b = x(ab)$

koşulları sağlanıyorsa E , sağ A -modüldür denir.

Eğer E hem sol hem sağ A -modül ve her $a, b \in A$, her $x \in E$ için

$$a(xb) = (ax)b$$

koşulunu sağlıyorsa A -bimodüldür denir.

Tanım 2.1.3 $(A, \|\cdot\|)$, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir Banach cebiri ve $(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere E , A üzerinde bir modül olsun. Eğer bir $M > 0$ sayısı her $a \in A$ ve $x \in E$ için

$$\|ax\|_E \leq M\|a\|_A\|x\|_E$$

koşulunu sağlanıyorsa, E A üzerinde bir sol Banach modül veya sol Banach A -modül denir.

Benzer şekilde

$$\|xa\|_E \leq M\|x\|_E\|a\|_A$$

koşulu sağlanıyorsa E A üzerinde bir sağ Banach modül veya sağ Banach A -modül denir.

Eğer her iki özellik birlikte sağlanıyorsa E modülüne Banach A -bimodül denir.

Örnek. A bir Banach cebiri ve E sol Banach A -modül olsun. Bu durumda E modülünün

duali E^* aşığıdaki modül işlemlerle birlikte sağı Banach A -modüldür.

$$\langle x, \lambda a \rangle = \langle ax, \lambda \rangle, \quad a \in A, x \in E, \lambda \in E^*.$$

Benzer şekilde E sağı Banach A -modül ise E^*

$$\langle x, a\lambda \rangle = \langle xa, \lambda \rangle, \quad a \in A, x \in E, \lambda \in E^*$$

modül işlemlerle birlikte sol Banach A -modüldür.

Tanım 2.1.4 $(A, \|\cdot\|)$ bir normlu cebir olmak üzere A üzerinde bir $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ağı verilsin. Eğer her $x \in A$ için $e_\alpha x \rightarrow x$ oluyorsa $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ağı, A normlu cebiri için sol yaklaşık birim, her $x \in A$ için $xe_\alpha \rightarrow x$ oluyorsa $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ağı, A normlu cebiri için sağı yaklaşık birimdir denir. Ayrıca her $\alpha \in I$ için öyle bir $M > 0$ sayısı $\|e_\alpha\| \leq M$ koşulunu sağlayacak biçimde mevcutsa, yani $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ağı sınırlı ise, A normlu cebirinin sınırlı yaklaşık birimi olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.5 (Cohen Factorization Teoremi) A sınırlı sol yaklaşık birime sahip bir Banach cebiri olsun. Bu durumda her $z \in A$ ve $\delta > 0$ için

1. $z = xy$;
2. $y \in \overline{(Az)}$;
3. $\|z - y\| < \delta$

olacak biçimde $x, y \in A$ mevcuttur.

Şimdi Bulgular kısmında verilecek sonuçlar için kullanacağımız tensör çarpımları kavramlarını hatırlatalım.

Tanım 2.1.6 E ve F , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde normlu uzaylar, E^*, F^* sırasıyla E ve F uzaylarının dual uzayları olmak üzere

$$BL(E^*, F^*; \mathbb{K}) = \{x \otimes y : E^* \times F^* \rightarrow \mathbb{K} \text{ sınırlı, bilinear}\}$$

olarak tanımlansın. Her $x \in E$, $y \in F$ ve $x \otimes y \in BL(E^*, F^*; \mathbb{K})$ elemanı $f \in E^*$, $g \in F^*$ olmak üzere

$$(x \otimes y)(f, g) = f(x)g(y)$$

ile tanımlanır. E ve F uzaylarının cebirsel tensör çarpımı $E \otimes F$ ile gösterilir ve

$$\text{span}\{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.1.7 E ve F Banach uzayları olsun. $E \otimes F$ üzerinde $\|\cdot\|_\pi$ projektif normu $x \in E \otimes F$ olmak üzere

$$\|x\|_\pi := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| : x = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada infimum x elemanının tüm temsilcileri üzerinden alınmıştır.

Tanım 2.1.8 E, F Banach uzayları olsun. $E \otimes F$ tensör çarpımının $\|\cdot\|_\pi$ projektif normuna göre tanımlanışına projektif tensör çarpım denir ve $E \hat{\otimes} F$ ile gösterilir. Ayrıca A bir Banach cebiri olmak üzere $A \hat{\otimes} A$ üzerinde kanonik A -bimodül yapısı her $a, x, y \in A$ için

$$a(x \otimes y) = ax \otimes y, \quad (x \otimes y)a = x \otimes ya$$

modül işlemleri yardımıyla kurulur.

Tensör çarpımları için kullanışlı olan aşağıdaki teoremi verelim.

Önerme 2.1.9 E, F Banach uzayları ve $\|\cdot\|$ $E \otimes F$ üzerinde bir çapraz (cross) norm olsun. Bu durumda $\|\cdot\|_\pi$ projektif normu $x \in E \otimes F$ için

$$\|x\| \leq \|x\|_\pi$$

koşulunu sağlayan bir çapraz normdur.

2.2. YEREL KOMPAKT GRUPLAR VE HAAR ÖLÇÜSÜ

Bu kısımda verilen kavramlar için [9], [36], [38], [39] kaynaklarından faydalanılmıştır.

Tanım 2.2.1 G bir grup olmak üzere τ , G grubu üzerinde bir topoloji olsun. Eğer

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\rightarrow gh \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ g &\rightarrow g^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümleri sürekliyse G bir topolojik gruptur denir. Eğer G topolojik grubu Hausdorff ve birimin her komşuluğu birimin kompakt bir komşuluğunu içeriyorsa G topolojik grubuna yerel kompakt grup denir. Özel olarak G yerel kompakt grubu değişmeli ise yerel kompakt değişmeli gruptur denir.

Bu tez çalışması boyunca değişmeli olmayan yerel kompakt gruplar ile çalışılmıştır.

Tanım 2.2.2 X bir topolojik uzay olsun. X üzerinde Borel σ -cebiri X kümesinin tüm açık kümelerini içeren en küçük σ -cebiridir. X üzerindeki Borel σ -cebirleri $B(X)$ ile gösterilecek ve elemanları da Borel kümesi olarak adlandırılacaktır.

X uzayı üzerinde kompleks Borel ölçüsü $\mu : B(X) \rightarrow \mathbb{C}$

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $E_n, B(X)$ uzayında ayrık kümelerin koleksiyonu olmak üzere

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyondur. (1) ve (2) koşullarının yanı sıra $\mu : B(X) \rightarrow [0, \infty]$ ise μ pozitif Borel ölçüsüdür denir. Ayrıca $E \in B(X)$ için

1. her $K \subseteq B(X)$ kompakt kümesi için $\mu(K) < \infty$;
2. $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ açık}\}$;
3. $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ kompakt}\}$

koşulları sağlanıyorsa μ regüler Borel ölçüsü olarak adlandırılır.

Not: μ bir kompleks Borel ölçüsü olmak üzere eğer

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| : E_i, E \text{ Borel kümelerinin ayrışımı} \right\}$$

total salınımı regüler ise μ regülerdir.

X üzerinde tüm kompleks regüler Borel ölçülerinin kümesi $M(X)$ ile gösterilecektir. $M(X)$ ölçü uzayı

$$\|\mu\| = |\mu|(X), \quad \mu \in M(X)$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.3 G yerel kompakt grup olmak üzere G üzerinde tanımlı sıfırdan farklı, pozitif, regüler Borel ölçüsü μ , G grubundaki her E Borel kümesi için

$$\mu(xE) = \mu(E), \quad (\mu(Ex) = \mu(E)), \quad x \in G$$

koşulu sağlanıyorsa μ sol (sağ) Haar ölçüsü olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.4 G yerel kompakt grup olmak üzere $f, g : G \rightarrow \mathbb{K}$ ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda f ve g fonksiyonlarının girişim (convolution) işlemi

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x) d\mu(y), \quad x \in G$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2.5 G yerel kompakt grup ve E bir Borel kümesi olsun. Bu durumda her $a \in G$ için

Dirac ölçüsü

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1, & a \in E \\ 0, & a \notin E \end{cases}$$

olarak tanımlıdır.

Not: G yerel kompakt grup olmak üzere her $s, t \in G$ için δ_s ve δ_t Dirac ölçüleri olsun. Bu durumda $\delta_s * \delta_t = \delta_{st}$ gerçekleşir.

Not: G yerel kompakt grup, $a \in G$ ve δ_a Dirac ölçüsü olmak üzere

$$(\delta_a * f)(x) = f(a^{-1}x) = L_{a^{-1}}f(x), \quad x \in G$$

gerçeklenir. Ayrıca G üzerinde verilen bir f fonksiyonu için $\tilde{f}$ ile her $x \in G$ için $\tilde{f}(x) = f(x^{-1})$ fonksiyonu gösterilecektir.

Tanım 2.2.6 G yerel kompakt grup ve $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\overline{\{x \in G : f(x) \neq 0\}}$$

kümesine f fonksiyonunun desteği denir ve $\text{supp}(f)$ ile gösterilir.

G üzerinde tanımlı kompleks değerli, sürekli ve kompakt destekli tüm fonksiyonların vektör uzayı $C_c(G)$ ile G üzerinde tanımlı, kompleks değerli, sürekli ve sonsuzda sıfır olan tüm fonksiyonların vektör uzayı $C_0(G)$ ile ve yine G üzerinde tanımlı kompleks değerli, sürekli ve sınırlı tüm fonksiyonların vektör uzayı $C_b(G)$ ile gösterilmiştir.

Lemma 2.2.7 G yerel kompakt grup olsun. Her $f \in C_c(G)$ fonksiyonu aşağıdaki anlamda düzgün süreklidir.

Her $\varepsilon > 0$ için birimin öyle bir U komşuluğu vardır ki $x^{-1}y \in U$ veya $yx^{-1} \in U$ olduğunda

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

sağlanır.

Tanım 2.2.8 G yerel kompakt grup, μ Haar ölçüsü ve $1 \leq p < \infty$ için $L^p(G)$ ile gösterilen Lebesgue uzayı $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\int_G |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlarının hemen her yerde eşitlik bağıntısına göre denklik sınıflarının oluşturduğu uzaydır. Bu uzay,

$$L^p(G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \int_G |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve normu

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

ile verilir. Ayrıca $p = \infty$ ise

$$L^\infty(G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \operatorname{ess\,sup}_{x \in G} |f(x)| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıdır ve esasen sınırlı fonksiyonlar uzayı olarak adlandırılır. $L^\infty(G)$ üzerinde norm

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in G} |f(x)|$$

ile verilir.

Önerme 2.2.9 G yerel kompakt grup ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $C_c(G)$ kompakt destekli sürekli fonksiyonlar uzayı $L^p(G)$ uzayında yoğundur. Bir başka deyişle $\overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(G)$ sağlanır.

Tanım 2.2.10 G yerel kompakt grup olmak üzere $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonu için L_x öteleme dönüşümü her $x, y \in G$ için

$$L_x f(y) = f(xy)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.2.11 [9, Lemma 1.4.2] G yerel kompakt grup olmak üzere G grubundan $C_c(G)$ uzayına giden $x \mapsto L_x f$ dönüşümü süreklidir. Bir başka deyişle her $\varepsilon > 0$ için birimin öyle bir U komşuluğu

$$\|L_x f - f\|_\infty < \varepsilon$$

olacak biçimde mevcuttur.

İspat. Kabul edelim ki $f \in C_c(G)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\text{supp } f = K$ olsun. Bu durumda $\text{supp } L_x f = xK$ olur. U_0 birimin kompakt ve simetrik bir komşuluğu olsun. O halde her $x \in U_0$ için $\text{supp } L_x f \subseteq U_0 K$ olur.

Lemma 2.2.7 gereğince birimin bir U komşuluğu her $x \in U$ için $U \subseteq U_0$ ve

$$\|L_x f - f\|_\infty < \varepsilon$$

koşulu sağlanacak şekilde mevcuttur. O halde her $f \in C_c(G)$ için istenen sağlanır.

Teorem 2.2.12 G yerel kompakt grup olmak üzere $L^1(G)$ Banach cebirinin girişim işlemine göre kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan sınırlı yaklaşık birimi mevcuttur.

Lemma 2.2.13 G yerel kompakt grup olmak üzere V , G de açık bir küme ve $K \subseteq V$ kompakt bir küme olsun. Bu durumda $f \in C_c(G)$ fonksiyonu

1. Her $x \in G$ için $0 \leq f(x) \leq 1$,
2. $\text{supp}(f) \subseteq V$

koşulları sağlanacak biçimde mevcuttur.

Teorem 2.2.14 (Riesz Temsil Teoremi) G yerel kompakt grup ve $I : C_c(G) \rightarrow \mathbb{C}$ pozitif, lineer bir fonksiyonel olsun. Bu durumda G grubu üzerinde (skaler çarpıma göre) bir tek pozitif, regüler Borel ölçüsü μ

$$I(f) = \int_G f(x) d\mu(x), \quad f \in C_c(G)$$

olacak biçimde mevcuttur.

