



**ORTALAMALARA BAĞLI KONVEKS
FONKSİYONLAR İÇİN
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

FAHRİNNİSA SEVİNÇ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOÇ. DR. AHMET OCAK AKDEMİR
2016
HER HAKKI SAKLIDIR**

**AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ORTALAMALARA BAĞLI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

FAHRİNNİSA SEVİNÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**AĞRI
2016**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ORTALAMALARA BAĞLI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Fahrinnisa SEVİNÇ

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tezde, ortalamalara bağlı konveks fonksiyon türleri için integral eşitsizliklere yer verilmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde konveks fonksiyon sınıfları ile ilgili tanım, teorem ve örneklerle yer verilmiştir. İkinci bölümde konveks fonksiyonlar ve integral eşitsizlikler üzerine tarihsel bir bakış yer almakta olup literatürde bulunan bazı integral eşitlikleri, bu eşitlikler yardımıyla elde edilen eşitsizlikler ve farklı türden konveks fonksiyonlar için elde edilmiş Hermite-Hadamard tipli, Ostrowski tipli ve Simpson tipli eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise yeni integral eşitlikler yardımıyla ortalamalara bağlı konveks fonksiyonlarla ilgili eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu tezin amacı ortalama fonksiyonu, ortalamalara dayalı konvekslik türleri üzerine detaylı inceleme yapmak ve bu fonksiyon sınıfları için integral eşitsizlikler elde etmektir.

2016, 59 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyonlar, GA –konveks fonksiyon, GG –konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hölder eşitsizliği.

ABSTRACT

Master Thesis

INTEGRAL INEQUALITIES FOR CONVEX FUNCTIONS BASED ON MEANS

Fahrinnisa SEVİNÇ

Ağrı İbrahim Çeçen University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

In this thesis, integral inequalities have been given for convex functions based on means. In the first part of the study, definitions, theorems and examples for convex function classes have been placed. In the second part, a historical glance on the convexity and integral inequalities has been given, some integral equalities, integral inequalities that have been obtained via these equalities and integral inequalities of Hermite-Hadamard type, Ostrowski type and Simpson type for convex functions have been established. In the third part, new inequalities have been obtained for convex functions based on means via new integral equalities.

The aim of this thesis is to search kinds of convexity based on means deeply and to obtain some integral inequalities for these classes of functions.

2016, 59 Pages

Keywords: Convex Functions, GA –convex functions, GG –convex functions, Hermite-Hadamard inequality, Hölder inequality.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalışmamda etkin katkısı bulunan, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için her türlü şartı sağlayan ve bana her zaman her türlü desteği sunan çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisansa başladığım günden itibaren yanımda olan değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Alper EKİNCİ'ye ve değerli arkadaşlarım Sayın Fatma POLAT'a, Sayın Abdüllatif YALÇIN'a, Sayın Erman YILDIZ'a ve Sayın Yunus Emre DURSUN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Eğitim hayatım boyunca her türlü destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan çok değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Fahrinnisa SEVİNÇ

Ocak 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler	4
2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları	12
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	21
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	36
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	55
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	59

SİMGELER DİZİNİ

$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\supseteq$	Kapsar veya Eşit
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\in$	Elemanıdır
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I°	I 'nın İçi
$L^1([a, b])$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$SX(h, I)$	h –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$SV(h, I)$	h –Konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m(b)$	m –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	(α, m) –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks küme	4
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	4
Şekil 2.3. Konveks fonksiyon	6
Şekil 2.4. Aralık üzerinde konveks fonksiyon.....	8



1. GİRİŞ

Eşitsizlik teorisi, matematiğin hemen hemen tüm alanlarında önemli rol oynamaktadır. Eşitsizlik teorilerinin temelleri 18. ve 19. yüzyıllarda K. F. Gauss (1777-1855), A. L. Cauchy (1789-1857) ve P. L. Chebyshev (1821-1894) gibi matematikçiler tarafından atıldı. Daha sonraki yıllarda eşitsizliklerin önemi gittikçe arttı ve eşitsizlik konuları, H. Poincare (1854-1912), A. M. Lyapunov (1857-1918), O. Hölder (1859-1937) ve J. Hadamard (1865-1963) gibi ünlü matematikçilerin dikkatini çekti. Bu alan matematiğin tüm branşlarında rol oynamasına rağmen, matematiğin bir branşı olarak konularının gelişmesi 1934’de G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya tarafından “*Inequalities*” adlı çalışmayla gerçekleşmiştir. Diğer matematikçiler tarafından geliştirilen bu teorik temeller, birçok yeni eşitsizliklerin bulunmasına ve matematiğin matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi gibi değişik alanlarında ilginç uygulamalara neden olmuştur. Eşitsizliklerle ilgili detaylı çalışmalar; 1961’de E. F. Beckenbach ve R. Bellman’ın *Inequalities* kitabında, D. S. Mitrinović’in 1970, 1991 ve 1992’de, Agarwal ve Pang’ın 1995’de yayınlanan *Analytic Inequalities* kitaplarında bulunmaktadır. Bu temel kaynakların yanı sıra Mitrinović *et al.* (1993) tarafından “Classical and New Inequalities in Analysis”, Pachpatte (2005) tarafından “Mathematical Inequalities” ve son yıllarda da Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen’in bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak (Convex Functions: Inequalities) 1987 yılında J. Pečarić tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts and Varberg (1973), Pečarić *et al.* (1992), Niculescu and Persson (2006) gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgili çok sayıda çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Bugün en önemli integral eşitsizliklerinden biri konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard (veya Hadamard) integral eşitsizliğidir. Hermite (1822-1901), Ekim 1881’de, Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak yazdığı aşağıdaki ifadeyi bir mektup ile sundu. Bu mektup Mathesis 3 de (1883, p.82) aşağıdaki gibi basıldı.

“Sur deux limites d’une integrale definie. Soit $f(x)$ une Fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a, x = b$. On aura les relations

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavité vers l’axe des abscisses.”

Bu önemli eşitsizlikler, integraller için ortalama değer teoreminin fonksiyon ve görüntülerinin ortalama değerlerine ilişkin bir eşitsizlik olup fonksiyonun konkav veya konvekslik durumuna göre değişir.

Eşitsizlikler üzerine yapılan çalışmalar, yeni eşitsizlikleri keşfetmeye ve klasik yaklaşımları güçlendirmeye dayanmaktadır. Modern eşitsizlik teorisi matematiğin yüzyıllardır önemini yitirmeden derin temellere dayalı bir alanı olarak devam etmektedir. Eşitsizlik konuları sürekli çalışılan, hala araştırmalarda aktif rol oynayan ve büyüleyiciliği sonsuz olan bir branş olmaya devam ediyor.

Sunulan bu tezde ortalamalara bağlı konveks fonksiyonlar ve bu sınıflar için elde edilmiş bazı integral eşitsizlikler incelenmiştir. Bu çalışmanın ikinci bölümünde, ilk

olarak konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım, teorem ve kavramlarla birlikte reel sayıların özel ortalamalarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde de bazı önemli eşitsizlikler ve bunların ispatlarının yanı sıra konveks fonksiyonlarla ilgili literatürde bulunan birçok eşitsizlik verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ortalamalara dayalı konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Ortalamalara dayalı konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni integral eşitsizliklerinin ispatında Hölder ve Power Mean gibi bazı klasik integral eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Beşinci bölümde ise, genel bir değerlendirmeye yer verilmiş ve araştırma bulguları ışığında daha sonraki çalışmalara ilişkin yeni fikirler sunulmuştur.

2.KURAMSAL TEMELLER

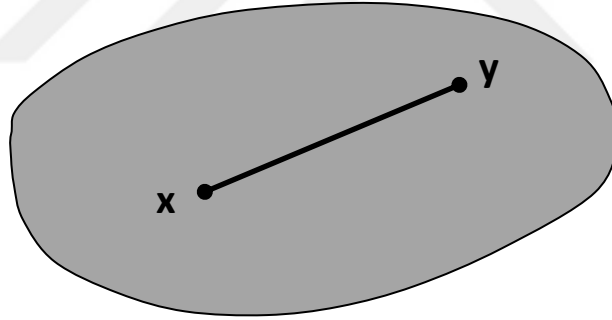
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanımlar aşağıda verilmiştir.

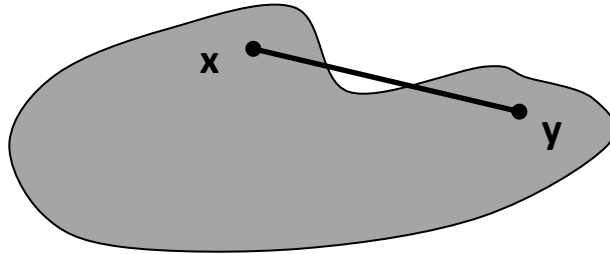
Tanım 2.1.1. Konveks Küme: L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1 - \alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.2. (J –Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Kesin J –Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. (Pečarić *et al.* 1992).

