

**T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI**

**ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ
PROBLEM ÇÖZME DURUMLARINDAKİ
MATEMATİKSEL YARATICILIKLARI ÜZERİNE
NİTEL BİR ARAŞTIRMA**

DOKTORA TEZİ

**Hazırlayan
Yasemin KIYMAZ**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Ahmet ARIKAN
Doç. Dr. Safure BULUT**

ANKARA-2009

Yasemin Kıymaz'ın 'Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Problem Çözme Durumlarındaki Matematiksel Yaratıcılıkları Üzerine Nitel Bir Araştırma' başlıklı tezi 27.05.2009 tarihinde, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda jürimiz tarafından Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı): Doç. Dr. Ahmet ARIKAN



Üye (Tez Danışmanı): Doç. Dr. Safure BULUT



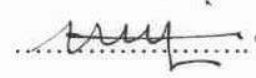
Üye : Prof. Dr. Ziya ARGÜN



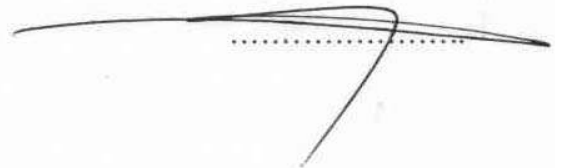
Üye : Prof. Dr. Bharath SRIRAMAN



Üye : Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU



Üye : Yrd. Doç. Dr. Durstun SOYLU



ÖNSÖZ

Doktora öğrenimimin her aşamasında çok değerli yardım ve desteklerini esirgemeyen, sayın danışmanlarım Doç. Dr. Ahmet Arıkan ve Doç. Dr. Safure Bulut'a, değerli fikirleri ve desteğiyle güç veren Prof. Dr. Bharath Sriraman'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Araştırmanın yazım aşamasında değerli bilgi ve deneyimini paylaşan, desteğiyle güç veren arkadaşım Yrd. Doç. Dr. Yasemin Gödek Altuk'a teşekkürlerim sonsuzdur.

Araştırmaya katılan Gazi Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü öğrencilerine, verdikleri bilgiler ve çalışmanın yürütülmesinde gösterdikleri hassasiyet için sonsuz teşekkürler.

Doktora öğrenimimin her aşamasında desteklerini esirgemeyen eşim Yrd. Doç. Dr. Onur Kıymaz, biricik oğlum Şafak Kıymaz, annem Zeliha Salepci, babam Hasan Salepci, kardeşlerim Nermin ve Nesrin Salepci'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmanın gerçekleşmesinde yardım ve desteklerini esirgemeyen Gazi Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü öğretim üyelerine, personeline ve Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü yöneticileri ve personeline teşekkür ederim.

Yasemin KIYMAZ

Ankara 2009

ÖZET
ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ
PROBLEM ÇÖZME DURUMLARINDAKİ
MATEMATİKSEL YARATICILIKLARI ÜZERİNE
NİTEL BİR ARAŞTIRMA

Kıymaz, Yasemin

Doktora, Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Tez Danışmanları: Doç. Dr. Ahmet Arıkan ve Doç. Dr. Safure Bulut

Mayıs– 2009

Yaratıcı olarak sorgulama ve düşünme yeteneklerinin daha çok önemli hale geldiği günümüzde matematiksel yaratıcılık konusu büyük önem taşımaktadır. Ancak yaratıcılık, matematikte ve matematik eğitiminde keşfedilmemiş bir alandır. Matematiksel aktivitelerin yaratıcılıkla çok yakından iç içe olmasına rağmen, okullarımız öğrencilere matematiğin bu yönü ile ilgili çok az deneyim sağlamaktadır.

Bu araştırmada temel olarak “Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel problemleri çözme durumlarında sergiledikleri yaratıcı düşünme becerilerinin özellikleri nelerdir?” sorusuna cevap aranmıştır. Öğretmen adaylarının matematiksel problemleri çözme durumlarında sergiledikleri problem çözme davranışları, problem çözme süreci içinde yaşadıkları güçlüklerin nedenleri ve akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerileri açısından yaratıcı düşünme becerileri incelenmiştir.

2006–2007 öğretim yılı bahar döneminde 3. sınıflar için ‘Matematikte Seçme Konular’ adındaki seçmeli dersi alan 22 ortaöğretim matematik öğretmen adayı ile yürütülen bu araştırmada nitel araştırma yaklaşımı kullanılmıştır. Konu hakkında ‘derinlemesine bilgi’ edinilmek amacıyla ders içi gözlemler, öğretmen adaylarının günlükleri ve yarı yapılandırılmış görüşmeler olmak üzere üç farklı veri toplama metodu kullanılmıştır. Veri analizinde gömülü (grounded) teoremin kodlama tekniklerinden yararlanılmıştır.

Verilerin analizi sonucunda matematiksel problemleri çözüme sürecinde öğretmen adaylarının farklı problem durumlarında farklı problem çözme davranışları geliştirdikleri tespit edilmiştir. Problem çözme süreci içinde ise çözüm ya da fikir üretmede kullanmış oldukları bazı stratejiler ve bu stratejileri kullanım şekillerine bağlı olarak bazı güçlüklerle karşılaştıkları gözlemlenmiştir.

Araştırma bulguları yaratıcı düşünme becerilerinin (akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerileri) genel olarak bireysel ve dış faktörlere bağlı olarak değişebileceğini ancak, bu faktörlerin hiçbirinin tek başına yaratıcı düşünme becerilerini doğrudan etkilemeyeceğine işaret etmektedir.

ABSTRACT
A QUALITATIVE STUDY OF PRE-SERVICE SECONDARY
MATHEMATICS TEACHERS' MATHEMATICAL CREATIVITY IN
PROBLEM-SOLVING SITUATIONS

Kıymaz, Yasemin

Doktorate, Mathematics Education

Thesis Advisors: Assoc. Prof. Ahmet Arıkan and Assoc. Prof. Safure Bulut

May – 2009

Creatively inquiring and thinking skills are becoming more crucial than ever. For this reason, mathematical creativity has major importance. Yet, creativity is not well discovered area in mathematics and mathematical education. Even though mathematical activities are nested with creativity, the schools provide insufficient experiences related to creativity in mathematics.

The main aim of this study was to determine pre-service secondary mathematics teachers' creative thinking skills which were presented by them in different mathematical problem-solving situations. With this aim, their problem-solving behaviors presented by them in different mathematical problem-solving situations, the reasons for the difficulties faced up by them in finding out solutions, and their creative thinking skills in terms of fluency, flexibility and originality, were examined.

This study was carried out during the spring term of 2006–2007 academic year. Twenty two pre-service secondary mathematics teachers participated to this study during their optional course called 'Selected Topics in Mathematics'. In order to obtain in-depth knowledge, the qualitative research approaches including classroom observations, pre-service teachers' journals, and semi-structured interviews were utilized. Coding techniques of the grounded theory were used in data analysis.

The results of this study pointed out numbers of issues related to mathematical creativity. It was found that the pre-service teachers developed various problem-solving behaviors in different mathematical problem situations. It was also obtained that pre-service teachers were faced up with various difficulties due to the kind of the strategies they have used and the way in which the strategies were used by them.

The research findings also pointed out that creative thinking skills in terms of fluency, flexibility and originality, mainly seem to depend on some personal and external factors, however, it should be noted here that, none of these factors can effect creative thinking skills by themselves.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TABLolar LİSTESİ	x
ŞEKİLLER LİSTESİ	xi
KISALTMALAR	xv
 I. BÖLÜM	 1
1. GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	1
1.2. Araştırmanın Amacı	5
1.3. Araştırmanın Önemi	6
1.4. Araştırmanın Kapsamı ve Sınırlılıkları	8
1.5. Varsayımlar	9
1.6. Tanımlar	9
1.7. Sonraki Bölümler Hakkında	10
 II. BÖLÜM	 11
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	11
2.1. Yaratıcılık Nedir?	11
2.2. Yaratıcılığın Bileşenleri Nelerdir?	14
2.2.1. Zihinsel yetenekler	14
2.2.2. Bilgi	14
2.2.3. Düşünme stilleri	15
2.2.4. Kişilik	16
2.2.5. Motivasyon	16
2.2.6. Çevre	17
2.3. Yaratıcılık Süreci	18
2.4. Yaratıcılık Nasıl Tespit Edilir?	18
2.5. Matematiksel Yaratıcılık Nedir?	19
2.6. Yaratıcılık Nasıl Geliştirilebilir?	23
2.7. Yaratıcılık Hakkında Yapılan Araştırmalar	25
 III. BÖLÜM	 32
3. YÖNTEM	32
3.1. Araştırmanın Modeli	32
3.2. Araştırmaya Katılan Öğretmen Adayları	33
3.3. Veri Toplama Araçları	35
3.3.1. Gözlemler	36
3.3.2. Günlükler	36
3.3.3. Görüşmeler	37
3.3.4. Seçmeli derste kullanılan problemler	38
3.4. Uygulama	41
3.5. Verilerin Analizi	44
3.5.1. Gömülü (Grounded) teori	45
3.5.2. Analiz nasıl yapıldı?	50

IV. BÖLÜM	55
4. BULGULAR VE YORUM	55
4.1. Öğretmen Adaylarının Problem Çözme Davranışları	55
4.1.1. Çözüm Yolu Tercihi	55
4.1.2. Sezgisel Düşünme	65
4.1.3. Mantıksal Düşünme	84
4.1.4. Sonuca Odaklı Problem Çözme Davranışı	96
4.2. Çözüm Bulma Güçlüğü	101
4.2.1. Problem Çözme Sürecinde Karşılaşılan Güçlüklerin Nedenleri	101
4.2.2. Çözüm Bulma Güçlüğü İle İlgili Yorumlar	124
4.3. Yaratıcı Düşünme Becerileri	126
4.3.1. Akıcı Düşünme Becerisi	126
4.3.1.a. I. grup problemlerin akıcı düşünme becerisi açısından analizi:	130
4.3.1.b. II. grup problemlerin akıcı düşünme becerisi açısından analizi:	169
4.3.2. Esnek Düşünme Becerisi	187
4.3.2.a. I. grup problemlerin esnek düşünme becerisi açısından analizi:	190
4.3.2.b. II. grup problemlerin esnek düşünme becerisi açısından analizi	206
4.3.3. Orijinal Düşünme Becerisi	233
4.3.3.a. I. grup problemlerin orijinal düşünme becerisi açısından analizi ...	236
4.3.3.b. II. grup problemlerin orijinal düşünme becerisi açısından analizi ..	247
V. BÖLÜM	260
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	260
5.1. Sonuçlar	260
5.1.1. Matematiksel problemleri çözme durumlarında sergilenen problem çözme davranışları nelerdir?	261
5.1.2. Çözüm bulma süreci içinde yaşanan güçlüklerin nedenleri nelerdir? ...	264
5.1.3. Yaratıcı düşünme becerileri (akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerileri) nelere bağlıdır?	266
5.1.3.a. Bireysel faktörler	267
5.1.3.b. Dış faktörler	272
5.2. Öneriler	273
KAYNAKÇA	276
EKLER	285

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2-1 Farklı yaklaşımlara göre yaratıcılığın kaynakları.....	13
Tablo 2-2 Yaratıcılığı geliştirmede kullanılabilecek strateji ve teknikler.....	24
Tablo 3-1 Araştırmaya katılan öğretmen adaylarına ait bilgiler	34
Tablo 3.2 Veri toplama süreci.....	35
Tablo 3.3 Araştırmada kullanılan problem çeşitleri.....	40
Tablo 3.4 Bu derste verilen problemlerin haftalara göre dağılımı	41
Tablo 4.1 I. Grup Problemlerde Üretilen Fikir Sayıları	131
Tablo 4.2 II-A grubu problemlerde doğru çözüm sayısı sıralaması	170
Tablo 4.3 II-B grubu problemlerde en fazla çözüm yapan ve hiç doğru çözüm yapamayan öğretmen adaylarının karşılaştırılması	172
Tablo 4.4 I. grup problemde üretilen fikirlerin ve kategorilerinin (çeşitliliği) sayısı	191
Tablo 4.5 Geometri Problemleri için Yapılan Çözümlere Dair Sonuçlar	207
Tablo 4.6 II- B Grubu Problemler için Yapılan Çözümlere Dair Sonuçlar	210
Tablo 4.7 I. grup problemlerde üretilen fikir sayıları ve orijinal fikir sayıları.....	237
Tablo 4.8 II-A Problemleri için Yapılan Çözümlere Dair Sonuçlar	248
Tablo 4.9 II-B Problemleri için Orijinal Çözüm Yapan Öğretmen Adayları	249

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. Salvador Dali'nin " <i>Apparition of Face and Fruit Dish on a Beach</i> " adlı eseri	43
Şekil 4.1. S2'nin görüşmedeki problem için yazdığı günlükten alıntı.....	57
Şekil 4.2. S22'nin Problem 1a için yazdığı günlükten alıntı.....	58
Şekil 4.3. S14'ün Problem 9 için yazdığı günlükten alıntı	60
Şekil 4.4. S1'in Problem 3 için yazdığı günlük	61
Şekil 4.5. S19'un Problem 1a için yazdığı günlük.....	61
Şekil 4.6. S5'in Problem 1a için yazdığı günlük.....	63
Şekil 4.7. S10'un Problem 2b için yazdığı günlük.....	64
Şekil 4.8. S5'in Problem 17 için yazdığı günlükten alıntı	65
Şekil 4.9. S2'nin Problem 1a için yazdığı günlük.....	69
Şekil 4.10. S8'in Problem 1a için yazdığı günlük.....	70
Şekil 4.11. S10'un Problem 1a için yazdığı günlük.....	71
Şekil 4.12. S9'un Problem 8 için yazdığı günlük	73
Şekil 4.13. S2'nin Problem 8 için yazdığı günlük	73
Şekil 4.14. S9'un Problem 9 için yazdığı günlükten alıntı	75
Şekil 4.15. S3'ün Problem 9 için yazdığı günlük	76
Şekil 4.16. S2'nin Problem 17 için yazdığı günlük	77
Şekil 4.17. S9'un Problem 21 için yazdığı günlük.....	79
Şekil 4.18. S5'in Problem 1a için yazdığı günlük.....	85
Şekil 4.19. S5'in Problem 8 için yazdığı günlük (devam)	88
Şekil 4.20. S4'ün Problem 8 için yazdığı günlük (devam)	90
Şekil 4.21. S5'in Problem 9 için yazdığı günlükten alıntı	92
Şekil 4.22. S4'ün Problem 9 için yazdığı günlük (devam)	94
Şekil 4.23. S7'nin Problem 2a için yazdığı günlükten alıntı.....	102
Şekil 4.24. S12'nin Problem 2b için yazdığı günlük	103
Şekil 4.25. S13'ün Problem 1a için yazdığı günlük.....	105

Şekil 4.26. S20'nin Problem 1a için yazdığı günlük (devam)	107
Şekil 4.27. S9'un Problem 3 için yazdığı günlükten alıntı	109
Şekil 4.28. S1'in görüşmede verilen problem için yazdığı günlük	111
Şekil 4.29. S22'nin Problem 8 için yazdığı günlükten alıntı	112
Şekil 4.30. S9'un Problem 1b için yazdığı günlük	113
Şekil 4.31. S16'ın Problem 1a için yazdığı günlük	114
Şekil 4.32. S16'ın Problem 2a için yazdığı günlük	115
Şekil 4.33. S8'in Problem 1b için yazdığı günlükten alıntı	116
Şekil 4.34. S2'nin problem 1b için yazdığı günlükten alıntı	117
Şekil 4.35. S2'nin Problem 3 için yazdığı günlükten alıntı	118
Şekil 4.36. S5'in Problem 3 için yazdığı günlükten alıntı	119
Şekil 4.37. S22'nin Problem 1a için yazdığı günlük	134
Şekil 4.38. S22'nin Problem 2a için yazdığı günlük	135
Şekil 4.39. S7'nin Problem 1a için yazdığı günlük	136
Şekil 4.40. S4'ün Problem 1a için yazdığı günlük	137
Şekil 4.41. S15'in Problem 2a için yazdığı günlük	138
Şekil 4.42. S2'nin Problem 1b için yazdığı günlük	139
Şekil 4.43. S8'in Problem 1b için yazdığı günlük	141
Şekil 4.44. S6'nın Problem 1b için yazdığı günlük	142
Şekil 4.45. S5'in Problem 3 için yazdığı günlük (devam)	144
Şekil 4.46. S4'ün Problem 3 için yazdığı günlük	145
Şekil 4.47. S7'nin Problem 3 için yazdığı günlük	146
Şekil 4.48. S5'in Problem 8 için yazdığı günlük (devam)	149
Şekil 4.49. S2'nin Problem 8 için yazdığı günlük	151
Şekil 4.50. S12'nin Problem 8 için yazdığı günlükten alıntı	152
Şekil 4.51. S8'in Problem 9 için yazdığı günlük	154
Şekil 4.52. S9'un Problem 9 için yazdığı günlük	155
Şekil 4.53. S4'ün Problem 9 için yazdığı günlükten alıntı	156
Şekil 4.54. S5'in Problem 9 için yazdığı günlük(devam)	160
Şekil 4.55. S4'ün Problem 5 için yazdığı günlük(devam)	165
Şekil 4.56. S1'in Problem 5 için yazdığı günlük	166
Şekil 4.57. S2'nin Problem 5 için yazdığı günlük	168

Şekil 4.58. S9'un Problem 5 için yazdığı günlük	169
Şekil 4.59. S2'nin Problem 19 için yazdığı günlük (devam)	175
Şekil 4.60. S9'un Problem 19 için yazdığı günlük (devam)	177
Şekil 4.61. S8'in Problem 19 için yazdığı günlükten alıntı	179
Şekil 4.62. S21'in problem 19 için yazdığı günlük.....	181
Şekil 4.63. S21'in Problem 21 için yazdığı günlük (devam)	183
Şekil 4.64. S22'in Problem 21 için yazdığı günlük (devam)	185
Şekil 4.65. S2'nin Problem 9 için yazdığı günlük (devam)	195
Şekil 4.66. S5'in Problem 3 için yazdığı günlük (devam)	197
Şekil 4.67. S4'ün problem 3 için yazdığı günlük.....	197
Şekil 4.68. S4'ün Problem 5 için yazdığı günlük (devam)	200
Şekil 4.69. S1'in Problem 5 için yazdığı günlük	201
Şekil 4.70. S5'in Problem 5 için yazdığı günlük (devam)	203
Şekil 4.71. S6'nın Problem 5 için yazdığı günlük	204
Şekil 4.72. S2'nin Problem 5 için yazdığı günlük	205
Şekil 4.73. S2'nin Problem 13 için yazdığı günlük	212
Şekil 4.74. S16'nın Problem 13 için yazdığı günlük	213
Şekil 4.75. S15'in Problem 18 için yazdığı günlükten alıntı	216
Şekil 4.76. S4'ün Problem 18 için yazdığı günlükten alıntı	217
Şekil 4.77. S14'ün Problem 18 için yazdığı günlükten alıntı	218
Şekil 4.78. S9'un Problem 18 için yazdığı günlük.....	219
Şekil 4.79. S5'in Problem 18 için yazdığı günlük (devam)	221
Şekil 4.80. S5'in Problem 19 için yazdığı günlük	222
Şekil 4.81. S3'ün Problem 19 için yazdığı günlük (devam)	225
Şekil 4.82. S9'un Problem 21 için yazdığı günlük.....	228
Şekil 4.83. Maple programında çizilen S9'un grafiği	229
Şekil 4.84. S10'un Problem 21 için yazdığı günlük (devam)	231
Şekil 4.85. S7'nin Problem 1a için yazdığı günlük.....	239
Şekil 4.86. S4'ün Problem 1a için yazdığı günlük.....	240
Şekil 4.87. S2'nin Problem 1b için yazdığı günlük	242
Şekil 4.88. S4'ün Problem 9 için yazdığı günlük (devam)	244
Şekil 4.89. S7'nin Problem 9 için yazdığı günlükten (devam)	246

Şekil 4.90. S2'nin Problem 17 için yazdığı günlük	251
Şekil 4.91. S5'in Problem 17 için yazdığı günlükten alıntı	252
Şekil 4.92. S4'ün Problem 18 için yazdığı günlükten alıntı	253
Şekil 4.93. S20'nin Problem 18 için yazdığı günlükten alıntı	254
Şekil 4.94. S1'in Problem 21 için yazdığı günlük	255

KISALTMALAR

NCTM:	National Council of Teachers of Mathematics- Matematik Öğretmenleri Milli Kurumu
TIMMS:	Trends in International Mathematics and Science- Uluslararası Matematik ve Fen Bilimlerinde Eğilimler programı
PISA:	The Program in International Student Assessment- Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı
MEB:	Milli Eğitim Bakanlığı
OECD:	Organisation for Economic Co-operation and Development- Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü
OFMA:	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümü
TTCT:	Torrance Test of Creative Thinking- Yaratıcı düşünme Torrance testleri
ÖSS:	Öğrenci Seçme Sınavı
S1-S22:	Öğretmen adayı 1- Öğretmen adayı 22
G:	Görüşmeci
I. Grup problemler:	Açık uçlu problemler
I-A grubu problemler:	Yapılandırılmış problemlerden uyarlanmış: Problem 1, 3, 8, 9
I-B grubu problemler:	Belli bir sonucu olmayan problemler: Problem 5, 6
II. Grup problemler:	Birden fazla çözüm yapılması istenen problemler
II-A grubu problemler:	Geometri problemleri- Problem 14, 15, 16
II-B grubu problemler:	Cebirsel problemler -Problem 13, 17, 18, 19, 20, 21

I. BÖLÜM

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Bilim ve teknolojik alandaki tüm gelişmeler yaratıcı düşünme becerisinin bir ürünüdür. Matematik açısından bakıldığında da durum aynıdır. Matematiksel bilginin artışı, matematik alanında yaratıcı olan beyinler sayesinde mümkün olmaktadır. Matematiğin bir bütün olarak gelişimini sağlayan ‘matematiksel yaratıcılık’ matematik ve matematik eğitiminde keşfedilmemiş bir alandır (Sriraman, 2004). Yaratıcı yazarlık ve yaratıcı dans alanında çok sayıda araştırma olmasına rağmen diğer disiplinlerde ve matematiksel yaratıcılık konusunda göreceli olarak daha az araştırma mevcuttur. Yaratıcılık ve eğitim hakkındaki araştırmaların çoğu sanat konusunda karşımıza çıkmaktadır (Higginson, 2000). Ervynck’e (1991) göre matematiksel yaratıcılığın keşfedilmemiş bir alan olmasının ve dolayısıyla gizemli bir olay gibi görülmesinin sebebi, birçok matematikçinin kendi düşünme yöntemlerinin çözümlenmesiyle ilgilenmemeleri ve çalışmalarını nasıl yaptıklarını açıklamamalarıdır. Sadece Poincare ve Hadamard gibi bazı matematikçiler matematiksel yaratıcılıkla ilgisi olan fikirleri açıklamaya teşebbüs etmişlerdir. Bu konuda en iyi bilinen referans Hadamard olup, yakın zamanlarda Muir de Hadamard’ın izinden gitmiştir (Ervynck, 1991).

Matematikçilerin, matematiği nasıl ürettiğinin bilinmesi matematik eğitimi açısından da önemlidir. Silver’a (1997) göre psikoloji literatüründe mevcut olan pek çok araştırma ne yazık ki yaratıcılığın ‘dahilik’ olarak algılanmasına yol açmıştır. Yaratıcılığın ‘dahilik’ görüşünde, yaratıcı eylemler nadir bulunan zihinsel başarılar olarak görülür ki bu başarılar sıra dışı düşünme süreçlerini hızlı ve kolayca kullanan sıra dışı bireyler tarafından üretilir.

Diğer yandan, çağdaş araştırmalar yeni bir yaratıcılık görüşünü ortaya çıkarmıştır ve bu görüş, yaratıcı kişilerin dahi olduğu fikrine karşıdır (Silver, 1997). Bu araştırmalar yaratıcılığın, alandaki esnek ve derin bilgiyle yakından ilgili olduğunu, hızdan ziyade uzun çalışma periyodu ve yansımalar, sıra dışı kavrayışlar ile birlikte olduğunu, eğitim ve tecrübeyle ilgili kaynaklardan kolaylıkla etkilendiğini ileri sürmektedir (Holyoak ve Thagard, 1995; Sternberg, 1988; akt. Silver, 1997). Bu nedenle Silver (1997) çağdaş yaratıcılık görüşünün yaratıcılıkla zenginleştirilmiş eğitimin yalnızca birkaç sıra dışı öğrenci için değil, tüm öğrenciler için uygun olduğunu iddia etmektedir.

Çağdaş araştırmalara dayanarak yaratıcı aktivitelerin yaratıcı olarak düşünme ve davranmanın bir sonucu olduğunu savunan Silver (1997), matematiksel aktivitelerin yaratıcılıkla çok yakından ilgili olmasına rağmen okulların öğrencilere matematiğin bu yönü ile ilgili çok az deneyim sağladıklarını da iddia etmektedir.

Sheffield (2008) ise öğretmenlerin, öğrencilerdeki matematiksel yaratıcılığın gelişiminde önemli bir rol oynadığına dikkat çekerek bazı durumlarda eğitimcilerin yaratıcılığı geliştirmekten çok ona zarar verdiğini iddia etmektedir. Benzer şekilde Mann (2005), sınıflarda yaratıcılığın kullanımını sınırlandıran yaklaşımların olduğunu ve matematiği belli becerileri gerçekleştirme ve ezberde tutma kuralları olarak indirgediğini belirtmektedir. Mann, literatürün matematiksel yeteneğin çoğunlukla öğrencilerin problem çözme ve ortak özellikleri bulmadan ziyade, hesaplama hızı ve doğruluğu ile ölçüldüğünü ve öğrencilere çok yönlü düşünme gerektiren zengin matematik konuları üzerinde çalışmak için hiçbir fırsat tanınmadığına işaret ettiğini ileri sürmektedir. Mann'a (2005) göre bu durum pek çok çocuğun matematiğe olan doğal merakını ve istekliliğini azaltmaktadır. Bu eğilimin azalması için onların matematiksel yaratıcılığını fark ettirmek ve buna değer vermek gerekir.

Hoong'a (2008) göre, günümüzdeki değerlendirmelerde doğruluk ve hız çoğunlukla ödüllendirilmekte, ancak matematikteki yaratıcılık göz ardı edilmektedir. Öğrencilerin matematiksel yaratıcılıklarını ölçmenin bir yolu onların farklı matematiksel fikirler arasında ilişkiler kurmak için bilgilerini kullanmada

esnekliklerini değerlendirmektir. Bu düşünce ile Hoong yakın gelecekte değerlendirmelerin öğrencilerin yaratıcı düşünme becerilerini tespit etme konusunda yoğunlaşacağı ve yoğunlaşması gerektiği şeklinde bir tahminde bulunmaktadır.

Diğer yandan Sheffield'a (2008) göre öğrencilerin yaratıcı matematikçiler haline gelmeleri için bazı yeteneklerin geliştirilmesi ve beslenmesi gereklidir. Her ne kadar bugünün dünyasında hesaplama ve rutin problemleri çözmek için ezberlenen metotların hatırlanmasında uzman olmak önemliyse de bu becerilere sahip olmak yeterli değildir. Bunlardan daha önemlisi problemleri tanıma ve tanımlama, çoklu çözüm ya da çözüm yolları üretebilme, akıl yürütme, sonuçları doğrulama ve sonuçları anlatma becerileridir. Bunlar sadece doğuştan gelen yetenekler değildir ve genellikle kendi kendine gelişmez. Bu nedenle öğrencilerin bu yeteneklerinin geliştirilmesi gerekmektedir (Sheffield, 2008).

Yaratıcı bir matematikçi olmak matematik üzerinde yıllarca çalışma gerektirebilir, öğrencilerin matematik problemlerine yaratıcı teknikleri uygulamaları sağlanarak onların güçlü, üretken ve tutkulu matematikçi olmalarına yardımcı olunabilir (Sheffield, 2005). Yaratıcı teknikler öğrencilerin matematiksel anlayış, kurallar, genellemeler, algoritmalar, sorular, problemler ve modeller yaratmalarını sağlayarak matematik öğretim müfredatına derinlik ve karmaşıklık katabilir (Sheffield, 2005). Öğrencilerin başarılı problem çözümler olması için onların yapılandırılmamış problemlerle, büyük miktarda bilgi, hesaplama, bilgisayar ile etkili ve yaratıcı olarak çalışabilmesini gerektirir (Sheffield, 2008).

Teknolojinin gelişmesiyle öğrencilerin yaratıcı olarak sorgulama ve düşünme yeteneklerini cesaretlendirmenin daha çok önemli hale geldiğini vurgulayan Sheffield (2005), Amerika'da Matematik Öğretmenleri Milli Kurumu (National Council of Teachers of Mathematics- NCTM) 'problem çözmenin, okulda öğretilen matematiğin odak noktası olmasının zorunluluğunu' 1980 yılında ilk kez gündeme getirdiğini belirtmektedir. 1989'da problem çözme tüm eğitim seviyelerinde ulaşılması gereken ilk standart haline gelmiş ve öğretmenler 'tek doğru cevabı olmayan açık uçlu problemler' sormaları konusunda cesaretlendirilmişlerdir. 2000 yılında NCTM'nin

hazırladığı standartlar listesinde problem çözme, sorgulama ve kanıt, iletişim, bağlantılar ve temsil etme gibi süreç standartları daha da geliştirilmiş, ‘yaratıcı problem çözmenin’ önemi konusunda standartlar geliştirilmiştir (Sheffield, 2005).

Ülkemizde ise son yıllarda uygulamaya konulan matematik dersi öğretim programında, değişen dünyada matematiği anlayan yaratıcı bireylerin geleceğini şekillendirmede daha fazla seçeneğe sahip oldukları vurgulanmaktadır (MEB, 2005a,b,c). Programın önemle üzerinde durduğu temel matematik becerilerinden biri de problem çözmedir. Programa göre problem çözme; algoritmik ve kural temelli olmamalı, problem çözme sürecinde problemin cevabından çok, çözüm yoluna önem verilmelidir. Öğrenciler, problem çözerken farklı stratejiler kullanabilmelidir. Problem çözme yolları öğrenciye doğrudan verilmemeli, öğrencilerin kendi çözüm yollarını oluşturmaları için uygun ortam sağlanmalıdır.

Uluslararası Matematik ve Fen Bilimlerinde Eğilimler programı (Trends in International Mathematics and Science- TIMMS) ve Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (the Program in International Student Assessment –PISA) yaratıcı problem çözmenin gerekliliğini vurgulamaktadır (Sheffield, 2005). Ancak, PISA 2006 yeterlik düzeylerine göre matematik okuryazarlığı ölçeğinde genel olarak öğrencilerimizin şu yeterliklere sahip oldukları tespit edilmiştir (MEB, 2007):

- Doğrudan çıkarım yapmaktan başka bir beceriye gerek olmayan bir bağlamda ifade edilmiş olan durumları tanıyabilir ve yorumlayabilirler.
- Tek bir kaynaktan gerekli bilgiyi elde edebilir ve sadece bir gösterim biçimini kullanabilirler.
- Temel algoritmaları, formülleri, işlem yollarını ya da alışları kullanabilirler.
- Doğrudan bir biçimde akıl yürütebilirler ve sonuçlar üzerinde görülenin ötesine geçmeyen yorumlar yapabilirler.

Öğrencilerimiz bu yeterliklerle, değerlendirmeye katılan 30 OECD ülkesi arasında 424 ortalama puanla ancak 29. sırada yer alabilmiştir. Bu ortalama puan

OECD ülkelerinin ortalama puanından (498) ve hatta değerlendirmeye katılan tüm ülkelerin ortalama puanından (484) oldukça düşüktür (MEB, 2007). Bu yeterliklerle öğrencilerimizin çağın gerektirdiği niteliklere yeterince sahip olmadıkları düşünülebilir.

Polya'ya (1962) göre öğretmenler öğrencilerinin akıl yürütme becerilerini geliştirmeli, yaratıcı düşünceyi tanımalı ve cesaretlendirmelidirler. Polya, herhangi bir yaratıcı çalışma üzerinde hiçbir deneyime sahip olmayan öğretmenlerin öğrencilerine yardım etmelerinin mümkün olamayacağına işaret etmektedir. Benzer şekilde, Hoong (2008) da yaratıcı düşünmeyi destekleyen yaratıcı soruların öğretmenler tarafından üretilebileceğini, ve bu tür soruları yaratmak için yaratıcı öğretmenlere ihtiyaç olduğunu savunmaktadır. Bu nedenle eğitimcilerimizin de yaratıcı çalışmalar üzerinde deneyim kazanmaları gerekmektedir. Bu deneyim yaratıcı çalışmalarda öğretmenlerin öğrencilerini destekleyebilmelerini sağlayabilir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı, Ankara'daki bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümü (OFMA) Matematik Eğitimi Anabilim Dalında öğrenim gören öğretmen adaylarının matematiksel problemleri çözme durumlarında yaratıcı düşünme becerilerini ortaya çıkarmaya çalışarak, yaratıcı düşünmenin bileşenlerini incelemek ve adayların yaratıcılık süreçlerinin özelliklerini belirlemektir. Bu amacı gerçekleştirmek için çalışmaya katılan öğretmen adaylarının;

- Matematiksel problemleri çözme durumlarında sergiledikleri problem çözme davranışları,
- Problem çözme süreci içinde yaşadıkları güçlüklerin nedenleri,
- Akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerisi açısından yaratıcı düşünme becerileri incelenecektir.

Kısaca, bu araştırmada temel olarak şu soruya cevap aranacaktır:

“Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel problemleri çözme durumlarında sergiledikleri yaratıcı düşünme becerilerinin özellikleri nelerdir?”

Belirlenen problem cümlesi doğrultusunda araştırmanın alt problemleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

- Matematiksel problemleri çözme durumlarında öğretmen adaylarının sergiledikleri problem çözme davranışları nelerdir?
- Problem çözme süreci içinde öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlüklerin nedenleri nelerdir?
- Yaratıcı düşünme becerileri (akıcı düşünme, esnek düşünme ve orijinal düşünme becerileri) nelere bağlıdır?

1.3. Araştırmanın Önemi

Problem durumunda da belirtildiği gibi yaratıcılık oldukça karmaşık (Meissner, 2000) ve keşfedilmemiş bir kavramdır (Ervynck, 1991; Sriraman 2004). Hatta Meissner (2000) ve Silver (1997) bazılarının yaratıcılığı matematikle uyumsuz (bağdaşmaz) gibi gördüklerine işaret etmiştir. Ayrıca Meissner (2000), matematik sınıflarında geleneksel çalışma stiline pek çok yaratıcı fikirlere imkan vermiyor gibi görüldüğünü, matematik öğretiminde yaratıcılığın çok az gelişim gösterdiğini ve küçük çocukların büyüdükçe matematiğe olan ilgisinin ve coşkusunun zamanla kaybolduğunu ve bunun farkına varmanın matematik eğitimcileri için çok büyük problem olduğunu ifade etmiştir.

Yaratıcılığı harekete geçirmek ve geliştirmek için Meissner'e (2008) göre matematik bilgisinden daha fazlasına, kavramların özelliklerine, kavramlar arası ilişkilere ve özel çevrelere ihtiyaç vardır. Öğrenciler bir problemi keşfetmeyi, yapılandırmayı, kendi tekniklerini keşfetmeyi ya da öğrendikleri teknikleri yeni durumlara göre değiştirerek uygulamayı, dinlemeyi ve tartışmayı, amaçlarını belirlemeyi, işbirliği ile çalışmayı öğrenmelidir. Bunlar kolay beceriler olmayıp, karmaşık bir bilişsel süreç sistemine dayanan ve çaba gerektiren becerilerdir (Meissner, 2008: 81).

Eğitimciler öğrencilerinin matematiksel yaratıcılıklarının gelişiminde önemli bir rol oynayabilir. Sheffield'a (2008) göre bazı durumlarda eğitimciler yaratıcılığı geliştirmekten çok zarar vermektedir oysaki yaratıcılığın desteklenmesi gittikçe önem kazanmaktadır. Dolayısıyla, matematik eğitimcilerinin yaratıcılık hakkında daha bilinçli olmaları gerektiği düşünülebilir.

Silver (1997), matematik eğitimcilerinin yaratıcılığı yalnızca birkaç sıra dışı bireyin ilgi alanı olmadığını görebilmesi gerektiğini dahası tüm öğrencileri matematiksel aktiviteye yönlendirme ile yaratıcılığın beslenebileceğini iddia etmektedir.

