

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI



ORTAK ÖZEL EĞRİLİ REGLE YÜZEY AİLELERİ

Yüksek Lisans Tezi

Sefure YAMAN

Danışman

Prof. Dr. Emin KASAP

SAMSUN
2023

TEZ KABUL VE ONAYI

Sefure YAMAN tarafından, Prof. Dr. Emin KASAP danışmanlığında hazırlanan “ORTAK ÖZEL EĞRİLİ REGLE YÜZEY AİLELERİ” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 06.10.2023 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Emin KASAP Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik , Geometri Ana Bilim Dalı	☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr.Üyesi Tefvik ŞAHİN Amasya Üniversitesi Matematik, Geometri Ana Bilim Dalı	☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Ergin BAYRAM Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik , Geometri Ana Bilim Dalı	☒ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

Prof. Dr. Ahmet TABAK
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi?

Evet ☐

Hayır ☒

05/07/2023
Sefure YAMAN

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: ORTAK GEODEZİKLİ REGLE YÜZEY AİLELERİ

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 05.07.2023 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 12

Tek kaynak oranı : % 5 çıkmıştır.

05/07/ 2023
Prof. Dr. Emin KASAP

ÖZET

ORTAK ÖZEL EĞRİLİ REGLE YÜZEY AİLELERİ

Sefure YAMAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Haziran/2023

Danışman: Prof. Dr. Emin KASAP

Bir doğrunun bir eğri boyunca hareketi ile meydana gelen yüzeye regle yüzey denir. Regle yüzeyler, genelleştirilmiş yüzeylerin bir özel hali olduğundan tanımlı tek bir eğrisi bulunur. Bu eğri de striksiyon eğrisi olarak adlandırılır. Bu çalışmada e küresel gösterge vektörü tarafından oluşturulan φ yüzeyinin oluşumu sırasında g asimptotik normal vektöründen φ_g asimptotik normal yüzeyine ait karakterizasyonlar incelenmiştir. İlk olarak, regle yüzey ailesi, ortak striksiyon eğrisi ile tanımlanmıştır. φ regle yüzeyinin geodezik Frenet çatısı $\{e, t, g\}$ kullanılarak, bu striksiyon eğrisinin geodezik, eğrilik çizgisi ve asimptotik eğri olması için gerekli koşullar sunulmuştur. Son olarak, ortak geodezik, eğrilik çizgisi ve asimptotik eğri ile regle yüzeyleri göstermek için bazı örnekler verilmiştir. Bundan sonraki çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Geodezik Frenet Çatısı, İzogeodezik Eğri, Regle Yüzeyler

ABSTRACT

COMMON SPECIAL CURVE REGULATED SURFACE FAMILIES

Sefure YAMAN

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics

Master, June/2023

Supervisor: Prof. Dr. Emin KASAP

The surface formed by the movement of a line along a curve is called a ruled surface. Since ruled surfaces are a special case of generalized surfaces, they have a single defined curve. This curve is also called the stricture curve. In this study, the characterizations of the asymptotic normal surface φ_g from the g asymptotic normal vector during the formation of the φ surface created by the global indicator vector e were examined. First, the ruled surface family is defined by the common stricture curve. Using the geodesic Frenet framework $\{e, t, g\}$ of the ruled surface φ , the necessary conditions for this striction curve to be a geodesic, curvature line and asymptotic curve are presented. Finally, some examples are given to show ruled surfaces with common geodesic, curvature line and asymptotic curve. Suggestions were made for future studies.

Keywords: Geodesic Frenet Frame, Isogeodesic Curve, Ruled Surfaces

TEŞEKKÜR

Öncelikle tez çalışmam boyunca değerli vaktini ayıran, yol ve yöntem gösteren, hep yanımda olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Emin KASAP'a, süreç boyunca desteklerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Doç. Dr. Ergin BAYRAM ve Doç. Dr. Fatma GÜLER'e ve yine çalışmanın düzenleme aşamasında yardımcı olan Zehra TORUN'a teşekkürlerimi sunuyorum.



İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTAMALAR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	7
3.1. Regle Yüzeyler.....	7
3.2. Merkez Normal Yüzey.....	19
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	24
4.1 Asimptotik Normal Yüzey	24
4.2. Ortak Özel Eğrili Regle Yüzey Aileleri.....	31
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	40
KAYNAKÇA.....	41
ÖZ GEÇMİŞ	43

SİMGELER VE KISALTAMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Cismi
E^3	: Üç Boyutlu Öklid Uzayı
α	: Uzay Eğrisi
e	: Küresel Gösterge Eğrisi
t	: Merkez Normal
g	: Asimptotik Normal Vektör
κ	: Kappa Eğriliği
τ	: Burulma (Torsiyon)
T	: Teğet Vektör
N	: Asli Normal Vektör
B	: Binormal Vektör
φ	: Regle Yüzey
γ	: Geodezik Eğrilik
c	: Striksiyon Eğrisi (Dayanak Eğrisi)
P_e	: Dağılma Parametresi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Regle yüzey.....	7
Şekil 3.2. Regle yüzeyin dayanak eğrisi ve striksiyon eğrisi	11
Şekil 3.3. Ana doğrunun açılık dönme hareketi	24
Şekil 4.1. $c(s)$ ortak geodezikli yüzey ailesinin bir üyesi	36
Şekil 4.2. $c(s)$ ortak asimptotik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi	37
Şekil 4.3. $c(s)$ ortak asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi.....	37
Şekil 4.4. $c(s)$ ortak geodezikli yüzey ailesinin bir üyesi	38
Şekil 4.5. $c(s)$ ortak eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi	39
Şekil 4.6. $c(s)$ ortak asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi.....	39



1. GİRİŞ

Katı bir cisim uzayda hareket ederken cismin üzerindeki bir noktanın yörüngesi de bir eğri meydana getirir. Bu sırada eğri üzerinde hareket eden yönlendirilmiş bir doğru 3-boyutlu Öklid uzayında bir regle yüzey oluşturur. Regle yüzeyin şeklini karakterize etmek için doğru yörüngelerinin eğrilik teorisi kullanılır. Regle yüzeyin yüksek mertebeden eğrilikleri ile ilgili formülleri genelleştiren Kirson (1975), doğruların eğrilik teorisinin dual karşılığını inceleyen Veldkamp (1976) doğruların eğrilik teorisine değerli katkılarda bulunmuşlardır. Ayrıca Mc Carty (1987), bir regle yüzeyin eğrilik teorisinin skalar ve dual formüllerini elde etmiştir. Regle yüzeyler, arabaların, gemilerin tasarımında, ürünlerin imalatında (örn. CAD/CAM) ve hareket analizi ve katı cisim simülasyonunun yanı sıra model tabanlı nesne tanıma sistemi gibi diğer birçok alanda yaygın olarak uygulanmıştır. Ancak modern yüzey modelleme sistemlerinde çizgili yüzeyler halen birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır (Atalay Şafak ve Kasap, 2020).

Regle yüzeyler, genelleştirilmiş yüzeylerin bir özel hali olduğundan tanımlı tek bir eğrisi bulunur. Bu eğri de striksiyon eğrisi olarak adlandırılır (Güler, 2019). En önemli yüzey eğrilerinden biri asimptotik bir eğridir. Bir yüzey üzerindeki bir eğri, hızı her zaman asimptotik bir yöne, yani normal eğriliğin sıfır olduğu yöne işaret ediyorsa asimptotik olarak sınıflandırılır. Ek olarak, bir M yüzeyindeki bir eğrinin asimptotik olması için, ivmesinin her zaman M 'ye teğet olması gerekir. Asimptotik bir yönde, yüzey, en azından anında teğet düzleminden uzağa doğru bükülmez. Bir yüzeyde Gauss eğriliği asimptotik eğri boyunca her zaman pozitif değildir (Bayram, Güler ve Kasap, 2012).

E^3 'de bir yüzey üzerinde geodezik eğriler uygulamalarda önemli rol oynamaktadır. Geometrik olarak, geodezik eğri, yüzey üzerindeki herhangi iki noktayı birbirine bağlayan en kısa yay uzunluklu eğri olarak tarif edilir. Yüzeylerle alakalı birçok problemde geodezik eğrilerle karşılaşılır. Örneğin, açılabilir bir yüzey bir bozulmaya uğramadan düzlemsel bir şekle çevrilebiliyorsa yüzey üzerindeki geodezikler doğrulara dönüşür (Faux ve Pratt, 1979). Açılabilir olmayan bir yüzeyin en az bozulma ile düzlemsel bir şekle dönüştürülebilmesi için yüzey üzerindeki geodezik eğrilerin mümkün olduğunca korunması gereklidir (Azariadis ve Aspragathos, 2001). Geodezik eğriler ilgili çalışmalar, verilen bir yüzey üzerinde geodezik eğrileri bulma ve sınıflandırma problemlerini ele alır (Spivak, 1979).

Bir yüzeydeki bir diğer önemli karakteristik eğri, eğrilik çizgisidir. Eğrilik çizgisi, geometrik tasarımda, şekil tanımda, yüzeylerin çokgenleştirilmesinde ve yüzey işlemede yaygın olarak kullanılmaktadır. Yıllar boyunca diferansiyel geometride eğrilik çizgileri üzerine birçok çalışma yapılmıştır.

Bir yüzeydeki önemli özel eğrilerden biri asimptotik eğrilerdir. Yüzeydeki eğrinin hızı, normal eğriliğin sıfır olduğu yönü gösteriyorsa eğri asimptotiktir. Ayrıca asimptotik eğrinin ivmesi yüzeye teğet olmalıdır. Asimptotik eğriler, uzun yıllar diferansiyel geometride araştırma konusu olmuştur. Asimptotik eğriler astronomi, mimari ve bilgisayar destekli tasarımda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bir yıldız sistemindeki yıldızların kaçan yörüngelerini bulmak için, Lyapunov yörüngelerinin asimptotik eğrilerini bulmak gerekir. Çünkü asimptotik bir yörüngeden dışa doğru herhangi bir küçük sapma bir yıldızın sistemden kaçmasına neden olur.

