



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORLİCZ UZAYLARININ S-NORMUNA GÖRE İNCELENMESİ

Şeyma YAŞAR

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Haziran, 2021

İSTANBUL

Bu alışma 04.06.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr.Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Alen OSANÇLIOL
Beykent Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince eğitim ve akademik yaşantıma, tez çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübesiyle ışık tutan, emek ve desteğini bir an olsun esirgemeyen, kendimi gerçekleştirme yolunda nasıl adımlar atmam ve nereye varmam gerektiğini kendisi sayesinde tayin ettiğim, daima ilham aldığım ve alacağım danışman hocam Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım. İlaveten, her daim bu yolculukta benimle olan, içtenlikle desteklerini hissettiğim başta annem olmak üzere aileme, Arş. Gör. Esra BAŞAR'a ve Arş. Gör. Badik Hüseyin UYSAL'a, ayrıca yardımlarını eksik etmeyen Arş. Gör. Rüya ÜSTER'e ve Arş. Gör. Büşra ÜNAL'a teşekkür ederim.

Haziran, 2021

Şeyma YAŞAR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1 GİRİŞ	1
2 GENEL KISIMLAR	3
2.1 ÖN BİLGİLER	3
2.2 DIŞ FONKSİYONLAR VE S-NORMLARI	11
2.3 YARI-FATOU ÖZELLİĞİ	19
2.4 HÖLDER ANLAMINDA EN KÜÇÜK DIŞ FONKSİYON	23
2.5 NORM ELDE EDİLEBİLİRLİĞİ	37
2.6 S-NORMUNUN K^* -SONLULUĞU VE K^{**} -SONLULUĞU	46
2.7 KÖTHE DUALİ	57
3 MALZEME VE YÖNTEM	67
4 BULGULAR	68
5 TARTIŞMA VE SONUÇ	71
KAYNAKLAR	72
ÖZGEÇMİŞ	75

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler

Açıklama

(T, Σ, μ)	: σ -sonlu Ölçü uzayı
Φ	: Orlicz fonksiyonu
Ψ	: Φ Orlicz fonksiyonunun tümleyen fonksiyonu
p_+	: Φ Orlicz fonksiyonunun sağ türevi
p_-	: Φ Orlicz fonksiyonunun sol türevi
s	: s dış fonksiyonu
s'_+	: s dış fonksiyonunun sağ türevi
s'^{-1}_+	: s dış fonksiyonunun sağ türevinin tersi
$\uparrow$	: artarak yakınsama
X^*	: X uzayının topolojik duali
X'	: X uzayının Köthe duali
$L^0(T)$	: T üzerinde tanımlı ölçülebilir reel değerli fonksiyonların μ denklik sınıflarının kümesi
L^p	: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\int f ^p d\mu < \infty$ koşulunu sağlayan $f \in L^0(T)$ fonksiyonların uzayı
L^∞	: Esas olarak sınırlı, ölçülebilir reel değerli fonksiyonların uzayı
$\ f\ _\infty$	: $\ f\ _\infty = \inf\{a > 0 : \text{hemen hemen her } t \in T \text{ için } f(t) \leq a\}$
L_Φ	: Orlicz uzayı
E_Φ	: L_Φ Orlicz uzayının bir alt uzayı
$\ \cdot\ _{\Phi,1}$	: Orlicz normu
$\ \cdot\ _{\Phi,p}$	: p - Amemiya normu
$\ \cdot\ _{\Phi,\infty}$	: Luxemburg normu
$\ \cdot\ _{\Phi,s}$	: s normu

Kısaltmalar

Açıklama

μ -hhh	: μ hemen hemen her
------------	-------------------------

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORLICZ UZAYLARININ s -NORMUNA GÖRE İNCELENMESİ

Şeyma YAŞAR

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Bu tez çalışmasının temel amacı Orlicz uzayları üzerinde yeni bir norm olarak tanımlanan s -normunu ve özelliklerini incelemektir. Orlicz uzayları, Orlicz, Luxemburg ve p -Amemiya normlarına göre [3], [20], [6] çalışmalarında incelenmiştir. Wisla'nın 2020 yılındaki [21] çalışmasında Orlicz uzayları üzerinde, dış fonksiyon aracılığıyla s -normları tanıtılmıştır. Bu tez çalışmasında, Orlicz uzayları üzerinde tanımlanan ve [3], [20] makalelerinde incelenen normlar karşılaştırılarak ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Genel ölçü uzaylarında yapılan bu çalışmaların lokal kompakt gruplar üzerinde ve soyut harmonik analiz kapsamında da incelenebileceği sonucuna varılmıştır.

Haziran 2021, 84 sayfa.

Anahtar kelimeler: Orlicz uzayları, s normu, Köthe duali, dış fonksiyon.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

INVESTIGATING ORLICZ SPACES EQUIPPED WITH s NORM

Şeyma YAŞAR

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

The main purpose of this thesis is to examine some properties of the s - norm which is introduced recently on Orlicz spaces. Orlicz spaces are investigated according to Orlicz, Luxemburg and p - Amemiya norms in [3], [20], [6]. In 2020, in Wisla's work [21], s - norms are introduced through outer functions s . In this thesis, the norms, which are defined on Orlicz spaces and investigated in the works [3], [20] are discussed and compared in detail. It is concluded that these studies in general measure spaces can be examined on locally compact groups and in the setting of abstract harmonic analysis.

June 2021, 84 pages.

Keywords: Orlicz spaces, s norm, Köthe dual, outer function.

1 GİRİŞ

1932 yılında Orlicz tarafından L^p Lebesgue uzaylarının bir genellemesi olan L_Φ Orlicz uzayı ve üzerinde Orlicz normu

$$\|f\|_\Phi^o = \sup \left\{ \int_T |f(t)g(t)| d\mu : g \in L_\Psi, I_\Psi(g) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlandı [15]. Luxemburg, 1955 yılında Orlicz uzaylarında

$$\|f\|_\Phi = \inf \left\{ k > 0 : I_\Phi \left(\frac{f}{k} \right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan normu inceledi [11]. Luxemburg tarafından ayrıntılı olarak incelenen bu norm, Luxemburg norm olarak anılmıştır. Daha sonrasında Orlicz ve Luxemburg normlarının birbirlerine denk olduğu gösterildi [18]. Nakano [14], 1951 yılında

$$\|f\|_\Phi^A = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi(kf))$$

şeklinde tanımlanan Amemiya fonksiyonuna göre Orlicz uzaylarını inceledi. Nakano [14], Luxemburg ve Zaanen [12], Φ fonksiyonunun sonlu değerli ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$ olması koşulları altında Orlicz normunun Amemiya fonksiyonu ile ifade edildiğini gösterdiler. Bu norm eşitliğinin keyfi bir Φ Orlicz fonksiyonu için de geçerli olduğu Hudzik ve Maligranda tarafından [6] çalışmasında gösterildi. Benzer olarak Luxemburg normunun da Amemiya formülü ile ifade edilebileceği [3], [16] çalışmalarında gösterildi. Hudzik ve Maligranda

$$s_p = \begin{cases} (1 + u^p)^{1/p} & , 1 \leq p < \infty \\ \max\{1, u\} & , p = \infty \end{cases}$$

fonksiyonları aracılığıyla

$$\|f\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi^p(kf))^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan yeni bir fonksiyon tanıtıldı [6]. Öte yandan Cui, Duan, Hudzik ve Wisla tanıttıkları bu fonksiyonun bir norm olduğunu gösterip, bu norma göre Orlicz uzaylarının bazı geometrik özelliklerini incelediler [3]. Ayrıca Wisla [19] çalışmasında bir s dış fonksiyonunu $s : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ olmak üzere $\max\{1, u\} \leq s(u) \leq 1 + u$ özelliğini sağlayan konveks fonksiyonlar olarak tanımlamış ve s dış fonksiyonları aracılığıyla

$$\|f\|_{\Phi, s} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_{\Phi}(kf))$$

şeklinde tanımlanan s -normlarını tanıtmıştır. Son olarak 2020 yılında, p -Amemiya normlarında sağlanan yarı-Fatou özelliği, k^* ve k^{**} -sonluluk gibi özellikler s -normu için de incelendi.

Derleme niteliğinde olan bu tez çalışmasında, birinci ve ikinci kısımda tez için önemli tanımlar verilip ardından s dış fonksiyonları aracılığıyla s -normları tanıtılmıştır.

Tezin diğer bölümlerinde s -normunun yarı-Fatou özelliğini, en küçük Hölder eşleniği, norm elde edilebilirliği, k^* , k^{**} -sonluluk özellikleri incelenmiştir. Son kısımda, özel bir Φ fonksiyonu için s -normu ile donatılmış Orlicz uzayları incelenmiştir. Öte yandan E_{Φ} uzayının s -normuna göre Köthe duali incelenmiştir.

Bulgular kısmında, tüm yapılan incelemelerin doğrultusunda, bazı özel s dış fonksiyonları için E_{Φ} uzayının Köthe dualeri gösterilmiştir.

2 GENEL KISIMLAR

Bu tez çalışması boyunca genel olarak [21] kaynağı temel alınmıştır.

Yine bu tez çalışması yedi kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım olan ön bilgilerde, tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci kısımda, s dış fonksiyon tanımı verilmiş, ardından s -normu tanıtılmıştır. Üçüncü kısımda, s -normunun yarı-Fatou özelliği incelenmiştir. Dördüncü kısımda, s dış fonksiyonlarının Hölder anlamında eşleniklik tanımı verilmiştir. Daha sonrasında bazı özel dış fonksiyonlar için Hölder eşlenikleri incelenmiştir. Beşinci kısımda, s -normunun elde edilebilirliği için teorem ve sonuçlar verilmiştir. Altıncı kısımda, s -normunun k^* ve k^{**} -sonluluk için teorem verilmiştir. Son kısım olan yedinci kısımda, s -normlu E_Φ uzayının Köthe duali incelenmiştir.

2.1 ÖN BİLGİLER

Bu tez çalışmasında X bir Banach uzayı olmak üzere $B(X)$ birim yuvarı, $S(X)$ yuvar yüzeyini temsil edecektir. (T, Σ, μ) ölçü uzayı olsun. Σ , T kümesinin ölçülebilir alt kümelerinin σ -cebiri ve μ σ -sonlu bir tam ölçü olmak üzere $L^0(T)$ ölçülebilir reel fonksiyonların μ denklik sınıflarının kümesidir. Bu tez boyunca reel vektör uzayları ile çalışılacaktır. Ayrıca bu çalışma μ ölçüsünün atomlu ya da atomsuz olması durumlarına göre genel olarak incelenmiştir. Yine bu tez çalışmasında $\inf \emptyset = \infty$, $0 \cdot \infty = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$ ve $\frac{1}{\infty} = 0$ kabul edilmiştir. Aşağıda verilen tanım ve özellikler için [2] kaynağından yararlanılmıştır.

Tanım 2.1.1 (T, Σ) bir ölçülebilir uzay olsun. Bir $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) \geq 0$
3. Σ kümesinin ikişerli ayrık $(A_n)_{n=1}^\infty$ dizisi için

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

koşullarını sağlıyorsa μ fonksiyonuna T kümesinde bir ölçü denir. (T, Σ, μ) uzayına ölçü uzayı denir.

Tanım 2.1.2 (T, Σ, μ) ölçü uzayı ve $A \in \Sigma$ olmak üzere $\mu(A) > 0$ olsun. Eğer her $B \subset A$, $B \in \Sigma$ için $\mu(B) = 0$ ya da $\mu(A) = \mu(B)$ eşitliklerinden biri sağlanıyorsa, A kümesine atom denir.

Eğer $\mu(A) > 0$ olacak şekilde her $A \in \Sigma$ kümesi atom içeriyorsa μ ölçüsüne atomik ölçü ve (T, Σ, μ) ölçü uzayına atomik ölçü uzayı denir.

Eğer (T, Σ, μ) ölçü uzayı hiç atom içermiyorsa μ ölçüsüne atomsuz ölçü denir.

μ atomsuz bir ölçü olsun. Bu durumda $\mu(A) \geq \lambda \geq 0$ olmak üzere $\mu(B) = \lambda$ olacak şekilde ölçülebilir bir $B \subset A$ alt kümesi vardır.

Tanım 2.1.3 (T, Σ) ölçülebilir bir uzay olsun. μ ve ν , Σ üzerinde tanımlı ölçüler olsun. Eğer $\mu(A) = 0$ olacak şekilde her $A \in \Sigma$ için $\nu(A) = 0$ sağlanıyorsa ν ölçüsü μ ölçüsüne göre mutlak süreklidir denir.

Teorem 2.1.4 (Monoton Yakınsaklık Teoremi) (T, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve f_n negatif olmayan, ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer f_n artan ve μ - hhh $x \in T$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ise bu durumda

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.5 (Fatou Lemma) (T, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. T üzerinde tanımlı, reel değerli negatif olmayan, ölçülebilir bir f_n fonksiyon dizisi için

$$\int_T \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n d\mu$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.1.6 (Radon Nikodym Teoremi) (T, Σ, μ) ölçü uzayı ve ν , μ ölçüleri σ - sonlu pozitif ölçüler olsun. Eğer ν ölçüsü, μ ölçüsüne göre mutlak sürekli ise bu durumda yalnızca bir $g : T \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu vardır öyle ki her $E \in \Sigma$ için

$$\nu(E) = \int_E g d\mu$$

sağlanır.

Tanım 2.1.7 Bir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ için $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(u) = cu + d$ ise f fonksiyonuna sonsuzda afindir denir ve eğimi $c > 0$ dır. Eğer $c = 0$ ise f sonsuzda sabittir denir.

Tanım 2.1.8 ([13]) X bir reel vektör uzayı olsun. Bir $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu

$$\text{i) } \rho(-u) = \rho(u)$$

$$\text{ii) } \rho(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$\text{iii) Her } u, v \in X, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1 \text{ için } \alpha + \beta = 1 \quad \rho(\alpha u + \beta v) \leq \rho(u) + \rho(v)$$

özelliklerini sağlarsa modüler fonksiyon denir. Öte yandan $0 < s \leq 1$ ve $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ olmak üzere $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve her $u, v \in X$ için

$$\rho(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s \rho(u) + \beta^s \rho(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ρ modüler fonksiyonu s -konveks olarak adlandırılır. $s = 1$ durumunda konveks modülerdir denilir.

Tanım 2.1.9 (Orlicz Fonksiyonu, [5]) Bir $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu

$$1. \text{ her } u \in \mathbb{R} \text{ için } \Phi(-u) = \Phi(u),$$

$$2. \Phi \text{ fonksiyonu sifira özdeş değil,}$$

$$3. \Phi(0) = 0,$$

$$4. b_\Phi = \sup\{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\} \text{ olmak üzere } (-b_\Phi, b_\Phi) \text{ aralığında konveks,}$$

$$5. b_\Phi \text{ noktasında soldan sürekli, yani } \lim_{u \rightarrow b_\Phi^-} \Phi(u) = \Phi(b_\Phi)$$

koşullarını sağlıyorsa Orlicz fonksiyonu olarak adlandırılır.

Burada Φ fonksiyonunun sifira özdeş olması ile her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(u) = 0$ olması anlaşılacaktır.

Örnek 2.1.10 ([5]) Φ bir Orlicz fonksiyonu ve $f \in L^0(T)$ olmak üzere

$$I_\Phi(f) = \int_T \Phi(f(t)) d\mu$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon konveks modüler fonksiyondur.

Tanım 2.1.11 ([18]) Bir Φ Orlicz fonksiyonu için

$$\Psi(y) = \sup\{x|y| - \Phi(x) : x \geq 0\} \quad y \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ fonksiyonuna Φ Orlicz fonksiyonunun tümleyeni denir. Ayrıca, Ψ fonksiyonu da bir Orlicz fonksiyonudur.

Yine $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y) \quad (2.1)$$

eşitsizliği Young eşitsizliği olarak adlandırılır. Burada $x, y \geq 0$ için p_+ , Φ fonksiyonunun sağ türevi ve q_+ , Ψ fonksiyonunun sağ türevi olmak üzere $y = p_+(x)$ ya da $x = q_+(y)$ durumlarında eşitlik sağlanır ve Young eşitliği olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.12 (Artan Fonskiyonlar İçin Young Eşitsizliği, [17]) $f : [0, u] \longrightarrow [0, v]$ pozitif, sürekli, kesin artan, terslenebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun tersi f^{-1} olmak üzere

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

eşitsizliği sağlanır ve Young Eşitsizliği olarak adlandırılır. $b = f(a)$ olması durumunda eşitlik sağlanır.

Önerme 2.1.13 ([18]) Φ bir Orlicz fonksiyonu ve p_+ fonksiyonu, Φ fonksiyonunun sağ türevi olsun. Her $u \in \mathbb{R}$ için Φ fonksiyonu

$$\Phi(u) = \int_0^u p_+(t)dt$$

temsiline sahiptir.

Bu tez boyunca $[0, \infty]$ aralığında Φ fonksiyonunun sağ türevi p_+ ve sol türevi ise p_- ile gösterilecektir. Aşağıdaki ifadeler p_+ ve p_- fonksiyonları için sağlanır.

$$\text{i) } p_-(0) = 0$$

$$\text{ii) } b_\Phi = \infty \text{ ise } \lim_{u \rightarrow \infty} p_-(u) = p_-(\infty) \text{ ve } \lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u) = p_+(\infty)$$

$$\text{iii) } b_\Phi < \infty \text{ ise her } u \geq b_\Phi \text{ için } p_+(u) = \infty \text{ ve her } u > b_\Phi \text{ için } p_-(u) = \infty$$

Orlicz fonksiyonu üzerinde tanımlanan ve Δ_2 olarak adlandırılan koşullar aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.14 ([18]) Φ bir Orlicz fonksiyonu olsun.

i) Eğer bir $K > 0$ ve her $u \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa Φ fonksiyonu Δ_2 - koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2(\mathbb{R})$ şeklinde ifade edilir.

ii) Eğer bir $K > 0$ sayısı, $\Phi(u_0) < \infty$ koşulunu sağlayan bir $u_0 > 0$ sayısı ve her $|u| \geq u_0$ için

$$\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa Φ fonksiyonu sonsuzda Δ_2 koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ şeklinde ifade edilir.

iii) Eğer bir $K > 0$ sayısı, $\Phi(u_0) < \infty$ koşulunu sağlayan bir $u_0 > 0$ sayısı ve her $|u| \leq u_0$ için

$$\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa Φ fonksiyonu sıfırda Δ_2 - koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2(0)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.15 ([18]) Φ Orlicz fonksiyonu tarafından üretilen L_Φ Orlicz uzayı, ölçülebilir fonksiyonların vektör uzayıdır ve

$$L_\Phi = \{f \in L^0(T) : \exists \lambda > 0 \text{ } I_\Phi(\lambda f) < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.16 ([18]) L_Φ Orlicz uzayının bir alt uzayı

$$E_\Phi = \left\{ f \in L_\Phi : \forall \lambda > 0 \exists T_\lambda \text{ sonlu atom kümesi } \int_{T \setminus T_\lambda} \Phi(\lambda f) d\mu < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) Eğer μ atomsuz ölçüyse bu durumda $T_\lambda = \emptyset$ olur.

ii) Φ fonksiyonu sadece sonlu değer alıyorsa yani her $x \in \mathbb{R}$ için $\Phi(x) < \infty$ ise bu durumda $T_\lambda = \emptyset$ olarak kabul edilebilir.

iii) Eğer μ ölçüsü atomsuz ise $T_\lambda = \emptyset$ olur ve Φ fonksiyonu sonsuzda sıçramalıysa bu durumda Φ fonksiyonu yalnızca $\Phi(0) = 0$ değerinde sonlu olduğundan $E_\Phi = \{0\}$ bulunur. Atomik ölçü için $T \subset \mathbb{N}$ ve $\Sigma \subset 2^\mathbb{N}$ geçerlidir. Bu durumda L_Φ Orlicz uzayı aşağıdaki gibi tanımlanan bir dizi uzayı olur.

$$l_\Phi = \left\{ (x_n) \in l^0 : \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda x_n) \mu(n) < \infty \quad \exists \lambda > 0 \right\}$$

Burada l^0 tüm reel dizilerin uzayıdır. Ayrıca E_Φ uzayı

$$h_\Phi = \left\{ (x_n) \in l^0 : \forall \lambda, \exists n_0 \sum_{n=n_0}^{\infty} \Phi(\lambda x_n) \mu(n) < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır. Özel olarak μ sayma ölçüsü ve Φ Orlicz fonksiyonu

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0 & , |u| \leq 1 \\ \infty & , |u| > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış ise, bu durumda $l_\Phi = l^\infty$ ve $h_\Phi = c_0$ olduğu kolayca elde edilir.

Tanım 2.1.17 (Modüler Birim Yuvar, [18]) I_Φ bir konveks modüler fonksiyon olmak üzere,

$$A_\Phi(1) = \{f \in L^0(T) : I_\Phi(f) \leq 1\}$$

kümesine modüler birim yuvar denir.

Tanım 2.1.18 (Minkowski Fonksiyoneli, [18]) K, X vektör uzayının bir alt kümesi olsun.

$p_k : X \rightarrow [0, \infty]$ olmak üzere K kümesinin Minkowski fonksiyoneli

$$p_k(x) = \inf \{r > 0 : x \in rK\}$$

şeklinde tanımlanır.

1932 yılında W. Orlicz tarafından, modüler birim yuvarı temel alınarak, Φ Orlicz fonksiyonunun tümleyeni olan Ψ ile oluşturulan Orlicz normu

$$\|f\|_{\Phi}^o = \sup \left\{ \int_T |f(t)g(t)| d\mu : g \in L_{\Psi}, I_{\Psi}(g) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır [15].