Teorem 2.2.15 G yerel kompakt bir grup ve $\mu \in M(G)$, $f \in C_0(G)$ olmak üzere

$$\langle \mu, f \rangle = \int_G f(x) d\mu(x), \quad x \in G$$

çifti için $M(G) = C_0(G)^*$ sağlanır.

Teorem 2.2.16 (Fubini Teoremi) X ve Y yerel kompakt Hausdorff uzayları, μ, λ sırasıyla X, Y uzayları üzerinde regüler Borel ölçüleri ve f fonksiyonu $\mu \times \lambda$ çarpım ölçüsüne göre integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \lambda) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\lambda(y) = \int_X \int_Y f(x, y) d\lambda(y) d\mu(x) \quad (2.1)$$

sağlanır.

Ayrıca $\mu \in M(X)$, $\lambda \in M(Y)$ olmak üzere f , $X \times Y$ üzerinde Borel ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\int_X \int_Y |f(x, y)| d|\lambda|(y) d|\mu|(x) < \infty$$

ise (2.1) gerçekleşir.

2.3. ORLICZ UZAYLARI

Şimdi Orlicz uzaylarının yapısı ile ilgili bazı temel tanım ve teoremleri verelim. Bu kısımdaki bilgiler [35] kaynağında bulunabilir.

Tanım 2.3.1 $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu için

1. Φ konveks,
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = \Phi(0) = 0$,
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = +\infty$

koşulları sağlanıyorsa Φ fonksiyonuna Young fonksiyonu denir.

Tanım 2.3.2 Φ Young fonksiyonu olmak üzere

$$\Psi(y) := \sup\{xy - \Phi(x) : x \geq 0\} \quad y \geq 0,$$

ile tanımlanan Ψ fonksiyonuna Φ fonksiyonunun tamlayan (tümlleyen) fonksiyonu denir ve Ψ fonksiyonu da bir Young fonksiyonudur. (Φ, Ψ) ikilisi tamlayan Young fonksiyon çifti olarak adlandırılır. Ayrıca (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti için aşağıdaki Young eşitsizliği gerçekleşir:

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y), \quad x, y \geq 0.$$

Not: Tanım 2.3.1 incelenirse bir Young fonksiyonu herhangi bir noktada ∞ değerini alabilir ve dolayısıyla bu noktada süreksiz olabilir. Bu tez çalışması boyunca (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyonu çifti olmak üzere Φ ve Ψ fonksiyonları sürekli olarak alınacaktır.

Tanım 2.3.3 Φ_1, Φ_2 Young fonksiyonları olmak üzere bir $a > 0$ sabiti

$$\Phi_2(x) \leq \Phi_1(ax), \quad x \geq 0$$

olacak biçimde mevcutsa Φ_1 fonksiyonu Φ_2 fonksiyonundan kuvvetlidir denir ve $\Phi_1 \succ \Phi_2$ ($\Phi_2 \prec \Phi_1$) ile gösterilir. Özel olarak $\Phi_1 \succ \Phi_2$ ve $\Phi_2 \succ \Phi_1$ koşulları sağlanıyorsa Φ_1 ve Φ_2 fonksiyonları kuvvetli denktir denir, $\Phi_1 \approx \Phi_2$ yazılır.

Örnek. Aşağıda Φ ve Ψ tamlayan Young fonksiyon çiftleri için örnekler verilmiştir.

1. $\Phi(x) = x$ bir Young fonksiyonudur ve tamlayan fonksiyonu

$$\Psi(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq 1, \\ \infty, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklindedir.

2. $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$ Young fonksiyonunun tamlayan fonksiyonu $\Psi(y) = \frac{y^q}{q}$ ile verilir.

3. $\Phi(x) = e^x - x - 1$ Young fonksiyonu için $\Psi(y) = (1+y)\ln(1+y) - y$ fonksiyonu tanımlayan fonksiyondur.
4. $\Phi(x) = x\ln(1+x)$ ise $\Psi(y) \approx \cosh y - 1$ dir.
5. $\Phi(x) = \cosh x - 1$ için $\Psi(y) \approx y\ln(1+y)$ olur.

Tanım 2.3.4 G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{L}^\Phi(G)$ ile gösterilen Orlicz sınıfı

$$\mathcal{L}^\Phi(G) := \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ ölçülebilir, } \int_G \Phi(|f(x)|) d\mu(x) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.5 Φ Young fonksiyonu olmak üzere en az bir $K > 0$ sayısı

$$\Phi(2x) \leq K\Phi(x), \quad x \geq 0$$

olacak şekilde varsa Φ Young fonksiyonuna Δ_2 -koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2$ ile gösterilir.

Örnek. Φ Young fonksiyonu olmak üzere aşağıda Δ_2 -koşulunu sağlayan ve sağlamayan örnekler verilmiştir.

1. $\Phi(x) = |x|^p$, $p \geq 1$ olmak üzere Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlar.
2. $\Phi(x) = (1 + |x|)\ln(1 + |x|) - |x|$ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlar.
3. $\Phi(x) = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + 1$ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlar.
4. $\Phi(x) = x\ln(1+x)$ ve $\Phi(x) = \cosh x - 1$ Young fonksiyonları Δ_2 koşulunu sağlar.
5. $\Phi(x) = e^{|x|} - 1$ ve $\Phi(x) = e^{|x|} - |x| - 1$ Young fonksiyonları Δ_2 koşulunu sağlamaz.

G yerel kompakt bir grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere $\Phi \in \Delta_2$ sağlanıyorsa $\mathcal{L}^\Phi(G)$ vektör uzayı olur. Ayrıca $\mathcal{L}^\Phi(G)$ Orlicz sınıfının vektör uzayı olabilmesi için gerek ve yeter koşul Δ_2 koşulu dışında aşağıdaki gibi de verilebilir.

Sonuç 2.3.6 G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere

$$\mathcal{L}^\Phi(G) \text{ vektör uzayıdır} \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{L}^\Phi(G), \forall \beta > 0, \beta f \in \mathcal{L}^\Phi(G)$$

olmasıdır.

Not: $\Phi \notin \Delta_2$ ise $\mathcal{L}^\Phi(G)$ vektör uzayı olmak zorunda değildir. Buradan sonuçla aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.3.7 G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayı

$$L^\Phi(G) := \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ ölçülebilir, } \exists \alpha > 0, \int_G \Phi(\alpha |f(x)|) d\mu(x) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $L^\Phi(G)$ bir vektör uzayıdır ve $\Phi \in \Delta_2$ ise $\mathcal{L}^\Phi(G) = L^\Phi(G)$ olur. Öte yandan Orlicz uzayı da klasik Lebesgue uzayları gibi hemen her yerde eşitlik bağıntısına göre belirlenen fonksiyonların denklik sınıflarından oluşmaktadır.

Tanım 2.3.8 G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere her $f \in L^\Phi(G)$ için

$$\|f\|_\Phi^\circ := \inf \left\{ k > 0 : \int_G \Phi \left(\frac{|f(x)|}{k} \right) d\mu(x) \leq 1 \right\}$$

ile tanımlanan fonksiyon Orlicz uzayı üzerinde bir normdur. Böyle tanımlanan norma Luxemburg normu denir. $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayı, $\|\cdot\|_\Phi^\circ$ Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır.

Orlicz uzayı üzerinde bir başka norm da aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.3.9 G yerel kompakt grup ve (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti olsun. Bu durumda $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayı üzerinde her $f \in L^\Phi(G)$ için

$$\|f\|_\Phi := \sup \left\{ \int_G |f(x)v(x)| d\mu(x) : \int_G \Psi(|v(x)|) d\mu(x) \leq 1 \right\}$$

fonksiyonu bir normdur ve bu norma Orlicz normu denir.

Orlicz uzayı üzerinde Orlicz ve Luxemburg normları denktir yani,

$$\|f\|_{\Phi}^{\circ} \leq \|f\|_{\Phi} \leq 2\|f\|_{\Phi}^{\circ}$$

eşitsizliği sağlanır ve her $f \in L^{\Phi}(G)$ için

$$\|f\|_{\Phi} \leq 1 \Leftrightarrow \int_G \Phi(|f(x)|) d\mu(x) \leq 1$$

gerçeklenir.

Ayrıca Orlicz uzayının dualinin belirlendiği ve hangi koşullarda yansılmalı olduğunun gösterildiği aşağıdaki Teoremleri vermek faydalı olacaktır.

Teorem 2.3.10 *G yerel kompakt grup ve (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyonu çifti olmak üzere $\Phi \in \Delta_2$ koşulu sağlanıyor ise*

$$(L^{\Phi}(G), \|\cdot\|_{\Phi})^* = (L^{\Psi}(G), \|\cdot\|_{\Psi}^{\circ})$$

gerçeklenir.

Teorem 2.3.11 *G yerel kompakt grup, (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyonu çifti olmak üzere $\Phi \in \Delta_2$ ve $\Psi \in \Delta_2$ sağlanıyor ise $L^{\Phi}(G)$ Orlicz uzayı yansılalıdır.*

Son olarak $L^{\Phi}(G)$ uzayına ilişkin temel özellikler aşağıdaki Teoremde verilmiştir.

Teorem 2.3.12 [29, Lemma 2.1, Lemma 2.3] *G yerel kompakt grup olmak üzere Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlasın. Aşağıdakiler gerçekleşir:*

1. *Kompakt destekli sürekli fonksiyonlar uzayı Orlicz uzayında yoğundur. Bir başka deyişle $\overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_{\Phi}} = L^{\Phi}(G)$ sağlanır.*
2. *G grubundan $L^{\Phi}(G)$ uzayına giden $x \mapsto L_x f$ dönüşümü süreklidir.*

2.4. HOMOLOJİK ÖZELLİKLER

Şimdi tez boyunca kullanılacak olan homolojik özelliklerin tanımlarını ve temel teoremleri verelim. Bu kısımda verilen tanım ve teoremler için [8], [14], [37] kaynakları kullanılmıştır.

Tanım 2.4.1 *A bir cebir ve E sol A-modül olsun. Eğer her $x \in E \setminus \{0\}$ için öyle bir $a \in A$, $ax \neq 0$ koşulu sağlanacak şekilde mevcutsa E sadık (faithful) denir.*

Tanım 2.4.2 *A bir Banach cebiri ve E sol Banach A-modül olsun. $AE = \text{span}\{ax : a \in A, x \in E\}$ olmak üzere eğer $\overline{AE}^{\|\cdot\|_E} = E$ koşulu sağlanıyorsa E esaslı (essential) modül olarak adlandırılır. Özel olarak A Banach cebiri sınırlı yaklaşık birime sahipse $\overline{AE}^{\|\cdot\|_E} = AE$ olur.*

Lemma 2.4.3 [31, Lemma 3.2] *G yerel kompakt grup, Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda $L^\Phi(G)$ esaslı sol Banach $L^1(G)$ -modüldür.*

Tanım 2.4.4 *E bir Banach uzayı ve F, E uzayının kapalı bir alt uzayı olmak üzere eğer $E = F \oplus G$ olacak biçimde E uzayının bir G kapalı alt uzayı varsa F ye tamlanmıştır denir.*

Tanım 2.4.5 *E ve F Banach uzayları olmak üzere $T \in B(E, F)$ olsun. Eğer T operatörünün çekirdeği $\ker T$, E uzayında tamlanmış, görüntüsü $\text{im } T$ kapalı ve F uzayında tamlanmış ise T operatörüne makul (admissible) denir.*

Tanım 2.4.5 için denk olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.4.6 *E ve F Banach uzayları olmak üzere $T \in B(E, F)$ olsun. Eğer en az bir $S \in B(F, E)$ operatörü $T \circ S = \text{id}_F$ koşulu sağlanacak şekilde varsa T operatörüne makul denir.*

Tanım 2.4.7 *E ve F sol Banach A-modül olmak üzere ${}_A B(E, F)$ ile $B(E, F)$ uzayının tüm sol A-modül dönüşümlerini içeren kapalı alt vektör uzayı gösterilsin. $T \in {}_A B(E, F)$ olsun. Eğer öyle bir $S \in {}_A B(F, E)$ dönüşümü $T \circ S = \text{id}_F$ olacak şekilde varsa T operatörüne geri çekilme, retraksiyon (retraction) denir. Bu durumda F de E modülünün retraksiyonudur denir. Benzer tanım E ve F sağ Banach A-modül olduğunda da yapılabilir.*

Tanım 2.4.8 *A bir Banach cebiri, E, F sol Banach A -modül ve $T \in {}_AB(E, F)$ olsun. Eğer bir $S \in {}_AB(F, E)$ dönüşümü $S \circ T = \text{id}_E$ olacak biçimde mevcutsa T dönüşümüne eş (geri) çekilme, koretraksiyon (coretraction) denir.*

Tanım 2.4.9 *A bir Banach cebiri ve P sol Banach A -modül olsun. Eğer her bir E, F sol Banach A -modül, her bir $T \in {}_AB(E, F)$ makul örten dönüşümü ve her bir $S \in {}_AB(P, F)$ dönüşümü için öyle bir $R \in {}_AB(P, E)$ dönüşümü $T \circ R = S$ olacak biçimde bulunabiliyorsa P projektif A -modüldür denir.*

Benzer tanım P sağ Banach A -modül ve Banach A -bimodül olduğunda da verilebilir. Ayrıca A bir Banach cebiri ve P projektif sol Banach A -modül olmak üzere P modülünün retraksiyonu da projektiftir.