Wang ve arkadaşları (2004), 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzey üzerindeki C eğrisinin hem parametre eğrisi hem de geodezik olması için gerekli şartları incelemişlerdir. Ayrıca 2008 yılında sapma fonksiyonları daha genel alınarak ortak geodezikli genelleştirilmiş yüzey ailesi elde edilmiştir. Kasap vd. (2006) yılında ise Minkowski uzayında ortak geodezikli yüzey aileleri tanımlanmıştır.

Bu çalışmada e küresel gösterge vektörü tarafından oluşturulan φ yüzeyinin oluşumu sırasında g asimptotik normal vektöründen φ_g asimptotik normal yüzeyine ait karakterizasyonlar incelenmiştir. Ayrıca bir φ regle yüzeyinin (c) striksiyon eğrisinden geçen regle yüzey ailesinin oluşturulması problemi incelenmiştir. İlk olarak ortak (c) striksiyon eğrili regle yüzey ailesi tanımlanmıştır. φ regle yüzeyinin $\{e, t, g\}$ geodezik Frenet çatısı kullanılarak (c) striksiyon eğrisinin geodezik, eğrilik çizgisi ve asimptotik eğri olması için gerekli şartlar elde edildi. Burada $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı yerine $\{e, t, g\}$ geodezik Frenet çatısını kullanılmasının nedeni daha genel sonuçlar elde edilebilmesi içindir. Çünkü φ regle yüzeyi açılabilir olduğunda bu iki çatı çakışacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1: $\mathbb{R}^n$ standart reel afin uzay olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de bir

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

İç çarpımı her $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayına n-boyutlu standart Öklid Uzayı denir ve E^n gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2: 3-Boyutlu Standart Öklid Uzayı.

3-boyutlu standart reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayı göz önüne alınırsa $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i = \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\mathbb{R}^3$ afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve E^3 ile gösterilir. Bu uzay 3-boyutlu Öklid uzayıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3: $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha : I \rightarrow E^3$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna E^3 de bir eğri denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.4: $\alpha : I \rightarrow E^3, E^3$ te $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ şeklinde bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha(t) \in E^3$ noktasındaki

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)_{\alpha(t)}$$

tanjant vektörüne α nın t noktasındaki hız vektörü denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.5: $\alpha : I \rightarrow E^3$ bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\|\alpha'\| \neq 0$ ise α ya regüler eğri denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.6: $\alpha : I \rightarrow E^3$ bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\|\alpha'\| = 1$ ise α ya birim hızlı eğri denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.7: $\alpha : I \rightarrow E^3$ bir eğri olsun. $a \in I$ sabit bir nokta olmak üzere

$$s: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$$

fonksiyonuna yay uzunluğu fonksiyonu denir (O'Neill, 1966). α eğrisinin $t = a$ dan $t = b$ ye olan yay uzunluğu ise

$$s(b) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill, 1966).

Tanım 2.8: $\alpha: I \rightarrow E^3$ bir eğri olsun, $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ ifadesine α eğrisinin t noktasındaki hızı denir (O'Neill, 1966).

Teorem 2.1: β, α eğrisinin parametresinin h yardımı ile değiştirilmesiyle elde edilen bir eğri olsun. Bu durumda,

$$\beta'(s) = \frac{dh}{ds}(s) \alpha'(h(s))$$

dir (O'Neill, 1966).

Teorem 2.2: $\alpha: I \rightarrow E^3$ regüler bir eğri olsun. α eğrisinden parametre değişimi ile elde edilen birim hızlı bir eğri vardır (O'Neill, 1966).

İspat: $a \in I$ sabit bir nokta olsun. Yay uzunluğu fonksiyonu

$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$ dur. Buradan $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'\|$ elde edilir. α regüler olduğu için

$\|\alpha'\| \neq 0$ olup $\frac{ds}{dt} > 0$ dir. $\frac{ds}{dt} > 0$ olduğu için, $\frac{dt}{ds}(s) = 1 / \frac{ds}{dt}(t(s))$ olup $\frac{dt}{ds} > 0$

dir. $\beta(s) = \alpha(t(s))$ olup β , α eğrisinden t parametre değişimi ile elde edilen bir

eğri olsun. Teorem 2.1'den $\beta'(s) = \frac{dt}{ds}(s) \alpha'(t(s))$ yazılabilir. β eğrisinin hızı,

$$\|\beta'(s)\| = \frac{dt}{ds}(s) \|\alpha'(t(s))\| = \frac{dt}{ds}(s) \frac{ds}{dt}(t(s)) = 1$$

olup β birim hızlıdır.

Tanım 2.9: $\beta: I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $T = \beta'$ ifadesine β eğrisinin birim teğet vektör alanı, $\kappa(s) = \|T'(s)\|$, her $s \in I$ ifadesi ile verilen $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna β eğrisinin eğrilik fonksiyonu, $\kappa \neq 0$ olmak üzere $N = T' / \kappa$ ifadesine β eğrisinin asli normal vektör alanı, $B = T \times N$ ifadesine β eğrisinin binormal vektör alanı ve $\{T, N, B\}$ ye ise Frenet çatısı denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.10: $\beta: I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $B' = -\tau N$ ifadesi ile verilen $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna β nın burulma fonksiyonu denir (O'Neill, 1966).

Teorem 2.3: $\beta: I \rightarrow E^3$ birim hızlı, eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması τ olan bir eğri ise

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \quad (2.1)$$

dir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.11: κ, τ, T, N, B ifadelerine eğrinin Frenet elemanları denir (O'Neill, 1966).

Teorem 2.4: $\alpha: I \rightarrow E^3$ regüler bir eğri olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, N = B \times T, B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}, \\ \kappa &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \end{aligned} \quad (2.2)$$

dir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.12 : $M \subset E^3$ bir yüzey ve α bu yüzey üzerinde bir eğri olsun. α'' vektörü her $p \in M$ noktası için M ye normal ise bu eğriye M üzerinde bir geodezik eğri denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.13: 3-boyutlu Öklid uzayı, E^3 de bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere, $\overline{PQ} = T$ alındığında, P noktası α eğrisini çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin birinci küresel göstergesi veya teğetler göstergesi adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.14: E^3 de s – yay parametresi ile verilen bir α eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ olmak üzere,

$$k_g = \left\| \frac{d^2 \alpha}{ds^2} \right\|$$

ifadesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen, E^3 deki geodezik eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.15 : φ, E^3 de bir regle yüzey ve α da φ üzerinde bir eğri olsun, φ nin birim normal vektörü N_0 ve α eğrisinin birim teğet vektörü T_0 olmak üzere, α nın φ ye göre geodezik eğriliği

$$k_g = \left\langle N_0 \times T_0, \frac{dT_0}{ds} \right\rangle \quad (2.3)$$

dir. Burada s, α eğrisinin yay parametresidir.

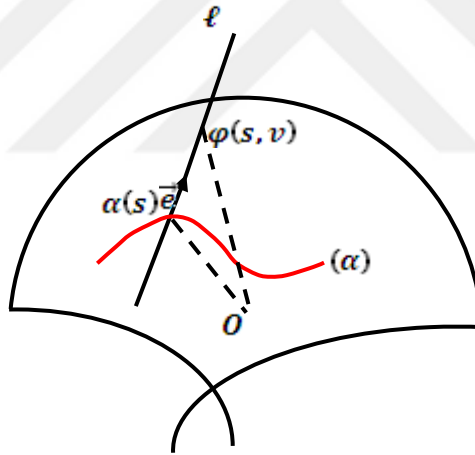
3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Regle Yüzeyler

Bu bölümde küresel gösterge vektörü tarafından oluşturulan φ regle yüzeyi kullanılarak $\{e, t, g\}$ geodezik Frenet 3-ayaklısı elde edilmiş ve $\{e, t, g\}$ vektörlerinin türevlerinden oluşan geodezik Frenet denklemleri hesaplanmıştır. φ regle yüzeyinin oluşumu sırasında t vektöründen elde edilen φ_t merkez normal yüzeyi ve g vektöründen elde edilen φ_g merkez normal yüzeyi oluşturularak bu yüzeye ait karakterizasyonlar incelenmiştir.

Tanım 3.1: Doğruların 1- parametrelili bir ailesine E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında bir regle yüzey ve bu ailedeki doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı veya ana doğrusu denir.

Basit olarak, bir doğrunun bir eğri boyunca hareketi ile meydana gelen yüzeye regle yüzey denir. Silindir, koni regle yüzeye örnek verilebilir.



Şekil 3.1. Regle yüzey

Regle yüzeyin parametrik denklemi,

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + v.e(s) \quad (3.1)$$

dir.

$\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi yüzeyin ana doğrusu yüzeyi oluştururken ana doğru üzerinde alınan bir noktanın çizmiş olduğu eğridir. α eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi adı verilir. e regle yüzeyin ana doğrusu doğrultusundaki birim vektördür.

Tanım 3.2: φ, E^3 de bir regle yüzey ve e de φ nin ana doğrusu doğrultusundaki birim vektör olsun, e nin birim küre yüzeyi üzerindeki çizmiş olduğu eğriye φ regle yüzeyin küresel gösterge eğrisi denir ve e vektörüne de küresel gösterge vektörü adı verilir. Küresel gösterge eğrisi (e) ile gösterilir.