Diğer taraftan, Mina (2008) geleneksel olarak araştırmacıların yaratıcı sürecin ürünleriyle daha fazla ilgilendiklerini, ancak farklı eğitim durumlarında ürünleri -olsa da olmasa da- yaratıcı süreç üzerinde odaklanılması gerektiğini savunmuştur. Araştırmacı bu durumu 'göreceli yaratıcılık' olarak isimlendirmiştir. Mina'ya (2008: 98) göre süreç yaratıcı olabilir ancak yeni ürünlerle sonuçlanmayabilir, çünkü aslında, bu ürünler öğrenci için yeni olabilir ancak matematik için yeni olmayabilir.

Bu çalışmada matematikteki yaratıcı düşünme konusunda az sayıda çalışmaya ulaşılabilmektedir. Ulaşılabilen çalışmalar arasında ise öğretmen adaylarının matematiksel problem çözme durumlarındaki davranışlarını yaratıcı düşünme becerileri açısından inceleyen bir araştırmaya rastlanamamıştır. Öğretmen adaylarının matematiksel problemleri çözme sürecindeki performansları ve bu süreç hakkında fikirlerinin alınması, onların problem çözme sürecinde karşılaşılabilecekleri güçlükler ve farklı problem durumlarında öğretmen adaylarının kullandıkları problem çözme davranışları hakkında fikirler verebilir. Diğer yandan, öğretmen adaylarının yaratıcı düşünme becerilerinin (akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerilerinin) nelere bağlı olabileceğinin bilinmesi onların matematiksel yaratıcılıklarını geliştirmede önemli bir adım olabileceği düşünülmektedir. Bu çalışmadan elde edilebilecek sonuçlar matematik eğitimcilerinin matematiksel yaratıcılık konusunda bilinçlerinin artmasına ve bu sayede matematik eğitimcilerine öğrencilerini yaratıcı düşünme konusunda desteklemede ve geliştirmede katkı sağlayabilir.

Sriraman (2005) profesyonel seviyedeki matematiğin şüphe ve belirsizlikle dolu olduğunu ve öğrencilerin matematik yaratmak için belirsizlik ve zorlukla karşı karşıya gelmesi gerektiğini iddia eder. Benzer olarak Silver (1997) da profesyonel matematikçilerin iyi yapılandırılmamış problem ya da durumlarla karşılaştıklarını ifade eder. Öğrencilere böyle ortamların sunulmasında açık uçlu problemlerden yararlanılabilir (Silver, 1997; Pehkonen, 1997). Literatürde üniversite düzeyine uygun olarak oluşturulmuş açık uçlu problem örnekleri ile karşılaşılmamıştır. Bu nedenle araştırmada kullanılmak üzere Polya'nın (1997) kanıt problemleri olarak adlandırdığı problemlerden sonuç kısmının gizlenmesi ile açık uçlu matematiksel durumlar oluşturulmuştur. Üniversite düzeyinde ve hatta ortaöğretim düzeyinde öğrenciler için belirsizliğin oluşturulmasında bu uygulamanın bir örnek teşkil edebileceği düşünülmektedir. Ayrıca bu tip problemlerin materyal olarak kullanılabileceği yeni araştırmaların yürütülebileceği düşünülmektedir.

1.4. Araştırmanın Kapsamı ve Sınırlılıkları

- Araştırmaya Ankara'daki bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi, OFMA Matematik Eğitimi Anabilim Dalında öğrenim gören toplam 22 öğretmen adayı katılmıştır.
- Araştırma 2006–2007 öğretim yılı bahar döneminde 'Matematikte Seçme Konular' isimli seçmeli derste uygulanmıştır.
- Araştırmanın uygulama süresi 'Matematikte Seçme Konular' isimli derste haftada dört saat olmak üzere 14 hafta toplam uygulama süresi 56 saattir.
- Araştırma, derse devam eden öğretmen adaylarının verdikleri bilgiler ve performansları ile sınırlıdır.
- Araştırma, öğretmen adaylarının çözmesi için seçilen problemler ile sınırlıdır.
- Dersteki sınıf ortamı yani öğretmen adaylarının birbirleriyle ve araştırmacıyla olan etkileşimleri, onların performanslarını olumlu ya da olumsuz yönde etkileyebilir. Bu nedenle araştırma, bu ortam ile sınırlıdır.

- Öğretmen adaylarının problem çözme süreci ders saatiyle sınırlıdır. Bazı öğretmen adayları daha fazla sürede daha farklı performanslar gösterebilirler.
- Araştırma öğretmen adaylarının motivasyonları ile sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

- Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının günlüklerinde ve yapılan mülakatlarda samimi cevap verecekleri,
- Öğretmen adaylarının performanslarını olabildiğince iyi derecede sergileyecekleri,
- Seçilen problemlerin öğretmen adaylarının yaratıcı düşünme becerisini ortaya çıkaracak nitelikte olduğu,
- Veri toplama ve analizi sürecinde araştırmacı yansız davranmış, öğretmen adaylarının cevaplarını etkilemekten kaçınmış olduğu varsayılmaktadır.

1.6. Tanımlar

Akıcı düşünme becerisi: Sheffield (2005), akıcılığı kullanım alanına göre farklı doğru cevapların sayısı, çözüm yollarının ya da oluşturulan yeni soruların sayısı olarak tanımlamıştır. Bu çalışmada kullanılan problem tipleri göz önünde bulundurularak açık uçlu durumlarda üretilen fikirlerin sayısı ve birden fazla çözüm yapılması istenen problemlerde üretilen çözüm sayısı ‘akıcılık’ olarak ele alınmıştır. Dolayısıyla, bu çalışmada ‘akıcı düşünme becerisi’ çok fikir veya çözüm üretme becerisi olarak ele alınmıştır.

Esnek düşünme becerisi: Esneklik; cevapların, metotların ya da soruların farklı kategori sayısıdır (Sheffield, 2005). Sheffield’in bu tanımı çalışmada kullanılan problemlere göre ifade edildiğinde ‘esneklik’ açık uçlu durumlarda üretilen fikirlerin kategori sayısı veya birden fazla çözüm yapılması istenen problemlerde üretilen çözümlerin kategori sayısıdır. Buna dayanarak ‘esnek düşünme becerisi’ farklı çeşitte fikir ya da çözüm üretme becerisi olarak ele alınmıştır.

Orijinal düşünme becerisi: Bu çalışmada Sheffield'in (2005) orijinallik tanımı temel alınmıştır. Sheffield (2005), orijinallığı benzersiz olan ve anlayışı gösteren çözümler, metotlar ya da sorular olarak tanımlamıştır. Buna göre bu çalışmada bir tek öğretmen adayı tarafından üretilmiş doğru fikir ya da çözümler 'orijinal' olarak ele alınmıştır. Dolayısıyla, 'orijinal düşünme becerisi' bu tip fikir ya da çözümleri üretme becerisi olarak ele alınmıştır.

1.7. Sonraki Bölümler Hakkında

Bu araştırmada temel olarak, ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel problemleri çözme sürecinde yaratıcı düşünme becerileri incelenerek yaratıcı düşünmenin bileşenleri ve yaratıcılık süreçlerinin özellikleri belirlenmeye çalışılacaktır.

Bölüm 2'de yaratıcılık hakkında yapılan ilgili araştırmalardan bahsedilmek suretiyle yaratıcılığın bileşenleri hakkında kavramsal bir çerçeve oluşturulacaktır.

Bölüm 3'de araştırmanın modeli, araştırmaya katılan öğretmen adayları, veri toplama araçları, analizi ve süreci hakkında bilgi verilecektir.

Bölüm 4'de verilerin analizi sonucunda elde edilen bulgular ve bunlara ilişkin yorumlara yer verilecektir.

Son olarak, Bölüm 5'de araştırmada elde edilen sonuçlar tartışılarak bazı önerilerde bulunulacaktır.

II. BÖLÜM

KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde, araştırmada yer alan kavramsal çerçeve; yaratıcılık, yaratıcılığın bileşenleri, yaratıcılık süreci, matematiksel yaratıcılık, yaratıcılığın geliştirilmesi ve yaratıcılık hakkında yapılan araştırmalar kısaca açıklanacaktır.

2.1. Yaratıcılık Nedir?

Yaratıcılık görsel sanatlar, müzik, dans, yazarlık, reklamcılık, fen bilimleri, matematik, sosyal problemlerin çözümleri, iş dünyası, eğitim-öğretim gibi her alanda günlük yaşantıda karşımıza çıkmaktadır.

İlgili literatür incelendiğinde, pek çok araştırmacının yaratıcılığın önemi konusunda hemfikir olmasına rağmen, tanımı hakkında tam bir fikir birliğine varamadıkları görülmektedir. Kirton (2003) yaratıcılığın tanımlanmasının güç olduğundan bahsetmiştir. Meissner (2000, 2005, 2008) yaratıcılığın standart bir tanımının olmadığını ifade etmiştir. Benzer şekilde, Parkhurst (1999, akt. Kirton, 2003) 1960’larda bile yaratıcılık hakkında literatürde 50 ile 60 farklı tanımın mevcut olduğunu belirterek yaratıcılığın tanımlanmasında bir fikir birliği olmadığını ifade etmiştir.

Araştırmacıların kimi zaman yaratıcılığın problem çözmeden farklı olduğunu ve hatta bu kavramların birbiri ile karşıt olduğunu savunmalarına rağmen, Kirton (2003), yaratıcılık, problem çözme ve karar verme kavramlarının birbiri içinde bağlantılı olduğunu savunmaktadır. Çünkü yaratıcılık, problem çözme ve karar verme kavramları orijinalliğin oluşumunda ve ayrıştırılmasında yer almaktadır. Diğer taraftan, Sternberg ve Lubart (1999), yaratıcılığı yeni (orijinal ve beklenmedik) ve

uygun (yararlı ve ilgili durumlara adapte edilebilir) işler üretme yeteneği olarak tanımlamaktadır.

Lubart (1994) yaratıcılığın tanımlanmasında merkezi ve merkezi olmayan özelliklerden bahsedilmektedir. Merkezi özellikler yenilik ve uygunluktur. Ürünün yeni olmasının seviyeleri vardır. Bir ürün bireysel seviyede, yerel seviyede ve sosyal veya dünya çapındaki bir seviyede yeni olabilir. Ürünün uygun olması ise problemin sınırlılıklarını karşılamasıdır. Yani ürün mantıklıdır, faydalıdır ve bir ihtiyacı karşılar. Diğer yandan, merkezi olmayan özellikler ise ürünün kalitesi, önemi ve üretim geçmişi. Lubart (1994) ayrıca yaratıcılık için mutlak bir standardın olmadığını da ileri sürmektedir.

Cropley (2001) ise yaratıcılığın, yenilik (yaratıcı ürün veya fikir bilinenlerden mutlaka ayrı olmalıdır), etkililik (bazı sonuçlar elde etme açısından işe yaramalıdır) ve etiklik (yaratıcılık, bencil veya yıkıcı davranışlar, suçlar vb. için kullanılmamalıdır) olmak üzere üç anahtar yönünden bahseder. Bu terimler bir ürünü yaratıcı yapan özel özelliklerdir. Öte yandan, bireyde bu özelliklere sahip ürünleri üretme kapasitesini sağlayan psikolojik faktörler vardır. Ancak bu faktörler yaratıcı ürünlerin ortaya çıkması için gerekli, fakat yeterli değildir. Bu faktörler açıklık, esneklik ve cesaret gibi kişisel özelliklerin yanında; yetenek, bilgi, beceri, motivasyon, tutum ve değerleri içermektedir. Cropley, yaratıcılığı ürünler yoluyla tanımlamanın bazı problemlere yol açtığını vurgulamaktadır. Farklı gözlemcilerin bir ürünün yaratıcılığı üzerinde anlaşmalarında güçlükler ortaya çıkabilir ve bu anlaşmalar belli bir çağda geçerlidir, gelecekte farklı sonuçlar oluşabilecektir.

Runco (2004) yaratıcılığın, evrimsel değişikliklere (problemlere ve meydan okuyuculara) etkili ve yararlı bir tepki olduğunu ve ayrıca kültürel evrimin de lokomotiflerinden biri olduğunu ifade etmektedir.

Tablo 2-1 Farklı yaklaşımlara göre yaratıcılığın kaynakları
(Lubart, 1994:294-301; Sternberg ve Lubart, 1999:6-12; Sriraman, 2004: 22-25)

YAKLAŞIMLAR		YARATICILIĞIN KAYNAKLARI
Mistik yaklaşım		Doğaüstü bir kaynaktır
Psiko-dinamik yaklaşım (dört basamaklı Gestalt modeli)		Bilinçlilik ve bilinçsizlik arasındaki gerilimden doğmaktadır
Bilişsel yaklaşım		Düşünme becerileri ve bilgidir oluşur
Sosyal-psikolojik yaklaşım (Lubart, 1994) Sosyal-kişisel yaklaşım (Sriraman, 2004)	Kişilik değişkenleri	• karar vermede bağımsızlık, • kendine güven, • karmaşıklığa ilgi, • estetiğe uyma, • risk alma, • cesaret, • özgürlük, • kendiliğinden olma, • kendini kabullenme
	Motivasyona bağlı değişkenler	• iç motivasyon, • düzen ihtiyacı, • başarı ihtiyacı
	Sosyokültürel çevre	• kültürel çeşitlilik, • savaş, • rol modellerin varlığı, • kaynakların mevcudiyeti (finansal destek), • alandaki yarışçıların sayısı
Birlikte akma (Confluence) yaklaşımı	Pek çok farklı elementin bileşimi	
	Sternberg'in Implicit teorileri	Bilişsel ve kişisel elementlerin bileşimi • fikirleri birleştirebilme, • benzerlik ve farklılıkları görebilme, • esnek olma, • estetik lezzete sahip olma, • alışılmışın dışında olma, • motive olma, • meraklı olma, • sosyal normları sorgulama
	Amabile'nin Explicit teorileri	• iç motivasyon • alana özgü bilgi ve beceriler • yaratıcılığa özgü beceriler
	Gruber ve Wallace'ın Gelişimci sistem yaklaşımı	Bireyin • bilgisi , • amacı, • etkisi
	Csikszentmihalyi'nin 'sistem' yaklaşımı	• birey, alan, disiplin arasındaki etkileşim
	Sternberg ve Lubart'ın yatırım teori yaklaşımı	• zeka, bilgi, düşünme stilleri, kişilik, motivasyon, yaratıcılık için çevre

2.2. Yaratıcılığın Bileşenleri Nelerdir?

Literatür incelendiğinde geçmişten günümüze yaratıcılığa farklı açılardan bakıldığı ve farklı yaklaşımlarla ele alındığını görebilmek mümkündür (Tablo 2.1). Öte yandan, Lubart (1994), yaratıcılığın bileşenlerini **zihinsel yetenekler, bilgi, düşünme stilleri, kişilik, motivasyon** ve **çevre** olmak üzere altı kategoride ele alır.

2.2.1. Zihinsel yetenekler

Zihinsel yetenekler yaratıcılığın en önemli bileşenleridir. Kapsamlı teorik ve deneysel çalışmalar bir dizi yüksek seviyeli ve temel seviyeli yaratıcılıkla ilgili yeteneklere işaret eder. Bu yetenekler alana özgü-genel formlarda olduğu gibi, belli bir alana ve konuya özgü formlarda da olabilir. Yüksek seviye yetenekler: problem bulma, problemi tanımlama, problem temsili seçme (benzeşim ve mecazlar yardımıyla), strateji seçme ve değerlendirmedir. Temel seviyeli yetenekler kavrama yetenekleri ve ıraksak düşünme becerileridir (Lubart, 1994).

2.2.2. Bilgi

Bilgi hem formal hem de informal olabilir. Formal bilgi kitaplarda bulunan gerçekler; informal bilgi, herustik (heuristic) (keşfe yarayan, anlamaya vesile olan) veya bir alandaki önemli kişilerin bilinmesi gibi bilgilerdir. Yaratıcı ürünlerin oluşturulması sürecinde uzun bir bilgi birikimi ve hazırlık periyodu gereklidir. Bilgi olmadan bireyin problemi fark etmesi ve bu problemlerin doğasını anlaması imkansızdır. Bilgi, bireyin eski fikirleri yeniden icat etmesini engeller. Bilgi bireyin mevcut düşüncenin nerede olduğunu bilmesini, böylece de bu fikirlerden uzaklaşarak, farklı, orijinal fikirler üretmesini sağlar. Bilgi bireyin bir fikri etkili bir biçimde iletmede önemli olan yüksek kalitede iş üretmesini sağlar. Bilgi bireye fikirlerin kaynağı olarak oluşan şans oluşumlarını fark etmesinde ve bunları kullanmasında yardımcı olur. Bilgi yeni bir fikrin oluşumunda bireyin kendi bilişsel

kaynaklarına konsantre olmasına yardımcı olur (Lubart, 1994). Gardner (2008) ise bir alanı, sanatı veya zanaatı iyice bilmeden yaratıcı olunamayacağını ve bir zanaatta başarılı olmak için de en az on yıl çalışılması gerektiğini savunur.

2.2.3. Düşünme stilleri

Düşünme stilleri biliş ve kişilik özellikleri arasındaki kesişimde yer alır. Düşünme stilleri bireyin zihinsel yetenek ve bilgisini bir probleme uygulamasında tercih edilir. İki kişi denk seviyede zekaya sahip olabilir fakat bir konuda kendi yeteneklerine nasıl odaklandıkları konusunda farklı olabilirler. Araştırmalar yaratıcılığı artıran bazı düşünme stillerine işaret eder (Lubart, 1994). Jung (1923, akt. Lubart, 1994) **duyusal** (sensing) ve **sezgisel** (intuitive) stilleri birbirinden ayırır. Çünkü problemlere beş duyu yoluyla yaklaşan kişiler duyusal stil sergilerler. Onlar dışarıdan ulaşılabilir bilgiye fazla güvenir ve onların bilişsel yetenekleri bir durumun gerçek olup olmamasına odaklıdır. Sezgisel stile sahip olan kişiler ise, bilginin içsel kaynağına, duygularına ve sezgilerine güvenirler. Deneysel olarak, yaratıcı olan matematikçiler, bilim adamları, yazarlar, öğrenciler güçlü bir sezgisel stil eğilimine sahiptirler (Myers & McCaulley, 1985; akt. Lubart, 1994).

Kirton (1976; akt. Lubart, 1994) ise yaratıcılıkla ilgili olarak **adapte edici** (adaptor) ve **yenilikçi** (innovator) stilleri önermiştir. Adapte ediciler problemin çözümünü araştırırlar ve problemin çözümünde küçük değişiklikler yaparak sonuca ulaşırlar. Yenilikçiler ise bir probleme yeni bir açıdan yaklaşarak yeniden yapılandırmayı tercih ederler. Araştırmalar, yaratıcılığın iraksak düşünme testleri ve yenilikçi stili tercih etme arasında bağlantı olduğunu göstermektedir (Lubart, 1994).

Yaratıcılık için önemli olduğu varsayılan diğer düşünme stillerinden biri de **global** ve **lokal** (local) stillerdir. Lokal stile sahip olan kişiler, bir problemin dar ve detaylandırılmış yönleri ile çalışmayı severler. Global stile sahip olanlar ise bir problemin geniş ve genel seviyesinde çalışmayı tercih ederler. Yaratıcı çözümler çoğunlukla büyük resmi görmeyi gerektirir, böylece global stilin önemli olduğu

varsayılır. Bununla beraber yaratıcı işlerin son fazlarında detaylara dikkat etmek görevin tamamlanması için gereklidir. Böylece global ve lokal stiller arasındaki denge en uygun durumda gerçekleşir (Lubart, 1994).

2.2.4. Kişilik

Lubart'a (1994) göre, kişilik özellikleri bilişsel bileşenlerin etkili kullanımını ve fikirlerin gerçek ürünlere dönüşümünü kolaylaştırabilir. Belirsizliğe karşı toleranslı olmak, zorluklara karşı dirençli (azimli) olmak, yeni deneyimlere açık olmak (yeni fikirleri denemeye, araştırmaya istekli olmak, bireyin iç dünyasındaki fikirler ve yaşadığımız dünya hakkında meraklı olmak), risk almaya gönüllü olmak ve yargıdan bağımsız olmak (kendine güven) Lubart'ın belirttiği yaratıcılık için gerekli olan kişilik özellikleridir. Benzer şekilde, Gardner (2008) da yaratıcılıkta kişilik ve mizacın etkili olduğunu, yaratıcı bireylerin şanslarını denediklerini, risk alabildiklerini, kaybetmekten ve başarısız olmaktan korkmadıklarını ve bu şekilde öğrenmeye devam ettiklerini iddia etmiştir.

2.2.5. Motivasyon

Motivasyon bilişsel bileşenleri yaratıcı amaçlar için kullanmada itici güç sağlar. Yaratıcı bir ürün oluşturmada **içsel** (intrinsic) motive edicilerin **dışsal** (extrinsic) motive edicilerden (çevre tarafından sağlanan ödüller örneğin; para, işte yükselme, tanınma ve güç) daha faydalı olduğu söylenebilir (Lubart, 1994).

Sternberg ve Lubart (1991b, 1993; akt. Lubart, 1994) yaratıcılık için motivasyonun önemli yanının motivasyonun içsel-dışsal doğasından ziyade motive edicinin, kişinin bir göreve olan ilgisini etkilemesi olduğunu iddia eder. Görev odaklı (task-focusing) motive edici, kişinin görev üzerindeki dikkatini korumasını sağlar ve çalışma enerjisi verir. Amaç odaklı (goal-focusing) motive edici ise kişinin ödüle odaklanmasını sağlar ki bu, görevin kendisi için zararlıdır. İçsel motive ediciler

ödeve odaklanmaya eğilimlidirler. Çünkü amaç, görevin kendisi ile bağlantılıdır. Dışsal motive ediciler amaca odaklanmaya eğilimlidirler çünkü ödüller görevden ayrıdır (Lubart, 1994).

2.2.6. Çevre

Çevre yeni fikirlerin oluşması için sosyal ve fiziksel koşulları sağlar. Yaratıcı bilişsel yeteneklerin kullanımını çevre tetikleyebilir. Örneğin; Ward (1969, akt. Lubart, 1994) objelerle dolu bir odada ıraksak düşünme testi cevaplayan öğrencilerin boş bir odada cevaplayanlardan daha fazla fikir ürettiklerini bulmuştur. Gelişimsel olarak yaratıcı insanlar zihinsel açıdan uyarıcı ortamında büyürler (Ochse, 1990, akt. Lubart, 1994). Çevrenin bir başka etkisi, rol modelleri ile olur. Tarihsel çalışmalar ünlü yaratıcı rol modellerinin bir nesildeki varlığının sonraki nesillerdeki yaratıcılığa pozitif etkisinin olduğunu göstermiştir (Simonton 1975, 1984, 1988b, akt. Lubart, 1994). Çalışmada özgürlüğün, düşünmek için yeterli zamanın, işbirliğinin ve fikir geliştirmek için yeterli kaynakların yaratıcılığı kolaylaştırdığı bulunmuştur (Amabile 1988, akt. Lubart, 1994).

Çevrenin yaratıcılık üzerine olumsuz etkileri de vardır. Örneğin; geleneksel okullar yaratıcılığı engelleme özelliği ile eleştirilmektedir. Çünkü bilgi genelde birbirinden bağımsız üniteler halinde sunulmaktadır. Sınavlar tipik olarak gerçeklerin hatırlanmasını ve ezberi vurgulamaktadır. Tek doğru cevabı olan sınav soruları öğrencilerin çok yönlü düşüncelerini ve yaratıcı düşüncelerini engellemektedir. Ödevler kısa olup, belirsizliğe karşı tolerans ve dirençliliği geliştirmemektedir. Okullarda ödül sistemi risk almayı cesaretlendirmemekte ve dış motive edici ve amaç odaklı motive edici olarak görev yapmaktadır. Pek çok öğretmen için ideal öğrenci, soru sormayan, sırasında sessizce oturan, kurallara uyan ve öğretmenin planını bozmayan öğrencidir (Sternberg ve Lubart 1991a,b, akt. Lubart, 1994).

2.3. Yaratıcılık Süreci

Yaratıcı sürecin en iyi bilinen aşamaları 1926'da Graham Wallas tarafından önerilen aşamalardır (Davis ve Rimm, 2004). Bu süreç dört basamaklı Gestalt modeli olarak da bilinmektedir (Sriraman, 2005). Bu aşamalar: **hazırlık**, **kuluçka**, **aydınlanma** ve **doğrulama**dır. Hazırlık aşamasında, kişi problem hakkında bilgi toplayarak probleme aşina hale gelir. Kuluçka aşamasında, problem bir kenara bırakılır ve zihin başka problemlerle meşgul edilir. Aydınlanma aşamasında, çözüm aniden belirir. Değerlendirme aşamasında ise, önceki aşamada elde edilen çözüm bilinçli olarak doğrulanır. İki ünlü matematikçi Poincare ve Hadamard kendi yaratıcılıklarında bu süreçleri yaşadıklarını belirtmişlerdir (Lubart, 2000-2001). Sriraman'ın (2004) çalışması da matematiksel yaratıcılıkta bu süreçlerin mevcudiyetini doğrulamaktadır.

2.4. Yaratıcılık Nasıl Tespit Edilir?

2.1.'de de belirtildiği gibi, günümüzde bile yaratıcılık hakkında ortak bir tanım mevcut değildir. Hal bu iken, yaratıcılığın tespiti ve ölçülmesi de zorlukları beraberinde getirmektedir. Kirton (2003) bu durumun zorluğunu 'tanımlayamadığınız şeyi doğru bir şekilde ölçemezsiniz' şeklinde ifade etmektedir. Kirton gibi Lubart (1994) da yaratıcılığın belirlenmesinde zorluklar olabileceğine işaret etmiştir. Çünkü yaratıcılığın belirlenmesinde mutlak standartlar olmayıp, kişiye ve zamana göre tercihler değişebileceğinden yaratıcılığa karar vermek de değişim gösterebilecektir.

Lubart'a (1994) göre yaratıcılık temel olarak orijinallik (özgünlük) ve uygunluk (işe yararlılık) açısından değerlendirilebilir. Bunların yanı sıra bir ürünün yaratıcı olup olmadığı, ürünün kalitesi, üretim hikayesi (tarihçesi), farklı fikirleri bir araya getirebilme derecesi, ürünün pazarlanabilirliği, bireylerin hislerini karıştırabilecek kışkırtıcı gücünün olup olmamasına da bakılarak karar verilebilir.

Yaratıcılığı ölçmek için günümüzde farklı ölçme aracının kullanıldığını görmekteyiz. Bu araçlar; bilişsel yetenek testleri (Guilford'un ıraksak düşünme testleri ve Yaratıcı düşünme Torrance testleri- TTCT), kişisel envanterler, biyografik envanterler, tutum ve ilgi anketleri, öğretmenler, arkadaşlar ve danışmanlar tarafından yapılan kişi-merkezli puanlamalar, şöhret, başarı hakkında bireysel raporlar, çalışma örnekleri hakkında kararlardır (Lubart, 1994).

2.5. Matematiksel Yaratıcılık Nedir?

Bilim ve Yöntem kitabının “Matematiksel Yaratıcılık” bölümünde Poincare, mantıkta ustalığın ve matematiksel sembollerle iş görme yetisinin kişinin matematik yaratması için yeterli olmadığını ileri sürmektedir (King, 2004). Poincare’e (1929, akt. King, 2004) göre matematiksel yaratıcılık, yararsız düzenlemeler yapmamak, yararlı olan ve sadece küçük bir azınlık oluşturan düzenlemeler yapma yeteneğidir. Hadamard (1945) da Poincare ile birlikte iki sonuca ulaştıklarını belirtir. Bunlar biri matematiksel yaratıcılığın bir seçim olduğu diğeri ise bu seçimin bilimsel güzelliğın sağduyusuyla zorunlu olarak yönetildiğidir.

Diğeri yandan Bishop (1981, akt. Pehkonen, 1997) yaratıcılık için mantıksal, tek boyutlu, dil ağırlıklı ve görsel, çok boyutlu, sezgisel görüş olmak üzere birbirini tamamlayan iki düşünce çeşidinin gerekliliğinden bahseder. Buna benzer olarak Pehkonen (1997); yaratıcı düşünmeyi, mantıksal düşünme ile bilinçli bir amaca sahip sezgiye dayanan ıraksak düşünmenin bir kombinasyonu olarak tanımlanabileceğini iddia eder.

Sriraman (2004) ise matematiksel yaratıcılığı, verilen bir problemin karmaşıklığının seviyesine bakılmaksızın probleme olağan dışı (alışılmamış), açık ve derin bir kavrayış içeren çözümler getirme süreci olarak tanımlamaktadır. Sriraman (2005), ayrıca matematiksel yaratıcılığın hem profesyonel ve hem de K12 seviyesinde farklı tanımları olduğuna dikkat çekmiştir. Profesyonel seviyede

matematiksel yaratıcılık, bilgi birikimini önemli seviyede genişletecek orijinal eser üretme yeteneği ve/ya diğer matematikçiler için yeni sorulara yol açma yeteneği olarak tanımlanmıştır. Öte yandan K12 seviyesinde matematiksel yaratıcılık (a) bir probleme veya benzer problemlere alışılmamış (yeni) ve/ veya kavrayış içeren çözüm(ler) üretme ve/ veya (b) yeni sorular düzenleme ve/veya hayal gücü gerektiren yeni bir açıyla eski bir problemi dikkate almayı düşünme olasılıkları olarak tanımlanabilir. Bu tanımın ikinci kısmı profesyonel matematikçilerin yaratıcılık tanımlarıyla çok benzerlik taşımaktadır (Sriraman, 2005: 23).

Krutetskii (1976, akt. Haylock, 1997) ise matematiksel yaratıcılığı basit (karmaşık olmayan) matematiksel problemlerin bağımsız formülasyonu, bu problemleri çözmenin yollarını ve araçlarını bulma, ispat ve teoremlerin icadı, formüllerin bağımsız dedüksiyonu ve standart olmayan problemlerin çözümü için orijinal metotlar bulma olarak tanımlar. Krutetskii'nin matematiksel yaratıcılık kavramı problem çözme içerisinde tespit edilebilir ve Krutetskii problem çözmedeki yaratıcılığın, problem formülasyonu, icat, bağımsızlık ve orijinallik gibi özelliklerle nitelendirilebileceğini iddia eder (Haylock, 1997).

Ervynck (1991), matematiksel yaratıcılığın üç gelişim aşamasından bahseder. Birinci aşama olan *hazırlayıcı teknik aşama*, kullanıcının teorik temelden haberi olmaksızın matematiksel kural ve işlemlerin bazı teknik veya pratik uygulamalarını içerir. İkinci aşama, *algoritmik aktivitedir*. Algoritmik aktivite, matematiksel tekniklerin uygulanması ile yakından ilgilidir. Bu tür tekniklere örnekler: Bir algoritmanın uygulanması, formül elde etme, bir polinomun çarpanlara ayrılması, integral hesabı, diferansiyel denklem çözümlerinde olduğu gibi bilgisayar programları gerektiren hesapla ilgili aktiviteler. Bu aşamadaki aktivitelerin tipik özelliği, tamamen açık olmalarıdır. Tüm ara adımlar dolaylı olarak da olsa dikkate alınmak zorundadır; aksi durumda ciddi bir hata olabilir ve sonucu tümüyle hükümsüz kılabilir. Üçüncü aşama, *yaratıcı (kavramsal, yapılandırmacı) aktivite* olarak adlandırılır. Bu aşamada gerçek (asıl) matematiksel aktivite gerçekleşir ve bu aşama algoritmik olmayan karar vermeyi içerir. Matematiksel yaratıcılık bu tür

adımları gerçekleştirme yeteneğidir. Alınması gereken kararlar oldukça farklı bir doğaya sahiptir ve daima bir seçim içerir.

Chamberlin ve Moon'a (2005) göre matematiksel yaratıcılık, matematikçilerin rutin olmayan problem çözme ile meşgul olduklarında kullandıkları alana özel düşünme sürecidir. Ayrıca çalışmalarının odağına göre daha da özelleştirdikleri yaratıcı matematiksel yeteneği matematiksel modellemeyi kullanarak gerçek uygulamalı ya da uyarlanmış problemlerde yararlı ve orijinal çözümler üreten olağandışı yetenek olarak tanımlamışlardır.

Usiskin (2000) matematik yeteneğini sekiz kademeli hiyerarşi ile açıklamıştır. Bu hiyerarşide Seviye 0 (yeteneksiz); çok az matematik bilen yetişkinler, Seviye 1 (kültür seviyesi); kültürel kullanımın fonksiyonu olarak gelişmemiş rakam duyusuna sahiptir ve matematik bilgileri 6–9 derecedeki öğrencilerin bilgisine benzemektedir, genelde insanların büyük bir kısmı bu seviyededir. Kalan nüfus ise Seviye 2 ile 7 arasında seyrek bir şekilde dağılım göstermektedir. Seviye 2'de matematik alanında onur ödülüne sahip olan ve ileride lise seviyesinde matematik öğretmeni olacak olan kolej öğrencileri, Seviye 3 ("dehşet" öğrenci) Bu öğrenciler matematikte üniversite seviyesinde çalışabilecek potansiyele sahiplerdir. Seviye 4 (ender-istisnai öğrenci); matematik yarışmalarında üstün olan, yeteneklerinden dolayı matematik ve fen bilimlerinde yaz kamplarına ve akademilere giriş hakkı kazanan öğrencilerdir. Bu öğrenciler matematiksel kanıtları yapılandırabilir ve matematikçilerle matematik hakkında sohbet edebilirler. Seviye 5 üretken matematikçiye temsil etmektedir. Bu seviyenin biraz belirsiz olduğu savunan Sriraman (2005), bu seviyede doktorasını matematikte veya benzer matematiksel bilimlerde başarıyla tamamlayan ve alanda yayın yapabilen öğrencilerin de bu grup içinde değerlendirilebileceğine işaret etmektedir. Seviye 6; nadir bulunan matematikçi seviyesidir, alanında kayda değer başarılar elde etmiş matematikçileri temsil etmektedir. Seviye 7; Leonard Euler, Karl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, Srinivasa Ramanujan, David Hilbert, Henri Poincare gibi tüm zamanların en büyükleri olan, matematikte madalya kazanan ve alanın devleri olan dahilerin seviyesidir.

Sriraman (2005) alana özgü spesifik tanımlamadaki belirsizliklerden dolayı matematiksel yaratıcılık kavramının tanımlanmasından ziyade, bu kavrama daha genel seviyede bakılıp, yaratıcılık kavramının daha uygun bir şekilde tanımlanmasının daha gerekli olduğunu tavsiye etmektedir.

Haylock'a (1997) göre matematikte yaratıcı düşünmeyi tanımak için iki ana yaklaşım belirlenebilir. Bunlardan birincisi, kişinin başarısı için yaratıcı düşünmenin özelliği olarak bilinen belirli bilişsel süreçlerin gerekli olabileceği problem çözme ödevlerindeki cevaplarını dikkate almaktır (değerlendirmektir). Haylock, bu anahtar bilişsel süreçlerden birinin zihinsel eğilimleri kıırarak *saplantıların üstesinden gelme* olduğunu iddia eder. İkinci yaklaşım ise yaratıcı düşünmenin bulunduğunu gösteren bir *ürün* için kriter belirlemektir. Esneklik, orijinallik ve uygunluk gibi böyle kriterler tarafından değerlendirilebilecek cevaplar üreten çeşitli *ırsak ürün* ödevleri tasarlanabilir.

Sheffield (2005) ise matematiksel yaratıcılığın değerlendirilmesinde yedi çeşit kriter önermektedir. Bu kriterlerin bir kısmının veya tamamının öğrencilerin çalışmalarını ve araştırmalarını değerlendirmede kullanılabileceğini ifade etmektedir. Bu kriterler:

Anlayış derinliği: Temel kavramların açığa çıkarılma ve geliştirilme derecesidir.

Akıcılık: Farklı doğru cevapların, çözüm yollarının ya da oluşturulan yeni soruların sayısıdır.

Esneklik: Cevapların, metotların ya da soruların farklı kategori sayısıdır.

Orijinallik: Benzersiz olan ve anlayışı gösteren çözümler, metotlar ya da sorulardır.

Ayrıntılı bir şekilde incelemek-genişletmek ya da şıklık, incelik: Düşüncesini ifade etme kalitesi, grafikler, şekiller, çizimler, modeller ve kelimelerdir.