Orlicz uzaylarında çalışılan bir diğer norm olan Luxemburg normu ise 1955 yılında Luxemburg tarafından çalışılmıştır [11]. Modüler birim yuvar üzerinde Minkowski fonksiyoneli aracılığıyla tanımlanan Luxemburg normu

$$\|f\|_{\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : I_{\Phi} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Gerçekten de $K = A_{\Phi}(1)$ alınırsa

$$\begin{aligned} p_k(f) &= \inf \{ r \in \mathbb{R} : r > 0 \text{ ve } f \in rA_{\Phi}(1) \} \\ &= \inf \left\{ r > 0 : \frac{f}{r} \in A_{\Phi}(1) \right\} \\ &= \inf \left\{ r > 0 : I_{\Phi} \left(\frac{f}{r} \right) \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Luxemburg normu aşağıdaki ifadeyi sağlar [13].

$$\|f\|_{\Phi} < 1 \text{ ise } I_{\Phi}(f) \leq \|f\|_{\Phi} \quad (2.2)$$

Teorem 2.1.19 ([13]) I_{Φ} fonksiyonu, L_{Φ} uzayında modüler fonksiyon olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k \in L_{\Phi}$ ve $f \in L_{\Phi}$ olmak üzere her $\lambda > 0$ için $\|f_k - f\|_{\Phi} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $I_{\Phi}(\lambda(f_k - f)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ olmasıdır.

İspat. Her $\lambda > 0$ için $I_{\Phi}(\lambda f_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ olsun. Bu durumda $k \geq k_0$ koşulunu sağlayan doğal sayılar için $I_{\Phi}(\lambda f_k) \leq \frac{1}{\lambda}$ olur. Normun tanımı ve infimum özelliğinden her $\lambda > 0$ için $\|f_k\|_{\Phi} \leq \frac{1}{\lambda}$ bulunur. Böylece $\|f_k\|_{\Phi} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ sağlanır.

Tersine $\|f_k\|_{\Phi} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ sağlansın. Her $\lambda > 0$ için $\|\lambda f_k\|_{\Phi} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ olur. O halde $k \geq k_1$ için $\|\lambda f_k\|_{\Phi} < 1$ olur. Ayrıca (2.2) ifadesinden $I_{\Phi}(\lambda f_k) \leq \|\lambda f_k\|_{\Phi}$ sağlanır. Bu ise $I_{\Phi}(\lambda f_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ olmasıdır. ■

Nakano, 1951 yılında Orlicz uzayları üzerinde

$$\|f\|_{\Phi}^A = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_{\Phi}(kf))$$

formülüyle tanımlanan Amemiya fonksiyonunu inceledi. Daha sonrasında keyfi bir Orlicz normunun Amemiya fonksiyonu ile aynı formüle sahip olduğu gösterildi. Diğer bir ifadeyle $\|f\|_{\Phi}^o = \|f\|_{\Phi}^A$ eşitliği gösterildi [6].

Benzer şekilde, Luxemburg normunun da Amemiya fonksiyonu ile ifade edilebileceği gösterildi ve

$$\|f\|_{\Phi} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} \max\{1, I_{\Phi}(kf)\} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlandı. Öte yandan, Cui, Duan, Hudzik ve Wisla $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ fonksiyonu ile üretilen ve

$$\|f\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_{\Phi}(kf)^p)^{1/p} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanan p -Amemiya normunu incelediler. $p = \infty$ durumunda bu norm (2.3) eşitliğindeki ifade ile tanımlandı [3].

Yine $\|\cdot\|_{\Phi,p}$ ile gösterilen p -Amemiya normları için $1 \leq q \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi} &= \|f\|_{\Phi,\infty} \leq \|f\|_{\Phi,p} \leq \|f\|_{\Phi,q} \leq \|f\|_{\Phi,1} = \|f\|_{\Phi}^o \leq 2\|f\|_{\Phi} \\ \|f\|_{\Phi} &\leq \|f\|_{\Phi,p} \leq 2^{1/p} \|f\|_{\Phi} \end{aligned} \quad (2.5)$$

eşitsizliklerinin sağlandığı biliniyor [3].

Tanım 2.1.20 (Banach Fonksiyon Uzayı, [7]) $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun. $X \subset L^0(T)$ olmak üzere

- i) μ - hhh $t \in T$ için $k(t) > 0$ olacak şekilde bir $k \in X$ varsa,
- ii) $f \in L^0(T)$, $g \in X$ ve μ - hhh $t \in T$ için $|f(t)| \leq |g(t)|$ koşulu altında $f \in X$ ve $\|f\| \leq \|g\|$ ifadesi sağlanırsa

X uzayına, Banach fonksiyon uzayıdır denir. Eğer ölçü uzayı $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ ise Banach dizi uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.21 (Köthe Duali (Associate Space), [1]) (T, Σ, μ) σ -sonlu ölçü uzayı ve X bir Banach fonksiyon uzayı olsun. X uzayının Köthe duali, X^* topolojik dualinin integral ile

temsil edilebilen tüm fonksiyonlarının kümesidir. Yani $f^* \in X^*$ ve

$$f^*(f) = \int_T f(t)g(t)d\mu(t)$$

olacak şekilde $g \in X$ ölçülebilir fonksiyonu vardır. Üzerinde tanımlanan norm ile birlikte Köthe duali

$$X' = \left\{ g \in L^0(T) : \|g\|_{X'} = \sup_{f \in B(X)} \int_T |f(t)g(t)|d\mu < \infty \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.1.22 (Sıralı Sürekli Norm, [7]) X bir Banach fonksiyon uzayı olmak üzere, X uzayı üzerinde tanımlanan norm her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in X$ fonksiyon dizisi olmak üzere $f_n \downarrow 0$ iken $\|f_n\| \rightarrow 0$ özelliğini sağlıyorsa bu norma sıralı sürekli norm denir.

Önerme 2.1.23 ([7]) X bir Banach fonksiyon uzayı olsun. X uzayı üzerinde tanımlanan norm sıralı sürekli ise X uzayının topolojik duali X^* ile Köthe duali X' doğal olarak aynı düşünülür.

μ atomsuz bir ölçü olsun. Φ ve Ψ Orlicz fonksiyonları yalnızca sonlu değer alsın. Yani her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(u)$ ve $\Psi(u) < \infty$ sağlansın. Ayrıca Ψ Orlicz fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde doğrusal değilse bu durumda

$$(E_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p})' \cong (L_\Psi, \|\cdot\|_{\Psi,q})$$

denkliği sağlanır. Üstelik Luxemburg ile donatılmış E_Φ uzayının Köthe duali, Orlicz normu ile donatılmış ve Ψ fonksiyonu ile üretilen L_Ψ Orlicz uzayına denktir [22].

$$(E_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi})' \cong (L_\Psi, \|\cdot\|_{\Psi}^o)$$

2.2 DIŞ FONKSİYONLAR VE S-NORMLARI

Tezin bu kısmında Wisla'nın [21] makalesi temel alınarak s dış fonksiyonu tanıtılmıştır. Ardından bu fonksiyon aracılığıyla kurulan s -normu tanımlanmış ve temel özellikleri incelenmiştir.

Öncelikle s -normunun daha özel hali olan p -Amemiya normu tanıtılacak ve temel özellikleri

verilecektir.

Orlicz uzayları üzerinde p -Amemiya normları, Φ Orlicz fonksiyonu ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$s_p(u) = \begin{cases} (1 + u^p)^{1/p} & , 1 \leq p < \infty \\ \max\{1, u\} & , p = \infty \end{cases}$$

fonksiyonları aracılığıyla

$$\|f\|_{\Phi, p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_{\Phi}^p(kf))^{1/p}$$

şeklinde tanımlanmıştır [6].

Önerme 2.2.1 s_p fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Keyfi bir $1 \leq p \leq \infty$ için s_p fonksiyonu konvektir, ayrıca $p \neq 1$ için s_p kesin konvektir.
- 2) s_p fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığında artan fonksiyonlardır.
- 3) Keyfi bir $1 \leq p' \leq p \leq \infty$ için $s_p(u) \leq s_{p'}(u)$ sağlanır.
- 4) Her $p \in [1, \infty]$ için $s_p(0) = 1$ dir.

İspat. 1) s_p fonksiyonunun konveksliğini aşağıdaki durumlarda inceleyelim.

i) $1 \leq p < \infty$ için $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ olarak tanımlanır. O halde

$$\frac{ds_p(u)}{du} = (1 + u^p)^{1/p-1} u^{p-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s_p(u)}{du^2} &= -(p-1)(1 + u^p)^{1/p-2} u^{p-2} u^p + (p-1)u^{p-2}(1 + u^p)^{1/p-1} \\ &= (p-1)u^{(p-2)}(1 + u^p)^{1/p-1} \left(1 - \frac{u^p}{u^p + 1}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda $\frac{d^2 s_p(u)}{du^2} \geq 0$ olur. Dolayısıyla $1 \leq p < \infty$ için s_p fonksiyonun konveksliği elde edilir. Ayrıca $p \neq 1$ için incelenirse

$$\frac{d^2 s_p(u)}{du^2} = (p-1)u^{(p-2)}(1 + u^p)^{1/p-1} \left(1 - \frac{u^p}{u^p + 1}\right) > 0$$

ifadesi sağlanır. Böylece s_p fonksiyonu kesin konveks bir fonksiyondur.

ii) $p = \infty$ durumu için $s_p(u) = \max\{1, u\}$ olarak tanımlanır. Keyfi $\alpha, \beta > 0$ için $\alpha + \beta = 1$ olsun.

a) Kabul edelim ki $s_p(\alpha u_1 + \beta u_2) = 1$ olsun. Bu durumda

$$s_p(u_1) = \max\{1, u_1\} \geq 1 \text{ ise } \alpha s_p(u_1) \geq \alpha$$

ve

$$s_p(u_2) = \max\{1, u_2\} \geq 1 \text{ ise } \beta s_p(u_2) \geq \beta$$

sağlanır. O halde $\alpha s_p(u_1) + \beta s_p(u_2) \geq \alpha + \beta = 1 = s_p(\alpha u_1 + \beta u_2)$ eşitsizliği sağlanır.

b) $s_p(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha u_1 + \beta u_2$ olsun. İspatı a) şikkına benzer şekilde yapılarak

$$s_p(\alpha u_1 + \beta u_2) \leq \alpha s_p(u_1) + \beta s_p(u_2)$$

eşitsizliği elde edilir.

2) s_p fonksiyonlarının artanlığını aşağıdaki durumlarda inceleyelim.

i) $1 \leq p < \infty$ iken $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ olarak tanımlanır. O halde

$$u_1 \leq u_2 \text{ ise } (1 + u_1^p)^{1/p} \leq (1 + u_2^p)^{1/p}$$

$$s_p(u_1) \leq s_p(u_2)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

ii) $p = \infty$ için $s_p(u) = \max\{1, u\}$ olarak tanımlanır. Böylece

$$u_1 \leq u_2 \text{ için } s_p(u_1) = \max\{1, u_1\} \leq \max\{1, u_2\} = s_p(u_2)$$

sağlanır. O halde i) ve ii) şıklarından $1 \leq p \leq \infty$ için s_p fonksiyonunun artan olduğu elde edilir.

3) $1 \leq p' \leq p \leq \infty$ için $s_p(u) \leq s_{p'}(u)$ olduğunu gösterelim.

i) Kabul edelim ki $1 \leq p' < p = \infty$ olsun. Bu durumda $s_p(u) = \max\{1, u\}$ ve $s_{p'}(u) = (1 + u^{p'})^{1/p'}$ olur. Burada $s_p(u)$ fonksiyonunu aşağıdaki durumlarda inceleyelim.

a) Kabul edelim ki $s_p(u) = 1$ olsun. Bu durumda

$$s_p(u) = 1 < (1 + u^{p'})^{1/p'} = s_{p'}(u)$$

sağlanır.

b) Kabul edelim ki $s_p(u) = u$ olsun. O halde

$$u^{p'} < u^{p'} + 1 \quad \text{ise} \quad s_p(u) = u < (u^{p'} + 1)^{1/p'} = s_{p'}(u)$$

bulunur.

ii) $1 \leq p' \leq p < \infty$ olsun. Böylece $s_{p'}(u) = (1 + u^{p'})^{1/p'}$ ve $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ olarak tanımlanır. O halde aşağıdaki durumlar gerçekleşir.

a*) Her $1 > u > 0$ için $p' \leq p$ iken $u^p \leq u^{p'}$ sağlanır. Dolayısıyla

$$s_p(u) = (u^p + 1)^{1/p} \leq (u^{p'} + 1)^{1/p} \leq (u^{p'} + 1)^{1/p'} = s_{p'}(u)$$

eşitsizliği sağlanır.

b*) Her $1 < u$ için $\frac{1}{u} < 1$ olur. Her $p' < p$ için $\frac{1}{p} < \frac{1}{p'}$ sağlanır. O halde a*) şikkından

$$s_p\left(\frac{1}{u}\right) = \left(1 + \left(\frac{1}{u}\right)^p\right)^{1/p} \leq \left(1 + \left(\frac{1}{u}\right)^{p'}\right)^{1/p'} = s_{p'}\left(\frac{1}{u}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\left(\frac{1 + u^p}{u^p}\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1 + u^{p'}}{u^{p'}}\right)^{1/p'}$$

elde edilir. Bu durumda

$$s_p(u) = (u^p + 1)^{1/p} \leq (u^{p'} + 1)^{1/p'} = s_{p'}(u)$$

eşitsizliği sağlanır.

4) $1 \leq p < \infty$ için $s_p(0) = (1+0)^{1/p} = 1$ olur. Ayrıca $p = \infty$ için $s_p(0) = \max\{1, 0\} = 1$ olur. O halde her $1 \leq p \leq \infty$ için $s_p(0) = 1$ olur.

Aşağıda s -normunu tanımlamak için kullanılacak olan s dış fonksiyonlarının tanımı verilmiştir.

Tanım 2.2.2 (Dış Fonksiyon) Bir $s : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ konveks fonksiyonu ve her $u \geq 0$ için

$$\max\{1, u\} \leq s(u) \leq u + 1 \quad (2.6)$$

koşulunu sağlıyorsa dış fonksiyon olarak adlandırılır. Ayrıca $s(\infty) = \infty$ tanımlanarak, s fonksiyonunun tanım ve değer kümesi genişletilebilir.

Bir s dış fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca elde edilir.

i) s fonksiyonu, $u = 0$ için $\max\{1, 0\} \leq s(0) \leq 1$ sağlandığından $s(0) = 1$ olur.

ii)

$$1 = \inf_{k>0} \frac{1}{k} \max\{1, u\} \leq \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(k) \leq \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + k) = 1$$

olur. Dolayısıyla

$$\inf_{k>0} \frac{1}{k} s(k) = 1 \quad (2.7)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.2.3 Her $1 \leq p \leq \infty$ için s_p fonksiyonları dış fonksiyondur.

Bunun için $u \geq 0$ olmak üzere aşağıdaki durumları inceleyelim.

i) $p = 1$ ve $p = \infty$ için sırasıyla $s_1(u) = 1 + u$ ve $s_\infty(u) = \max\{1, u\}$ olduğundan (2.6) eşitsizliğini sağlarlar. Ayrıca s_1 ve s_∞ fonksiyonlarının konveksliği kolayca elde edilir.

ii) $1 < p < \infty$ için $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ olur. Binom açılımı ve s_p fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$1 + u^p \leq (1 + u)^p \text{ ise } s_p(u) \leq u + 1$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi $\max\{1, u\}$ fonksiyonu u değerine göre incelenirse

a) $\max\{1, u\} = 1$ ise $1 \leq 1 + u^p$ olduğundan $1 \leq (1 + u^p)^{1/p} = s_p(u)$ sağlanır. O halde $\max\{1, u\} \leq s_p(u)$ gerçekleşir.

b) $\max\{1, u\} = u$ olsun. Bu durumda $u^p \geq 1$ ise $(u^p + 1)^{1/p} \geq 1$ olur. O halde

$s_p(u) \geq 1 = \max\{1, u\}$ sağlanır. Bu durumda s_p fonksiyonları (2.6) eşitsizliğini sağlar. Ayrıca her $1 \leq p \leq \infty$ için s_p fonksiyonları konveks olduğundan, bu fonksiyonlar dış fonksiyondur.

Örnek 2.2.4

i) Her $0 \leq c \leq 1$ için

$$s_c(u) = \max\{1, u + c\}$$

ii) Her $1 \leq c \leq 2$ için

$$s_c(u) = \begin{cases} (c-1)u + 1 & , 0 \leq u \leq 1 \\ u + c - 1 & , u > 1 \end{cases}$$

funksiyonları birer dış fonksiyondur.

Gözlem 2.2.5 s bir dış fonksiyon olsun. s fonksiyonunun tanımı gereği her $f \in L_\Phi$ için

$$\inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) \geq \inf_{k>0} \frac{1}{k} \max\{1, I_\Phi(kf)\} = \|f\|_{\Phi, \infty} \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.2.6 s bir dış fonksiyon ve Φ bir Orlicz fonksiyonu olsun.

$$\|f\|_{\Phi, s} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) \quad (2.8)$$

funksiyonu L_Φ Orlicz uzayında bir normdur.

İspat. i) Gözlem 2.2.5 kullanılırsa, her $f \in L_\Phi \setminus \{0\}$ için

$$\|f\|_{\Phi, s} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) \geq \|f\|_{\Phi, \infty} \geq 0$$

sağlanır.

ii) $f \in L_\Phi$ ve $f = 0$ için

$$\|f\|_{\Phi, s} = \|0\|_{\Phi, s} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_\Phi(k0)) = \inf_{k>0} \frac{1}{k} = 0$$

olur. Tersine $\|f\|_{\Phi, s} = 0$ olsun. Yine Gözlem 2.2.5 kullanılırsa

$$0 = \|f\|_{\Phi, s} \geq \|f\|_\infty \geq 0$$

elde edilir. O halde $\|f\|_\infty = 0$ ise $f = 0$ olur.

iii) Bir $a \in \mathbb{R}$ ve $f \in L_\Phi$ olsun. Φ fonksiyonu çift olduğundan,

$$\begin{aligned}\|af\|_{\Phi,s} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_\Phi(kfa)) = \inf_{|a|k>0} \frac{|a|}{|a|k} s(I_\Phi(kf|a|)) \\ &= \inf_{c>0} \frac{|a|}{c} s(I_\Phi(cf)) = |a| \|f\|_{\Phi,s}\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

iv) Keyfi $f, g \in L_\Phi \setminus \{0\}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Fonksiyonun tanımı ve infimum özelliği kullanılırsa

$$\frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) \leq \|f\|_{\Phi,s} + \varepsilon \quad \text{ve} \quad \frac{1}{l} s(I_\Phi(lg)) \leq \|g\|_{\Phi,s} + \varepsilon$$

olacak şekilde $k, l > 0$ bulunur. Böylece $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = \frac{k+l}{kl}$ olmak üzere Φ ve s fonksiyonlarının konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{\Phi,s} &\leq \frac{k+l}{kl} s\left(I_\Phi\left(\frac{kl}{k+l}(f+g)\right)\right) \\ &= \frac{k+l}{kl} s\left(I_\Phi\left(\frac{l}{k+l}(kf) + \frac{k}{k+l}(lg)\right)\right) \\ &\leq \frac{k+l}{kl} \left(\frac{l}{k+l} s(I_\Phi(kf)) + \frac{k}{k+l} s(I_\Phi(lg))\right) \\ &= \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) + \frac{1}{l} s(I_\Phi(lg)) \\ &\leq \|f\|_{\Phi,s} + \|g\|_{\Phi,s} + 2\varepsilon\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|f+g\|_{\Phi,s} \leq \|f\|_{\Phi,s} + \|g\|_{\Phi,s}$$

eşitsizliği elde edilir.

O halde, $\|\cdot\|_{\Phi,s}$ fonksiyonu, L_Φ Orlicz uzayı üzerinde bir normdur. ■

Tanım 2.2.7 s dış fonksiyon ve Φ Orlicz fonksiyonu olsun. $\|\cdot\|_{\Phi,s}$ normu, s -normu olarak

adlandırılır.

Aşağıdaki önerme Lemma 2.2.10 ispatında kullanılacaktır.

Önerme 2.2.8 Luxemburg normu sıralı süreklidir.

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in L_\Phi$ olsun. Kabul edelim ki $f_n(t) \downarrow 0$ olsun. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi, \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k > 0} \frac{1}{k} \max\{1, I_\Phi(kf_n)\} \right)$$

ifadesi için $\max\{1, I_\Phi(kf_n)\}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi inceleyelim.

i) $I_\Phi(kf_n) < 1$ ise bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k > 0} \frac{1}{k} 1 \right) = 0$ elde edilir.

ii) $I_\Phi(kf_n) > 1$ ise ayrıca $f_n \downarrow 0$ olduğu kullanılırsa bir $k_1 > 0$ için

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k > 0} \frac{1}{k} I_\Phi(kf_n) \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_1} I_\Phi(k_1 f_n) = 0$$

elde edilir. Böylece Luxemburg normu sıralı süreklidir.

Gözlem 2.2.9 Luxemburg normu ve Orlicz normu birbirlerine denk olduklarından, Orlicz normu da sıralı sürekli bir normdur.

Lemma 2.2.10 s dış fonksiyon ve Φ Orlicz fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) Her $f \in L_\Phi$ için $\|f\|_{\Phi, \infty} \leq \|f\|_{\Phi, s} \leq \|f\|_{\Phi, 1} \leq 2\|f\|_{\Phi, \infty}$ sağlanır.

ii) L_Φ uzayındaki s normu ile üretilen norm topolojisi ile Luxemburg ya da Orlicz normu ile üretilen norm topolojileri denktir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in L_\Phi$ ve $f \in L_\Phi$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) Her $\lambda > 0$ için $I_\Phi(\lambda(f_n - f)) \rightarrow 0$

b) $\|f_n - f\|_{\Phi, s} \rightarrow 0$

(2.9)

iii) s - normu, E_Φ uzayında sıralı süreklidir.

İspat. i) s dış fonksiyonunun tanımından ve (2.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi, \infty} &= \inf_{k > 0} \frac{1}{k} \max\{1, I_\Phi(kf)\} \leq \inf_{k > 0} \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) = \|f\|_{\Phi, s} \\ &\leq \inf_{k > 0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi(kf)) = \|f\|_{\Phi, 1} \leq 2\|f\|_{\Phi, \infty} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

- ii) Kabul edelim ki her $\lambda > 0$ için $I_\Phi(\lambda(f_n - f)) \rightarrow 0$ olsun. Öte yandan Teorem 2.1.19 kullanılırsa, her $\lambda > 0$ için $\|f_n - f\|_{\Phi, \infty} \rightarrow 0$ yakınsaması Luxemburg normu için sağlanır. Ayrıca i) şikkında Luxemburg ve s normlarının denkleğinden (2.9) s - normu için de sağlanmış olur. Ters gerektirme benzer yöntemle yapılır.
- iii) Önerme 2.2.8'den Luxemburg normunun sıralı sürekliliğı bilinmektedir. Öte yandan i) şikkındaki eşitsizlik ve (2.9) denkleğı kullanılırsa s - normunun da sıralı sürekli bir norm olduğı kolayca elde edilir. O halde $f_n \downarrow 0$ iken $\|f_n\|_{\Phi, s} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ sağlanır. ■

Gözlem 2.2.11 L_Φ uzayı Orlicz ve Luxemburg normlarına göre bir Banach uzayıdır. Ayrıca Lemma 2.2.10'daki norm denkleğinden, L_Φ uzayı s -normuna göre de bir Banach uzayıdır.