φ, E^3 de regle yüzey olsun. φ regle yüzeyin üzerindeki s ve v -parametre eğrisinin hız vektörleri, (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\varphi_s &= \frac{d\alpha}{ds} + v \cdot \frac{de}{ds} \\ \varphi_v &= e\end{aligned}$$

dır. Böylece φ regle yüzeyin birim normal vektörü,

$$U(s, v) = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|}$$

olmak üzere,

$$U(s, v) = \frac{\left(\frac{d\alpha}{ds} + v \cdot \frac{de}{ds} \right) \times e}{\left\| \left(\frac{d\alpha}{ds} + v \cdot \frac{de}{ds} \right) \times e \right\|}$$

bulunur. Böylece,

$$U(s, v) = \frac{\left(\frac{d\alpha}{ds} + v \cdot \frac{d\alpha}{ds} \right) \times e}{\left(\left\| \frac{d\alpha}{ds} + v \cdot \frac{d\alpha}{ds} \right\|^2 - \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, e \right\rangle^2 \right)^{1/2}} \quad (3.2)$$

Tanım 3.3: φ, E^3 de bir regle yüzey ve $\ell = \varphi(s_0, v)$ φ nin herhangi bir ana doğrusu olsun. ℓ üzerinde bir q noktası hareket ederken bu noktadaki normal doğrultunun konumu değişir ve ℓ etrafında döner. q noktası ℓ üzerinde sonsuza yaklaşırken v de sonsuza yaklaşır. $v \rightarrow -\infty$ olduğunda regle yüzeyin birim normal doğrultusuna asimtotik normal doğrultu denir ve $g(s) \Big|_{s=s_0}$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
g(s)\Big|_{s=s_0} &= \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{de}{ds}\right) \times e}{\left(\left\|\frac{d\alpha}{ds} + v \cdot \frac{de}{ds}\right\|^2 - \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, e \right\rangle^2\right)^{1/2}} \\
&= \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{v \cdot \left(\frac{1}{v} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{de}{ds}\right) \times e}{|v| \left(\left\|\frac{1}{v} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{de}{ds}\right\|^2 - \frac{1}{v^2} \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, e \right\rangle^2\right)^{1/2}}
\end{aligned}$$

olup,

$$g(s)\Big|_{s=s_0} = \frac{e \times e_s}{\|e_s\|} \quad (3.3)$$

şeklinde bulunur. Burada, $e_s = \frac{de}{ds}$ dir.

Tanım 3.4: φ, E^3 de bir regle yüzey ve U da φ regle yüzeyin birim normal vektörü olsun, U nun ℓ ana doğrusu üzerinde g asimtotik normaline dik olduğu noktaya striksiyon (merkez) noktası, bu noktada U birim normal vektörünün doğrultusuna da φ regle yüzeyin merkez normali denir ve t ile gösterilir.

Teorem 3.1: φ, E^3 de bir regle yüzey olsun. φ nin bir $\varphi(s, v_0)$ striksiyon noktasındaki merkez normali,

$$t = \frac{e_s}{\|e_s\|} \quad (3.4)$$

dir.

İspat: φ regle yüzeyin $\varphi(s, v_0)$ striksiyon noktasındaki U normal vektörü k ile gösterilirse, merkez normal tanımına göre

$$\langle k, e \rangle = 0$$

yazılır. k, g asimptotik normaline dik olduğu için

$$\langle k, g \rangle = 0$$

buradan

$$\langle k, e \times e_s \rangle = 0$$

bulunur.

$$\langle k, e \rangle = 0$$

ve

$$\langle k, e \times e_s \rangle = 0$$

bağıntılarından,

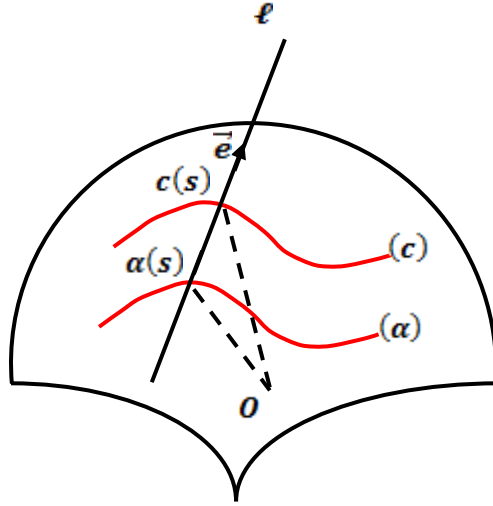
$$k // e_s$$

dir. Eğer striksiyon noktasındaki birim normal vektör t ile gösterilirse

$$t = \frac{e}{\|e_s\|}$$

elde edilir.

Tanım 3.5: φ regle yüzeyinin ana doğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyin oluşmasını sağlarken striksiyon noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin striksiyon eğrisi denir.



Şekil 3.2. Regle yüzeyin dayanak eğrisi ve striksiyon eğrisi

Yüzeyin $c(s)$ striksiyon noktası için,

$$c(s, u) = \alpha(s) + u.e(s) \quad (3.5)$$

dir. Striksiyon noktasında asimptotik düzlem teğet düzleme dik olduğundan,

$$\langle \varphi_s \times \varphi_v, e \times e_s \rangle = 0$$

dır. Buradan,

$$\left\langle \left(\frac{d\alpha}{ds} + u \cdot \frac{de}{ds} \right) \times e, e \times e_s \right\rangle = 0$$

elde edilir. Son eşitlikten,

$$\left\langle \frac{d\alpha}{ds} + u \cdot \frac{de}{ds}, e \right\rangle \langle e, e_s \rangle - \left\langle \frac{d\alpha}{ds} + u \cdot \frac{de}{ds}, e_s \right\rangle \langle e, e \rangle = 0$$

bulunur. e birim vektör olduğundan,

$$\left\langle \frac{d\alpha}{ds}, e_s \right\rangle + u \cdot \langle e_s, e_s \rangle = 0$$

bulunur.

$$\frac{d\alpha}{ds} = \alpha_s, \quad \frac{de}{ds} = e_s \quad \text{alınırsa,}$$

$$u = -\frac{\langle \alpha_s, e_s \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle}$$

olur. Böylece striksiyon noktasının yer vektörü,

$$c(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha_s, e_s \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle} \cdot e(s)$$

bulunur.

Tanım 3.6: Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açığa oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir ve ana doğrunun birim doğrultman vektörü $\vec{e}$ olan bir regle yüzeyin dağılma parametresi P_e ile gösterilir. $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v \cdot e(s)$ regle yüzeyin dağılma parametresi,

$$P_e = \frac{\det(\alpha_s, e, e_s)}{\|e_s\|^2}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 3.7: φ, E^3 de bir regle yüzey olsun. e, φ regle yüzeyinin küresel gösterge vektörü, t merkez normal ve g asimptotik normal olmak üzere $\{e, t, g\}$ ortonormal sistemine regle yüzeyin geodezik Frenet 3-ayaklısı, sistemin her bir vektörüne de geodezik Frenet vektörü adı verilir.

Teorem 3.2: φ, E^3 de bir regle yüzey ve φ nin geodezik Frenet vektörleri e, t, g olmak üzere,

$$t = e_q$$

$$g = e \times e_q$$

dir. Burada $q, (e)$ küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğudur.

İspat: (e) küresel gösterge vektörünün yay uzunluğu q ise,

$$q = \int \|e_s\| ds$$

dir. Buradan,

$$dq = \|e_s\| ds$$

$$\frac{dq}{ds} = \|e_s\|$$

$$s_q = \frac{ds}{dq} = \frac{1}{\|e_s\|}$$

elde edilir.

$$e_q = \frac{de}{dq} = \frac{de}{ds} \frac{ds}{dq}$$

eşitliğinden,

$$e_q = e_s \frac{1}{\|e_s\|}$$

dir.

$$t = e_s \frac{1}{\|e_s\|}$$

olduğundan,

$$e_q = t$$

bulunur.

$e \times e_q$ hesaplanırsa,

$$e \times e_q = e \times \frac{e_s}{\|e_s\|} = \frac{e \times e_s}{\|e_s\|} = g$$

dır.

Teorem 3.3: φ , E^3 de bir regle yüzey olsun. φ nin (e) küresel gösterge eğrisinin S^2 birim kürenin geodezik eğriliği γ ise,

$$\gamma = \langle t_q, g \rangle$$

olur.

İspat: φ nin α dayanak eğrisinin yay –parametresi s , (e) küresel gösterge eğrisinin yay –parametresi q olmak üzere (e) küresel gösterge eğrisinin denklemi,

$$\alpha_e(q) = e(s) \quad (3.6)$$

dir. Burada q parametresine göre türev alındığında,

$$\frac{d\alpha}{dq} = \frac{de}{ds} \frac{ds}{dq}$$

bulunur.

(e) küresel gösterge eğrisinin birim teğet vektörü T_0 ise,

$$T_0 = \frac{d\alpha_e}{dq} = \frac{e_s}{\|e_s\|}$$

buradan,

$$T_0 = t$$

olur. O halde, (e) küresel gösterge eğrisinin S^2 birim küresine göre geodezik eğriliği γ ise (3.6) dan,

$$\gamma = \langle e \times t, t_q \rangle$$

$$= \langle t_q, g \rangle$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.4: φ, E^3 de bir regle yüzey olmak üzere, φ nin küresel gösterge vektörü e ve merkez normalı t ise,

$$\langle t_q, e \rangle = -1$$

ve

$$\langle t_q, t \rangle = 0$$

dır.

İspat:

$$t = \frac{e_s}{\|e_s\|}$$

olmak üzere,

$$t = \frac{e_s}{\langle e_s, e_s \rangle^{1/2}}$$

eşitliğinde türev alınırsa,

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{e_{ss} \langle e_s, e_s \rangle^{1/2} - \frac{1}{2} \langle e_s, e_s \rangle^{1/2} 2 \langle e_{ee}, e_e \rangle e_e}{\langle e_e, e_e \rangle} \\ &= \frac{\langle e_s, e_s \rangle e_{ss} - \langle e_s, e_{ss} \rangle e_s}{\|e_s\|^3} \end{aligned}$$

bulunur. $t_q = t_s s_q$ ve $s_q = \frac{1}{\|e_s\|}$ olduğundan,

$$t_q = \frac{\langle e_s, e_s \rangle e_{ss} - \langle e_s, e_{ss} \rangle e_s}{\|e_s\|^4} \quad (3.7)$$

elde edilir.