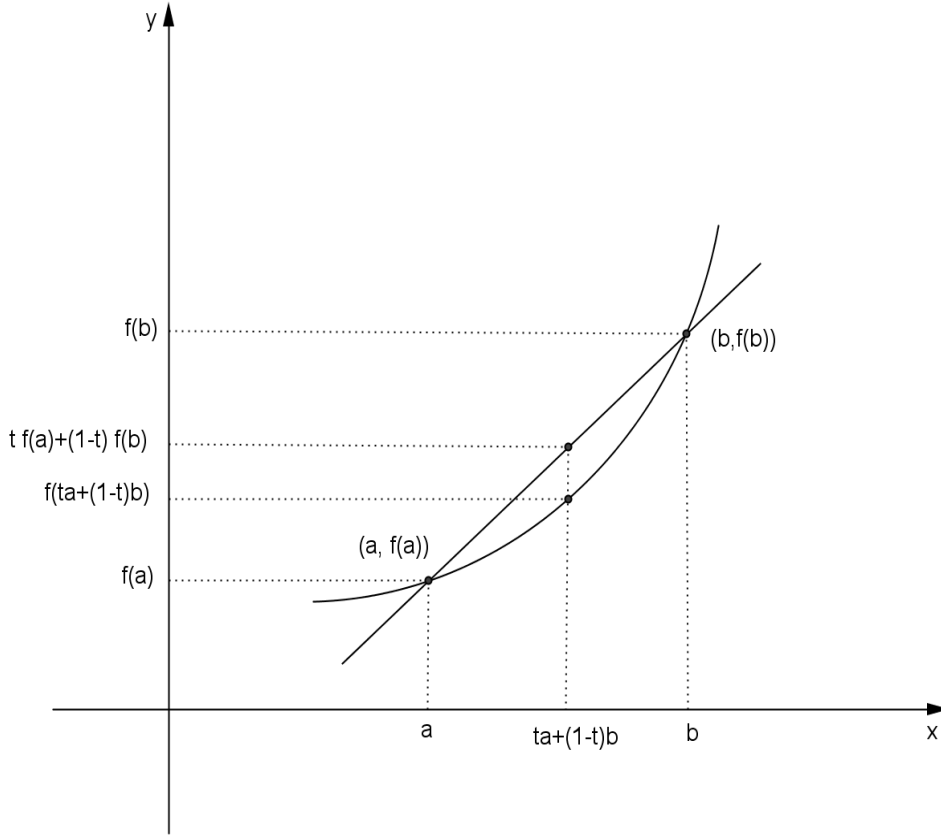
Eğer $t \in (0,1)$ aralığında alınırsa bu durumda

$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y)$$

olur. Bu f fonksiyonuna da kesin konveks fonksiyon denir.

“ $-f$ ” konveks (kesin konveks) ise o zaman f 'ye konkav (kesin konkav) denir.

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak $ta + (1 - t)b$ noktasında; f 'nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür veya eşittir, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.

Şekil 2.3. den de görüldüğü gibi $t \in [0, 1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1 - t)f(b) \leq f(b)$ dir. Yani $tf(a)$, $f(a)$ 'nın $(1 - t)f(b)$ de $f(b)$ 'nin altındadır. Dolayısıyla $tf(a) + (1 - t)f(b)$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş f 'nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Teorem 2.1.1. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi bir x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Örnek 2.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

Çözüm: f 'nin konveks olduğunu göstermek için $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre

$$f(tx + (1 - t)y) = |tx + (1 - t)y|$$

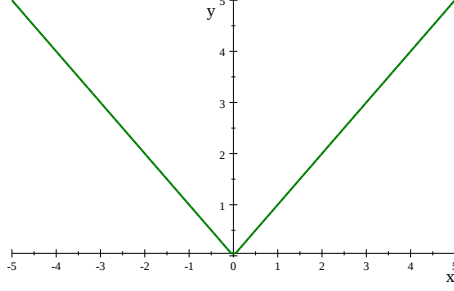
$$\leq |tx| + |(1 - t)y|$$

$$= t|x| + (1 - t)|y|$$

$$= tf(x) + (1 - t)f(y)$$

elde edilir. İlk ve son ifadeden f fonksiyonunun konveksliği ispatlanmış olur

$f(x) = |x|$ mutlak değer fonksiyonu $x = 0$ da türeve sahip olmamasına rağmen konveks fonksiyondur.



Şekil 2.4 Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Sonuç 2.1.1. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $p + q > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

eşitsizliği (2.1) eşitsizliğine denktir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.3. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.4. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak daha iyi üst sınırlar bulunmaktadır.

Sonuç 1.1.2 (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.1.5. (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , x_0 'da süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.6. (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.

Her $x_1, x_2 \in S$ için $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S 'de düzgün süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.7. (Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S 'de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.3. f, S 'de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S 'de düzgün süreklidir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.8. (Mutlak Süreklilik): $I, \mathbb{R}$ 'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I 'nin $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Şayet $\forall \varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Carter and Brunt 2000).

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teoremden verilecektir.

Teorem 2.1.5. $[a, b] \subseteq I^\circ$ olsun. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak $f, [a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I° 'de süreklidir (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.6. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. $f, (a, b)$ aralığında süreklidir ve

b. $f, [a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.9. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I 'da iki nokta olsun. Bu durumda

- (a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
 - (b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
 - (c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
 - (d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır
- denir (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.7. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f, I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- (a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
 - (b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
 - (c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
 - (d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.
- (Adams and Essex 2010).

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.1.4. f, g konveks fonsiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvekstir (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.8. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I° 'de artandır (kesin artandır) (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.9. f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' 'nin artan (kesin artan) olmasıdır (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.10. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq (>)0$$

olmasıdır (Pečarić *et al.* 1992).

2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

Çeşitli konveks fonksiyon türleri vardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde bu konuda çalışanlar tarafından sık kullanılan konveks fonksiyon türleri şunlardır:

Tanım 2.2.1. (Quasi-Konveks Fonksiyon): $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.2. f hem *quasi* –konveks hem de *quasi* –konkav ise f 'ye *quasi* –monotonik denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 2.2.1. Herhangi bir konveks fonksiyon *quasi* –konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani *quasi* –konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır. Örneğin $g: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2, -1] \\ t^2, & t \in (-1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyondur (Ion 2007).

Tanım 2.2.3. (Wright-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta, x \in I$ için

$$f(x + \delta) - f(x) \leq f(y + \delta) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.4. (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x, \delta > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \delta \in I$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2} [f(\alpha x + (1 - \alpha)y) + f((1 - \alpha)x + \alpha y)] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2} [f(y) + f(x + \delta)] \leq \max\{f(x), f(y + \delta)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.5. (J –Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna *J – quasi* –konvektir denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.2.6. (Log-Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq [f(x)]^\alpha [f(y)]^{1-\alpha}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna log-konvektir denir (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.2.7. (Godunova-Levin Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \frac{f(x)}{\alpha} + \frac{f(y)}{1 - \alpha}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x - y)(x - z) + f(y)(y - x)(y - z) + f(z)(z - x)(z - y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.2.8. (P –Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I, \alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P –fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir *et al.* 1995).

x, y pozitif sayıların r . kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1 - \lambda)y^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ x^\lambda y^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.9. (r –Konveks Fonksiyon): f pozitif bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in [a, b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq M_r(f(x), f(y); \alpha)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında r –konveks fonksiyon denir (Gill *et al.* 1997).

Bu tanımdan 0 –konveks fonksiyonların $\log$ –konveks fonksiyonlar ve 1 –konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılır.

r –konvekslik tanımı

$$f^r(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \begin{cases} \lambda f^r(x) + (1 - \lambda)f^r(y), & r \neq 0 \\ [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Pearce *et al.* 1998).

Tanım 2.2.10. (Birinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir (Orlicz 1961).

Tanım 2.2.11. (İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki s –konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.2.1. $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

(i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.2.12. (h –Konveks Fonksiyon): $h: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun.

Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y) \quad (2.3)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h –konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec 2007).

(2.3) eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h –konkav fonksiyon denir yani $f \in SV(h, I)$ ’dir (Varošanec 2007).

Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha) = \alpha$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ise $SX(h, I) = Q(I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = 1$ ise $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ’dir; $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(\alpha) = \alpha^s$ ise $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ ’dir (Varošanec 2007).

Tanım 2.2.13. (g – Baskın Konveks Fonksiyon): $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir konveks fonksiyon ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir reel fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için f ve g fonksiyonları

$$\begin{aligned} & |\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)| \\ & \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna g – baskın konveks fonksiyon denir (Dragomir and Ionescu 1990).

Tanım 2.2.14. (Geometrik Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang *et al.* 2012).

Tanım 2.2.15. (s –Geometrik Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^{t^s} [f(y)]^{(1-t)^s}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna s –geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang *et al.* 2012).

$s = 1$ için, s –geometrik konveks fonksiyon tanımının geometrik konveks fonksiyon tanımına dönüşeceği açıktır.

Tanım 2.2.16. (Harmonik Konveks Fonksiyon): $I \subset \mathbb{R}/\{0\}$ bir açık aralık olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir (İşcan 2014).