2.3 YARI-FATOU ÖZELLİĞİ

Bu kısımda [21] makalesi temel alınarak s -normu ile donatılmış Orlicz uzayının yarı-Fatou özelliğı incelenmiştir.

Tanım 2.3.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun. X uzayındaki her (f_n) dizisi ve ölçülebilir her $f \in X$ fonskiyonu için $0 \leq f_n \uparrow f$ iken $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$ sağlanıyorsa X yarı-Fatou özelliğine sahiptir denir.

Orlicz, Luxemburg ve p -Amemiya normları yarı-Fatou özelliğini sağlar. Hudzik ve Maligranda 1-Amemiya normunun bu özelliğini sağladığını ispatladılar [6]. Ancak verilen bu ispat genel durum için sağlanmamaktadır. s - normları için yarı-Fatou özelliğı doğrudan L_Φ uzayındaki Orlicz ve Luxemburg normları gibi elde edilememektedir. Bunun için ayrıca bir teorem sunulmuştur. Öncesinde bu teoremin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.3.2 s bir dış fonskiyon, Φ bir Orlicz fonskiyonu olsun. Eğer $c = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} < \infty$ ise her $f \in L_\Phi$ için $\|f\|_{\Phi, s} \leq c\|f\|_1$ eşitsizliğı gerçeklenir.

İspat. Genelliğı kaybetmeksizin $f \in L^1$ olarak alınabilir. Ayrıca Φ fonskiyonunun konveks olduğı bilindiğinden $u_1 \leq u_2$ için

$$\frac{1}{u_1} \Phi(u_1) \leq \frac{1}{u_1} \Phi\left(\frac{u_1}{u_2} u_2\right) \leq \frac{1}{u_2} \Phi(u_2)$$

elde edilir. O halde $\frac{\Phi(u)}{u}$ fonksiyonu artandır. Fonksiyonunun artanlığı ve Monoton Yakınsaklık Teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\Phi,s} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_{\Phi}(kf)) \leq \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_{\Phi}(kf)) \\
&= \inf_{k>0} \frac{1}{k} \left(1 + \int_{\{t:f(t) \neq 0\}} \frac{\Phi(kf(t))}{|f(t)|} |f(t)| d\mu \right) \\
&= \inf_{k>0} \int_{\{t:f(t) \neq 0\}} \frac{\Phi(kf(t))}{k|f(t)|} |f(t)| d\mu \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{t:f(t) \neq 0\}} \frac{\Phi(kf(t))}{k|f(t)|} |f(t)| d\mu \\
&= c \int |f(t)| d\mu = c\|f\|_1 < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.3.3 s bir dış fonksiyon ve Φ bir Orlicz fonksiyonu olsun. $(L_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s})$ Orlicz uzayı yarı-Fatou özelliğini sağlar.

İspat. L_{Φ} Orlicz uzayında (f_n) bir dizi olsun. Yine $f \in L_{\Phi}$ ölçülebilir fonksiyon ve $0 \leq f_n \uparrow f$ olsun.

1.durum Kabul edelim ki $\|f\|_{\Phi,s} = \infty$ olsun. Bu durumda,

$$\infty = \|f\|_{\Phi,s} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_{\Phi}(kf))$$

olur. O halde her $k > 0$ için $s(I_{\Phi}(kf)) = \infty$ ve dolayısıyla $I_{\Phi}(kf) = \infty$ elde edilir. $M > 0$ keyfi bir sayı olsun. En az bir $k_0 > 0$ için $k_0 M < 1$ sağlanır. Böylece her $u \geq 0$ için $s(u) \geq 1$ olduğu kullanılırsa, her $0 < k \leq k_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{1}{k} s(I_{\Phi}(kf_n)) \geq \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k_0} > M$$

eşitsizliği sağlanır. Monoton Yakınsaklık Teoremi ve $f_n \uparrow f$ olduğu kullanılırsa

$$\int \Phi(k_0 f_n) d\mu \longrightarrow \int \Phi(k_0 f) d\mu = \infty$$

sağlanır. O halde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için $I_{\Phi}(k_0 f_n) > k_0 M$ sağlanır.

Böylece Φ fonksiyonunun konveksliğinden,

$$M < \frac{1}{k_0} I_{\Phi}(k_0 f_n) \leq \frac{1}{k} I_{\Phi}(k f_n) \leq \frac{1}{k} s(I_{\Phi}(k f_n))$$

eşitsizliği sağlanır. Her $n \geq n_0$ için $M < \frac{1}{k} s(I_{\Phi}(k f_n))$ olduğundan $M < \|f_n\|_{\Phi,s}$ elde edilir.

Bu durumda $\|f_n\|_{\Phi,s} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty = \|f\|_{\Phi,s}$ bulunur.

2.durum: $\|f\|_{\Phi,s} < \infty$ olsun. $f_n \uparrow f$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\|f_n\|_{\Phi,s} < \|f\|_{\Phi,s} < \infty$ olur.

Şimdi,

$$\frac{1}{k_n} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k_n} s(I_{\Phi}(k_n f_n)) - \frac{1}{n} \leq \|f_n\|_{\Phi,s} \leq \frac{1}{k_n} s(I_{\Phi}(k_n f_n)) \quad (2.10)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir k_n pozitif reel sayı dizisi alalım.

i) Kabul edelim ki (k_n) sınırlı ve $k \geq 0$ için $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k$ olsun. Bu durumda $k > 0$ dır. Aksi takdirde (2.10) eşitsizliğinden

$$\|f_n\|_{\Phi,s} \geq \frac{1}{k_n} - \frac{1}{n}$$

olur. Yine $n \rightarrow \infty$ için $\|f_n\|_{\Phi,s} > \infty$ çelişkisi elde edilir.

s ile Φ fonksiyonlarının sürekliliği, Fatou lemması ve (2.10) eşitsizliği kullanılırsa

$$\|f\|_{\Phi,s} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi,s} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k_n} s(I_{\Phi}(k_n f_n)) - \frac{1}{n} \right) \geq \frac{1}{k} s(I_{\Phi}(k f)) \geq \|f\|_{\Phi,s}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\|f_n\|_{\Phi,s} \rightarrow \|f\|_{\Phi,s}$ sağlanır.

ii) Kabul edelim ki k_n sınırlı olmasın. Bu durumda $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} < \infty$ olur. Aksi takdirde

$$\begin{aligned} \infty &> \|f\|_{\Phi,s} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi,s} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k_n} s(I_{\Phi}(k_n f_n)) - \frac{1}{n} \right) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k_n} I_{\Phi}(k_n f_n) - \frac{1}{n} \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} I_{\Phi}(k_n f_1) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{t: f_1(t) \neq 0\}} \frac{\Phi(k_n f_1(t))}{k_n |f_1(t)|} |f_1(t)| d\mu \\ &\geq \int_{\{t: f_1(t) \neq 0\}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(k_n f_1(t))}{k_n |f_1(t)|} |f_1(t)| d\mu = \infty \end{aligned}$$

olur. Bu ise çelişkidir. Her $m \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq m$ için f_n dizisinin artanlığı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{\Phi,s} + \frac{1}{n} &\geq \frac{1}{k_n} s(I_{\Phi}(k_n f_n)) \geq \frac{1}{k_n} I_{\Phi}(k_n f_n) \geq \frac{1}{k_n} I_{\Phi}(k_n f_m) \\ &= \int_{\{t: f_m(t) \neq 0\}} \frac{\Phi(k_n f_m(t))}{k_n |f_m(t)|} |f_m(t)| d\mu \end{aligned}$$

sağlanır. O halde $\frac{\Phi(u)}{u}$ fonksiyonunun artanlığı ve Monoton Yakınsaklık Teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \infty > \|f\|_{\Phi,s} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f_n\|_{\Phi,s} + \frac{1}{n} \right) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\{t: f_m(t) \neq 0\}} \frac{\Phi(k_n f_m(t))}{k_n |f_m(t)|} |f_m(t)| d\mu \right) \\ &= c \|f_m\|_1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

elde edilir. Böylece her $m \in \mathbb{N}$ için $f_m \in L^1$ olur. Yine, artan $\|f_m\|_1$ dizisi sınırlıdır. O halde $\|f\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_m\|_1 < \infty$ olur. Yani $f \in L^1$ bulunur. Bu durumda (2.11)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f_n\|_{\Phi,s} + \frac{1}{n} \right) \geq c \|f_m\|_1$$

eşitsizliği $m \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi,s} \geq c \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_1 = c \|f\|_1 \tag{2.12}$$

olur. Lemma 2.3.2 ve (2.12) eşitsizliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi,s} \leq \|f\|_{\Phi,s} \leq c \|f\|_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi,s}$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Phi,s} = \|f\|_{\Phi,s}$$

elde edilir. ■

2.4 HÖLDER ANLAMINDA EN KÜÇÜK DIŞ FONKSİYON

Bu kısımda [21] makalesi temel alınarak s -normunun Hölder anlamında en küçük eşleniğinin tanımı verilmiştir. Bunun devamında bazı özel s dış fonksiyonları için bu eşlenikler incelendi. Ardından tez çalışmasının ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar aracılığıyla kurulan kümeler tanımlandı. Son olarak yine bu kümeler s dış fonksiyonları için incelendi.

Tanım 2.4.1 s ve σ iki dış fonksiyon olsun. Eğer her $u, v \geq 0$ için

$$u + v \leq s(u)\sigma(v) \quad (2.13)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa s ve σ dış fonksiyonları birbirlerinin Hölder anlamında eşleniğidir denir.

Teorem 2.4.2 s, σ dış fonksiyonları birbirlerinin Hölder eşleniği, Ψ ise Φ Orlicz fonksiyonunun tümleyeni olsun. Bu durumda (T, Σ, μ) ölçü uzayındaki her f, g ölçülebilir fonksiyonları için Hölder eşitsizliği

$$\left| \int_T f(t)g(t)d\mu \right| \leq \|f\|_{\Phi, s} \|g\|_{\Psi, \sigma} \quad (2.14)$$

şeklindedir.

İspat. Her f, g ölçülebilir fonksiyonları ve $k, l > 0$ sayıları için Young eşitsizliğinden ve s, σ birbirlerinin Hölder eşleniği olduğundan,

$$\begin{aligned} \left| \int_T f(t)g(t)d\mu \right| &\leq \frac{1}{kl} \int_T |kf(t)| |lg(t)|d\mu \\ &\leq \frac{1}{kl} (I_\Phi(kf) + I_\Psi(lg)) \\ &\leq \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) \frac{1}{l} \sigma(I_\Psi(lg)) \end{aligned}$$

elde edilir. Sırasıyla k ve l üzerinden infimum alınırsa

$$\left| \int_T f(t)g(t)d\mu \right| \leq \|f\|_{\Phi, s} \|g\|_{\Psi, \sigma} \quad (2.15)$$

elde edilir. ■

Sonuç 2.4.3 Dış fonksiyon $\sigma(v) = 1 + v$ keyfi bir s dış fonksiyonunun Hölder anlamında eşleniğidir.

İspat. s bir dış fonksiyon olduğundan $s(u) \geq \max\{1, u\}$ eşitsizliği her zaman sağlanır. O halde her $v \geq 0$ için,

i) $0 \leq u \leq 1$ ise $u + v \leq 1 + v = \sigma(v) \leq s(u) \sigma(v)$ ifadesi sağlanır.

ii) $u \geq 1$ ise $u + v \leq u(1 + v) \leq s(u) \sigma(v)$ ifadesi sağlanır. ■

Bir σ dış fonksiyonu, s dış fonksiyonunun Hölder eşleniği olsun. Bu durumda $u \geq 0$ için

$$\sigma(u) \leq \sigma'(u) \leq 1 + u$$

koşulunu sağlayan σ' dış fonksiyonu, $u + v \leq s(u)\sigma(v) \leq s(u)\sigma'(v)$ eşitsizliğini sağlar. O halde σ' dış fonksiyonu, s dış fonksiyonunun Hölder eşleniğidir. Bu durumda Hölder eşleniklerinin bir minimumu vardır.

Teorem 2.4.4 Keyfi bir s dış fonksiyonu ve $0 \leq v < \infty$ için $s^*(\infty) = \infty$ ve

$$s^*(v) = \sup_{u \geq 0} \frac{u + v}{s(u)}$$

funksiyonu tanımlansın. s^* fonksiyonu s dış fonksiyonunun en küçük Hölder eşleniğidir.

İspat. Öncelikle s^* fonksiyonunun bir dış fonksiyon olduğunu gösterelim.

Sonuç 2.4.3 kullanılırsa $u + v \leq s(u)(1 + v)$ eşitsizliği bulunur. O halde $\frac{u + v}{s(u)} \leq 1 + v$ elde edilir. Dolayısıyla her $0 \leq v < \infty$ için

$$s^*(v) = \sup_{u \geq 0} \frac{u + v}{s(u)} \leq 1 + v$$

olur. Ayrıca

$$s^*(v) = \sup_{u \geq 0} \frac{u + v}{s(u)} \geq \sup_{u \geq 0} \frac{u + v}{1 + u} \geq \max \left\{ \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u + v}{1 + u}, \frac{0 + v}{0 + 1} \right\} = \max\{1, v\}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $\max\{1, v\} \leq s^*(v) \leq v + 1$ eşitsizliği sağlanır.

Şimdi ise s^* fonksiyonunun konveks olduğunu gösterelim. Keyfi $a, b > 0$ için $a + b = 1$ olmak

üzere her $v, w \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
 s^*(av + bw) &= \sup_{u \geq 0} \frac{u + av + bw}{s(u)} = \sup_{u \geq 0} \frac{(a+b)u + av + bw}{s(u)} \\
 &= \sup_{u \geq 0} \left(\frac{a(u+v)}{s(u)} + \frac{b(u+w)}{s(u)} \right) \\
 &\leq a \sup_{u \geq 0} \frac{(u+v)}{s(u)} + b \sup_{u \geq 0} \frac{(u+w)}{s(u)} \\
 &= as^*(v) + bs^*(w)
 \end{aligned}$$

sağlanır. O halde s^* fonksiyonu konvektir. Dolayısıyla s^* fonksiyonu bir dış fonksiyondur. Son olarak s^* fonksiyonunun en küçük Hölder eşleniği olduğunu gösterelim. σ fonksiyonu, s dış fonksiyonunun Hölder eşleniği ise her $u \geq 0$ için $u + v \leq s(u)\sigma(v)$ sağlanır. Buradan

$$\frac{(u+v)}{s(u)} \leq \sigma(v) \text{ ise } \sup_{u \geq 0} \frac{(u+v)}{s(u)} \leq \sigma(v)$$

sağlanır. O halde $s^*(v) \leq \sigma(v)$ elde edilir. Dolayısıyla s^* fonksiyonu, bir s dış fonksiyonunun en küçük Hölder eşleniğidir. ■

Tezin bundan sonraki kısımlarında s^* , s dış fonksiyonunun en küçük Hölder eşleniğini ifade edecektir.

Aşağıdaki gözlem, Sonuç 2.4.6 ispatında kullanılacaktır.

Gözlem 2.4.5 $s'_+ : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ şeklinde tanımlı olan fonksiyon, s dış fonksiyonunun sağdan türevi olsun. s'_+ fonksiyonu sürekli olmak zorunda değildir. Ayrıca s dış fonksiyonu konveks olduğundan s'_+ fonksiyonu artandır. Bir $d(u) = s(u) - (u+v)s'_+(u)$ fonksiyonu tanımlansın. Her $0 \leq u, v < \infty$ için $\frac{u+v}{s(u)}$ fonksiyonunun u değişkenine göre türevi alınırsa

$$\left(\frac{u+v}{s(u)} \right)'_{+} = \frac{d(u)}{s^2(u)} \quad (2.16)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\left(\frac{u+v}{s(u)} \right)'_{+} = 0 \text{ ancak ve ancak } d(u) = 0$$

denkliği sağlanır. O halde fonksiyonun sağ türevi ile $d(u)$ aynı işareti alırlar.

Aşağıdaki sonuçta, bazı özel s dış fonksiyonlarının en küçük Hölder eşlenikleri incelenmiştir.

Sonuç 2.4.6 Aşağıdaki s^* dış fonksiyonları, s dış fonksiyonları için en küçük Hölder eşlenikleridir.

a) $s_1(u) = 1 + u$ ise $s_1^*(v) = \max\{1, v\}$ olur.

b) $s_\infty(u) = \max\{1, u\}$ ise $s_\infty^*(v) = 1 + v$ olur.

c) Keyfi $0 \leq c \leq 1$ için $s_c(u) = \max\{1, u + c\}$ ise $s_c^*(v) = \max\{1, v + 1 - c\} = s_{1-c}(v)$ olur.

d) $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ ise $s_p^*(v) = (1 + v^q)^{1/q}$ olur.

İspat. a) $s_1(u) = 1 + u$ olsun.

$$\begin{aligned} \max\{1, v\} \leq s^*(v) &= \sup_{u \geq 0} \left(\frac{u+v}{1+u} \right) \leq \begin{cases} 1 & , 0 \leq v \leq 1 \\ \sup_{u \geq 0} \frac{vu+v}{u+1} & , v \geq 1 \end{cases} \\ &= \max\{1, v\} \end{aligned}$$

elde edilir.

b) $s_\infty(u) = \max\{1, u\}$ olsun. Bu durumda

$$1 + v \geq s_\infty^*(v) = \sup_{u \geq 0} \frac{(u+v)}{\max\{1, u\}} \geq \frac{(1+v)}{\max\{1, 1\}} = 1 + v$$

olur. Dolayısıyla $s_\infty^*(v) = 1 + v$ elde edilir.

c) $s_c(u) = \max\{1, u + c\}$ ise

$$(s_c)'_+(u) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq u < 1 - c \\ 1 & , u \geq 1 - c \end{cases}$$

olur. O halde $d(u)$ tanımı gereği

$$d(u) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq u < 1 \\ c - v & , u \geq 1 - c \end{cases}$$

sağlanır. O halde aşağıdaki durumlar sağlanır.

i) $v \leq c$ ise her $u \geq 0$ için $d(u) \geq 0$ olur. (2.16) eşitliğinden $s'_+(u) \geq 0$ olur. Bu durumda s'_+ fonksiyonu artan bir fonksiyondur ve

$$\begin{aligned} s_c^*(v) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u+v}{\max\{1, u+c\}} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u+v}{u+c} = 1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

eşitliği sağlanır.

ii) $v > c$ ise

$$\begin{cases} d(u) < 0 & , u > 1 - c \\ d(u) > 0 & , u < 1 - c \end{cases}$$

olur. Bu durumda,

$$s_c^*(v) = \frac{1 - c + v}{\max\{1, 1 - c + c\}} = 1 - c + v$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$s_c^*(v) = \max\{1, v + 1 - c\} = s_{1-c}(v)$$

eşitliği sağlanır.

d) $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ olsun.

$$s'_p(u) = \frac{u^{p/q}}{(1 + u^p)^{1/q}}$$

ve

$$d(u) = (1 + u^p)^{1/p} - (u + v) \frac{u^{p/q}}{(1 + u^p)^{1/q}} \quad (2.18)$$

olduğu kolayca elde edilir. (2.18) eşitliğinin sağ tarafı $(1 + u^p)^{1/q}$ ile çarpılıp sıfıra eşitlenirse,

$$d(u) = (1 + u^p)^{1/p+1/q} - (u + v)u^{p/q} = 0$$

elde edilir. $d(u) = 1 + u^p - u^{1+p/q} - vu^{p/q} = 0$ olur. Ayrıca $p = 1 + \frac{p}{q}$ olduğundan $1 = vu^{p/q}$ elde edilir yani $u = v^{1-q}$ olur. Bu durumda $u = v^{1-q}$ iken $d(u) = 0$ olur ve

$$s^*(v) = \sup_{u \geq 0} \frac{(u + v)}{(1 + u^p)^{1/p}} = \frac{v^{-q/p} + v}{(1 + v^{-q/p})^{1/p}} = (1 + v^q)^{1/q}$$

elde edilir. ■

Burada ileride kullanılacak olan fonksiyonlar için bazı bilgiler verilecektir. Bunun için [4] makalesinden yararlanılmıştır.

Tanım 2.4.7 $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, artan ve sağdan sürekli bir fonksiyon ise F dağılım fonksiyonu olarak adlandırılır. Bir dağılım fonksiyonunun, genelde, kesin anlamda bir tersi yoktur. s'_+ türev fonksiyonu da bir dağılım fonksiyonudur. s'_+ dağılım fonksiyonunun genelleştirilmiş tersi aşağıdaki dört şekilde tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} s'^*_{+}(v) &= \sup\{u \geq 0 : s'_+(u) < v\} & s'^{\circ}_{+}(v) &= \inf\{u \geq 0 : s'_+(u) \geq v\} \\ s'^{\circ\circ}_{+}(v) &= \inf\{u \geq 0 : s'_+(u) > v\} & s'^{**}_{+}(v) &= \sup\{u \geq 0 : s'_+(u) \leq v\} \end{aligned}$$

Teorem 2.4.8 s'_+ fonksiyonunun genelleştirilmiş tersleri

$$s'^*_{+}(v) = s'^{\circ}_{+}(v) \leq s'^{-1}_{+}(v) \leq s'^{\circ\circ}_{+}(v) = s'^{**}_{+}(v) \quad (2.19)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. Bir $v \geq 0$ için $u_0 \in \{u : s'_+(u) \geq v\}$ olsun. O halde $u_0 \notin \{u : s'_+(u) < v\}$ olur. Dolayısıyla $u_0 \geq s'^*_{+}(v)$ olur. O halde $s'^{\circ}_{+}(v) \geq s'^*_{+}(v)$ sağlanır. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için s'°_{+} tanımından $s'_+(s'^{\circ}_{+}(v) - \varepsilon) < v$ olur. Buradan $s'^{\circ}_{+}(v) - \varepsilon \leq s'^*_{+}(v)$ sağlanır. O halde $s'^{\circ}_{+}(v) \leq s'^*_{+}(v)$ olur. $s'^{\circ}_{+}(v) = s'^*_{+}(v)$ eşitliği sağlanır. Diğer eşitsizlik benzer şekilde elde edilir. Kabul edelim ki $A = \{u \geq 0 : s'_+(u) \geq v\}$ ve $B = \{u \geq 0 : s'_+(u) > v\}$ olsun. Bu durumda $B \subset A$ olduğundan dolayı $\inf A \leq \inf B$ sağlanır. ■

Teorem 2.4.9 $s'_+{}^{\circ\circ}$ sağdan süreklidir ve $s'_+{}^{\circ}$ soldan süreklidir.