$\langle e, e \rangle = 1$, $\langle e_s, e_s \rangle = -\langle e, e_{ss} \rangle$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\langle t_q, e \rangle = \frac{\langle e_s, e_s \rangle \langle e_{ss}, e \rangle - \langle e_s, e_{ss} \rangle \langle e_s, e \rangle}{\|e\|^4} = -1$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\langle t_q, t \rangle = \frac{\langle e_s, e_s \rangle \langle e_{ss}, e_s \rangle - \langle e_s, e_{ss} \rangle \langle e_s, e_s \rangle}{\|e_s\|^5}$$

bulunur.

Sonuç: e, t, g geodezik Frenet vektörleri için,

$$e_q = t$$

$$t_q = \gamma g - e \quad (3.8)$$

$$g_q = -\gamma t$$

dır.

İspat:

$$t_q = \lambda_1 e + \lambda_2 g + \lambda_3 t$$

eşitliklerinde katsayılar,

$$\begin{aligned} \langle t_q, e \rangle &= \lambda_1 = -1 \\ \langle t_q, g \rangle &= \lambda_2 = \gamma \\ \langle t_q, t \rangle &= \lambda_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak bulunur. Böylece,

$$t_q = \gamma g - e \quad (3.10)$$

dır.

$\langle t_q, g \rangle = \gamma$ eşitliğinden, $\langle g_q, t \rangle = -\gamma$ bulunur. $\langle g_q, e \rangle = 0$ ve $\langle g_q, g \rangle = 0$ olduğundan ,

$$g_q = -\gamma t \quad (3.11)$$

elde edilir. φ nin γ geodezik eğriliği için,

$$\gamma = \langle t_q, g \rangle$$

olup,

$$t_q = \frac{\langle e_s, e_s \rangle e_{ss} - \langle e_s, e_{ss} \rangle e_s}{\|e_s\|^4}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle t_q, g \rangle &= \frac{\langle e_s, e_s \rangle \langle e_{ss}, g \rangle - \langle e_s, e_{ss} \rangle \langle e_s, g \rangle}{\|e_s\|^4} \\ &= \frac{\langle e_s, e_s \rangle \langle e_{ss}, e \times e_s \rangle - \langle e_s, e_{ss} \rangle \langle e_s, e \times e_s \rangle}{\|e_s\|^5} \\ &= \frac{\|e_s\|^2 \langle e_{ss}, e \times e_s \rangle}{\|e_s\|^5} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\gamma = \frac{\langle e, e_s \times e_{ss} \rangle}{\|e_s\|^3} \quad (3.12)$$

bulunur.

Bundan sonraki bölümlerde φ regle yüzeyinin dayanak eğrisi striksiyon eğrisi olarak alınacaktır. Bu durumda,

$$\langle \alpha_s, e_s \rangle = 0$$

dır. Diğer taraftan striksiyon eğrisinin teğeti c_q olmak üzere,

$$c_q = \lambda_1 t + \lambda_2 g + \lambda_3 e$$

şeklinde tek türlü yazılabilir. Buradan,

$$\lambda_1 = \langle c_q, t \rangle$$

$$\lambda_2 = \langle c_q, g \rangle$$

$$\lambda_3 = \langle c_q, e \rangle$$

olup,

$$c_q = \langle c_q, t \rangle t + \langle c_q, g \rangle g + \langle c_q, e \rangle e$$

dir. Ayrıca,

$$c(s) = \alpha(s) - u(s)e(s) \quad (3.13)$$

ve

$$u(s) = \frac{\langle \alpha_s, e_s \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle} = 0$$

olmak üzere $c(s) = \alpha(s)$ olur. Ayrıca,

$$\langle c_q, t \rangle = \langle \alpha_q, t \rangle$$

$$= \langle \alpha_s, e_s \rangle \frac{1}{\|e_s\|}$$

$$= 0$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\langle c_q, g \rangle = \langle \alpha_q, g \rangle$$

$$= \langle \alpha_s, e \times e_s \rangle \frac{1}{\|e_s\|^2}$$

$$\langle c_q, e \rangle = \langle \alpha_s, e \rangle \frac{1}{\|e_s\|}$$

elde edilir. φ regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$P_e = \langle \alpha_s, e \times e_s \rangle \frac{1}{\|e_s\|^2}$$

olmak üzere $\frac{1}{\|e_s\|} \langle \alpha_s, e \rangle = \Gamma$ alınırsa striksiyon eğrisinin teğeti için

$$c_q = \Gamma e + P_e g \quad (3.14)$$

elde edilir.

3.2. Merkez Normal Yüzey

t merkez normalinin c dayanak eğrisi boyunca hareketi sonucu oluşan yüzeye φ nin merkez normal yüzeyi denir. Merkez normal yüzeyin denklemi

$$\varphi_t(q, u) = c(q) + ut(q) \quad (3.15)$$

şeklindedir. Bu yüzeyin birim normali,

$$\frac{d\varphi_t}{dq} = \frac{dc}{dq} + u \frac{dt}{dq}$$

olmak üzere,

$$U_t(q, u) = \frac{\left(\frac{dc}{dq} + u \frac{dt}{dq} \right) \times t}{\left(\left\| \frac{dc}{dq} + u \frac{dt}{dq} \right\|^2 - \left\langle \frac{dc}{dq}, t \right\rangle^2 \right)^{1/2}}$$

şeklindedir.

φ_t merkez normal yüzeyinin asimptotik normali g_1 olmak üzere

$$g_1 = \lim_{q \rightarrow -\infty} U_t(q, u)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{dc}{dq} + u \frac{dt}{dq} \right) \times t}{\left(\left\| \frac{dc}{dq} + u \frac{dt}{dq} \right\|^2 - \left\langle \frac{dc}{dq}, t \right\rangle^2 \right)^{1/2}} \\
&= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{u \left(\frac{1}{u} \frac{dc}{dq} + \frac{dt}{dq} \right) \times t}{\left| u \left(\left\| \frac{1}{u^2} \frac{dc}{dq} + \frac{dt}{dq} \right\|^2 - \frac{1}{u^2} \left\langle \frac{dc}{dq}, t \right\rangle^2 \right) \right|^{1/2}} \\
&= \frac{t \times t_q}{\|t_q\|}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca (e) küresel gösterge eğrisinin $\alpha_e(q) = e(s)$ denkleminde q ya göre türev alınırsa,

$$\frac{d\alpha_e}{dq} = t$$

bulunur. O halde (e) nin eğriliği κ olmak üzere

$$\kappa = \left\| \frac{d^2 \alpha_e}{dq^2} \right\| = \|t_q\|$$

dır. Böylece,

$$g_1 = \frac{t \times t_q}{\kappa}$$

elde edilir.

φ_t merkez normal yüzeyinin merkez normali t_1 ile gösterilirse

$$t_1 = \frac{t_q}{\|t_q\|} = \frac{t_q}{\kappa}$$

olduğu görülür.

φ_t merkez normal yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$c_t(q) = c(q) - ut(q), \quad u = -\frac{\langle c_q, t \rangle}{\langle t_q, t_q \rangle}$$

şeklindedir.

(3.2), (3.5) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\langle \Gamma e + P_e, \gamma g - e \rangle}{\langle \gamma g - e, \gamma g - e \rangle} \\ &= \frac{P_e \gamma - \Gamma}{\gamma^2 + 1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir.

Sonuç: (e) küresel gösterge eğrisinin teğet vektör alanı T_e , asli normal vektör alanı N_e ve binormal vektör alanı da B_e

olmak üzere, $T_e = t$, $N_e = t_1 = \frac{t_q}{\|t_q\|}$, $B_e = g_1 = t \times t_1$ dir. (e) nin Frenet formülleri için,

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dq} &= \kappa t_1 \\ \frac{dt_1}{dq} &= -\kappa t + \tau g_1 \\ \frac{dg_1}{dq} &= -\tau t_1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

yazılabilir.

Sonuç: φ_t merkez normal yüzeyinin c_t striksiyon eğrisinin teğet vektör alanı

$$\frac{dc_t}{dq} = Le_1 + Kg_1$$

şeklindedir. Burada $K = (P_e + \Gamma\gamma)\frac{1}{\kappa}$ ve $L = -u_q$ dır.

İspat: (3.15) eşitliğinin her iki yanının q parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{dc_q}{dq} = c_q - ut_q - u_q t$$

bulunur.

$$\left\langle \frac{dc_t}{dq}, g_1 \right\rangle = \langle c_q, g_1 \rangle = K \quad (3.18)$$

alınırsa

$$\begin{aligned} K &= \langle c_q, g_1 \rangle \\ &= \langle \Gamma e + P_e g, t \times t_q \rangle \frac{1}{\kappa} \\ &= \Gamma \langle e, t \times t_q \rangle \frac{1}{\kappa} + P_e \langle g, t \times t_q \rangle \frac{1}{\kappa} \\ &= (\Gamma\gamma + P_e) \frac{1}{\kappa} \end{aligned}$$

olur.

$$L = \left\langle \frac{dc_t}{dq}, e_1 \right\rangle \quad (3.19)$$

alınırsa

$$\begin{aligned} L &= \langle c_q, t \rangle - u_q \\ &= \langle \Gamma e + P_e g, t \rangle - u_q \\ &= -u_q \end{aligned}$$

olur.

ayrıca;

$$\left\langle \frac{dc_t}{dq}, t_q \right\rangle = \langle c_q, t_q \rangle - u \langle t_q, t_q \rangle$$

$$= \langle c_q, t_q \rangle - \frac{\langle c_q, t_q \rangle}{\langle t_q, t_q \rangle} \langle t_q, t_q \rangle$$

$$= 0$$

olduğundan

$$\left\langle \frac{dc_t}{dq}, t_1 \right\rangle = 0 \quad (3.20)$$

bulunur.

(3.18), (3.19), (3.20) eşitliklerinden,

$$\frac{dc_t}{dq} = Le_1 + Kg_1$$

elde edilir.