Tanım 2.2.17. (Ortalama Fonksiyonu): M fonksiyonu $M: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ şeklinde verilsin. Eğer

- (1) $M(x, y) = M(y, x)$
- (2) $M(x, x) = x$
- (3) $x < M(x, y) < y, x < y$
- (4) $M(ax, ay) = aM(x, y), a > 0$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir (Anderson *et al.* 2007).

Örnek 2.2.2. (1) $M(x, y) = A(x, y) = \frac{x+y}{2}$ (Aritmetik ortalama)

(2) $M(x, y) = G(x, y) = \sqrt{xy}$ (Geometrik ortalama)

(3) $M(x, y) = H(x, y) = 1/A(1/x, 1/y)$ (Harmonik ortalama)

(4) $M(x, y) = L(x, y) = \frac{x-y}{\log x - \log y}$, $x \neq y$ için ve $L(x, x) = x$ (Logaritmik ortalama)

(5) $M(x, y) = I(x, y) = \left(\frac{1}{e}\right) \left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}}$, $x \neq y$ ve $I(x, x) = x$ (Identrik ortalama)

(Anderson *et al.* 2007).

Tanım 2.2.18. (MN- Konveks (Konkav) Fonksiyon): $f: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $I \subseteq (0, \infty)$ ve M, N herhangi iki ortalama fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ için

$$f(M(x, y)) \leq (\geq) N(f(x), f(y))$$

şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna MN –konveks (konkav) fonksiyonu denir (Anderson *et al.* 2007).

Teorem 2.2.1. $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b)$, $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f 'nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart f 'nin konveks (konkav) olmasıdır.

(2) f 'nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f$ 'nin konveks (konkav) olmasıdır.

(3) f 'nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f$ 'nin konveks (konkav) olmasıdır.

(4) f' 'nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ 'nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(5) f' 'nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ 'nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(6) f' 'nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(be^{-t})$ 'nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(7) f' 'nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(1/x)$ 'nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(8) f' 'nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f(1/x)$ 'nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(9) f' 'nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(1/x)$ 'nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır (Anderson *et al.* 2007).

Teorem 2.2.2. $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow (0, \infty)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b)$, $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f' 'nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)$ 'nin artan (azalan) olmasıdır.

(2) f' 'nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)/f(x)$ 'nin artan (azalan) olmasıdır.

(3) f' 'nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)/f(x)^2$ 'nin artan (azalan) olmasıdır.

(4) f' 'nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)$ 'nin artan (azalan) olmasıdır.

(5) f' 'nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ 'nin artan (azalan) olmasıdır.

(6) f' 'nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{xf'(x)}{f(x)^2}$ 'nin artan (azalan) olmasıdır.

(7) f' 'nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)$ 'nin artan (azalan) olmasıdır.

(8) f' 'nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{x^2f'(x)}{f(x)}$ 'nin artan (azalan) olmasıdır.

(9) f' 'nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{x^2f'(x)}{f(x)^2}$ 'nin artan (azalan) olmasıdır (Anderson *et al.* 2007).

3.MATERYAL ve YÖNTEM

Lemma 3.1. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$[bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx = (\ln b - \ln a) \int_0^1 b^{2t} a^{2(1-t)} f'(b^t a^{1-t}) dt$$

eşitliği geçerlidir (Zang *et al.* 2013).

Lemma 3.2. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} & [bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\int_0^1 b^{1+t} a^{1-t} f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 b^{1-t} a^{1+t} f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) dt \right] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Latif *et al.* 2014).

Lemma 3.3. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $f'' \in L[a, b]$ ise

$$H(a, b; n) = \frac{a^{n+1}f'(a) - b^{n+1}f'(b)}{(n+1)(n+2)} - \frac{a^n f'(a) - b^n f'(b)}{(n+1)} - \int_a^b u^{n-1} f(u) du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln a - \ln x}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 a^{(n+2)t} x^{(n+2)(1-t)} f''(a^t x^{1-t}) \\
&+ \frac{\ln x - \ln b}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{(n+2)t} b^{(n+2)(1-t)} f''(x^t b^{1-t}) dt
\end{aligned}$$

eşitliği $\forall x \in [a, b]$ ve $n \geq 0$ için geçerlidir (Akdemir et al. 2015a).

Teorem 3.1. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f'' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f''(x)|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
|H(a, b; n)| &\leq \frac{\ln x - \ln a}{(n+1)(n+2)} L(x^{n+2}|f'(x)|, a^{n+2}|f'(a)|) \\
&+ \frac{\ln b - \ln x}{(n+1)(n+2)} L(b^{n+2}|f'(b)|, x^{n+2}|f'(x)|)
\end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $n \geq 0$ için geçerlidir (Akdemir et al. 2015a).

Teorem 3.2. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f'' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f''(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
|H(a, b; n)| &\leq \frac{\ln x - \ln a}{(n+1)(n+2)} L^{1-\frac{1}{q}}(x^{n+2}, a^{n+2}) L^{\frac{1}{q}}(x^{n+2}|f''(x)|^q, a^{n+2}|f''(a)|^q) \\
&+ \frac{\ln b - \ln x}{(n+1)(n+2)} L^{1-\frac{1}{q}}(b^{n+2}, x^{n+2}) L^{\frac{1}{q}}(b^{n+2}|f''(b)|^q, x^{n+2}|f''(x)|^q)
\end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$, $q > 1$ ve $n \geq 0$ için geçerlidir (Akdemir et al. 2015a).

Teorem 3.3. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f'' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f''(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
& |H(a, b; n)| \\
& \leq \frac{(\ln x - \ln a)^{\frac{1}{q}}}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{q-1}{(n+2)q} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(a^{\frac{q(n+2)}{q-1}} - x^{\frac{q(n+2)}{q-1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{q}}(|f''(x)|^q, |f''(a)|^q) \\
& + \frac{(\ln b - \ln x)^{\frac{1}{q}}}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{q-1}{(n+2)q} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{q(n+2)}{q-1}} - b^{\frac{q(n+2)}{q-1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{q}}(|f''(b)|^q, |f''(x)|^q)
\end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$, $q > 1$ ve $n \geq 0$ için geçerlidir (Akdemir et al. 2015a).

Teorem 3.4. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f'' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f''(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
|H(a, b; n)| & \leq \frac{\ln x - \ln a}{(n+1)(n+2)} L^{\frac{1}{q}}(x^{(n+2)q} |f''(x)|^q, a^{(n+2)q} |f''(a)|^q) \\
& + \frac{\ln b - \ln x}{(n+1)(n+2)} L^{\frac{1}{q}}(b^{(n+2)q} |f''(b)|^q, x^{(n+2)q} |f''(x)|^q)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$, $q \geq 1$ ve $n \geq 0$ için geçerlidir (Akdemir et al. 2015a).

Lemma 3.4. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du$$

$$= (\ln x - \ln a) \int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} f'(x^t a^{1-t}) dt - (\ln x - \ln b) \int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} f'(x^t b^{1-t}) dt$$

eşitliği $\forall x \in [a, b]$ için geçerlidir (Akdemir *et al.* 2015b).

Teorem 3.5. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu takdirde

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \\ & \leq \left(\frac{L(x^2, b^2) - L(a^2, x^2)}{2} \right) |f'(x)| + \left(\frac{L(a^2, x^2) - a^2}{2} \right) |f'(a)| \\ & \quad + \left(\frac{b^2 - L(x^2, b^2)}{2} \right) |f'(b)| \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ için geçerlidir (Akdemir *et al.* 2015b).

Teorem 3.6. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu taktirde

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \\ & \leq (\ln x - \ln a)^{1-\frac{1}{q}} (L(a^2, x^2) - x^2)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad + (\ln b - \ln x)^{1-\frac{1}{q}} (L(b^2, x^2) - b^2)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(b)|^q - |f'(x)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q \geq 1$ için geçerlidir (Akdemir *et al.* 2015b).

Teorem 3.7. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu taktirde

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq (\ln x - \ln a)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q-1}{2q} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{2q}{q-1}} - a^{\frac{2q}{q-1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + (\ln b - \ln x)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q-1}{2q} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(b^{\frac{2q}{q-1}} - x^{\frac{2q}{q-1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(b)|^q + |f'(x)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q > 1$ için geçerlidir (Akdemir *et al.* 2015b).

Teorem 3.8. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu takdirde

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{a^2 (\ln x - \ln a)^{\frac{q-2}{q}}}{(2q)^{\frac{2}{q}}} [F_1(a, x)]^{\frac{1}{q}} + \frac{b^2 (\ln b - \ln x)^{\frac{q-2}{q}}}{(2q)^{\frac{2}{q}}} [F_2(x, b)]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q \geq 1$ için geçerlidir ve burada

$$F_1(a, x) = |f'(x)|^q \left(2q \left(\frac{x}{a} \right)^{2q} \ln \frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a} \right)^{2q} + 1 \right) + |f'(a)|^q \left(\left(\frac{x}{a} \right)^{2q} - 2q \ln \frac{x}{a} - 1 \right)$$

$$F_2(x, b) = |f'(x)|^q \left(2q \left(\frac{x}{b} \right)^{2q} \ln \frac{x}{b} - \left(\frac{x}{b} \right)^{2q} + 1 \right) + |f'(a)|^q \left(\left(\frac{x}{b} \right)^{2q} - 2q \ln \frac{x}{b} - 1 \right)$$

şeklinde tanımlıdır (Akdemir *et al.* 2015b).