Tanım 2.4.9 için denk olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.4.10 *A bir Banach cebiri ve P sol Banach A -modül olsun. Eğer her bir E, F sol Banach A -modül, her makul örten $T : E \rightarrow F$, $T^{-1} = Q$ dönüşümü ve her $S : P \rightarrow F$ dönüşümü için öyle bir $C > 0$ sayısı ve $R : P \rightarrow E$ dönüşümü*

$$T \circ R = S \quad \text{ve} \quad \|R\| \leq C \|S\| \|Q\|$$

olacak biçimde mevcutsa P, C -relatif projektif A -modüldür denir.

Tanım 2.4.11 *A bir cebir olmak üzere A^b ile $x \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$ için (x, α) ikililerinin kümesi gösterilsin ($A^b = A \times \mathbb{C}$). Her $x, y \in A$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için*

$$(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta), \quad \beta(x, \alpha) = (\beta x, \beta \alpha)$$

ve

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha \beta)$$

işlemleriyle birlikte A^b bir cebirdir. A Banach cebiri ise A^b de Banach cebiridir ve E bir Banach uzayı olmak üzere eğer E sol Banach A -modül ise E aynı zamanda birimli sol Banach A^b -modüldür.

Tanım 2.4.12 E bir Banach uzayı ve $P = A^b \widehat{\otimes} E$ olsun.

$$a(b \otimes x) = ab \otimes x, \quad a \in A, b \in A^b, x \in E$$

işlemleriyle birlikte $A^b \widehat{\otimes} E$ bir sol Banach A -modüldür ve serbest (free) Banach sol A -modül olarak adlandırılır. Burada $\pi \in {}_A B(A^b \widehat{\otimes} E, E)$ dönüşümü

$$\pi(a \otimes x) = ax, \quad a \in A^b, x \in E$$

ile tanımlanacaktır. π dönüşümünün $A \widehat{\otimes} E$ üzerindeki kısıtlanması da π ile gösterilecek ve kanonik dönüşüm olarak adlandırılacaktır.

Projektivlik ile ilgili lemmayı vermeden önce kullanılacak olan aşağıdaki kavramları verelim.

Tanım 2.4.13 E bir Banach uzayı olsun. Eğer her $K \subseteq E$ kompakt alt kümesi ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir sonlu ranklı $S : E \rightarrow E$ operatörü $\|Sx - x\| < \varepsilon$ koşulu sağlanacak şekilde mevcutsa E yaklaşım özelliğine sahiptir denir.

Burada Bulgular kısmında kullanılacak olan Lebesgue uzayları ile ilgili aşağıdaki hatırlatmayı yapalım.

Lemma 2.4.14 G yerel kompakt grup ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(G)$ Lebesgue uzayı yaklaşım özelliğine sahiptir.

Lemma 2.4.15 A bir Banach cebiri ve E sol Banach A -modül olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir.

1. E nin projektif sol Banach A -modül olması için gerek ve yeter koşul $\pi \in {}_A B(A^b \widehat{\otimes} E, E)$ dönüşümünün retraksiyon olmasıdır. Eğer E esaslı modül ise E nin projektif sol Banach A -modül olması için gerek ve yeter koşul $\pi \in {}_A B(A \widehat{\otimes} E, E)$ kanonik dönüşümünün retraksiyon olmasıdır.
2. E projektif sol Banach A -modül ve A ya da E Banach uzaylarından en az biri yaklaşım özelliğine sahip olsun. Bu durumda her $x \in E \setminus \{0\}$ için öyle bir $T \in {}_A B(E, A^b)$

dönüşümü $Tx \neq 0$ olacak şekilde vardır. Eğer E esaslı modül ise $T \in {}_A B(E, A)$ yazılabilir.

Önerme 2.4.16 [34, Proposition 1.4] G yerel kompakt grup olsun. Eğer öyle bir projektif esaslı sol Banach $L^1(G)$ -modül E , duali norm topolojisine göre ayrılabilir veya zayıf dizisel tam olacak şekilde mevcutsa G kompakttır.

Şimdi bir diğer homolojik özellik olan injektiflik tanımını verelim.

Tanım 2.4.17 A bir Banach cebiri ve J sol Banach A -modül olsun. Eğer her bir E ve F sol Banach A -modül, $T \in {}_A B(E, F)$ makul, birebir dönüşümü ve her bir $S \in {}_A B(E, J)$ dönüşümü için öyle bir $R \in {}_A B(F, J)$ dönüşümü $R \circ T = S$ olacak biçimde varsa J injektif A -modüldür denir.

Benzer tanım J sağ Banach A -modül ve Banach A -bimodül olduğunda da verilebilir.

Tanım 2.4.17 için denk olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.4.18 A bir Banach cebiri ve J sol Banach A -modül olsun. Eğer her bir E ve F sol Banach A -modül, her makul, birebir $T : E \rightarrow F$, $T^{-1} = Q$ dönüşümü ve her $S : E \rightarrow J$ dönüşümü için öyle $C > 0$ reel sayısı ve $R : F \rightarrow J$ dönüşümü

$$R \circ T = S \quad \text{ve} \quad \|R\| \leq C \|S\| \|Q\|$$

olacak biçimde mevcutsa J , C -relatif injektif A -modüldür denir.

Not: A bir Banach cebiri ve E sol Banach A -modül olsun. Bu durumda $\Pi^b : E \rightarrow B(A^b, E)$ kanonik gömülmesi

$$\Pi^b(x)(a) = ax, \quad a \in A^b, x \in E$$

ile tanımlanır. Benzer biçimde eğer E sağ Banach A -modül ise $\Pi^b : E \rightarrow B(A^b, E)$ kanonik gömülmesi

$$\Pi^b(x)(a) = xa, \quad a \in A^b, x \in E$$

ile verilir.

İnjektif modül için aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 2.4.19 *A bir Banach cebiri ve E sol Banach A-modül olsun. Bu durumda E nin injektif olması için gerek ve yeter koşul $\Pi^b : E \rightarrow B(A^b, E)$ dönüşümünün koretraksiyon sol Banach A-modül olmasıdır.*

Not: $\Pi : E \rightarrow B(A, E)$ ile $\Pi(x) = \Pi^b(x)|_A$ ($x \in E$) gösterilsin. Önerme 2.4.19 için başka bir versiyon aşağıdaki gibi verilebilir.

Önerme 2.4.20 *A bir Banach cebiri ve E sadık sol Banach A-modül olsun. Bu durumda E nin injektif olması için gerek ve yeter koşul $\Pi : E \rightarrow B(A, E)$ dönüşümünün koretraksiyon sol Banach A-modül olmasıdır.*

Tanım 2.4.21 *A bir Banach cebiri ve E sol Banach A-modül olsun. Eğer E^* injektif sağ Banach A-modül ise E flat sol Banach A-modüldür denir. Benzer tanım E sağ Banach A-modül ve Banach A-bimodül olduğunda da verilebilir.*

Banach cebirleri için bir başka önemli kavram amenable olma kavramıdır. Bunun için aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 2.4.22 *G yerel kompakt grup ve E, $L^\infty(G)$ uzayının sabit fonksiyonları içeren bir alt uzayı olsun. Eğer $m : E \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyoneli lineer, sınırlı ve $\langle 1, m \rangle = \|m\| = 1$ koşulunu sağlıyorsa bu durumda m fonksiyoneli E üzerinde bir ortalama (mean) olarak adlandırılır.*

Tanım 2.4.23 *G yerel kompakt grup olmak üzere m, E üzerinde bir ortalama olsun. Her $x \in G, f \in E$ için*

$$\langle L_x f, m \rangle = \langle f, m \rangle$$

koşulu gerçekleşirse m sol değişmezdir denir.

Tanım 2.4.24 *G yerel kompakt grup olmak üzere eğer $L^\infty(G)$ uzayı üzerinde sol değişmez bir ortalama varsa G ortalamalı (amenable) grup olarak adlandırılır. Sonlu gruplar, abelyan gruplar ve kompakt gruplar amenable grup örnekleri olarak verilebilir.*

Teorem 2.4.25 [18, Theorem 2.5] G yerel kompakt grup olmak üzere G grubunun amenable olabilmesi için gerek ve yeter koşul $L^1(G)$ Banach cebirinin amenable olmasıdır.

Teorem 2.4.26 [14, VII. Theorem 2.29] A bir amenable Banach cebiri ve E sol (sağ) Banach A -modül olsun. Bu durumda dual modül E^* injektiftir ve denk olarak E flattir.

Şimdi tezde kullanılacak olan aşağıdaki tanımı verelim. Detaylı bilgi [8] kaynağında bulunabilir.

Tanım 2.4.27 $(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, μ bir S kümesi üzerinde pozitif ölçü olsun. $f : S \rightarrow E$ μ -ölçülebilir fonksiyon olmak üzere hemen her $s \in S$ için

$$\int_S \|f(s)\|_E d\mu(s) < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna Bochner integrallenebilirdir denir ve Bochner integrallenebilen tüm fonksiyonların uzayı $L^1(S, E, \mu)$ ile gösterilecektir.

$L^1(S, E, \mu)$ uzayı

$$\|f\|_1 = \int_S \|f(s)\|_E d\mu(s), \quad f \in L^1(S, E, \mu)$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır. Eğer μ , Σ yerel kompakt uzayı üzerinde σ -sonlu, pozitif, regüler Borel ölçüsü ise $\int_\Sigma \|f(s)\|_E d\mu(s) < \infty$ koşulunu sağlayan her bir $f \in C(\Sigma, E)$ fonksiyonu $L^1(\Sigma, E, \mu)$ uzayına aittir.

Lemma 2.4.28 [40, Example 2.19] G yerel kompakt grup ve E bir Banach uzayı olsun. Bu durumda $L^1(G) \widehat{\otimes} E$ uzayı $L^1(G, E)$ uzayına izometrik izomorftur. Bir başka deyişle $L^1(G) \widehat{\otimes} E \cong L^1(G, E)$ sağlanır.

Yukarıda verilen homolojik özelliklerle ilgili örnekler verelim. Detaylı bilgi referans [8] de bulunabilir.

Örnek.

1. $A = \mathbb{C}$ ve E sol Banach A -modül olsun. Bu durumda E projektif ve injektiftir.

2. $A = c_0$ olsun. Bu durumda A sol Banach A -modüldür, esaslı ve sadıktır. Ayrıca A projektif sol Banach A -modüldür. Fakat injektif değildir.
3. G kompakt olmayan yerel kompakt grup olmak üzere $A = L^1(G)$ ve $E = C_0(G)$ sol Banach A -modül olsun. Bu durumda E projektif ve injektif değildir. G nin kompakt grup olması durumunda E projektif sol Banach A -modüldür.
4. $A = \ell^1$ ve $E = c_0$ olsun. Noktasal çarpım işlemine göre E sol Banach A -modüldür, esaslı ve sadıktır, fakat injektif değildir.
5. $A = C[0,1]$ ve $E = L^2[0,1]$ olsun. E noktasal çarpım işlemine göre Banach A -bimodüldür. E nin dual modülü kendisidir. A amenable olduğundan Önerme 2.4.26 kullanılırsa E injektif ve flat sol Banach A -modüldür. Fakat projektif değildir.
6. G amenable yerel kompakt grup olmak üzere $M(G)$ injektif ve flat sol Banach $L^1(G)$ -modüldür, fakat projektif değildir.
7. G amenable olmayan yerel kompakt grup olsun. Bu durumda $L^\infty(G)$ injektif sol Banach $L^1(G)$ -modüldür, fakat flat değildir.

2.5. ZAYIF TOPOLOJİLER VE EŞLENİK OPERATÖRLER

Bu kısımda tezde elde edilecek sonuçlar için kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir. Aşağıda verilecek kavramlar için daha detaylı bilgi [6] ve [38] kaynaklarında bulunabilir.

Tanım 2.5.1 X bir normlu uzay olmak üzere $C \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Her $x, y \in C$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$$

sağlanıyorsa C kümesine konveks küme denir. $C \subseteq X$ herhangi bir küme olmak üzere C kümesinin konveks zarfı C kümesini içeren en küçük konveks kümedir ve $\text{co}(C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.2 X, Y normlu uzaylar, C, D sırasıyla X ve Y uzaylarının alt kümeleri olsun. $f : C \rightarrow D$ dönüşümü her $x, y \in C, \alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

koşulunu sağlarsa *afin dönüşümdür* denir.