Sonuç: φ_t regle yüzeyinin $\{e_1, t_1, g_1\}$ geodezik Frenet üçlüsü ve φ regle yüzeyinin $\{e, t, g\}$ geodezik Frenet üçlüsü arasında

$$\begin{aligned} e_1 &= t \\ t_1 &= -\frac{1}{\kappa}e + \frac{\gamma}{\kappa}g \\ g_1 &= \frac{\gamma}{\kappa}e + \frac{1}{\kappa}g \end{aligned} \quad (3.21)$$

bağıntısı vardır.

İspat: φ_t nin tanımından

$$e_1 = t,$$

$$t_1 = \frac{t_q}{\|t_q\|}$$

$$= \frac{1}{\kappa}(\gamma g - e),$$

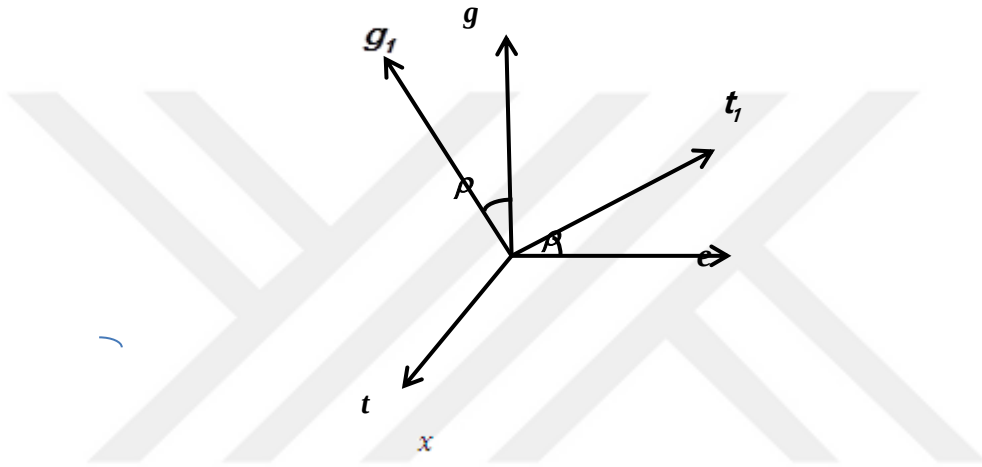
$$= \frac{\gamma}{\kappa}g - \frac{1}{\kappa}e$$

$$g_1 = e_1 \times t_1$$

$$= \frac{\gamma}{\kappa} e + \frac{1}{\kappa} g$$

bulunur.

Sonuç: $e_1 = t$ olmak üzere $\{t_1, g_1\}$ sistemi $\{e, g\}$ sisteminin $\rho = \arcsin \frac{1}{\kappa}$ açısı kadar dönmesiyle meydana gelir.



Şekil 3.3. Ana doğrunun açılık dönme hareketi

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 Asimptotik Normal Yüzey

Bu bölümde φ regle yüzeyinin oluşumu sırasında g asimptotik normalinden elde edilen φ_g asimptotik normal yüzeyi oluşturarak bu yüzeye ait karakterizasyonlar incelenmiştir.

φ regle yüzeyinin g asimptotik normalinin c dayanak eğrisi boyunca hareketi sonucu oluşan yüzeye φ nin asimptotik normal yüzeyi denir. Asimptotik normal yüzeyin parametrik denklemi

$$\varphi_g(q, v) = c(q) + v g(q)$$

şeklindedir. Yüzeyin birim normali,

$$\frac{d\varphi_g}{dq} = \frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq}$$

$$\frac{d\varphi_g}{dv} = g$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} U_g &= \frac{\left(\frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right) \times g}{\left\| \left(\frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right) \times g \right\|} \\ &= \frac{\left(\frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right) \times g}{\left(\left\langle \left(\frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right) \times g, \left(\frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right) \times g \right\rangle \right)^{1/2}} \\ &= \frac{\left(\frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right) \times g}{\left(\left\langle \left(\frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right), \left(\frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right) \right\rangle \langle g, g \rangle - \left\langle \left(\frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right), g \right\rangle \left\langle g, \left(\frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right) \right\rangle \right)^{1/2}} \\ &= \frac{(c_q + v g_q) \times g}{\left(\langle c_q + v g_q, c_q + v g_q \rangle - \langle c_q, g \rangle^2 \right)^{1/2}} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada (3.11) ve (3.14) eşitlikleri kullanılırsa,

$$U_g(q, v) = -\frac{\Gamma}{(\Gamma^2 + \gamma^2 v^2)^{1/2}} t - \frac{v\gamma}{(\Gamma^2 + \gamma^2 v^2)^{1/2}} e \quad (4.1)$$

elde edilir.

φ_g regle yüzeyinin asimptotik normali g_2 olmak üzere,

$$g_2 = \lim_{v \rightarrow -\infty} U(q, v)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right) \times g}{\left(\left\| \frac{dc}{dq} + v \frac{dg}{dq} \right\|^2 - \left\langle \frac{dc}{dq}, g \right\rangle^2 \right)^{1/2}} \\
&= \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{v \left(\frac{1}{v} \frac{dc}{dq} + \frac{dg}{dq} \right) \times g}{\left| v \left(\left\| \frac{1}{v^2} \frac{dc}{dq} + \frac{dg}{dq} \right\|^2 - \left\langle \frac{dc}{dq}, g \right\rangle^2 \right)^{1/2}} \\
&= \frac{g \times g_q}{\|g_q\|} \\
&= \frac{g \times -\tau}{\langle -\tau, -\tau \rangle^{1/2}} \\
&= \mp e
\end{aligned}$$

dir.

φ_g regle yüzeyinin merkez normalı t_2 olmak üzere,

$$\begin{aligned}
t_2 &= \frac{g_q}{\|g_q\|} \\
&= \mp t
\end{aligned}$$

dir.

Sonuç: φ_g asimptotik normal yüzeyinin geodezik Frenet 3-ayaklısı $\{e_2, t_2, g_2\}$ olmak üzere,

$$e_2 = g, t_2 = \mp t, g_2 = \mp e \text{ dir.}$$

Sonuç: φ_g asimptotik normal yüzeyinin geodezik Frenet 3-ayaklısı ve φ regle yüzeyinin geodezik Frenet 3-ayaklıları arasında,

$$\begin{aligned}
e_2 &= g \\
t_2 &= -t \\
g_2 &= e
\end{aligned}$$

veya,

$$e_2 = g$$

$$t_2 = t$$

$$g_2 = -e$$

ilişkisi var olduğundan $\{t_2, g_2\}$ sistemi ile $\{t, e\}$ sistemi aynı düzlemde olup $\{t_2, g_2\}$ sistemi $\{t, e\}$ sisteminin $\frac{\pi}{2}$ veya $\frac{3\pi}{2}$ açılık dönmesi sonucu oluşur.

φ_g asimptotik normal yüzeyinin c_g striksiyon eğrisi için,

$$c_g(q) = c(q) - kg(q)$$

yazılabilir. Striksiyon noktasında yüzey normali asimptotik normale dik olduğundan

$$\left\langle \frac{d\varphi_g}{dq} \times \frac{d\varphi_g}{dk}, g \times g_q \right\rangle = 0$$

dır. Buradan,

$$\left\langle \left(\frac{dc}{dq} + k \frac{dg}{dq} \right) \times g, g \times g_q \right\rangle = 0$$

$$\langle c_q + kg_q, g \rangle \langle g, g_q \rangle - \langle c_q + kg_q, g_q \rangle \langle g, g \rangle = 0$$

$$\langle c_q, g_q \rangle + k \langle g_q, g_q \rangle = 0$$

$$k = - \frac{\langle c_q, g_q \rangle}{\langle g_q, g_q \rangle}$$

$$= - \frac{\langle P_e g + \Gamma e, -\mathcal{I} \rangle}{\langle -\mathcal{I}, -\mathcal{I} \rangle}$$

$$= 0$$

bulunur.

Sonuç: φ_g asimptotik normal yüzeyinin dayanak eğrisi striksiyon eğrisidir. Hatta φ_g ile φ nin striksiyon eğrileri aynıdır. φ_g regle yüzeyinin (g) küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu q_1 olmak üzere,

$$q_1 = \int \|g_q\| dq$$

$$\frac{dq_1}{dq} = \|g_q\|$$

buradan,

$$\frac{dq}{dq_1} = \frac{1}{\|g_q\|} = \frac{1}{\langle -\mathcal{K}, -\mathcal{K} \rangle^{1/2}} = \frac{1}{(\gamma^2)^{1/2}} = \frac{1}{|\gamma|}$$

elde edilir.

(g) nin denklemi için,

$$\alpha_g(q_1) = g(q)$$

yazılabilir. O halde (g) nin teğet vektörü,

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_e}{dq_1} &= \frac{dg}{dq} \frac{dq}{dq_1} \\ &= -\mathcal{K} \frac{1}{|\gamma|} \\ &= \mp t \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\frac{d^2 \alpha_e}{dq_1^2} = \mp t_q \frac{dq}{dq_1}$$

$$= -\frac{1}{|\gamma|} t_q$$

olup (g) nin eğriliği için,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^2 \alpha_e}{dq_1} \right\| &= \frac{1}{|\gamma|} \|t_q\| \\ &= \frac{\kappa}{|\gamma|} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç: (e) nin eğriliği κ olmak üzere g nin eğriliği $\frac{\kappa}{|\gamma|}$ dır.

Sonuç: g küresel gösterge eğrisinin teğet vektör alanı T_g , asli normal vektör alanı N_g , binormal vektör alanı B_g olmak üzere,

$$T_g = \mp t, \quad N_g = \mp \frac{t_q}{\|t_q\|} = t_1, \quad B_g = \mp g_1$$

dir.

Sonuç: (g) ve (e) nin burulmaları aynıdır.