Teorem 3.9. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu takdirde

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{a^{\frac{2p}{q}}}{\left(\frac{q-1}{2q-2p} \right)^{\frac{1-q}{q}}} \left[x^{\frac{2q-2p}{q-1}} - a^{\frac{2q-2p}{q-1}} \right]^{\frac{q-1}{q}} [F_3(a, x)]^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{b^{\frac{1-q+p}{q}} (\ln b - \ln x)^{\frac{3}{q}}}{\left(\frac{q-1}{q-p} \right)^{\frac{1-q}{q}}} \left[b^{\frac{q-p}{q-1}} - x^{\frac{q-p}{q-1}} \right]^{\frac{q-1}{q}} [F_3(x, b)]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q \geq 1$ için geçerlidir ve burada

$$F_3(a, x) = \frac{2p \left(\frac{x}{a} \right)^{2p} \ln \frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a} \right)^{2p} + 1}{4p^2} |f'(x)|^q + \frac{\left(\frac{x}{a} \right)^{2p} - 2p \ln \frac{x}{a} - 1}{4p^2} |f'(a)|^q$$

$$F_4(x, b) = \frac{2p \left(\frac{x}{b} \right)^{2p} \ln \frac{x}{b} - \left(\frac{x}{b} \right)^{2p} + 1}{4p^2} |f'(x)|^q + \frac{\left(\frac{x}{b} \right)^{2p} - 2p \ln \frac{x}{b} - 1}{4p^2} |f'(b)|^q$$

şeklinde tanımlıdır (Akdemir *et al.* 2015b).

Teorem 3.10. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu taktirde

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq (Inx - Ina)L(a^2|f'(a)|, x^2|f'(x)|) + (Inb - Inx)L(x^2|f'(x)|, b^2|f'(b)|) \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ için geçerlidir (Akdemir et. al. 2015c).

Teorem 3.11. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu taktirde

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq (Inx - Ina)L^{1-\frac{1}{q}}(a^2, x^2)L^{\frac{1}{q}}(a^2|f'(a)|^q, x^2|f'(x)|^q) \\ & \quad + (Inb - Inx)L^{1-\frac{1}{q}}(x^2, b^2)L^{\frac{1}{q}}(x^2|f'(x)|^q, b^2|f'(b)|^q) \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q \geq 1$ için geçerlidir (Akdemir et. al. 2015c).

Teorem 3.12. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu taktirde

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \\
& \leq (Inx - Ina)L^{1-\frac{1}{q}}\left(a^{\frac{2q}{q-1}}, x^{\frac{2q}{q-1}}\right)L^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q, |f'(x)|^q) \\
& + (Inb - Inx)L^{1-\frac{1}{q}}\left(x^{\frac{2q}{q-1}}, b^{\frac{2q}{q-1}}\right)L^{\frac{1}{q}}(|f'(x)|^q, |f'(b)|^q)
\end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q > 1$ için geçerlidir (Akdemir et al. 2015c).

Teorem 3.13. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu taktirde

$$\begin{aligned}
\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| & \leq (Inx - Ina)L^{\frac{1}{q}}((a^2|f'(a)|)^q, (x^2|f'(x)|)^q) \\
& + (Inb - Inx)L^{\frac{1}{q}}((x^2|f'(x)|)^q, (b^2|f'(b)|)^q)
\end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q \geq 1$ için geçerlidir (Akdemir et al. 2015c).

Teorem 3.14. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f'' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f''(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu durumda

$$|H(a, b; n)| \leq \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)^3} [F_1(a, x)] + \frac{b^{n+2}}{(n+1)(n+2)^3} [F_2(b, x)]$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $n \geq 0$ için geçerli olup burada

$$F_1(a, x) = |f'(a)| \left(\frac{\left(\frac{a}{x}\right)^{n+2} \ln \left(\frac{a}{x}\right)^{n+2} - \left(\frac{a}{x}\right)^{n+2} + 1}{\ln a - \ln x} \right) \\ + |f'(x)| \left(\frac{\left(\frac{a}{x}\right)^{n+2} - \ln \left(\frac{a}{x}\right)^{n+2} - 1}{\ln a - \ln x} \right)$$

$$F_2(b, x) = |f'(x)| \left(\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{n+2} \ln \left(\frac{x}{b}\right)^{n+2} - \left(\frac{x}{b}\right)^{n+2} + 1}{\ln b - \ln x} \right) \\ + |f'(b)| \left(\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{n+2} - \ln \left(\frac{x}{b}\right)^{n+2} - 1}{\ln b - \ln x} \right)$$

şeklinde tanımlıdır (Akdemir *et al.* 2015d).

Teorem 3.15. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f'' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f''(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu durumda

$$|H(a, b; n)| \leq \frac{(\ln x - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{(n+1)(n+2)} L^{1-\frac{1}{q}}(x^{n+2}, a^{n+2}) \\ \times \left(|f''(a)|^q \left[\frac{L(a^{n+2}, x^{n+2}) - a^{n+2}}{(n+2)} \right] + |f''(x)|^q \left[\frac{x^{n+2} - L(a^{n+2}, x^{n+2})}{(n+2)} \right] \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \frac{(\ln b - \ln x)^{1-\frac{1}{q}}}{(n+1)(n+2)} L^{1-\frac{1}{q}}(x^{n+2}, b^{n+2}) \\ \times \left(|f''(x)|^q \left[\frac{L(x^{n+2}, b^{n+2}) - x^{n+2}}{(n+2)} \right] + |f''(b)|^q \left[\frac{b^{n+2} - L(x^{n+2}, b^{n+2})}{(n+2)} \right] \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b], q \geq 1$ ve $n \geq 0$ için geçerlidir (Akdemir *et al.* 2015d).

Teorem 3.16. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o, a < b, f'' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f''(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu durumda

$$|H(a, b; n)|$$

$$\leq \frac{(Inx - Ina)^{\frac{1}{q}}}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{q-1}{(n+2)q} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(a^{\frac{q(n+2)}{q-1}} - x^{\frac{q(n+2)}{q-1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\frac{|f''(a)|^q + |f''(x)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \frac{(Inb - Inx)^{\frac{1}{q}}}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{q-1}{(n+2)q} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{q(n+2)}{q-1}} - b^{\frac{q(n+2)}{q-1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\frac{|f''(x)|^q + |f''(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b], q > 1$ ve $n \geq 0$ için geçerlidir (Akdemir *et al.* 2015d).

Teorem 3.17. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o, a < b, f'' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu durumda

$$|H(a, b; n)| \leq x^{n+2} \frac{(Inx - Ina)^{1-\frac{2}{q}}}{(n+1)(n+2)} (F_3(a, x))^{\frac{1}{q}} + b^{n+2} \frac{(Inb - Inx)^{1-\frac{2}{q}}}{(n+1)(n+2)} (F_4(x, b))^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b], q \geq 1$ ve $n \geq 0$ için geçerlidir ve burada

$$F_3(a, x) = |f''(a)|^q \left(\frac{\left(\frac{a}{x}\right)^{q(n+2)} \ln\left(\frac{a}{x}\right)^{q(n+2)} - \left(\frac{a}{x}\right)^{n+2} + 1}{q^2(n+2)^2} \right) \\ + |f''(x)|^q \left(\frac{\left(\frac{a}{x}\right)^{q(n+2)} \ln\left(\frac{a}{x}\right)^{q(n+2)} - \left(\frac{a}{x}\right)^{n+2} - 1}{q^2(n+2)^2} \right)$$

$$F_4(x, b) = |f''(x)|^q \left(\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{q(n+2)} \ln\left(\frac{x}{b}\right)^{q(n+2)} - \left(\frac{x}{b}\right)^{n+2} + 1}{q^2(n+2)^2} \right) \\ + |f''(b)|^q \left(\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{q(n+2)} \ln\left(\frac{x}{b}\right)^{q(n+2)} - \left(\frac{x}{b}\right)^{n+2} - 1}{q^2(n+2)^2} \right)$$

şeklinde tanımlıdır (Akdemir *et al.* 2015d).

Teorem 3.18. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\left| [bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx \right| \\ \leq \frac{[(b-a)A(a, b)]^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}}} \{ [L(a^2, b^2) - a^2] |f'(a)|^q + [b^2 - L(a^2, b^2)] |f'(b)|^q \}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zang *et al.* 2013).

Teorem 3.19. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q > 1$ için;

$$\left| [bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx \right| \\ \leq (\ln b - \ln a) [L\left(a^{\frac{2q}{q-1}}, b^{\frac{2q}{q-1}}\right)]^{1-\frac{1}{q}} [A(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zang *et al.* 2013).

Teorem 3.20. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{(2q)^{\frac{1}{q}}} \left[L\left(a^{\frac{2q}{q-1}}, b^{\frac{2q}{q-1}}\right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \{ [L(a^{2q}, b^{2q}) - a^{2q}] |f'(a)|^q + [b^{2q} - L(a^{2q}, b^{2q})] |f'(b)|^q \}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zang et al. 2013).