Genellemeler: Ortak noktalar not edilir, hipotez kurulur ve daha büyük kategorilerde doğrulanır.

Genişletmeler: Özellikle “niçin ve şayet...” türü alakalı sorular sorulur ve araştırılır.

1.6.'da da belirtildiği gibi, bu çalışmada öğretmen adaylarının problem çözümlerinin akıcılık, esneklik ve orijinallik açısından ele alınmasında araştırmada kullanılan problem çeşitlerine göre Sheffield'ın akıcılık, esneklik ve orijinallik tanımlarından faydalanılmıştır. Araştırmada kullanılan açık uçlu ifadelerde akıcılık ve esneklik açısından yapılan değerlendirmede üretilmiş fikirlerin listesi yapılmış ve bu fikirler kategorilere ayrılmıştır, bu şekilde değerlendirme Imai'nin (2000a) çalışmasıyla benzerlik taşımaktadır. Fikirlerin sayısı akıcılık, ancak Imai'den (2000a) farklı olarak, kategorilerin sayısı ise esneklik puanı olarak alınmıştır. Diğer yandan bu çalışmada orijinallik için Charles ve Runco'nun (2000–2001) yaptığı gibi yalnızca bir tek öğretmen adayı tarafından üretilen fikirler orijinal olarak değerlendirilmiştir.

2.6. Yaratıcılık Nasıl Geliştirilebilir?

Sheffield (2005:2–4) yaratıcılığın geliştirilmesinde ve matematik kavramlarını anlamayı derinleştirmede faydalı olabilecek bir dizi stratejiden bahsetmektedir. Bu stratejiler Tablo 2.2.'de özetlenmektedir.

Silver (1997) problem oluşturma ve problem çözme fırsatları içeren araştırmaya dayalı matematik öğretimi ile öğrencilerin matematiksel aktivitelerde daha fazla akıcılık, esneklik ve daha yaratıcı yaklaşımlar geliştirebileceklerini savunmaktadır.

Mantıksal çıkarıma çok fazla önem verildiğinde yaratıcılığın azalacağını iddia eden Pehkonen (1997) göre yaratıcı düşüncenin problem çözme durumuna uyguladığında ıraksak düşünmenin birçok fikir ürettiğini, bunlardan çözümü bulmak için yararlı gibi görünenlerden mantıksal düşünme süreci ile bir özet oluşturulduğunu belirtir. Pehkonen, mantıksal çıkarıma çok fazla önem verilmesi durumunda yaratıcılığın azalacağını ve mantıkta kazanılanın yaratıcılıkta kaybedilebileceğini iddia eder. Pehkonen, ayrıca yaratıcılığı geliştirmek için gereksiz seçim baskısı ve kontrolden bağımsız olmak gerektiğini de belirtir.

Tablo 2-2 Yaratıcılığı geliştirmede kullanılabilecek strateji ve teknikler

Stratejiler	Teknikler	İşlevi
Değer/ takdir bilme (Appreciation)	- Beyin fırtınası - Duyusal farkındalık - Nitelik listesi - Kontrol listesi - Dikkat geliştirme	Bir durumun, ürünün yada problemin özelliklerinden ve niteliklerinden daha fazla haberdar olmayı sağlar. Öğrencilerin problemin önemli özelliklerine odaklanmalarını, benzerlik farklılıklarını araştırmalarını, olası çözüm yollarını birbirleriyle karıştırarak düzenlemelerine yardımcı olur.
Animasyon (Animation)	- Modelleme - Rol oynama (rol fırtınası) - Taklit etmek	Öğrencilerin problem, durum veya ürünle aktif bir biçimde etkileşim halinde bulunmasını sağlar. Matematik kavramlarının görsel ve fiziksel modellerini yaratmada, materyalleri ve el işlerini kullanarak aktif olarak çözüm yolları bulmada kullanabilir.
Birleştirme (Association)	- Zorla uydurmak - Morfolojik analiz (şekilbilim) - Synectics	Öğrenciler verilen bir durum, ürün ile bunlarla bağlantısı olmayan bir problemi karşılaştırır ve bağlantılar kurmaya çalışır. Çoğu matematiksel problem çözümü, çözüm yolu bilinmeyen problemle bilinen kavramlar, algoritmalar ve stratejiler arasında bağlantı kurmayı içerir. Bu yaratıcılık teknikleri bu bağlantıları kurmaya dikkati çekmeye yardımcı olur.
Değiştirme (Alteration)	- Parça değiştirme - SCAMPER (yerine geç, birleştir, adapte et, değiştir, küçült, büyüt, başka kullanımlara koy, geri çevir yada yeniden düzenle) - Yapmak ve yapmamak (tersine çalışmak)	Öğrenciler sistematik olarak bir ürünün, durumun yada problemin kısımlarını değiştirirler. “Şayet...” türü sorular ilginç matematiksel araştırmalara ve anlayışlara yol açmaktadır. Bu teknikler sistematik olarak problemin yada çözüm yolunun kısımlarını değiştirerek matematiksel kavramlara derinlik katmaktadır, yeni ve ilginç sorulara, araştırılacak problemlere götürmektedir.
Sona erdirmeye –vazgeçme (Abdication)	- Görselleştirme - Dinlenme - Kuluçka-bellekte tasarlamak - Üzerine uyumak (rüya görmek-hayal etmek)	Problemin üzerinde aktif olarak düşünmeyi kesip yarı bilinçte olan zihnin problem üzerinde muhakeme etmesine izin verilir. Yaratıcı matematikçilerin hayat hikayeleri uykudayken yada tamamıyla çözmeye çalıştıkları problemin dışında başka bir aktivite ile meşgulken problemleri çözdüklerini anlatan hikayelerle doludur.

Sriraman’a (2005) göre matematikte yetenekli bireylerin yaratıcılığını geliştirmenin *Gestalt prensibi*, *estetik prensibi*, *serbest pazar prensibi*, *ilmi (bilimsel) prensip*, ve *belirsizlik prensibi* olmak üzere beş yolu olduğuna işaret etmektedir. *Gestalt prensibi* göz önünde bulundurulduğunda, öğretmenlerin problem çözümü için gerekli süreyi uzatıp, keşfetme için olanaklar sağlamaları gereklidir. *Estetik prensibe* göre, alışılmamış çözüm yollarının güzelliğini takdir etmek gereklidir. *Serbest Pazar prensibine* göre, öğretmenler öğrencileri risk alma ve farklı düşünme konusunda

cesaretlendirmelidirler. Yaratıcı öğrencilerin kendi fikirlerini savunabilecekleri yarışmalarda, yerel ve daha büyük matematik öğrenci toplantılarında fikirlerini sunmalarını ve bu tür deneyimler kazanmalarını sağlamalıdır. *İlmi (bilimsel) prensip*, öğrenciler hem öğretmenin hem de kendilerinin fikirlerinin doğruluğunu sorgulamalı ve tartışmalıdır. Öğrencilere problem üretme konusunda olanaklar tanınmalıdır, bu sayede problemlerin matematiksel yada matematiksel olmadığını, iyi yada kötü, çözülebilir yada çözülemez olduğunu ayırt edebilir hale geleceklerdir. *Belirsizlik prensibi*, profesyonel seviyede matematik tamamıyla belirsizliklerle doludur. Öğretmenler matematik ve bilim tarihinden örnekler verilerek matematikçilerin uzun çabalar sonunda problemleri nasıl çözdüğü anlatılmalıdır. Öğrencilerin belirsizliği tolere etmesi sağlanmalıdır (Sriraman, 2005).

2.7. Yaratıcılık Hakkında Yapılan Araştırmalar

Livne ve Milgram (2000) matematikte yaratıcı yeteneği değerlendirmek için, okul dışı aktivitelerin bir anketini geliştirmek amacıyla bir çalışma yapmıştır. Yaptıkları çalışma üç aşamalıdır. İlk aşamada matematikte yaratıcı yeteneğin 4 hiyerarşik seviyesinin kavramsal tarifini (haritalama cümle) geliştirmişlerdir. Bu cümleye dayanarak 4 seviye ile idare edilen 61 maddeli başlangıç anketi hazırlamışlar ve 3. aşamada anketin güvenilirlik ve yapısal geçerliğini araştırmışlardır. Bunun için oldukça farklı seviyelerde zihinsel yetenekleri temsil eden 139 İsrailli öğrenci (11. ve 12. sınıf) ile çalışmışlardır. Öğrenciler 61 maddeli anketi cevaplamışlar ve 104 hakem, 1–4 arasında değerler vererek değerlendirme yapmışlardır. Değerlendirmeyi yapan hakemler dört gruba ayrılmıştır; akademik uzmanlar (doktoralı öğrenciler ve 5 profesör), matematik öğretmenleri, matematik alanında üniversite öğrencileri, matematikte başarılı olan kolej öğrencileri. Araştırma sonucunda 4 seviyedeki yaratıcı matematiksel yeteneği değerlendirmek için 12 maddeli ölçeğin yapısal geçerliğine dair kanıtlar bulmuşlardır. Araştırmacılar, matematikte yaratıcılığın dört seviyede de belirlenmesini ve müfredatın ve öğretim materyallerinin de buna göre hazırlanması gerektiğini tavsiye etmişlerdir.

Ülkemizde yaratıcılıkla ilgili olarak yapılmış olan bir çalışma Oral (2006) tarafından gerçekleştirilmiştir. Oral, ÖSS sözel sayısal ve eşit ağırlık puanlarının yaratıcılığın her dört boyutunu (akıcılık, esneklik, orijinallik, ayrıntılı bir şekilde inceleme-genişletme) ne kadar iyi kestirdiğini incelemiştir. Çalışmayı 2000, 2001, 2002, 2003 yıllarındaki ÖSS sonucuna göre Akdeniz Üniversitesi Eğitim Fakültesine yerleştirilmiş 140 üniversite öğrencisi ile gerçekleştirmiştir. Öğrencilere TTCT uygulanmış ve öğrencilerle ilgili demografik ve akademik veriler toplanmıştır. Çoklu lineer regresyon analizi ile ÖSS'nin sözel kısmının yaratıcılığın dört boyutunu da son yıllarda kapsadığı ancak sayısal kısmının bu boyutların hiçbirini kapsamadığı tespit edilmiştir.

Ülkemizde yapılmış başka bir araştırma Tezci vd., (2008) tarafından gerçekleştirilmiştir. Araştırmacılar farklı yaratıcı düşünme stillerine sahip olan on altı matematik öğretmen adayı ile problem çözmede yaratıcılık eğitimi alan matematik öğretmeni adaylarının farklı yaratıcılık stillerinin bu eğitimdeki başarıları üzerine etkisini incelemek amacıyla bir çalışma yapmıştır. Tek grup ön-test ve son-test desenini kullanarak yaptıkları çalışmada Kirton'un Uyumcu-Yenilikçi envanteri ve düşünce bağı testi (kavram haritaları) kullanılmıştır. Araştırmada; öğretmen adaylarına verilen eğitimde, problem çözmede yaratıcılığın nasıl geliştirileceğini öğretmek amaçlanmıştır. Araştırmanın sonucunda yaratıcı öğretmen eğitimi programının farklı yaratıcılık stillerine sahip öğretmen adaylarında farklı etkisinin olduğu tespit edilmiştir.

Profesyonel matematikçilerin matematiği nasıl yarattıklarını incelemek amacıyla Sriraman (2004) nitel bir çalışmada beş başarılı ve yaratıcı profesyonel matematikçi ile çalışmıştır. Çalışmasında “matematiksel yaratıcılığın Gestalt modeli bugün hala uygulanabilir durumda mıdır?”, “matematikte yaratıcı sürecin özellikleri nelerdir?”, “matematiksel yaratıcılığın sınıf ortamı için bir göstergesi mevcut mudur?” sorularına yanıt aramıştır. Yapmış olduğu görüşmelerde matematikçiler, matematik yaratmaları esnasındaki düşünme süreçlerini sözel olarak ifade etmişlerdir. Görüşme metinlerinin analizinde ve teoriye dayanan hipotezlerin doğrulanmasında analitik indüksiyon yöntemini kullanmıştır. Sonuçlar

matematikçilerin yaratıcı süreçlerinin Gestalt'ın hazırlık-kuluçka-aydınlanma-değerlendirme modelini takip ettiğini işaret etmiştir. Ayrıca sosyal etkileşim, imgeler, herustikler, sezgi ve ispatın matematiksel yaratıcılığın en yaygın özellikleri olduğunu tespit etmiştir. Öte yandan Sriraman, matematiksel yaratıcılığın sınıflarda kendini göstermesi için öğrencilerin, motivasyon, ısrar ve önemli ölçüde düşünmeyansına (reflection) gerektiren rutin olmayan problemlerin üstesinden gelme fırsatının verilmesi gerektiğini iddia etmiştir.

Sriraman (2003), hızlandırılmış cebir dersine kaydolun 9 tane 9. sınıf öğrencisi ile yaptığı çalışmada, üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel kavramları nasıl soyutladıkları ve genelleştirdiklerini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmacı aynı zamanda öğretmenlik yaptığı bu derse katılan öğrencilerin üstün yetenekli olan ve olmayan öğrenciler açısından heterojen bir sınıf oluşturduğunu ve öğretim deneyi esnasında öğrencilerin kimliklerinden habersiz olduğunu belirtmiştir. Öğrencilere, günlüklerine çözmeleri için zorluk seviyesi giderek artan, rutin olmayan, kombinatoriklerle ilgili beş tane problem sormuştur. Günlükleri topladıktan sonra öğrencilerle mülakat yaparak öğrencilerin problem çözme davranışlarını belirlemeye çalışmıştır. Araştırmanın sonucunda, matematikte üstün yetenekli olan dört öğrencinin, bu beş problemin çözümünü karakterize eden genelliği keşfetme ve ifade etmede başarılı olduğunu, yetenekli olmayan öğrencilerin gizli olan genelliği keşfedemediklerini tespit etmiştir.

Sriraman (2008), matematikte yetenekli çocuklar ile profesyonel matematikçilerin yaklaşımlarındaki paralellikleri araştırmak amacıyla bir çalışma yapmıştır. Çalışmayı, dokuzuncu sınıfta olan matematikte yetenekli dört öğrenci ile yürütmüştür. Çalışmaya gönüllü olarak katılmış olan bu öğrenciler, daha önceki geometri derslerinde hiç ispatla karşılaşmamışlardır. Öğrencilere “çevrel çemberi ile birlikte çizilmiş bir üçgen” gösterilerek onlardan her üçgen için köşelerinden geçen bir çemberin olup olmadığı ve eğer varsa nedenini açıklamaları istemiştir. Öğrencilerin düşünme süreçlerini araştırmak için Piaget'nin klinik görüşme tekniklerini kullanmıştır. Öğrencilerin ispatı oluşturma süreci olarak dört kategori belirlemiştir. Bunlar; görselleştirme, sezgi, deneycilik, tersine çevirebilmedir.

Belirlemiş olduğu bu dört kategorinin profesyonel matematikçilerin düşünme süreçlerinde de seviye farkı ile mevcut olduğunu tartışmıştır.

Mann (2005), matematikteki yaratıcı potansiyelin göstergelerini elde edecek basit bir araç araştırmak amacıyla bir çalışma yapmıştır. Verilerini Conneticut’da bir okulun yedinci sınıf öğrencilerinden toplamıştır. Örneklemede 86 öğrenci yer almıştır. Var olan araçları (the Creative Ability in Mathematics Test, the Connecticut Mastery Tests, the Fennema-Sherman Eric Louis Mann – University of Connecticut, 2005 Mathematics Attitude Scales, What Kind of Person are You? from the Khatena-Torrance Creative Perception Index and the Scales for Rating the Behavioral Characteristics of Superior Students) standart çoklu regresyon analizini yürütmek için kullanmıştır. Bu analiz ile matematiksel yaratıcılık ve matematiksel başarı, matematiğe karşı tutum, yaratıcılık yeteneğinin kişisel algısı, matematiksel kabiliyet ve yaratıcılık yeteneğinin öğretmen algısı ve cinsiyet arasındaki ilişkiyi keşfetmiştir.

Jensen (1973), matematiksel yaratıcılık, sayısal yetenek ve matematik başarısı arasındaki ilişkileri araştırmak için Auistin /Teksas’daki üç devlet okulunda öğrenim gören tüm 6. sınıf öğrencileri ile bir çalışma düzenlemiştir. Jensen doktora tezi olarak hazırladığı bu araştırmasında matematiksel yaratıcılığı yazılı, grafik ya da çizelge halinde verilen bir matematiksel durumdan çok sayıda, birbirinden farklı ve uygulanabilir cevaplar verebilme yeteneği olarak tanımlamıştır. Yaratıcılığı test etmek için “Kaç tane soru?” adını verdiği bir matematiksel araç geliştirmiştir. Sayısal yeteneği Zihinsel Olgunluk California Testleri’nin dil ile ilgili olmayan bölümünün puanı, matematik başarısını Metropolitan Başarı Testi’nin problem çözme ve hesaplama puanı olarak tanımlamıştır. Jensen bu araştırmanın sonucunda matematiksel yaratıcılık ile sayısal yeteneğin dereceleri arasında düşük bir korelasyon olduğunu, ayrıca matematiksel yaratıcılık ile matematik başarısının dereceleri arasındaki korelasyonun da düşük olduğunu bulmuştur.

Park (2004), matematiksel sorgu ve yüksek sesle düşünme stratejileri ile birlikte ıraksak ürün aktivitelerinin matematikte güçlük yaşayan beşinci sınıf öğrencileri üzerindeki etkisini araştıran bir çalışma yapmıştır. Araştırmacı,

araştırmasında verdiği eğitimin sonucunda kendisi tarafından geliştirilmiş olan ölçekle ölçülen katılımcıların yüksek sesle düşünme, matematiksel sorgu ve matematiksel problem çözme performanslarını geliştirip geliştiremeyeceği, eğer gelişme varsa bu üç ıraksak ürün aktivitelerinde programın etkililiğini gösterecek herhangi bir kanıt olup olmadığı ve yaratıcı düşünmenin Torrance testleri tarafından ölçülen ön test-son test puanları arasında önemli farklılıkların olup olmadığı sorularına yanıt aramıştır. Park, katılımcıların yüksek sesle düşünme, matematiksel sorgu ve matematiksel problem çözme performanslarının ortalama puanına göre gelişme gösterdiklerini tespit etmiştir. Katılımcıların, ortalama değişim ve etkinin ölçüsü açısından öğrenciler yüksek sesle düşünme ve matematiksel sorguda sınırlı gelişme gösterdiklerini, hem akıcılık hem de esneklik puanlarını geliştirdiklerini ve TTCT (Torrance Test of Creative Thinking) ile ölçülen iki ortalama puan arasında önemli farklılıkların olduğunu bulmuştur. Ancak tüm programın etkili olduğuna dair herhangi bir kanıt gözlemlememiştir.

Imai (2000a), matematikteki saplantıların üstesinden gelmenin açık uçlu matematik problemlerindeki ıraksak düşünmeye etkisini bulmak amacıyla bir çalışma yapmıştır. Çalışmanın örneklemini Japonya'daki üç okulda bulunan 11–12 yaşlarındaki ilköğretim 7. ve 8. sınıflarda öğrenim gören 273 öğrenci oluşturmaktadır. Çalışmada öğrencilere Problem A ve Problem B olmak üzere iki tip problem verilmiştir. Problem A'da bir dizi benzer problem verilmiştir. Bu problemlerin hepsinin çözümünde aynı algoritma sonuca ulaştırmakta, fakat bu problemlerden son ikisinde ise daha iyi çözüm çözümler de mevcuttur. Problem A'da saplantının üstesinden gelen ve gelemeyen öğrenciler belirlenmiş ve bu iki grup öğrencinin Problem B'de verilmiş olan açık uçlu durum için ürettikleri fikirler; akıcılık, esneklik ve orijinallik açısından puanlandırılmıştır. Çalışmanın sonucunda, matematikteki saplantıların üstesinden gelebilen öğrencilerin, matematikteki açık uçlu problemlerde çok çeşitli ve orijinal fikirler üretebildikleri görülmüştür.

Imai (2000b), yukarıda bahsedilen çalışmasına benzer bir çalışmada Japon ilköğretim öğrencilerinin matematikteki saplantıların üstesinden gelmesinin açık uçlu matematik problemlerindeki esneklik ve akıcılık üzerindeki etkisini bulmaya

çalışmıştır. Araştırmanın örneklemini Japonya'daki üç okulda bulunan 11–12 yaşlarındaki ilköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Örneklem 139 öğrenciden oluşmuştur. Çalışmada öğrencilere Problem A ve Problem B olmak üzere iki tip problem verilmiştir. Problem A Imai'nin (2000a) çalışmasındaki problemin aynısı olup bu problemle saplantının üstesinden gelen ve gelemeyen öğrenciler belirlenmiştir. Problem B'de ise bir grafik verilmiş ve öğrencilerin bu grafiği kullanarak soru oluşturulmaları istenmiştir. Verilen cevaplar akıcılık ve esneklik açısından puanlandırılmıştır. Araştırmanın sonucunda saplantıların üstesinden gelen öğrencilerin açık uçlu durumlara farklı fikirler oluşturabilirken saplantıların üstesinden gelemeyenlerin benzer soruları kısa zamanda çözebildiklerini tespit etmiştir.

Yapılan bu çalışmaların bulguları özetlenecek olursa,

- Matematikte akademik seviyede olmayan yaratıcılık yeteneği çok basit testlerle dört basamak halinde tespit edilebilir. Müfredat ve öğretim materyalleri de buna göre hazırlanabilir.
- Ülkemizde ÖSS sınavının sözel kısmı yaratıcılığın dört boyutunu da kapsadığı halde sayısal kısmı bu boyutlardan hiçbirini kapsamamaktadır.
- Yaratıcı öğretmen eğitimi programları farklı yaratıcılık stillerine sahip öğretmen adaylarında farklı etkide bulunmaktadır.
- Matematikçilerin yaratıcı süreçleri Gestalt'ın hazırlık-kuluçka-aydınlanma-değerlendirme modelini takip etmektedir. Sosyal etkileşim, imgeler, herustikler, sezgi ve ispatın matematiksel yaratıcılığın en yaygın özellikleridir. Matematiksel yaratıcılığın sınıflarda yaygınlaştırılması için öğrencilere, motivasyon, ısrar ve önemli ölçüde düşünme-yansıma (reflection) gerektiren rutin olmayan problemlerin üstesinden gelme fırsatı verilmelidir.
- Öğrenciler ispatı oluşturma sürecinde görselleştirme, sezgi, deneycilik, tersine çevirebilmeyi kullanmaktadırlar. Bu dört kategori profesyonel matematikçilerin düşünme süreçlerinde de seviye farkı ile mevcuttur.

- Matematiksel yaratıcılık ve matematiksel başarı, matematiğe karşı tutum, yaratıcılık yeteneğinin kişisel algısı, matematiksel kabiliyet ve yaratıcılık yeteneği öğretmen algısı ve cinsiyete bağlıdır.
- Matematiksel yaratıcılık ile sayısal yeteneğin dereceleri arasında düşük bir korelasyon olup, matematiksel yaratıcılık ile matematik başarısının dereceleri arasındaki korelasyon da düşüktür.
- Yüksek sesle düşünme, matematiksel sorgu ve matematiksel problem çözme performanslarının ortalama puanına göre gelişme göstermektedir. Ortalama değişim ve etkinin ölçüsü açısından öğrenciler yüksek sesle düşünme ve matematiksel sorguda sınırlı gelişme göstermişler, hem akıcılık hem de esneklik puanlarını geliştirmişlerdir. TTCT ile ölçülen iki ortalama puan arasında önemli farklılıklar bulunmuştur. Ancak tüm programın etkili olduğuna dair herhangi bir kanıt gözlemlenmemiştir.
- Matematikteki saplantıların üstesinden gelebilen öğrenciler, matematikteki açık uçlu problemlerde çok çeşitli ve orijinal fikirler üretebilmektedirler.

III. BÖLÜM

YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeli, araştırmada kullanılan veri toplama araçları, araştırmaya katılan katılımcıların profilleri, veri toplama araçları, araştırmanın uygulama basamakları ve verilerin analizinde kullanılan gömülü (grounded) teori hakkında bilgi verilmektedir.

3.1. Araştırmanın Modeli

Bu araştırmada kullanılan temel yöntem nitel araştırma yöntemidir. Nitel araştırmada uzun, çok detaylı ve açık uçlu veri toplanarak ‘derinlemesine bilgi’ edinilmeye çalışılır bu nedenle çalışılan insanlar ve durumlar nicel araştırmaya göre daha azdır. İnsanlar ve onların sosyal gerçeği, deneyimleri, eylemleri, davranışları, inançları, fikirleri, günlük yaşantıları ve bilgileri nitel araştırmanın odak noktasıdır. Nitel araştırmada araştırmacı önemli bir role sahiptir. Çünkü gözlemler ve derinlemesine görüşmeler araştırmacıya katılımcıları ile doğrudan ve yüz yüze iletişim şansı vermektedir (Patton, 1987).

Nitel araştırmada bazen her bir madde ve süreçteki her bir detay önemli olabilir, bu nedenle, nitel araştırma sonuç ve ürünlerden ziyade süreçle ilgilenmektedir. Birey, tüm becerileri, deneyimleri, geçmişi, bilgileri ve hatta önyargıları ile tüm veri toplama ve analiz aşamalarında bir kaynak konumundadır (Maykut ve Morehouse, 1994).

Gözlem (doğrudan gözlem ve katılımcı gözlem), görüşmeler (yapılandırılmamış ve esnek yapılandırılmış görüşmeler) ve yazılı dokümanlar (anketlerdeki açık uçlu maddeler, program kayıtları, aile albümleri, video kayıtları, portreler, fotoğraflar, mektuplar, hayat hikayeleri, kişisel günlükler, kişisel

dokümanlar ve sözlü biyografiler) nitel araştırmanın başlıca veri toplama araçlarıdır (Patton, 1987; Bryman, 1988; Bogdan and Biklen, 1992).

Bu araştırmada nitel araştırmanın başlıca veri toplama metotları olan gözlem, görüşme ve yazılı dokümanlardan yararlanılmıştır. Sınıf ortamında yapılan gözlemler öğretmen adaylarının problem çözme davranışlarına odaklı yapılandırılmamış gözlemlerdir. Öğretmen adaylarının çözümlerini ya da düşüncelerini yazdıkları günlükler yazılı dokümanları oluşturmaktadır. Öğretmen adayları ile yarı (esnek) yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

Araştırmanın yürütüldüğü seçmeli derste öğretmen adaylarından her hafta günlükler yoluyla veri toplanmıştır. Öğretmen adaylarının problem çözümlerini yazdıkları bu günlüklerin yanında bazı haftalar öğretmen adaylarının görüşlerini yazdıkları günlükler de toplanmıştır. Toplanan veriler incelenerek araştırmanın seyri verilere göre şekillendirilmiştir.

Bu araştırmada soyut bir kavram olan yaratıcılık üzerine çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının yalnızca problem çözümleri (ürün) değil problem çözme süreci incelenmiştir. Yalnızca ürüne, yani sonuca odaklanmak matematiksel yaratıcılığın anlaşılması için yetersiz olacaktır, bu nedenle hem sürece ve hem de sonuca odaklanılmış; öğretmen adaylarının problem çözme davranışları, problem çözümlerini açıklarken kullandıkları ifadeler ve problem çözme davranışı ile ilgili diyalogları incelenmiştir. Bu nedenle nitel araştırma bu araştırmada önemli bir yere sahiptir.

3.2. Araştırmaya Katılan Öğretmen Adayları

Araştırma Ankara’da bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi, OFMA Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı’nda lisans eğitimi alan öğretmen adaylarından, 2006–2007 öğretim yılı bahar döneminde 3. sınıflar için ‘Matematikte Seçme Konular’ adında açılmış olan seçmeli dersi seçen 22 öğretmen adayı ile

yürütülmüştür (Tablo 3.1.). Öğretmen adaylarının seçiminde kolay ulaşılabilir durum örnekleme (convenience sampling) yöntemi kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Tablo 3-1 Araştırmaya katılan öğretmen adaylarına ait bilgiler

Öğretmen adayı	Cinsiyet	Mezun olduğu lise	Fakülte genel not ortalaması
S1	Erkek	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,14
S2	Erkek	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,04
S3	Erkek	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,59
S4	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	3,82
S5	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	3,58
S6	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,80
S7	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	3,08
S8	Erkek	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,71
S9	Erkek	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,44
S10	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,0
S11	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	3,0
S12	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,41
S13	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,68
S14	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,60
S15	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,1
S16	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,70
S17	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,75
S18	Erkek	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,3
S19	Erkek	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,41
S20	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,66
S21	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,70
S22	Kız	Anadolu Öğretmen Lisesi	2,4

Tablo 3.1.'de de görüldüğü gibi, araştırmaya 15 kız ve 7 erkek öğretmen adayı katılmıştır. Hepsi de Anadolu Öğretmen Lisesi mezunu olan öğretmen adaylarının ortaöğretimde benzer eğitim almış oldukları ve ÖSS'den belli bir taban puanla üniversiteye yerleştirildiği dikkate alınırsa oldukça homojen bir grup olduğu söylenebilir.

Araştırmada bazı öğretmen adayları (S1, S2, S3, S4, S5, S6, S8 ve S9) ile görüşmeler yapılmıştır. Görüşme yapılacak öğretmen adaylarının belirlenmesinde Problem 1, 2, 3, 4 ve stratejilerle ilgili verilmiş olan 10 problemdeki çözümleri dikkate alınmıştır. Bu problemlerden herhangi biri veya daha fazlasında diğer öğretmen adaylarından farklı çözümler yapmış olan (en azından çözümün bir kısmında farklı düşünen) 3 kız, 3 erkek toplam 6 öğretmen adayı (S1-S6), görüşme yapılmak üzere seçilmiştir. Bu öğretmen adayları ile üçer oturum görüşme yapılmıştır. Dersin ilerleyen haftalarında kendisinden kolay bilgi alınabilen S8 ile iki oturum ve dikkat çekici çözümler yapan S9 ile bir oturum görüşme yapılmıştır. Böylece toplam 8 öğretmen adayı ile görüşmeler yapılmıştır.

Öğretmen adaylarının fakülte genel not ortalamaları görüşme yapılacak öğretmen adaylarını belirlemede kullanılmamış, notlar daha sonradan öğrenilmiştir. Not ortalaması en yüksek olan iki öğretmen adayının görüşme yapılan öğretmen adayları arasında yer aldığı dikkati çekmiştir.

3.3. Veri Toplama Araçları

3.1’de de bahsedildiği gibi, bu araştırmada nitel araştırma yaklaşımı kullanılmıştır. Konu hakkında ‘derinlemesine bilgi’ edinilmek amacıyla ders içi gözlemler, öğretmen adaylarının günlükleri ve görüşmeler olmak üzere üç farklı veri toplama metodu kullanılmıştır (Tablo 3.2). Veri çeşitlemesi sayesinde araştırmanın geçerliği ve güvenilirliği sağlanmaya çalışılmıştır.

Tablo 3.2 Veri toplama süreci

Tarih	Veri toplama metodu	Katılımcılar
2006–2007 öğretim yılı bahar dönemi	Gözlem (yapılandırılmamış)	22 öğretmen adayı
	Günlük	22 öğretmen adayı
	Yarı yapılandırılmış görüşme	8 öğretmen adayı

3.3.1. Gözlemler

Araştırma bir öğretim dönemini kapsamıştır. Araştırmanın yürütüldüğü seçmeli derse devam eden öğretmen adaylarının problem çözme davranışlarını gözlemlemek için onlar çözümlerini yaparken sınıfta dolaşarak zaman zaman çözümleri hakkında bilgi alınmıştır. Yapılan gözlem; öğretmen adaylarının problem çözme davranışlarına odaklı, yapılandırılmamış gözlemdir. Bu nedenle öğretmen adaylarının problem çözme davranışı ile ilgili diyalogları ve problem çözme sürecindeki davranışları dikkate alınmış, önemli görülen durumlar not edilmiştir.

3.3.2. Günlükler

Bu çalışmada, öğretmen adaylarının verilen problemleri çözdükleri çalışma kağıtları ve aralıklı olarak kendileri ile ilgili gelişmeleri ve düşüncelerini yazdıkları kağıtlar günlük adı ile anılacaktır.

Günlükler, öğretmen adaylarının problem çözme süreçlerinde neler düşündüklerini, bu süreci nasıl yaşadıklarını görebilmek ve çözümlerinde yaratıcı düşüncenin bileşenlerini araştırabilmek için toplanmıştır. Öğretmen adaylarından, düşünme süreçlerini yansıtabilmeleri için günlüklerine çözümlerini mümkün olduğunca detaylı yazmaları istenmiştir. Çözümle ilgili akıllarına gelen fikirlerin hepsini kısaca not etmeleri ve ayrıca çözümle uğraşırken hissettiklerini dahi yazmaları konusunda uyarılmıştır. Detaylı yazma konusunda sıkıntı çektikleri görüldüğü için silgi kullanmamaları, hatalı olan yerlerin üstünü çizerek çözümlerine devam etmeleri istenmiştir.

Problem çözme aktivitelerinin yapıldığı her dersin sonunda, o gün derse gelmiş olan öğretmen adaylarından çözümlerini yazdıkları günlükler toplanmıştır. Dolayısıyla araştırmada kullanılmış olan her problem için tüm öğretmen adaylarından günlük toplanmıştır. Günlükler derste yazıldığı için günlüklerin yazılma süresi, dersin süresi ile sınırlıdır.

3.3.3. Görüşmeler

Öğretmen adaylarının günlüklerinde yaptığı çözümleri ve problem çözme davranışlarını daha detaylı olarak incelemek amacıyla seçmeli derse devam eden 22 öğretmen adayından 8'i ile görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarından 6'sı (S1-S6) ile üçer, S8 ile iki ve S9 ile bir görüşme yapılmıştır.

Görüşmelerin başında, öğretmen adaylarına kimliklerinin gizli kalacağı ve görüşmede verecekleri bilginin dersi geçme notuna hiçbir şekilde etkisinin olmayacağı hatırlatılmış ve verecekleri cevaplarda samimi olmaları istenmiştir.

Birinci görüşme dersin üçüncü haftasında gerçekleştirilmiştir. Bu haftadaki ders saatleri görüşmelere ayrılmıştır. Görüşme soruları araştırmacı tarafından hazırlanmış ve sorularla ilgili olarak uzman görüşleri alınmıştır. Birinci görüşmede öğretmen adaylarına açık uçlu bir durum verilmiş ve üzerinde sesli düşünceleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının rahat düşünceleri için zaman tanınmış, isterlerse yalnız bırakılabileceği belirtilmiştir. Görüşmede öğretmen adaylarına verilen problemle ilgili soruların yanında genel problem çözme davranışları hakkında sorular da sorulmuştur.

İkinci görüşmede akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerileri ile ilgili sorular üçüncü görüşmede genel problem çözme davranışları ile ilgili sorular sorulmuştur. Sorular araştırmacı tarafından hazırlanmış ve uzman görüşleri alınmıştır. İkinci ve üçüncü görüşmelerde öğretmen adaylarının günlüklerinde yaptıkları dikkat çekici çözümlerle ilgili sorular da sorulmuştur.

Görüşülen bireyin konu hakkında daha detaylı cevaplar vermesi amacıyla görüşme soruları açık uçlu olarak hazırlanmıştır. Görüşme esnasında öğretmen adayına, görüşmenin seyrine göre gelişen ekstra sorular da yöneltilmiştir.

Görüşmelerde sorulmak amacıyla hazırlanan sorular için öğretmen adaylarının günlüklerinde yaptığı çözümler, Polya (1997) tarafından önerilen problem çözme aşamaları, motivasyonları, bazı kişilik özellikleri dikkate alınarak hazırlanmıştır. Hazırlanan sorular uzman görüşleriyle birlikte yeniden düzenlenmiştir (EK 1). Görüşmeler bu sorular çerçevesinde yapılırken görüşmenin seyrine göre öğretmen adaylarına yeni sorular yöneltilmiştir. Kısacası yarı yapılandırılmış görüşmeler yoluyla veri toplamanın bir ayağı gerçekleştirilmiştir.

Görüşmeler 30–40 dakika sürmüştür. Öğretmen adaylarının daha rahat yanıt vermeleri için sohbet tarzında gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler üniversite kütüphanesinde öğretim üyeleri için ayrılmış olan özel çalışma odalarında gerçekleştirilmiş ve öğretmen adaylarının izni alınarak ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir ve bu kayıtlar birebir yazıya (transkript) dökülmüştür.