Sonuç: (g) geodezik Frenet vektörleri:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dq_1} &= \frac{\kappa}{|\gamma|} t_1 \\ \frac{dt_1}{dq_1} &= -\frac{\kappa}{|\gamma|} t_1 + \tau g_1 \\ \frac{dg_1}{dq_1} &= -\tau t_1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklindedir. (g) nin geodezik eğriliği γ_g olmak üzere,

$$\gamma_g = \frac{\langle g, g_q \times g_{qq} \rangle}{\|g_q\|}$$

dir.

$$\begin{aligned} g_q &= -\tau, \\ g_{qq} &= -\gamma_q t - t_q \gamma \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \gamma_q &= \frac{\langle g, -\tau \times (-\gamma_q t - t_q \gamma) \rangle}{\langle -\tau, -\tau \rangle^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\langle g, -\tau \times \gamma_q t - \tau \times t_q \gamma \rangle}{\gamma^3} \\ &= \frac{\langle g, -\tau \times \gamma_q t \rangle + \langle g, -\tau \times t_q \gamma \rangle}{\gamma^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma \gamma_q \langle g, t \times t \rangle + \gamma^2 \langle g, t \times t_q \rangle}{\gamma^3} \\
&= \frac{\langle g, t \times t_q \rangle}{\gamma} \\
&= \frac{\langle g, t \times (-\gamma t - e) \rangle}{\gamma} \\
&= \frac{\langle g, -\gamma e + g \rangle}{\gamma} \\
&= \frac{\langle g, -\gamma e \rangle + \langle g, g \rangle}{\gamma} \\
&= \frac{-\gamma \langle g, e \rangle + 1}{\gamma} \\
&= \frac{1}{\gamma} \tag{4.3}
\end{aligned}$$

bulunur. φ_g asimtotik normal yüzeyinin c_g striksiyon eğrisinin denkleminin

$$c_g(q) = c(q)$$

olduğunu biliyoruz. Eşitliğin her iki yanının q parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{dc_g}{dq} = \frac{dc}{dq}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dc_g}{dq}, e_2 \right\rangle &= \left\langle \frac{dc}{dq}, g \right\rangle \\
&= \langle \Gamma e + P_e g, g \rangle \\
&= P_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dc_g}{dq}, t_2 \right\rangle &= \left\langle \frac{dc}{dq}, t_2 \right\rangle \\
&= \langle \Gamma e + P_e g, t \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dc_g}{dq}, g_2 \right\rangle &= \left\langle \frac{dc}{dq}, g_2 \right\rangle \\
&= \langle \Gamma e + P_e g, e \rangle \\
&= \Gamma
\end{aligned}$$

dır.

Sonuç: φ_g asimtotik normal yüzeyinin c_g striksiyon eğrisinin teğeti,

$$\frac{dc_g}{dq} = P_e e_2 + \Gamma g_2 \quad (4.4)$$

şeklindedir.

4.2. Ortak Özel Eğrili Regle Yüzey Aileleri

Bu bölümde bir φ regle yüzeyinin (c) striksiyon eğrisinden geçen yüzey ailesinin oluşturulması problemi ele alınacaktır. Bu regle yüzeyin $\{e, t, g\}$ geodezik Frenet çatısı yardımıyla (c) striksiyon eğrisinin geodezik, eğrilik çizgisi ve asimptotik eğri olması koşulları bulunacaktır.

Tanım 4.1:

$$\begin{aligned} r &: I \rightarrow E^3 \\ s &\rightarrow r(s) \end{aligned}$$

bir eğri ve

$$\begin{aligned} P &: D \subset E^2 \rightarrow E^3 \\ (s, t) &\rightarrow P(s, t) \end{aligned}$$

bir yüzey olmak üzere, r eğrisi P yüzeyi üzerinde hem parametre eğrisi hem de geodezik ise bu eğriye P üzerinde bir izogeodezik denir (Wang ve ark .,2004)

$c(s)$ izoparametrik striksiyon eğrisi ve geodezik $\{e, t, g\}$ frenet çatısı ile oluşturulan yüzey $\varphi = \varphi(s, v)$ olmak üzere,

varsayalım ki,

$$\|c'(s)\| \neq 0$$

Regle yüzeyi tanımlayan φ ,

$\varphi(s, v) = c(s) + v \left[\overrightarrow{X(s)} \right]$ tarafından elde edilir.

$$\varphi(s, v) = c(s) + v[x(s)e(s) + y(s)t(s) + z(s)g(s)],$$

Burada $x(s), y(s)$ ve $z(s)$ c' fonksiyonlardır.

Amacımız striksiyon eğrisinin yüzey üzerinde geodezik olması için gerekli ve yeterli koşulları bulmaktır.

İlk olarak striksiyon eğrisi parametrik bir eğri olduğundan $\varphi(s, v_0) = c(s)$ yapmalıyız. Bunun için v_0 olduğunda $\vec{X} \neq \vec{0}$ olması gerekir. $v = 0$ olduğunda $\varphi(s, 0) = c(s)$, $c(s)$ izoparametrik ve yüzey φ dir.

Normal için $\varphi = \varphi(s, v)$ yüzeyde

$$n(s, v) = \frac{d\varphi(s, v)}{ds} \times \frac{d\varphi(s, v)}{dv}$$

yazılır ve normal vektör ifade edilir.

$$n(s, v_0) = \left[\left(v_0 x \frac{dq}{ds} + v_0 \frac{dy}{ds} - v_0 z \gamma \frac{dq}{ds} \right) z - \left(P_e \frac{dq}{ds} + v_0 y \gamma \frac{dq}{ds} + v_0 \frac{dz}{ds} \right) y \right] e +$$

$$\left[\left(P_e \frac{dq}{ds} + v_0 y \gamma \frac{dq}{ds} + v_0 \frac{dz}{ds} \right) x - \left(\Gamma \frac{dq}{ds} + v_0 \frac{dx}{ds} - v_0 y \frac{dq}{ds} \right) z \right] t + \quad (4.5)$$

$$\left[\left(\Gamma \frac{dq}{ds} + v_0 \frac{dx}{ds} - v_0 y \frac{dq}{ds} \right) y - \left(v_0 x \frac{dq}{ds} + v_0 \frac{dy}{ds} - v_0 z \gamma \frac{dq}{ds} \right) x \right] g$$

Buradan

$$n(s, v_0) = n(s, 0) = -P_e y \frac{dq}{ds} e + (P_e x \frac{dq}{ds} - \Gamma z \frac{dq}{ds}) t + \Gamma y \frac{dq}{ds} g \quad (4.6)$$

Elde edilen asli normal $N(s)$,

$$\frac{dc}{ds} = (\Gamma e + P_e g) \frac{dq}{ds},$$

$$T = \frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 + P_e^2}} e + \frac{P_e}{\sqrt{\Gamma^2 + P_e^2}} g$$

Şimdi (c) eğrisinin binormal vektörünü hesaplayalım.

$$B = \frac{\frac{dc}{ds} \times \frac{d^2c}{ds^2}}{\left\| \frac{dc}{ds} \times \frac{d^2c}{ds^2} \right\|}$$

dir.

$$\frac{dc}{ds} = \Gamma \frac{dq}{ds} e + P_e \frac{dq}{ds} g$$

eşitliğinden türev alınırsa

$$\frac{d^2c}{ds^2} = \left(\frac{d\Gamma}{ds} \frac{dq}{ds} + \Gamma \frac{d^2q}{ds^2} \right) e + \left(\Gamma \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 - P_e \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 \gamma \right) t + \left(\frac{dP_e}{ds} \frac{dq}{ds} + P_e \frac{d^2q}{ds^2} \right) g$$

Bulunur. Buradan

$$B(s) = \frac{1}{A^{1/2}} \left[P_e (P_e \gamma - \Gamma) \frac{dq}{ds} e + \left(\frac{d\Gamma}{ds} P_e - \frac{dP_e}{ds} \Gamma \right) t - \Gamma (P_e \gamma - \Gamma) \frac{dq}{ds} \right] g,$$

elde edilir. Burada

$$A = \left(\frac{dq}{ds}\right)^2 (P_e \gamma - \Gamma)^2 (P_e^2 - \Gamma^2) + \left(\frac{d\Gamma}{ds} P_e - \frac{dP_e}{ds} \Gamma\right)^2$$

dir.

Böylece (c) eğrisinin asli normali için

$$N = B \times T$$

eşitliğinden,

$$N(s) = \frac{1}{(AC)^{1/2}} \left[\left(\frac{d\Gamma}{ds} P_e - \frac{dP_e}{ds} \Gamma \right) P_e e - (P_e \gamma - \Gamma)(\Gamma^2 + P_e^2) \frac{dq}{ds} t - \left(\frac{d\Gamma}{ds} P_e - \frac{dP_e}{ds} \Gamma \right) \Gamma g \right]$$

bulunur. Burada

$$C = \Gamma^2 + P_e^2$$

dir.

i) (c) eğrisinin parametrik eğri ve geodezik eğri olması için yeterli koşulları bulunmalı

Asli normal vektör yüzey normaline paralel olacağından

$$\frac{-y \frac{dq}{ds} (AC)^{1/2}}{\left(\frac{d\Gamma}{ds} P_e - \frac{dP_e}{ds} \Gamma \right)} = \frac{(P_e x - \Gamma z)}{(\Gamma - P_e \gamma)} \left(\frac{A}{C} \right) = \frac{-y \frac{dq}{ds} (AC)^{1/2}}{\left(\frac{d\Gamma}{ds} P_e - \frac{dP_e}{ds} \Gamma \right)} = \lambda$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1: (c) striksiyon eğrisinin φ regle yüzeyi üzerinde izogeodezik eğri olması için gerek ve yeter şart $x(s)$, $y(s)$ ve $z(s)$ fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanmalıdır:

$$y \frac{dq}{ds} (AC)^{1/2} = \lambda \left(\frac{d\Gamma}{ds} P_e - \frac{dP_e}{ds} \Gamma \right), P_e x - \Gamma z = \lambda (\Gamma - P_e \gamma) \left(\frac{C}{A} \right)^{1/2} \quad (4.7)$$

Sonuç 4.2: Eğer φ regle yüzeyi açılabilir ise

$$P_e = 0, \Gamma = \frac{1}{\kappa}, \gamma = \frac{\tau}{\kappa}, \frac{dq}{ds} = \kappa, A = C = \frac{1}{\kappa^2}$$

yazılabilir.