İspat. Kabul edelim ki $s'_+{}^{\circ\circ}$ bir v_0 noktasında sağdan sürekli olmasın. Bu durumda $s'_+{}^{\circ\circ}(v_0^+) > h > s'_+{}^{\circ\circ}(v_0)$ olacak şekilde bir h sayısı vardır. Ayrıca $s'_+(h) > v_0$ iken $s'_+(h) > v_1 > v_0$ olacak şekilde bir v_1 sayısı vardır. Dolayısıyla $h > s'_+{}^{\circ\circ}(v_1) \geq s'_+{}^{\circ\circ}(v_0^+)$ olur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $s'_+{}^{\circ\circ}$ fonksiyonu sağdan süreklidir. Benzer şekilde $s'_+{}^{\circ}$ fonksiyonunun soldan sürekli olduğu kolayca elde edilir. ■

Uyarı 2.4.10 Teorem 2.4.8'de $v \in [0, 1]$ olarak alındığında, (2.19) eşitsizliği, eşitlik haline dönüşür.

Tanım 2.4.11 Bir $w : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $0 \leq v \leq 1$ için

$$w(v) = \int_0^v s'_+{}^{-1}(t) dt$$

olacak şekilde tanımlansın. Tanımı gereği w fonksiyonu negatif olmayan, artan ve sürekli bir fonksiyondur.

Önerme 2.4.12 Aşağıdaki ifadeler gerçektir.

- i) Her $u \geq u_0$ için $s(u) = u$ olması için gerek ve yeter koşul $w(s'_+{}^{-1}(u_0)) = 1$ olacak şekilde bir $u_0 > 0$ var olmasıdır.
- ii) Bir s dış fonksiyonunun sonsuzdaki eğik asimptotu $v(u) = u + 1 - w(1)$ olur.
- iii) Bir s dış fonksiyonunun sonsuzdaki eğik asimptotunun $v(u) = u$ olması için gerek yeter koşul $w(1) = 1$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. i) ve ii) şıkları birlikte ispatlanacaktır. Her $0 \leq u$ ve $0 \leq v \leq 1$ için, artan fonksiyonlar için Young eşitsizliğinden

$$uv \leq \int_0^u s'_+(t) dt + \int_0^v s'_+{}^{-1}(t) dt = s(u) - s(0) + w(v)$$

ifadesi sağlanır. Burada $v = s'_+(u)$ yazılırsa, eşitlik sağlandığından

$$us'_+(u) = s(u) - 1 + w(s'_+(u)) \quad (2.20)$$

elde edilir. Her $u \geq 0$ için $\lim_{u \rightarrow \infty} s'_+(u) = 1$ olduğundan ve w fonksiyonu sürekli olduğundan dolayı $\lim_{u \rightarrow \infty} w(s'_+(u)) = w(1)$ sağlanır. Her $u \geq 0$ için $s(u) \geq u \geq us'_+(u)$ olduğundan, her

$0 \leq v \leq 1$ için

$$0 \leq w(v) \leq w(1) = \lim_{u \rightarrow \infty} w(s'_+(u)) = \lim_{u \rightarrow \infty} (us'_+(u) - s(u) + 1) \leq \lim_{u \rightarrow \infty} 1 = 1$$

olur. Ayrıca

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (s(u) - us'_+(u)) = \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - w(s'_+(u))) = 1 - w(1)$$

sağlanır. Ayrıca

$$s'_+ \circ (s'_+(u)) = \inf\{a \geq 0 : s'_+(a) \geq s'_+(u)\}$$

olmak üzere s'_+ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan dolayı $a > u$ sağlanır. Buradan, $s'_+ \circ (s'_+(u)) \geq u$ sağlanır. O halde, μ -h h h $t \in [s'_+(u), 1]$ için,

$$u \leq s'_+ \circ (s'_+(u)) \leq s'_+ \circ (t) = s'_+{}^{-1}(t)$$

sağlanır. O halde $u \leq s'_+{}^{-1}(t)$ bulunur. Ayrıca

$$\int_{s'_+(u)}^1 u dt = u - us'_+(u) \text{ ve } u \leq s'_+(t)$$

olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{u \rightarrow \infty} (u - us'_+(u)) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{s'_+(u)}^1 u dt \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{s'_+(u)}^1 s'_+(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 s'_+{}^{-1}(t) dt - \int_0^{s'_+(u)} s'_+{}^{-1}(t) dt \right) \\ &= w(1) - \lim_{u \rightarrow \infty} w(s'_+(u)) = 0 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. O halde $\lim_{u \rightarrow \infty} (s(u) - us'_+(u)) = 0$ olur. Böylece,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} s(u) - u = \lim_{u \rightarrow \infty} (s(u) - u + us'_+(u) - us'_+(u)) = \lim_{u \rightarrow \infty} (s(u) - us'_+(u)) = 1 - w(1)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda $\lim_{u \rightarrow \infty} s(u) - u = 1 - w(1)$ olur. Yani s fonksiyonunun sonsuzdaki eğik asimptotu $u \rightarrow u + 1 - w(1)$ doğrusudur. Burada asimptotun eğimi 1 ve y-kesiti $1 - w(1)$ dir.

iii) $v(u) = u$ ve $w(1) = 1$ eşitlikleri sırasıyla ii) şıkkındaki eşitlikte yerine yazılırsa istenilen elde edilir. ■

Tanım 2.4.13 Her $0 \leq u < \infty$ ve $0 \leq v \leq \infty$ için $\beta_s : [0, \infty) \times [0, \infty] \rightarrow [-\infty, 1]$ olmak üzere

$$\beta_s(u, v) = 1 - w(s'_+(u)) - vs'_+(u)$$

fonksiyonu tanımlansın. Burada w fonksiyonu ve s'_+ fonksiyonu artan olduğundan ve β_s fonksiyonu tanımı gereği bu iki fonksiyon negatif durumunda olduğu için β_s fonksiyonu azalandır.

Teorem 2.4.14 s bir dış fonksiyon olsun. $0 \leq v < \infty$ için

$$u^*(v) = \inf\{u \geq 0 : \beta_s(u, v) \leq 0\}$$

$$u^{**}(v) = \sup\{u \geq 0 : \beta_s(u, v) \geq 0\}$$

olsun. Bu durumda her $0 \leq v < \infty$ için

- i) $u^{**}(v) < \infty$ ise her $u^*(v) \leq u \leq u^{**}(v)$ için $s^*(v) = \frac{u+v}{s(u)}$ olur.
- ii) $u^*(v) < \infty$ ve $u^{**}(v) = \infty$ ise her $u^*(v) \leq u < \infty$ için $s^*(v) = \frac{u+v}{s(u)}$ olur.
- iii) $u^*(v) = \infty$ ise $s^*(v) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u+v}{s(u)}$ olur.

İspat. Her sabit $0 \leq v < \infty$ ve her $0 \leq u < \infty$ için

$$\left(\frac{u+v}{s(u)}\right)'_{+} = \frac{s(u) - (u+v)s'_+(u)}{s^2(u)} = \frac{1 - w(s'_+(u)) - vs'_+(u)}{s^2(u)} = \frac{\beta_s(u, v)}{s^2(u)} \quad (2.21)$$

sağlanır.

i) Eğer $u \geq u^*(v)$ ise infimum tanımı gereği $\beta_s(u, v) \leq 0$ sağlanır. Benzer şekilde $u \leq u^{**}(v)$ ise supremum tanımı gereği $\beta_s(u, v) \geq 0$ olur. Dolayısıyla her $u^*(v) \leq u \leq u^{**}(v)$ için $\beta_s(u, v) = 0$ bulunur. O halde (2.21) eşitliğindeki türev fonksiyonu 0 olur. Bu durumda her $u^*(v) \leq u \leq u^{**}(v)$ için $s^*(v) = \frac{u+v}{s(u)}$ elde edilir.

ii) Eğer $u^{**}(v) = \infty$ ise bu durumda her $u \geq 0$ için $\beta_s(u, v) \geq 0$ sağlanır. Ayrıca $u^*(v) \leq u$ ise $\beta_s(u, v) \leq 0$ olur. Bu durumda $u^*(v) \leq u < u^{**}(v) = \infty$ için $\beta_s(u, v) = 0$ ve $s^*(v) = \frac{u+v}{s(u)}$ eşitliği sağlanır.

iii) Kabul edelim ki $u^*(v) = \infty$ olsun. Bu durumda her $u \geq 0$ için $\beta_s(u, v) > 0$ sağlanır. Böylece (2.21) eşitliğinden türev pozitif olduğundan, $s^*(v) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u+v}{s(u)}$ eşitliği sağlanır. ■

Sonuç 2.4.15 s bir dış fonksiyon olsun.

$$Z_s = \{(u, v) : 0 \leq u, v < \infty, u + v = s(u)s^*(v)\}$$

kümesi tanımlansın. Keyfi $0 \leq u, v < \infty$ için $(u, v) \in Z_s$ olması için gerek yeter koşul $u \in [u^*(v), u^{**}(v)]$ olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki her $0 \leq u, v < \infty$ için $u^*(v) \leq u \leq u^{**}(v)$ olsun. Dolayısıyla $u^*(v) \leq u < \infty$ olur. Teorem 2.4.14 kullanılırsa, $s^*(v) = \frac{u+v}{s(u)}$ sağlanır. Böylece, $s^*(v)s(u) = u + v$ bulunur. O halde $(u, v) \in Z_s$ sağlanır.

Tersine $(u, v) \in Z_s$ olsun. Kabul edelim ki $u < u^*(v)$ olsun. Dolayısıyla her $w \in (u, u^*(v))$ için infimum tanımından $\beta(w, v) > 0$ olur. Buradan, $\left(\frac{w+v}{s(w)}\right)' = \frac{\beta_s(w, v)}{s^2(w)} > 0$ sağlanır. O halde $w \mapsto \frac{w+v}{s(w)}$ fonksiyonu kesin artandır. Bu durumda $u < w$ olmak üzere

$$\frac{u+v}{s(u)} < \frac{w+v}{s(w)} < \sup_{u < w < u^*(v)} \frac{w+v}{s(w)} \leq \sup_{w \geq 0} \frac{w+v}{s(w)} = s^*(v)$$

sağlanır. Bu ise $(u, v) \in Z_s$ iken $s^*(v)s(u) = u + v$ olmasıyla çelişir. O halde $u \geq u^*(v)$ sağlanır. Benzer olarak, $u^{**}(v) < u < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $w \in (u^{**}(v), u)$ için $\beta_s(w, v) < 0$ olur. $w \mapsto \frac{w+v}{s(w)}$ fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. O halde $u > w$ olmak üzere

$$\frac{u+v}{s(u)} < \frac{w+v}{s(w)} < \sup_{u \geq w \geq u^{**}(v)} \frac{w+v}{s(w)} \leq \sup_{w \geq 0} \frac{w+v}{s(w)} = s^*(v)$$

bulunur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $u \leq u^{**}(v)$ olur. ■

Sonuç 2.4.16 Keyfi bir $0 \leq v < \infty$ için

$$U(v) = \{0 \leq u < \infty : u^*(v) \leq u \leq u^{**}(v)\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda

$$Z_s = \bigcup_{0 \leq v < \infty} (U(v) \times \{v\})$$

olur. Özel olarak bazı s dış fonksiyonları için Z_s kümeleri aşağıdaki gibidir.

1) Bir $s_1(u) = 1 + u$ dış fonksiyonu için $U(1) = [0, \infty)$ olur ve

$$Z_{s_1} = \{(u, 1) : 0 \leq u < \infty\} \cup \{(0, v) : 1 \leq v < \infty\}$$

sağlanır.

2) Bir $s_\infty(u) = \max\{1, u\}$ dış fonksiyonu için, her $v > 0$ olmak üzere $U(v) = \{1\}$ olur ve

$$Z_{s_\infty} = \{(u, 0) : 1 \leq u < \infty\} \cup \{(1, v) : 1 \leq v < \infty\}$$

sağlanır.

3) Eğer $0 < c < 1$ için $s_c(u) = \max\{1, u + c\}$ ise bu durumda her $v \geq c$ için $1 - c \in U(v)$ olur ve

$$Z_{s_c} = \{(u, c) : 1 - c \leq u < \infty\} \cup \{(1 - c, v) : c \leq v < \infty\}$$

sağlanır.

4) Eğer $1 < p < \infty$ için $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ ise bu durumda her $v > 0$ için $U(v) = \{v^{-q/p}\}$ olur. Ayrıca $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere

$$Z_{s_p} = \{(u, v) : u, v > 0, u^{1/q} v^{1/p} = 1\}$$

sağlanır.

İspat. Sonuç 2.4.15'ten $(u, v) \in Z_s$ olması için gerek ve yeter koşul $u \in [u^*(v), u^{**}(v)]$ olmasıdır. O halde buradan $Z_s = \bigcup_{0 \leq v < \infty} (U(v) \times \{v\})$ sağlanır. Tanım 2.4.13 ve Teorem 2.4.14'ten

$$\beta_s(u, v) = 1 - w(s'_+(u)) - v s'_+(u)$$

$$u^*(v) = \inf\{u \geq 0 : \beta_s(u, v) \leq 0\}$$

$$u^{**}(v) = \sup\{u \geq 0 : \beta_s(u, v) \geq 0\}$$

olduğu biliniyor.

1) Eğer $s_1(u) = 1 + u$ ise $s'_+(u) = 1$ olur. Böylece (2.20) eşitliğinden

$$w(s'_+(u)) = u s'_+(u) - s_1(u) + 1$$

sağlanır ve $w(1) = 0$ olur. Buradan $\beta_s(u, v) = 1 - v$ bulunur.

Şimdi β_s fonksiyonunu aşağıdaki gibi inceleyelim.

i) Her $0 \leq v < 1$ için $0 < 1 - v$ olur. Dolayısıyla her $u \geq 0$ için $\beta_s(u, v) > 0$ olur. Dolayısıyla buradan infimum ve supremum tanımı gereği $u^*(v) = u^{**}(v) = \infty$ bulunur.

ii) Her $1 \leq v < \infty$ için $1 - v \leq 0$ olur. Böylece her $0 \leq u$ için $\beta_s(u, v) \leq 0$ olduğundan, $u^*(v) = 0$ ve $u^{**}(v) = 0$ bulunur. O halde

$$u^*(v) = \begin{cases} \infty & , 0 \leq v < 1 \\ 0 & , 1 \leq v < \infty \end{cases} \quad \text{ve} \quad u^{**}(v) = \begin{cases} \infty & , 0 \leq v \leq 1 \\ 0 & , 1 < v < \infty \end{cases}$$

elde edilir. Öte yandan, $0 \leq v < 1$ için $u^*(v) = u^{**}(v) = \infty$ olduğundan $U(v) = \emptyset$ bulunur. Ayrıca $v = 1$ için $0 = u^*(v) \leq u < u^{**}(v) = \infty$ olur. Üstelik $1 < v < \infty$ için $0 = u^*(v) \leq u \leq u^{**}(v) = 0$ olduğundan $U(v) = \{0\}$ elde edilir. Böylece

$$U(v) = \begin{cases} \emptyset & , 0 \leq v < 1 \\ [0, \infty) & , v = 1 \\ \{0\} & , 1 < v < \infty \end{cases}$$

olur. Ayrıca

$$Z_{s_1} = ([0, \infty) \times \{1\}) \cup (\{0\} \times (1, \infty)) = \{(u, 1) : 0 \leq u < \infty\} \cup \{(0, v) : 1 \leq v < \infty\}$$

bulunur.

2) Eğer $s_\infty(u) = \max\{1, u\}$ ise her $0 \leq v \leq \infty$ için

$$s'_+(u) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq u < 1 \\ 1 & , 1 < u < \infty \end{cases}$$

bulunur. Ayrıca (2.20) eşitliğinden ve β_s fonksiyonunun tanımından,

$$w(s'_+(u)) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq u < 1 \\ 1 & , 1 < u < \infty \end{cases} \quad \text{ve} \quad \beta_s(u, v) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq u < 1 \\ -v & , 1 \leq u < \infty \end{cases}$$

elde edilir.

Her $0 \leq v < \infty$ için $\beta_s(u, v) \leq 0$ olduğundan $u^*(v) = 1$ bulunur. Benzer olarak her $0 \leq v < \infty$ için $\beta_s(u, v) \geq 0$ ifadesi yalnızca $0 \leq u < 1$ değerleri için sağlanır. O halde $0 \leq v < \infty$ için $u^{**}(v) = 1$ bulunur. Ayrıca $v = 0$ durumunda her $u \geq 0$ için $\beta_s(u, v) \geq 0$ olduğundan,

$u^{**}(0) = \infty$ elde edilir. Bu durumda Teoremin 1) şıkkının ispatına benzer şekilde

$$u^{**}(v) = \begin{cases} \infty & , v = 0 \\ 1 & , 0 < v < \infty \end{cases} \quad ve \quad U(v) = \begin{cases} [1, \infty) & , v = 0 \\ \{1\} & , 0 < v < \infty \end{cases}$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} Z_{s_\infty} &= \bigcup_{0 \leq v < \infty} (U(v) \times \{v\}) \\ &= ([1, \infty) \times \{0\}) \cup (\{1\} \times (0, \infty)) \\ &= \{(u, 0) : 1 \leq u < \infty\} \cup \{(1, v) : 0 < v < \infty\} \end{aligned}$$

elde edilir.

3) Keyfi $0 < c < 1$ için $s_c(u) = \max\{1, u + c\}$ olmak üzere, her $0 \leq v < \infty$ için

$$s'_+(u) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq u < 1 - c \\ 1 & , 1 - c \leq u < \infty \end{cases}$$

bulunur. Yine (2.20) eşitliğinden

$$w(s'_+(u)) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq u < 1 - c \\ 1 - c & , 1 - c \leq u < \infty \end{cases} \quad ve \quad \beta(u, v) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq u < 1 - c \\ c - v & , 1 - c \leq u < \infty \end{cases}$$

olur. O halde Sonucun 1) ve 2) şıklarının ispatına benzer yöntemlerle

$$u^*(v) = \begin{cases} 1 - c & , c \leq v < \infty \\ \infty & , 0 \leq v < c \end{cases} \quad ve \quad u^{**}(v) = \begin{cases} 1 - c & , c < v < \infty \\ \infty & , 0 \leq v \leq c \end{cases}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$U(v) = \begin{cases} \emptyset & , 0 \leq v < c \\ [1 - c, \infty) & , v = c \\ \{1 - c\} & , c < v < \infty \end{cases}$$

sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}
Z_{s_c} &= ([1-c, \infty) \times \{c\}) \cup (\{1-c\} \times (c, \infty)) \\
&= \{(u, c) : 1-c \leq u < \infty\} \cup \{(1-c, v) : c < v < \infty\}
\end{aligned}$$

bulunur.

4) Eğer $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ ise her $u \in [0, \infty)$ ve $0 \leq v \leq \infty$ için (2.20) eşitliğinden

$$w(s'_+(u)) = 1 - (u^p + 1)^{1/p} + u \frac{u^{p/q}}{(1 + u^p)^{1/q}}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\beta_s(u, v) &= 1 - w(s'_+(u)) - v s'_+(u) \\
&= (u^p + 1)^{1/p} - (u + v) \frac{u^{p/q}}{(1 + u^p)^{1/q}} \\
&= \frac{1 - v u^{p/q}}{(1 + u^p)^{1/q}}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. O halde $\beta_s(u, v) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $1 - v u^{p/q} = 0$ olmasıdır.

Yine infimum ve supremum tanımı gereği

$$u^*(v) = u^{**}(v) = \begin{cases} \infty & , v = 0 \\ v^{-q/p} & , 0 < v < \infty \end{cases} \quad \text{ve} \quad U(v) = \begin{cases} \emptyset & , v = 0 \\ \{v^{-q/p}\} & , 0 < v < \infty \end{cases}$$

elde edilir. O halde

$$Z_{s_p} = \{v^{-q/p}\} \times (0, \infty) = \{(u, v) : u, v > 0, u^{1/q} v^{1/p} = 1\}$$

sağlanır. ■

Teorem 2.4.17 Keyfi bir s dış fonksiyonu için $s^{**} = (s^*)^*$ olarak tanımlansın. $s^{**} = s$ eşitliği sağlanır.