3.3.4. Seçmeli derste kullanılan problemler

Derste kullanılmış olan problemler EK 2’de yer almaktadır. Kullanılacak olan problemlerin seçimi için öncelikle dikkate alınan durumlardan biri, öğretmen adaylarının var olan bilgileri ile problemleri çözebilmeleri idi. Bilgi eksikliği nedeniyle problemi çözememe ihtimalini ortadan kaldırmak amacıyla, çözüm için matematiksel düşünme ve ortaöğretim bilgilerinin yeterli olacağı problemler seçilmiştir.

Matematiksel yaratıcılıkla ilgili literatürün taranması aşamasında açık uçlu durumlarla ilgili çalışmalarla karşılaşılmıştır (Imai, 2000a,b; Jensen, 1973; Haylock, 1997) Bu çalışmalarda, öğrencilere verilen açık uçlu bir durum hakkında fikir üretmeleri istenmiş ve üretilen fikirler akıcılık, esneklik ve orijinallik açısından incelenmişti. Bu bileşenleri gözlemlemek için bu çalışmada da açık uçlu durumlara yer verilmiştir.

Araştırmada kullanılan problemlerden Problem 1, 3, 5, 6, 7, 8 ve 9 açık uçlu durum olarak verilen problemidir. Bu problemlerden Problem 1, 3, 7, 8, ve 9 araştırmacı tarafından, “A doğru ise B’nin doğru olduğunu gösteriniz?” tarzında yapılandırılmış problemlerden uyarlanmıştır. Bu problemlerde öğretmen adaylarına A durumu verilir B hakkında bir şey söylenmemiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının yalnızca verilen A durumundan hareketle fikir üretmelerini, sonucu bilmedikleri için sonucun ne olabileceği hakkında düşünmelerini ve ipucu bulmalarını gerektirmiş ve B’den geriye doğru çalışmalarını engellemiştir. Böylece öğretmen adaylarının sezgilerine de ihtiyaç duyacakları iyi yapılandırılmamış problem ortamı oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu problemlerde öğretmen adaylarının verilmeyen “B” durumunu kendilerinin keşfetmeleri beklenmiş ve bu süreçte üretilen fikirler akıcı ve esnek düşünme becerileri ve orijinallliği açısından incelenmiştir. Öğretmen adaylarından bazıları B hakkında hiçbir şey bilmedikleri için ne yapmaları gerektiğini bilemediklerini ve bundan dolayı böyle problemleri sevmediklerini dile getirmişlerdir. Açık uçlu durum olarak verilen diğer problemlerde (Problem 5 ve 6), ulaşılabilir belli bir sonuç olmadığından, bu problemlerde öğretmen adaylarının yalnızca verilen durumla ilgili fikir üretmeleri beklenmiştir. Bunlardan Problem 6, daha önce yapılmış olan bir çalışmadan alınmıştır (Imai, 2000a).

Problem 1, 3, 7, 8 ve 9’un seçiminde “B verilmediği takdirde A durumundan olabildiğince çok fikir üretilebilecek problemler” seçilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla, seçilecek problemlerin çözümleri incelenerek B durumu verilmeden üretilebilecek fikirler üzerinde düşünülmüştür. Belirlenen problemlerden hangilerinin kullanılacağı konusunda uzman görüşü alınmıştır.

Araştırmada kullanılmış olan diğer problemlerde öğretmen adaylarından birden fazla çözüm yapmaları istenmiştir. Bu nedenle problemlerin seçiminde birden fazla çözüm yoluna sahip olmasına dikkat edilmiştir. Dolayısıyla en az iki yoldan çözümünün olduğu bilinen problemler araştırılmıştır. Bunun için Ulusal Matematik Olimpiyatları birinci basamak soruları ve çeşitli problem kitapları (Erickson ve Flowers, 1999; Karakaş ve Aliyev 2003a, b; Posamentier ve Salkind, 1988;

Posamentier ve Krulik 1998) dikkatle incelenmiştir. Problem seçimi aşamasında, araştırmacı tarafından pek çok problem çözülmüştür. Problemlerin birden fazla çözüm yolu olup olmadığı araştırılmıştır. Bunun yanında kitaplarda birden fazla çözümü yapılmış problemler belirlenmiştir. Okunan makalelerde karşılaşılan problemlerden dikkate alınanlar olmuştur (Imai, 2000a; Hekimoglu, 2004). Araştırmada kullanılmak üzere belirlenmiş olan problemler, uzman görüşü alınarak son halini almıştır.

Araştırmada kullanılan problemlerden bazıları değerlendirilmeye alınmamıştır (Problem 7, 10, 11 ve 12). Araştırmada kullanılmış olan açık uçlu durumlar I. grup, birden fazla çözüm yapılması istenen problemler ise II. grup olarak ele alınmıştır (Tablo 3.3). Tabloda yer almayan Problem 2 ve 4 sırayla Problem 1 ve 3'ün orijinal halleri olup bu problemler için yapılan çözümler Problem 1 ve 3 için yapılan çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Tablo 3.3 Araştırmada kullanılan problem çeşitleri

Problem grupları	Problemlerin alt grupları	Problemler
I. Grup: Açık uçlu problemler	I-A: Yapılandırılmış problemlerden uyarlanmış problemler	Problem 1, 3, 8, 9
	I-B: Belli bir tek sonucu olmayan	Problem 5, 6
II. Grup: Birden fazla çözüm yapılması istenen problemler	II-A: Geometri problemleri	Problem 14, 15, 16
	II-B: Cebirsel problemler	Problem 13, 17, 18, 19, 20, 21

I. Grup problemler yani, açık uçlu durumlar kendi içinde iki gruba ayrılmıştır. I-A grubu problemler, daha önce belirtildiği gibi “A ise B’nin doğru olduğunu gösteriniz” şeklindeki ispat yapılması gereken problemlerden sonucun (B’nin) gizlenmesiyle oluşturulmuş açık uçlu durumlardır. Bu problemlerde öğretmen adaylarına yalnızca “A durumu” verilmiş ve bu durumla ilgili fikir üretmeleri istenmiştir. I-B grubu problemler ise belli bir sonucu olmayan açık uçlu durumlardır.

II. Grup problemler yani, birden fazla çözüm yolu kullanarak çözmeleri istenen problemler de iki grupta ele alınmıştır. II-A grubunda geometri problemleri, II-B grubunda ise cebirsel problemler yer almaktadır.

3.4. Uygulama

“Matematikte Seçme Konular” adlı seçmeli ders, haftada dört saat olmak üzere toplam on dört hafta sürmüştür. Dersin bir haftasında, vize haftası olması nedeniyle ders yapılamamış; 11 haftasında problem çözme çalışmaları, 2 haftasında da görüşmeler yapılmıştır (Tablo 3.4).

Tablo 3.4 Bu derste verilen problemlerin haftalara göre dağılımı

Haftalar	Problemler
1. Hafta	Problem 1 ve 2
2. Hafta	Problem 3 ve 4
3. Hafta	Görüşmeler yapılmıştır
4. Hafta	Problem 5
5. Hafta	Problem 6 ve 7 (bu problem değerlendirmeye alınmamıştır)
6. Hafta	Problem 8, 9 ve 10 (bu problem değerlendirmeye alınmamıştır)
7. Hafta	Problem 11 ve 12(bu problemler değerlendirmeye alınmamıştır)
8. Hafta	Vize haftası
9. Hafta	Problem 13 ve 14
10. Hafta	Problem 15, 16 ve 17
11. Hafta	Problem 18
12. Hafta	Problem 19 ve 20
13. Hafta	Problem 21
14. Hafta	Görüşmeler yapılmıştır

İlk hafta öğretmen adaylarına ders hakkında bilgi verilmiştir. Öğretmen adaylarından devamsızlık haklarını en az seviyede kullanmaları ve samimi olarak çaba göstermeleri istenmiştir. Ayrıca her hafta kendilerinden çözümlerini ve duygularını yazacakları günlükler toplanacağı, bu derste toplanan verilerin doktora

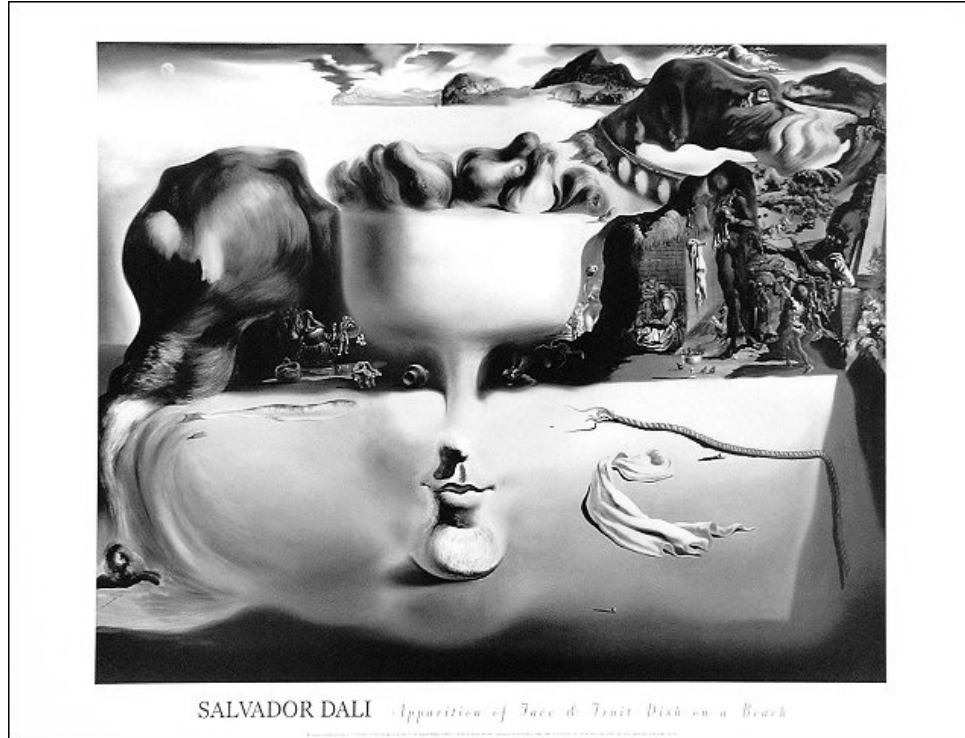
tezinde kullanılacağı ve kimliklerinin gizli kalacağı söylenmiştir. Bu hususlara dikkat etmeleri halinde not kaygısı çekmelerine gerek kalmayacağı belirtilmiştir. Dersle ilgili açıklamalarına ardından, görüşme yapılacak öğretmen adaylarının belirlenmesi amacıyla öğretmen adaylarına açık uçlu iki durum verilmiştir. Ertesi gün açık uçlu olarak verilen durumun (Problem 1'in) yapılandırılmış hali öğretmen adaylarına yöneltilmiştir. Ardından Problem 3'ü cevaplamaları istenmiştir.

İkinci hafta, öğretmen adaylarından Problem 4 üzerinde çalışmaları istenmiştir sonra da problem çözme stratejileri araştırmacı tarafından hazırlanan bir sunu ile tanıtılmıştır. Bu sunuda, öğretmen adaylarına her bir strateji ile ilgili bir ya da birkaç tane problem yöneltilmiştir. Problemleri çözerken kullandıkları yolların ortak noktaları sorulmuş ve ardından stratejinin adı verilmiştir. Verilen on adet problemi çözmeleri ve çözüme ulaşırken hangi stratejiyi kullandıklarını günlüklerine yazmaları istenmiştir. Öğretmen adayları bu problemlerle oldukça istekli bir şekilde uğraşmışlardır. Öyle ki dinlenmek için dışarı çıkabilecekleri belirtilmesine rağmen bir öğretmen adayı dışında hiç bir öğretmen adayı dinlenmek için ara vermemiştir.

Üçüncü hafta daha önceden belirlenmiş öğretmen adayları ile ilk görüşme yapılmıştır. Sonraki hafta yaratıcılık hakkında genel bilgi verilmiş, ıraksak düşünmenin bileşenlerinden esneklik ve akıcılık tanıtılmıştır. Ardından esnek düşünmenin önemini anlaşılmaması için Salvador Dali'nin üç eseri (Şekil 3.1. ve EK 24) gösterilerek gördükleri objeleri belirtmeleri istenmiştir. Özellikle bu resimler öğretmen adaylarının çok ilgisini çekmiştir. Gözler önünde olmasına rağmen göremedikleri objelerin varlığı zaman zaman bakış açılarını değiştirmenin gerektiğini fark ettirmiştir. Bu durumu problem çözümü esnasında da göz önünde bulundurmaları konusunda hatırlatma yapılmıştır.

Devam eden birkaç hafta açık uçlu durumlar verilerek fikir üretmeleri istenmiştir. Açık uçlu durumlar, çoğunlukla yapılandırılmış problemler üzerinde değişiklik yapılarak araştırmacı tarafından oluşturulmuştur. Burada amaç, öğretmen adaylarının problem çözmeye başlarken akıcı düşünmelerini sağlamak ve böylece birden fazla çözüm ya da orijinal çözüm bulabilmeleri için gerekli olan fikirleri

üretmelerini sağlamak ve bunun yanı sıra takıldıkları noktalarda çözüme ulaşabilecek yolu bulabilmelerine yardımcı olmaktır. Öte yandan açık uçlu ifadeler, çoğunlukla yapılandırılmış problemlerin koşullarından oluşturulduğu için sonucu kendilerinin keşfetmeleri beklenilmiştir. Bu tip problemler, bazı öğretmen adayları tarafından sıkıcı bulunmuştur.



Şekil 3.1. Salvador Dali'nin "Apparition of Face and Fruit Dish on a Beach" adlı eseri

Vize haftasının yaklaşması, öğretmen adaylarının motivasyonlarını olumsuz yönde etkilemiştir. Bunu kendilerinden alınan yazılı görüşlerde net olarak ifade etmişlerdir. Bunun üzerine onların motivasyonlarını artırıcı konuşmalar yapılmıştır. Bu konuşmanın devamında yapılandırılmış problemler verilmiştir. Konuşmanın ve belki de problemlerin yapılandırılmış olmasının etkisi ile istekli bir şekilde problemler ile uğraşmışlardır.

Bu ders için seçilen problemler; öğretmen adaylarının bilgi eksikliği nedeniyle problemi çözememe ihtimalini ortadan kaldırmak amacıyla, ortaöğretim bilgilerini kullanarak çözülebilecek problemler arasından seçilmiştir. Verilen

problemlere birden fazla çözüm üretmeleri için öğretmen adaylarından çaba göstermeleri istenmiştir. Çözümlerini üretirken hata yapmaktan korkmadan özgürce düşünmeleri konusunda öğretmen adayları cesaretlendirilmeye çalışılmıştır.

İkinci görüşmeler vize haftasından sonraki 2. haftada öğretmen adaylarının aldıkları derslerden arta kalan zamanlarda gerçekleştirilmiştir.

Ertesi hafta öğretmen adaylarına orijinallikle ilgili alıştırmalar yaptırılmıştır. Bunun için öğretmen adaylarından başkalarının çıkaramayacağını düşündükleri sesler çıkartmaları ve sınıf ortamında bir yerden bir yere başkalarından farklı şekilde gitmeleri istenmiştir. Öğretmen adayları başta istenilenleri yapmakta oldukça zorlanmışlar fakat daha sonra duruma alışmışlardır. Bu çalışmaların amacı; öğretmen adaylarının standartların dışına çıkmalarını ve farkında olmadan yapılan yani alışkanlık haline dönüşmüş davranışların farkına vararak bunların yerine alternatiflerini üretmelerini sağlamaktır. Farklı olmayı problem çözme davranışlarına da yansıtmaları istenmiştir.

Son haftaya kadar problem çözme çalışmalarına devam edilmiştir. Son hafta üçüncü görüşmeler yapılarak bu dönemki çalışma bu şekilde tamamlanmıştır. Görüşme soruları daha önceki görüşmelerde olduğu gibi öğretmen adaylarının günlükleri, görüşmelerde verdikleri cevaplar ve dersteki gözlemler dikkate alınarak araştırmacı tarafından hazırlanmış ve uzman görüşleri alınmıştır.

Dersin başından itibaren öğretmen adaylarının problem çözme çalışmaları için rahat bir ortam oluşturulmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının istedikleri zaman dışarı çıkıp dinlenebilecekleri, derste çay ya da kahve içebilecekleri ve istedikleri yerlere oturabilecekleri belirtilmiştir.

3.5. Verilerin Analizi

Bu araştırmada verilerin analizinde nitel araştırma desenlerinden gömülü (grounded) teorisinin kodlama tekniklerinden faydalanılmıştır. İlerleyen kısımlarda

gömülü teori hakkında bilgi verilecek ve araştırmada toplanan verilerin nasıl analiz edildiği açıklanacaktır.

3.5.1. Gömülü (Grounded) teori

Gömülü teori, Barney Glaser ve Anselm Strauss tarafından geliştirilmiştir. 1967’de yazdıkları “Gömülü Teorinin Keşfi” adlı kitaplarında, deneysel verilerden teorinin oluşturulması için bir dizi prosedür tasarlamışlardır (Thomas ve James, 2005). Gömülü teori, anlamlara ve yaşantılara odaklanması açısından olgu bilim geleneğine yakındır. Ancak, olgulara ilişkin kuramlar ortaya koyma olgu bilim araştırmalarında söz konusu değildir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Gömülü teori araştırma modeli, araştırma süreci boyunca sistematik olarak toplanan ve analiz edilen veriden teorinin üretilmesidir. Bu metotta; veri toplanması, analizi ve nihai teori birbirleriyle yakından ilgilidir. Bir araştırmacı, bir projeye zihnindeki önyargılı teori ile başlamaz. Aksine araştırmacı, bir çalışma alanı ile başlar ve teorinin veriden ortaya çıkmasına izin verir. Veriden üretilen teorinin, deneyimlere dayanan bir dizi kavramı bir araya getirmekle üretilen teoriden gerçekliğe yakın olması daha muhtemeldir. Bu metodolojide, veri toplama ve analiz işlemleri değişen diziler halinde arka arkaya devam eder. Araştırmacı mikro analiz veya benzer yöntemlerle elde ettiği verileri işleyerek kodlamalar yapar. Bu kavramsallaştırma ve kavramlar arasındaki ilişkilerin belirlenmesi süreci yoğun bir bilgi akışı sağlayacaktır. Araştırmacı, bu yoğun bilgi akışını kontrol etmek ve araştırmasını sistematik bir şekilde yürütebilmek için analizlerini, düşüncelerini, yorumlarını, sorularını ve ilerideki veri toplamalarına yönelik talimatlarını bir takım notlarda (memos) tutar. Bu notlar daha çok analizi yapan kişinin teorik örnekleme ve meselelerdeki düşüncelerini ve fikirlerini içeren, bilgilendirici ve özetleyici olan teorik notlar olabileceği gibi, yönergeler ve hatırlatıcılardan oluşan işlemsel notlar olabilir (Strauss ve Corbin, 1998).

Teori oluşturmadaki ilk adım kavramsallaştırmadır. Bir kavram, etiketlenmiş bir fenomendir. Bu, bir araştırmacının veride önemli olarak belirlediği, bir olayın, nesnenin veya eylemin/etkileşimin soyut bir temsilidir. Fenomeni adlandırmanın altında yatan amaç; araştırmacılara benzer durumları, olayları ve nesneleri, ortak bir başlık veya sınıflandırma altında gruptama imkanı vermektir. Durumlar ve olaylar ayrıık elemanlar olsa da; onların ortak karakteristikleri paylaştığı veya anlamca ilişkili oldukları gerçeği, onların gruplandırılmasına imkan sağlar (Strauss ve Corbin, 1998).

Bir projenin başında, başlangıç kategorilerini üretmek ve kavramlar arasındaki ilişkileri keşfetmek için detaylı bir analiz gereklidir. Mikro analiz olarak adlandırılan bu incelemede veri satır satır detaylı bir şekilde analiz edilir. Bu süreç bazen bir kelime, cümle ya da bir paragrafa uygulanabilir. Mikro analiz, açık ve eksensel kodlamayı içerir ve soru sorma karşılaştırma yapma gibi birçok analitik teknikten yararlanır. Mikro analiz, analizin planlanmış, statik (durağan) ya da değişmez (katı, sert) bir süreç olmadığını göstermektedir. Daha doğrusu mikro analiz, analizcilerin kodlama tipleri, analitik araçlar ile prosedürlerin kullanımı arasında serbestçe ileri geri gitmelerini sağlayan yaratıcı bir süreçtir (Strauss ve Corbin, 1998).

Analitik araçlar: Strauss ve Corbin (1998), kodlama sürecini kolaylaştırmak için kullanılabilecek bazı araç ve teknikler önermişlerdir. Analitik araçlar olarak adlandırılan bu araç ve tekniklerin, metodun asıl prosedürleri olduğunu ve analiz sırasında tutarlı ve sistematik bir şekilde kullanılmasının gerekliliğini ifade ederler. Analitik araçların amacı, hisleri kuvvetlendirilmek, aracı kullananlara belli düzeye kadar “önyargılarını” fark ettirmek ve yine onların “analitik engellerin” üstesinden gelmelerine yardım etmektir. Analitik araçlar ilgili bir kategorinin özellik ve boyutlarına karşı olan duyarlılık için olduğça kullanışlıdır.

Analitik araçlardan biri soru sormanın kullanımıdır. Soru sorma tipleri “Kim?”, “Ne zaman?”, “Nerede?”, “Ne?”, “Nasıl?”, “Ne kadar?”, “Hangi sonuçlarla?” gibi soruları iğeremektedir. Bu soruların önemi, eksensel ve seçici kodlamada daha da artacaktır. Bu sorular özellikle analistler analizlerinde

tıkandıklarında ve fenomeni açıklamayı standart yollarla yapmanın dışında hiç bir şey görülemeyecek gibi geldiğinde kullanışlıdır (Strauss ve Corbin, 1998).

Kelime, deyim veya cümlenin analizi analitik araçlardan bir diğeridir. Kelimenin, deyim veya cümlenin analizini yapmak; dokümanın veya hiç olmazsa birkaç sayfasının gözden geçirilmesinden ve sonrasında analiste önemli ve analitik olarak ilginç gelen, yani analistin dikkatini çeken kelime veya kelime gruplarına geri dönmesinden oluşur. Daha sonra analist kelimenin aklına gelen bütün olası anlamlarını listelemeye başlar. Aklındaki bu listeyle analist dokümana geri dönebilir ve anlamı çağrıştıracak olayları veya kelimeleri arayabilir (Strauss ve Corbin, 1998).

Bir başka analitik araç da karşılaştırmalar yapmaktır. Kategorilerin belirlenmesinde ve bu kategorilerin geliştirilmesinde karşılaştırma yapmak oldukça önemlidir. İki tip karşılaştırma vardır. Bunlardan ilki olay-olay veya nesne-nesne karşılaştırmasıdır. Bu karşılaştırmada olayların veya nesnelerin özellikleri arasında benzerliklerine ve farklılıklarına bakarak sınıflandırma yapılmaktadır. İkinci tip karşılaştırma, teorik karşılaştırmalar yapmaktır. İkinci tip karşılaştırma, olası özellikler ve boyutları (analist için apaçık olmadığında) benzer ya da farklı kavramlarla kategorileri karşılaştırmayı (soyut kavramları) içerir. (Özellikler ve boyutlar belki de veride vardır, fakat belki analist tıkanmıştır ve bu özellik ve boyutları tanımlayamıyordur.) Teorik karşılaştırma da iki şekilde yapılabilir. Bunlardan biri iki durumlu teknik, diğeri iki ya da daha fazla kavramın sistematik karşılaştırılmasıdır. İki durumlu teknik, olay, nesne ve hareket/etkileşim için farklı bir bakış açısı elde etmek amacıyla bir kavramın “tersyüz” etmeyi veya “baş aşağı” etmeyi göstermektedir. Diğer bir deyişle, kayda değer özellikleri ortaya çıkarmak için karşıt durumlara ya da uçdeğerlere bakılır. İki ya da daha fazla kavramın sistematik karşılaştırılması, verideki bir olayı, yine bu olayın hatırlattığı geçmişteki bir deneyimle ya da literatürle karşılaştırmaktır. Bu karşılaştırmaların amacı; araştırmacıyı, verideki gözden kaçırabileceği özellik ve boyutlara karşı daha duyarlı hale getirmektir. Çünkü araştırmacı ne aradığını bilmemektedir. Karşılaştırmalı veya “diğer” kategori analisti özellikler ve boyutların terimleri içinde düşünmesi için teşvik eder. Teorik karşılaştırmalar yapılırken kişiler veya olaylar değil kavramlar

karşılaştırılır. Kavramı kaç kişinin gösterdiğiyle değil aksine bu kavramın hangi sıklıkla meydana çıkmakta olduğu ile veya değişen şartlar altında bu kavramın (yani özelliklerinin) neye benzediği ile ilgilenilir (Strauss ve Corbin, 1998).

Gömülü teori araştırma modelinde açık, eksensel ve seçici kodlama olmak üzere üç kodlama türü vardır.

Açık Kodlama: Verideki kavramların belirlendiği ve onların özellik ve boyutlarının keşfedildiği analitik süreçtir. Açık kodlama boyunca veriler farklı parçalara ayrılır ve yakından incelenerek benzerlikler ve farklılıklar açısından karşılaştırılır. Doğada kavramsal olarak benzer olan veya anlamca ilişkili bulunan durumlar, olaylar, nesneler ve eylemler/etkileşimler; “kategoriler” olarak adlandırılan daha soyut kavramlar altında gruplandırılır. Veriyi hem farklılık hem de benzerlikler açısından yakından incelemek, kategoriler arasında iyi ayırım yapmaya ve ayırt etmeye imkan sağlar. Eksensel ve seçici kodlama gibi daha sonraki analitik adımlarda veriler, çeşitli kategoriler ve bunların alt kategorileri arasındaki ilişkilerin doğası hakkındaki ifadelerden yeniden düzenlenir. Kavramlar yığılmaya başladığında, analistin onları daha soyut ve açıklayıcı terimler yani kategoriler altında grupta ya da kategorileştirme sürecine başlaması gerekir. Kategori tanımlandıktan sonra onu hatırlamak, hakkında düşünmek ve (en önemlisi) onu, özelliklerine ve boyutlarına göre geliştirmek ve ayrıca alt kategorilerine ayırmak (ne zaman, nerede, neden, nasıl vb.nin açıklanması yoluyla) daha kolay hale getirir (Strauss ve Corbin, 1998).

Eksensel Kodlama: Kategorileri, alt kategoriler ile ilişkilendirme sürecine “eksensel” denir. Çünkü kodlama bir kategorinin ekseni çevresinde gerçekleşir, kategoriler özellik ve boyutları seviyesinde birbirleri ile ilişkilendirilir. Eksensel kodlamanın amacı, açık kodlamada bölünen verilerin tekrar bir araya toplanması sürecine başlamaktır. Eksensel kodlamada, fenomenler hakkında daha kesin ve tam açıklamalar oluşturabilmek için kategoriler alt kategorileri ile ilişkilendirilir. Eksensel kodlama, açık kodlamadan amaç yönünden farklılaşsa da, bunlar birbiri ardına gelen analitik aşamalar olmak zorunda değildir; bu fark, etiketlemenin açık

kodlamadan ayrı oluşu kadar da değildir. Eksensel kodlama, analistin bazı kategorilere sahip olmasını gerekli kılar ancak çoğu kez kategorilerin birbirleri ile nasıl ilişkili olduğu hissi-fikri, açık kodlama boyunca ortaya çıkar. Eksensel ve açık kodlama birbirinin ardışığı olan iki eylem değildir. Biri kavramlar arasındaki ilişkiyi kurarken diğeri özellik ve boyutları kodlamayı kesmez, eşzamanlı olarak ilerlerler. Boyutlar ve ilişkilerin her ikisi de teoriye büyük bir açıklayıcılık kazandırır ve analiz boyunca ortaya çıkmaya devam ederler (Strauss ve Corbin, 1998).

Kodlama boyunca yeni bir bilgi, veride görülen yeni özellikler, yeni boyutlar, yeni koşullar, yeni eylem/etkileşimler veya sonuçlar ortaya çıkmadığı sürece bir kategori doymuş kabul edilir. Ancak, bu ifade bir derece meselesidir. Gerçekte ise, kişi yeterince uzun ve dikkatli bakarsa, her zaman yeni özellikler ve boyutlar bulabilir. “Yeni”nin ortaya çıkması için bir olasılık her zaman vardır. Doygunluk daha ziyade, araştırmada ek veri toplamanın üretkenliğe bir katkı sağlamadığı/zarar veren noktaya ulaşmaktır. Bulunan “yeni”; açıklamaya artık bir katkı sağlamamaktadır veya araştırmacının parası ya da zamanı ya da her ikisi de biter (Strauss ve Corbin, 1998).

Seçici kodlama: Teoriyi bütünleştirme ve geliştirme sürecidir. Seçici kodlama, analizdeki son aşamayı temsil eder, bu da kavramların bir ana kategori çevresinde bütünleşmesi ve daha fazla gelişim ve düzeltme ihtiyacı içinde olan kategoriler doldurulur. Bu aşamada, kısa not (memos) ve şemalar geliştirilen teori düşüncesinin derinliğini ve karmaşıklığını yansıtır. Bütünleştirmedeki ilk adım, ana kategoriye karar vermektir. Ana kategori, araştırmanın ana temasını temsil eder. Ana kategori araştırmadan çıkarılsa da; aslında bir soyutlamadır. Ana kategori, “araştırmanın ne hakkında olduğunu açıklıyor gibi görünen birkaç kelime” ile özetlenen bütün analiz ürünlerini içerir (Strauss ve Corbin, 1998).

3.5.2. Analiz nasıl yapıldı?

Verilerin analizinde gömülü teorinin kodlama tekniklerinden yararlanılmıştır. Açık kodlama sürecinde, görüşme metinleri (transkriptler) cümle cümle analiz edilerek kavramsal isimler verilmiştir. Görüşme metinleri farklı zamanlarda tekrar gözden geçirilerek kodlama işlemi yapılmıştır. Görüşme metinlerinin yanında günlükler ve araştırma sürecinde tutulan notlar da kodlama sürecine dahil edilmiştir. Günlüklerin analizinde çözümler benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflandırılmaya ve tercih edilen çözüm yolları, çözümlerde yapılan hatalar, belirlenmeye çalışılmıştır. Bu süreçte farklı uzmanların görüşlerine başvurulmuştur.

Açık kodlama sürecinde kavramlar ve kategorilerin geliştirilmesinde öğretmen adaylarının problem çözme davranışları karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Elde edilen kategoriler eksensel kodlama sürecinde birbirleriyle ilişkilendirilmeye çalışılmıştır.

Analizlerde öğretmen adaylarının problem çözme davranışları birbiriyle karşılaştırılırken özellikle görüşme yapılan her bir öğretmen adayının yapmış olduğu tüm çözümler de birbiriyle karşılaştırılarak genel problem çözme davranışları da belirlenmeye çalışılmıştır.

Günlüklerin analizinde her bir çözümde kullanılan stratejiler, yapılan hatalar, çözümü doğru yapanlar, hatalı çözüm yapanlar belirlenmiştir. Her bir problem için yapılan çözümlerde tekrar tekrar günlüklere geri dönüp inceleme yapmak ve genel durumu görmek oldukça zor olmuştur. Bu nedenle, bu şekilde yapılan incelemede tüm çözümleri birbirleriyle karşılaştırmayı kolaylaştıracağı ve herhangi bir öğretmen adayının çözümünün genel durum içerisinde nerede olduğunu göstereceği düşüncesiyle, herhangi bir problem için yapılan tüm çözümler özelliklerine göre gruplandırılarak sonuçlar şemalaştırılmıştır (EK 3–14). Şemalarda yer alan her kutunun içine, kutuda belirtilen özelliğe sahip çözümü yapan öğretmen adaylarının numarası belirtilmiştir. Bu şekilde, öğretmen adaylarının çözümlerinin genel duruma

göre yerini görmek mümkün olmuştur. Çözümlerin şeması oluşturulurken ilk dallanmalar problemde ulaşılmış sonuçlara göre, ardından gelen dallanmalar çözümde kullanılan stratejilere göre yapılmıştır. Bu şekilde, sonuca ulaşabilen ve ulaşamayan öğretmen adaylarının kullandıkları stratejileri karşılaştırma ya da aynı stratejileri kullanan öğretmen adaylarının sonuca ulaşma ve ulaşmama durumlarını görme imkanı doğmuştur. Şemalar oluşturulurken yapılan en iyi çözümler sol, en kötü çözümler ise sağ tarafa gelecek şekilde (nitelik açısından sıralayarak) yerleştirilmeye çalışılmıştır. Ancak her çözümü iyi ya da kötü olması açısından bir sıraya koymanın mümkün olamayacağı da unutulmamalıdır.

Problemlerin çoğu için hazırlanmış şemalar farklı zamanlarda gözden geçirilerek gerekli düzeltmeler yapılmış ve son şekli verilmiştir. Oluşturulan şemalar, yapılan çözümlerle ilgili olarak ortaya çıkan durumu basitleştirse de analizlerde genel durumu görmek açısından işleri biraz olsun kolaylaştırmıştır.

Diğer yandan akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerileri açısından yapılacak incelemede problem grupları dikkate alınmıştır. İlerleyen kısımlarda bu beceriler açısından yapılan analiz açıklanacaktır.

I. grup problemlerde öğretmen adaylarının ürettikleri doğru fikirler, maddeler halinde birer tabloya yerleştirilmiştir. Öğretmen adayları tarafından üretilen fikirler çoğunlukla birbirini takip eder nitelikte olduğundan, maddeler haline getirme işleminde herhangi bir öğretmen adayının fikir sayısında kayıp olmamasına dikkat edilerek tablolar oluşturulmuştur. Bunun için günlükler birbirleriyle karşılaştırılarak fikirler sayılmıştır. Örneğin, özel değerleri incelemesi yapılmışsa incelenen her değer bir fikir olarak sayılmıştır. Çünkü incelenen değer sayısının farklı olması durumunda, daha fazla değer inceleyen öğretmen adaylarının fikir sayılarında kayıp olacağı düşünülmüştür. Öte yandan, I-A grubu problemlerde işlemsel inceleme yapan öğretmen adaylarının işlemlerindeki her aşama bir fikir olarak sayılmıştır. Her bir problem için ayrı ayrı olmak üzere belirlenen fikirler birer tabloya yerleştirilmiş ve tabloda her bir fikri üreten öğretmen adayının numarası belirtilmiştir. Tablonun satırlarına fikirler, sütunlarına ise öğretmen adaylarının numaraları yerleştirilmiştir.

ve her fikrin bulunduğu satır ile o fikri üreten öğretmen adayının numarasının bulunduğu sütunun kesişimine öğretmen adayının numarası yazılmıştır. Böylece hangi fikirlerin hangi öğretmen adayları tarafından üretilmiş olduğu tabloda gösterilmiştir. Daha sonra tabloda yer alan fikirler benzerliklerine göre bir araya getirilerek kategorilere ayrılmıştır. Kategorilere ayırma işlemi de oldukça zor bir süreç olmuştur. Çünkü üretilmiş olan tüm fikirler kategorilere ayrıldığında ve öğretmen adayının fikirleri kendi içinde değerlendirildiğinde iki sonucun da tutarlı olmasının gerekli olduğu düşünülmüştür. Bu nedenle oluşturulan kategoriler farklı zamanlarda tekrar gözden geçirilerek son şekli verilmiştir. Kategorilerin son şeklini almasının ardından tabloların en son satırlarına öğretmen adaylarının ürettikleri toplam fikir sayısı (akıcılık), bu fikirlerin yer aldığı kategori sayısı (esneklik) ve öğretmen adayının tek başına üretmiş olduğu fikirlerin sayısı (orijinallik) da eklenmiştir.

I-A grubu problemler için oluşturulan tablolardaki toplam fikir sayısının yer aldığı satırlar başka bir tabloya yerleştirilmiştir. Böylece öğretmen adaylarının bu problemlerdeki fikir sayıları açısından performansları yani *akıcı düşünme becerileri* bir arada görülebilmektedir. Bu tabloda karşılaştırmaların daha iyi yapılabilmesi için fikir sayısı açısından ilk sıralarda olan ve son sıralarda olan öğretmen adaylarının fikir sayıları renklendirilmiş, her bir sıralama için farklı bir renk kullanılmıştır. Bu şekilde I-A grubundaki tüm problemlerde genel olarak en akıcı ve en az akıcı düşünen öğretmen adaylarının belirlenmesi sağlanmıştır.