Teorem 3.21. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| [bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{p^{\frac{1}{q}}} \times \left[L\left(a^{\frac{2q-p}{q-1}}, b^{\frac{2q-p}{q-1}}\right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \{ [L(a^p, b^p) - a^p] |f'(a)|^q + [b^p - L(a^p, b^p)] |f'(b)|^q \}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $2q > p > 0$ için geçerlidir (Zang et al. 2013).

Teorem 3.22. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}+1}} \left\{ b[(L(a, b) - a)|f'(a)|^q + (2b - a - L(a, b))|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + a[(b - 2a + L(a, b))|f'(a)|^q + (b - L(a, b))|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif et al. 2014).

Teorem 3.23. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q > 1$ için;

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2^{1+\frac{1}{q}}} \left[L\left(a^{\frac{q}{q-1}}, b^{\frac{q}{q-1}}\right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left\{ b[A(|f'(a)|^q, 3|f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}} + a[A(3|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif et al. 2014).

Teorem 3.24. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \\ \leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}} \times \left\{ b \left((L(a^q, b^q) - q)|f'(a)|^q + (2b^q - a^q - L(a^q, b^q))|f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + a \left((b^q - 2a^q + L(a^q, b^q))|f'(a)|^q + (b^q - L(a^q, b^q))|f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif et al. 2014).

Teorem 3.25. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \\ \leq \frac{\left[(\ln b - \ln a) L\left(a^{\frac{q-p}{q-1}}, b^{\frac{q-p}{q-1}}\right) \right]^{1-\frac{1}{q}}}{2(2p)^{\frac{1}{q}}} \\ \times \left\{ a^{1-\frac{p}{q}} b \left[(L(a^p, b^p) - a^q)|f'(a)|^q + (2b^p - a^p - L(a^p, b^p))|f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} + ab^{1-\frac{p}{q}} \left[(b^p - 2a^p + L(a^p, b^p))|f'(a)|^q + (b^p - L(a^p, b^p))|f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $2q > p > 0$ için geçerlidir (Latif et al. 2015).

Teorem 3.26. $f: I \subseteq \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik fonksiyon $a, b \in I^o$ ve $a < b$ olmak üzere eğer $f \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (İşcan 2014)

Lemma 3.5. $f: I \subseteq \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik fonksiyon $a, b \in I^o$ ve $a < b$ olmak üzere eğer $f' \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt$$

eşitliği sağlanır (İşcan 2014).

Teorem 3.27. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında harmonik konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \leq \frac{ab(b-a)}{2} \Lambda_1^{1-\frac{1}{q}} [\Lambda_2 |f'(a)|^q + \Lambda_3 |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\Lambda_1 = \frac{1}{ab} - \frac{2}{(b-a)^2} \ln \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

$$\Lambda_2 = \frac{-1}{b(b-a)} + \frac{3a+b}{(b-a)^3} \ln \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

ve

$$\Lambda_3 = \frac{1}{a(b-a)} - \frac{3a+b}{(b-a)^3} \ln \frac{(a+b)^2}{4ab} = \Lambda_1 - \Lambda_2$$

şeklinde tanımlıdır (İşcan 2014).

Teorem 3.28. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında harmonik konveks ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right|$$

$$\leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} [\mu_1 |f'(a)|^q + \mu_2 |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $q > 1$ için geçerlidir ve burada

$$\mu_1 = \frac{a^{2-2q} + b^{1-2q}[(b-a)(1-2q) - a]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}$$

$$\mu_2 = \frac{a^{2-2q} - a^{1-2q}[(b-a)(1-2q) - a]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}$$

şeklinde tanımlıdır (İşcan 2014).

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde araştırma sonucunda elde edilmiş olan yeni integral eşitliklerinden faydalanarak ortalamalara bağlı konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Lemma 4.1. $a, b \in I$, $a < b$ ve $x \in [a, b]$ $n \geq 1$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} & bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}} \left[\int_0^1 b^{n+t} a^{n-t} f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) dt + \int_0^1 a^{n+t} b^{n-t} f' \left(a^{\frac{1+t}{2}} b^{\frac{1-t}{2}} \right) dt \right] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Bu Lemma'yı ispatlamak için ilk önce

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 b^{n+t} a^{n-t} f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) dt \\ I_2 &= \int_0^1 a^{n+t} b^{n-t} f' \left(a^{\frac{1+t}{2}} b^{\frac{1-t}{2}} \right) dt \end{aligned}$$

alalım. $x = b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}}$ değişken değişimi yapılır ve integrali alınırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2(ab)^{n-1}}{\ln b - \ln a} \int_0^1 b^{n+t} a^{n-t} f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) d \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) \\ I_1 &= \frac{2(ab)^{n-1}}{\ln b - \ln a} \int_{\sqrt{ab}}^b x f'(x) dx \\ &= \frac{2(ab)^{n-1}}{\ln b - \ln a} \left[bf(b) - \sqrt{ab} f(\sqrt{ab}) - \int_{\sqrt{ab}}^b f(x) dx \right] \quad (4.1) \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$I_2 = \frac{2(ab)^{n-1}}{\ln a - \ln b} \left[af(a) - \sqrt{ab}f(\sqrt{ab}) - \int_{\sqrt{ab}}^a f(x)dx \right] \quad (4.2)$$

elde edilir.

(4.1) ve (4.2) toplanıp ardından sonuç $\frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}}$ ile çarpılır ise eşitlik elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.2. $a, b \in I$, $a < b$ ve $x \in [a, b]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} & (\ln b - \ln a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \left(\ln \frac{a+b}{2a}\right)^2 \left[\int_0^1 ta^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t f'\left(a^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t\right) dt \right] \\ & - \left(\ln \frac{a+b}{2b}\right)^2 \left[\int_0^1 tb^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t f'\left(b^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t\right) dt \right] \end{aligned}$$

İspat: Bu Lemma'yı ispatlamak için ilk önce

$$I_1 = \int_0^1 ta^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t f'\left(a^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t\right) dt$$

$$I_2 = \int_0^1 tb^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t f'\left(b^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t\right) dt$$

alalım.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 ta^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t f'\left(a^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t\right) dt \\ &= \frac{1}{\left(\ln \frac{a+b}{2a}\right)^2} \int_0^1 ta^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t f'\left(a^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t\right) d\left(a^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^t\right) \\ & \quad x = a^{1-t} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

değişken değişimi yapılır ve integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\left(\ln \frac{a+b}{2a}\right)^2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (\ln x - \ln a) f'(x) dx \\
&= \frac{1}{\left(\ln \frac{a+b}{2a}\right)^2} \left[\ln \frac{a+b}{2a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{f(x)}{x} dx \right] \quad (4.3)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$I_2 = \frac{1}{\left(\ln \frac{a+b}{2b}\right)^2} \left[\ln \frac{a+b}{2b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_b^{\frac{a+b}{2}} \frac{f(x)}{x} dx \right] \quad (4.4)$$

elde edilir.

(4.3) ve (4.4) toplanır ve sonuç $\left(\ln \frac{a+b}{2b}\right)^2$ çarpılır ve eşitlik elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Lemma 4.3. $a, b \in I$, $a < b$ ve $x \in [a, b]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned}
&\ln a f(b) - \ln b f(a) + \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \\
&= (\ln b)^2 \left[\int_0^1 t a^t (ab)^{1-t} f'(a^t (ab)^{1-t}) dt \right] \\
&\quad - (\ln a)^2 \left[\int_0^1 t b^t (ab)^{1-t} f'(b^t (ab)^{1-t}) dt \right]
\end{aligned}$$

İspat: Bu Lemma'yı ispatlamak için ilk önce

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t a^t (ab)^{1-t} f'(a^t (ab)^{1-t}) dt \\
I_2 &= \int_0^1 t b^t (ab)^{1-t} f'(b^t (ab)^{1-t}) dt
\end{aligned}$$

olsun.

$$I_1 = \int_0^1 t a^t (ab)^{1-t} f'(a^t (ab)^{1-t}) dt = \frac{1}{(\ln b)^2} \int_0^1 t a^t (ab)^{1-t} f'(a^t (ab)^{1-t}) d(a^t (ab)^{1-t})$$

$$x = a^t (ab)^{1-t}$$

değişken değişimi yapılır ve integrali alınır

$$I_1 = \frac{1}{(\ln b)^2} \left[-\ln b f(a) + \int_a^{ab} \frac{f(x)}{x} dx \right] \quad (4.5)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$I_2 = \frac{1}{(\ln a)^2} \left[-\ln a f(b) + \int_b^{ab} \frac{f(x)}{x} dx \right] \quad (4.6)$$

bulunur.

Ayrıca (4.5) ifadesi $(\ln b)^2$ ile ve (4.6) ifadesi $(\ln a)^2$ ile çarpılırsa, sonuçlar toplanır ve eşitlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$, $n \geq 1$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GG –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\ln b - \ln a)(ab) \sqrt{f'(a)} f'(b)}{2} \left[\frac{L^{\frac{1}{p}}(a^p, b^p) L^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^{\frac{q}{2}}, |f'(b)|^{\frac{q}{2}})}{a \sqrt{|f'(a)|}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{L^{\frac{1}{p}}(b^p, a^p) L^{\frac{1}{q}}(|f'(b)|^{\frac{q}{2}}, |f'(a)|^{\frac{q}{2}})}{b \sqrt{|f'(b)|}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için sağlanır.