İspat. Her $0 \leq u < \infty$ için

$$s^{**}(u) = (s^*)^*(u) = \sup_{v \geq 0} \frac{u+v}{s^*(v)} = \sup_{v \geq 0} \frac{u+v}{\sup_{w \geq 0} \frac{w+v}{s(w)}} \leq \sup_{v \geq 0} \frac{u+v}{\frac{u+v}{s(u)}} = s(u) \quad (2.22)$$

sağlanır. Ters eşitsizliği göstermek için aşağıdaki iki durumu inceleyelim.

i) Keyfi bir $u \geq 0$ sabiti için $s(u) = 1$ olsun. Yine s^{**} fonksiyonu bir dış fonksiyon olduğundan, $1 \leq s^{**}(u) \leq s(u) = 1$ sağlanır. Dolayısıyla $s^{**}(u) = s(u)$ sağlanır.

ii) Kabul edelim ki $u \geq 0$ için $s(u) > 1$ olsun. Böylece s dış fonksiyonunun ve s'_+ türev fonksiyonunun tanımından,

$$A = \{0 < u < \infty : s(u) > 1\} \subset \{0 < u < \infty : s'_+(u) > 0\}$$

şeklinde bir A kümesi vardır. Böylece, bu A kümesini göz önüne aldığımızda bir $u \in A$ için

$$v_u = \frac{1 - w(s'_+(u))}{s'_+(u)}$$

tanımlansın. O halde $0 \leq v_u < \infty$ ve

$$\begin{aligned} \beta_s(u, v_u) &= 1 - w(s'_+(u)) - v_u s'_+(u) \\ &= 1 - w(s'_+(u)) - \frac{1 - w(s'_+(u))}{s'_+(u)} s'_+(u) = 0 \end{aligned}$$

sağlanır. Öte yandan $\beta_s(u, v) = 0$ ise $u^*(v) \leq u \leq u^{**}(v)$ olduğundan $u^*(v) \leq \min\{u^{**}(v), \infty\}$ elde edilir. Teorem 2.4.14 kullanılırsa,

$$s^*(v_u) = \frac{u + v_u}{s(u)} \quad (2.23)$$

bulunur. O halde (2.22) eşitsizliği ve (2.23) eşitliğinden

$$u + v_u \leq s^{**}(u) s^*(v_u) \leq s(u) s^*(v_u) = u + v_u$$

sağlanır. Böylece $s^{**}(u) = s(u)$ eşitliği elde edilir. ■

2.5 NORM ELDE EDİLEBİLİRLİĞİ

Bu kısımda [21] makalesi temel alınarak, sabit bir $f \in L_\Phi \setminus \{0\}$ fonksiyonu için s -normunun infimum değerlerine ulaştığı belirli bir aralıktaki k değerleri incelenmiştir. Bir başka ifadeyle, s -normunun elde edilebilirliği incelenmiştir. Bir s dış fonksiyon ile bir Φ Orlicz fonksiyonu

olsun. Keyfi $f \in L_\Phi \setminus \{0\}$ için aşağıdaki ifadeler tanımlansın.

$$D(f) = \{0 < k < \infty : I_\Phi(kf) < \infty\}$$

$$k^*(f) = \inf\{k \in D(f) : \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \leq 0\}$$

$$k^{**}(f) = \sup\{k \in D(f) : \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \geq 0\}$$

Buradan, $k \mapsto \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|)))$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında azalandır. Ayrıca (2.20) eşitliğinden $w(s'_+(0)) = 0$ olduğu kolayca elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \beta_s(I_\Phi(0f), I_\Psi(p_+(0|f|))) &= 1 - w(s'_+(I_\Phi(0)) - I_\Psi(p_+(0))s'_+(I_\Phi(0))) \\ &= 1 - w(s'_+(0)) - 0s'_+(0) = 1 \end{aligned}$$

bulunur.

Öte yandan $0 < k^*(f) \leq k^{**}(f) \leq \infty$ eşitsizliği her zaman sağlanır. Kabul edelim ki sağlanmasın, bu durumda en az bir $k > 0$ sayısı vardır öyle ki $k^*(f) > k > k^{**}(f)$ sağlanır. k^* ve k^{**} fonksiyonlarının tanımları gereği

$$k^*(f) > k \text{ için } \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) > 0 \text{ ve}$$

$$k^{**}(f) < k \text{ için } \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) < 0$$

olur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $0 < k^*(f) \leq k^{**}(f) \leq \infty$ her zaman sağlanır.

Eğer $k^*(f) < k^{**}(f)$ ise her $k \in [k^*(f), k^{**}(f)]$ için

$$k^*(f) \leq k \text{ ise } \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \leq 0$$

$$k^{**}(f) \geq k \text{ ise } \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \geq 0$$

olduğundan $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) = 0$ olur.

Tanım 2.5.1 Her $f \in L_\Phi \setminus \{0\}$ için $k^*(f) < \infty$ ise s -normu k^* -sonludur, eğer $k^{**}(f) < \infty$ ise s -normu k^{**} -sonludur. Eğer $k^*(f) = k^{**}(f) < \infty$ ise s -normu k -tektir denir.

Aşağıdaki teorem s -normunun elde edilebilirliğine dair bilgi vermektedir.

Teorem 2.5.2 s bir dış fonksiyon ve Φ bir Orlicz fonksiyonu olsun. Her $f \in L_\Phi \setminus \{0\}$ için

$$\begin{aligned}\bar{k}^*(f) &= \inf\{k > 0 : \|f\|_{\Phi,s} = \frac{1}{k}s(I_\Phi(kf))\} \\ \bar{k}^{**}(f) &= \sup\{k > 0 : \|f\|_{\Phi,s} = \frac{1}{k}s(I_\Phi(kf))\}\end{aligned}$$

tanımlansın. Bu durumda $\bar{k}^*(f) = k^*(f)$ ve $\bar{k}^{**}(f) = k^{**}(f)$ sağlanır.

İspat. $f \in L_\Phi \setminus \{0\}$ olsun. $D^\circ(f)$, $D(f)$ kümesinin iç noktalarının kümesini gösterebiliriz. Öte yandan $k \mapsto \left[\frac{1}{k}s(I_\Phi(kf)) - 1 \right]$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde artandır. Gerçekten de, s dış fonksiyonu konveks olduğundan $u \mapsto s(u) - 1$ fonksiyonu da konvektir. Ayrıca Φ ve s fonksiyonlarının konveksliğinden her $0 < k_1 \leq k_2$ için

$$\frac{1}{k_1}s(I_\Phi(k_1f)) - 1 = \frac{1}{k_1}s(I_\Phi(\frac{k_1}{k_2}k_2f)) - 1 \leq \frac{1}{k_2}s(I_\Phi(k_2f)) - 1$$

sağlanır. O halde

$$k \mapsto \frac{1}{k}s(I_\Phi(kf)) = \frac{1}{k}(s(I_\Phi(kf)) - 1) + \frac{1}{k}$$

fonksiyonu $k \in D^\circ(f)$ noktasında sonlu sağ türeve sahiptir. Bu fonksiyonun k değişkenine göre türevi alınırsa her $k \in D^\circ(f)$ için Young eşitliği ve (2.20) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{k}s(I_\Phi(kf)) \right)'_+ &= \frac{1}{k^2} \left(s'_+(I_\Phi(kf)) \int_T p_+(k|f(t)|)k|f(t)|d\mu - s(I_\Phi(kf)) \right) \\ &= \frac{1}{k^2} (s'_+(I_\Phi(kf))(I_\Phi(k|f|) + I_\Psi(p_+(k|f|))) - s(I_\Phi(kf))) \\ &= \frac{1}{k^2} (s'_+(I_\Phi(kf))I_\Phi(k|f|) + s'_+(I_\Phi(kf))I_\Psi(p_+(k|f|))) - s(I_\Phi(kf)) \\ &= \frac{1}{k^2} (w(s'_+(I_\Phi(kf))) - 1 + I_\Psi(p_+(k|f|))s'_+(I_\Phi(kf))) \\ &= -\frac{1}{k^2}\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|)))\end{aligned}\tag{2.24}$$

elde edilir. $v \mapsto \beta_s(\cdot, v)$ ve $u \mapsto \beta_s(u, \cdot)$ için β_s fonksiyonu azalan olduğundan $k \rightarrow \left(\frac{1}{k}s(I_\Phi(kf)) \right)'_+$ türev fonksiyonu $D^\circ(f)$ aralığı üzerinde artandır.

Eğer $k^*(f) = \infty$ ise, her $k \in D(f)$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \leq 0$ olduğundan $D^\circ(f) = (0, \infty)$ olur.

Kabul edelim ki $k^*(f) = \infty$ olsun. Bu durumda her $k > 0$ için

$$\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) > 0$$

sağlanır. O halde

$$\left(\frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) \right)'_{+} < 0$$

olacak şekilde hiçbir $k > 0$ sayısı yoktur. Aksi takdirde bir $k > 0$ olsaydı, $s'_+(I_\Phi(kf)) \subset [0, 1]$ olmasıyla çelişir. Bu durumda $\bar{k}^* = \infty$ sağlanır. Ters gerektirme yine aynı yolla gerçekleşir. Şimdi kabul edelim ki $k_0 \in D^\circ(f)$ olsun ve $k^*(f) \leq k_0 \leq k^{**}(f)$ sağlansın. Bu durumda $\beta_s(I_\Phi(k_0f), I_\Psi(p_+(k_0|f|))) = 0$ olur. O halde

i) β_s fonksiyonunun azalan olduğu bilindiğinden her $0 < k < k_0$ için

$$\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \geq \beta_s(I_\Phi(k_0f), I_\Psi(p_+(k_0|f|))) = 0$$

sağlanır. (2.24) eşitliğinden

$$\left(\frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) \right)'_{+} \leq 0$$

sağlanır. Yine benzer olarak

ii) Her $k \in D^\circ(f) \cap (k_0, \infty)$ için

$$0 = \beta_s(I_\Phi(k_0f), I_\Psi(p_+(k_0|f|))) \leq \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|)))$$

olur ve (2.24) eşitliğinden

$$\left(\frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) \right)'_{+} \geq 0$$

sağlanır. Eğer i) ve ii) koşulları sağlanıyor ise k_0 noktası lokal minimum noktası olur. Dolayısıyla

$$\inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) = \frac{1}{k_0} s(I_\Phi(k_0f))$$

eşitliği sağlanır. O halde buradan

$$\bar{k}^*(f) \leq k_0 \leq \bar{k}^{**}(f)$$

olduğu elde edilir. Diğer bir ifadeyle

$$[k^*(f), k^{**}(f)] \subseteq [\bar{k}^*(f), \bar{k}^{**}(f)]$$

elde edilir. Ters kapsama benzer yöntemle elde edilir. Böylece

$$[k^*(f), k^{**}(f)] = [\bar{k}^*(f), \bar{k}^{**}(f)]$$

olduğu elde edilir. O halde $\bar{k}^*(f) = k^*(f)$ ve $\bar{k}^{**}(f) = k^{**}(f)$ sağlanır.

Sonuç 2.5.3 s bir dış fonksiyon ve Φ bir Orlicz fonksiyonu olsun. $f \in L_\Phi \setminus \{0\}$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) Her $k \in [k^*(f), k^{**}(f)] \cap (0, \infty)$ için $\|f\|_{\Phi, s} = \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf))$

ii) Eğer $k^{**}(f) = \infty$ ise $\|f\|_{\Phi, s} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf))$ olur.

İspat.

i) $k \in [k^*(f), k^{**}(f)] \cap (0, \infty)$ olsun. Dolayısıyla $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) = 0$ sağlanır. O halde (2.24) eşitliğinden $\left(\frac{1}{k} s(I_\Phi(kf))\right)'_{+} = 0$ olur. Bu durumda aralıktaki her bir k değeri bir kök olduğundan $\|f\|_{\Phi, s} = \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf))$ eşitliği sağlanır.

ii)

$$\infty = k^{**}(f) = \sup\{k \in D(f) : \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \geq 0\}$$

olsun. Bu durumda her $k > 0$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \geq 0$ olur. Dolayısıyla (2.24)

eşitliğinden $\left(\frac{1}{k} s(I_\Phi(kf))\right)'_{+} < 0$ sağlanır. Yani $\frac{1}{k} s(I_\Phi(kf))$ fonksiyonu azalandır ve $\|f\|_{\Phi, s} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf))$ eşitliği sağlanır. ■

Aşağıdaki Gözlem 2.5.4, [21] makalesinden farklı olarak, $s'_+{}^{-1}(t) = s'_+{}^\circ(t) = s'_+{}^{\circ\circ}(t)$ eşitliği aracılığıyla bulunmuştur. Ayrıca bu gözlem $w(v)$ fonksiyonlarını bulmak için faydalı olacaktır.

Gözlem 2.5.4

$$s'_+{}^\circ(t) = \inf\{u \geq 0 : s'_+(u) \geq t\} \quad \text{ve} \quad s'_+{}^{\circ\circ}(t) = \inf\{u \geq 0 : s'_+(u) > t\}$$

olmak üzere hemen hemen her $t \in [0, 1]$ için $s'_+{}^{-1}(t) = s'_+{}^\circ(t) = s'_+{}^{\circ\circ}(t)$ sağlanır. O halde

aşağıda belirtilen dış fonksiyonlar için $s'_+{}^{-1}(t)$ değerlerini inceleyelim.

i) $s(u) = 1 + u$ için $s'_+(u) = 1$ olur. Hemen hemen her $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} s'_+{}^{-1} &= s'_+{}^\circ(t) = \inf\{u \geq 0 : s'_+(u) \geq t\} \\ &= \inf\{u \geq 0 : 1 \geq t\} \end{aligned}$$

bulunur. İfade tüm $u \geq 0$ için sağlandığından $s'_+{}^{-1}(t) = s'_+{}^\circ(t) = 0$ olur.

ii) Eğer $s(u) = \max\{1, u\}$ ise

$$s'_+(u) = \begin{cases} 0 & , 1 > u \geq 0 \\ 1 & , u \geq 1 \end{cases}$$

elde edilir. Ayrıca, $t = 0$ için

$$\begin{aligned} s'_+{}^\circ(0) &= \inf\{u \geq 0 : s'_+(u) \geq 0\} \\ &= \inf[0, \infty) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $t_0 > 0$ ise

$$\begin{aligned} s'_+{}^\circ(t) &= \inf\{u \geq 0 : s'_+(u) \geq t_0 > 0\} \\ &= \inf[1, \infty) = 1 \end{aligned}$$

sağlanır. Burada ifade $u \geq 1$ için geçerli olur. Aksi takdirde bu ifade $0 \leq u < 1$ değerleri içinde sağlanmış olsaydı $s'_+(u) = 0 \geq t_0 > 0$ çelişkisi elde edilirdi. Dolayısıyla

$$s'_+{}^{-1} = s'_+{}^\circ(u) = \begin{cases} 0 & , u = 0 \\ 1 & , u > 0 \end{cases}$$

elde edilir.

iii) $s_c(u) = \max\{1, u + c\}$ için

$$s'_+(u) = \begin{cases} 1 & , u \geq 1 - c \\ 0 & , 1 - c > u \geq 0 \end{cases}$$

olur. Yine ii) şikkına benzer şekilde, $t = 0$ için

$$\begin{aligned} s'_+{}^\circ(0) &= \inf\{u \geq 0 : s'_+(u) \geq 0\} \\ &= \inf[0, \infty) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $t_1 > 0$ ise,

$$\begin{aligned} s'_+{}^\circ(t) &= \inf\{u \geq 0 : s'_+(u) \geq t_1 > 0\} \\ &= \inf[1 - c, \infty) = 1 - c \end{aligned}$$

sağlanır. Yine bu ifade yalnızca $u \geq 1 - c$ için geçerlidir. Dolayısıyla

$$s'_+{}^{-1} = s'_+{}^\circ(u) = \begin{cases} 0 & , u = 0 \\ 1 - c & , u > 0 \end{cases}$$

elde edilir.

Sonuç 2.5.5 Φ ve Ψ tümleyen Orlicz fonksiyonları olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1) $s(u) = 1 + u$ ve her $0 \leq v \leq 1$ için Gözlem 2.5.4 i) şikkından

$$w(v) = \int_0^v s'_+{}^{-1}(t) dt = 0$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) &= 1 - w(s'_+(I_\Phi(kf))) - I_\Psi(p_+(k|f|))s'_+(I_\Phi(kf)) \\ &= 1 - I_\Psi(p_+(k|f|)) \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} k^*(f) &= \inf\{k > 0 : I_\Psi(p_+(k|f|)) \geq 1\} \\ k^{**}(f) &= \sup\{k > 0 : I_\Psi(p_+(k|f|)) \leq 1\} \end{aligned}$$

sağlanır.

2) $s(u) = \max\{1, u\}$ ise Gözlem 2.5.4 ii) şikkı kullanılırsa

$$w(v) = \int_0^v s'_+{}^{-1}(t) dt = v$$

olur. İfade kolaylığı olması açısından $u = I_\Phi(kf)$ ve $v = I_\Psi(p_+(k|f|))$ olmak üzere u, v ile

gösterilsin. Böylece, β_s fonksiyonu her $u \geq 0$ için incelenirse

$$\beta_s(u, v) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq u < 1, 0 \leq v \\ -v & , u \geq 1, v \geq 0 \end{cases}$$

olur. O halde,

$$k^*(f) = \inf\{k > 0 : I_\Phi(kf) \geq 1\}$$

$$k^{**}(f) = \sup\{k > 0 : I_\Phi(kf) \leq 1\}$$

bulunur.

3) $0 < c < 1$ olmak üzere $s_c(u) = \max\{1, u + c\}$ için Gözlem 2.5.4 iii) şıkkı kullanılırsa

$$w(v) = \int_0^v s'_+{}^{-1}(t) dt = (1 - c)v$$

bulunur. Buradan

$$\beta_s(u, v) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq u < 1 - c, 0 \leq v \\ c - v & , u \geq 1 - c, v \geq 0 \end{cases}$$

elde edilir. O halde

$$k^*(f) = \inf\{k > 0 : I_\Phi(kf) \geq 1 - c \text{ ve } I_\Psi(p_+(k|f|)) \geq c\}$$

$$k^{**}(f) = \sup\{k > 0 : I_\Phi(kf) \leq 1 - c \text{ ya da } I_\Psi(p_+(k|f|)) \leq c\}$$

bulunur.

4) $1 \leq p, q \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $s(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ ise $s'_+(u) = \frac{u^{p/q}}{(1 + u^p)^{1/q}}$ ve

(2.20) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} w(s'_+(u)) &= 1 - us'_+(u) - s(u) \\ &= 1 - (u^p + 1)^{1/p} + u \frac{u^{p/q}}{(1 + u^p)^{1/q}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \beta_s(u, v) &= 1 - w(s'_+(u)) - vs'_+(u) \\ &= (1 + u^p)^{1/p} - (u + v) \frac{u^{p/q}}{1 + u^{p/q}} \\ &= \frac{1 - vu^{p/q}}{(1 + u^p)^{1/q}} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$k^*(f) = \inf\{k > 0 : I_{\Phi}^{1/q}(kf) I_{\Psi}^{1/p}(p_+(k|f|)) \geq 1\}$$

$$k^{**}(f) = \sup\{k > 0 : I_{\Phi}^{1/q}(kf) I_{\Psi}^{1/p}(p_+(k|f|)) \leq 1\}$$

sağlanır.

Teorem 2.5.6 s dış fonksiyon, Φ yalnızca sonlu değer alan bir Orlicz fonksiyonu olsun. Eğer $f \in E_{\Phi} \setminus \{0\}$ ve $k^*(f) < \infty$ ise

$$s^*(I_{\Psi}(p_+(k^*(f)|f|))) = \frac{I_{\Phi}(k^*(f)f) + I_{\Psi}(p_+(k^*(f)|f|))}{s(I_{\Phi}(k^*(f)f))} \quad (2.25)$$

ifadesi sağlanır.

İspat. $f \in E_{\Phi} \setminus \{0\}$ ve $k^* = k^*(f) < \infty$ olsun. (2.25) eşitliği $I_{\Psi}(p_+(k^*(f)|f|)) = \infty$ için incelendiğinde, s^* bir dış fonksiyon olduğundan, $s^*(\infty) = \infty$ olur. Dolayısıyla eşitlik sağlanır. Kabul edelim ki $I_{\Psi}(p_+(k^*f)) < \infty$ olsun. Φ fonksiyonu yalnızca sonlu değerler aldığından T_{λ} atomların kümesi boş kümedir. Yine $f \in E_{\Phi} \setminus \{0\}$ ve $I_{\Phi}(kf)$ modüler fonksiyonu her $k \geq 0$ için sonludur. Diğer bir ifadeyle her $k > 0$ için

$$\int_T I_{\Phi}(kf) d\mu < \infty \quad \text{ve} \quad [0, \infty) = \{I_{\Phi}(kf) : k \geq 0\}$$

olur. Keyfi $k > 0$ için

$$r(k) = \frac{I_{\Phi}(kf) + I_{\Psi}(p_+(k^*|f|))}{s(I_{\Phi}(kf))}$$

fonksiyonu tanımlansın. Buradan (2.20) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(r(k))'_+ &= \left(\frac{I_\Phi(kf) + I_\Psi(p_+(k^*|f|))}{s(I_\Phi(kf))} \right)'_+ \\
&= \frac{(I_\Phi(kf))'_+ s(I_\Phi(kf)) - (I_\Phi(kf) + I_\Psi(p_+(k^*|f|))) s'_+(I_\Phi(kf)) (I_\Phi(kf))'_+)}{s^2(I_\Phi(kf))} \\
&= \frac{(I_\Phi(kf))'_+ [s(I_\Phi(kf)) - s'_+(I_\Phi(kf)) I_\Phi(kf) - s'_+(I_\Phi(kf)) I_\Psi(p_+(k^*|f|))]}{s^2(I_\Phi(kf))} \\
&= \frac{(I_\Phi(kf))'_+ [1 - w(s'_+(I_\Phi(kf))) - I_\Psi(p_+(k^*|f|)) s'_+(I_\Phi(kf))]}{s^2(I_\Phi(kf))} \\
&= \frac{(I_\Phi(kf))'_+ \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k^*|f|)))}{s^2(I_\Phi(kf))}
\end{aligned}$$

olur. Yine, v sabit olmak üzere $u \rightarrow \beta_s(u, v)$ azalan olduğundan her $k^* < k$ için

$$\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k^*|f|))) \leq \beta_s(I_\Phi(k^*f), I_\Psi(p_+(k^*|f|))) \leq 0$$

bulunur. Benzer şekilde $0 < k < k^*$ için

$$\beta_s(I_\Phi(k^*f), I_\Psi(p_+(k^*|f|))) \leq \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k^*|f|)))$$

sağlanır. O halde $0 \leq \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k^*|f|)))$ olur. Aksi takdirde $k^*(f)$ sayısının $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \leq 0$ ifadesini sağlayan en küçük sayı olmasıyla çelişir. O halde $k \mapsto I_\Phi(kf)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ artan olduğundan dolayı her $0 < k < k^*$ için $(r(k))'_+ \geq 0$ ve her $k^* < k$ için $(r(k))'_+ \leq 0$ sağlanır. Dolayısıyla

$$\sup_{k>0} r(k) = r(k^*)$$

olur ve (2.25) eşitliği sağlanır.

2.6 S-NORMUNUN K^* -SONLULUĞU VE K^{**} -SONLULUĞU

Bu bölümde [21] makalesi temel alınarak, s -normunun k^* -sonlu ve k^{**} -sonlu olması için kriterler verilmiştir.