I-A grubu problemlerde *esnek düşünme becerisini* incelemek amacıyla her bir problem için oluşturulmuş olan tablolardan hem fikir sayılarının hem de kategori sayılarının bulunduğu satırlar başka bir tabloya yerleştirilmiştir. Böylece bu problemlerdeki esnek düşünme becerisi ile akıcı düşünme becerisini de karşılaştırma imkanı olmuştur. Oluşturulan tablo yukarıda bahsedildiği şekilde renklendirilerek incelenmiştir.

I-A grubu problemlerde *orijinal fikir üretme becerisi* açısından inceleme yapmak için her bir problem üretilen fikirlerin toplam sayılarının ve orijinal fikir

sayılarının bulunduğu satırlar başka bir tabloya aktarılmış ve tüm problemlerdeki genel durumu inceleme imkanı bulunmuştur.

I-A grubunda yer alan problemler için tablolarla birlikte şemalar oluşturulmuş, I-B grubundaki problemlerde ise yalnızca tablo yapılmıştır. I-B problem grubunda ulaşılması gereken belli bir sonuç olmadığından bu problemler için şema yapılmamıştır.

I-A problem grubunda nicel değerler içeren tablolar ile çözümlerin niteliği hakkında fikir veren şemalar birlikte incelenmiştir. Tablolardaki fikir ve kategori sayısı açısından dikkati çeken durumlar tek tek irdelenmiş, buradaki sonuçlar şemalarla karşılaştırılmıştır. Bu şekilde tespit edilen durumların daha detaylı incelemesinin yapılması için günlüklere ve eğer görüşme yapılmış ise görüşme kayıtlarına geri dönmüştür.

II. grup problemlerde, I. grupta yer alan problemler için yapılan incelemeden biraz daha farklı inceleme yapılmıştır. I. grupta tek tek fikirler, diğerlerinde ise fikirlerin bütünü olarak yapılan çözümler sayılmıştır. Ayrıca analizin kolaylığı açısından bu problemlerde her öğretmen adayının çözümleri kendi içinde kategorilere ayrılmıştır. Bu problemlerdeki sonuçlar da tablolastırılmıştır. Öğretmen adaylarının her bir problemdeki başarılı ya da başarısız çözüm denemelerinin sayısı, doğru bir şekilde tamamladığı çözümlerin sayısı ve yaptığı çözümlerin ait olduğu kategorilerin sayısı tabloya yerleştirilmiştir. Diğer problemlerde olduğu gibi bu problemlerde de çözüm sayıları açısından ilk sıralarda olan ve sonuncu olan hücreler renklendirilerek genel duruma yönelik sonuçlar çıkarılmaya çalışılmıştır. Tabloda dikkati çeken durumlar çözüm şemaları da dikkate alınarak detaylı olarak incelenmiştir.

Tablolardaki ve şemalardaki tüm durumları birbiriyle karşılaştırmak hem zaman, hem enerji açısından ve hem de her öğretmen adayı ile ilgili derinlemesine bilginin mevcut olmamasından dolayı imkansız görülmekteydi. Bu nedenle daha çok

görüşme yapılmış olan öğretmen adaylarının durumlarına odaklanılmıştır ancak diğer öğretmen adayları ile ilgili dikkat çeken durumlar da incelenmiştir.

IV. BÖLÜM

BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde verilerin analizleri sonucunda elde edilen bulgulara ve bunlara ilişkin yorumlara yer verilmektedir. Veriler öğretmen adaylarının problem çözme davranışları, çözüm bulma süreci içinde yaşanan güçlüklerin nedenleri, yaratıcı düşünme becerileri (akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerisi) başlıkları altında incelenecektir.

4.1. Öğretmen Adaylarının Problem Çözme Davranışları

Araştırmanın birinci alt problemi “Matematiksel problemleri çözme sürecinde öğretmen adaylarının sergiledikleri problem çözme davranışları nelerdir?” olarak belirlenmiştir. Günlük, görüşme ve gözlemler yoluyla toplanan verilerin analizi sonucunda öğretmen adaylarının çeşitli problem çözme davranışları sergiledikleri tespit edilmiştir. Bu davranışlar genel olarak; Çözüm Yolu Tercihi, Sezgisel Düşünme, Mantıksal Düşünme ve Sonuca Odaklı Problem Çözme olarak sınıflandırılabilir. İlerleyen kısımlarda bu davranışlar incelenecektir.

4.1.1. Çözüm Yolu Tercihi

Araştırmada kullanılan problemler için öğretmen adaylarının çözüm yolu tercihlerinde çeşitli stratejiler kullandıkları tespit edilmiştir. Bu stratejiler;

- a. Özel değerleri inceleme,
- b. Özel durum inceleme,
- c. Örnek araştırma,
- d. Basit fikirler üretme,

- e. Algoritmik çözüm yapma,
- g. Bağıntı araştırma
- h. Örüntü bulma

olarak sınıflandırılabilir. Bu stratejilerin kullanılış şekillerinin, problemde problem ve hatta kişiden kişiye farklılık gösterdiği tespit edilmiştir. Bu bölümde öğretmen adaylarının çözüm yolu tercihlerinde kullanmış oldukları stratejiler örneklerle açıklanacaktır.

Özel değerleri inceleme stratejisi: Gerek açık uçlu durum olarak verilen problemlerde gerekse diğer problemlerde bazı öğretmen adaylarının ipucu bulmak için özel değerleri inceleme stratejisini kullandıkları gözlemlenmiştir. Öğretmen adayları açık uçlu durumlarda ipuçları belirlemek için -1, 0, 1 gibi sayıları veya problem ortamının durumuna göre çeşitli sayıların verilen durumdaki işlevlerini belirlemeye çalışmışlardır. Ayrıca Problem 1 ve 2'deki eşitliklerdeki x, y ve z değişkenleri yerine, Problem 3 ve 4'teki n yerine ya da Problem 9'da ve ilk görüşmede verilen fonksiyonlardaki değişkenler yerine çeşitli sayıların yazılması; Problem 8'de çeşitli sayıların M kümesinin elemanının olup olmadığının incelenmesi *özel değerleri inceleme stratejisi* olarak isimlendirilmiştir. Bu stratejiyi II-B grubu problemlerde de kullanan öğretmen adayları olmuştur. II-B grubu problemlerden Problem 18, 19 ve 21'de bu stratejinin kullanıldığı görülmüştür.

Bu stratejinin kullanımına bir örnek olarak yapılan ilk görüşmede öğretmen adaylarına verilmiş olan açık uçlu durumdaki incelemeler verilebilir. Bu açık uçlu durumda öğretmen adaylarına her x için $f(x.y)=f(x)+f(y)$ eşitliğini sağlayan $f:A \rightarrow B$ fonksiyonu hakkında neler söyleyebilecekleri sorulmuştur. Bu problemde S2, bazı özel değerleri incelemek suretiyle fonksiyon hakkında ipucu bulmaya çalışmıştır. Şekil 4.1'de, S2'nin bu stratejiyi nasıl kullandığı görülmektedir.

$f: A \rightarrow B$, $\forall x, y \in A$ için $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
 estliğini sağlıyorsa f fonksiyonu için neler söyleyebiliriz
 $f(0) = 1$

$$\begin{aligned} f(5) &= f(3) \cdot f(2) \\ &= f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) = f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) \\ &= f(5) \cdot f(0) \\ &= f \end{aligned}$$

$$f(1) = f(5-4) = f(5) \cdot f(-4) = f(5) \cdot f(-4)$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) \cdot f(1) \\ f(x+2) &= f(x+1) \cdot f(1) = f(x) \cdot f(1) \cdot f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) \\ &= a^3 \end{aligned}$$

Şekil 4.1. S2'nin görüşmedeki problem için yazdığı günlükten alıntı

Özel değer incelemesi stratejisinin çoğunlukla açık uçlu durum olarak verilmiş olan I-A grubu problemlerde kullanıldığı görülmüştür. Özellikle I-A grubu problemlerinden Problem 1 ve 3'te çoğu öğretmen adayı bu stratejiden yararlanırken Problem 8 ve 9'da bu stratejiden yararlanan az sayıda öğretmen adayı olmuştur (EK 3, 4, 7, 9, 10). Problem 1a'da 11, Problem 1b'de 14, Problem 3'te 15, öğretmen adayı özel değer incelemesi yapmışken Problem 8'de 4, Problem 9'da ise 5 öğretmen adayı özel değer incelemesi yapmıştır. Problem 1 ve 3'te doğal sayı değişkeni içeren açık uçlu ifadeler, Problem 8'de bir küme ve Problem 9'da ise bir fonksiyon ile ilgili açık uçlu ifadeler yer almaktadır. Problem 1 ve 3 sayılarla direkt olarak ilişkili iken Problem 8 ve 9 diğer problemlere göre sayılarla daha dolaylı olarak ilişkilidir. Bu problemlerde daha az kişinin özel değer incelemesi yapmasının problemlerin niteliklerinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Problem 1 ve 3'ün orijinal hali olan Problem 2 ve 4'te de özel değer incelemesi yapan öğretmen adaylarının olduğu görülmüştür.

Bazı öğretmen adaylarının II-B grubu problemlerinde de özel değer inceleme stratejisinden yararlandığı görülmüştür. Ancak bu problemlerde, bu stratejiden yararlanan öğretmen adayı sayısı azdır. II-B grubu problemlerinden Problem 18, 19 ve 21’de sırayla 4, 3, 2 sayıda öğretmen adayının özel değer incelemesi yaptığı görülmüştür (EK 12, 14, 16).

Özel durumları inceleme stratejisi: Öğretmen adaylarından bazılarının Problem 1’de $x=y$, $x=y+1$, $x=z$ gibi durumlarda eşitliğin sağlanıp sağlanmadığını inceledikleri, bazılarının da Problem 9’da fonksiyonun doğrusal ya da homomorfizma olduğunu kabul ederek inceleme yaptıkları görülmüştür. Bu tür incelemeler *özel durumları inceleme stratejisi* olarak ele alınmıştır.

Şekil 4.2’de S22’nin Problem 1a’da özel durumları nasıl incelediği görülmektedir. Problem 1a’da öğretmen adaylarına $x!+y!=z!$ eşitliği hakkında neler düşündükleri sorulmuştur. S22’nin günlüğündeki bu kesitte $y=x-1$ ve $y=x-2$ durumlarını incelemeye çalıştığı, fakat her iki durumda da özel değer incelemesi yaparak fikir ürettiği dikkati çekmiştir.

$y = x - 1$ ise,
 $x! + (x-1)! = z!$
 $(x-1)! \cdot (x+1) = z!$
 $x=1$ için $0! \cdot 2 = 2!$
 $x=2$ için $1! \cdot 3 = 3 \rightarrow z! = 3$ o.s. z yok
 $\%$
 $y = x - 2$ ise,
 $x! + (x-2)! = z!$
 $(x-2)! \cdot (x(x-1)+1) = z! \Rightarrow (x-2)! (x^2 - x + 1) = z!$
 böyle bir x olmadığından denemelerin
 $x=2$ saflar. $z! = 0$ olamaz çünkü
 $x=3$ $1 \cdot 7 = z!$ $z! = 7$ "
 $x=4$ $2 \cdot 13 = z!$ $z! = 26$ "

Şekil 4.2. S22’nin Problem 1a için yazdığı günlükten alıntı

Özel durum inceleme stratejisinden I-A grubu problemlerinden Problem 1a'da 3, Problem 1b'de 9, Problem 9'da 11 öğretmen adayı yaralanmıştır (EK 3, 4, 10). II-B grubu problemlerinden Problem 18'de 10, Problem 19'da 1, Problem 21'de 5 öğretmen adayının özel değer inceleme stratejiden yararlandığı görülmüştür (EK 12, 14, 16).

Örnek araştırma stratejisi: *Örnek araştırma stratejisi* verilen duruma uygun örnek bulma çabasını ifade etmek için kullanılmıştır. Bu çaba daha çok deneme yanılma tarzında yapılan incelemeleri içermektedir. Örneğin; Problem 8'de rasyonel sayılar kümesinin çeşitli altkümelerini göz önünde bulundurarak bu kümelerin verilen şartları sağlayıp sağlamadığını incelemek, Problem 9'da çeşitli özel fonksiyonların verilen şartları sağlayıp sağlamadığını incelemek gibi durumları ifade etmek için kullanılan bir kavramdır.

Problem 8'de 8 öğretmen adayı, Problem 9'da 10 öğretmen adayı örnek bulma stratejisinden yararlanmıştır (EK 9, 10).

Bu kavramın ifade ettiği örneklerden biri, S14'ün Problem 9 için yazdığı günlükte net bir şekilde görülmektedir (Şekil 4.3). Problem 9, “*Her x, y reel sayıları için $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonu hakkında neler söyleyebilirsiniz?*” (Karakaş ve Aliyev, 2003a, problem 6.15'ten uyarlama) şeklindedir. S14, bazı özel fonksiyonları Problem 9'daki eşitlikte yerine yazarak eşitliği sağlayıp sağlamadığını kontrol etmiştir. İncelediği fonksiyonlar arasında üstel a^x ve doğrusal $ax+b$, ax gibi biraz daha genel ifade edilmiş fonksiyonların da olduğu görülmüştür. Bu incelemelerin *özel durum incelemesi* kategorisine alınabileceği akla gelmiş, fakat gerek çözümün gidişatı gerekse incelediği bu durumları formal yolla ispat etmemiş olması günlüğün bu kısmının *örnek araştırma stratejisi* olarak isimlendirmenin daha doğru olacağını düşündürmüştür.

$\rightarrow I = f$ olursa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = x$ birim fonksiyon

$$f(x^2 + f(y)) = I(x^2 + I(y)) = x^2 + I(y) = (I(x))^2 + y = (f(x))^2 + y$$

$\therefore f$ birim fonk. olabilir.

$\rightarrow f(x) = a^x$ olsun.

$$f(x^2 + f(y)) = a^{x^2 + f(y)} = a^{x^2} \cdot a^{f(y)} = (a^x)^2 \cdot a^{a^y}$$

$$= (f(x))^2 \cdot a^{a^y}$$

$$= (f(x))^2 \cdot a^{\frac{a^y - 1}{a - 1}} \neq$$

$\rightarrow f(x) = 0$ ise sıfır fonksiyonu ise f üstel fonksiyon değil.

$$f(x^2 + f(y)) = 0 = 0 + 0 = 0^2 + 0 = (f(x))^2 + f(y)$$

$y \neq 0$ iken $\neq$

$\therefore f$ sıfır fonksiyonu değil.

$\rightarrow f(x) = ax + b$ şeklinde lineer fonksiyon olsun. $b, a \neq 0$

$$f(x^2 + f(y)) = a(x^2 + f(y)) + b = ax^2 + b + af(y) + b$$

$$= f(x^2) + a(ay + b) + b$$

$$= f(x^2) + a^2y + ab + b \neq$$

$$f(x^2) \neq (f(x))^2$$

$\rightarrow f(x) = ax$ olsun $b = 0$ $a = 1$ için $f(x) = x$ olduğunu gösterdik

$$f(x^2 + f(y)) = a(x^2 + f(y)) = ax^2 + af(y) \neq (f(x))^2 + y \neq$$

$\therefore f$ lineer fonk. değildir.

Şekil 4.3. S14'ün Problem 9 için yazdığı günlükten alıntı

Basit fikirler üretme stratejisi: Verilen durumla ilgili yapılan birincil çıkarımlar, derinlemesine inceleme yapmadan akla ilk gelebilecek ya da kimileri tarafından önemsenmeyebilecek özellikleri inceleme davranışını ifade etmek için *basit fikirler üretme stratejisi* kullanılmıştır. Burada zincirleme olarak birbirinden türetilmiş fikirlerden ziyade, merkezdeki bir ifadeden türetilmiş fikirler söz konusudur. Bu stratejinin kullanımına iki örnek Şekil 4.4 ve Şekil 4.5'te yer almaktadır. Bunlardan biri Problem 3 için S1'in yazdığı günlük, diğeri ise Problem 1a için S19'un yazdığı günlüktür. S1'in Problem 3 için yazdığı günlükte fikirlerinin $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesi etrafında toplandığı, S19'un Problem 1a için yazdığı günlükte fikirlerinin $x! + y! = z!$ etrafında toplandığı dikkati çekmiştir.

- Problem : $n \geq 2$ bir tam sayı olmak üzere
- $$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$$
- tamsayısı için neler söyleyebiliriz? Yazınız?
- Pozitif bir tamsayıdır.
 - $n=2$ için $5^2 + 6 \cdot 7^2 + 1 = 25 + 294 + 1 = 320$ old. dan $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 \geq 320$ dir. ($n \geq 2$ için)
 - $5^n = \text{Tek sayı}$
 $7^n = \text{Tek sayı}$, $6 \cdot 7^n = \text{çift sayı}$
 $\Rightarrow 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = T + Ç + T = \text{Çift sayıdır.}$
 - Çift sayı old. dan ve 2'den büyük old. dan bir asal sayı değildir.
 - Çift sayı old. dan 2 ile tam bölünür.
 - n tek ise bu sayı 6 ile tam bölünür.
 $6 \cdot 7^n$ zaten 6'nın katıdır.
 $5^n + 1$ in n tek iken 6'nın katı old. göstermeliyiz.

Şekil 4.4. S1'in Problem 3 için yazdığı günlük

- a) z , sıfırdan farklıdır
 Çünkü $0 \neq 1$ dir.
- $x! + y! = z$ olamaz. Çünkü $x! \geq 1$
 $y! \geq 1$
 $x! + y! \geq 2$ olur
-
- $x = z$ olamaz.
 $x = z$ olursa;
 $x! + y! = z$
 $y! = z! - x! = 0$
 $y! = 0$ (Böyle bir şey olamaz)
- Aynı şekilde $y = z$ de olamaz.
 $y = z$ olursa $x! = 0$ olur. Buda imkansızdır
-
- z en az 2 olur. $z \geq 2$ dir.
 Yani z , 0 ve 1 olamaz.
- Çünkü x ve y minimum "0" olsa bile
 $z! = 2$ yapmaz.
 Buda z nin 2 olması demektir.

Şekil 4.5. S19'un Problem 1a için yazdığı günlük

I-A grubu problemlerinden Problem 1a, 3 ve 8'de basit fikirler üretme stratejisinden yararlanan öğretmen adaylarının sayısı sırasıyla 2, 11, 11 olarak tespit edilmiştir (EK 3, 7, 9). II-B grubu problemlerinde ise Problem 21'de 12 öğretmen adayı basit fikir üretme stratejisinden yararlanmıştır (EK14). Bu öğretmen adaylarından 8'i çözümün başında bu stratejiyi kullanırken 4'ü çözüme önce

işlemlerle başlamışlar fakat daha sonra işlemlerden vazgeçip başlangıç koşullarına geri dönerek basit fikir üretmişlerdir. Çözümüne basit fikir üreterek başlayan öğretmen adaylarından 7'si sonuca ulaşmış biri ulaşamamıştır.

Algoritmik çözüm yapma stratejisi: Ervynck (1991), algoritmik aktiviteyi matematiksel işlemler, hesaplama ve çözüm uygulamak için kullanılan matematiksel teknikler olarak ifade etmektedir ve bu tekniklere bir algoritmanın uygulanması, bir polinomun çarpanlara ayrılması, integralin hesaplaması, diferansiyel denklemin çözülmesi gibi örnekler vermiştir. Bu çalışmada bu tanıma benzer olarak *algoritmik çözüm* ile denklem kurarak ya da bir takım matematiksel işlemlerin art arda uygulanması ile yapılan çözüm kastedilmektedir. Buna göre, öğretmen adaylarının Problem 1 ve 2'de verilen eşitliklerde yaptıkları sadeleştirme ve eşitliği düzenleme işlemleri, Problem 3 ve 4'te verilen ifadeyi düzenlemek için yaptıkları işlemler *algoritmik işlemler* olarak adlandırılmıştır. Öte yandan, öğretmen adaylarından bazılarının görüşmelerde kullandığı '*problemin gösterdiği çözüm*', ifadesi de *algoritmik çözüm* olarak düşünülmüştür.

Şekil 4.6'da S5'in algoritmik işlemlere dayanarak çözüm yaptığı Problem 1a için yazdığı günlük yer almaktadır. S5, bu günlüğünde başka strateji kullanmamıştır. Verilen eşitlikten basit fikir üreterek çıkarılabilecek bazı sonuçları, S5 işlemler yaparak fark etmiştir. Bu da onun eşitlik üzerinde hiç fikir üretmeden direkt olarak işlem yapmaya odaklandığını akla getirmektedir.

Algoritmik işlemlerden I-A grubu problemlerden Problem 1a'da 12, Problem 1b'de 6, Problem 3'te 5 öğretmen adayı yararlanmıştır (Ek 3, 4, 7). II-B grubu problemlerinden Problem 13'te, problemle karşılaşan tüm öğretmen adayları en azından bir çözüm yolunda algoritmik işlemlerden yararlanmışken, Problem 18'de 3 ve Problem 21'de 13 öğretmen adayı algoritmik işlemlerden yararlanmıştır (EK 12, 14, 15).

Bazı problemlerde algoritmik işlemlerden etkili bir şekilde yararlanan öğretmen adaylarının yanında etkili bir şekilde yararlanamayan öğretmen adaylarının da olduğu tespit edilmiştir (Örneğin Problem 1a, EK 3).

0) $x! + y! = z!$

$(1.2. \dots x-1. x) + (1.2. \dots y-1. y) = 1.2. \dots (z-1). z$

$x < y \Rightarrow$

$x!((y-x)(y-x+1) \dots y+1) = z!$

$((y-x)(y-x+1) \dots y+1) = \frac{z!}{x!}$

$((y-x)(y-x+1) \dots (y-1).y) + 1$ bir tam sayı oldu. denir.

$\frac{z!}{x!}$ bir tam sayı olması için $z \geq x$ olması

$\frac{z!}{x!} = (z-x)(z-x+1) \dots = 1.2. \dots z$

$(y-x)(y-x+1) \dots (y-1).y + 1 = (z-x)(z-x+1) \dots (z-1).z$

sağ tarafı sağlanmalı

$\frac{0!}{x!} + 1 = \frac{z!}{x!}$ olması.

sağlanırsa $z = x$ olur. $z = x$ için $x! + y! = x!$ olur.

$(z-x)(z-x+1) \dots (z-1).z = ((y-x)(y-x+1) \dots y+1) = 1$ olması

denir. $z = x$ için $x = 0!$ $y = 1!$ olması

Şekil 4.6. S5'in Problem 1a için yazdığı günlük

Bağıntı araştırma stratejisi: *Bağıntı araştırma stratejisi*, öğretmen adaylarının verilen problemde geçen değişkenler arasında matematiksel bir ilişki araştırma çabalarını ifade etmektedir. Problem 1b ve 2b'de eşitliği sağlayan x , y , z 'ler arasındaki bağıntıyı; Problem 5'te verilen dizinin terimleri arasındaki ilişkiyi, yani dizinin genel terimini belirlemeye çalışmak bu stratejinin kullanımına örnek olarak verilebilir. Bu stratejinin karşılaşıldığı günlüklerden biri S10'un Problem 2b için yazdığı günlüktür (Şekil 4.7). Öğretmen adayı bu çözümde eşitliği sağlayan örnekler belirlemiş ve örnekleri belirlerken x , y , z arasındaki bağıntıyı fark etmiştir. Bunun göstergesi olarak, örneklerin sayısının çoğaltılabileceğini belirtmesi ve yedi tane örnek belirlemiş olmasıdır. Öğretmen adayı daha sonra bağıntıyı genel ifadelerle yazabilmiştir (Şekil 4.7).

$$b) x!y! = z!$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1.2 = 2$$

$$3! = 1.2.3 = 6$$

$$4! = 1.2.3.4 = 24$$

$$5! = 1.2.3.4.5 = 120$$

$$6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$$

$$7! = 1.2.3.4.5.6.7 = 5040$$

$$8! = 1.2.3.4.5.6.7.8 = 40320$$

$$9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362880$$

$$x > 1, y > 1, z > 1$$

$$x!y! = z!$$

$$3!5! = 6!$$

$$4!23! = 24!$$

$$5!119! = 120!$$

$$6!719! = 720!$$

$$7!5039! = 5040!$$

$$8!40319! = 40320!$$

$$9!362829! = 362880!$$

örnekleri söğalttebiliriz.

böylece $x > 1, y > 1, z > 1$

şartını sağlayarak

sonsuz x, y, z ta-sa-

yısı vardır.

$x! = z = y!$ koşulunu sağlayarak sonsuz sayıda $x > 1, y > 1, z > 1$ tam sayıları bulmak mümkündür.

Faktöriyelleri, acarak koşula uygun tam sayıların sonsuz sayıda olduklarını gördüm. Bir kaç tane örnek verdim ama istediğiniz kadar örneği genişletebilirsiniz.

Şekil 4.7. S10'un Problem 2b için yazdığı günlük

Bağıntı araştırma stratejisinin Problem 1b ve onun yapılandırılmış hali olan Problem 2b'de kullanıldığı tespit edilmiştir. Problem 1b'de yalnızca bir öğretmen adayı bu stratejiyi kullanıp sonuca ulaşırken Problem 2b'de 10 öğretmen adayı x, y, z arasındaki bağıntıyı araştırmış ve bulmayı başarmıştır. Ancak öğretmen adayları bu stratejiyi farklı şekilde kullanmışlardır. 8 öğretmen adayı genel ifadeler yardımıyla bağıntıyı belirlemişler, ikisi ise özel değerlerden yararlanarak bağıntıyı belirlemişlerdir. Diğer yandan özel değerlerden yararlanarak bağıntıyı araştırmaya çalışan iki öğretmen adayı eşitliği sağlayan örnekler belirlemişler ancak belirledikleri örneklerden biri bağıntıya uymadığı için genel bağıntıyı bulmada başarısız olmuşlardır. Bu durum, kullanılan stratejinin başarılı olmasında stratejiyi kullanma şeklinin etkili olduğunu düşündürmektedir.

Örüntü bulma stratejisi: Basit durumlardan yola çıkarak elde edilecek kurallar ile daha karmaşık durumları çözmekte kullanılabilecek bir stratejidir (Posamentier ve Krulik, 1998). Bu araştırmada kullanılan problemlerden bazılarında örüntü bulma stratejisini kullanan öğretmen adaylarının olduğu tespit edilmiştir.

Örneğin S5'in Problem 3 ve Problem 17'de bu stratejiyi kullanmış olduğu görülmüştür (Şekil 4.8).

1	5	6	7	8	B
5	10	10	10	10	10
15	30	30	30	30	30
35	70	70	70	70	70
30	60	60	60	60	60

126 701

Şekil 4.8. S5'in Problem 17 için yazdığı günlükten alıntı

Örüntü bulma stratejisi, Problem 3 ve bunun yapılandırılmış hali olan Problem 4'te kullanıldığı görülmüştür. Problem 3'te iki öğretmen adayı, Problem 4'te ise 5 öğretmen adayı örüntü bulma stratejisinden yararlanmıştır. Problem 17'de yalnızca S5 bu stratejiden yararlanmıştır.

4.1.2. Sezgisel Düşünme

Poincare, (2001) matematikçilerde birbirine zıt iki eğilimin (zihniyetten) varlığından bahsetmektedir. Matematikçilerin eserlerini incelemek için birbirinden tamamıyla farklı bu iki çeşit zihniyeti ayırt etmenin gerekliliğini iddia eden Poincare bu eğilimlerden birinin mantıksal diğerinin sezgisel olduğunu belirtir. O, ayrıca mantıksal düşünen matematikçilerin hiçbir şeyi tesadüfe bırakmaksızın sonuca ulaşmak için adım adım ilerlediklerini; diğerlerinin sezginin gösterdiği yoldan gittiklerini ve bazen riskli bir şekilde ilk hamlelerini gerçekleştirdiklerini belirtir.

Davis ve Rimm, (2004) sezgiyi, zihinsel sıçrama yapabilme, az bilgiyle ilişkileri görebilme, satır aralarını okuyabilme yeteneği olarak tanımlamaktadır. Matematik açısından bakıldığında Tall (1980) matematiksel sezgiyi, mantıksal çizgide ilerlemeyen düşünme olarak ifade etmektedir.

Diğer yandan Fischbein (1999) daha detaylı olarak yaptığı incelemede sezgiyi iki kategoride ele almıştır. Bunlardan biri açıklayıcı (affirmatory) diğeri ise ileriye yönelik (anticipatory) sezgidir. Bunlardan birincisinde bireye doğrudan kabul edilebilir, aşikar, global ya da doğal olarak gerekli gibi görünen çözüm, yorum, temsil veya ifadeler vardır. İkincisinde ise birey problemi anladıktan sonra verilen ve istenilen arasında köprü kurmak ister bir tarzda daha önceden öğrenilmiş bilgileri harekete geçirir. Bu çaba ile birey iyi yapılandırılmamış bir sonuca ulaşır ve çözüme ulaştığını hisseder.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının problem çözme davranışlarında formal bir ispat yapmaksızın bazı sonuçları görebildikleri çeşitli durumlarla karşılaşmıştır. Problem çözme sürecinde karşılaşılan bu durum *sonucu tahmin etmeye yönelik sezgi* olarak ifade edilecektir. Öte yandan, birden fazla çözüm üretme durumunda öğretmen adaylarından bazılarının *başka çözümün olup olmadığına yönelik sezgilerine* de rastlanmıştır.

Başka Çözümün Olup Olmadığına Yönelik Sezgi: Bazı problemlerde öğretmen adaylarından, bir çözüm bulduktan sonra problemi başka yollardan çözmeleri istenmiştir. Bu problemlerden biri olan Problem 20’de S2’nin ilk çözümü yaptıktan sonra ikinci çözümü yapmak için ısrarlı davranmaması üzerine kendisine bunun nedeni sorulmuştur. Bu soruya karşılık öğretmen adayı “*Bu problemin başka bir çözümü yoktur, kök yoksa deltayı kullanacağız, başka ne düşünebiliriz ki?*” cevabını vermiştir. Görüşmede aynı problem için geçen diyalogda bunun nedenini bilmediğini belirtmiştir.

G: Peki mesela sen o çözümü neden düşünemedin sence? Nedeni ne olabilir?

S2: Valla soruya baktıktan sonra başka çözümünün olamayacağını hissettim bunu neden hissettim ben de bilmiyorum.

S2’nin farklı çözüm yolu üretmede sezgilerine güvendiğini gösteren başka deliller de mevcuttur:

“Mesela yani alandan da çıkabilir o soru, aslında şeyden falan da çevrel çember çizdiğimizde falan da görülebilir de onu tam çözemedim. Yani çevrel çemberden çözemedim, yoksa uzunluk falan verip de 15-75 üçgeni düşündüğümüz zaman zaten oradan çıkıyor, görünen yolu o zaten. Ama farklı

çözüm yolları olduğuna inanıyorum bu soruda. Kesinlikle vardır yani başka şeyler.” (S2)

...

“... Soru bana, sorunun gösterdiği yani, bana farklı çözüm yolları var gibisinden geliyorsa yani o zaman muhakkak uğraşırım ama farklı çözüm yolu üretemesem, üreteceğimi göremiyorsam o zaman bırakırım yani normal çözüm yolunu yaparım. Başka da düşünmem yani.” (S2)

Bu deliller ışığında S2’nin sezgileri tarafından yönlendirilmiş olduğu açıkça görülmektedir. Öğretmen adayı farklı bir çözümün olduğunu hissettiğinde ısrarla çözümle uğraşmaktadır. Diğer taraftan başka çözümün olmadığını düşündüğünde de hiç ısrarcı olmadığı Problem 20’de gözlemlenmiştir.

Benzer bir durum S3’le yapılan görüşmede de gözlemlenmiştir:

G: Yani problem çözdükten sonra tekrar dönebiliyorsun zaman zaman ama bu başka çözümler araştırmak için?

S3: Yani o problemi yaptıktan sonra sadece bırakmam yani. Eğer böyle farklı yöntemlerle yapılabilecek gibi sezdiysem uğraşırım, çıkartmaya çalışırım yani.

G: Sezmiyorsan?

S3: Sezmiyorsam herhalde farklı bir yol yoktur derim. Eğer sezmezsem onun farklı bir yolla yapılabileceğini, genelde de herhalde olmuyor, yani sezgilerim çıkıyor genelde.

Başka çözümün varlığına yönelik sezgi çoğunlukla S2’de dikkati çekmiştir. S9’da ise böyle bir sezgi Problem 19 ile ilgili olarak aktardığı bilgilerde ortaya çıkmıştır.

“Sonuçta o üç yöntemi herkes düşünebilirdi bence. O a’yı b’yi hani parçalayıp falan herkesin aklına gelir zaten. Bir tanesini yaptım sonra başka bir şey var mı diye düşündüm bulamadım. Ki o soruda yok gibi geldi. O kadar düşündüm hiç bir şey gelmedi.” (S9)

S9’un bu ifadesinde çözüm olup olmadığına dair sezgisi “ki o soruda yok gibi geldi” ifadesinden anlaşılmaktadır. Ancak, bu hislerine tamamen güvenmemiş ve hiç kimsenin çözemeyeceği bir çözüm yani orijinal bir çözüm araştırmıştır. Bu durum, S2’nin durumundan daha farklıdır. S2, farklı çözüm olmadığını düşündüğünde ısrarlı davranmadığını ifade etmiştir ki bu durum derste de gözlemlenmiştir. Problem 20’de farklı bir çözüm olmasına rağmen S2’nin başka çözümün olmayacağına dair sezgisi

onun problemle uğraşma isteğini köreltmıştır ve probleme önyargılı yaklaşmasına neden olmuş görünmektedir. Böylece bu konuda ısrarlı olmamıştır.

Başka çözümün olup olmadığına yönelik sezgi, bir problemi birden fazla yoldan çözme durumunda ortaya çıkabilen bir sezgidir. Bu durum bazı öğretmen adaylarında gözlemlenmiştir, diğerlerinde ise böyle bir durumun dikkat çekmemesi onlarda böyle bir sezginin olmadığı şeklinde yorumlanmamalıdır. Yalnızca araştırma ortamında bu durum ortaya çıkmamıştır.

Sonucu Tahmin Etmeye Yönelik Sezgi: Bu sezgi çeşidi özellikle I-A grubu problemlerden bazılarının çözümlerinde dikkati çekmiştir. Öğretmen adaylarından bazılarının Problem 1a, 8, ve 9’da ispat yapmadan sezgileri ile sonuç çıkardıkları görülmüştür. Diğer açık uçlu ifadelerde böyle durumlarla karşılaşmamış olması bazı problemlerin sezgisel düşünmeyi daha çok harekete geçirebileceği (tetikleyebileceği) sonucunu akla getirmiştir.

Problem 1a’da sonucu tahmin etmeye yönelik sezginin iki şekli ile karşılaşmıştır. Bunlardan biri *sonucu doğru bir şekilde tahmin eden*, diğeri de *sonuca yakın bir tahmin yapan sezgidir*. Birincisi, problemde verilmiş olan $x!+y!=z!$ eşitliğinin sadece dört durumda sağlandığını belirten S2, S15 ve S17’nin sezgisi, diğeri ise eşitliğin hiçbir zaman doğru olamayacağını belirten S8 ve S21’in sezgisidir (EK 3). Birinci gruptaki öğretmen adayları önce 0, 1 gibi özel değerleri incelemişler, ardından sezgisel sonuç çıkarmışlar ve kesin bir ifade ile eşitliğin dört durum dışında sağlanamayacağını belirtmişlerdir (örneğin S2’nin günlüğü, Şekil 4.9). İkinci gruptakiler ise önce sadeleştirme işlemi yapmış ve ardından elde ettikleri ifadeye dayanarak sonuç çıkarmışlardır (örneğin S8’nin günlüğü, Şekil 4.10). Aynı grup içerisinde yer alan öğretmen adaylarının çözümlerinin birbirine oldukça benzer olduğu görülmüştür. İlk grubun sonucu doğru iken ikinci grubun sonucu kısmen doğrudur. Kullanılan stratejiler açısından çözümlerdeki benzerlik ve ulaşılan sonuçlardaki benzerlik kullanılan stratejiler ile sezilen sonuç arasında bir ilişkinin olabileceğini akla getirmektedir.