Burada κ ve τ (c) striksiyon eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır. O halde (c) striksiyon eğrisinin geodezik eğri olması için yeter şart,

$$y = 0, \quad x = x(s), \quad z = \lambda \quad (4.8)$$

Olmasıdır.

ii) (c) striksiyon eğrisinin parametrik eğri ve eğrilik çizgisi olması için yeterli koşullar bulunur: (c) striksiyon eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{dn(s, v_0)}{ds} = \lambda(s)T(s)$$

olmasıdır.

(4.5) denkleminde s parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dn(s, v_0)}{ds} = & \left[\frac{dq}{ds} \left(-\frac{dP_e}{ds} y - P_e \frac{dy}{ds} - P_e x \frac{dq}{ds} \right) - P_e y \frac{d^2 q}{ds^2} + \Gamma z \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 \right] e + \\ & \left[\frac{dq}{ds} \left(\frac{dP_e}{ds} x + P_e \frac{dx}{ds} - \frac{d\Gamma}{ds} z - \frac{dz}{ds} \Gamma \right) + \frac{d^2 q}{ds^2} (P_e x - \Gamma z) - \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 y (\Gamma - P_e) \right] t + \\ & \left[\frac{dq}{ds} \left(\frac{d\Gamma}{ds} y + \Gamma \frac{dy}{ds} \right) + \gamma \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 (P_e x - \Gamma z) + \Gamma y \frac{d^2 q}{ds^2} \right] g \end{aligned} \quad (4.9)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2 (c) striksiyon eğrisinin eğrilik çizgisi olması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{ds} \left(-\frac{dP_e}{ds} y - P_e \frac{dy}{ds} - P_e x \frac{dq}{ds} \right) - P_e y \frac{d^2 q}{ds^2} + \Gamma z \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 &= \frac{\lambda}{C^{1/2}} \Gamma \\ \frac{dq}{ds} \left(\frac{dP_e}{ds} x + P_e \frac{dx}{ds} - \frac{d\Gamma}{ds} z - \frac{dz}{ds} \Gamma \right) + \frac{d^2 q}{ds^2} (P_e x - \Gamma z) - \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 y (\Gamma - P_e) &= 0 \\ \frac{dq}{ds} \left(\frac{d\Gamma}{ds} y + \Gamma \frac{dy}{ds} \right) + \gamma \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 (P_e x - \Gamma z) + \Gamma y \frac{d^2 q}{ds^2} &= \frac{\lambda}{C^{1/2}} P_e \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sonuç 4.3: Eğer φ açılabilir regle yüzey ise (c) eğrisinin eğrilik çizgisi olması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned}
\kappa z &= \lambda \\
\frac{dz}{ds} + \tau y &= 0 \\
\frac{dy}{ds} &= \tau z
\end{aligned} \tag{4.11}$$

iii) (c) eğrisinin parametrik eğri ve asimptotik eğri olması için yeterli koşullar bulunmalıdır: (c) eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\left\langle \frac{dn}{ds}(s, v_0, T(s)) \right\rangle = 0$$

olmasıdır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.4: (c) striksiyon eğrisinin asimptotik eğri olması için aşağıdaki denklem sağlanmalıdır:

$$(P_e \gamma - \Gamma)(P_e x - \Gamma) \frac{dq}{ds} + y(P_e \frac{d\Gamma}{ds} - \Gamma \frac{dP_e}{ds}) = 0 \tag{4.12}$$

Sonuç 4.5: φ yüzeyi açılabilir ise (c) eğrisinin asimptotik eğri olması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = 0 \tag{4.13}$$

Örnek 1: $c(s) = (\frac{3}{5} \cos s, \frac{3}{5} \sin s, \frac{4}{5} s)$ ve $e(s) = (-\frac{3}{5} \sin s, \frac{3}{5} \cos s, \frac{4}{5})$ alınsın.

Bu durumda

$$t(s) = (-\cos s, -\sin s, 0) \quad \text{ve} \quad g(s) = (\frac{4}{5} \sin s, -\frac{4}{5} \cos s, \frac{3}{5}) \quad \text{bulunur. Basit bir}$$

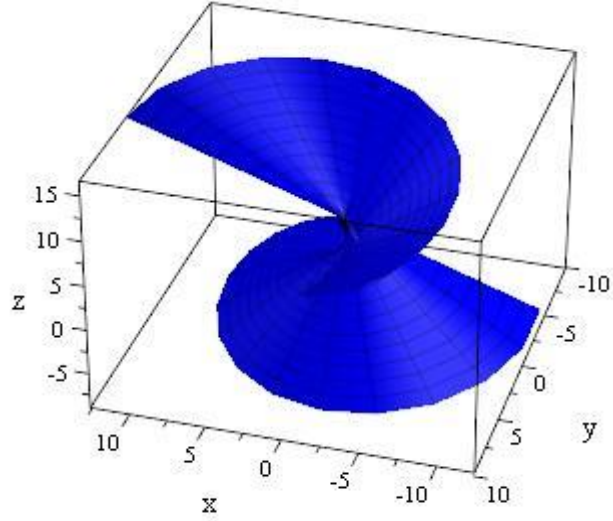
hesaplama ile $\Gamma = \frac{5}{3}, P_e = 0, \gamma = \frac{3}{4}, A = C = \frac{25}{9}$ olduğu görülebilir.

i) Ortak geodezikli yüzey ailesi için : $x = s, y = 0, z = -\frac{5}{3}$ alınırsa denklem

(4.7) sağlanır. O halde (c) ortak geodezikli regle yüzey ailesinin bir üyesi,

$$\varphi(s, v) = (\frac{3}{5} \cos s - (\frac{3}{5} s + \frac{4}{3})v \sin s, \frac{3}{5} \sin s + (\frac{3}{5} s + \frac{4}{3})v \cos s, \frac{4}{5} s(1+v) + \frac{3}{5})$$

olarak bulunur.



Şekil 4.1. $c(s)$ ortak geodezikli yüzey ailesinin bir üyesi

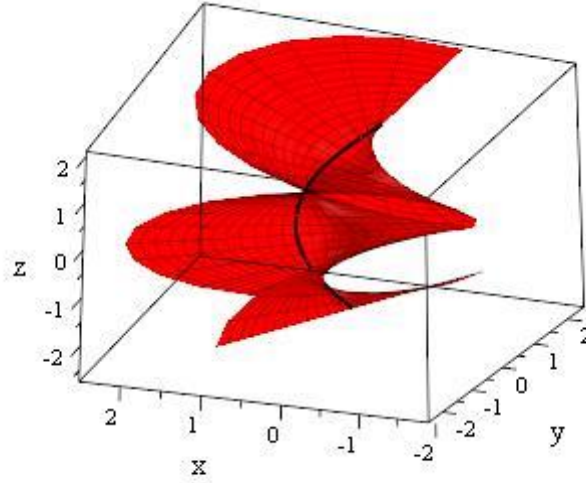
ii) Ortak eğrilik çizgili yüzey ailesi için: denklem (4.10) dan

$z = \frac{5}{3}\lambda, \frac{dz}{ds} + \frac{4}{5}y = 0, \frac{dy}{ds} - \frac{4}{5}z = 0$ diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$x = 0, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos s, z = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos s + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin s$ bu denklem sisteminin bir çözümüdür. O halde $c(s)$ ortak eğrilik çizgili regle yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi(s, v) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\cos s - v(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)\cos s + \frac{4}{5}v(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin s)\sin s \\ \frac{3}{5}\sin s - v(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)\sin s - \frac{4}{5}v(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin s)\cos s \\ \frac{4}{5}s + \frac{3}{5}v(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin s) \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.2. $c(s)$ ortak asimptotik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi

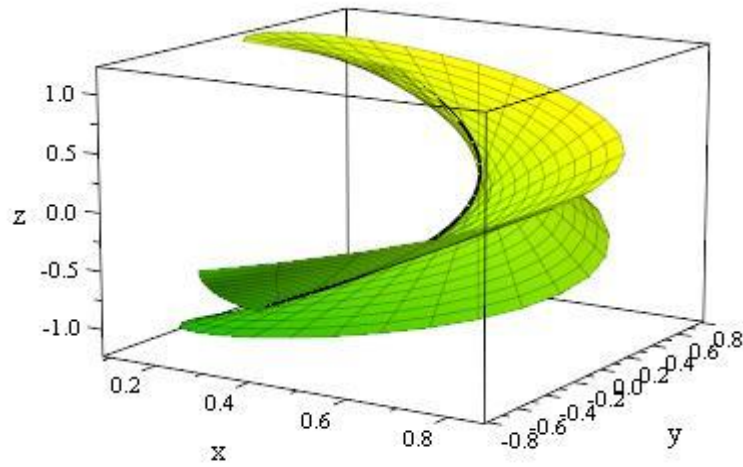
iii) Ortak asimptotik eğrili yüzey ailesi için:

$x = \cos s, y = \sin s, z = -\frac{4}{3} \cos s$ alınırsa denklem (4.12) sağlanır. O halde ortak

asimptotik eğrili regle yüzey ailesinin bir üyesi,

$$\varphi(s, v) = \left(\frac{3}{5} \cos s(1 - v \sin s) - v \sin s \cos s, \sin s\left(\frac{3}{5} - v \sin s\right) + \frac{3}{5} v \cos^2 s, \frac{4}{5}(s + v \cos s)\right)$$

olarak bulunur.