Aşağıdaki önerme Lemma 2.6.2 ispatında kullanılacaktır.

Önerme 2.6.1 [18] Φ bir Orlicz fonksiyonu ve p_+ , Φ fonksiyonunun sağ türevi olsun. Bu durumda Φ fonksiyonunun konveksliğinden, her $t > u \geq 0$ için

$$p_+(u) \leq \frac{\Phi(t) - \Phi(u)}{t - u}$$

eşitsizliği sağlanır. Buna ek olarak $p_+^{-1}(t) = \inf\{a : p_+(a) > t\}$ şeklinde tanımlanan p_+ fonksiyonunun ölçülebilir terslerinden birini göstermek üzere $p_+(u) \leq t$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $u \leq p_+^{-1}(t)$ olmasıdır.

Lemma 2.6.2 Ψ Orlicz fonksiyonu, Φ Orlicz fonksiyonunun tümleyeni olsun. Φ Orlicz fonksiyonunun, $c > 0$ ve y - kesiti $d \leq 0$ olmak üzere sonsuzda eğik asimptotu varsa bu durumda $c = \lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u)$ ve $d = -\Psi(c)$ eşitlikleri sağlanır.

İspat. $u \rightarrow cu + d$, Φ fonksiyonunun sonsuzdaki eğik asimptotu olsun. Φ konveks olduğundan p_+ fonksiyonu artandır ve dolayısıyla

$$\Phi(u) = \int_0^u p_+(t) dt \leq \int_0^u p_+(u) dt = p_+(u)u$$

olur. Buradan

$$\lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u) \geq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = c$$

eşitliği sağlanır. Öte yandan $k > u \geq 0$ olmak üzere Önerme 2.6.1 kullanılırsa

$$p_+(u) \leq \frac{\Phi(k) - \Phi(u)}{k - u}$$

olur. Böylece

$$p_+(u) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\Phi(k)}{k} \frac{k}{k - u} - \frac{\Phi(u)}{k - u} \right) = c$$

bulunur. Bu durumda $\lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u) = c$ eşitliği sağlanır. Bunun yanı sıra

$$0 \leq \lim_{u \rightarrow \infty} (cu - up_+(u)) = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{p_+(u)}^c u dt \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{p_+(u)}^c p_+^{-1}(t) dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(c) - \Psi(p_+(u)) = 0$$

eşitliği elde edilir. Young eşitliğinden

$$d = \lim_{u \rightarrow \infty} (\Phi(u) - cu) = \lim_{u \rightarrow \infty} (\Phi(u) - up_+(u)) + \lim_{u \rightarrow \infty} (up_+(u) - cu) = -\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) = -\Psi(c)$$

eşitliği sağlanır. ■

Uyarı 2.6.3 Aşağıdaki Lemma 2.6.4, μ ölçüsünün atomsuz olması ve $w(1) < 1$ olması durumunda sağlanmaz. Aksi takdirde eğer μ atomsuz bir ölçü olsaydı, $\mu(A) > 0$ olmak üzere ölçüsü $\mu(A_0) = \frac{1-w(1)}{\Psi(c)}$ olacak şekilde bir $A_0 \subset A$ kümesi bulunabilir. Bu ise (2.26) ve (2.27) eşitsizliklerinin sağlanmasıyla çelişir.

Lemma 2.6.4 s bir dış fonksiyon, Φ Orlicz fonksiyonunun sonsuzdaki eğik asimptotu $c > 0$ ve $w(1) < 1$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) $\|\cdot\|_{\Phi,s}$ normu k^* -sonludur ancak ve ancak verilen koşullarından biri sağlanır.

a) Pozitif ölçülü tüm $A \subset T$ kümeleri için

$$\Psi(c)\mu(A) > 1 - w(1) \quad (2.26)$$

eşitsizliği sağlanır.

b) Φ ve s fonksiyonları sonsuzda afin olsun. Pozitif ölçülü tüm $A \subset T$ kümeleri için

$$\Psi(c)\mu(A) \geq 1 - w(1) \quad (2.27)$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) $\|\cdot\|_{\Phi,s}$ normu k^{**} -sonludur ancak ve ancak Teoremin i) a) şıkkı sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki Φ fonksiyonunun sonsuzda $c > 0$ eğimli eğik asimptotu olsun. Lemma 2.6.2'den asimptotun eğimi ve y-kesiti sırasıyla $c = \lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u)$ ve $-\Psi(c) \leq 0$ ifadelerine eşittir.

i) *Yeterlilik:* Kabul edelim ki $f \in L_\Phi \setminus \{0\}$ olsun. $f \neq 0$ olduğundan bir $\eta > 0$ bulunur öyle ki $A_\eta = \{t \in T : |f(t)| \geq \eta\}$ olmak üzere $\mu(A_\eta) > 0$ sağlanır. Aksi takdirde $\mu(A_\eta) = 0$ olursa μ -hhh $f=0$ olur. Bu ise çelişkidir.

a) (2.26) eşitsizliği kabul edildiğinden $1 - w(1) - \Psi(c)\mu(A_\eta) < 0$ olur. O halde en az bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki

$$1 - w(1) - \Psi(c)\mu(A_\eta) < \frac{-\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

sağlanır. Ayrıca $\lim_{v \rightarrow 1^-} w(v) = w(1)$ olduğundan yakınsaklık tanımı gereği her $\varepsilon > 0$ için $0 < v_0 < 1$ vardır ve her $v \geq v_0$ için $|w(v) - w(1)| < \varepsilon w(1)$ sağlanır. O halde $(1 - \varepsilon)w(1) \leq w(v)$ elde edilir.

Yine $s'_+(u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 1$ olduğundan, yakınsaklık tanımı gereği bir $u_0 > 0$ vardır öyle ki

her $u \geq u_0$ için $|s'_+(u) - 1| < \varepsilon$ olduğundan $\sqrt{1 - \varepsilon} < 1 - \varepsilon \leq s'_+(u)$ sağlanır. Öte yandan her $v \geq v_0$ için $w(v) \xrightarrow{v \rightarrow 1^-} w(1)$ ve $s'_+(u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 1$ yakınsaklıklarından $s'_+(u) \geq v_0$ bulunur. Dolayısıyla,

$$s'_+(u) > \max\{\sqrt{1 - \varepsilon}, v_0\}$$

sağlanır. Bunlara ek olarak $I_\Phi(kf) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ ve $p_+(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} c$ sağlanır. Ayrıca yakınsaklık tanımından en az bir k_0 vardır öyle ki

$$\text{her } k \geq k_0 \text{ için } I_\Phi(kf) > u_0 \text{ ve } \Psi(p_+(k\eta)) \geq \sqrt{1 - \varepsilon} \Psi(c) \quad (2.28)$$

elde edilir. O halde her $k \geq k_0$ için aşağıdaki ifadeler mevcuttur.

$$s'_+(I_\Phi(kf)) \geq s'_+(u_0) > \sqrt{1 - \varepsilon} \quad (2.29)$$

$$w(s'_+(I_\Phi(kf))) \geq w(v_0) > (1 - \varepsilon)w(1) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} I_\Psi(p_+(k|f|)) &= \int_T \Psi(p_+(k|f|)) d\mu \geq \int_{A_\eta} \Psi(p_+(k|f|)) d\mu \\ &\geq \Psi(p_+(k\eta)) \mu(A_\eta) \geq \sqrt{1 - \varepsilon} \Psi(c) \mu(A_\eta) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dolayısıyla her $k \geq k_0 > 0$ için

$$\begin{aligned} \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) &< 1 - (1 - \varepsilon)w(1) - \sqrt{1 - \varepsilon} I_\Psi(p_+(k|f|)) \\ &\leq 1 - \varepsilon - (1 - \varepsilon)w(1) - (1 - \varepsilon) I_\Psi(p_+(k|f|)) + \varepsilon \\ &= (1 - \varepsilon)(1 - w(1) - \Psi(c) \mu(A_\eta)) + \varepsilon \\ &< (1 - \varepsilon) \frac{-\varepsilon}{1 - \varepsilon} + \varepsilon = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $k \geq k_0 > 0$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) < 0$ sağlanır. Bu ise $k^*(f) < \infty$ olmasıdır.

Öte yandan, $k^{**}(f) < \infty$ olmalıdır. Aksi takdirde $k^{**}(f) = \infty$ olursa her $k \in D(f)$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \geq 0$ olur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $k^{**}(f) < \infty$ olur. O halde $k^*(f) \leq k^{**}(f) < \infty$ sağlanır.

b) Kabul edelim ki s ve Φ sonsuzda afin olsun. Bu durumda her $u \geq u_0$ için $s'_+(u) = 1$ ve $p_+(u) = c$ olarak alınabilir.

Yine, $I_\Phi(kf) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ olduğundan, yakınsaklık tanımından bir $k_0 > \frac{u_0}{\eta}$ sayısı vardır, öyle ki her

$k \geq k_0$ için $I_\Phi(kf) \geq u_0$ sağlanır. (2.27) eşitsizliğinden $1 - w(1) - \Psi(c)\mu(A_\eta) \leq 0$ bulunur.

Ayrıca her $k \geq k_0$ için

$$\begin{aligned} I_\Psi(p_+(k|f|)) &= \int_T \Psi(p_+(k|f|)) d\mu \geq \int_{A_\eta} \Psi(p_+(k|f|)) d\mu \geq \int_{A_\eta} \Psi(p_+(k\eta)) d\mu \\ &= \Psi(p_+(k\eta))\mu(A_\eta) \geq \Psi(p_+(k_0\eta))\mu(A_\eta) \\ &= \Psi(c)\mu(A_\eta) \end{aligned}$$

olur. Buradan her $k \geq k_0 > \frac{u_0}{\eta}$ için

$$\begin{aligned} \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) &= 1 - w(1) - I_\Psi(p_+(k|f|)) \\ &\leq 1 - w(1) - \Psi(c)\mu(A_\eta) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $k^*(f) < \infty$ olur.

i) *Gereklilik:* Kabul edelim ki a) ve b) şıkları aynı anda sağlanmasın. $\mu(A) > 0$ ve $\Psi(c)\mu(A) < 1 - w(1)$ olacak şekilde ölçülebilir bir A kümesi varsa $f = \chi_A$ olarak alalım. Her $u \geq 0$ için $s'_+(u) \leq 1$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi(p_+(k)) = \Psi(c)$ olduğundan, her $k > 0$ için

$$\begin{aligned} \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) &= \beta_s(\Phi(k)\mu(A), \Psi(p_+(k)\mu(A))) \\ &= 1 - w(s'_+(I_\Phi(k)\mu(A))) - \Psi(p_+(k)\mu(A))s'_+(I_\Phi(k)\mu(A)) \\ &\geq 1 - w(1) - \Psi(c)\mu(A) > 0 \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla her $k > 0$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) > 0$ olur. O halde $k^*(f) = \infty$ sağlanır. Yine (2.26) koşulu sağlanmadığından, $\mu(A) > 0$ ve $\Psi(c)\mu(A) \leq 1 - w(1)$ olacak şekilde ölçülebilir bir A kümesi vardır. $\Psi(c)\mu(A) < 1 - w(1)$ durumu incelendiğinden, $\Psi(c)\mu(A) = 1 - w(1)$ olarak alalım. Teoremin b) şıkkının doğru olmadığı kabul edildiğinden her $u > 0$ için $s'_+(u) < 1$ ya da her $u \geq 0$ için $p_+(u) < c$ olur. $f = \chi_A$ olarak alınırsa her $k > 0$ için

$$\begin{aligned} \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) &= 1 - w(s'_+(I_\Phi(k)\mu(A))) - \Psi(p_+(k)\mu(A))s'_+(I_\Phi(k)\mu(A)) \\ &> 1 - w(1) - \Psi(c)\mu(A) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Her $k > 0$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) > 0$ olduğundan $k^*(f) = \infty$ elde edilir.

Dolayısıyla k^* -sonluluk Teoremin a) veya b) koşullarını gerektirir.

ii) *Gerekliklik*: 1) a) şıkında ispatlanmıştır.

Yeterlilik: Kabul edelim ki (2.26) koşulu sağlanmasın. Bu durumda $\mu(A) > 0$ ve $1 - w(1) \geq \Psi(c)\mu(A)$ olacak şekilde A ölçülebilir kümesi bulunabilir. $f = \chi_A$ seçilirse her $k > 0$ için

$$\begin{aligned} \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) &= \beta_s(\Phi(kf)\mu(A), \Psi(p_+(k))\mu(A)) \\ &= 1 - w(s'_+(I_\Phi(k))\mu(A)) - \Psi(p_+(k))\mu(A)s'_+(I_\Phi(k)\mu(A)) \\ &\geq 1 - w(1) - \Psi(c)\mu(A) \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Her $k > 0$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \geq 0$ ise $k^{**}(f)$ tanımı gereği $k^{**}(f) = \infty$ olur. O halde k^{**} -sonluluk (2.26) koşulunu gerektirir. ■

Aşağıdaki önerme, Teorem 2.6.8 ispatında kullanılacaktır.

Önerme 2.6.5 Bir Φ Orlicz fonksiyonu sonsuz değer alıyorsa yani en az bir $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(u) = \infty$ sağlanıyorsa $L_\Phi \subset L^\infty$ sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $f \in L_\Phi$ olsun. En az bir $k > 0$ için $I_\Phi(k|f|) < \infty$ olduğundan $\Phi(k|f|) < \infty$ olur. Burada $A = \{u > 0 : \Phi(u) < \infty\}$ olmak üzere $b_\Phi = \sup A$ olur. Dolayısıyla $k|f| \in A$ elde edilir ve b_Φ tanımı gereği $k|f| \leq b_\Phi$ sağlanır. Buradan $\|f\|_\infty \leq \frac{b_\Phi}{k} < \infty$ elde edilir. Bu ise $L_\Phi \subset L^\infty$ olmasıdır.

Sonuç 2.6.6 Bir Φ Orlicz fonksiyonu ve bir $k > 0$ için $k > b_\Phi \|f\|_\infty^{-1}$ ise $I_\Phi(kf) = \infty$ olur. Dolayısıyla $k^{**}(f) \leq b_\Phi \|f\|_\infty^{-1} < \infty$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $k^{**}(f) > b_\Phi \|f\|_\infty^{-1}$ olsun. Bu durumda $I_\Phi(k^{**}f) = \infty$ olur bu ise $\beta_s : [0, \infty) \times [0, \infty] \rightarrow [-\infty, 1]$ fonksiyonunun tanımıyla çelişir. O halde $k^*(f) \leq k^{**}(f) \leq b_\Phi \|f\|_\infty^{-1} < \infty$ eşitsizliği sağlanır.

Aşağıdaki lemma, Teorem 2.6.8 ispatında kullanılacaktır.

Lemma 2.6.7 [3] Φ bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere sonsuzda asimptotunun olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) < \infty$ sağlanmasıdır.

Teorem 2.6.8 s dış fonksiyon ve Φ Orlicz fonksiyonu olsun.

i) s normunun k^* sonlu olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şıklardan birinin

sağlanmasıdır.

- a) Φ sonsuz değer alır, yani $b_\Phi < \infty$ olur.
- b) Bir $u \in (0, \infty)$ için $w(s'_+(u)) = 1$ sağlanır.
- c) $w(1) = 1$ ve Φ , fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal değildir.
- d) Φ fonksiyonunun sonsuzda asimptotu yoktur.
- e) $w(1) < 1$ ve Φ fonksiyonunun sonsuzda $c > 0$ eğimli asimptotu var olsun. Pozitif ölçülü her A kümesi için

$$\Psi(c)\mu(A) > 1 - w(1)$$

eşitsizliği sağlanır.

- f) Bir s dış fonksiyonu ve Φ Orlicz fonksiyonları sonsuzda afın ve $w(1) < 1$ olsun. Φ fonksiyonunun sonsuzdaki eğimi $c > 0$ olmak üzere, pozitif ölçülü her A kümesi için,

$$\Psi(c)\mu(A) \geq 1 - w(1)$$

eşitsizliği sağlanır.

- ii) s - normu k^{**} - sonlu olması için gerek ve yeter koşul a), c), d) ve e) koşullarından birinin sağlanmasıdır.
- iii) Eğer Φ fonksiyonunun sonsuzda asimptotu yoksa s normu k^* - sonlu olması için gerek ve yeter koşul s normu k^{**} - sonlu olmasıdır.

İspat. Öncelikle tüm koşulların yeterlilik kısmı, ardından gereklilik kısmı ispatlanacaktır.

i) *Yeterlilik* : $f \in L_\Phi \setminus \{0\}$ olsun.

a) Önerme 2.6.5 ve Sonuç 2.6.6 göre s - normu k^* - sonludur. i) şıkkının geri kalanında Φ nin yalnızca sonlu değer aldığı kabul edilecektir.

b) Bir $u_0 > 0$ ve $w(s'_+(u_0)) = 1$ olsun. $I_\Phi(kf) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ olduğundan en az bir $k_0 \in (0, \infty)$ vardır öyle ki $I_\Phi(k_0 f) \geq u_0$ sağlanır. O halde w fonksiyonunun tanımından,

$$1 \geq w(s'_+(I_\Phi(k_0 f))) \geq w(s'_+(u_0)) = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $w(s'_+(I_\Phi(k_0 f))) = 1$ olur. Buradan

$$\beta_s(I_\Phi(k_0 f), I_\Psi(p_+(k_0 |f|))) = -I_\Psi(p_+(k_0 |f|)) \leq 0$$

olduğu kolayca görülür. O halde $k^*(f) \leq k_0 < \infty$ elde edilir.

c) Kabul edelim ki $w(1) = 1$ ve Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olmasın. Bu durumda $\Phi(u) \neq cu$ ve $p_+(u) \neq c$ olur. $\Psi(p_+(u)) > 0$ sağlanır. Aksi takdirde, $\Psi(p_+(u)) = up_+(u) - \Phi(u) = 0$ ifadesi Young eşitliğinden sağlanır. Bu ise Φ fonksiyonunun doğrusal olmamasıyla çelişir. O halde $a = I_\Psi(p_+(k_0|f|)) > 0$ olacak şekilde bir $k_0 > 0$ vardır. Kabul edelim ki $0 < \varepsilon < \frac{a}{2}$ olsun. Öte yandan $w(v) \xrightarrow{v \rightarrow 1^-} 1$ yakınsaklığından $w(v_0) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $\frac{1}{2} < v_0 < 1$ vardır. Ayrıca $I_\Phi(kf) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ olduğundan $s'_+(I_\Phi(kf)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$ bulunur. Yine yakınsaklık tanımından $s'_+(I_\Phi(k_1)) > v_0$ olacak şekilde bir $k_1 > k_0$ vardır. Her $k \geq k_1$ için

$$\begin{aligned} \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) &= 1 - w(s'_+(I_\Phi(kf))) - I_\Psi(p_+(k|f|))s'_+(I_\Phi(kf)) \\ &\leq 1 - w(s'_+(I_\Phi(kf))) - I_\Psi(p_+(k_0|f|))s'_+(I_\Phi(k_1f)) \\ &\leq 1 - w(v_0) - av_0 < 1 + \varepsilon - 1 - \frac{a}{2} < 0 \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece her $k \geq k_1 > k_0$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) < 0$ elde edilir. Bu sebeple s -normu $k^*(f)$ sonludur. Ayrıca burada $k^{**}(f) = \infty$ olsaydı her $k > 0$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) > 0$ olurdu. Bu ise $k > k_1$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) < 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $k^*(f) \leq k^{**}(f) < \infty$ sağlanır.

d) Kabul edelim ki Φ fonksiyonunun sonsuzda asimptotu olmasın. Lemma 2.6.7 kullanılırsa, $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) = \infty$ olur. Buradan $\lim_{u \rightarrow \infty} I_\Psi(p_+(u)) = \infty$ elde edilir. Yakınsaklıktan dolayı ve $s'_+(I_\Phi(kf)) \subset [0, 1]$ olmak üzere, yeterince büyük k değerleri için $I_\Psi(p_+(kf))s'_+(I_\Phi(kf)) > 1$ olur. Buradan

$$\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \leq 1 - I_\Psi(p_+(k|f|))s'_+(I_\Phi(kf)) < 0$$

elde edilir. O halde $k^*(f) \leq k^{**}(f) < \infty$ olur. Burada k^{**} -sonluluk c) şıkkı ile benzer şekilde elde edilir.

Öte yandan, e) ve f) koşullarının yeterlilik kısımları Lemma 2.6.4'te yapıldı.

i) *Gereklik* : Kabul edelim ki Teoremin i) şıkkındaki a)-f) koşullarının hiçbirini sağlanmasın.

a) koşulu sağlanmadığından Φ fonksiyonunun yalnızca sonlu değer aldığı kabul edilir. b)

koşulu sağlanmadığından ve w fonksiyonu tanımı gereği $[0, 1]$ aralığında değer aldığından $w(s'_+(u)) < 1$ olur. Kabul edelim ki Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ doğrusal olsun. Her $u \geq 0$ için $\Psi(p_+(u)) = 0$ sağlanır. Bu durumda her $k > 0$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), 0) = 1 - w(s'_+(I_\Phi(kf))) > 0$ olur. Dolayısıyla $k^*(f) = \infty$ sağlanır. O halde Φ fonksiyonunun $[0, \infty)$ de doğrusal olmadığını kabul edebiliriz. c) ve d) koşulları sağlanmadığından $w(1) < 1$ ve Φ fonksiyonunun sonsuzda $c > 0$ eğimli asimptotu vardır. e) ve f) koşulları sağlanmadığından Lemma 2.6.4 kullanılırsa, bir $f = \chi_A$ fonksiyonu bulunabilir öyle ki $k^*(f) = \infty$ olur. Dolayısıyla s normu k^* -sonlu olamaz. O halde s - normunun k^* - sonluluğu a)-f) şıklarını gerektirir.

ii) *Yeterlilik*: Teoremin a), c), d) şıklarının sağlanması halinde s -normunun k^{**} -sonlu olduğu i) şıkında gösterildi. Buna ek olarak e) koşulunun da k^{**} -sonluluğu gerektirdiği Lemma 2.6.4'te gösterildi.