Örnek. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + 3, y - 4x + 1)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm *afin dönüşümdür*.

Teorem 2.5.3 X bir normlu uzay olmak üzere C , X uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi, K , X uzayının boştan farklı kompakt bir alt kümesi ve $C \cap K = \emptyset$ olsun. Bu durumda öyle bir $f \in X^*$ sürekli, lineer dönüşümü ve $\gamma \in \mathbb{R}$ vardır ki her $\varepsilon > 0$, $k \in K$, $c \in C$ için

$$\operatorname{Re} f(c) \leq \gamma < \gamma + \varepsilon \leq \operatorname{Re} f(k)$$

sağlanır.

Tanım 2.5.4 X normlu uzay ve X^* , X uzayının dual uzayı olmak üzere X üzerindeki zayıf topoloji

$$\mathcal{P} := \{P_{x^*} : x^* \in X^* : p_{x^*}(x) = |\langle x^*, x \rangle|\}, \quad x \in X$$

yarınormlar ailesi tarafından tanımlanan topolojidir. X üzerindeki zayıf topoloji τ veya $\sigma(X, X^*)$ ile gösterilecektir.

Ayrıca X uzayındaki bir $(x_\alpha)_\alpha$ ağının $x \in X$ elemanına zayıf yakınsaması için gerek ve yeter koşul her $x^* \in X^*$ için

$$\lim_\alpha \langle x_\alpha, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$$

olmasıdır.

Tanım 2.5.5 X^* , X uzayının dual uzayı olmak üzere X^* uzayı üzerindeki zayıf yıldız topoloji

$$\mathcal{P} := \{P_x : x \in X : p_x(x^*) = |\langle x, x^* \rangle|\}, \quad x^* \in X^*$$

yarınormlar ailesi tarafından tanımlanan topolojidir. X^* uzayı üzerindeki zayıf yıldız topoloji τ^* veya $\sigma(X^*, X)$ ile gösterilecektir.

Ayrıca X^* uzayındaki bir $(x_\alpha^*)_ \alpha$ ağının $x^* \in X^*$ elemanına zayıf yıldız yakınsaması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için

$$\lim_\alpha \langle x, x_\alpha^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$$

olmasıdır.

Önerme 2.5.6 X bir Banach uzayı ve C , X uzayının konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda C kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul zayıf kapalı olmasıdır.

Önerme 2.5.7 X ve Y Banach uzayları olmak üzere $T : X \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm ve K , X uzayının kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda $T(K)$ kompakttır.

Tanım 2.5.8 X ve Y Banach uzayları olmak üzere $T : X \rightarrow Y$ sınırlı, lineer bir operatör olsun. Bu durumda $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ eşlenik operatörü

$$\langle T^*f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle, \quad x \in X, f \in Y^*$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.5.9 X ve Y Banach uzayları, $T : X \rightarrow Y$ sınırlı, lineer bir operatör olsun. Bu durumda $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ eşlenik operatörü $z^* - z^*$ sürekli ve lineerdir.

Önerme 2.5.10 X, Y Banach uzayları ve $S : Y^* \rightarrow X^*$ lineer, sınırlı ve $z^* - z^*$ sürekli olsun. Bu durumda S bazı lineer ve sınırlı $T : X \rightarrow Y$ dönüşümlerinin eşlenik operatörüdür.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında genel olarak fonksiyonel analiz ve soyut harmonik analizdeki temel teoremler ve metodlar kullanılmıştır. G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere $L^\Phi(G)$ Orlicz uzaylarının homolojik özelliklerinin incelenmesi ve kompakt çarpanlar uzayının karakterize edilmesi için $L^\Phi(G)$ uzayının sol Banach $L^1(G)$ -modül olması kavramı önemli olmuştur.

Banach uzaylarının tensör çarpımları ve Lebesgue uzaylarının yaklaşım özelliğine sahip olması bazı teoremlerin kanıtlanmasında kullanılmıştır. Ayrıca, grup yapısının karakterize edilmesi ile Banach modülünün homolojik özellikleri arasında ilişkiler kurulmuştur. Son olarak, Orlicz uzaylarının kompakt çarpanlar uzayını belirlemek için afin dönüşümler ve değişmez alt küme kavramları özel önem taşımaktadır. Yine yerel kompakt grup yapısıyla Orlicz uzayları arasındaki kompakt operatörler arasında ilişki kurulmuştur. Normlu uzayların dualleri, zayıf, zayıf * yakınsaklıkları ve özellikleri de kullanılan yöntemler arasındadır.

Kullanılan yöntem ve sonuçlar ile ilgili kitap ve makalelerin künyeleri Kaynaklar bölümünde belirtilmiştir. Ayrıca tez yazımı için LaTeX programı kullanılmıştır.

4. BULGULAR

G yerel kompakt grup ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Lebesgue uzayları için homolojik özellikler Dales ve Polyakov [8] tarafından incelenmiştir. Burada G yerel kompakt grubunun yapısıyla homolojik özellikler arasında ilişki de kurulmuştur.

Bunun yanı sıra Lebesgue uzayları için çarpanlar uzayı pek çok matematikçi için araştırma konusu olmuştur. Özel olarak $p = 1$ olduğunda $L^1(G)$ uzayı için çarpanlar uzayı Wendel [43] tarafından çalışılmıştır. Kompakt çarpanlar uzayının karakterizasyonu ise yine $p = 1$ durumu için Akemann [2] ve Sakai [42] tarafından incelenmiştir. Diğer yandan Brainerd ve Edwards [5] kompakt çarpanlar uzayını $L^1(G)$ uzayından $L^p(G)$ uzayına çalışmıştır. $1 \leq p \leq \infty$ durumunda Lau [21] çalışmasında $L^p(G)$ uzayı için değişmez alt kümeleri ve afin dönüşümleri incelemiştir. Bunlar aracılığıyla $L^p(G)$ uzayında kompakt çarpanları belirlemiş ve grup yapıları arasında ilişki kurmuştur.

Orlicz uzayları Lebesgue uzaylarının bir genelleştirmesi olduğundan benzer sorular bu uzaylar için de araştırma konusudur. Biz de bu tezde Dales ve Polyakov [8] ile Lau [21] çalışmalarını temel alarak Lebesgue uzayı için yapılan çalışmaları Orlicz uzayları için inceledik. Orlicz uzayının doğasından gelen güçlük nedeniyle ispat teknikleri farklılık göstermiştir.

Buna göre bulgular kısmında Orlicz uzayları için projektif, injektif, flatness gibi homolojik özellikler ve kompakt çarpanlar uzayı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar orijinal olup literatüre bu konuda katkı sağlanmıştır.

Bulgular bölümünde elde edilen sonuçlar için Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlayacak şekilde alınmıştır.

4.1. PROJEKTİFLİK, İNJEKTİFLİK VE FLATNESS

Bu kısımda G yerel kompakt grubu üzerinde tanımlı Orlicz uzaylarının projektiflik, injektiflik ve flatness gibi bazı homolojik özellikleri incelenmiş ve bunlara ilişkin önemli

sonuçlar elde edilmiştir.

4.1.1. Orlicz Uzaylarının Projektif Modül Yapısı

Teorem 4.1.1.1 *G yerel kompakt grup ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda $L^\Phi(G)$ uzayının projektif sol Banach $L^1(G)$ -modül olabilmesi için gerek ve yeter koşul G grubunun kompakt olmasıdır.*

İspat. Öncelikle G grubunun kompakt olduğunu kabul edelim. $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayının projektif sol Banach $L^1(G)$ -modül olduğunu göstermek için Lemma 2.4.15 kullanılarak $\pi \in L^1(G)B(L^1(G) \hat{\otimes} L^\Phi(G), L^\Phi(G))$ dönüşümünün retraksiyon olduğu gösterilecektir.

G kompakt grup olduğundan $\mu(G) = 1$ alınabilir. Ayrıca Lemma 2.4.28 den $L^1(G) \hat{\otimes} L^\Phi(G)$ uzayı $L^1(G, L^\Phi(G))$ uzayına izometrik izomorftur.

$f \in L^\Phi(G)$ için $\rho(f) \in L^1(G, L^\Phi(G))$ dönüşümü

$$\rho(f)(s)(t) = f(st)$$

olarak tanımlansın. Böyle tanımlanan ρ dönüşümünün sınırlı ve lineer olması kolayca gözlemlenebilir. O halde $\rho \in B(L^\Phi(G), L^1(G, L^\Phi(G)))$ yazılır.

Şimdi $\rho \in L^1(G)B(L^\Phi(G), L^1(G, L^\Phi(G)))$ olduğunu gösterelim. Her $g \in L^1(G)$ ve $f \in L^\Phi(G)$ için

$$\begin{aligned} \rho(g * f)(s)(t) &= (g * f)(st) \\ &= \int_G g(u) f(u^{-1}st) d\mu(u) \\ &= \int_G g(u) \rho(f)(u^{-1}s)(t) d\mu(u) \\ &= (g * \rho(f))(s)(t) \end{aligned}$$

olup $\rho \in L^1(G)B(L^\Phi(G), L^1(G, L^\Phi(G)))$ sağlanır.

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
((\pi \circ \rho)(f))(t) &= \pi(\rho(f))(t) \\
&= \int_G \rho(f)(s)(s^{-1}t) d\mu(s) \\
&= \int_G f(t) d\mu(s) \\
&= f(t)\mu(G) \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

olup $\pi \circ \rho = \text{id}_{L^\Phi(G)}$ bulunur. Bu ise π dönüşümünün retraksiyon olduğunu gösterir. O halde Lemma 2.4.15 (i) kullanılırsa $L^\Phi(G)$ uzayının projektif sol Banach $L^1(G)$ -modül olduğu elde edilir.

Tersine $L^\Phi(G)$ projektif sol Banach $L^1(G)$ -modül olsun. G grubunun kompakt olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki G kompakt grup olmasın. Ayrıca V ve W , $V^2 \subseteq W$ olacak şekilde e birim elemanının kompakt, simetrik komşulukları olsun. $f \in C_c(G)$ fonksiyonunu $f(G) \in [0, 1]$, $f(e_G) = 1$, $\text{supp}(f) \subseteq V$ ve $\|f\|_\infty = 1$, $\|f\|_1 \leq 1$ koşulları sağlanacak şekilde alalım. Buradan

$$f * f \neq 0 \quad \text{ve} \quad \text{supp}(f * f) \subseteq W$$

elde edilir. $L^1(G)$ yaklaşım özelliğine sahip olduğundan (Lemma 2.4.14) ve $L^\Phi(G)$ esaslı projektif sol Banach $L^1(G)$ -modül olduğundan (Lemma 2.4.3), Lemma 2.4.15 kullanılırsa öyle bir $T \in_{L^1(G)} B(L^\Phi(G), L^1(G))$ operatörü $T(f * f) \neq 0$ olacak biçimde mevcuttur.

Şimdi $\eta = \frac{\|f * T(f)\|_1}{2} > 0$ olmak üzere $k \in \mathbb{N}$ sabitlensin ve $g \in C_c(G)$ fonksiyonu

$$\|T(f) - g\|_1 < \frac{1}{k} \quad \text{ve} \quad \|f * (Tf - g)\|_1 < \eta$$

olacak biçimde seçilsin. Buradan $\|f * g\|_1 > \eta$ elde edilir.

$\text{supp } g = K$ olsun. G kompakt olmadığından öyle $s_1, s_2, \dots, s_k \in G$ elemanları her $j = 1, 2, \dots, k$ için $s_j(V \cup K)^2$ ikili ayrık olacak şekilde mevcuttur.

Gerçekten, $s_1 = e$ alalım ve $s_1(V \cup K)^2(V \cup K)^{-2}$ kompakt kümesini düşünelim. G kompakt olmadığından en az bir $s_2 \in G \setminus s_1(V \cup K)^2(V \cup K)^{-2}$ elemanı vardır. Tümevarım yöntemiyle devam edilirse, $s_j \in G \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} s_i(V \cup K)^2(V \cup K)^{-2}$ elde edilir.