İspat: Lemma 4.1 ve $|f'(x)|^q$ 'in GG –konveks olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}} \left[\int_0^1 b^{n+t} a^{n-t} \left| f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) \right| dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 a^{n+t} b^{n-t} \left| f' \left(a^{\frac{1+t}{2}} b^{\frac{1-t}{2}} \right) \right| dt \right] \\ & \leq \frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}} \left[\int_0^1 b^{n+t} a^{n-t} |f'(b)|^{\frac{1+t}{2}} |f'(a)|^{\frac{1-t}{2}} dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 a^{n+t} b^{n-t} |f'(a)|^{\frac{1+t}{2}} |f'(b)|^{\frac{1-t}{2}} dt \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\ln b - \ln a) a^n b^n \sqrt{|f'(a) f'(b)|}}{2(ab)^{n-1}} \\ & \left[\left(\int_0^1 \left(\frac{b}{a} \right)^{tp} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \frac{f'(b)}{f'(a)} \right|^{\frac{tq}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{tp} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \frac{f'(a)}{f'(b)} \right|^{\frac{tq}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & = \frac{(\ln b - \ln a)(ab) \sqrt{f'(a) f'(b)}}{2} \\ & \left[\frac{L^{\frac{1}{p}}(a^p, b^p) L^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^{\frac{q}{2}}, |f'(b)|^{\frac{q}{2}})}{a \sqrt{|f'(a)|}} + \frac{L^{\frac{1}{p}}(b^p, a^p) L^{\frac{1}{q}}(|f'(b)|^{\frac{q}{2}}, |f'(a)|^{\frac{q}{2}})}{b \sqrt{|f'(b)|}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GG –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| (\ln b - \ln a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{a \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 L^{\frac{1}{q}} \left(|af'(a)|^q, \left| \left(\frac{a+b}{2} \right) f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \right)}{|af'(a)|} \right. \\
& \quad \left. + \frac{b \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 L^{\frac{1}{q}} \left(|bf'(b)|^q, \left| \left(\frac{a+b}{2} \right) f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \right)}{|bf'(b)|} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için sağlanır.

İspat: Lemma 4.2 ve $|f'(x)|^q$ 'in GG -konveks olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| (\ln b - \ln a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 \left[\int_0^1 ta \left(\frac{a+b}{2a} \right)^t \left| f' \left(a^{1-t} \left(\frac{a+b}{2} \right)^t \right) \right| dt \right] \\
& \quad + \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 \left[\int_0^1 tb \left(\frac{a+b}{2b} \right)^t \left| f' \left(b^{1-t} \left(\frac{a+b}{2} \right)^t \right) \right| dt \right] \\
& \leq \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 \left[\int_0^1 ta \left(\frac{a+b}{2a} \right)^t |f'(a)|^{1-t} \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^t dt \right] \\
& \quad + \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 \left[\int_0^1 tb \left(\frac{a+b}{2b} \right)^t |f'(b)|^{1-t} \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^t dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| (\ln b - \ln a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq a \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 \left(\int_0^1 t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \frac{\left(\frac{a+b}{2} \right) f' \left(\frac{a+b}{2} \right)}{af'(a)} \right|^{tq} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + b \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 \left(\int_0^1 t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \frac{\left(\frac{a+b}{2} \right) f' \left(\frac{a+b}{2} \right)}{bf'(b)} \right|^{tq} dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{a \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 L^{\frac{1}{q}} \left(|af'(a)|^q, \left| \left(\frac{a+b}{2} \right) f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \right)}{|af'(a)|} + \frac{b \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 L^{\frac{1}{q}} \left(|bf'(b)|^q, \left| \left(\frac{a+b}{2} \right) f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \right)}{|bf'(b)|} \right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GG –konveks ise bu durumda

$$\left| \ln af(b) - \ln bf(a) + \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \leq \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[a(\ln b)^2 L^{\frac{1}{q}}(|bf'(ab)|^q, |f'(a)|^q) + b(\ln a)^2 L^{\frac{1}{q}}(|af'(ab)|^q, |f'(b)|^q) \right]$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için sağlanır.

İspat: Lemma 4.2 ve $|f'(x)|^{q'}$ in GG –konveks olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \ln af(b) - \ln bf(a) + \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\ & \leq (\ln b)^2 \left(\int_0^1 t a^t (ab)^{1-t} |f'(a^t (ab)^{1-t})| dt \right) \\ & \quad + (\ln a)^2 \left(\int_0^1 t b^t (ab)^{1-t} |f'(b^t (ab)^{1-t})| dt \right) \\ & \leq (\ln b)^2 \left(\int_0^1 t ab^{1-t} |f'(a)|^t |f'(ab)|^{1-t} dt \right) \\ & \quad + (\ln a)^2 \left(\int_0^1 t ba^{1-t} |f'(b)|^t |f'(ab)|^{1-t} dt \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \ln a f(b) - \ln b f(a) + \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq (\ln b)^2 ab |f'(ab)| \left(\int_0^1 t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \frac{f'(a)}{b f'(ab)} \right|^{tq} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (\ln a)^2 ab |f'(ab)| \left(\int_0^1 t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \frac{f'(b)}{a f'(ab)} \right|^{tq} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[a (\ln b)^2 L^{\frac{1}{q}}(|b f'(ab)|^q, |f'(a)|^q) + b (\ln a)^2 L^{\frac{1}{q}}(|a f'(ab)|^q, |f'(b)|^q) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$, $n \geq 1$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}} \left[\frac{|f'(b)|}{2} \left(\frac{2^{p+1} - 1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{L^{\frac{1}{q}}(a^q, b^q)}{a} \right) + \frac{|f'(a)|}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{|f'(a)|}{2} \left(\frac{2^{p+1} - 1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{L^{\frac{1}{q}}(b^q, a^q)}{b} \right) + \frac{|f'(b)|}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{L^{\frac{1}{q}}(b^q, a^q)}{b} \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için sağlanır.

İspat: Lemma 4.1 ve $|f'(x)|^q$ 'in GA –konveks olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}} \left[\int_0^1 b^{n+t} a^{n-t} \left| f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) \right| dt + \int_0^1 a^{n+t} b^{n-t} \left| f' \left(a^{\frac{1+t}{2}} b^{\frac{1-t}{2}} \right) \right| dt \right] \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}} \left[\int_0^1 b^{n+t} a^{n-t} \left(\left(\frac{1+t}{2} \right) |f'(b)| + \left(\frac{1-t}{2} \right) |f'(a)| \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 a^{n+t} b^{n-t} \left(\left(\frac{1+t}{2} \right) |f'(a)| + \left(\frac{1-t}{2} \right) |f'(b)| \right) dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}} \left[|f'(b)| \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 b^{q(n+t)} a^{q(n-t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + |f'(a)| \left(\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 b^{q(n+t)} a^{q(n-t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + |f'(a)| \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 a^{q(n+t)} b^{q(n-t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + |f'(b)| \left(\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 a^{q(n+t)} b^{q(n-t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = \frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}} \left[\frac{|f'(b)|}{2} \left(\frac{2^{p+1} - 1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{L^{\frac{1}{q}}(a^q, b^q)}{a} \right) \right. \\
& \quad + \frac{|f'(a)|}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{L^{\frac{1}{q}}(a^q, b^q)}{a} \right) + \frac{|f'(a)|}{2} \left(\frac{2^{p+1} - 1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{L^{\frac{1}{q}}(b^q, a^q)}{b} \right) \\
& \quad \left. + \frac{|f'(b)|}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{L^{\frac{1}{q}}(b^q, a^q)}{b} \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| (\ln b - \ln a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq a \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 \left[\frac{|f'(a)|}{2a} L^{\frac{1}{q}}((2a)^q, (a+b)^q) \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{|f'(\frac{a+b}{2})|}{2a} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}((2a)^q, (a+b)^q) \right] \\
& - b \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 \left[\frac{|f'(b)|}{2b} L^{\frac{1}{q}}((2b)^q, (a+b)^q) \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{|f'(\frac{a+b}{2})|}{2b} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}((2b)^q, (a+b)^q) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için sağlanır.