Gerekliklik: Kabul edelim ki Teoremin a), c), d), e) koşullarının hiçbirini sağlanmasın. Bu durumda Φ yalnızca sonlu değer alır. Eğer Φ fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığında doğrusal ise her $u > 0$ için $\Psi(p_+(u)) = \Psi(c) = 0$ ve her $k > 0$ için

$$\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) = \beta_s(I_\Phi(kf), 0) = 1 - w(s'_+(I_\Phi(kf))) \geq 0$$

sağlanır ve $k^{**}(f) = \infty$ olur. Yani, s - normu k^{**} -sonlu değildir. Bu durumda, Φ fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olmadığı kabul edelim. c) koşulu sağlanmadığından $w(1) < 1$ olur. Ayrıca d) koşulu sağlanmadığından, Φ fonksiyonunun sonsuzda $c > 0$ eğimli asimptotu vardır. Yine e) koşulu sağlanmadığından Lemma 2.6.4 kullanılırsa, bir $f = \chi_A$ fonksiyonu bulunabilir öyle ki $k^{**}(f) = \infty$ olur. Dolayısıyla s normu k^{**} - sonlu olmaz. Diğer bir deyişle k^{**} - sonlu ise a), c), d), e) koşulları sağlanır.

iii) *Gerekliklik*: k^{**} -sonluluğun k^* -sonluluğu gerektirdiği ii) şıkında gösterildi.

Yeterlilik: Şimdi k^* -sonluluğun k^{**} -sonluluğu gerektirdiğini gösterelim. Kabul edelim ki s -normu k^* -sonlu olsun. Bu durumda Teoremin a) - f) koşullarından en az biri sağlanır. a), c), d) koşullarından biri sağlandığında s - normunun k^{**} -sonlu olduğu gösterildi. Kabul gereği Φ fonksiyonunun sonsuzda asimptotu olmadığından e) ve f) şıkları incelenmez. O halde kabul edelim ki b) koşulu sağlansın. En az bir $u > 0$ için $s'_+(u) = 1$ sağlanır. $1 = w(s'_+(u)) \leq w(1) \leq 1$ ise $w(1) = 1$ olur. Burada Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olmadığından c) şıkkı sağlanmış olur. Bu ise s - normunun k^{**} -sonlu olması demektir. ■

Gözlem 2.6.9 Teorem 2.6.8 ii) şıkında yalnızca a), c), d) ya da e) şıklarının k^{**} -sonluluk için gerek ve yeter koşul olduğu ispatlandı. Ancak teoremin b) ve f) şıkları k^{**} sonluluk için gerek ve yeter koşul değildir. Bu koşullarda s -normu $k^{**}(f) = \infty$ olabilir. b) ve f) şıklarında her $k > 0$ için $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) \leq 0$ sağlanır. Eğer her $k > 0$ için yalnızca $\beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(k|f|))) = 0$ eşitliği sağlanırsa $k^{**}(f) = \infty$ olurken, $k^*(f) = 0$ olabilir. Yani b) ve f) koşulları sağlandığı durumda s -normu k^* -sonlu olur ancak k^{**} -sonlu olmak zorunda değildir.

Aşağıdaki sonuç s -normunun k^{**} -sonlu olmama koşullarını verir.

Sonuç 2.6.10 Φ bir Orlicz fonksiyon, s bir dış fonksiyon ve s dış fonksiyonunun sonsuzdaki asimptotunun y -kesiti $0 \leq y_s \leq 1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) Bir Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal ise s -normu k^{**} -sonlu değildir.
- ii) Eğer $y_s = 0$ ise s -normunun k^{**} -sonlu olmaması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olmasıdır.
- iii) Kabul edelim ki $y_s > 0$ ve $a_\mu = \inf\{\mu(A) : A \in \Sigma, \mu(A) > 0\}$ olsun. Bu durumda,

- a) Eğer $a_\mu = 0$ ise s normunun k^* ve k^{**} -sonlu olmaması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun sonsuzda asimptotunun olmasıdır.
- b) Eğer $a_\mu > 0$ ise s normu k^{**} -sonlu olmaması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun sonsuzda asimptotunun olmasıdır. Ayrıca Φ Orlicz fonksiyonunun sonsuzdaki asimptotunun y -kesiti y_Φ olmak üzere $|y_s/y_\Phi| \geq \mu(A_0) > 0$ koşullarını sağlayacak şekilde bir A_0 ölçülebilir kümesi vardır.

İspat. i) Φ Orlicz fonksiyonu doğrusal olsun. Her $u \geq 0$ için $\Phi(u) = cu$ olacak şekilde bir $c > 0$ vardır. Bu durumda Φ fonksiyonu yalnızca sonlu değer alır ve Φ fonksiyonunun sonsuzda asimptotu vardır. O halde Teorem 2.6.8 a), c), d) şıkları sağlanmaz. Φ sonlu değer aldığından ve doğrusal olduğundan $\Psi(p_+(u)) = 0$ olur. Bu durumda Teorem 2.6.8 e) şıkkı sağlanmaz. Aksi takdirde $0 = \Psi(c)\mu(A) > 1 - w(1) \geq 0$ çelişkisi elde edilir. O halde s -normu k^{**} -sonlu değildir.

- ii) Önerme 2.4.12'ye göre $y_s = 1 - w(1)$ eşitliği sağlanır. Kabul gereği $w(1) = 1$ olur. s normu k^{**} -sonlu değilse Teorem 2.6.8 c) şıkkı sağlanmaz, dolayısıyla $w(1) = 1$ olduğundan $\Phi, [0, \infty)$ aralığında doğrusaldır. Φ doğrusal ise i) şıkından s -normu k^{**} -sonlu değildir.

iii) $y_s > 0$ ise bu durumda Önerme 2.4.12'ye göre $w(1) < 1$ sağlanır. Dolayısıyla Teorem 2.6.8 b) ve c) şıkları sağlanmaz.

a) $a_\mu = 0$ ise $\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ olacak şekilde A_n pozitif ölçülü kümeler dizisi vardır. O halde Teorem 2.6.8 e) ve f) şıkları sağlanmaz. Kabul gereği Φ fonksiyonunun sonsuzda asimptotu olduğundan Teorem 2.6.8 d) ve a) şıkları sağlanmaz. Tüm bunlardan Teorem 2.6.8 i) ve ii) şıklarından s - normunun k^* ve k^{**} - sonlu olmadığı elde edilir. Tersine kabul edelim ki s -normu k^* ve k^{**} -sonlu olmasın. Bu durumda Teorem 2.6.8 d) koşulu sağlanmaz. O halde Φ fonksiyonunun sonsuzda asimptotu vardır.

b) Kabul edelim ki Φ fonksiyonunun sonsuzda $c > 0$ eğimli asimptotu olsun. Bu durumda Teorem 2.6.8 a) ve d) şıkları sağlanmaz. Eğer $y_\Phi = 0$ ise $\Phi, [0, \infty)$ aralığında doğrusaldır. i) şikkından s - normu k^{**} - sonlu değildir. Eğer $y_\Phi < 0$ ise Lemma 2.6.2 kullanılırsa $y_\Phi = -\Psi(c)$ eşitliği sağlanır. Buradan

$$\frac{1 - w(1)}{\Psi(c)} = \left| \frac{y_s}{y_\Phi} \right| \geq \mu(A_0)$$

elde edilir. Yani Teorem 2.6.8 e) şikkı sağlanmaz. O halde Teorem 2.6.8 a), d), e), c) şıkları sağlanmaz ise Teorem 2.6.8 kullanılırsa s - normu k^{**} -sonlu olmadığı elde edilir. Tersine kabul edelim ki s - normu k^{**} - sonlu olmasın. Bu durumda Teorem 2.6.8 a), c), d) ve e) şıkları sağlanmaz. Eğer $\Phi, [0, \infty)$ aralığında doğrusal ise Φ fonksiyonunun sonsuzda asimptotu vardır ve $y_\Phi = 0$ olur. O halde Teorem 2.6.8 e) şikkının sağlanmadığı kullanılırsa,

$$0 < \mu(A_0) \leq \frac{1 - w(1)}{\Psi(c)} = \left| \frac{y_s}{y_\Phi} \right| \leq \frac{1}{y_\Phi} = \infty$$

olacak şekilde bir A_0 kümesi vardır. Şimdi de Φ fonksiyonunun doğrusal olmadığını kabul edelim. Bu durumda s - normu k^{**} -sonlu olmadığından d) ve e) şıkları sağlanmaz. Φ nin sonsuzda $c > 0$ eğimli asimptotu vardır ve y - kesiti $-\Psi(c) < 0$ olur. Ayrıca Teorem 2.6.8 e) şikkı sağlanmadığından,

$$\left| \frac{y_s}{y_\Phi} \right| = \frac{1 - w(1)}{\Psi(c)} \geq \mu(A_0)$$

olacak şekilde bir A_0 ölçülebilir kümesi vardır. ■

2.7 KÖTHE DUALİ

Bu kısımda [21] makalesi temel alınarak, Orlicz uzayları özel bir Φ Orlicz fonksiyonu ve s -normuna göre ele alınarak L^p uzayları ile ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca, E_Φ uzayının s -normuna göre Köthe duali incelenmiştir.

Aşağıdaki teoremden $1 \leq p < \infty$ ve $0 < c$ olmak üzere $\Phi(u) = c|u|^p$ Orlicz fonksiyonu için, L_Φ Orlicz uzayı ile L^p Lebesgue uzayının çakıştığı gösterilmiştir. Ayrıca herhangi bir s dış fonksiyonu ile oluşturulan s normunun Lebesgue uzayındaki tanımlı olan $\|\cdot\|_p$ p - normunun sabit bir katı olduğu gösterilmiştir.

Teorem 2.7.1 s keyfi bir dış fonksiyon olsun.

i) Her $1 \leq p < \infty$ ve her $c > 0$ için Φ Orlicz fonksiyonu $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\Phi(u) = c|u|^p$ ise bu durumda $(L_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,s})$ Orlicz uzayı, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ Lebesgue uzayına doğrusal olarak izometriktir. Ayrıca $d = \inf_{u>0} \frac{1}{u} s(cu^p)$ ve $c^{1/p} \leq d \leq 1 + c$ olmak üzere $\|\cdot\|_{\Phi,s} = d\|\cdot\|_p$ sağlanır.

ii) Φ Orlicz fonksiyonu

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0 & , |u| \leq 1 \\ \infty & , |u| > 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(L_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,s})$ Orlicz uzayı, $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ Lebesgue uzayına eşittir.

İspat. i) Her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(u) = c|u|^p$ olsun. $f \in L_\Phi \setminus \{0\}$ için

$$I_\Phi(f) = \int \Phi(f) d\mu = \int c|f|^p d\mu = c\|f\|_p^p$$

eşitliği sağlanır. Buna ek olarak

$$\begin{aligned} T : L_\Phi &\longrightarrow L^p \\ f &\longrightarrow T(f) = \frac{1}{d}f \end{aligned}$$

dönüşümünün doğrusal bir izometri olduğu kolayca görülür. Buradan

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\Phi,s} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_{\Phi}(kf)) = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(ck^p \|f\|_p^p) \\
 &= \|f\|_p \inf_{k>0} \frac{1}{k \|f\|_p} s(ck^p \|f\|_p^p) \\
 &= \|f\|_p \inf_{u>0} \frac{1}{u} s(cu^p) = d \|f\|_p
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$d = \inf_{u>0} \frac{1}{u} s(cu^p) \geq \inf_{u>0} \frac{1}{u} \max\{1, cu^p\} \geq \min \left\{ \inf_{0 < cu^p < 1} \frac{1}{u}, \inf_{cu^p > 1} cu^{p-1} \right\} = c^{1/p} > 0$$

eşitsizliği sağlanır. Öte yandan

$$d = \inf_{u>0} \frac{1}{u} s(cu^p) \leq s(c) \leq 1 + c < \infty$$

ifadesi sağlanır. Dolayısıyla $c^{1/p} \leq d \leq 1 + c$ bulunur.

ii) Φ Orlicz fonksiyonu

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0 & , |u| \leq 1 \\ \infty & , |u| > 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $f \in L_{\Phi}$ olsun. O halde $k > 0$ için

$$\int \Phi(kf) d\mu < \infty$$

sağlanır. Ayrıca Φ fonksiyonunun tanımlanışından $\Phi(kf) = 0$ olur. O halde her $k > 0$ için $|kf| \leq 1$ olmak üzere $|f| \leq \frac{1}{k}$ sağlanır. Dolayısıyla $\|f\|_{\infty} < \infty$ sağlanır. Buradan $f \in L^{\infty}$ olduğu elde edilir. Yani $L_{\Phi} \subseteq L^{\infty}$ sağlanır. Ters kapsama benzer yolla kolayca elde edilir. Ayrıca, her $f \in L_{\Phi} \setminus \{0\}$ ve $k > \|f\|_{\infty}^{-1}$ için $I_{\Phi}(kf) = \infty$ olur. Yine,

$$\begin{aligned}
 F : (L_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s}) &\longrightarrow (L^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty}) \\
 f &\longrightarrow f
 \end{aligned}$$

birim fonksiyonu tanımlansın.

$$\|f\|_{\Phi,s} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_{\Phi}(kf)) = \inf_{0<k\leq\|f\|_{\infty}^{-1}} \frac{1}{k} s(I_{\Phi}(kf)) = \inf_{0<k\leq\|f\|_{\infty}^{-1}} \frac{1}{k} s(0) = \|f\|_{\infty}$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda $(L_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s})$ ile $(L^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ izometrik izomorftur. ■

Sonuç 2.7.2 Herhangi bir s dış fonksiyonu için Φ Orlicz fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal ise $(L_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s})$ uzayı $(L^1, \|\cdot\|_1)$ uzayına doğrusal olarak izometriktir. Üstelik, Φ fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığındaki eğimi c olmak üzere $\|\cdot\|_{\Phi,s} = c\|\cdot\|_1$ eşitliği sağlanır.

İspat. Her $u \in \mathbb{R}$ için $\Phi(u) = c|u|$ olsun. (2.7) eşitliğinden,

$$\inf_{u>0} \frac{1}{u} s(cu) = c \inf_{u>0} \frac{1}{cu} s(cu) = c \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(k) = c$$

sağlanır. Teorem 2.7.1 $p = 1$ için uygulanırsa

$$\|f\|_{\Phi,s} = \inf_{u>0} \frac{1}{u} s(cu) \|f\|_1 = c\|f\|_1$$

elde edilir. ■

Teorem 2.7.3 (T, Σ, μ) atomsuz ölçü uzayı olsun. Eğer s - normu k^* - sonlu değilse $(L_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s})$ Orlicz uzayı, L^1 uzayına doğrusal olarak izometrik olan bir uzayı içerir.

İspat. Kabul edelim ki s -normu k^* - sonlu olmasın. Φ fonksiyonunun doğrusal olma durumu Sonuç 2.7.2’de incelendiğinden, Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında doğrusal olmayan bir fonksiyon olarak kabul edelim. Ayrıca s -normu k^* sonlu olmadığından Teorem 2.6.8 a)-f) şıkları sağlanmaz. Diğer bir ifadeyle Φ doğrusal olmadığından ve c) şıkkı sağlanmadığından $w(1) < 1$ olur. d) şıkkı sağlanmadığından Φ fonksiyonunun sonsuzda asimptotu vardır. Yine a) şıkkı sağlanmadığından Φ yalnızca sonlu değerlar alır. Lemma 2.6.2’den Φ fonksiyonun sonsuzdaki eğimi $c = \lim_{u \rightarrow \infty} p_+(u) \in (0, \infty)$ ve y - kesiti $-\Psi(c) < \infty$ olur. Ayrıca μ atomsuz olduğundan $0 < \Psi(c)\mu(A) < 1 - w(1)$ sağlayacak şekilde ölçülebilir bir A kümesi vardır. Desteği A kümesinde olan tüm integrallenebilir fonksiyonların uzayı X olsun. Bir $f \in X$ için

$$\|f\|_1 = \int_A |f(t)| dt$$

normu tanımlansın. Her $u \geq 0$ için

$$\Phi(u) = \int_0^u p_+(u) dt \leq \int_0^u c dt = cu$$

sağlanır. Her $k > 0$ ve her $f \in X$ için

$$\Phi(kf) = \int_0^{k|f|} p_+(t) dt \leq ck|f| \quad (2.32)$$

sağlanır. Buradan

$$I_\Phi(kf) = \int_A \Phi(kf) d\mu \leq \int_A ck|f(t)| d\mu = ck\|f\|_1 < \infty \quad (2.33)$$

elde edilir. Böylece, $f \in E_\Phi$ ve $f \in L^1$ olur. Dolayısıyla $X \subset E_\Phi \cap L^1$ elde edilir. Her $k > 0$ ve $f \in X$ için

$$I_\Psi(p_+(kf)) = \int_A \Psi(p_+(kf)) d\mu \leq \int_A \Psi(c) d\mu = \Psi(c)\mu(A) < 1 - w(1)$$

sağlanır. O halde her $k > 0$ için

$$\begin{aligned} \beta_s(I_\Phi(kf), I_\Psi(p_+(kf))) &= 1 - w(s'_+(I_\Phi(kf))) - I_\Psi(p_+(kf))s'_+(I_\Phi(kf)) \\ &\geq 1 - w(1) - \Psi(c)\mu(A) > 0 \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla her $f \in X$ için $k^*(f) = \infty$ olur. Ayrıca 2.24 eşitliğinden

$$\left(\frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) \right)'_+ < 0$$

sağlanır. Bu durumda Sonuç 2.5.3 ii) şikkından $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) = \|f\|_{\Phi,s}$ bulunur. O halde $k^*(f) = \infty$ eşitliğini sağlayan her $f \in L_\Phi$ için, her $u \geq 0$ için $s(u) \geq u$ olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} I_\Phi(kf) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} s(I_\Phi(kf)) = \|f\|_{\Phi,s} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi(kf)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} I_\Phi(kf)$$

gerçeklenir. Buradan $\|f\|_{\Phi,s} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} I_\Phi(kf)$ elde edilir. Yine $c > 0$ olmak üzere $F : X \subset L^1 \longrightarrow X \subset E_\Phi$ operatörü $F(f) = \frac{f}{c}$ olarak tanımlansın. F operatörünün doğrusallığı ve sürekliliği kolayca elde edilir. O halde, Monoton Yakınsaklık Teoremi

ve $\frac{\Phi(u)}{u}$ fonksiyonunun artanlığı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|F(f)\|_{\Phi,s} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} I_{\Phi} \left(k \frac{f}{c} \right) = \frac{1}{c} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t:f(t) \neq 0} |f(t)| \frac{\Phi(kc^{-1}|f(t)|)}{kc^{-1}|f(t)|} d\mu \\ &= \frac{1}{c} \int_{t:f(t) \neq 0} |f(t)| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(kc^{-1}|f(t)|)}{kc^{-1}|f(t)|} d\mu \\ &= \frac{1}{c} \int_{t:f(t) \neq 0} |f(t)| \lim_{k \rightarrow \infty} p_+(u) d\mu = \frac{1}{c} c \|f\|_1 = \|f\|_1\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki teoremden f, x, y ile E_{Φ} de tanımlı fonksiyonları ifade edeceğiz.

Teorem 2.7.4 Φ, Ψ yalnızca sonlu değerler alan birbirlerinin tümleyeni olan Orlicz fonksiyonları olsun. Yine s^* , s dış fonksiyonunun en küçük Hölder eşleniği olsun. Eğer $\|\cdot\|_{\Psi,s^*}$ normu k^* -sonlu ise $(E_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s})$ uzayı, $(L_{\Psi}, \|\cdot\|_{\Psi,s^*})$ Orlicz uzayının Köthe öndualidir, yani

$$(E_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s})' = (L_{\Psi}, \|\cdot\|_{\Psi,s^*})$$

sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $f : E_{\Phi} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve doğrusal bir fonksiyon olsun. (T, Σ, μ) ölçü uzayı (T_a, Σ_a, μ_a) atomik kısmı ve (T_c, Σ_c, μ_c) atomsuz kısmı olmak üzere iki kısımdan oluşur.

E_{Φ} uzayındaki T_a destekli tüm fonksiyonların uzayı E_{Φ}^a olsun. Bu uzay üzerinde E_{Φ} tarafından indirgenen s -norm topolojisi verilsin. Benzer şekilde E_{Φ}^c uzayı T_c destekli tüm fonksiyonların uzayı olsun. Bir f fonksiyonunun E_{Φ}^a uzayına kısıtlanması $f_a : E_{\Phi}^a \rightarrow \mathbb{R}$ ve f fonksiyonunun E_{Φ}^c uzayına kısıtlanması $f_c : E_{\Phi}^c \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Yine f sürekli ve doğrusal olduğundan, kısıtlanışları olan f_a ve f_c fonksiyonları da doğrusal ve sürekli. Üstelik $f = f_a + f_c$ sağlanır.

Öte yandan, (T, Σ, μ) σ -sonlu bir ölçü uzayı olduğundan yani $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(T_n) < \infty$ olacak şekilde Σ kümesinde $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ var olduğundan $T_a \subset \mathbb{N}$ ve $\Sigma_a \subset 2^{\mathbb{N}}$ olarak kabul edilebilir. Bu küme ile doğal sayılar arasında doğal bir eşleme yapılabilir. T kümesinin

atomlarının kümesi sonlu ya da sonsuz olabilir. Eğer T_a atomlarının kümesi sonluysa bu durumda

$$\begin{cases} x = (x(n)) & , n \in T_a \\ 0 & , n \in \mathbb{N} \setminus T_a \end{cases}$$

olarak dizi oluşturulabilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$e_n(i) = \begin{cases} 1 & , i = n \\ 0 & , i \neq n \end{cases}$$

birim vektörü tanımlasın. Bu durumda her $x \in E_\Phi^a$ için $x(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n(\cdot)$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca her $x \in E_\Phi^a$, $\lambda > 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$I_\Phi \left(\lambda \left(x - \sum_{n=1}^m x(n)e_n \right) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi \left(\lambda \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} x(n)e_n(i) \right) \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

sağlanır. Dolayısıyla Lemma 2.2.10 (2.9) denkleğinden, $\sum_{n=m+1}^{\infty} x(n)e_n$ s-normuna göre x elemanına yakınsar. Şimdi,

$$\begin{cases} \text{Her } n \in T_a \text{ için} & , y_a(n) = \frac{f_a(e_n)}{\mu_a(\{n\})} \\ \text{Her } t \in T_c \text{ için} & , y_a(t) = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O halde f_a fonksiyonunun doğrusallığı ve sürekliliğinden,

$$f_a(x) = f_a \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)f_a(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y_a(n)\mu_a(\{n\}) = \int_{T_a} x(t)y_a(t)d\mu_a$$

bulunur. Ölçülebilir her $A \subset T_c$ kümesi için $v(A) = f_c(\chi_A)$ tanımlansın. Bu durumda v sonlu alt toplamsaldır ve μ_c ölçüsüne göre mutlak süreklidir.