Şimdi $f_j = s_j * f$ ve $\lambda = \sum_{j=1}^k f_j * f$ olsun. $s_1V, s_2V, \dots, s_kV$ ikili ayrık olduğundan

$$\left\| \sum_{j=1}^k f_j \right\|_{\infty} = 1 \quad \text{ve} \quad \left\| \sum_{j=1}^k f_j * g \right\|_1 = k \|f * g\|_1$$

sağlanır. Gerçekten

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^k f_j * g \right\|_1 &= \int_G \left| \sum_{j=1}^k f_j * g(x) \right| d\mu(x) \\ &= \int_G \left| \sum_{j=1}^k \int_G f_j(y) g(y^{-1}x) d\mu(y) \right| d\mu(x) \\ &= \int_G \left| \sum_{j=1}^k \int_G f(s_j^{-1}y) g(y^{-1}x) d\mu(y) \right| d\mu(x) \\ &= \int_G \left| \sum_{j=1}^k \int_G f(y) g(y^{-1}s_j^{-1}x) d\mu(y) \right| d\mu(x) \\ &= \int_G \left| \sum_{j=1}^k \int_G f(y) g(y^{-1}x) d\mu(y) \right| d\mu(x) \\ &= \int_G \left| \sum_{j=1}^k f * g(x) \right| d\mu(x) \\ &= k \|f * g\|_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left\| \sum_{j=1}^k f_j * T(f) \right\|_1 \geq \left\| \sum_{j=1}^k f_j * g \right\|_1 - 1$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
\|T(\lambda)\|_1 &= \left\| \sum_{j=1}^k f_j * T(f) \right\|_1 \\
&\geq \left\| \sum_{j=1}^k f_j * g \right\|_1 - 1 \\
&= k\|f * g\|_1 - 1 \\
&= k\eta - 1
\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^k f_j * f \right\|_{\Phi} &= \sup \left\{ \int_G \left| \sum_{j=1}^k f_j * f(x) h(x) \right| d\mu(x) : \int_G \Psi(|h(x)|) d\mu(x) \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \int_G \sum_{j=1}^k |f_j * f(x) h(x)| d\mu(x) : \int_G \Psi(|h(x)|) d\mu(x) \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \sum_{j=1}^k \int_G |f * f(x) h(s_j x)| d\mu(x) : \int_G \Psi(|h(x)|) d\mu(x) \leq 1 \right\} \\
&= k\|f * f\|_{\Phi}
\end{aligned}$$

olup

$$\left\| \sum_{j=1}^k f_j * f \right\|_{\Phi} \leq k\|f * f\|_{\Phi}$$

elde edilir. $f \in C_c(G)$ olduğundan, $f * f \in L^{\Phi}(G)$ olur ve $\|\lambda\|_{\Phi} \leq k\|f * f\|_{\Phi}$ bulunur.

O halde

$$k\eta - 1 \leq \|T(\lambda)\|_1 \leq \|T\| \|\lambda\|_{\Phi} \leq k\|T\| \|f * f\|_{\Phi}$$

olup sonuç olarak

$$k\eta \leq k\|T\| \|f * f\|_{\Phi} + 1$$

eşitsizliği her $k \in \mathbb{N}$ için gerçekleşir, bu ise istenen çelişkiyi verir. O halde G kompakttır. $\square$

Uyarı: Gereklik kısmı için ayrıca Banach modüllerinin projektif olmasıyla ilgili Önerme

2.4.16 kullanılabilir. Bunun için aşağıdaki gözlemi verelim.

Gözlem: G yerel kompakt grup, (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyonu çifti ve $\Psi \in \Delta_2$ olsun. Eğer $L^\Phi(G)$ projektif sol Banach $L^1(G)$ -modül ve G ayrılabilir (2. sayılabilir) ise G kompakttır.

İspat. [35, Theorem 3.5.1] gereğince $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul G grubunun ayrılabilir olmasıdır. O halde Önerme 2.4.16 kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. G kompakttır. $\square$

4.1.2. Orlicz Uzaylarının İnjektif ve Flat Modül Yapısı

Teorem 2.4.25 ve Teorem 2.4.26 kullanılarak $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayının hangi koşullar altında injektif ve flat modül olduğunu gösteren aşağıdaki sonuç verilebilir.

Önerme 4.1.2.1 G yerel kompakt grup ve (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyonu çifti olsun. Eğer G amenable grup ise aşağıdakiler gerçekleşir:

1. $L^\Phi(G)$ flat sol Banach $L^1(G)$ -modüldür;
2. $L^\Phi(G)$ nin dual modülü $L^\Psi(G)$ injektif sağ Banach $L^1(G)$ -modüldür;
3. eğer Φ ve Ψ Young fonksiyonlarının her ikisi de Δ_2 koşulunu sağlarsa $L^\Phi(G)$ dual modül olduğundan hem injektif hem flat sol Banach $L^1(G)$ -modüldür.

İspat. Lemma 2.4.3 gereğince $L^\Phi(G)$ uzayının esaslı sol Banach $L^1(G)$ -modül olduğu biliniyor. Ayrıca Teorem 2.4.25 gereğince G amenable grup olduğunda $L^1(G)$ Banach cebiri de amenable'dir. Bu durumda Teorem 2.4.26 kullanılırsa $L^\Phi(G)$ flat sol Banach $L^1(G)$ -modüldür. O halde (1) sağlanır.

Benzer şekilde $L^1(G)$ amenable Banach cebiri ve $(L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi)^* = (L^\Psi(G), \|\cdot\|_\Psi)$ olduğundan yine Teorem 2.4.26 gereğince dual modül $L^\Psi(G)$ injektif sağ Banach $L^1(G)$ -modüldür. (2) sağlanır.

Son olarak eğer Φ ve Ψ Young fonksiyonlarının her ikisi de Δ_2 koşulunu sağlarsa $L^\Phi(G)$ dual modül olacağından hem injektif hem flat sol Banach $L^1(G)$ -modüldür. Bu durumda (3) gerçekleşir. $\square$

4.2. $L^\Phi(G)$ ORLICZ UZAYI İÇİN KOMPAKT ÇARPANLAR UZAYI

Bu kısımda öncelikle $L^\Phi(G)$ uzayının kapalı, konveks ve sol ötelemeler altında değişmez olan alt kümeleri incelendi. Daha sonra alt kümeleri üzerinde sürekli afin dönüşümler karakterize edildi ve bulunan sonuçlar kullanılarak Orlicz uzayları için kompakt çarpanlar uzayı karakterize edildi.

Bu kısımda G yerel kompakt grup olmak üzere temel olarak $M(G)$ ölçü uzayının aşağıdaki alt kümeleri ile ilgileneceğiz.

1. $P(G) = \{\mu \in M(G) : \|\mu\| = 1 \text{ ve } \mu \geq 0\},$
2. $P_1(G) = \{h \in L^1(G) : \|h\|_1 = 1 \text{ ve } h \geq 0\},$
3. $E(G) = \{\delta_a : a \in G\}.$

$P_1(G) = P(G) \cap L^1(G)$ olarak da düşünülebilir.

G yerel kompakt grup olsun. ν ile $M(G)$ üzerinde $\mathcal{Q} = \{\rho_f : f \in C_b(G)\}$ yarınormlar ailesi tarafından belirlenen ve her $\mu \in M(G)$ için

$$|\rho_f(\mu)| = |\langle \mu, f \rangle| = \left| \int_G f d\mu \right|$$

koşulunu sağlayan ayrık yerel konveks topoloji gösterilecektir. $M(G)$ uzayındaki herhangi $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ağıının bir $\mu \in M(G)$ elamanına ν topolojisine göre yakınsaması

$$\int_G f d\mu_\alpha \rightarrow \int_G f d\mu$$

ile verilir. Ayrıca ν topolojisi $M(G)$ üzerindeki zayıf yıldız topolojiden kuvvetli, zayıf topolojiden ise zayıftır.

Öncelikle bu kısımda elde edilen sonuçlar için kullanacağımız aşağıdaki tanım ve lemmayı verelim.

Tanım 4.2.1 G yerel kompakt bir grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere her $\mu \in M(G)$

ve $f \in L^\Phi(G)$ için girişim işlemi

$$(\mu * f)(x) = \int_G f(y^{-1}x) d\mu(y), \quad x \in G$$

ile tanımlanır.

Lemma 4.2.2 [21, Lemma 3.1] G yerel kompakt grup olmak üzere

$$P(G) = \overline{P_1(G)}^v = \overline{\text{co}E(G)}^v$$

gerçeklenir.

Şimdi aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.2.3 G yerel kompakt bir grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

1. Her bir $f \in L^\Phi(G)$ için $\mu \mapsto \mu * f$ dönüşümü $(M(G), z^*)$ uzayından $(L^\Phi(G), z)$ uzayına süreklidir;
2. her bir $f \in L^1(G)$ için $h \mapsto f * h$ dönüşümü $(L^\Phi(G), z)$ uzayından $(L^\Phi(G), z)$ uzayına süreklidir.

İspat.

1. $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $M(G)$ uzayında bir μ elemanına zayıf yıldız yakınsayan bir ağ, (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyonu çifti ve $f \in L^\Phi(G)$ olsun. $(L^\Phi(G))^*$ dual uzayında bir T fonksiyoneli göz önüne alalım. Bu durumda dualite özelliğinden öyle bir $g \in L^\Psi(G)$ fonksiyonu her $x \in G$ için

$$T(f) = \int_G f(x)g(x)d\mu(x) = \langle f, g \rangle$$

koşulu sağlanacak biçimde vardır. O halde

$$\begin{aligned}
T(\mu_\alpha * f) &= \langle \mu_\alpha * f, g \rangle \\
&= \int_G (\mu_\alpha * f)(x) g(x) d\mu(x) \\
&= \int_G \int_G f(y^{-1}x) d\mu_\alpha(y) g(x) d\mu(x) \\
&= \int_G \int_G \tilde{f}(x^{-1}y) g(x) d\mu(x) d\mu_\alpha(y) \\
&= \int_G (g * \tilde{f})(y) d\mu_\alpha(y) \\
&= \langle g * \tilde{f}, \mu_\alpha \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. $g * \tilde{f} \in C_0(G)$ olduğundan

$$\langle g * \tilde{f}, \mu_\alpha \rangle \rightarrow \langle g * \tilde{f}, \mu \rangle = \langle \mu * f, g \rangle$$

olur. Bu ise $\{\mu_\alpha * f\}_{\alpha \in I}$ ağıının $L^\Phi(G)$ uzayında $\mu * f$ elemanına zayıf yakınsak olduğunu verir. O halde istenen sağlanır.

2. $\{h_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $L^\Phi(G)$ uzayında bir h fonksiyonuna zayıf yakınsak ağ olsun. Buradan her $g \in (L^\Phi(G))^*$ için $\lim_{\alpha \in I} \langle h_\alpha, g \rangle = \langle h, g \rangle$ yazılır. O halde

$$\begin{aligned}
\langle h_\alpha * f, g \rangle &= \int_G (h_\alpha * f)(x) g(x) d\mu(x) \\
&= \int_G \int_G h_\alpha(y) f(y^{-1}x) g(x) d\mu(y) d\mu(x) \\
&= \int_G \int_G h_\alpha(y) \tilde{f}(x^{-1}y) g(x) d\mu(y) d\mu(x) \\
&= \int_G h_\alpha(y) (g * \tilde{f})(y) d\mu(y) \\
&= \langle h_\alpha, g * \tilde{f} \rangle
\end{aligned}$$

olup $\{h_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ağıının h fonksiyonuna zayıf yakınsak olduğu kullanılırsa

$$\langle h_\alpha * f, g \rangle = \langle h_\alpha, g * \tilde{f} \rangle \rightarrow \langle h, g * \tilde{f} \rangle = \langle h * f, g \rangle$$

olup istenen elde edilir. □

4.2.1. $L^\Phi(G)$ nin Ötelemeler Altında Değişmez Alt Kümeleri

Bu kısımda $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayının kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez kalan alt kümelerinin karakterizasyonu ile ilgileneceğiz. İlk olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 4.2.1.1 G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere $C \subseteq L^\Phi(G)$ alt kümesi verilsin. Her $f \in C$ ve her $x \in G$ için $L_x f \in C$ oluyorsa C kümesine sol ötelemeler altında değişmezdir (invarianttır) denir.

Teorem 4.2.1.2 G yerel kompakt grup, Φ Young fonksiyonu ve $C, L^\Phi(G)$ uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda C kümesinin sol ötelemeler altında değişmez olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $h \in P_1(G)$ için $h * C \subseteq C$ olmasıdır.

İspat. İlk olarak kabul edelim ki $C, (L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi)$ uzayının kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi ve $h \in P_1(G)$ olsun. Lemma 4.2.2 gereğince $\{h_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \text{co}E(G)$ ağı,

$$h_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \delta_{g_i^\alpha}$$

olmak üzere v topolojisine göre $h_\alpha \rightarrow h$ olacak şekilde mevcuttur. v topolojisi zayıf yıldız topolojiden kuvvetli olduğundan $\{h_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ağı $h \in P_1(G)$ elemanına aynı zamanda zayıf yıldız yakınsaktır. $f \in C$ keyfi olmak üzere Lemma 4.2.3 kullanılırsa, $\{h_\alpha * f\}_{\alpha \in I}$ dönüşümü $L^\Phi(G)$ uzayında $h * f$ elemanına zayıf yakınsar. O halde

$$h_\alpha * f = \left(\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \delta_{g_i^\alpha} \right) * f = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha L_{(g_i^\alpha)^{-1}} f$$

eşitliğinden ve C kümesinin konveks, sol ötelemeler altında değişmez olmasından $\{h_\alpha * f\}_{\alpha \in I} \subseteq C$ olur.