Burada dikkati çeken bir nokta da, her iki gruptaki öğretmen adaylarının sezgilerinin doğru olup olmadığını ispatlamamış olmalarıdır. Öte yandan, kendilerine problemin yapılandırılmış hali verildiğinde ve bu eşitliği sağlayan birden büyük sayıların olamayacağını ispatlamaları istendiğinde bu beş öğretmen adayından yalnızca S2 ispatı doğru bir şekilde yapabilmıştır (Şekil 4.9). S17 ve S21'in işlemler yaptıktan sonra yine sezgisel açıklamalarla, S8 ve S15'in ise ilk çözümlerine benzer çözüm yaparak çözümlerini tamamladıkları görülmüştür (EK 3 ve EK 5).

$$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 2 \quad 3! = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720$$

- a) x ve y tam sayılar ise x ve y için 3 durum söz konusudur.
 i) $x > y$ ii) $x = y$ iii) $x < y$

Faktöriyel fonksiyonunun grafiğine baktığımızda

x sayısının 2 olduğunu çok rahat görebiliriz.

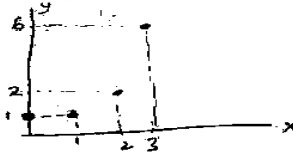
Çünkü herhangi iki sayının faktoriyellemenin toplamının yine bir sayının faktöriyeli olması, için bu sayının kesinlikle 2 olması gerekir. Çünkü diğer durumlarda eşitlik kesinlikle sağlanmaz. Bundan dolayı x sayısı 2'dir.

x sayısı 2 iken $x! = y! = 1$ olmalıdır. Yine burada başka bir durum söz konusu olamaz.

i) Eğer $x > y$ ise $x = 1 \wedge y = 0$ dir.

ii) Eğer $x = y$ ise $x = y = 1 \vee x = y = 0$ dir.

iii) Eğer $y > x$ ise $x = 0 \wedge y = 1$ dir.



Şekil 4.9. S2'nin Problem 1a için yazdığı günlük

a) $x, y, ve z$ ye sayı vermede çalıştım. henüz bulamadım
 faktöriyel ocılımını. kullandığım deniyorum
 $x! = 1.2 \dots x$ $y! = 1.2 \dots y$ ve x ve y pozitif tam sayılar ken
 diyelim $x > y$ olsun
 $x(x-1) \dots (y)(y-1) \dots 1 + y(y-1) \dots 1 = z!$ $y!$ parantezli olsun
 $(x(x-1) \dots (y+1) + 1) \cdot y! = z!$ $z!$ tam sayıların çarpımı
 ayıttan yada x e kadar ki sayıların
 çarpımının bir fazlasının
 tam sayıların ve sıralı tam sayıların
 çarpımı olarak yazılabileceği gerek
 $x(x-1) \dots (y+1) + 1 = n(n+1) \dots (n+p)$
 şekilde parçalaya bilirse z
 yi bulabilir. yoksa faktöriyel
 tanımla çelişir olmaz.
 mesela $y=3$ olsun $z=5$ olurmu $5.4.3! = 5!$
 $9-1 = 8 = 2.4$ dır
 $x(x-1) \dots (y+1)$ ifadesinin
 1 fazlasının $n(n+1) \dots (n+p)$ olarak bitiştek bulundun
 birce olmaz
 $y > x$ ten büyük olursa da aynı şey

Şekil 4.10. S8'in Problem 1a için yazdığı günlük

Problem 1a'da eşitliğin verilip sonucun öğretmen adaylarından gizlenmiş olması, bu problemin çözümü için sezginin daha da önem kazandığı düşünülmektedir. Çünkü öncelikle ispatlanacak durumun fark edilmesi gerekmektedir. Nitekim algoritmik işlemler yaparak sonuca yaklaşan fakat buna rağmen sonucu fark edemeyen öğretmen adaylarının olması böyle problemlerde sezginin önemli olabileceğini düşündürmektedir (Şekil 4.11).

a) $x! + y! = z!$
 $x < y < z$ olsun.
 $1 \cdot 2 \cdot \dots (x-1) \cdot x + 1 \cdot 2 \cdot \dots (x-1) \cdot x \cdot \dots (y-1) \cdot y = 1 \cdot 2 \cdot \dots (x-1) \cdot x \cdot \dots (y-1) \cdot y \cdot \dots (z-1) \cdot z$
 $(1 \cdot 2 \cdot \dots (x-1) \cdot x) \cdot (1 + (x+1) \cdot \dots (y-1) \cdot y) = (1 \cdot 2 \cdot \dots (x-1) \cdot x) \cdot (x+1) \cdot \dots (y-1) \cdot y \cdot \dots (z-1) \cdot z$
 $1 + (x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots (y-1) \cdot y = (x+1) \cdot \dots (y-1) \cdot y \cdot \dots (z-1) \cdot z$
 $1 + A = A \cdot B$ olsun
 $1 = A \cdot B - A$
 $1 = A \cdot (B - 1)$
 $\frac{1}{B-1} = A$

$(x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots (y-1) \cdot y = A$ olsun
 $(y+1) \cdot \dots (z-1) \cdot z = B$

$1! = 1$
 $2! = 1 \cdot 2 = 2$
 $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
 $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
 $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
 $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$
 $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

Şekil 4.11. S10'un Problem 1a için yazdığı günlük

Problem 8'de, Problem 1a'dakinden daha fazla sayıda öğretmen adayı sezgisel ifadeler kullanmışlardır. Bu problem

" $M \subset Q$ kümesinin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

- a) Eğer a ve b , M nin elemanı ise $a+b$ ve ab de M 'nin elemanıdır
- b) Her $r \in Q$ için aşağıdaki önermelerden yalnızca biri doğrudur

$$r \in M, -r \in M, r=0$$

$M=Q^+$ olduğunu gösteriniz." (Karakaş ve Aliyev, 2003b: 150)

şeklindeki bir problemten uyarlanmıştır. Problem 8, öğretmen adaylarına problemin sonuç kısmı olan " $M=Q^+$ olduğunu gösteriniz." ifadesi verilmemiş, onun yerine " M kümesi hakkında neler söyleyebilirsiniz?" ifadesi yerleştirilerek oluşturulmuştur. Dolayısıyla, öğretmen adayları $M=Q^+$ sonucunu bilmeden fikir üretmişlerdir. M kümesinin özelliklerini belirlemekten ziyade, M kümesinin rasyonel sayılar kümesinin hangi alt kümesi olabileceğini tahmin etmeye çalışan öğretmen adaylarının günlüklerinde sezgi ile karşılaşmıştır. Bu öğretmen adaylarından bazıları M 'nin ya pozitif rasyonel sayılar kümesi ya da negatif rasyonel sayılar kümesi olabileceğini, bazıları da bunlara ek olarak M 'nin $\{0\}$ kümesi olabileceğini

ifade etmişlerdir. Derste yapılan gözlemlerde, bu şekilde düşünen öğretmen adayları bu sonuç için, verilen koşullardan ikincisini gerekçe olarak göstermişlerdir. Birinci koşulu ise bu tahminlerini doğrulamak amacıyla kullanmışlardır. Bu şekildeki bir incelemeyle pozitif rasyonel sayılar kümesinin M kümesi olabileceğini belirtmişlerdir. Ancak böyle yapılan bir inceleme, sezgisel temellere dayanmaktadır. Çünkü verilen şartlardan ikincisi, tek başına M 'nin elemanlarının hepsinin pozitif ya da hepsinin negatif olması gibi bir ayrımı garantilememektedir. Bu sonuç, ancak birinci koşul ile ikinci koşulun birlikte düşünülmesiyle ortaya çıkabilir.

Yukarıda bahsedildiği gibi inceleme yapan öğretmen adayları pozitif rasyonel sayılar kümesinin (Q^+) verilen şartları sağladığını belirtmişler (EK 9), fakat M 'nin Q^+ 'dan başka bir küme olmayacağını belirtmemişlerdir. Bu çözümler arasında S4 ve S9'un çözümlerinin ulaştıkları sonuçlar itibariyle birbirine benzer olduğu dikkat çekmiştir. Bu öğretmen adayları sıfırın kümede olmadığını görememişlerdir. Dolayısıyla buldukları sonuç sıfırı da içermiştir. S9'un sonucu "*ya $M=Q^+$ ya da $M=\{0\}$* " şeklinde iken S4'ün bulduğu sonuç ise " *$M=Q^+$, $M=\{0\}$ veya $M=Q^+ \cup \{0\}$* " şeklindedir (Şekil 4.12).

Problem 8'de karşılaşılan sezgisel ifadelerden biri de kümede en azından bir elemanın var olduğunu belirlemeden kümenin eleman sayısının sonsuz olduğu sonucunun çıkartılması olmuştur. Çünkü öğretmen adayları bu sonucu çıkarırken kümeden aldıkları bir ya da iki elemanın toplama ve çapma işlemleri ile çoğaltılmasıyla bu elemanların kümede yer alacağını belirterek sonsuz eleman olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Ancak kümede en az bir elemanın olduğunun bilinmesi durumunda bu çıkarımlar kesinlik kazanacaktır. Bu şekilde inceleme yapan dört öğretmen adayı olmuştur. Bu öğretmen adayları S2 (Şekil 4.13), S8, S9 (Şekil 4.12) ve S13'tür.

b = 0'ından itibaren :

$M \subset \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ veya $M \subset \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ olur.

$a, b \in M$ iken $a, b \in M$ ise

$M \not\subset \mathbb{Q}^-$ ($a, b \in \mathbb{Q}^-$ iken $a, b \in \mathbb{Q}^+$)

Bundan dolayı $M \subset \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$

Akıcılık

Esneklik

$r \in M \Rightarrow -r \notin M, r \neq 0 \Rightarrow M = \mathbb{Q}^+$ yada $\mathbb{Q}^+ \not\subset M$

$M = \mathbb{Q}^+$ için şartlar sağlanır.

$\mathbb{Q}^+ \not\subset M$ için şartları sağlayan küme bulmaya çalışalım.

$M = \mathbb{Q}^+$ sağır. $M = \mathbb{Q}^-$ olamaz, çünkü $0 \in \mathbb{Q}^+$ için $0, 0 \notin \mathbb{Q}^-$

Öyleyse kümenin kesin olarak ya $M = \mathbb{Q}^+$ ya da $M = \mathbb{Q}^+$

$0 \in M$ olsun

$M = \{0, 2a, \dots, a^2, 2a^2, \dots, a^3, 2a^3, \dots\}$

$\Rightarrow M$ 'nin elemanı olan bir a rasyonel sayısının

her pozitif tam sayı kuvvetleri bu kümenin elemanı.

Bu sayının her pozitif tam sayı katları da bu kümenin elemanı. Bundan dolayı M kümesi sonsuz elemanlıdır. ($0 \notin M$ iken)

Şekil 4.12. S9'un Problem 8 için yazdığı günlük



$a = \frac{x}{y}, b = \frac{z}{t}$ o.s. $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ ve $y, t \neq 0$ yazalım.

Eğer a ve b M 'nin elemanı ise

$a+b$ ve ab 'de M 'nin elemanı imiş.

0'ı tamam $a+(a+b), b+(a+b), a.(a+b)$ ve

$b.(a+b)$ de M 'nin elemanıdır. Aynı şekilde $(a+b)+ab$ ve $(a+b).ab$ de M 'nin elemanıdır. Bu şekilde sürekli olarak kombinasyon yapabiliriz.

$a, b, a+b, ab, a+(a+b), b+(a+b), (a+b)+ab, a+[a+(a+b)], b+[a+(a+b)], \dots$

Şekil 4.13. S2'nin Problem 8 için yazdığı günlük

Sezgisel ifadelerin görüldüğü bir diğer problem de Problem 9'dur. Bu problem:

“Her x, y reel sayıları için $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonu hakkında neler söyleyebilirsiniz?”

şeklinde idi. Bu problemde verilen eşitliği sağlayan bir tek fonksiyon vardır o da birim fonksiyondur. Problemin yapılandırılmış halinde eşitliği sağlayan fonksiyonun birim fonksiyon olduğunun gösterilmesi isteniyordu ve bu problem kitapta yıldızla işaretlenmiş zor problemler arasında idi (Karakaş ve Aliyev, 2003a: 216).

Problem 9 için yazılan günlükler incelendiğinde, birim fonksiyonun verilen eşitliği sağladığını tüm öğretmen adaylarının fark ettiği görülmüştür. Bunun nedeninin, böyle bir durumda birim fonksiyonun eşitliği sağlayıp sağlamadığı incelenebilecek ilk fonksiyonlar arasında yer alması, olduğu tahmin edilmektedir. Dolayısıyla, *örnek araştırma stratejisini* kullanan öğretmen adaylarının sabit fonksiyondan sonra inceledikleri ilk fonksiyon birim fonksiyon olmuştur ve bu şekilde birim fonksiyonun eşitliği sağladığını fark etmişlerdir. Öte yandan, bazı öğretmen adayları fonksiyonun tersinin olması ya da homomorfizma olması gibi özel durumlarda inceleme yapmaya çalışmışlardır ve bu koşullar altında birim fonksiyonu fark etmişlerdir (EK 10). Bu problemde özel değer incelemesi yapan yalnızca beş öğretmen adayı olmuştur (S4, S5, S8, S9, S10). Bunlardan S8 ve S9 birkaç tane özel değer incelemesi yaptıktan sonra fonksiyonun birim fonksiyon olduğunu belirtmişlerdir. Onların bu sonuçları mantıksal çıkarıma dayanmayan sezgisel sonuçlardır. S8 ve S9 fark ettikleri bu durumu ispatlamaya çalışmamışlardır (Şekil 4.14).

$$y = f(x^2 + f(y)) - (f(x))^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x=y \text{ olsun} \\ f(x^2 + f(x)) = x + (f(x))^2 \end{array} \right.$$

$$x=0 \text{ için } f(f(0)) = (f(0))^2$$

$$x=1 \text{ için } f(1 + f(1)) = 1 + f(1)^2$$

$$x=2 \text{ için } f(4 + f(2)) = 2 + f(2)^2$$

$$\vdots$$

$$x=n \text{ için } f(n^2 + f(n)) = n + f(n)^2$$

$$f(n) = n \text{ için eşitlik sağlanır.}$$

$$f(x) = x, f(y) = y$$

Şekil 4.14. S9'un Problem 9 için yazdığı günlükten alıntı

Öğretmen adaylarından yalnızca S3 ve S5 fonksiyonun birim fonksiyon olduğunu ispatlamaya çalışmıştır. Ancak bu iki öğretmen adayının yaklaşımları farklıdır. S3 önce fonksiyonun ne olabileceği hakkında düşünmüş ve özel koşullar altında fonksiyonun birim fonksiyon olduğunu ispatlamıştır. S5 ise fonksiyon hakkında oldukça detaylı bir şekilde ipuçları belirlemiştir. Uzun bir uğraşın ardından fonksiyonun yalnızca birim olduğunu fark etmiş ve bu durumu ispatlamaya çalışmıştır (Şekil 4.15). S3 bu problem için günlüğünde şunları yazmıştır:

"Önce fonksiyon hakkında düşündüm. Hangi sayıları verdiğimde eşitliğin sağlanacağını düşündüm. Aslında orada f'nin birim olacağını gördüm. Daha sonra çözüm aklımda netleştikten sonra f'nin doğrusal olduğunu kabul ettim. Buradan f(x)=x olduğunu gördüm. f(x)=0 fonksiyonu da olabilir fakat bunun her x, y için sağlanmadığını gördüm. Ayrıca f(x) = -f(-x) olur. f tek fonksiyondur." (S3)

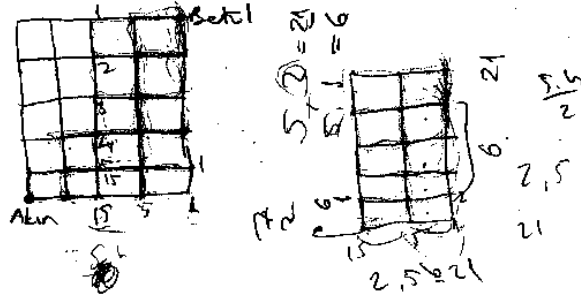
S3'ün bu ifadesinden fonksiyonun birim olduğunu sezdiği anlaşılmaktadır. Bu sezgisini ispatlamak için fonksiyonun doğrusal olduğunu kabul etmiştir ve $f(x)=ax+b$ şeklinde doğrusal bir fonksiyonu eşitlikte yerine yazıp $a=1$, $b=0$ olması gerektiğini belirlemiştir (Şekil 4.15). Dolayısıyla S3'ün yaptığı ispat, f'nin doğrusal olduğu özel durum için geçerli bir ispattır.

$f(x) = mx + n$. linear fonksiyon $f(y) = my + n$ olsun. 0 için. $f(x^2 + f(y)) = m(x^2 + my + n) + n$ $(1) \dots = mx^2 + m^2y + mn + n$ dur. $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$ old. için (1) eşitliği; $mx^2 + m^2y + mn + n = y + (mx + n)^2$ $mx^2 + m^2y + mn + n = y + m^2x^2 + 2mnx + n^2$ $mx^2 = m^2x^2$ $2mnx = 0$ $n \neq 0$ ve $n = 0$ olur. $\frac{y}{n} m = 1$ olur. $\frac{y}{n} m = 0$ olur. $f(x) = x$ veya $f(x) = 0$ fonksiyonu bu koşullu sağlar. Yanlış fonksiyon f birim fonksiyon veya sıfır fonksiyonu $y \neq 0$ için $f(x) = 0$ fonksiyonu olur. Onun için bu sağlanır.	<table border="1"> <tr> <td>Alıcılık</td><td></td></tr> <tr> <td>Esneklik</td><td></td></tr> </table>	Alıcılık		Esneklik	
Alıcılık					
Esneklik					
	Düşünme Süreçleri Önce fonksiyon hakkında düşündüm. Hangi sayıları verdiğinde eşitliğin sağlanacağını düşündüm. Aslında orada f 'nin birim olacağını gördüm. Daha sonra çözüm altında netleştikten sonra f 'nin doğrusal olduğunu kabul ettim. Buradan $f(x) = x$ olduğunu gördüm. $f(x) = 0$ fonk. n'de olabilir fakat bunun her x, y için sağlanmadığını gördüm. Ayrıca $f(x) = -f(-x)$ olur. f tek fonk. dur.				

Şekil 4.15. S3'ün Problem 9 için yazdığı günlük

Sezgi ile karşılaşıldığı düşünülen bir başka günlük, S2'nin Problem 17 için yazdığı günlüktür (Şekil 4.16). S2'nin, bu problemi çözerken sonuca götürecek çözüm yolunu belirlemek için sezgilerini kullandığı tahmin edilmektedir. Problem 17'de, verilen harita üzerindeki bir noktadan diğer bir noktaya belirli koşullar altında gidebilmek için kaç farklı yol kullanılabileceği sorulmuştur. Bazı öğretmen adayları bu tip sorulardan ÖSS'ye hazırlanırken çözdüklerini ve çözümünü tekrarlı permütasyon kullanarak şekilde yapmayı öğrendiklerini belirtmişlerdir. Bunlardan biri, bu problemde önceki çözüm yoluna saplanan S6'nın ifadesinde görülmektedir (önceden öğrenilmiş çözüm yoluna saplanmak).

Trafik Akını sadece Lacey ve
Doğu rütibelerinde ise Akın
Betüle yataca 4 sokak, diğerde
ise 5 sokak giderek çıkar.



Burada permütasyon yapacağız ama tam olarak
işlemleri bilmiyorum.

$$5.3.1 = 5.6 = 30$$

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126$$



$$3.2 = 6$$

Hipotezinin ne kadar doğru olduğunu bilmiyorum
ama denediğim bütün örneklerde doğru
sonuç gördüm.

Akıcılık	
Esneklik	

Düşünme Süreçleri

Matrisimiz 5x4'lük
bir matris. Normalde
böyle bir soruda
kullanmam gereken
formülü bilmiyorum.
Kendi kendime bir
hipotez geliştirdim ve
hipotezinin doğru
olduğunu gördüm.
Örneği 5x2'lik bir
matris te toplam 21
farklı yoldan gidebiliyoruz.
Dikkat ettiyseniz
 $21 = \binom{7}{2}$ dir. Herhangi bir
5x1'lik bir matris te ise
toplam 6 farklı yol
gidebiliyoruz. $6 = \binom{6}{1}$ dir.
Yani kombinasyonun
üst tarafına toplamlar
yazılıyor ve alt tarafına
sütun sayısını yazarak.
Buradan sorunun cevabı
 $\binom{9}{4} = 126$ olur.

Şekil 4.16. S2'nin Problem 17 için yazdığı günlük

S2, her ne kadar günlüğüne "burada permütasyon yapacağız ama tam olarak işlemleri bilmiyorum" şeklinde yazmış olsa da bu problemi tekrarlı permütasyon kullanmadan çözmüştür. Sonuçta düşündüğü çözüm yolun da aynı işlemlere ulaşmış olsa da çözüm mantığı açısından oldukça farklıdır. S2, günlüğünde düşünme süreçleri hakkında şunları yazmıştır:

"Matrisimiz 5x4'lük bir matris. Normalde böyle bir soruda kullanmam gereken formülü bilmiyorum. Kendi kendime bir hipotez geliştirdim ve

hipotezimin doğru olarak çalıştığını gördüm. Örneğin 5x2'lik bir matriste toplam 21 farklı yoldan gidebiliyoruz. Dikkat ettiyseniz $21 = \binom{7}{2}$ dir. herhangi bir 5x1'lik bir matriste ise toplam 6 farklı yol gidebiliyoruz. $6 = \binom{6}{1}$ dir. Yani kombinasyonun üst tarafına toplamlar yazılıyor ve alt tarafına sütun sayısını yazdık. Buradan sorunun cevabı $\binom{9}{4} = 126$ olur.” (S2)

S2, yaptığı çözümün önceden öğrenilmiş bir çözüm olmadığını “böyle soruda kullanmam gereken formülü bilmiyorum” cümlesiyle ifade etmiştir. S2’nin düşüncelerini yazdığı günlüğündeki “Bu hafta çok hoştu. Belki de kendim bir tane formül üretip de soruyu o formülle yaptığımdan hoşuma gitmiştir.” cümlesi de S2’nin bu çözümünün daha önceden öğrenilmiş bir çözüm olmadığını açıkça göstermektedir. Bu çözümde ilgi çeken nokta, S2’nin matrisin satır ve sütunlarını toplayarak kombinasyonla ilişkilendirebilmesidir. S2’nin bu ilişkiyi fark edebilmesinin ardında sezgilerinin olduğu tahmin edilmektedir.

Araştırmada sezginin görüldüğü en ilginç çözüm S9’un Problem 21 için yazdığı günlükte ortaya çıkmıştır (Şekil 4.17). Bu problem, çoktan seçmeli olarak yapılan Ulusal Matematik Olimpiyatları birinci basamak problemlerinden birinden uyarlanmıştır. Problem, öğretmen adaylarına seçenekleri gizlenerek “ $(2a+b)(2b+a)=2^c$ eşitliğini sağlayan kaç tane (a, b, c) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?” şeklinde verilmiştir.

S9’un Problem 21 için yaptığı çözüm, mantıksal temele dayanmayan informal bir çözümdür. Öğretmen adayı bu çözümde doğru grafiklerinden yararlanmıştır. Grafikte çizdiği birkaç doğrunun kesişiminden hareketle sonsuz tane doğrunun kesişimi hakkında fikir yürütmeye çalışmıştır. Ancak sonsuz tane doğrunun kesişimlerini kontrol etmek imkansız olduğundan öğretmen adayının çözümünün tamamen sezgiye dayandığı düşünülmektedir.

$$(2a+b)(2b+a)=2^c$$

a ile b çift sayıdır.

$$(2a+b)=2^x$$

$$(2b+a)=2^y$$

$$|a|=|b| \text{ dir.}$$

$$a=b \vee a=-b$$

$a=b$ olsun.

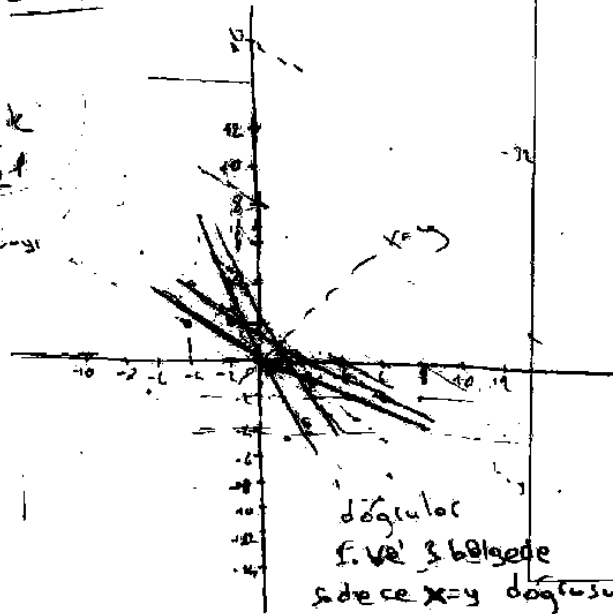
$$(3a)(3a)=2^c$$

$$9a^2=2^c \quad \text{Bununla da değil.}$$

$$a \text{ tekken } a=-b$$

$$2x+y=2^k$$

$$x+2y=2^l$$



döğrüler
f. ve 3. bölgede
sadece $x=y$ doğrusu üzerinde kesişiyor
çünkü $x=y$ olamayacağı için bu noktadır.

Şekil 4.17. S9'un Problem 21 için yazdığı günlük

S9 cebirsel bir problemde analitik geometriyi kullanarak çözüm yapmıştır. S9'un yaptığı bu çözüm beklenmedik bir çözümdür.

S9'un Problem 8, 9 ve 21'de dikkati çeken sonuca yönelik sezgisi, kendisi ile yapılan görüşmedeki ifadeleri de desteklemektedir:

“ÖSS’ye girerken mesela, vakit kazanmak için, hani formül değil de, normal direkt bakarak bazı yerler görülüyor mu diye baktığım oluyordu ki bayağı bir soruda olmuştu yani. Çünkü ben bayağı bir zaman kazanmıştım o şekilde. İyi oluyordu. İşlem yaparak bayağı uzun sürüyordu, ama şekiller çizerek falan, bayağı kısa çıkabiliyor bazı sorular”.

Buradaki ifadeden S9’un özellikle ÖSS’ye hazırlıkta sezgilerine güvenerek çözüm yapmayı alışkanlık haline getirmiş olduğu ve sezgilerini ön plana çıkarmayı öğrenmiş olduğu anlaşılmaktadır. Diğer yandan yukarıdaki ifade öğretmen adayının sezgilerine güvenerek risk almaktan kaçınmadığını da düşündürmektedir. Öğretmen adayının ifadesinde dikkati çeken bir diğer nokta da işlemlerden ziyade şekil çizmeyi tercih etmesidir ki bu durum Problem 21’deki çözümünde de görülmektedir.

ÖSS’de ve bu sınava hazırlıkta öğrencilerin düşündüklerini yazarak ifade etmelerine gerek yoktur. Bu tür sınavlarda süre ile yarışıldığından sonuca en hızlı ve doğru bir şekilde ulaşmak çok önemlidir. Öte yandan, Problem 21’in çoktan seçmeli bir problemten, seçeneklerin gizlenmesi ile oluşturulduğu dikkate alınırsa, S9’un bu problemdeki sezgisel çözümünün yukarıdaki ifadesine bir kanıt olduğu düşünülmektedir. Her ne kadar Problem 21’de seçenekler verilmemiş olsa da sorunun niteliği ÖSS sorularına yakındır. Diğer yandan öğretmen adayının görüşmedeki *“Zaten mantiken de çözümünün olmaması gerekiyor sonsuz tane çözümü olur zaten olursa. Bir tane çözüm bile olsa direkt sonsuza gider orada.”* ifadesi sonucun ne olabileceği hakkında tahminde bulunarak çözüm yapmaya çalıştığı şeklinde yorumlanmıştır (*sonuca odaklı problem çözme davranışı*). Ayrıca, ortaya çıkabilecek sonuçları iki duruma indirgediği ve buna göre düşündüğü de anlaşılıyor. Öğretmen adayına göre ya çözüm yoktur ya da sonsuz çözüm vardır. Bu düşüncesinin mantıksal temele dayanmayan tamamen sezgisel bir düşünce olduğu söylenebilir.

Problem 8 ve 9’da karşılaşılmış olan sezginin Fischbein’in (1999) açıklayıcı sezgi olarak ifade ettiği sezgi türünden olduğu düşünülmektedir. Bu problemlerde birçok öğretmen adayında bu sezgi görülmüştür. Öte yandan sezgi ile karşılaşıldığı düşünülen diğer problemlerde ise (Problem 1a, Problem 17, Problem 21)

Fischbein'in (1999) ileriye yönelik sezgi olarak ifade ettiği sezgi ile karşılaşıldığı düşünülmektedir. Bu sezgi çok daha az sayıda öğretmen adayında belirgin olarak görülmüştür (Problem 1a'da S2, S15, S17, S8 ve S21; Problem 17'de S2; Problem 21'de S9). Bu problemlerin niteliğine bakıldığında Problem 17 ve Problem 21, Polya'nın (1997) sonuç bulma problemleri olarak nitelendirdiği problem tipindedir. Problem 1a ise Polya'nın (1997) kanıt problemi olarak ifade ettiği tarzda bir problem, problemin sonucunun çıkarılmasıyla oluşturulmuştur ki bu haliyle sonuç bulmaya yönelik bir problem tipinde olduğu söylenebilir.

Öğretmen adayları her iki sezgiyi (açıklayıcı ve ileriye yönelik sezgiyi) de sonucu görmeye yönelik çabalarında sergiledikleri için bu araştırmada bu iki sezgi sonucu görmeye yönelik sezgi olarak ifade edilmiştir.

Hem günlükler hem de görüşmeler dikkate alındığında sezgileri kullanma konusunda en çok dikkati çeken öğretmen adayları S2 ve S9'dur. Sonucu tahmin etmeye yönelik sezgi ile hem S2 hem de S9'un bazı günlüklerinde karşılaşılmaktadır.

S9 ve S2'nin ortak noktalarından biri de her ikisinin de günlüklerinin oldukça sade, az ve öz yazılmış olmasıdır. Her ikisi de yazmayı sevmeyen öğretmen adaylarıdır. Öğretmen adaylarının yazmayı sevmemeleri ile sezgisel düşünceleri arasında bir ilişki olabileceği düşünülmektedir. Yazmayı sevmemeleri, onların rutin işlemleri yazmaktan kaçınmalarına neden olmuş olabilir ve dolayısıyla sezgisel düşüncelerini olumlu önde etkilemiş olabilir.

S2'nin problem çözme davranışlarında dikkati çeken başka bir nokta da, genel olarak algoritmik işlemlerden kaçınmasıdır. Özellikle de işlemin uzamasının aklının karışmasına neden olduğu anlaşılmaktadır. S2 bunu görüşmelerde birkaç kez dile getirmiştir:

“İşlem kalabalığına girdiğim zaman tıkanıyorum kalıyorum diyebilirim. Bazen gözüm korkuyor bakıyorum upuzun denklem oluyor öyle bıraktığım zamanlar oluyor. Hal bu ki yani biraz daha uğraşsam yapabilirim yani belki de yolum doğru yani. O yüzden biraz kendimi eksik görüyorum işlemsel konularda, öyle yani.” (S2)

S2'nin yazmayı sevmemesinin işlem kalabalığından kaçmasında etkisinin olabileceğini düşündürmektedir. Diğer yandan S2'nin bazı günlüklerinde cebirsel problem bile olsa şekil çizdiği görülmüştür (Şekil 4.9, Şekil 4.13, Şekil 4.57). Bu durum öğretmen adayının işlemden ziyade şekil ve grafiklerle düşünme tercihini göstermektedir. Öte yandan S2'nin görüşmede kendini problem ortamında hissederek çözüm yapmaya çalıştığını ifade etmesi onun problemi görselleştirme ihtiyacını hissettiğini düşündürmektedir.

S2: Evet 11'e 5'ti 7 litre... yani orda denklem kurmaktan ziyade kendimi o şeye yani o an olsam ne yapardım. Yani bilmiyorum denklem... genelde kurmuyorumdenklemleri....Yaş problemlerinde denklem kurmaya çalışıyorum.

G: Yani o kaplarla kendin uğraştığını mı söylüyorsun? Yani onu mu hayal ediyorsun.

S2: Evet kendimi o anı yaşıyormuş gibi hissediyorum. O şekilde çözmeye çalışıyorum yani. fiziksel bir ortamda yani o ortamda kendimi hissetmeye çalışıyorum....

...
G: Peki problem çözümlerini beyninde nasıl tasarlıyorsun? Özel olarak yaptığın bir şey var mı?

S2: Ya özel olarak yok. Direkt olarak kendimi birebir olayın içinde gibi hissedirim yani. Ya bir problem var işte o nasıl halledilebilir yani. Şimdi mesela hız problemi olur araba 80 le gider 90 la giden bir arabayı nasıl görür bir insan. Bunu kimi insanlar işlemden dolayı yaparlar. Yani eksi yönde birbirinden çıkarmayla, ama ben kendimi orda mesela 80 le giden arabanın içinde gibi hissedirim. Oraya koymaya çalışırım. Yanımdan 90 la giden bir araba geçtiği zaman onun 10 km hızla gidebileceğini görürüm orda. Birebir olayı yaşamaya çalışırım. Yani işlemlerden daha çok kendimi olayın içinde hissettiğim zaman, sonuçta birebir olduğundan dolayı o yola daha çok güvenirim. İşlemlerden daha çok güvenirim. Yani işlemlerde hata yapma olasılığı daha yüksektir ama olayı birebir yaşadığın zaman yani olayın içinde olmak...

S2 özellikle günlük hayatla bağlantılı problemlerde kendini problem ortamında hissederek yani problemi hayalinde canlandırarak çözüm yapmaya çalıştığını ve bu şekilde problem çözmeyi işlemlerden daha güvenli bulduğunu açıkça ifade etmektedir. Buradaki durum, S2'nin Polya'nın (1997) problem çözme aşamalarından geriye dönüş aşamasını gerçek ortamla doğrulamaya çalıştığı şeklinde yorumlanmaktadır.

Sezgisel düşünmenin dikkat çektiği diğer öğretmen adayı S9'un S2 gibi işlem kalabalığında aklının karışıp karışmadığına dair bilgi elde mevcut değildir. Ancak S9 da S2 gibi algoritmik işlemlerle sonuca ulaşabileceğini fark ettiği durumlarda ne yapacağı sorulduğunda, işlemlere devam etmediğini ifade etmiştir.

“Bir yere kadar çözerim mesela sonuçta oradan sonra işlemi devam ettiğim zaman doğru cevabın çıkacağını anladığım zaman pek işlem yapasım gelmiyor yani.” (S9)

“Genelde sonucu bulmaya uğraşmam yol göründükten sonra yani çözümü görebildikten sonra pek fazla çözümü bulmak için sonucu bulmak için uğraşmam.” (S2)

Yukarıdaki incelemelerden yola çıkarak S2 ve S9'un yaptıkları çözümlerde uzun algoritmik işlemleri fazla tercih etmedikleri söylenebilir. Öğretmen adaylarının günlüklerinde zaman zaman algoritmik işlemlerden yararlandıkları görülmüştür ancak bu işlemler çok uzun değildir.

Sonuç olarak sezgisel düşünmenin en çok görüldüğü öğretmen adayları S2 ve S9 olmuştur. Bu iki öğretmen adayının dikkati çeken ortak özelliklerinden biri de her ikisinin de erkek olmasıdır. Bu öğretmen adaylarının fakülte genel not ortalamalarına bakıldığında S2'nin 2,04; S9'un 2,44 olduğu görülmüştür. Araştırmaya katılan tüm öğretmen adaylarının fakülte genel not ortalaması 2,63 olarak belirlenmiş olup bu iki öğretmen adayının not ortalamaları bu değerden düşüktür.

Kısaca özetlenecek olursa sezgisel düşünmenin belirgin olarak görüldüğü bu iki öğretmen adayında dikkat çeken özellikler şunlardır:

- Uzun algoritmik işlemlerden kaçınmak
- Yazmayı sevmemek
- Problem çözmede risk almak
- İşlem kalabalığında zihin karışıklığı

- Cebirsel problemlerde zaman zaman şekil veya grafiklerden yararlanmak olarak özetlenebilir.