Şekil 4.3. $c(s)$ ortak asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

Örnek 2: $c(s) = (\frac{3}{5} \cos s, \frac{3}{5} \sin s, \frac{4}{5} s)$ ve $e(s) = (\sin s, -\cos s, 0)$ alınabilir. Bu

durumda

$t(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ ve $g(s) = (0, 0, 1)$ olur. Basit bir hesaplama ile

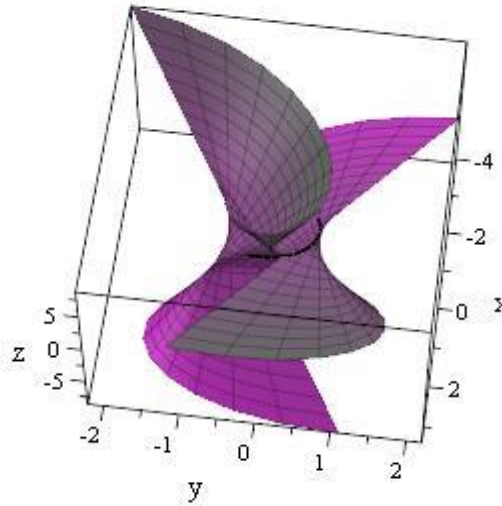
$$\Gamma = -\frac{3}{5}, \quad P_e = \frac{4}{5}, \quad \gamma = 0, \quad A = \frac{9}{25}, \quad c = 1 \text{ bulunur.}$$

i) Ortak geodezikli yüzey ailesi için : $x = s, y = 0, z = \frac{5-4s}{3}$ alındığında

denklem (4.7) sağlar. O halde $c(s)$ ortak geodezikli regle yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi(s) = (\frac{3}{5} \cos s - vs \sin s, \frac{3}{5} \sin s - vs \cos s, \frac{5-4s}{3} v)$$

olarak bulunur.



Şekil 4.4. $c(s)$ ortak geodezikli yüzey ailesinin bir üyesi

ii) Ortak eğrilik çizgili yüzey ailesi için: denklem (4.10) dan

$$4 \frac{dy}{ds} + 4x + 3z = 3\lambda,$$

$$4 \frac{dx}{ds} + 3 \frac{dz}{ds} - 4y = 0,$$

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{4}{3}\lambda,$$

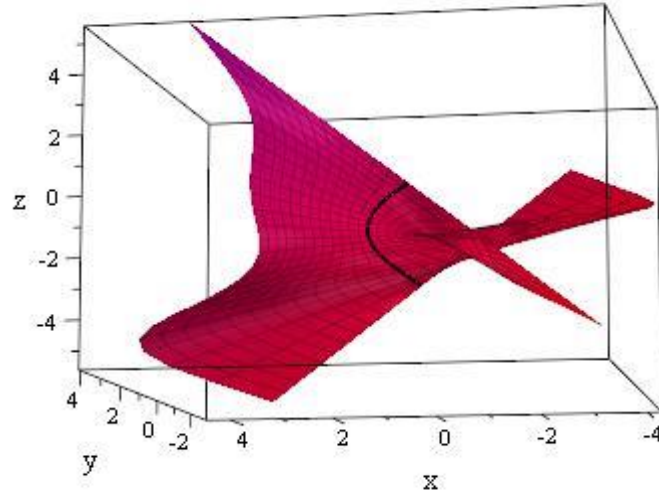
diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$x = s, y = \cos \frac{4}{5} s + \sin \frac{4}{5} s, z = s$ alınırsa bu denklem sistemi sağlanır. O halde

$c(s)$ ortak eğrilik çizgili regle yüzey ailesinin bir üyesi ,

$$\varphi(s, v) = \left(\frac{3}{5} \cos s + v \cos s \left(\cos \frac{4}{5} s + \sin \frac{4}{5} s, \frac{3}{5} \sin s - v \cos s + v \sin s \left(\cos \frac{4}{5} s + \sin \frac{4}{5} s, s \left(\frac{4}{5} + v \right) \right) \right) \right)$$

olarak bulunur.



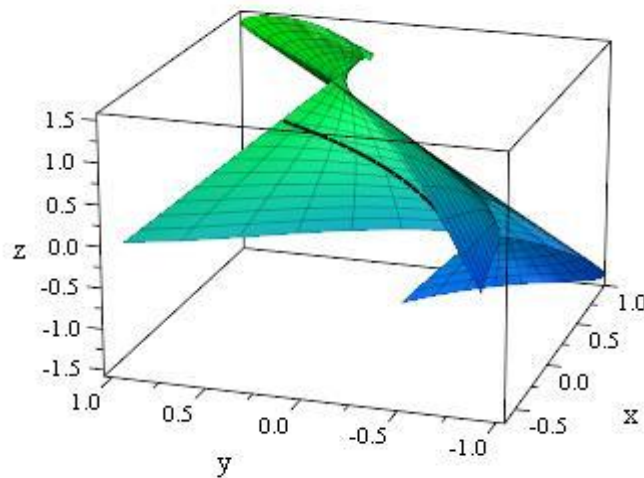
Şekil 4.5. $c(s)$ ortak eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi

iii) Ortak asimptotik eğrili yüzey ailesi için : $x = \cos s, y = \sin s, z = -\frac{4}{3} \cos s$

alınırsa denklem (4.12) sağlanır. O halde ortak asimptotik eğrili regle yüzey ailesinin bir üyesi,

$$\varphi(s, v) = \left(\cos s \left(\frac{3}{5} + 2v \sin s \right), \frac{3}{5} \sin s - v \cos 2s, \frac{4}{5} s - \frac{4}{3} v \cos s \right)$$

olarak bulunur.



Şekil 4.6. $c(s)$ ortak asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde ortak özel eğrili yüzey aileleri ile ilgili çalışmalar olmasına rağmen $\{e, t, g\}$ geodezik Frenet üçlüsü kullanılarak ortak özel eğrili regle yüzey aileleri ile ilgili çalışma bulunmamaktadır.

Ortak özel eğrili regle yüzey aileleri ilgili başka çalışmalar da yapılabilir. bu çalışma farklı uzaylara aktarılabilir.



KAYNAKÇA

- Aminova, A.V. (1993). Pseudo-Riemannian Manifolds with Common Geodesics. *Uspekhi Mat. Nauk.* 48(2): 107-164.
- Atalay Şafak, G., Kasap, E. (2020). Developed Motion Of Robot EnEffectorof Timelike Ruled Surfaces With Spacelike rulings (The First Case). *Hagia Sophia Journal of Geometry*.
- Azariadis, P., Aspragathos, N., (2001). “Computer Graphics Representation and Transformation of Geometric Entities Using Dual Unit Vectors and Line Transformations” *Computers and Graphics* 25, 195-209.
- Bayram, E., Güler, F., Kasap, E. (2012). Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve. *Computer-Aided Design*, 44(7), 637–643.
- Ergün, E., Kasap E., Bayram E. (2014). Surface Pencil with a Common Line of Curvature in Minkowski 3-space. *Acta Mathematica Sinica- English Series*. 30(12). 2103-2118.
- Faux ID, Pratt MJ. *Computational geometry for design and manufacturing*. England: Ellis Horwood; 1979.
- Golikov, V.I. (1963). Geodesic Mappings of Gravitational Fields of General Type, *Trudy Sem. Vektor Tenzor Anal.* 12: 79-129.
- Güler, F. (2019). Eğrilik Teorisi Kullanarak Regle Yüzey Tasarlama Yeni Bir Yaklaşım. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 9(4): 2200-2206, 2019.
- Kasap, E., Akyıldız, F. T. (2008). Surfaces with Common Geodesic in Minkowski 3-Space. *Appl. Math. Comput.*, 177, 260–270.
- Kirson Y, 1975. Curvature theory of in space kinematics, Doctoral dissertation, University of California, Berkley, Calif, USA
- Kruchkovich, G.I. (1963). Semireducible Equations and Geodesic Correspondence of Lorentz Spaces, *Trudy Vsesoyuz. Zaochn. Energet. Inst.*, 24: 74-87.
- Li, C. Y., Wang, R. H., Zhu, C. G. (2011). Parametric Representation of a Surface Pencil With a Common Line of Curvature. *Comput. Aided Des.*, 43, 1110–1117.
- McCarthy, J.M. (1987). On the Scalar and Dual Formulations of the Curvature Theory of Line Trajectories. *Transactions of the ASME*. 102/ Vol.109.
- O’Neill B (1966). *Elementary Differential Geometry*. Academic Press Inc., New York.

- Petrov, A.Z. (1949). Geodesic Mappings of Riemannian Spaces of a Nondefinite Metric., Uchen. Zap. Kazan Univ. 109(3): 7-36.
- Ravani B, Ku T S. (1991). Bertrand Offsets of Ruled and Developable Surfaces. Computer Aided Design. 23. 145-152.
- Saffak, G., Kasap, E. (2009) Family of Surface with a Common Null Geodesic. Int. J. Phys. Sci., 48, 428–433.
- SPIVAK, M., (1979). A Comprehensive introduction to differential geometry, Vol. III, Berkeley, Publish Perish, pp. 272-297.
- Shirokov, P.A. (1925). Constant Fields of Vectors and Tensors of the Second Order in Riemannian Spaces. Izv. Kazan Fiz.-Mat. Obshch 25:2, 86-114.
- Veldkamp, G.R. (1976). On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous, spatial kinematics, Mech. Mach. Theory 11 (2), 141-156.
- Wang, G. J., Tang, K., Tai, C. L. (2004). Parametric Representantion of a Surface Pencil With a Common Spatial Geodesic. Comput. Aided Des., 36, 447–459.

ÖZ GEÇMİŞ

Sefure Yaman, Bafra İmam Hatip Lisesi'ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünden 01.06.2015 tarihinde mezun oldu. 2020 yılında OMÜ Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans programına girdi. Mezuniyetinden bu yana Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

Yayınlar:

1. Yaman, S.; Kasap, E.; (2017). Ruled Surfaces Family With Common Geodesic. 15th International Geometry Symposium Amasya University, Amasya, Turkey, 3-6 July 2017.
2. Referans Numarası : 10583993