$f\}_\alpha \subseteq C$ elde edilir. Ayrıca C kapalı küme olduğundan $h * f \in C$ bulunur. Bu ise $h * C \subseteq C$ olduğunu gösterir.

Tersine her $h \in P_1(G)$, $x \in G$ ve $f \in C$ için $h * C \subseteq C$ olsun. $\delta_{x^{-1}} \in P(G)$ olduğundan Lemma 4.2.2 den $\{h_\alpha\} \subseteq P_1(G)$ ağı $\{h_\alpha\}_\alpha$, v -topolojisine göre $\delta_{x^{-1}}$ elemanına yakınsayacak biçimde mevcuttur. Her α için $h_\alpha * f \in C$ ve C kümesi kapalı olduğundan Lemma 4.2.3 den $\delta_{x^{-1}} * f = L_x f \in C$ elde edilir. Bu ise C kümesinin ötelemeler altında değişmez olduğunu verir. $\square$

Buradan aşağıdaki sonucu gözlemleyebiliriz.

Sonuç 4.2.1.3 G yerel kompakt grup, Φ Young fonksiyonu olmak üzere I , $L^\Phi(G)$ uzayının kapalı bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda $L^1(G) * I \subseteq I$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul I alt vektör uzayının sol ötelemeler altında değişmez olmasıdır.

Gözlem: $\overline{\text{co}\{L_x f : x \in G\}}$ kümesinin $L^\Phi(G)$ uzayının kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez olan bir alt kümesidir.

O halde bu küme için Teorem 4.2.1.2 uygulanırsa aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.1.4 G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere, her $f \in L^\Phi(G)$ için

$$\overline{\text{co}\{L_x f : x \in G\}}^{\|\cdot\|_\Phi} = \overline{\{\varphi * f : \varphi \in P_1(G)\}}^{\|\cdot\|_\Phi}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $K_1 = \overline{\text{co}\{L_x f : x \in G\}}$ ve $K_2 = \overline{\{\varphi * f : \varphi \in P_1(G)\}}$ olsun. $f \in K_1$ alalım. Buradan $\{f_\alpha\} \subseteq \overline{\text{co}\{L_x f : x \in G\}}$ ağı $f_\alpha \rightarrow f$ olacak biçimde mevcuttur. Bu ise $L_x f \in K_1$ olduğunu verir. Yani K_1 kümesi ötelemeler altında değişmezdir. K_1 ötelemeler altında değişmez, kapalı ve konveks küme olduğundan her $\varphi \in P_1(G)$ için Teorem 4.2.1.2 gereğince $\varphi * K_1 \subseteq K_1$ bulunur. Böylece K_1 ve K_2 kümelerinin tanımı kullanılırsa $K_2 \subseteq K_1$ elde edilir.

Tersine $\varphi \in P_1(G)$ için Lemma 4.2.2 kullanılırsa $\{\varphi_\alpha\} \subseteq P_1(G)$ ağı v -topolojisine göre $\varphi_\alpha \rightarrow \delta_e$ olacak biçimde vardır. Lemma 4.2.3 kullanılırsa $\varphi_\alpha * f$ ağı f fonksiyonuna zayıf yakınsar. K_2 kümesi kapalı olduğundan $f \in K_2$ olur. Her $\varphi \in P_1(G)$ için $\varphi * K_2 \subseteq K_2$ olduğundan

Teorem 4.2.1.2 gereğince her $x \in G$ için $L_x K_2 \subseteq K_2$ olur. Yani $f \in K_2$ olmak üzere $L_x f \in K_2$ elde edilir. Bu ise $K_1 \subseteq K_2$ olmasıdır. O halde $K_1 = K_2$ olup istenen elde edilir. $\square$

Teorem 4.2.1.5 G yerel kompakt grup, Φ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda G grubunun kompakt olmaması için gerek ve yeter koşul $L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı her kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez alt kümesinin orijini içermesidir.

İspat. Kabul edelim ki G kompakt olmasın ve $C, L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı, kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi olsun. G kompakt olmadığından G nin her kompakt H alt kümesi için $x_H \in G \setminus H$ elemanı mevcuttur. Buradan $\{\delta_{x_H}\}_H$ ağı $M(G)$ uzayında sıfıra zayıf yıldız yakınsar. Lemma 4.2.3 kullanılırsa her $f \in C$ için $\{\delta_{x_H} * f\}_H$ ağının $L^\Phi(G)$ uzayında sıfıra zayıf yakınsadığı elde edilir.

C kümesi kapalı ve konveks olduğundan Önerme 2.5.6 gereğince zayıf topolojiye göre de kapalıdır. $\{\delta_{x_H} * f\}_H \subseteq C$ olduğundan zayıf limiti olan sıfır da C kümesine aittir. Yani C kümesi orijini içerir.

Tersi için kabul edelim ki G grubu kompakt olsun. $C = \{1_G\}$ kümesi alınırsa açıktır ki $C, L^\Phi(G)$ uzayının kapalı, konveks ve sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesidir. Ancak $0 \notin \{1_G\}$ olduğundan orijini içermez. Bu ise hipotezle çelişir. O halde G kümesi kompakt değildir. $\square$

Tanım 4.2.1.6 G yerel kompakt bir grup olsun. $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sınırlı ve sürekli fonksiyonu için $O(f) := \{L_x f : x \in G\}$ kümesinin kapanışı $(C(G), \|\cdot\|_\infty)$ uzayında kompakt ise f fonksiyonuna hemen hemen periyodiktir denir. G üzerinde hemen hemen periyodik tüm fonksiyonların oluşturduğu küme $AP(G)$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.2.1.7 G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda G grubunun kompakt olmaması için gerek ve yeter koşul $L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı her kompakt, konveks, sol ötelemeler altında değişmez alt kümesinin orijin olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki G kompakt olmayan yerel kompakt grup olmak üzere $C, L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı, kompakt, konveks, sol ötelemeler altında değişmez alt kümesi ve

$f \in C$ olsun. Ψ, Φ Young fonksiyonunun tamlayan fonksiyonu olmak üzere, $h \in L^\Psi(G)$ olsun ve her $s \in G$ için G üzerinde

$$k(s) = \langle L_s f, h \rangle$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Buradan $k = f * \tilde{h} \in C_0(G)$ olduğu görülür. Ayrıca k , G üzerinde sınırlı, sürekli ve hemen hemen periyodik bir fonksiyondur. Gerçekten k fonksiyonunun hemen hemen periyodik bir fonksiyon olduğunu yani $f * \tilde{h} \in AP(G)$ olduğunu gösterelim. Her $x \in G$ için

$$\begin{aligned} L_x(f * \tilde{h})(y) &= (f * \tilde{h})(xy) \\ &= \int_G f(z) \tilde{h}(z^{-1}xy) d\mu(z) \\ &= \int_G f(xz) \tilde{h}(z^{-1}y) d\mu(z) \\ &= \int_G L_x f(z) \tilde{h}(z^{-1}y) d\mu(z) \\ &= (L_x f * \tilde{h})(y), \quad y \in G \end{aligned}$$

sağlanır. $\{L_x f : x \in G\} \subseteq C$ ve C kümesi kompakt olduğundan $\{x_\alpha\}_\alpha \subseteq G$ ağı $\{L_{x_\alpha} f\}_\alpha$ ağı $L^\Phi(G)$ normlu uzayında yakınsak olacak şekilde mevcuttur. $h \in L^\Psi(G)$ olduğundan

$$\|L_{x_\alpha} f * \tilde{h} - L_{x_\beta} f * \tilde{h}\|_\infty \leq \|L_{x_\alpha} f - L_{x_\beta} f\|_\Phi \|h\|_\Psi \rightarrow 0$$

elde edilir. O halde $\{L_{x_\alpha} f * \tilde{h}\}_\alpha$ ağı $(C(G), \|\cdot\|_\infty)$ uzayında yakınsaktır. G kompakt olmadığından $AP(G) \cap C_0(G) = \{0\}$ olur. Bu ise $k \equiv 0$ olduğunu gösterir. O halde her $h \in L^\Psi(G)$ fonksiyonu için $f * \tilde{h} = 0$ bulunur.

Şimdi $f = 0$ olduğunu gösterelim. U_α , e birim elemanının kompakt komşuluklarının azalan bir kümesi ve $h_\alpha = \frac{1_{U_\alpha}}{|U_\alpha|}$ olsun. O halde $\|f * \tilde{h}_\alpha - f\|_\Phi \rightarrow 0$ olur. Her α için $h_\alpha \in L^\Psi(G)$ olduğundan $f = 0$ elde edilir. Bu ise C kümesinin sadece orijini içerdiğini gösterir.

Tersi için kabul edelim ki G grubu kompakt olsun. $C = \{1_G\}$ kümesi alınırsa açıktır ki C , $L^\Phi(G)$ uzayının kompakt, konveks ve sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesidir.

Ancak $0 \notin \{1_G\}$ olduğundan orijini içermez. Bu ise hipotezle çelişir. O halde G kümesi kompakt değildir. $\square$

4.2.2. Afin Dönüşümler

Bu kısımda $L^\Phi(G)$ Orlicz uzaylarının alt kümelerinde sürekli ve afin dönüşümler karakterize edilecektir.

Teorem 4.2.2.1 G yerel kompakt grup, Φ, Ψ Young fonksiyonları ve B, C sırasıyla $L^\Psi(G)$ ve $L^\Phi(G)$ uzaylarının kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez olan alt kümeleri olsun. $T : B \rightarrow C$ sürekli ve afin bir dönüşüm ise aşağıdakiler denktir:

1. T dönüşümü tüm sol ötelemelerle değişmelidir. Bir başka deyişle her $x \in G$ ve her $f \in B$ için $T(L_x f) = L_x T f$ sağlanır.
2. Her $h \in P_1(G)$ ve her $f \in B$ için $T(h * f) = h * T(f)$ gerçekleşir.

İspat. Öncelikle kabul edelim ki $f \in B$ olmak üzere her $h \in P_1(G)$ ve her $x \in G$ için $T(L_x f) = L_x T f$ olsun. Lemma 4.2.2 dan öyle bir $\{h_\alpha\}_\alpha \subseteq \text{co} E(G)$ ağı

$$h_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \delta_{s_i^\alpha}$$

için v -topolojisine göre $h_\alpha \rightarrow h$ koşulu sağlanacak şekilde mevcuttur. Lemma 4.2.3 kullanılırsa her $f \in B$ için $\{h_\alpha * f\}_\alpha$ ağının $h * f$ elemanına zayıf yakınsak olduğu elde edilir. B ve C kümeleri kapalı ve konveks olduğundan Önerme 2.5.6 gereğince aynı zamanda zayıf kapalıdır. Ayrıca T dönüşümü afin ve sürekli olduğundan B ve C kümelerinin zayıf topolojilerine göre zayıf süreklidir. O halde

$$\begin{aligned} T(h * f) &= \lim_{\alpha} T(h_\alpha * f) \\ &= \lim_{\alpha} T\left(\left(\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \delta_{s_i^\alpha}\right) * f\right) \\ &= \lim_{\alpha} T\left(\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \left(\delta_{s_i^\alpha} * f\right)\right) \\ &= \lim_{\alpha} T\left(\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha (L_{(s_i^\alpha)^{-1}} f)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\alpha} \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \lambda_i^{\alpha} T(L_{(s_i^{\alpha})^{-1}} f) \\
&= \lim_{\alpha} \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \lambda_i^{\alpha} L_{(s_i^{\alpha})^{-1}} T(f) \\
&= \lim_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \lambda_i^{\alpha} \delta_{s_i^{\alpha}} \right) * T(f) \\
&= \lim_{\alpha} h_{\alpha} * T(f) \\
&= h * T(f)
\end{aligned}$$

olup $T(h * f) = h * T(f)$ olduğu elde edilir.

Tersine her $h \in P_1(G)$, her $f \in B$ için $T(h * f) = h * T(f)$ ve her $x \in G$ için $\{h_{\alpha}\}_{\alpha}$, $P_1(G)$ de $\delta_{x^{-1}}$ elemanına ν -topolojisine göre yakınsak bir ağ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
T(L_x f) &= T(\delta_{x^{-1}} * f) \\
&= \lim_{\alpha} T(h_{\alpha} * f) \\
&= \lim_{\alpha} h_{\alpha} * T(f) \\
&= \delta_{x^{-1}} * T(f) \\
&= L_x T(f)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (1) sağlanır. □

Buradan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.2.2.2 G yerel kompakt grup, Φ ve Ψ Young fonksiyonları olmak üzere $T : L^{\Psi}(G) \rightarrow L^{\Phi}(G)$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

1. Her $x \in G$ ve her $f \in L^{\Psi}(G)$ için $T(L_x f) = L_x T f$ sağlanır.
2. Her $h \in L^1(G)$ ve her $f \in L^{\Psi}(G)$ için $T(h * f) = h * T(f)$ gerçekleşir.