4.1.3. Mantıksal Düşünme

Davis ve Rimm (2004) mantıksal düşünmeyi kabul edilebilir sonuçlar çıkarma ve amaca uygun olanlardan uygun olmayanları ayırma yeteneği olarak tanımlamışlardır. Matematik açısından incelendiğinde Poincare (2001) mantıksal ve sezgisel düşünmeyi birbirine zıt iki eğilim olarak ifade etmektedir. Poincare ayrıca mantıksal düşünen matematikçilerin hiçbir şeyi tesadüfe bırakmaksızın sonuca ulaşmak için adım adım ilerlediklerini belirtmektedir. Tall (1980) da matematiksel sezgiyi, mantıksal çizgide ilerlemeyen düşünme olarak tanımlarken bu iki düşünme tipinin karşılıtlığına işaret etmektedir.

Bu araştırmada da bu bu iki düşünme tipinin belirgin olarak görüldüğü günlükler ile karşılaşılmıştır. Özellikle de araştırmada kullanılmış olan I-A grubu problemlerinde bu iki düşünme tipi daha çok belirgin olarak dikkati çekmiştir.

Günlüklerin birbirileriyle karşılaştırması ile yapılan analizlerde özellikle I-A grubu problemlerinden Problem 1a, 8 ve 9'daki sezgisel çözümlere karşıt olarak, sistemli bir şekilde doğrusal olarak ilerleyen mantıksal çözümler S5'in günlüklerinde görülmüştür. Özellikle de S5'in Problem 8 ve 9'daki çözümleri diğer öğretmen adaylarının çözümleri ile karşılaştırıldığında S5'in kesin adımlarla ilerleyişi daha dikkat çekici olmaktadır.

İlerleyen kısımlarda sezgisel düşünme (sonucu tahmin etmeye yönelik sezgi) başlığı altında incelenen çözümlerle karşılaştırılması açısından S5'in bu problemlerdeki çözümleri incelenecektir. Ayrıca görüşme yapılmış olan öğretmen adaylarından S4'ün Problem 8 ve 9'daki çözümleri S5'inkiler ile karşılaştırılacaktır.

Problem 1a'da S2'nin özel değer incelemesinden sonra ulaştığı sezgisel sonuca karşılık (Şekil 4.9) S5'in algoritmik işlem tercihi dikkat çekmektedir (Şekil 4.18). S5, çözümün başlangıcında özel değer incelememiş, basit fikir üretmemiş, direkt olarak algoritmik işlemlerle çözüme başlamıştır. S5'in basit fikir üreterek çıkarılabilecek $z > x$ sonucunu bile işlemler yaptıktan sonra fark etmiş olması ilginçtir. Bu durum, S5'in çözmeye başladığı yola sadık kalarak oldukça doğrusal bir şekilde mantıksal çıkarımlarla ilerlediğini düşündürmektedir.

$$0) x' + y' = z'$$

$$(1, 2, \dots, x-1, x) + (1, 2, \dots, y-1, y) = 1, 2, \dots, (z-1), z$$

$$x < y \Rightarrow$$

$$x + (y-x)(y-x+1) - \dots - y + 1 = z'$$

$$(y-x)(y-x+1) - \dots - y + 1 = z'$$

$$\frac{z!}{x!}$$

$$(y-x)(y-x+1) - \dots - (y-1) \cdot y + 1 \text{ bir tam sayı old. den.}$$

$$\frac{z!}{x!} \text{ bir tam sayı olması için } z \geq x \text{ olması}$$

$$\frac{z!}{x!} = (z-x+1) \cdot (z-x+2) \cdot \dots \cdot z$$

$$(y-x)(y-x+1) - \dots - y + 1 = (z-x+1) \cdot (z-x+2) \cdot \dots \cdot z$$

$$\frac{z!}{x!} + 1 = \frac{z!}{x!} \text{ olması}$$

$$\frac{z!}{x!} + 1 = \frac{z!}{x!} \text{ olması}$$

$$(z-x)(z-x+1) - \dots - (y-x)(y-x+1) - \dots - y + 1 = 1 \text{ olması}$$

$$x = 0! \quad y = 1! \text{ olması}$$

Şekil 4.18. S5'in Problem 1a için yazdığı günlük

Problem 8'de verilmiş açık uçlu durumda $M=Q^+$ sonucu kesin ve tek sonuçtur. Bu sonucu kesin bir ifade ile belirten yalnızca S5 olmuştur. Ayrıca S5, fark ettiği bu durumu ispatlamaya çalışan tek öğretmen adayıdır. Öğretmen adayı, önce küme ile ilgili ipuçları belirlemiş, kümenin ne olabileceğini tahmin etmeye

çalışmamıştır. Kümenin elemanlarının neler olabileceğini incelemeye çalışırken sonucu hissetmiş ve ispatlamaya çalışmıştır. S5 bu problem için yazdığı günlüğünde düşünme süreçleri hakkında şunları yazmıştır:

“Ne görebilirim diye baktım önce aklıma grup ve halka geldi çünkü soyut matematikte şu an onları görüyoruz. Bir şeyle ne kadar uğraşırsan hep onu görürsün ya galiba o yüzden. Daha sonra bu küme üzerinde 1-1 ve örten bir fonksiyon tanımlayıp tanımlayamayacağıma baktım. Elemanların neler olabileceğine baktım ama o sonucu bulacağımı hiç düşünmedim. İşlemleri kontrol ederken fark ettim ve ispatlamaya çalıştım. Doğru olduğunu gördüm. Açıkçası sorunun da bu sonuçla alakalı olduğunu düşündüğümünden başka düşünce geliştiremiyorum.”

Öğretmen adayının yukarıdaki açıklamaları da onun başlangıçta kümenin ne olabileceği ile ilgilenmediğini göstermektedir.

Çözümün son kısmında öğretmen adayı negatif sayıların M kümesine ait olamayacağını özel değerlerle detaylı bir şekilde inceleyerek fark etmiş ve ardından bu durumun genelde de doğru olduğunu ispatlamaya çalışmıştır. Yapmaya çalıştığı ispat M kümesinin doğal sayılar kümesini içerdiğini kanıtlamaktadır, ancak öğretmen adayının iddia ettiği gibi M kümesinin pozitif tamsayılar kümesi olduğunu kanıtlamaya yetmemektedir (Şekil 4.19). S5’in çözümünün bu kısmında yaptığı kadar detaylı inceleme yapan öğretmen adayı olmamıştır. Diğer yandan çözümünün bu kısmında öğretmen adayının yaptığı inceleme oldukça doğrusal bir şekilde ve çok küçük adımlarla ilerlemektedir. Aslında S5, bu kısımda yapmış olduğu ispatı daha önce fark etmiş olduğu 1 doğal sayısının M kümesine ait olmasından hareketle daha kolay bir şekilde yapabilirdi. Fakat o, daha dolaylı yoldan sonuca ulaşmıştır. Öğretmen adayının burada oldukça ısrarlı bir şekilde çözümle uğraştığı anlaşılmaktadır. S5’in bu çözümünde kesin adımlar ön plana çıkmaktadır.

1) $a, b \in M$ $a+b, ab \in M$ ve $r \in \mathbb{Q}$ ise $r \in M, -r \in M, r \cdot a$ da sadece bir diğn 2) $r \in \mathbb{Q}$ old. den $r=0$ o zaman $0, M$'nin elemanı değil 3) M toplama göre birin elemanı değil yani $(M, +)$ Bir grup değil 4) $r \in \mathbb{Q}$ için $r \in M, r \neq -r \in M$ old. den. 5) M'nin toplama göre bir elemanı yoktur. 6) M'nin çarpma "yutu" " 7) $1 \in \mathbb{Q}$ ve $1 \in M$ ise $-1 \notin M$'den. 8) M'nin M'nin çarpma göre birimlidir. 9) $a, a^{-1} \in \mathbb{Q}$ ise $a^{-1} \in M$ veya yani $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ old. den $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ ise. 10) M'nin çarpma göre bir birim vardır. 11) $(ab) \in M$ ve $(ab) \in M$ ise $(ab) \in M$ old. den M birleşimliydir. 12) $(ab) \in M$ old. den $(M, \cdot)$ Bir grup olabilir.	Akıcılık Esneklik	14 12
---	---------------------------------	---------------------

Düşünme Süreçleri

Ne görebilirim diye baktım. Önce aktınan Grup ve halba geldi çünkü sayı matematik ve onun gibi gördüm.

Bir sayı ne kadar yavaşsa hep onu düşünürüm ya da başka bir sayı bu kime daha sonra bu kime üzerinde 1-1 ve diğer bir fak toplayıp tanımlayarak baktım.

Elemanların neler olabileceğine baktım ama 0 sayısı bulacağımı hiç düşünmedim. İnkouları kontrol eder karıttım ve ispatlanacağına dağını aldığını gördüm. Birkaç sorunun da bu soruyla alakalı olduğunu düşündüm. En başka düşünce geliştiremiyorum.

(Yazının bu kadar airkin ve düzensiz olduğunu gör dilerim)

1. $1 \in M$ için ispatı

1, 2 $\in M$ olsa $-2 \in M$ olur ki bu bir aksaklı

0 zaman -1 her zaman negatifidir ve -1 her zaman $1 \in M$ dir yani 1-1'de grup kesinlikle $1 \in M$ dir

abir dediğim şey su anda kesinleşti $(M, +)$ bir gruptur.

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ dir yani M 'de terler

er vardır $a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

Sar $a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$ ise $a^{-1} \in M$ ise

$a \in M$

Şekil 4.19. S5'in Problem 8 için yazdığı günlük

$$M = \{q \in \mathbb{Q} : q = \frac{a}{b}, a=0, b \neq 0, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

kümesi verilen şartları sağlar.

* $a=0, b=1$ için $q = \frac{0}{1} \in M$
olduğu $M \neq \emptyset$.

* Tanım dan $M \subset \mathbb{Q}$.

* $q_1, q_2 \in M$ olu. $q_1 = \frac{a}{b}, q_2 = \frac{c}{d}, b \neq 0, d \neq 0$

$$\Rightarrow q_1 + q_2 = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in M \quad (bd \neq 0)$$

$$q_1 \cdot q_2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in M \quad (bd \neq 0)$$

Böylece (a) şıklı sağlanır. (b) şıklı aslında $q=0$.

Kısaca $M = \{0 \in \mathbb{Q}\}$ kümesi aslında bir alt kümedir.

— — — — —
 $M \subset \mathbb{Q}$ ve verilen şartları sağlıyor. Önce $\forall r \in \mathbb{Q}$ için $r \in M$ olma şartı sağlanır.

Özeten $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ için $r_1 + r_2, r_1 \cdot r_2 \in M$

olduğu. $r_1 + r_2 = p, r_1 \cdot r_2 = q$ ö.s. $p, q \in M$ var.

$$\Rightarrow M = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \text{ seçebiliriz.}$$

$$\Rightarrow 0 \text{ halde } \forall r \in \mathbb{Q} \text{ için } r > 0 \Rightarrow r \in M$$

$$r < 0 \Rightarrow -r \in M$$

$$r = 0 \Rightarrow r \in M$$

sağlanır. $r_1, r_2 > 0$ olu. $r_1 + r_2 > 0$ $r_1 r_2 > 0$

doğrudan $r_1 + r_2, r_1 \cdot r_2 \in M$ olur.

$r_1 > 0, r_2 < 0$ olu. $r_1 \in M, -r_2 \in M$ olur.

$$\Rightarrow r_1 > 0, -r_2 > 0 \Rightarrow r_1 + (-r_2) > 0 \text{ ve } r_1 \cdot (-r_2) > 0$$

Böylece şekilde $r_1 < 0$ ve $r_2 > 0$ için de sağlanır.

$$r_1 = 0, r_2 > 0 \Rightarrow r_1 + r_2 \in M \text{ oldu.}$$

$$r_1 + r_2 = r_2, r_1 \cdot r_2 = 0 \in M \text{ olur.}$$

Böylece şekilde, diğer durumlar gösterilebilir.

(Aslında $M = \mathbb{Q}^+$ seçmek de yeterli olur.)

Akıcılık

Esneklik

- Şartları sağlayan kümenin dışı
- Şartları sağlamayan "

Düşünme Süreçleri

— İlk önce böyle bir küneyi nasıl oluşturabiliriz diye düşündüm. Fakat kümenin aslında $\mathbb{Q}$ 'nın alt kümelerine bakıp bu şartları hangileri sağlar diye inceledim. Aslında önce $M = \mathbb{Q}^+$ kümesi üzerinde düşündüm. Fakat burada daha basit bir küme üzerinde araştırarak bulduğum diye $M = \{0\}$ kümesinin bu şartları sağladığını göstermeye çalıştım. Daha sonra $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ birleşim kümesinin daha geniş kapsamlı olmasıyla bu küme üzerinde çalıştım. $\mathbb{Q}^+$ kümesinin sağlanmadığını görüp verilen şartları sağlanmadığını göstererek böyle bir küme inşa edemeyeceğimizi göstermeye çalıştım. Benzer düşünce ile verilen M kümesinin $\{r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, r_1 + r_2 > 0\}$ ö.s. bir küme olarak tanımlanıp tanımlanmayacağını göstermeye çalıştım. Aynı şekilde $\mathbb{Q}$ 'nın diğer alt kümelerini üzerinde düşündüm. Sonuç olarak ise M 'nin en geniş ifadesinin $M = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ olduğunu gösterdim.

Şekil 4.20. S4'ün Problem 8 için yazdığı günlük

$M = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ kümesine verilen Veriler şartları sağlar mı?

$\forall r \in \mathbb{Q}$ iken $r > 0 \Rightarrow -r \in M$
 $r < 0 \Rightarrow r \in M$
 $r = 0 \Rightarrow r \in M$ sağlanır.

$r_1 = 0 = r_2$ iken $r_1, r_2 \in M$ ve $r_1 + r_2 = 0 \in M$, $r_1, r_2 \in M$ sağlanır
 $r_1 \neq 0$ ve $r_2 \in M$ iken $r_1 + r_2 = r_2 \in M$ ve $r_1 \cdot r_2 = 0 \in M$ sağlanır

Fakat $r_1 \neq 0 \neq r_2 \in M$ iken $r_1 + r_2 < 0$ olacağından $r_1 + r_2 \in M$ ile,
 $r_1, r_2 > 0$ olur. Fakat $r_1, r_2 \in M$ ile $r_1 \cdot r_2 \notin M$ dir.

Öylece bu küme miti yukarıdaki gibi tanımlanmaz.

$M = \{r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \mid r_1 + r_2 = 0\}$ kümesi verilen şartları sağlar mı?

$r_1 = 0 = r_2$ iken $r_1 + r_2 = 0$ olduktan $0 \in M$ olduktan $M \neq \emptyset$

* Sonundan $M \subseteq \mathbb{Q}$

* $r_1, r_2 \in M$ olur $\Rightarrow r_1 + r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = -r_2$
 0 halde M kümesi $r, -r$ sayı çiftlerinden oluşur.
 Fakat her $r \in \mathbb{Q}$ iken hem $r \in M$ hem de $-r \in M$ olduktan
 bu küme verilen şartları sağlamaz.

$M \subseteq \mathbb{Q}$ verildiğinden $M \neq \mathbb{Q}$ dir. Zaten $M = \mathbb{Q}$ olması imkânsız.
 Çünkü yukarıdaki şekilde olduğu gibi $\forall r \in \mathbb{Q}$ iken $r \in \mathbb{Q}$ ve $-r \in \mathbb{Q}$ dir.

$M = \mathbb{Q}^+$ kümesinin verilen şartları sağladığını biliyoruz. Fakat $N \subset M$
 o.s. bir N kümesi de verilen şartları sağlar mı?

$N = [\frac{1}{2}, \infty) \subseteq \mathbb{Q}$ o.s. tanımlayalım.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \in N$ dir. $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} \notin N \Rightarrow$ (a) ilki sağlamaz.

$\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$ iken ne $\frac{1}{6} \in N$ ne $-\frac{1}{6} \in N$ dir $\Rightarrow$ (b) ilki sağlamaz

$\therefore N$ istediğimiz küme olmayan. Aynı şekilde N 'yi başka bir şekilde
 olarak da tanımladık da şartları sağlamaz.

Benzer bir düşünce olarak da $M \subseteq \mathbb{Q}^+$ veya $M = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ kümesi
 verilen şartları sağlamadığından $\{0\} \neq N \subset M$ kümesi de aradığımız
 küme olamaz.

Çözüm olarak soruda verilen M kümesinin $\{0\}$ veya $\mathbb{Q}^+$ veya
 bu kümenin bir kısmı olan $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ kümesinden biri olduğunu söyleyebiliriz.

Şekil 4.20. S4'ün Problem 8 için yazdığı günlük (devam)

S4'ün çözümünde örnek bulma çabasının olduğu dikkati çekmiştir. S4, rasyonel sayılar kümesinin bazı alt kümelerinin verilen koşulları sağlayıp sağlamadığını ispatlamaya çalışmıştır. S4, bunu günlüğünde yazdığı açıklamalarda

açık bir şekilde dile getirmiştir. Aşağıda öğretmen adayının düşünme süreçleri hakkında yazdıkları yer almaktadır:

“ilk önce böyle bir kümeyi nasıl oluşturabilirim diye düşündüm. Fakat kümeyi inşa etmek yerine Q nun alt kümelerine bakıp bu şartları hangileri sağlar diye inceledim. Aslında önce $M=Q^+$ kümesi üzerinde düşündüm. Fakat bundan daha basit bir küme ile çalışmak daha kolay olur diye $M=\{0\}$ kümesinin bu şartları sağladığını göstermeye çalıştım. Daha sonra $Q^+ \cup \{0\}$ birleşim kümesinin daha geniş kapsamlı oluşuyla bu küme üzerinde çalıştım. Q^- kümesinin sağlamadığını görüp verilen şartları sağlamadığını göstererek böyle bir küme inşa edemeyeceğimizi göstermeye çalıştım. Benzer düşünce ile verilen M kümesinin $\{r_1, r_2 \in Q, r_1 + r_2 = 0\}$ o.ş. bir küme olamayacağını göstermeye çalıştım. Aynı şekilde Q nun diğer alt kümeleri üzerinde düşündüm. Sonuç olarak M nin en geniş ifadesinin $M=Q^+ \cup \{0\}$ olduğunu gördüm.” (S4)

Bu çözümde S4’ün hangi kümeleri inceleyeceğini belirlemede sezgilerini kullandığı düşünülmektedir. Öte yandan S4, belirlediği kümelerin verilen şartları sağlayıp sağlamadığını ispatlama girişiminde bulunarak mantıksal düşünmeye de çalışmıştır. Fakat S4’ün, yapmaya çalıştığı ispatlar anlaşılır gelmemiştir. S4’ün bu çözümü, bulduğu sonuçlar açısından S9’un çözümüne benzemektedir (Şekil 4.12). Ancak S9’un S4 kadar ispat yapmakla uğraşmadığı dikkati çekmektedir. Bu durum S4’ün S9’a göre daha fazla mantıksal düşünmeye çalıştığını akla getirmektedir.

Mantıksal adımların dikkat çekici bir şekilde görüldüğü günlük S5’in Problem 9 için yazdığı günlüktür. S5, önce fonksiyonla ilgili ipuçları toplamıştır. Topladığı ipuçları diğer öğretmen adaylarının belirlediklerinden çok daha fazladır. S5, çözümünde oldukça kesin adımlarla ilerleyişi onun sezgilerine hiç başvurmadığını düşündürmektedir. Bu problemde bazı öğretmen adayları örnek belirlemeye çalışmış, bazıları özel durumlarda inceleme yapmış ve çok azı da özel değerleri inceleyerek ipucu toplamaya çalışmıştır (EK 10). S5’in ipucu toplamak için bu stratejilerin hepsini kullandığı ve ardından f ’nin birim fonksiyon olduğunu fark edip formal ispat yapmaya çalıştığı gözlemlenmiştir (Şekil 4.21). İleriki bölümlerde bu çözüm diğer öğretmen adaylarının çözümleri ile karşılaştırmalı olarak daha detaylı bir şekilde incelenecektir.

Cözüm: $x=0$ $y=0$ olur. $f(0+f(0)) = f(0)^2 = f(f(0)) = f(0)^2$ $x=1, y=0$ için $f(1+f(0)) = f(1)^2$ $x=0, y=1$ $f(f(1)) = 1 + f(0)^2$ $x=1, y=1$ $f(1+f(1)) = 1 + f(1)^2$ $x=-1, y=0$ $f(1+f(0)) = f(-1)^2$ $x=0, y=-1$ $f(f(-1)) = f(0)^2 - 1$ $f(-1)^2 = f(1)^2 \Rightarrow f(-1) = \pm f(1)$ $f(1) = f(-1)$ olur. $f(f(1)) = f(0)^2 + 1 = f(0)^2 - 1$ $0 = -2$ çıkarılır. $f(1) = -f(-1)$ olur. $0 \neq 0$ $x=0, y=a$ olur. ① $f(f(0)) = a + f(0)^2$ $x=0, y=-a$ ② $f(f(-a)) = -a + f(0)^2$ $x=a, y=0$ $f(a^2 + f(0)) = f(a)^2$ $x=-a, y=0$ $f(a^2 + f(0)) = f(-a)^2$ $f(a) = \pm f(-a)$ $f(0) = \pm f(-a)$ olur. ③ $f(f(0)) = f(a)^2 + a = -a + f(0)^2$ ②'den $0 = 2a$ çıkarılır. $f(a) = -f(-a)$ dir. $\forall a \in \mathbb{Z}$ ve $a \neq 0$ için $f(a) = -f(-a)$ dir. 0 zaman f tek. $-f(a) = f(-a)$ dir. 0 zaman f tek. $f(f(x^2 + f(y))) = y + f(x)^2$	<table border="1"> <tr> <td></td><td></td></tr> <tr> <td>Akıcılık</td><td></td></tr> <tr> <td>Esneklik</td><td></td></tr> </table> Düşünme Süreçleri Sadece Birim Fonksiyon			Akıcılık		Esneklik	
Akıcılık							
Esneklik							

Şekil 4.21. S5'in Problem 9 için yazdığı günlükten alıntı

Problem 9'da S5 fonksiyon ile ilgili birbirine benzer özellikleri araştırırken S4 fonksiyonla ilgili birbirinden farklı özelliklere bakmaya çalışmıştır (Şekil 4.22). S5, belli bir fikirden başlayarak zincirleme olarak fikir üretirken S4 daha farklı özellikleri incelemiştir. S4'ün bu incelemelerinde ispat yapmaya çalıştığı görülmektedir. Bu durumun onun mantıksal düşünme çabasını gösterdiği düşünülmektedir.

Çözüm: $f = I$ birim fonksiyon
bu şartları sağlar.

$$f = I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x$$

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \text{ mi?}$$

$$f(x) = x, \quad f(y) = y$$

$$(f(x))^2 = x^2$$

$$\Rightarrow f(x^2 + f(y)) = f(x^2 + y) = x^2 + y$$

$$= (f(x))^2 + y$$

O halde f birim fonksiyonu tüm birleşik
veya süperjektifdir. Yani sürekliliği limiti $I-I$ 'dir
örneğin gibi birim fonk. lineer olduğundan $I-I$ 'dir,
örneğin, süreklidir, ters vardır ve süreklidir.
Tersinde kendisine eşittir.

$$x=0, y=0 \Rightarrow f(f(0)) = (f(0))^2$$

$$f(0) = a \in \mathbb{R} \text{ o.s. } a \in \mathbb{R} \text{ vardır. Fakat } a = ?$$

$$\Rightarrow f(f(0)) = (f(0))^2$$

$$f(a) = (a)^2 = a^2 \longrightarrow f(a) = a^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyonu, } g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \text{ fonk. ile}$$

$$x \longrightarrow x^2$$

$$f(a) = a^2 \text{ tüm } (a, a^2) \text{ noktalarında kesirler.}$$

Burada f fonksiyonu $I-I$ mi?

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ iken } x_1 = x_2 \text{ mi?}$$

$$f(x_1^2 + f(x_1)) = f(x_2^2 + f(x_2))$$

$$x_1 + f(x_1)^2 = x_2 + f(x_2)^2$$

$$x_1 - x_2 = [f(x_2) - f(x_1)][f(x_1) + f(x_2)]$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ } I-I \text{ 'dir.}$$

Şekil 4.22. S4'ün Problem 9 için yazdığı günlük

Örten mi? $\forall r \in \mathbb{R}$ için $f(x) = r$ dır. $x \in \mathbb{R}$ var mı?

$$f(x^2 + f(x)) = x + f^2(x)$$

$$f(x^2 + f(x)) - f^2(x) = x.$$

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x^2 + f(x)) - f^2(x) = f(y)$ dır.
 y var mı? belirsiz.

$$f(x^2 + f(x)) = x + f^2(x)$$

$$x=0 \Rightarrow f(f(0)) = f^2(0)$$

$$x=1 \Rightarrow f(1 + f(1)) = 1 + f^2(1)$$

$$x=2 \Rightarrow f(2 + f(2)) = 2 + f^2(2)$$

$r > 0$ reel sayılar için $x = r$

$$\Rightarrow f(r + f(r)) = r + f^2(r)$$

$r > 0$ ve $f^2(r) > 0$ old. dan pozitif reel sayılar için bu fonksiyon $\mathbb{R}^+$ 'de görüntülenir.

$$x=-1 \Rightarrow f(1 + f(-1)) = -1 + (f(-1))^2$$

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2} + f(-\frac{1}{2})) = -\frac{1}{2} + (f(-\frac{1}{2}))^2$$

$$x \in \mathbb{R}^- \text{ için } f(x^2 + f(x)) = x + f^2(x) \geq 0 \text{ alın}$$

$$\Rightarrow x + f^2(x) \geq 0 \Rightarrow f^2(x) \geq -x = |x|$$

$$\Rightarrow f(x) \geq |x| \text{ ya da } f(x) \leq -|x|$$

$$x \in (-1, 0] \text{ için } x^2 \leq |x| \text{ dir! } f(x) \geq |x| \text{ alın}$$

$$\Rightarrow x + f(x) \geq x + |x| \geq 0 \Rightarrow x + f(x) \geq 0$$

$$x^2 + f(x) \geq x^2 + |x| \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$f(x) \leq -|x| \text{ için } x^2 + f(x) \leq x^2 + |x|$$

Şekil 4.22. S4'ün Problem 9 için yazdığı günlük (devam)

Mantıksal düşünme açısından S4'te dikkati çeken bir nokta da S4'ün sezgisel çözümden çok mantıksal çözümü önemseyişini düşündürmektedir. Bunu öğretmen adayı ile yapılan son görüşmedeki bir ifadesinde görmek mümkündür. S4, Problem

18’de S15’in yaptığı çözüm için “...daha güzel, hani daha basit, daha böyle ikna edici, daha somut” ifadesini kullanmıştır. Kendisinin üzerinde epeyce uğraşıp ispatın bir kısmını sezgileri ile tamamladığı bu problemde S15’in çözümünü “daha ikna edici” olarak nitelendirmesi onun mantıksal çözüme önem verdiğini düşündürmektedir.

Mantıksal düşünmenin daha çok görüldüğü S5’in günlüklerinde sık sık işlemlere başvurduğu dikkati çekmiştir (örneğin Şekil 4.18, Şekil 4.36). Bu durum onun işlemlerden kaçınmadığını göstermektedir. Öte yandan S2’de işlem yönünden kendinde hissettiği eksikliği S5’in işlemlerde gösterdiği sabrı örnek göstererek açıklamıştır.

G: Derste çözdüğümüz problemleri şöyle bir düşünelim o problemlerde senin düşünemediğin çözüm yolları üretenler oldu mu yani farklı çözümler çıktı mı? Tartıştığımız çözümleri düşünürsek.

S2: Aslında çok fazla çıkmadı böyle dikkat ettim de ben. Genelde S5 arkadaşımız çok farklı çözüm yolları yapıyor. Ya onları da onun çözümlerini de incelediğim zaman işte benim işlem yapmadığım şeylerde o işlem yapmış devam ettirmiş ondan sonra bulabilmiş yani. Genelde çok farklı düşünmedi yani benden ama yani işlem zevki olduğundan dolayı işleme giriyor hemen sonra en sonuna kadar gidiyor yani.

Görüşmede algoritmik işlemlerle sonuca ulaşabileceği durumlarda ne yapacağı sorulduğunda; S5’in verdiği cevap S2 ve S9’un yukarıda yer alan cevabından farklı olmuştur. S5, çözümü sonuna kadar devam ettirdiğini belirtmektedir.

“Birkaç tanesini denerim gerçekten oluyorsa hani direkt ele alır işlemlerden çözerim yani. Bu budur derim.” (S5)

S5’in oldukça detaylı (hatta bazen gereksiz yere) bir şekilde küçük adımlarla mantıksal ilerleyişi, kalabalık bile olsa işlemlerle ısrarla uğraşıp sonuca ulaştırma çabası günlüklerini takip etmeyi zorlaştırmış ve zaman zaman okunmasını sıkıcı hale getirmiştir. Ancak, emin adımlarla ısrarlı ilerleyişi, Problem 9’da olduğu gibi, fikirlerinin derinleşmesine neden olmuş ve kimsenin ulaşmadığı sonuçlara ulaşmasını sağlamıştır (Şekil 4.21).

Mantıksal düşünen S5'in günlüklerinden birinde yazmış olduğu aşağıdaki ifadesi onun problem çözme konusunda risk almadığını düşündürmektedir:

“... herhangi bir problemle (bu günlük hayattan da olabilir) uğraşırken 1000 tane fikrim olup bunların beni yalnızca götürmesindense 1 tane fikrimin olup bunun da doğru olması daha iyi idi.” (S5)

S5'in Problem 1a, 8 ve 9'da yaptığı çözümler diğer günlüklerle karşılaştırıldığında onun mantıksal düşünmesini daha net olarak ön plana çıkarmaktadır. Mantıksal düşünme, görüşme yapılan öğretmen adaylarından S4'te de görülmekle birlikte S4'ün mantıksal düşünmesinin S5'inki kadar dikkat çekici olmadığı düşünülmektedir. Öte yandan görüşme yapılmış diğer öğretmen adaylarında mantıksal ve sezgisel düşünme açısından net bir ayırım yapılamamıştır. Ancak bu öğretmen adaylarının S2 ve S9 kadar sezgisel düşünmedikleri ayrıca S5 kadar da mantıksal düşünmedikleri düşünülmektedir.

Mantıksal düşünmenin dikkat çektiği S4 ve S5'in fakülte genel not ortalamalarına bakıldığında S4'ün 3,82 ve S5'in 3,58 ortalamasına sahip olduğu görülmüştür. S4 ve S5, bu not ortalamalar ile araştırmaya katılanlar arasında en yüksek ortalamaya sahip öğretmen adaylarıdır.

Sonuç olarak mantıksal düşünmenin en çok görüldüğü öğretmen adayında (S5'te) dikkat çeken problem çözme davranışları şunlardır:

- Algoritmik işlemlerden kaçmamak,
- Kesin adımlarla ilerlemek,
- Problem çözmede risk almamak,
- Düşünceleri detaylı bir şekilde yazmaktan kaçınmamak.

4.1.4. Sonuca Odaklı Problem Çözme Davranışı

Öğretmen adaylarından toplanan veriler çoğu öğretmen adaylarında daha önceden var olan bir problem çözme davranışını işaret etmektedir. Bu araştırmada “sonuca odaklı problem çözme davranışı” olarak ifade edilen bu davranış, öğretmen

adaylarının çözüm yolundan ziyade sonuca ulaşmaya daha çok önem verdiklerini düşündürmektedir. Bu davranışın varlığına işaret eden bulgulara, öğretmen adaylarının kendileri ile ilgili gelişmeleri yazdıkları günlüklerde rastlanmıştır. Aşağıda bu bulgular yer almaktadır.

“...çünkü çözüm yollarının sonuçtan daha önemli olduğunu öğrendim ben yani daha öncesinde pek fazla irdelemiyordum yani çözüme ulaşmak için yapılan işlemleri falan ama çözüm yolunun sonuçtan daha önemli olduğunu bu dersten sonra öğrendim. ...” (S2)

“Genelde biraz daha problemin çözümüne, sonucuna odaklanmış olunca çözüm yolunu pek düşünmüş olmuyorum. Sadece zorlama durumunda yani mecburiyetim varsa o durum için o zaman çözmeye çalışıyorum...” (S4)

“Başlangıçta aldığımız eğitime bakarsak esnek düşünmeye elverişli değildi. Şu yöntemden giderek çözümü bulun derlerdi biz de onu uygulardık. Bizim için önemli olan sonuca gitmekti. Bundan dolayı alışkanlıklardan olsa gerek bir çözümü bulunca farklı bir çözüm yolu düşünmüyorum. Ama bu alışkanlığımın değişebileceğini fark ettim.” (S6)

“Önceleri karşıma bir soru geldiği zaman hemen çözmeye başlardım. Amacım hemen sonucu bulmaktı. Ama şimdi soru üzerinde düşünmeye başladım. Farklı çözüm yolları bulmaya uğraşıyorum. Şu an çok fazla başarılı olduğum söylenemez ama en azından uğraşıyorum. Eskiden farklı çözüm yolu bulmak aklıma bile gelmezdi.” (S9)

“Bir çözüm bulunca soru benim için bitiyor. Bunu henüz aşamadım.” (S8)

“İlk derse başladığımızda bana sorulan sorularda ürettiğim her çözümü söylemek yerine karşıdakine ürettiğim bir çözümü ispatlamaya çalışıyordum. Çünkü benim için gidilen yolun bir önemi yoktu. Önemli olan sonuç... Bulduğum yol doğruysa 1000 tane yol bilmemle 1 tane yol bilmem arasında pek bir fark yoktu. Çünkü sonuçta o 1 ile de 1000 ile de doğru sonucu buluyorum. Açıkçası ben aklıma çok yol gelmesi ile değil gelen yolların doğru olması ile ilgileniyordum. Çünkü herhangi bir problemle (bu günlük hayattan da olabilir) uğraşırken 1000 tane fikrim olup bunların beni yanıltıp götürmesinden 1 tane fikrimin olup bunun da doğru olması daha iyi idi. Ben diğer insanlardan farklı olmaya hiç çalışmazdım. Açıkçası o sonucu bin kişi de bulsa bu benim doğrudu, bir tek ben de olsam bu benim doğrudu. Çünkü ben soruları kendi anladığım gibi çözerdim. Şimdi biraz daha farklı yollar var mı diye düşünüyorum. Galiba siz de istediğiniz için farklı olmaya çalışıyorum. Açıkçası çok yol kat ettiğimi söyleyemeyeceğim.” (S5)

Bu ifadelerin ortak noktasını S5'in "...benim için gidilen yolun bir önemi yoktu. Önemli olan sonuç..." ifadesinin özetlediği söylenebilir. Ayrıca bu ifadeler, eski alışkanlıklarında birden fazla çözüm bulmanın önemsenmediğini hatta buna ihtiyaç duyulmadığını göstermektedir. Öte yandan, birden fazla çözüm bulma konusunda yaşanan güçlüklerin nedenleri arasında belirlenmiş olan *önceden yapılan çözüme saplanma ve bir çözüm bulma rahatlığının* sonuca odaklı problem çözme davranışının bir sonucu olabileceği tahmin edilmektedir.

Öğretmen adaylarının ifadelerinde dikkat çeken başka bir nokta da seçmeli dersin onların problem çözme alışkanlıklarına olan etkisidir. Bu ifadeler seçmeli dersin, öğretmen adaylarında daha önceden var olmayan başka çözümler araştırma çabasının oluşmasını sağladığını göstermektedir.

Yukarıda yer alan ve S5'e ait olan ifadede öğretmen adayı çözüm sürecini yani problemi hangi yoldan çözdüğünü hiç önemsemediğini belirgin bir şekilde vurgulamaktadır. Özellikle de S5'in

"Açıkçası ben aklıma çok yol gelmesi ile değil gelen yolların doğru olması ile ilgileniyordum. Çünkü herhangi bir problemle (bu günlük hayattan da olabilir) uğraşırken 1000 tane fikrim olup bunların beni yanılsıza götürmesinden 1 tane fikrimin olup bunun da doğru olması daha iyi idi. Ben diğer insanlardan farklı olmaya hiç çalışmazdım."

ifadesi problem çözme konusunda risk almak istemediğini göstermektedir. Bu düşünce, S5'in mantıksal düşünmesini daha da pekiştirmesine neden olmuş olabilir.