Kabul edelim ki $(A_i)_{i=1}^n$ ayrık kümeler olsun. Bu durumda

$$v\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = f_c\left(\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right) = \sum_{n=1}^n f_c(A_i) = \sum_{n=1}^n v(A_i)$$

sağlanır.

$A \subset T_c$ kümesi ölçülebilir bir küme olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\Phi\left(\frac{2\|f_c\|}{\varepsilon}\mu_c(A)\right) < 1$ için

$$\begin{aligned}
|v(A)| &= |f_c(\chi_A)| \leq \|f_c\| \|\chi_A\|_{\Phi,s} = \|f_c\| \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(I_\Phi(k\chi_A)) \\
&= \|f_c\| \inf_{k>0} \frac{1}{k} s\left(\int_A \Phi(k) d\mu_c\right) \\
&= \|f_c\| \inf_{k>0} \frac{1}{k} s(\Phi(k)\mu_c(A)) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} s\left(\Phi\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\mu_c(A)\right) < \frac{\varepsilon}{2} s(1) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla $\mu_c(A) = 0$ eşitliğini sağlayan her ölçülebilir $A \subset T_c$ kümesi için $v(A) = 0$ sağlanır. O halde Radon-Nikodym teoremine göre

$$f_c(x) = \int_{T_c} x(t)y_c(t)d\mu_c$$

olacak şekilde bir y_c ölçülebilir fonksiyonu vardır. Gerçekten de, $x \in X^+ = \{x : x(t) \geq 0\}$ olsun. Bu durumda $0 \leq \phi_n \uparrow x$ olacak şekilde basit fonksiyonların dizisi vardır. Ayrıca f_c sürekli olduğundan $f_c(\phi_n) \uparrow f_c(x)$ eşitliği sağlanır. $\phi_n = (\sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i})_n$ olsun. Öte yandan f_c doğrusal olduğundan

$$f_c(\phi_n) = f_c\left(\sum_{i=1}^k \alpha_{i_n} \chi_{A_{i_n}}\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_{i_n} f_c(\chi_{A_{i_n}}) = \sum_{i=1}^k \alpha_{i_n} v(A_{i_n}) = \int \phi_n dv$$

sağlanır. Monoton yakınsaklık teoreminden

$$f_c(\phi_n) = \int \phi_n dv \longrightarrow \int x dv$$

olur. Limit tek olduğundan

$$\int x dv = f_c(x)$$

eşitliği sağlanır ve ayrıca Radon- Nikodym teoreminden,

$$\int x dv = \int xy_c d\mu$$

olacak şekilde $y_c \in T_c$ bulunur. O halde

$$f_c(x) = \int_{T_c} x(t)y_c(t)d\mu_c \text{ ve } |f_c(x)| < \infty$$

sağlanır. y_c fonksiyonunun tanım kümesini, her $t \in T_a$ için $y_c(t) = 0$ yazarak genişletip $y = y_a + y_c$ olarak tanımlayalım. O halde her $x \in E_\Phi$ için $x_a = x\chi_{T_a}$ ve $x_c = x\chi_{T_c}$ olarak yazılırsa $x = x_a + x_c$ olur ve

$$f(x) = f_a(x) + f_c(x) = f_a(x_a) + f_c(x_c) = \int_{T_a} x_a(t)y_a(t)d\mu_a + \int_{T_c} x_c(t)y_c(t)d\mu_c = \int_T x(t)y(t)d\mu$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda f fonksiyonunun E_Φ uzayında bir integral temsili vardır. O halde (2.14) Hölder eşitsizliğinden

$$|f(x)| = \left| \int_T x(t)y(t)d\mu \right| \leq \|x\|_{\Phi,s} \|y\|_{\Psi,s^*} \quad (2.34)$$

sağlanır. Dolayısıyla $\|f\| \leq \|y\|_{\Psi,s^*}$ elde edilir.

Şimdi de eşitsizliğin diğer tarafını, yani $\|y\|_{\Psi,s^*} \leq \|f\|$ olduğunu gösterelim. $y = 0$ durumunda ifade açıktır. O halde $y \neq 0$ olarak kabul edelim. $T_1 \subset T_2 \subset \dots$ sonlu ölçülü kümeler olmak üzere $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = T$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = y\chi_{\{t \in T_n : |y(t)| \leq n\}}$$

tanımlansın. Buradan $|y_n| \uparrow |y|$ olduğu kolayca görülür. Teorem 2.3.3'ten s -normu yarı-Fatou özelliğini sağladığından $\|y_n\|_{\Psi,s^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|y\|_{\Psi,s^*}$ olur. Genelliği kaybetmeden her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \neq 0$ kabul edelim. Ψ yalnızca sonlu değer aldığından, $I_\Psi(ky_m) < \infty$ olacak şekilde bir $y_m \in E_\Psi$ vardır. O halde $E_\Psi \neq \{0\}$ sağlanır. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in E_\Psi \setminus \{0\}$ olur. Kabul gereği $\|\cdot\|_{\Psi,s^*}$ normu k^* -sonlu olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için en az bir $0 < k^* = k^*(y_n) < \infty$ vardır öyle ki Teorem 2.5.2'den

$$\|y_n\|_{\Psi,s^*} = \frac{1}{k^*} s^*(I_\Psi(k^*y_n))$$

sağlanır. q_+ , Ψ fonksiyonunun $\mathbb{R}^+$ daki sağ türevi olsun. Φ ve q_+ sonlu değer aldığından her $l > 0$ için $I_\Phi(lq_+(k_n y_n)) < \infty$ olur. Bu ise her $n \in \mathbb{N}$ için $q_+(k_n y_n) \in E_\Phi$ olmasıdır. Teorem

2.5.6 ve Teorem 2.4.17 kullanılırsa,

$$I_{\Psi}(k_n y_n) + I_{\Phi}(q_+(k_n |y_n|)) = s^*(I_{\Psi}(k_n y_n))s(I_{\Phi}(q_+(k_n |y_n|))) \geq 1 \quad (2.35)$$

sağlanır. Young eşitliğinden

$$\int_T q_+(k_n |y_n(t)|) k_n |y_n(t)| d\mu = I_{\Phi}(q_+(k_n |y_n|)) + I_{\Psi}(k_n y_n) \geq 1 \quad (2.36)$$

elde edilir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n y_n \neq 0$ ve μ - hhh $q_+(k_n |y_n|) \neq 0$ sağlanır. Dolayısıyla $0 < \|q_+(k_n |y_n|)\|_{\Phi,s} < \infty$ elde edilir.

$$sgna = \begin{cases} 1 & , a > 0 \\ 0 & , a = 0 \\ -1 & , a < 0 \end{cases}$$

işaret fonksiyonu olmak üzere, (2.35), (2.36) ifadelerinden ve infimum özelliğinden dolayı

$$\begin{aligned} \left| \int_T q_+(k_n |y_n(t)|) sgn y_n(t) y_n(t) d\mu \right| &= \frac{1}{k_n} \int_T q_+(k_n |y_n(t)|) k_n |y_n(t)| d\mu \\ &= \frac{1}{k_n} (I_{\Phi}(q_+(k_n |y_n|)) + I_{\Psi}(k_n y_n)) \\ &= s(I_{\Phi}(q_+(k_n |y_n|))) \frac{1}{k_n} s^*(I_{\Psi}(k_n y_n)) \\ &\geq \|q_+(k_n |y_n|)\|_{\Phi,s} \|y_n\|_{\Psi,s^*} \end{aligned} \quad (2.37)$$

eşitliği sağlanır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = q_+(k_n |y_n|) sgn y_n \|q_+(k_n |y_n|)\|_{\Phi,s}^{-1}$$

fonksiyon dizisi tanımlansın. Bu durumda $x_n \in E_{\Phi}$ olur. Öte yandan $y_n \neq 0$ olduğundan $|sgn y_n| \neq 0$ sağlanır ve $\|x_n\| = \frac{\|q_+(k_n |y_n|)\|_{\Phi,s}}{\|q_+(k_n |y_n|)\|_{\Phi,s}} = 1$ olur.

Ayrıca $y_n = y\chi_{\{t \in T_n; |y(t)| \leq n\}}$ ve $|y(t)| = \operatorname{sgn} y(t) = \operatorname{sgn} y_n(t)$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_n(t)y_n(t) &= q_+(k_n|y_n|) \|q_+(k_n|y_n|)\|_{\Phi,s}^{-1} \operatorname{sgn} y_n(t) \\ &= q_+(k_n|y_n|) \|q_+(k_n|y_n|)\|_{\Phi,s}^{-1} |y_n(t)| \\ &= q_+(k_n|y_n|) \|q_+(k_n|y_n|)\|_{\Phi,s}^{-1} |y(t)| \end{aligned} \quad (2.38)$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca $|f_y(x_n)| \leq \|f_y\|$ sağlandığından $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_y(x_n)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_y\| = \|f_y\|$ bulunur. $f_y \in E'_\Phi$ olmak üzere (2.38) ve (2.37) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|f_y\| &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_y(x_n)| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_T x_n(t)y(t)d\mu \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_T x_n(t)y_n(t)d\mu \right| \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|_{\Psi,s^*} = \|y\|_{\Psi,s^*} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla her y için sağlandığından, $\|f\| = \|f_y\| \geq \|y\|_{\Psi,s^*}$ elde edilir. O halde $\|f\| = \|y\|_{\Psi,s^*}$ eşitliği sağlanır. ■

Gözlem 2.7.5 s - normu sıralı sürekli bir normdur. O halde Önerme 2.1.23'ten dolayı s - normu ile donatılmış E_Φ uzayının E'_Φ Köthe duali ile E_Φ^* topolojik duali doğal olarak aynıdır.

3 MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında genel olarak fonksiyonel analizdeki temel teoremler ve yöntemler kullanılmıştır. Yine [21] makalesi ve [18] kitabı esas alınarak araştırma yapılmıştır.

μ ölçüsü atomlu ya da atomsuz olmak üzere (T, Σ, μ) σ -sonlu ve tam ölçü uzayı olsun. s bir dış fonksiyon olmak üzere, bu dış fonksiyon aracılığıyla kurulan s -normunun k^* -sonluluğu ve s - normunun sıralı sürekliliği çalışmada $(E_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,s})$ uzayının Köthe duali için önemli bir rol oynamaktadır. Yine L^∞ ve L^1 Lebesgue uzayları ile L_Φ Orlicz uzayının doğrusal olarak izometrik olduğunu göstermede, özel olarak $\Phi(u) = c|u|^p$ fonksiyonu ile çalışmak önemli olmuştur. Ayrıca yarı-Fatou özelliği bu uzaylar için oldukça önem taşımaktadır.

Orlicz uzayları üzerinde yeni ve daha genel bir norm olan s -normlarının incelendiği bu tez çalışmasında, okuyucunun s -normu ile donatılmış Orlicz uzaylarını daha rahat anlaması için gerekli kaynaklar incelenerek yorumlanmış, ayrıntılı ispatlar ve karşılaştırmalarla konuyla ilgili literatür ele alınmıştır. Kullanılan makale ve kaynaklar kaynakça kısmında tez yazım kurallarına göre belirtilmiştir.

4 BULGULAR

Orlicz uzaylarında Orlicz ve Luxemburg normlarının ardından, p -Amemiya olarak adlandırılan normlar Cui, Duan, Hudzik ve Wisla tarafından çalışıldı ve bu normların bazı geometrik özellikleri incelendi [3], [6]. Daha sonrasında Wisla tarafından dış fonksiyon tanımı verilip, s -normları tanıtıldı. Tanıtılan bu s -normu p -Amemiya normlarının bir genellemesi niteliğindedir. [21] makalesi temel alınarak çalışılan bu tez aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Tezin birinci ve ikinci bölümlerde, öncelikle p -Amemiya normlarının temelini oluşturan s_p fonksiyonları tanıtılmış ve incelenmiştir. Ardından s dış fonksiyonları ve s -normları tanımlanmıştır. Dış fonksiyonları temel alınarak oluşturulan s - normunun Orlicz ve Luxemburg normları ile denk olduğu gösterilmiştir. Ardından s -normunun yarı-Fatou özelliğini sağladığı gösterilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde bir s dış fonksiyonunun Hölder anlamında eşleniğinin tanımı verilip, ardından bazı dış fonksiyonlar için inceleme yapılmıştır.

Beşinci ve altıncı bölümlerde s normu için $k^*(f)$ ve $k^{**}(f)$ fonksiyonları tanımlanmıştır. Sonrasında s normunun elde edilebilirliği için teorem ve sonuç verilmiştir. Ardından s normunun k^* ve k^{**} -sonluluğu için teorem verilmiştir.

Tezin son kısmında ise özel bir Φ fonksiyonu ile çalışarak, L^p Lebesgue uzaylarının L_Φ Orlicz uzaylarına doğrusal izometrik olduğu gösterildi. μ ölçüsünün atomsuz ölçü olması ve s - normunun k^* -sonlu olmaması durumunda $(L_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,s})$ Orlicz uzayının, L^1 uzayının bir alt uzayına izometrik olduğu gösterilmiştir. Son olarak s - normunun k^* -sonlu olması durumunda $(E_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,s})$ uzayının Köthe dualinin, $(L_\Psi, \|\cdot\|_{\Phi,s^*})$ uzayı olduğu gösterilmiştir. Burada s^* fonksiyonu, s dış fonksiyonunun Hölder eşleniği ve Ψ fonksiyonu Φ fonksiyonunun tümleyenidir. Bu bağlamda [21] kaynağında yer alan aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.0.1 Φ yalnızca sonlu değerler alan, sonsuzda asimptotu olmayan bir Orlicz fonksiyonu olsun. Ψ fonksiyonu, Φ Orlicz fonksiyonunun tümleyeni ve s^* fonksiyonu, s dış fonksiyonunun en küçük Hölder eşleniği olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) Bir s dış fonksiyonu için

$$(E_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s})^* = (L_{\Psi}, \|\cdot\|_{\Psi,s^*})$$

sağlanır.

ii) $1 < p < \infty$ ve $\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p}$ ise, bir s dış fonksiyonu için $\Psi(u) = \frac{u^q}{q}$ olur ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$(L_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s})^* \cong (L^p, \|\cdot\|_p)^* = (L^q, \|\cdot\|_q) \cong (L_{\Psi}, \|\cdot\|_{\Psi,s^*})$$

ifadesi sağlanır.

iii) Her $1 < p < \infty$ için $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ ise $s_q(v) = (1 + v^q)^{1/q}$ olur ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$(E_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s_p})^* = (L_{\Psi}, \|\cdot\|_{\Psi,s_q})$$

sağlanır.

iv) Her $0 \leq c \leq 1$ için $s_c(u) = \max\{1, c + u\}$ ise

$$(E_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s_c})^* = (L_{\Psi}, \|\cdot\|_{\Psi,s_{1-c}})$$

olur.

İspat. i) Φ fonksiyonu yalnızca sonlu değer aldığından ve sonsuzda asimptotu olmadığından $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(p_+(u)) < \infty$ sağlanır. Dolayısıyla Ψ tümleyen fonksiyonu da sonlu değer alır ve sonsuzda asimptotu yoktur. Teorem 2.6.8 i) şikkından $\|\cdot\|_{\Psi,s^*}$ s normu k^* -sonludur. Ayrıca, s -normu sıralı sürekli olduğundan, Önerme 2.1.23 kullanılırsa E_{Φ}^* ile E_{Φ}' arasında bir doğal eşleme vardır. O halde Teorem 2.7.4 kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(E_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s})^* = (E_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,s})' = (L_{\Psi}, \|\cdot\|_{\Psi,s^*})$$

ii) $p > 1$ iken $\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p}$ olsun. Bu durumda $p_+(u) = \frac{u^{p-1} \cdot p}{p} = u^{p-1}$ olur.

$$\begin{aligned}
q_+(u) = p_+^{-1}(v) &= \inf\{v \geq 0 : p_+(u) > v\} \\
&= \inf\{v \geq 0 : v^{p-1} > u\} \\
&= \inf\{v \geq 0 : v > u^{1/p-1}\} = u^{1/p-1}
\end{aligned}$$

sağlanır. O halde

$$\Psi(v) = \int_0^v q_+(u) du = \int_0^v u^{1/p-1} du = \frac{v^q}{q}$$

elde edilir. O halde Teorem 2.7.1 ve 2.7.4 kullanılırsa

$$(L_\Psi, \|\cdot\|_{\Phi,s})^* \cong (L^p, \|\cdot\|_p)^* = (L^q, \|\cdot\|_q) \cong (L_\Psi, \|\cdot\|_{\Psi,s^*}) \text{ elde edilir.}$$

iii) ve iv) Sonuç 2.4.6 kullanılırsa $s_c(u) = \max\{1, u + c\}$ iken $s_c^*(v) = s_{1-c}(v)$ ve $s_p(u) = (1 + u^p)^{1/p}$ iken $s_p^*(v) = (1 + v^q)^{1/q}$ olduğu bulunur. i) ve sonuç 2.4.6 kullanılırsa

$$(E_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,s_p})^* = (L_\Psi, \|\cdot\|_{\Psi,s_q}) \text{ ve } (E_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,s_c})^* = (L_\Psi, \|\cdot\|_{\Psi,s_{1-c}})$$

olur. ■

5 TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında μ ölçüsü atomlu ya da atomsuz olmak üzere (T, Σ, μ) σ -sonlu ve tam ölçü uzayı olsun. s dış fonksiyon olmak üzere s normlarının norm elde edilebilirliği, k^* sonluluğu gibi özellikleri incelenmiştir. Öte yandan, μ ölçüsü özel olarak atomik ölçü olarak alındığında dizi uzayları elde edildiğinden,

$$l_\Phi = \left\{ (f_n) \in l^0 : \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda f_n) \mu(n) < \infty \exists \lambda > 0 \right\}$$

ve

$$h_\Phi = \left\{ (f_n) \in l^0 : \forall \lambda > 0 \exists n_0 \sum_{n=n_0}^{\infty} \Phi(\lambda f_n) \mu(n) < \infty \right\}$$

olmak üzere $L_\Phi = l_\Phi$ ve $E_\Phi = h_\Phi$ eşitlikleri sağlandığından, Teorem 2.7.4 ve Sonuç 4.0.1 atomik ölçü uzayında da sağlanır ve

$$(h_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,s})^* = (l_\Psi, \|\cdot\|_{\Psi,s})$$

eşitlikleri geçerli olur.

Bu tezde yapılan çalışmalar özel olarak G lokal kompakt gruplar için de yapılabilir. Ele alınan konular soyut harmonik analiz bakış açısıyla yorumlanabilir. İlerleyen çalışmalarda s -normları için Banach cebir ve Banach modül yapılarının incelenmesi amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1]. Bennet, C. and Sharpley, R., 1988, *Interpolation of Operators*, Academic Press, London.
- [2]. Cohn, D.L., 2013, *Measure Theory*, Birkhäuser, Basel, ISBN: 978-1-4614-6955-1.
- [3]. Cui Y., Duan L., Hudzik H., Wisla M., 2008, Basic theory of p -Amemiya norm in Orlicz spaces : Extreme points and rotundity in Orlicz spaces endowed with these norms, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(5–6), 1796-1816.
- [4]. Feng, C., Wang, H., Tu, X.M., Kowalski, J., 2012, A note on generalized inverses of distribution function and quantile transformation, *Appl. Math.*, 3, 2098–2100.
- [5]. Hudzik, H., Kamińska, A., Musielak, J., 1987, On Some Banach Algebras Given by a Modular, *A. Haar Mem. Conf., Budapest/Hung. 1985, Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 49, 445-463.
- [6]. Hudzik H. and Maligranda L., 2000, Amemiya norm equals Orlicz norm in general, *Indag. Mathem., N.S.* , 11(4), 573-585.
- [7]. Kantorovich, L.V and Akilov, G.P., 1977, *Functional Analysis*, 2nd rev. ed., (in Russian), English transl. Pergamon Press, Nauka, Moscow.
- [8]. Krasnoselskii, M.A. and Rutickii, Y.B., 1961, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Nordhoff, Groningen.
- [9]. Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., 1977, *Classical Banach Spaces I Sequence Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN: 978-3-642-66559-2.
- [10]. Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., 1979, *Classical Banach Spaces II Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN: 978-3-662-35349-3.
- [11]. Luxemburg W.A.J., 1955, *Banach Function Spaces*, Thesis (PhD), Delft University of Technology.
- [12]. Luxemburg, W.A.J. and Zaanen, A.C., 1956, Conjugate spaces of Orlicz spaces, *Indag. Math.* 18, 217–228.
- [13]. Maligranda, L., 1989, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Universidade Estadual de Campinas, Brazil.
- [14]. Nakano, H., 1951, *Topology and Linear Topological Spaces*, Maruzen, Tokyo.
- [15]. Orlicz W., 1932, Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B, *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Lett., Sér. A*, 207-220.
- [16]. Orlicz W., 1961, A note on modular spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Math*, 9(3), 175-162.

- [17]. Pales, Z., 1992, A General Version of Young Inequality, *Arch. Math.*, Vol. 58, 360-365
- [18]. Rao M. and Ren Z., 1991, *Theory Of Orlicz Spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, M. Dekker, New York, ISBN:0-8247-8478-2.
- [19]. Wisla, M., 2015, Geometric properties of Orlicz spaces equipped with p -Amemiya norms -results and open questions, *Comm. Math.* 55(2), 183–209.
- [20]. Wisla M., 2018, Closedness of the set of extreme points of the unit ball in Orlicz spaces equipped with the p -Amemiya Norm, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 461, 378-400.
- [21]. Wisla, M., 2020, Orlicz spaces equipped with s -norms, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 483.
- [22]. Zaanen, A., 1983, *Riesz spaces II*, North-Holland Publishing Company, New York, ISBN: 0 444 86626 4.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Şeyma YAŞAR
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2019

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2021