Teorem 4.2.2.3 G kompakt olmayan yerel kompakt bir grup, Φ Young fonksiyonu olmak üzere C , $L^1(G)$ uzayının boştan farklı, kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi ve B , $L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı, zayıf kompakt, kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi olsun. Eğer $T : B \rightarrow C$ dönüşümü sürekli, afin ve her $x \in G$, her $f \in B$ için $T(L_x f) = L_x T f$ koşulunu sağlıyor ise $T(f) = 0$ olur.

İspat. B ve C kümeleri kapalı ve konveks olduğundan Önerme 2.5.6 gereğince zayıf kapalıdır. T dönüşümü afin ve sürekli olduğundan B ve C nin zayıf topolojilerine göre zayıf süreklidir.

B zayıf kompakt, konveks ve T zayıf sürekli olduğundan $T(B)$, $L^1(G)$ uzayının zayıf kompakt, konveks, sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesidir. O halde [21, Teorem 4.8] kullanılırsa $T(B) = \{0\}$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.2.2.4 G yerel kompakt grup, Φ Young fonksiyonu olmak üzere C , $L^\Phi(G)$ uzayının zayıf kompakt, kapalı, sınırlı ve sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi ve $T : P_1(G) \rightarrow C$ sürekli, afin bir dönüşüm olsun. Aşağıdakiler denktir:

1. T tüm sol öteleme dönüşümleri ile değişmelidir.
2. Öyle bir $f \in C$ fonksiyonu her $h \in P_1(G)$ için $T(h) = h * f$ koşulunu sağlayacak biçimde mevcuttur.

İspat. Kabul edelim ki her $h \in P_1(G)$ ve $x \in G$ için $T(L_x h) = L_x T h$ olsun. Teorem 4.2.2.1 kullanılırsa her $h, k \in P_1(G)$ için $T(k * h) = k * T(h)$ sağlanır. O halde $\{U_\alpha\}_\alpha \subseteq P_1(G)$, $L^1(G)$ uzayı için sınırlı yaklaşık birim olmak üzere $T(U_\alpha) \in C$ sınırlı ve C zayıf kompakt olduğundan öyle bir $f \in C$ fonksiyonu $\{T(U_\alpha)\}_\alpha$ ağı f fonksiyonuna zayıf yakınsak olacak biçimde mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned}
 T(h) &= \lim_{\alpha} T(h * U_\alpha) \\
 &= \lim_{\alpha} h * T(U_\alpha) \\
 &= h * f
 \end{aligned}$$

bulunur. O halde (2) gerçeklenir.

Tersine kabul edelim ki öyle bir $f \in C$ fonksiyonu her $h \in P_1(G)$ için $T(h) = h * f$ olacak biçimde mevcut olsun. Bu durumda her $x \in G$ için

$$\begin{aligned}
 L_x T(h) &= L_x(h * f) \\
 &= \delta_{x^{-1}} * (h * f) \\
 &= (\delta_{x^{-1}} * h) * f \\
 &= L_x h * f \\
 &= T(L_x h)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise T dönüşümünün sol ötelemeler ile değişmeli olduğunu gösterir. $\square$

4.2.3. Kompakt Çarpanlar Uzayı

Banach uzayları için çarpanlar uzayı önemli bir kavram olup literatürde pek çok matematikçi tarafinfan ele alınmıştır. $L^1(G)$ uzayı için çarpanlar uzayının temel karakterizasyonu Wendel [43] tarafından verilmiştir. Kompakt çarpanlar uzayı ise ilk kez Sakai [42] tarafından çalışılmıştır. Sakai bu çalışmasında G grubu kompakt değil ise $L^1(G)$ uzayının tek zayıf kompakt çarpanının sıfır olduğunu göstermiştir. Tersine [2] çalışmasında Akemann G kompakt grup ise $L^1(G)$ uzayı için her çarpanın kompakt olduğunu ispatlamıştır.

Diğer yandan $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $L^1(G)$ uzayından $L^p(G)$ uzayına çarpanlar uzayı Brainerd ve Edwards tarafından incelenmiştir. [21] çalışmasında ise Lau $L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, uzayının değişmez alt kümelerini çalışmıştır.

Bu kısımda önceki bölümlerde yapılanların bir uygulaması olarak $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayları için kompakt çarpanlar uzayı karakterize edilecektir. Elde edilen sonuçları vermeden aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 4.2.3.1 G yerel kompakt grup, Φ ve Ψ Young fonksiyonları olsun. $T, L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden sürekli, lineer ve öteleme operatörleri ile değişmeli bir dönüşüm (her $x \in G$ ve $f \in L^\Phi(G)$ için $L_x(Tf) = T(L_x f)$) ise T operatörüne $L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına bir çarpan (multiplier) denir. $L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına

giden tüm çarpanların oluşturduğu küme $M(L^\Psi(G), L^\Phi(G))$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.2.3.2 G yerel kompakt grup, (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyonu çifti ve $\Phi, \Psi \in \Delta_2$ olmak üzere $T : L^1(G) \rightarrow L^\Phi(G)$ sınırlı, lineer bir operatör olsun. Bu durumda $T \in M(L^1(G), L^\Phi(G))$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul öyle bir $f \in L^\Phi(G)$ fonksiyonunun her $h \in L^1(G)$ için $T(h) = h * f$ koşulunu gerçekleyecek şekilde mevcut olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $T \in M(L^1(G), L^\Phi(G))$ ve her α için $\{u_\alpha\}_\alpha$, $L^1(G)$ uzayı için $\|u_\alpha\|_1 = 1$ koşulunu sağlayan yaklaşık birim olsun. Buradan $\lim_\alpha \|h * u_\alpha - h\|_1 = 0$ elde edilir. T operatörü lineer ve sınırlı olduğundan $\{T(u_\alpha * h)\}_\alpha$ ağı her $h \in L^1(G)$ için $T(h)$ elemanına norm topolojiye göre yakınsar. Ayrıca $L^\Phi(G)$ yansılmalı uzay olduğundan ve $\{T(u_\alpha)\}_\alpha$, $L^\Phi(G)$ uzayında yakınsak olduğundan öyle bir $f \in L^\Phi(G)$ fonksiyonu $\{T(u_\alpha)\}_\alpha$ f fonksiyonuna zayıf yakınsak olacak biçimde mevcuttur. O halde Sonuç 4.2.2.2 ve Lemma 4.2.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned} T(h) &= \lim_\alpha T(h * u_\alpha) \\ &= \lim_\alpha h * T(u_\alpha) \\ &= h * f \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine kabul edelim ki öyle bir $f \in L^\Phi(G)$ fonksiyonu her $h \in L^1(G)$ için $T(h) = h * f$ olacak biçimde mevcut olsun. O halde

$$\begin{aligned} L_x T(h) &= L_x(h * f) \\ &= \delta_{x^{-1}} * (h * f) \\ &= (\delta_{x^{-1}} * h) * f \\ &= L_x h * f \\ &= T(L_x h) \end{aligned}$$

olup $T \in M(L^1(G), L^\Phi(G))$ elde edilir. □

Teorem 4.2.3.3 G kompakt bir grup olmak üzere $L^1(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden her T çarpanı kompakttır.

İspat. $T \in M(L^1(G), L^\Phi(G))$ olsun. Teorem 4.2.3.2 gereğince öyle bir $f \in L^\Phi(G)$ fonksiyonu her $h \in L^1(G)$ için $T(h) = h * f$ olacak şekilde mevcuttur. T operatörünün kompakt olduğunu, yani T operatörünün $L^1(G)$ uzayının birim yuvarını $L^\Phi(G)$ uzayının kapanışı kompakt alt kümesine götürdüğünü gösterelim.

G kümesi kompakt ve $L_x f$ dönüşümü sürekli olduğundan $\overline{\text{co}\{L_x f : x \in G\}}^{\|\cdot\|_\Phi} \subseteq L^\Phi(G)$ kümesi $L^\Phi(G)$ uzayının kompakt alt kümesidir. O halde Sonuç 4.2.1.4 kullanılırsa $\{\varphi * f : \varphi \in P_1(G)\}$ kümesinin kapanışının $L^\Phi(G)$ uzayında kompakt olduğu elde edilir.

Şimdi $h \in L^1(G)$ ve $\|h\|_1 \leq 1$ olsun. Bu durumda $h = (h_1 - h_2) + i(h_3 - h_4)$, $h_j > 0$ ve $\|h_j\|_1 < 1$, $j = 1, 2, 3, 4$ yazılabilir. Buradan $T(h_j) = h_j * f \in C = \{\lambda \varphi * f : \lambda \in [0, 1]\}$ elde edilir. C kümesinin kapanışı kompakt olduğundan $T(h) = h * f \in (C - C) + i(C - C)$ bulunur. Bu ise T operatörünün kompakt olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 4.2.3.4 G kompakt olmayan yerel kompakt bir grup ve Φ, Ψ Young fonksiyonları olsun. Bu durumda $L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden tek kompakt çarpan sıfırdır.

İspat. G kompakt olmayan bir yerel kompakt grup ve $T \in M(L^\Psi(G), L^\Phi(G))$ operatörü kompakt olsun. O halde tanımdan her $f \in L^\Psi(G)$ ve her $x \in G$ için $T(L_x f) = L_x T f$ yazılır. $\overline{\{T(f) : \|f\|_\Psi \leq 1\}}^{\|\cdot\|_\Phi}$ kümesi $L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı, kompakt, konveks, sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi olduğundan Teorem 4.2.1.7 kullanılırsa $T = 0$ olduğu elde edilir. $\square$

Teorem 4.2.2.3 in bir sonucu olarak aşağıdaki ifade verilebilir.

Teorem 4.2.3.5 G kompakt olmayan bir yerel kompakt grup ve $A, L^\Phi(G)$ uzayının zayıf kompakt, kapalı, sol ötelemeler altında değişmez alt uzayı olsun. Eğer $T : A \rightarrow L^1(G)$ sınırlı lineer operatörü sol öteleme dönüşümleriyle değişmeli ise T operatörü sıfırdır.

Tez boyunca elde edilen sonuçlar kompakt veya kompakt olmayan bazı özel gruplar için uygulanabilir. Bu özel grup örneklerini vermeden önce aşağıdaki temel kavramları hatırlatalım.

$GL(n, \mathbb{C})$, $n \times n$ tipinde katsayıları kompleks tersinir matrislerin kümesidir. Bu kümelerin matris çarpma işlemi ile oluşturduğu gruba genel lineer grup denir.

$SU(2)$, 2×2 tipinde kompleks katsayılı, tersi kompleks eşleniğinin transpozuna eşit ve determinantı 1 olan matrislerin kümesidir. Bir başka deyişle

$$SU(2) := \{A : (\bar{A})^t = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1\}$$

şeklindedir.

$O(n)$, $n \times n$ tipinde kompleks katsayılı, tersi transpozuna eşit olan matrislerin kümesidir. Yani,

$$O(n) := \{A : A^t = A^{-1}\}$$

biçimindedir ve ortogonal grup olarak adlandırılır. $SO(n)$ ise $O(n)$ ortogonal grubunun determinantı 1 olan alt grubudur ve

$$SO(n) := \{A : A^t = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1\}$$

şeklinde yazılabilir. $SO(n)$ kümesinin matris çarpımına göre oluşturduğu gruba özel ortogonal grup denir.

Not: Bulgular kısmında elde edilen teoremler için aşağıda verilecek olan özel gruplar kullanılarak somut örnekler incelenebilir.

Örnek.

1. $SU(2)$ grubu kompaktır. f , $SU(2)$ grubu üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere Haar ölçüsü

$$\int_{SU(2)} f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f \circ \phi(\theta, \varphi, \gamma) \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi d\gamma$$

şeklindedir. Burada $x_1 = \cos \theta$, $x_2 = \sin \theta \cos \varphi$, $x_3 = \sin \theta \sin \varphi \cos \gamma$, $x_4 = \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma$ olmak üzere $\phi(\theta, \varphi, \gamma) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ile verilmiştir.