İspat: Lemma 4.2 ve $|f'(x)|^q$ 'in GA –konveks olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| (\ln b - \ln a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 \left[\int_0^1 t a^{1-t} \left(\frac{a+b}{2} \right)^t \left| f' \left(a^{1-t} \left(\frac{a+b}{2} \right)^t \right) \right| dt \right] \\
& - \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 \left[\int_0^1 t b^{1-t} \left(\frac{a+b}{2} \right)^t \left| f' \left(b^{1-t} \left(\frac{a+b}{2} \right)^t \right) \right| dt \right] \\
& \leq \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 \left[\int_0^1 t a^{1-t} \left(\frac{a+b}{2} \right)^t \left((1-t) |f'(a)| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + t \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right) dt \right] \\
& - \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 \left[\int_0^1 t b^{1-t} \left(\frac{a+b}{2} \right)^t \left((1-t) |f'(b)| + t \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right) dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| (\ln b - \ln a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 a \left[|f'(a)| \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{a+b}{2a} \right)^{tq} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \left(\int_0^1 t^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{a+b}{2a} \right)^{tq} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad - \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 b \left[|f'(b)| \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{a+b}{2b} \right)^{tq} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \left(\int_0^1 t^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{a+b}{2b} \right)^{tq} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = a \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 \left[\frac{|f'(a)|}{2a} L^{\frac{1}{q}}((2a)^q, (a+b)^q) \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{|f'(\frac{a+b}{2})|}{2a} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}((2a)^q, (a+b)^q) \right] \\
& \quad - b \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 \left[\frac{|f'(b)|}{2b} L^{\frac{1}{q}}((2b)^q, (a+b)^q) \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{|f'(\frac{a+b}{2})|}{2b} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}((2b)^q, (a+b)^q) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA -konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \ln a f(b) - \ln b f(a) + \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq a (\ln b)^2 \left[|f'(a)| \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1-b^q}{\ln b^{-q}} \right)^{\frac{1}{q}} + |f'(ab)| \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1-b^q}{\ln b^{-q}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$-b(\ln a)^2 \left[|f'(b)| \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1-a^q}{\ln a^{-q}} \right)^{\frac{1}{q}} + |f'(ab)| \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1-a^q}{\ln a^{-q}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için sağlanır.

İspat: Lemma 4.3 ve $|f'(x)|^{q'}$ in GA –konveks olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \ln a f(b) - \ln b f(a) + \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\ & \leq (\ln b)^2 \left[\int_0^1 t a^t (ab)^{1-t} |f'(a^t (ab)^{1-t})| dt \right] \\ & \quad - (\ln a)^2 \left[\int_0^1 t b^t (ab)^{1-t} |f'(b^t (ab)^{1-t})| dt \right] \\ & \leq (\ln b)^2 \left[\int_0^1 t a^t (ab)^{1-t} (t |f'(a)| + (1-t) |f'(ab)|) dt \right] \\ & \quad - (\ln a)^2 \left[\int_0^1 t b^t (ab)^{1-t} (t |f'(b)| + (1-t) |f'(ab)|) dt \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \ln a f(b) - \ln b f(a) + \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\ & \leq a(\ln b)^2 \left[|f'(a)| \left(\int_0^1 t^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 b^{(1-t)q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + |f'(ab)| \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 b^{(1-t)q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad - b(\ln a)^2 \left[|f'(b)| \left(\int_0^1 t^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 a^{(1-t)q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + |f'(ab)| \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 a^{(1-t)q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a(\ln b)^2 \left[|f'(a)| \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1-b^q}{\ln b^{-q}} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + |f'(ab)| \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right) \left(\frac{1-b^q}{\ln b^{-q}} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\quad - b(\ln a)^2 \left[|f'(b)| \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1-a^q}{\ln a^{-q}} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + |f'(ab)| \left(\int_0^1 t^p (1-t)^p dt \right) \left(\frac{1-a^q}{\ln a^{-q}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.7. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ ve $n \geq 1$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}} \left\{ \left[\frac{(ab)^n L(a, b)}{a} \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(ab)^n |f'(b)|^q (2b-a-L(a, b))}{2a(\ln b - \ln a)} + \frac{(ab)^n |f'(a)|^q (L(a, b)-a)}{2a(\ln b - \ln a)} \right]^{\frac{1}{q}} + \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{(ab)^n L(b, a)}{b} \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(ab)^n |f'(a)|^q (2a-b-L(b, a))}{2b(\ln a - \ln b)} + \frac{(ab)^n |f'(b)|^q (L(b, a)-b)}{2b(\ln a - \ln b)} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için sağlanır.

İspat: Lemma 4.1, $|f'(x)|^q$ 'in GA –konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}} \left\{ \left[\int_0^1 b^{n+t} a^{n-t} dt \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 b^{n+t} a^{n-t} \left[\left(\frac{1+t}{2} \right) |f'(b)|^q \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left(\frac{1-t}{2} \right) |f'(a)|^q \right] dt \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left[\int_0^1 a^{n+t} b^{n-t} dt \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 a^{n+t} b^{n-t} \left[\left(\frac{1+t}{2} \right) |f'(a)|^q \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left(\frac{1-t}{2} \right) |f'(b)|^q \right] dt \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2(ab)^{n-1}} \left\{ \left[\frac{(ab)^n L(a, b)}{a} \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(ab)^n |f'(b)|^q (2b - a - L(a, b))}{2a(\ln b - \ln a)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(ab)^n |f'(a)|^q (L(a, b) - a)}{2a(\ln b - \ln a)} \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{(ab)^n L(b, a)}{b} \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(ab)^n |f'(a)|^q (2a - b - L(b, a))}{2b(\ln a - \ln b)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(ab)^n |f'(b)|^q (L(b, a) - b)}{2b(\ln a - \ln b)} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.8: $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left| (\ln b - \ln a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
&\leq \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^{1+\frac{1}{q}} \left[a \left(\left(\frac{a+b}{2a} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2a} \right) - \frac{a+b}{2a} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \left\{ \frac{a |f'(a)|^q \left[\left(\frac{3a+b}{2a} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2a} \right) - \left(\frac{b-a}{a} \right) \right]}{\left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^q \left(\left(\frac{a+b}{2a} \right) \left(\ln \left(\frac{a+b}{2a} \right) \right)^2 - \left(\frac{a+b}{a} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2a} \right) - \left(\frac{a+b}{a} \right) + \frac{1}{2} \right)}{\left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^3} \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^{1+\frac{1}{q}} \left[b \left(\left(\frac{a+b}{2b} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2b} \right) - \frac{a+b}{2b} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \left\{ \frac{b |f'(b)|^q \left[\left(\frac{3b+a}{2b} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2b} \right) - \left(\frac{a-b}{b} \right) \right]}{\left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^3} \right. \\
& \quad \left. + \frac{b \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \left(\left(\frac{a+b}{2b} \right) \left(\ln \left(\frac{a+b}{2b} \right) \right)^2 - \left(\frac{a+b}{b} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2b} \right) - \left(\frac{a+b}{b} \right) + \frac{1}{2} \right)}{\left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^3} \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için sağlanır.

İspat: Lemma 4.2, $|f'(x)|^q$ in GA –konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| (\ln b - \ln a) f \left(\frac{a+b}{2} \right) - \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 \left[\int_0^1 ta \left(\frac{a+b}{2a} \right)^t \left| f' \left(a^{1-t} \left(\frac{a+b}{2} \right)^t \right) \right| dt \right] \\
& \quad + \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 \left[\int_0^1 tb \left(\frac{a+b}{2b} \right)^t \left| f' \left(b^{1-t} \left(\frac{a+b}{2} \right)^t \right) \right| dt \right] \\
& \leq \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^2 \left[\int_0^1 ta \left(\frac{a+b}{2a} \right)^t dt \right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \left[\int_0^1 ta \left(\frac{a+b}{2a} \right)^t \left((1-t) |f'(a)|^q + t \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \right) dt \right]^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^2 \left[\int_0^1 tb \left(\frac{a+b}{2b} \right)^t dt \right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \left[\int_0^1 tb \left(\frac{a+b}{2b} \right)^t \left((1-t) |f'(b)|^q + t \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \right) dt \right]^{\frac{1}{q}} \\
& = \left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^{1+\frac{1}{q}} \left[a \left(\left(\frac{a+b}{2a} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2a} \right) - \frac{a+b}{2a} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{a |f'(a)|^q \left[\left(\frac{3a+b}{2a} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2a} \right) - \left(\frac{b-a}{a} \right) \right]}{\left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^3} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \left(\left(\frac{a+b}{2a} \right) \left(\ln \left(\frac{a+b}{2a} \right) \right)^2 - \left(\frac{a+b}{a} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2a} \right) - \left(\frac{a+b}{a} \right) + \frac{1}{2} \right)}{\left(\ln \frac{a+b}{2a} \right)^3} \right\}^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^{1+\frac{1}{q}} \\
& \quad \left[b \left(\left(\frac{a+b}{2b} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2b} \right) - \frac{a+b}{2b} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \left\{ \frac{b |f'(b)|^q \left[\left(\frac{3b+a}{2b} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2b} \right) - \left(\frac{a-b}{b} \right) \right]}{\left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^3} \right. \\
& \quad \left. + \frac{b \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \left(\left(\frac{a+b}{2b} \right) \left(\ln \left(\frac{a+b}{2b} \right) \right)^2 - \left(\frac{a+b}{b} \right) \ln \left(\frac{a+b}{2b} \right) - \left(\frac{a+b}{b} \right) + \frac{1}{2} \right)}{\left(\ln \frac{a+b}{2b} \right)^3} \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.9: $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \ln a f(b) - \ln b f(a) + \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq (\ln b)^2 \left[\frac{a(b - \ln b - 1)}{(\ln b)^2} \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{a |f'(a)|^q (2b - 2 \ln b - (\ln b)^2 - 2)}{(\ln b)^3} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a |f'(ab)|^q ((1+b) \ln b + 2(1-b))}{(\ln b)^3} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$-(\ln a)^2 \left[\frac{b(a - \ln a - 1)}{(\ln a)^2} \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{b|f'(b)|^q (2a - 2\ln a - (\ln a)^2 - 2)}{(\ln a)^3} + \frac{b|f'(ab)|^q ((1+a)\ln a + 2(1-a))}{(\ln a)^3} \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için sağlanır.