2. $SO(3)$ özel ortogonal grubu kompaktır. f , $SO(3)$ üzerinde integrallenebilen bir

fonksiyon olmak üzere Haar ölçüsü aşağıdaki gibidir.

$$\int_{SO(3)} f(x) d\mu(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\theta \int_{S^2} d\sigma(u) f(\exp(\theta T(u))) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Burada σ , S^2 birim küresi üzerinde normalleştirilmiş düzgün ölçü, $u(a, b, c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$, S^2 birim küresinde bir nokta ve T dönüşümü

$$T(u) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

3. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ çarpım grubu kompakt değildir. $\mathbb{R}^*$ grubu üzerindeki Haar ölçüsü $\frac{d\mu(x)}{|x|}$ şeklindedir. Burada $d\mu(x)$ Lebesgue ölçüsüdür.
4. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ çarpım grubu kompakt değildir. $\mathbb{C}^*$ grubu üzerindeki Haar ölçüsü $\frac{d\mu(x)d\mu(y)}{x^2+y^2}$ şeklindedir.
5. $G = \mathbb{R}^n$ alınırsa G grubu kompakt değildir. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Haar ölçüsü Lebesgue ölçüsüdür.
6. $GL(n, \mathbb{R})$ grubu kompakt değildir. $GL(n, \mathbb{R})$ grubu üzerindeki Haar ölçüsü $|\det A|^{-n} dA$ şeklindedir. Burada dA , $M(n, \mathbb{R})$ matris grubu üzerindeki Lebesgue ölçüsüdür.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında G yerel kompakt grubu üzerinde tanımlı Orlicz uzaylarının projektif, injektif ve flatness gibi bazı homolojik özellikleri incelenmiş ve kompakt çarpanlar uzayı çalışılmıştır. Bunun için Φ Young fonksiyonu olmak üzere $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayları sol Banach $L^1(G)$ -modül olarak ele alınmış ve homolojik özellikleri modül yapısı üzerinden incelenmiştir.

Elde edilen sonuçlar iki kısım halinde ele alınabilir. Öncelikle Orlicz uzayları için projektif modül olma özelliği incelenmiştir ve modül yapısının homolojik özelliği ile grubun yapısı arasında ilişki kurulmuştur. Özel olarak Orlicz uzaylarının projektif sol Banach $L^1(G)$ -modül olması için gerek ve yeter koşulun G grubunun kompakt olması gerektiği ispatlanmıştır (Teorem 4.1.1.1). Ardından $L^\Phi(G)$ uzaylarının hangi koşullar altında injektif ve flat modül olduğu incelenmiştir (Önerme 4.1.2.1).

İkinci kısımda ilk olarak Orlicz uzaylarının kapalı, konveks, sol ötelemeler altında değişmez kalan alt kümeleri karakterize edilmiştir. Özel olarak bir tek kompakt, konveks, sol ötelemeler altında değişmez kalan alt kümesinin orijin olduğu gösterilmiştir (Teorem 4.2.1.7). Ayrıca Orlicz uzaylarının alt kümeleri üzerinde afin ve sürekli dönüşümler incelenmiştir. Daha sonra bu kısımda elde edilenlerden yararlanılarak kompakt çarpanlar uzayı karakterize edilmiştir ve kompakt çarpanlar ile gruplar arasında ilişki kurulmuştur:

1. G kompakt bir grup olmak üzere $L^1(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden her T çarpanı kompakttır (Teorem 4.2.3.3)
2. G kompakt olmayan yerel kompakt bir grup ve $\Phi, \Psi \in \Delta_2$ koşulunu sağlayan Young fonksiyoları olsun. Bu durumda $L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden tek kompakt çarpan sıfırdır (Teorem 4.2.3.4).

Özel olarak G kompakt grup iken $L^1(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden her T çarpanının kompakt olduğu ve G kompakt olmayan bir grup olmak üzere $\Phi, \Psi \in \Delta_2$ ise $L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden tek kompakt çarpanın sıfır olduğu ispatlanmıştır.

Böylece Lebesgue uzayını kapsayan daha genel bir fonksiyon uzayında bu konular çalışılmıştır ve elde edilen sonuçlar Lebesgue uzayları için de özel olarak geçerlidir.

Öte yandan $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayının Φ Young fonksiyonuna bağlı olması göz önüne alınırsa, $L^\Phi(G)$ uzayının ne kadar zengin bir yapıya sahip olduğu görülür. Her bir farklı Young fonksiyonu için karşılık gelen farklı Orlicz uzayı bulunacaktır. Bu nedenle klasik Lebesgue uzaylarının dışında daha farklı fonksiyon uzayı örnekleri de elde edilmiş bunun yanı sıra çok çeşitli Banach modül yapıları da ortaya konulmuştur.

G yerel kompakt grup ve $\omega : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ Borel ölçülebilir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in G$ için

$$\omega(x+y) \leq \omega(x)\omega(y)$$

koşulu sağlanıyorsa ω fonksiyonuna G üzerinde ağırlık fonksiyonu denir.

İleriye dönük, bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar kullanılarak ω ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$L^\Phi_\omega(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ölçülebilir, } \exists \alpha > 0, \int_G \Phi(\alpha |f(x)\omega(x)|) d\mu(x)\}$$

ile tanımlanan ağırlıklı Orlicz uzayları çeşitli homolojik özelliklerin belirlenmesi amaçlanmaktadır.

Ayrıca elde edilen sonuçlar bazı özel gruplar üzerinde çalışılarak somut uzaylar üzerinde de çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Akbarbaglu, I., Maghsoudi, S., 2013, Banach-Orlicz algebras on a locally compact group, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 10, 1937–1974.
- [2] Akemann, C.A., 1967, Some mapping properties of the group algebras of a compact group, *Pacific J. Math.*, 22, 1–8.
- [3] Bennet, G., Sharpley, R., 1988, *Interpolation of Operators*, Academic Press, London.
- [4] Bonsall, F.F., Duncan, J., 1967, *Complete Normed Algebras*, Springer, ISBN:3-540-06386-2.
- [5] Brainerd, B., Edwards, R.E., 1966, Linear operators which commute with translations. I. Representation theorems, *J. Austral. Math. Soc.*, 6, 289–327.
- [6] Conway, J.B., 1990, *A course in functional analysis*, 2nd Edition, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 96, ISBN:0-387-97245-5.
- [7] Dales, H.G., 2000, *Banach Algebras and Automatic Continuity*, Oxford University Press, New York, ISBN:0-19-850013-0.
- [8] Dales, H.G., Polyakov, M. E., 2004, Homological properties of modules over group algebras, *Proc. London Math. Soc.*, 93, 390–426.
- [9] Deitmar, A., Echterhoff, S., 2009, *Principle of Harmonic Analysis (Universitext)*, ISBN:978-0-387-85468-7.
- [10] Doran, R.S., Wichmann, J., 1979, *Approximate Identities and Factorization in Banach Modules*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, ISBN:978-3-540-09725-9.
- [11] Faraut, J., 2008, *Analysis on Lie Groups*, Cambridge University Press, New York., ISBN:978-0-521-71930-8.
- [12] Figa-Talamanca, A., Gaudry, G.I., 1967, Density and Representation Theorems for Multipliers of Type (p, q) , *J. Austral. Math. Soc.*, 7, 1–6.
- [13] Folland, G.B., 1995, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, ISBN:0-8493-8490-7.
- [14] Helemskii, A.Ya., 1989, *The Homology of Banach and Topological Algebras*, Translated from Russian by A. West, Mathematics and its Applications (Soviet Series), 41, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN:978-94-010-7560-2.
- [15] Hewitt, E., Ross, B., 1994, *Abstract Harmonic Analysis: Volume 1: Structure of Topological Groups Integration Theory Group Representations*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris, ISBN:0-387-94190-8.

- [16] Hewitt, E., Ross, B., 1997, *Abstract Harmonic Analysis: Volume 2: Structure and Analysis for Compact Groups, Analysis on Locally Compact Abelian Groups*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, ISBN:0-387-048320-4.
- [17] Hörmander, L., 1960, Estimates for Translation Invariant Operators in L^p Spaces, *Acta Math.*, 104, 93–140.
- [18] Johnson, B.E., 1972, *Cohomology in Banach Algebras*, Memories of the Amer. Math. Soc., 127, ISBN:0-8218-1827-1.
- [19] Krasnosel'skii, M.A., Rutickii, Ja.B., 1961, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff Ltd., 1st Edition.
- [20] Larsen, R., 1971, *An Introduction to the Theory of Multipliers*, Grundlehren Math. Wiss., 175, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, ISBN:978-3-642-65032-1.
- [21] Lau, A.T., 1977, Closed convex invariant subsets of $L^p(G)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 232, 131–142.
- [22] Lau, A.T., Losert, V., 1990, Complementation of Certain Subspaces of $L^\infty(G)$ of a Locally Compact Group, *Pacific J. Math.*, 141, 295–310.
- [23] Loomis, Lynn H., 1953, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, D. Van Nostrand Company Inc.
- [24] Luxemburg, W.A.J., 1955, *Banach Function Spaces*, Ph. D. Dissertation Delft.
- [25] Majewski, W.A., Labuschagne, L.E., 2014, On applications of Orlicz spaces to statistical physics, *Ann. Henri Poincaré*, 15, 1197–1221.
- [26] Morse, M., Transue, W., 1950, Functionals F bilinear over the product $A \times B$ of two pseudo-normed vector spaces, *Annals of Math.*, 3, 576–614.
- [27] Orlicz, W., 1931, Über konjugierte exponentenfolgen, *Studia Math.*, 3, 200–211.
- [28] Orlicz, W., 1932, Über eine gewisse Klasse von Rumen von Typus B, *Bull. Inst. Acad. Polon. Sci. Ser. A*, 207–220.
- [29] Osançlıoğlu, A., Öztop, S., 2015, Weighted Orlicz algebras on locally compact groups, *J. Aust. Math. Soc.*, 99, 399–414.
- [30] Öztop, S., Gürkanlı, A.T., 2000, Multipliers and tensor products of weighted L^p -spaces, *Acta Mathematica Scienta*, 21B(1), 41–49.
- [31] Öztop, S., Samei, E., 2017, Twisted Orlicz algebras I, *Studia Math.*, 236, 271–296.
- [32] Öztop, S., Samei, E., 2018, Twisted Orlicz algebras II, *Math. Nachr.*, 292, 1122–1136.
- [33] Öztop, S., Samei, E., Shepelska, V., 2018, Weak amenability of weighted Orlicz algebras, *Arch. Math.*, no 4, 363–376.
- [34] Racher, G., 2010, On the projectivity and flatness of some group modules, *Banach Center Publications*, 91.1, 315–325.

- [35] Rao, M.M., Ren, Z.D., 1991, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8478-2.
- [36] Reiter, H., Stegeman, Jan D., 2001, *Classical harmonic analysis and locally compact groups*, Oxford Univ. Press, ISBN:0-1985-1189-2.
- [37] Runde, W., 1991, *Lectures on amenability*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN:3-540-42852-6.
- [38] Rudin, W., 1987, *Real and complex analysis*, Third edition, McGraw-Hill Book Co, ISBN:0-07-100276-6.
- [39] Rudin, W., 1990, *Fourier Analysis on Groups*, Wiley-Interscience, New York, Chichester, Toronto, ISBN:0-47152364-X.
- [40] Ryan, R.A., 2002, *Introduction to Tensor Product of Banach Spaces*, Springer-Verlag, London, ISBN:1-85233-437-1.
- [41] Saeki, S., 1990, The L^p -conjecture and Youngs inequality, *Illinois J. Math.*, 34, 614–627.
- [42] Sakai, S., 1964, Weakly compact operators on operator algebras, *Pacific J. Math.*, 14, 659–664.
- [43] Wendel, J., 1952, Left centralizers and isomorphisms of group algebras, *Pacific J. Math.*, 2, 251–261.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Rüya ÜSTER	Rüya ÜSTER
Doğum Yeri	Yenimahalle
Doğum Tarihi	24.08.1990
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	05055875104
E-Posta Adresi	ruya.uster@istanbul.edu.tr



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ankara Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2012

Yüksek Lisans	
Üniversite	Ankara Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Matematik
Mezuniyet Tarihi	2015

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Matematik
Mezuniyet Tarihi	2019

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
Üster R., Öztop S., 2019, Invariant Subsets and Homological Properties of Orlicz Modules over Group Algebras, <i>Taiwanese J. Math.</i> , DOI:10.11650/tjm/190903, kabul edildi.	
Bildiriler	
Üster R., Öztop S., 2018, Projectivity and Injectivity of Orlicz Spaces, <i>Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis- VIII</i> ,	

Rostov-on-Don, Russia, 22-27 April, pp.27-27.

Üster R., Öztop S., 2018, Orlicz Uzaylarının Kapalı, Konveks, Invariant Alt Kümeleri, *31. Ulusal Matematik Sempozyumu (UMS-2018)*, Erzincan, 12-15 Eylül, pp.51-51.

Üster R., Öztop S., 2018, Affine mappings in Orlicz Space, *1st International Symposium on Graduate Research in Science (ISGRS-2018)*, İstanbul, 4-6 October.

Üster R., 2019, Invariant Subsets of Orlicz Modules over Group Algebras, *Bilkent University Analysis Seminars*, Ankara, 12 February.

Üster R., 2019, Projectivity and Injectivity of Orlicz Spaces, *Workshop on Pure and Applied Mathematics*, Växjö, Sweden, 22 May.

Üster R., Öztop S., 2019, Compact multipliers on Orlicz space, *International Workshop on Harmonic Analysis and Operator Theory (WHO-2019)*, İstanbul, 26-29 August, pp.35-35.