İspat: Lemma 4.3, $|f'(x)|^q$ 'in GA -konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \ln a f(b) - \ln b f(a) + \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\ & \leq (\ln b)^2 \left[\int_0^1 t a^t (ab)^{1-t} |f'(a^t (ab)^{1-t})| dt \right] \\ & \quad - (\ln a)^2 \left[\int_0^1 t b^t (ab)^{1-t} |f'(b^t (ab)^{1-t})| dt \right] \\ & \leq (\ln b)^2 \left[\int_0^1 t a^t (ab)^{1-t} dt \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 t a^t (ab)^{1-t} (t |f'(a)|^q \right. \\ & \quad \left. + (1-t) |f'(ab)|^q) dt \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \quad - (\ln a)^2 \left[\int_0^1 t b^t (ab)^{1-t} dt \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 t b^t (ab)^{1-t} (t |f'(b)|^q \right. \\ & \quad \left. + (1-t) |f'(ab)|^q) dt \right]^{\frac{1}{q}} \\ & = (\ln b)^2 \left[\frac{a(b - \ln b - 1)}{(\ln b)^2} \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{a|f'(a)|^q (2b - 2\ln b - (\ln b)^2 - 2)}{(\ln b)^3} \right. \\ & \quad \left. + \frac{a|f'(ab)|^q ((1+b)\ln b + 2(1-b))}{(\ln b)^3} \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \quad - (\ln a)^2 \left[\frac{b(a - \ln a - 1)}{(\ln a)^2} \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{b|f'(b)|^q (2a - 2\ln a - (\ln a)^2 - 2)}{(\ln a)^3} \right. \\ & \quad \left. + \frac{b|f'(ab)|^q ((1+a)\ln a + 2(1-a))}{(\ln a)^3} \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Teorem 4.10. $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları GG -konveks fonksiyonlar ve $f, g, fg \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x} dx \leq L(f(b)g(b), f(a)g(a))$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f ve g GG –konveks fonksiyonlar ve $t \in (0,1)$ için

$$f(a^t b^{1-t}) \leq (f(a))^t (f(b))^{1-t}$$

$$g(a^t b^{1-t}) \leq (g(a))^t (g(b))^{1-t}$$

ifadeleri yazılabilir. f ve g pozitif değerli fonksiyon olduklarından eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]$ üzerinden integrali alınır

$$\int_0^1 f(a^t b^{1-t}) g(a^t b^{1-t}) dt \leq \int_0^1 [f(a)g(a)]^t [f(b)g(b)]^{1-t} dt$$

elde edilir.

$x = a^t b^{1-t}$ değişken değişimi yapılır

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x} dx \leq L(f(b)g(b), f(a)g(a))$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.11. $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları GG –konveks fonksiyonlar ve $f, g, fg \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)g\left(\frac{ab}{x}\right)}{x} dx \leq L(g(a)f(b), f(a)g(b))$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f ve g GG –konveks fonksiyonlar olduğundan ve $t \in (0,1)$ için

$$f(a^t b^{1-t}) \leq (f(a))^t (f(b))^{1-t}$$

$$g(a^{1-t} b^t) \leq (g(a))^{1-t} (g(b))^t$$

ifadeleri yazılabilir. f ve g pozitif değerli fonksiyon olduklarından eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]$ üzerinden integrali alınır

$$\int_0^1 f(a^t b^{1-t}) g(a^{1-t} b^t) dt \leq \int_0^1 [f(a)g(b)]^t [f(b)g(a)]^{1-t} dt$$

bulunur.

$x = a^t b^{1-t}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)g\left(\frac{ab}{x}\right)}{x} dx \leq L(g(a)f(b), f(a)g(b))$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.12. $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları GA –konveks fonksiyonlar ve $f, g, fg \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x} dx \leq \frac{f(a)g(a) + f(b)g(b)}{3} + \frac{f(a)g(b) + f(b)g(a)}{6}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: f ve g GA –konveks fonksiyonlar olduklarından ve $t \in (0,1)$ için

$$f(a^t b^{1-t}) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

$$g(a^t b^{1-t}) \leq tg(a) + (1-t)g(b)$$

ifadeleri yazılabilir. f ve g pozitif değerli fonksiyon olduklarından eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]$ üzerinden integrali alınır

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(a^t b^{1-t}) g(a^t b^{1-t}) dt \\ & \leq \int_0^1 t^2 f(a) g(a) dt + \int_0^1 t(1-t) f(a) g(b) dt \\ & \quad + \int_0^1 t(1-t) f(b) g(a) dt + \int_0^1 (1-t)^2 f(b) g(b) dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$x = a^t b^{1-t}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x} dx \leq \frac{f(a)g(a) + f(b)g(b)}{3} + \frac{f(a)g(b) + f(b)g(a)}{6}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çalışmanın ana bölümünü oluşturan dördüncü bölümde, ortalamalara dayalı konveks fonksiyonlar ile ilgili Hölder integral eşitsizliği kullanılarak elde edilmiş yeni integral eşitsizlikler ispat edilmiştir. Farklı türden konveks fonksiyonlar için çeşitli yeni sınırlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında verilen integral eşitliklerine benzer eşitlikler kurularak geometrik konveks fonksiyon sınıfları için yeni integral eşitsizlikleri elde edilebilir. Ayrıca yeni genelleştirmeler, Hermite-Hadamard tipli, Ostrowski tipli ve Simpson tipli benzer eşitsizlikler elde edilebilir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, dördüncü bölümde verilen ve kullanılan lemmaların farklı versiyonlarını veya genelleştirmelerini elde edebilir ve yeni integral eşitsizlikler elde edebilirler. Çalışmada kullanılan lemmalar temel alınarak koordinatlarda yeni lemmalar kurulabilir ve ayrıca kesirli integraller kullanılarak geometrik konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Akdemir, A.O., Set, E., Özdemir, M.E., and Yalçın, A., New generalizations for functions whose second derivatives are GG –convex, submitted (2015).
- Akdemir, A.O., Avcı-Ardıç, M. and Set, E., New integral inequalities via GA –convex functions, submitted (2015).
- Akdemir, A.O., Özdemir, M.E. and Sevinç, F., Some inequalities for GG –convex functions, submitted (2015).
- Akdemir, A.O., Özdemir, M.E., Avcı-Ardıç, M. and Yalçın, A., Some new generalizations for GA –convex functions, submitted (2015).
- Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., Generalized convexity and Inequalities, J. Math. Anal. Appl. 335 (2007) 1294-1308
- Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.
- Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.
- Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.
- Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagenf ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen renräumen. Publ. Inst. Math. (Beograd)23:13-20.
- Bullen, P.S., 2003. Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, TheNetherlands.
- Carter, M. and van Brunt, B., 2000. The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. And Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. Soochow Journal of Mathematics, 21(3), 335-341.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Tpye Inequalities and Applications,
- RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html> (10.10.2010).
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral.Math. Soc., 57, 377-385.

- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from Operations Research, 19, 7.
- Godunova, E.K. and Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlja funkcii širokogo klasa, soderžaščego vypuklye, monotonnnye i nekotorye drugie vidy funkcii, Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.
- Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pečarić, J.E., 1997. Hadamard's inequality for r -convex functions. J. Math. Anal. Appl., 215, 461-470.
- Hudzik, H. And Maligranda, L., 1994. Some remarks on s -convex functions. Aequationes Math., 48, 100-111.
- Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.
- İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 43(6) (2014),935-942.
- Latif, M.A., New Hermite-Hadamard type integral inequalities for GA -convex functions with applications, Analysis, Volume 34, Issue 4,379-389,2014. Doi:10.1515/anly-2012-1235.
- Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 9, 157-162.
- Pečarić, J., Proschan, F. And Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.
- Pearce, C.E.M., Pečarić, J. and Šimić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, J. Math. Anal. and Appl., 220, 99-109.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions. Academic Press, 300pp, New York.
- Varošanec, S., 2007. On h -convexity. J. Math. Anal. Appl., 326, 303-311.

- Zhang, T.-Y., Ji, A.-P. And Qi, F., 2012. On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for s -Geometrically Convex Functions, Abstract and Applied Analysis, doi:10.1155/2012/560586.
- Zang, T-Y., Ji, A-P. And Qi, F., Some inequalities of Hermite-Hadamard type for GA -convex functions with applications to means, Le Matematiche, Vol LXVIII(2013)- Fasc. I, pp. 229-239, doi:104418/2013.68.1.17



ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Konya’da doğdu. İlköğrenimini, orta ve lise öğrenimini Konya’da tamamladı. 2009 yılında kayıt yaptırdığı Aksaray Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden 2013 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ağrı’da öğretmen olarak göreve başladı. 2014 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Ağrı Merkez Eliaçık Ortaokulu’nda öğretmen olarak görev yapmaktadır.