Sonuca odaklı problem çözme davranışının ortaya çıkmasında en büyük etkenin ÖSS'ye hazırlık sürecinin olduğu düşünülmektedir. Çünkü ÖSS'de kısa zamanda çok problem çözmek gerektiğinden sonucun ne olduğunu seçenekler arasından işaretleyebilmek çok önemlidir. Dolayısıyla böyle bir sınava hazırlanan öğrenciler, hazırlık aşamasındaki çalışmalarında yalnızca sonuca odaklanmaktadırlar. Bu durumu S6 ve S2 görüşmede şu şekilde dile getirmişlerdir:

"...Çünkü ÖSS sınavında biz şeye alıştık, hani herkesten duymuşsunuzdur gerçi ama doğru yani bunlar. Daha çok hani az bir vakitte çok soru çözmeye

çalıştık. Onun için de birçok yoldan ziyade tek yol ve en emin yol. En emin olduğumuz yol neyse o.”(S6)

“...şu anki sistemde yani okulda olsun ÖSS sisteminde olsun falan sonuçta sadece çözümü istiyor... önemli olan sonuç, sonuca ulaşmak çözüm yollarını irdeleyen bir sistem olmadığından dolayı önemli olan sonuç yani bence şu anda o yüzden genelde pek yapmayız yani”(S2)

S2'nin bu ifadesi sonuca odaklı problem çözme davranışına eğitim sisteminin neden olduğunu işaret etmektedir.

Diğer yandan öğretmen adaylarından S9'un aşağıdaki ifadesi ÖSS'de zaman kazanmak için sezgilerini kullandığını göstermektedir.

“ÖSS'ye girerken mesela vakit kazanmak için hani formül değil de normal direkt bakarak bazı yerler görüldüğü mü diye baktığım oluyordu ki bayağı bir soruda olmuştu yani. Çünkü ben bayağı bir zaman kazanmıştım o şekilde. İyi oluyordu. İşlem yaparak bayağı uzun sürüyordu ama şekiller çizerek falan bayağı kısa çıkabiliyor bazı sorular.”(S9)

Sonuca odaklı davranışın varlığına da işaret eden bu ifade, ayrıca S9'un vakit kazanmak amacıyla sezgilerini geliştirdiğini düşündürmektedir. Ancak sezgisel yollarla sonuca ulaşmak, öğretmen adayının formal yollardan sonuca ulaşma konusunda sıkıntı yaşamasına neden oluyor gibi görünmektedir. Bu sonucu akla getiren durum, S9'un Problem 21'de yaptığı çözüm hakkında söyledikleridir.

S9: Hocam önce işte aralarında bir bağıntı falan var mı ilk başta çözüm varmış gibi düşündüm daha sonra işte bir yere kadar geldim işte bir iki tane eşitlik bulmuştum. Sonra baktım çözüm yok çözümün olmadığını gördüm de hani net denklemlerle ifade edemedim. Daha sonra ona göre düşünmeye başladım. Çözüm yokmuş gibi düşünmeye ondan sonra.

...

G: Peki bu derste değil de başka bir zaman o soruyu çözüyor olsaydın yine aynı çözüm yolunu düşünür müydün?

S9:Hocam o zaten normal çözdüğüm yöntemdi. Yani başka yoldan çözemedim soruyu zaten. Mecburen onu yazacaktım.

G: İlk aklına gelen?

S9:İlk başta soruyu çöz.. Baktım şöyle bir hani genelde öyle yaparım hani çözüm yolunu bulmaya şey doğru çözüm hangisi diye bulmaya çalışırım.

G: Onu nasıl yaparsın? Yani Ne yaparsın?

S9:Bakıyorum şöyle değer falan veriyorum bir şekilde çıkıyor yani ÖSS mantığı. Çözüm olmadığını gördüm orada geriye sadece anlatması kaldı

onu. Onu da hangi yöntemle yani nasıl bir şekilde anlatabilirim diye düşündüm.

Seçmeli derste öğretmen adayları farklı çözüm bulmaları konusunda cesaretlendirilmesi, öğretmen adayının bu çözümü yapmasında etkili olabileceği düşüncesiyle öğretmen adayına yöneltilen *“bu derste değil de başka bir zaman o soruyu çözüyor olsaydın yine aynı çözüm yolunu düşünüyor muydun?”* sorusu sorulmuştur. Öğretmen adayının bu soruya verdiği cevap *“Hocam o zaten normal çözdüğüm yöntemdi. Yani başka yoldan çözemedim soruyu zaten. Mecburen onu yazacaktım.”* olmuştur. S9’un bu cevabı sezgisel olarak fark ettiği sonucu formal yoldan ifade etmede güçlük yaşadığını düşündürmektedir. S9’un *“Sonra baktım çözüm yok çözümün olmadığını gördüm de hani net denklemle ifade edemedim. Daha sonra ona göre düşünmeye başladım.”* ifadesi bu düşüncüyü daha da kuvvetlendirmektedir. Benzer bir durum S9’un Problem 9 için yaptığı çözüm ile ilgili söylediklerinde de dikkati çekmiştir.

“Bir şeyler bulmuştum derste de nerden bulduğumu anlamamıştım ona biraz bakmıştım da. Ya gerçi doğruydu da kesinlik kazandıraramamıştım soruya. Kendim bir şekilde buluyorum da işte bazen anlatması zor oluyor.”(S9)

Bu ifade, S9 ile ilgili olarak tespit edilen *“sezgisel çözümü formal yoldan ifade etmede güçlük çekmektedir”* sonucunu desteklemektedir.

Sonuç olarak, *“sonuca odaklı problem çözme davranışı”*nda, öğretmen adaylarının çözüm yolundan ziyade sonuca ulaşmaya daha çok önem verdiklerini gözlemlenmiştir. Öğretmen adaylarının birden fazla çözüm bulmayı önemsememeyi alışkanlık haline getirdikleri ve hatta buna ihtiyaç duymadıkları gözlemlenmiştir. ÖSS’ye hazırlık sürecinin bu durumu yaratmış olabileceği düşünülmektedir. Sonuca odaklı problem çözme davranışının *önceden yapılan çözüme saplanma ve bir çözüm bulma rahatlığının* oluşmasına neden olabileceği düşünülmektedir. Bu çalışmada uygulanan seçmeli ders, öğretmen adaylarında daha önceden var olmayan başka çözümler araştırma çabasının oluşmasını sağlamıştır.

4.2. Çözüm Bulma Güçlüğü

Araştırmanın ikinci alt problemi “Problem çözme süreci içinde öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler nelerdir?” olarak belirlenmiştir. Burada bu probleme cevap aranmaya çalışılacaktır.

4.2.1. Problem Çözme Sürecinde Karşılaşılan Güçlüklerin Nedenleri

Günlüklerde öğretmen adaylarının yaptıkları bazı hatalar nedeniyle çözüme ulaşamadıkları görülmüştür. Ayrıca bazı öğretmen adaylarının çözüme kolayca ulaşırken bazılarının ulaşamaması ya da ulaşmak için daha fazla çaba sarf etmesi gibi durumlar dikkati çekmiştir. Öte yandan, yapılan görüşmelerde de öğretmen adayları çözüm üretme konusunda yaşadıkları güçlükler hakkında da bazı bilgiler vermişlerdir. Öğretmen adaylarının gerek açık uçlu problemlerdeki fikir üretme çabalarında, gerekse diğer problemlerdeki birinci çözümü ya da birden fazla çözüm bulma çabalarında karşılaştıkları güçlüklerin nedenleri “*çözüm bulma güçlüğü*” adı altında toplanmıştır. Bu nedenler:

- a. Mantıksal hatalar yapmak
- b. İşlemlerde hata yapmak
- c. İşlemlere saplanmak
- d. Problemdeki verileri iyi analiz etmemek
- e. Çözüm için uygun strateji geliştirmemek
- f. Kendi düşüncesini sınırlandırmak
- g. Düşünmeyi zorlaştıracı sembol ve temsiller seçmek
- h. Düşünmeyi zorlaştıracı tercih yapmak
- ı. Önceden öğrenilmiş çözüm yoluna saplanmak
- i. İlk yapılan çözüme saplanmak
- j. Bir çözüm bulma rahatlığı

olarak tespit edilmiştir. İlerleyen kısımlarda her bir güçlük nedenleri günlük ya da görüşme kesitlerinden verilecek örneklerle açıklanacaktır.

Mantıksal hatalar yapmak: Öğretmen adaylarından toplanan günlüklerde çeşitli mantıksal hatalarla karşılaşıldığı olmuştur. Tespit edilen mantıksal hata şekillerinden biri tümevarım yönteminin kullanılmasında, biri çelişki bulma yolu ile ispatlama durumunda, bir diğeri de doğrudan ispat yönteminde yanlış çıkarım yapılması durumunda tespit edilmiştir. Mantıksal hataya, en çok Problem 20’de rastlanmıştır (EK 13).

Karşılaşılan mantıksal hatalara örnek olarak S7 ve S12’nin günlükleri aşağıda yer almaktadır. Bu öğretmen adaylarından S7, Problem 2a’yı ispatlamaya çalışırken tümevarım ilkesinden yararlanmayı tercih etmiştir. Bu problemde tümevarım ilkesini uygulamaya çalışması ve uygulama şekli oldukça mantıksız görünmektedir (Şekil 4.23).

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$

$\Rightarrow z=2$

Bu durum $x \leq 1, y \leq 1, z \geq 1$ durumunda geçerlidir. Yani z x ve y nin en küçük durumunda bile 1 ve 1 den küçük değere alamaz. ($z > 1$)

Şimdi $x \leq 1, y > 1, z \geq 1$ durumunu deneyelim. x için sadece 1 ya da 0 olma durumu vardır.

$x=0, y=2 \Rightarrow \begin{cases} x+y=0+2=1+2=3=z \\ x+y=1+2=1+2=3=z \end{cases}$ uygun z yok

Tümevarım kullursak $y=n$ için uygun z olmasın, şimdi $y=n+1$ için bakalım

$y=n+1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=0+(n+1)=1+(n+1)n(n-1) \dots 1 \neq z, \text{ o.s. } z \text{ yok} \\ x+y=1+(n+1)=1+(n+1)n(n-1) \dots 1 = z, \text{ o.s. } z \text{ yok} \end{cases}$

Yani $x \leq 1, y > 1, z \geq 1$ için uygun durum sız konusu değildir.

Aynı işlemi $x > 1, y \leq 1, z \geq 1$ durumu için hâlelersek sonuç yine aynı bulunur.

Şekil 4.23. S7’nin Problem 2a için yazdığı günlükten alıntı

S12'nin Problem 2b'deki ispatı ise çelişki bulma yönteminin kullanılmasında yapılan mantıksal hataya örnek olarak verilebilir (Şekil 4.24). Öğretmen adayının ispatlaması gereken ifade " $x!y!=z!$ olacak şekilde sonsuz tane $x>1$, $y>1$ $z>1$ sayılarının olduğunu gösteriniz" şeklinde idi. Öğretmen adayının "Varsayalım ki $x=0,1$ iken $y>1$ ve $z>1$ tamsayıları olmasın." kabulü ve bu kabulünün ardından yazdığı "o zaman $y=0,1$ ve $z=0,1$ için zaten var olduğundan ve $y<0$, $z<0$ olamayacağından $y>1$ ve $z>1$ " ifadesinde hiçbir mantık görülememiştir. Öte yandan çözümün devamında $3!5!=6!$ örneğini göstererek eşitliği sağlayacak bir örneğin sonsuz çözümün varlığı için yeterli olacağını belirtmesi de ayrı bir mantıksal hata olarak görünmektedir.

b) $x!, y! = z!$ $x>1$ $y>1$ $z>1$
 $x=0,1$ ve $y=0,1$ için $z=0,1$ asikendir.
 $x=0,1$ için $y>1$ ve $z>1$ sayıları vardır.
 Örneğin $1! \cdot 4! = 4!$
 Varsayalım ki $x=0,1$ iken $y>1$ ve $z>1$ tamsayıları olmasın.
 O zaman $y \leq 1$ $z \leq 1$
 eşitlik $y=0,1$ $z=0,1$ için zaten var olan $x,y,z \in \mathbb{N}$ olduğundan ve $y<0$ ve $z<0$ olamayacağından $y>1$ ve $z>1$ için eşitlik sağlanır.
 Acaba tersi vardır?
 $x=0,1$ için y ve z sonsuz değildir.
 Aynı durum $y=0,1$ ise x ve z için de geçerlidir.
 Ayrıca $x>1$ $y>1$ $z>1$ i aynı zamanda sağlayacak bir tek örnek sonsuz çözüm için yeterlidir.
 $3! \cdot 5! = 6!$

Şekil 4.24. S12'nin Problem 2b için yazdığı günlük

İşlemlerde hata yapmak: Çözümlerinde algoritmik işlem tercihi yapan öğretmen adaylarından bazılarının işlemlerde hata yaptığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının yaptıkları işlemsel hataların dikkatsizlikten kaynaklandığı tahmin edilmektedir. İşlemsel hataların öğretmen adaylarının doğru sonuçlara ulaşmalarını engellediği görülmüştür. Kimilerinin yaptıkları hata, devamında çıkarılabilecek sonuçlar üzerinde çok etkili değilken, kimilerinin hataları sonucu tamamen etkilemektedir. Problem 1a ve 1b’de işlemlerle fikir üretmeye çalışan S13’ün günlüğü bu duruma bir örnektir (Şekil 4.25). S13’ün günlüğünde z ’nin x ve y ’den büyük olduğunu belirtmesi dışında doğru fikir mevcut değildir. S13 özel değer ya da özel durum incelemesi yapmadan direkt olarak işlemlere başvurmuş ve işlemlerin en başında hata yapmıştır. Öğretmen adayı günlüğünde düşünme süreçleri hakkında şunları yazmıştır:

“Eğer işlem hatası yapmadıysam (ki genelde yaparım) problemi çok uzatmamaya çalıştım. Uzun çözümler can sıkıcı olabiliyor.” (S13)

S13’ün genelde işlem hatası yaptığını belirtmesi, öğretmen adayının problem çözme sürecinde genel olarak dikkatsizce işlem yaptığını düşündürmektedir. Günlüğü dikkatle incelendiğinde, anlamsız görünen birçok işlem yaptığı dikkati çekmiştir. S13’ün, “*çeşitli eşitlikler bularak bilinmeyen sayımı azaltmaya çalıştım ki sayısal ifadelere ulaşabileyim*” şeklinde ifade ettiği amacını gerçekleştirmek için kullanabileceği bir tek eşitlik vardır. Bu eşitliği kullanarak değişkenleri birbiri cinsinden yazmaya çalışmıştır. Dolayısıyla, işlemlerde hata yapmasaydı başladığı yere geri dönmüş olacaktı. Yani, aslında birçok işlem yapıp çözüme ya da fikir üretmeye yönelik hiç bir şey yapmamış olacaktı. Bütün bunlardan S13’ün bu problemde işlemlere saplandığı, işlemleri bir araç olarak etkili bir şekilde kullanamadığı sonucu çıkarılmıştır.

$x! = 1.2. \dots x$ dersen
 $y! = 1.2. \dots y$

$2.(1.2. \dots x) + (x+1) \dots y = 1.2. \dots y$
 2 kesin olarak x ve y den büyükten

$2 \cdot x! + (x+1) \dots y = \frac{1.2. \dots x}{x!} (x+1 \dots y) (y+1 \dots z)$
 $2 + \frac{(x+1) \dots y}{x!} = \frac{(x+1) \dots y}{x!} ((y+1) \dots z)$

$2 + \frac{y!}{x!} = \frac{y!}{x!} \frac{z!}{y!}$
 $2 + \frac{y!}{(x!)^2} = \frac{z!}{x!} \quad \frac{z!}{y!} = 2x! \frac{y!}{x!}$

$x! + y! = 2x! + \frac{y!}{x!} \Rightarrow (x!)^2 + y! \cdot x! = 2(x!)^2 + y!$
 $(x!)^2 + y! = y! \cdot x!$
 $(x!)(x! - y!) + y! = 0$
 $x! - y! = -\frac{y!}{x!}$
 $y! - x! = \frac{y!}{x!}$
 $x!((x+1) \dots y) = ((x+1) \dots y)$
 $x! = 1$ çıkar

x < y gibi bir kabul kullanırsak
 x ve y faktoriyelinden birini
 daha küçük kabul edersen
 sembolleştirirken
 zorlanmaya çalışmam
 doğrudur

çeşitli eşitlikler
 bularak bilineyen
 sayıları eşitliğe
 çalıştırarak
 eşitlik ifadeleri
 ulaşılabiliyor

Eğer işlem hatası
 yapmadıysam (Eğer
 gözde yaparsam)
 problemi çok uyarıcı
 manaya çalıştım. Ben
 problemler çok sıkıcı
 olabiliyor

Şekil 4.25. S13'ün Problem 1a için yazdığı günlük

İşlemlere saplanmak: Çözüm yolu tercihini algoritmik işlemlerden yana kullanan öğretmen adaylarından işlemlere saplanıp probleminden uzaklaşanlar olmuştur. Bu durumu belirtmek için *işlemlere saplanma* ifadesi kullanılacaktır. S20'nin Problem 1a için yazdığı günlükte bunun bir örneği görülmektedir (Şekil 4.26). S20, birçok işlem yapmış fakat aslında bir sonuç elde etmeye yönelik hiçbir şey yapmadığı görülmüştür. Çünkü verilmiş olan bir tek eşitlikten yararlanarak değişkenleri birbiri cinsinden yazmaya çalışmış, yine aynı eşitlikte yerine koyduğu için $z! = z!$ eşitliği ile karşılaşmıştır. Bu sonucun yanına "Aslında bu, eşitliğin doğru olduğunu gösterir mi bilmiyorum. Yine de ikna edici değil" şeklinde yazmıştır. Yani, bulduğu sonuçtan dolayı eşitliğin her durumda doğru olabileceğini düşünmüş, fakat bu düşüncenin doğru olmadığından da şüphelenmiştir.

Çözüm:

a) $x! + y! = 2!$

Özel rakamlarla eşitliğin

sağ olup sağlama değini görmek
istedim.

$x=0 \quad y=1 \quad 1+1=2$ için $0! + 1! = 1 + 1 = 2 = 2!$ yazılabilir.

Aynı şekilde ; $x=1, y=0$ için

$x=1, y=1$ için

$x=0, y=0$ için

de yazılabiliriz.

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2$

$3! = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

$6! = 720$

$7! = 5040$

x ve y ye bu değerler baraka değer verdiğimizde böyle bir
eşitlik elde edemeyiz gibi görünüyor. 3! den sonra büyük
rakamlar elde ediliyor. Yani, ardışık iki sayının arasındaki
fark çok büyük ve bu farkın bir sayının faktöriyelini olma
ihtimali düşük.

Yine de bu ihtimal üzerine biraz çalışmalıyım.

$x < y$ olduğunu kabul edelim.

$$x! + y! = x! + (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (y-1) \cdot y)$$

$$= x! + (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x) \cdot ((x+1)(x+2) \cdot \dots \cdot y)$$

$$= x! + x! \cdot ((x+1)(x+2) \cdot \dots \cdot y)$$

$$= x! \cdot [1 + ((x+1)(x+2) \cdot \dots \cdot y)] \quad (1)$$

$x! \cdot [1 + ((x+1)(x+2) \cdot \dots \cdot y)] = 2!$ o.b. 2 sayısının olup olmadığını

kontrol etmeliyim.

$x! + y! = 2!$ eşitliğine göre $x < 2$ ve $y < 2$ dir. $x < y$ olduğunu
negatif sayıların
faktöriyel alınmaz.

kabul etmiştim.

Şekil 4.26. S20'nin Problem 1a için yazdığı günlük

$$\begin{aligned}
 z! &= 1 \cdot 2 \cdots x \cdot (x+1) \cdots y \cdot (y+1) \cdots (z-1) \cdot z \\
 &= x! \cdot [(x+1)(x+2) \cdots y \cdot (y+1) \cdots (z-1)z] \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$(x+1)(x+2) \cdots y = \frac{y!}{x!}$$

$$(y+1)(y+2) \cdots z = \frac{z!}{y!}$$

(1) eşitliğini tekrar yazalım.

$$x! \cdot y! = x! \cdot [1 + (x+1)(x+2) \cdots (y)]$$

$$\Rightarrow \frac{x! + y!}{x!} - 1 = (x+1)(x+2) \cdots y = A$$

A eşitliğini (2) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
 z! &= x! \left[\frac{x! + y!}{x!} - 1 \right] [y(y+1) \cdots (z-1)z] \\
 &= x! \left[\frac{x! + y! - x!}{x!} \right] [y(y+1) \cdots (z-1)z] \\
 &= x! \left[\frac{y!}{x!} \right] [y(y+1) \cdots (z-1)z] \\
 &= y! y(y+1) \cdots (z-1)z \\
 &= z!
 \end{aligned}$$

Başladığım jere geri döndüm. Aslında bu eşitliğin doğru olduğunu göstermiyim. Bir de, itna edici değil.

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ eşitliğinde } x=0 \text{ alırsan,} \\
 z! &= 0! [(0+1)(0+2) \cdots y(y+1) \cdots z] \\
 &= 1 \cdot (1 \cdot 2 \cdots y(y+1) \cdots z) \\
 &= z!
 \end{aligned}$$

Neşreli soru! :)

Aynı jere de dörp dörpörüm ve başka şeyler düşünemiyorum. Biraz ara vermek (bu probleme) iyi olabilir.

Şekil 4.26. S20'nin Problem 1a için yazdığı günlük (devam)

S20, x ve y 'nin 0 ve 1 değerleri dışında eşitliğin sağlanmayacağını sezgisel olarak görmüştür. Bu durum, günlüğüne yazdığı şu açıklamadan anlaşılmaktadır.

“ x ve y 'ye 0 ve 1'den başka değer verdiğimizde böyle bir eşitlik elde edemeyiz gibi görünüyor. 5! 'den sonra büyük rakamlar elde ediliyor. Yani ardışık iki sayının arasındaki fark çok büyük ve bu farkın bir sayının faktöriyeli olma ihtimali düşük. Yine de bu ihtimal üzerinde biraz çalışmalıyım.” (S20)

S20, bu problemde birçok işlem yapmış fakat problemin çözümüne yönelik bir şey yapmamış olmasından dolayı bu problemde işlemleri etkili bir şekilde kullanamadığı yorumu yapılmıştır. Bu durumu ifade etmek için *işlemlere saplanma* kavramı kullanılmıştır. Öğretmen adayının sonucu sezgisel olarak fark etmiş olmasına rağmen işlemleri etkili olarak kullanamaması oldukça ilginçtir. Diğer yandan bu problemin yapılandırılmış hali olan Problem 2a'da da öğretmen adayının aynı şekilde işlemlere saplanmış olduğu saptanmıştır. Öğretmen adayı, Problem 2a ile bir sonraki gün karşılaşmış olmasına rağmen öğretmen adayı kendisini çözüme ulaştırmayan bu çözüme sadık kalmıştır ve ikinci kez işlemlere saplanmıştır.

Problemdeki verileri iyi analiz etmemek: Bazı problemlerde verileri iyi analiz etmediği için hatalı sonuçlara ulaşan öğretmen adaylarının olduğu görülmüştür. Örneğin, S4 ve S9'un Problem 8'de sıfır sayısının M kümesinde bulunamayacağını fark edememesi, M kümesinin ya pozitif rasyonel sayılar kümesi ya da $\{0\}$ kümesi olabileceği sonucunu çıkarmasına sebep olmuştur (Şekil 4.27). Benzer bir durum S4'ün çözümünde de görülmüştür. S4 de, 0'ın M kümesinde bulunmadığını gözden kaçırmıştır. Aslında bu öğretmen adayları, verilen şartlardan ikincisini iyi analiz edebilselerdi 0 sayısının M kümesinde bulunamayacağını fark edebilirlerdi. Çünkü eğer 0 sayısı M kümesine ait olsaydı hem r hem de $-r$, M kümesine ait olacaktı ki bu durum verilen ikinci şart ile çelişirdi.

b sızından **Cözüm :**

$M \subset \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ veya $M \subset \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ olur.

$0, b \in M$ iken $0, b \in M$ ise

$M \neq \mathbb{Q}^-$ ($0, b \in \mathbb{Q}^-$ iken $0, b \in \mathbb{Q}^+$)

Bundan dolayı $M \subset \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$

Akıcılık

Esneliklik

$r \in M \Rightarrow -r \notin M, r \neq 0 \Rightarrow M = \mathbb{Q}^+ \text{ ya da } \mathbb{Q}^+ \neq M$

$M = \mathbb{Q}^+$ için şartlar sağlanır.

$\mathbb{Q}^+ \neq M$ için şartları sağlayan küme bulmaya çalışalım

$M = \mathbb{Q}^+$ sağır. $M = \mathbb{Q}^-$ olamaz, çünkü $0 \in \mathbb{Q}^-$ için $0, 0 \notin \mathbb{Q}^-$

Öyleyse küme niteliğinde kesin olarak ya $M = \mathbb{Q}^+$ ya da $M = \mathbb{Q}^-$

$0 \in M$ olsun

$M = \{0, 2a, 4a, \dots, 2na, \dots\}$

$\Rightarrow M$ 'nin elemanı olan bir a rasyonel sayısının

bu "pozitif" kan sayı kuvvetleri bu kümenin elemanı.

Bu sayının bir pozitif kan sayı katları da bu kümenin elemanı. Bundan dolayı M kümesi sonsuz elemanlıdır. ($0 \notin M$ iken)

Şekil 4.27. S9'un Problem 3 için yazdığı günlükten alıntı

Cözüm için uygun strateji geliştirememek: Problem çözümünde sonuca ulaşamamanın nedenlerinden birinin "çözüm için uygun stratejinin geliştirilememesi" olarak tespit edilmiştir. Bu tespitlerden biri S3'le yapılan ikinci görüşmede ortaya çıkmıştır. S3, Problem 17'de belirtilen koşullar altında, verilen haritadaki A noktasından B noktasına gidilebilecek yolların sayısını belirlemek için yolları saymaya çalıştığını ancak bir türlü işin içinden çıkamadığını kendisiyle yapılan görüşmede açıkça dile getirmiştir.

"O ulaşma sorusunda mesela yapamadım soruyu farklı düşünemedim yani ona odaklandım. O sistemli sayma dediniz ya daha demin, onunla cebelleştirm bir ders boyunca, çıkamadım içinden. Başka bir şeye dönssem aklım hep orada kaldı yani yine. Ama orada çözümünü yapsam belki... yani farklı

türden yapsam belki çözümü de bulurdum dershanedeki öğretmenimin verdiği. Öyle yani. Çözümünü bir yapsak aklımızda daha orijinal çözümler üretmeye daha çok çalışıyoruz yani.” (S3)

S3’ün bu ifadeleri yolları saymak için uygun bir strateji geliştiremediğini ve başka çözüm yoluna da odaklanamadığını göstermektedir. Görüşmenin daha önceki kısımlarında S3, bir dershanedeki öğretmeninden bu problemin tekrarlı permütasyon kullanılarak yapılan çözümünü öğrenmiş olduğunu belirtmiştir. Bu ifadede geçen “dershanedeki öğretmenimin verdiği” diye bahsettiği çözümden öğrenmiş olduğu bu çözümü kastetmektedir.

Kendi düşüncesini sınırlandırmak: Haylock (1997), Krutetskii’nin (1976, akt. Haylock, 1997: 69) kendi kendini kısıtlamak (sınırlamak) fikrinden hareketle, öğrencilerin bir matematiksel problem hakkındaki düşüncelerinin problemde kullanılabilecek ya da problemle ilgili olabilecek elemanların yetersiz bir alanına (çeşidine) gereksiz yere kısıtlamasını *içerik-evren saplantısı* olarak ifade etmiştir.

Bu araştırmada da öğretmen adaylarının yaptıkları çözümlerde bir takım bilgilerle düşüncelerini sınırladıkları görülmüştür. Bu durumu ifade etmek için bu araştırmada düşünceyi sınırlandırmak kavramı kullanılmıştır. Bu durumla ilgili karşılaşılan örnekler aşağıdadır.

Birinci görüşmede verilen açık uçlu durumla ilgili S1, çözüm kağıdına f ’nin sabit teriminin 1 olduğunu ve $f(x)=g(x)+1$ eşitliğini yazmıştır (Şekil 4.28). Bu ifadeden S1’in f ’yi polinom fonksiyon olarak düşündüğü anlaşılmaktadır. Yani, f ’nin polinom fonksiyon olduğu düşüncesiyle öğretmen adayı bakış açısını daraltmıştır. Bu durum onun verilen fonksiyonu yalnızca polinom fonksiyonlar arasında aramasına neden olmuş olabilir.

$f: A \rightarrow B \quad \forall x, y \in A \text{ için}$
 $F(x+y) = F(x) \cdot F(y) \quad \text{eşitliğini sağlasın}$
 $f \text{ için?}$
 $F(x, y)$
 $x+y = xy$
 $x = xy - y$
 $y = \frac{x}{x-1}$
 $F\left(x + \frac{x}{x-1}\right) = F(x) \cdot F\left(\frac{x}{x-1}\right)$
 $\frac{x \cdot (x-1) + x}{x-1}$
 $xy = 1$
 $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$
 $F(y) = F(0) \cdot F(y)$
 $\downarrow$
 1
 $F(0) = 1$
 F 'nin sabit türevi $\frac{1}{2}$
 $F(x) = g(x) + 1$

Şekil 4.28. S1'in görüşmede verilen problem için yazdığı günlük

Problem 8'de S22'nin yaptığı incelemede $M = \mathbb{Z}^+$ sonucuna ulaşması öğretmen adayının düşüncesini tam sayılar ile sınırlandırmış olduğunu düşündürmüştür. (Şekil 4.29)

M kümesi $\mathbb{Z}$ olabilir mi?
 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ dir.
 $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. $a+b, ab \in \mathbb{Z}$ dir.
 $a \in \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ oldıdan
 $a \in \mathbb{Z}^+ \vee a \in \mathbb{Z}^- \vee a = 0$
 $a \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow a = -m$ o.e. $m \in \mathbb{Z}^+$ var.
 $\Rightarrow m = -a \in \mathbb{Z}$
 b) şikkından sadece bir önermenin
 doğru olacağından bahsediyor.
 0 zaman eğer $a = 0$ ise $a \notin \mathbb{Z}^+, a \notin \mathbb{Z}^-$
 dir $M = \{0\}$. Eger $a \in \mathbb{Z}^+$ ise $a \neq 0$
 $a \notin \mathbb{Z}^-$. Eger $a \in \mathbb{Z}^-$ ise $a \neq 0$ ve
 $a \notin \mathbb{Z}^+$ olacağı aşikar.

Fakat $\mathbb{Z} = M$ olamaz.
 Çünkü $r = 1 \in \mathbb{Z}$ olsun. $-r \in \mathbb{Z}$ olur. Oysa ki önermelerden sadece biri doğru olmak $\neq$
 0 zaman $M = \mathbb{Z}^+$ ya $M = \{0\}$ ya $M = \mathbb{Z}^-$ olmak.
 $M = \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a \in M, -a \notin M, a \neq 0$
 $M = \mathbb{Z}^- \Rightarrow b \in M, -b \notin M, b \neq 0$
 $M = \{0\} \Rightarrow c \in M, -c = 0 \in M, c = 0$ oldı. dan
 $M = \{0\}$ olamaz. Önermelerin hepsi sağlanır.
 Sonuç olarak $M = \mathbb{Z}^+$ ya da $M = \mathbb{Z}^-$ dir.
 - $M = \mathbb{Z}^-$ olamaz -
 Çünkü $-1 \in M, -2 \in M$ olsun. $(-1) \cdot (-2) = 2 \notin M$ olur ki 0). şıkları saptamaz.
 0 zaman sadece $M = \mathbb{Z}^+$ olabilir -
 $\mathbb{Z}^+$ z. N (beni kitaplarında 0 doğal sayılara ait değildir diyor) olabiliriz.

Şekil 4.29. S22'nin Problem 8 için yazdığı günlükten alıntı

Düşünmeyi zorlaştıracı sembol ve temsiller seçmek: Öğretmen adaylarının günlükleri karşılaştırmalı olarak incelendiğinde bazı problemlerde bazı öğretmen adaylarının kullanmayı tercih ettiği sembol ya da temsillerin problemi çözmede ya da fikir üretmede düşünmeyi zorlaştırdığı veya hatalı sonuçlar üretmeye neden olduğu görülmüştür. Örneğin, Problem 1 ve 2'de S9, çözüm yaparken Π sembolünü kullanmayı tercih etmiştir. S9'un çözümünü ifade etmek için yaptığı bu seçim onun faktöriyel kavramından uzaklaştırmış olduğu düşünülmektedir. Özellikle de Problem 1b'deki çözümü bu sonucun çıkarılmasında etkili olmuştur (Şekil 4.30). S9, $x > y$ için yaptığı sadeleştirmeden sonra elde ettiği eşitlikte alt sınırlar ile üst sınırları birbirine eşitleyip $y = z$ ve $x = 1$ sonucunu yazmıştır. Buradan da $y > x$ sonucu çıkarmış ve bu durumu çelişki olarak nitelendirmiştir. İşin ilginç yanı ise aslında $y = z$ ve $x = 1$ sonucu, verilen eşitliği sağlayan sonuçlardan biridir. Fakat öğretmen adayı bunu fark etmemiştir. Diğer yandan, sadeleştirme işleminden sonra elde ettiği eşitliğin başka durumlarda sağlanabileceğini de gözden kaçırmıştır. Bunun nedeninin kullanmayı tercih ettiği sembol olduğu düşünülmektedir.

S9'un Problem 1 ve 2'deki çözümlerinde $\prod$ sembolünü kullanmayı tercih etmesinin nedeninin yazmayı sevmemesi olduğu tahmin edilmektedir. Çünkü S9'un tüm günlükleri incelendiğinde çözümlerinin oldukça sade olduğu ve genel olarak az yazdığı dikkati çekmiştir. Aynı durum öğretmen adaylarının düşüncelerini yazdıkları günlüklerde de görülmüştür. Bu durum, S9'un yazmayı sevmediğini göstermektedir. Dolayısıyla buradaki sembol seçiminin bu durumdan kaynaklandığı tahmin edilmektedir.

$$\prod_{n=1}^x n \cdot \prod_{n=1}^y n = \prod_{n=1}^z n$$

1) $x > y$ olsun. $z > x > y$

$$\prod_{n=1}^x n \cdot \prod_{n=1}^y n = \prod_{n=1}^x n \cdot \prod_{n=y}^x n \cdot \prod_{n=x}^z n$$

$$\Rightarrow \prod_{n=1}^y n \cdot \prod_{n=y}^x n = \prod_{n=y}^x n \cdot \prod_{n=x}^z n \Rightarrow \prod_{n=1}^y n = \prod_{n=x}^z n$$

$$\Rightarrow y=2 \text{ ve } x=1 \Rightarrow y > x \text{ olur. } \checkmark$$

2) $x < y$ olsun.

$$\prod_{n=1}^x n \cdot \prod_{n=1}^y n = \prod_{n=1}^x n \cdot \prod_{n=x}^y n \cdot \prod_{n=y}^z n$$

$$\prod_{n=1}^x n \cdot \prod_{n=x}^y n = \prod_{n=x}^y n \cdot \prod_{n=y}^z n \Rightarrow \prod_{n=1}^x n = \prod_{n=y}^z n$$

$$\Rightarrow y=1 \text{ } x=2 \Rightarrow x > y \text{ olur. } \checkmark$$

3) $x=y$ olsun.

$$\left(\prod_{n=1}^x n \right)^2 = \prod_{n=1}^x n \cdot \prod_{n=x}^z n$$

$$\prod_{n=1}^x n = \prod_{n=x}^z n \Rightarrow x=1, y=1$$

$$x=z \Rightarrow z=1$$

$x=1, y=1, z=1$

burada amacın sadeleş yapmaktır bu nedenle x ile y arasında bir bağlantı bilmediğimizi düşünerek yine bu soruda bu yöntemleri uyguladım.

x, y, z sıfıra eşit olabilir ama nasıl gösterelim bilmiyorum

Şekil 4.30. S9'un Problem 1b için yazdığı günlük

Problem çözümlerinde seçilen temsillerin çözüm üzerinde düşünmeyi kolaylaştırdığı ya da zorlaştırdığı görülmüştür. Bu duruma bir örnek olarak S16'nın Problem 1a'daki ve 2a'daki çözümleri verilebilir. Bu çözümler incelendiğinde her ikisinde de işlemlerle inceleme yaptığı ve ilk çözümde (Problem 1a) işlemlerden bir sonuç çıkaramadığı görülmüştür (Şekil 4.31). İkinci çözümde de (Problem 2a) yaptığı karalamalardan işlemler üzerinde epeyce uğraşmış olduğu görülmektedir

(Şekil 4.32). S16, $x < y$ koşulu altında yaptığı incelemede $y = x + k$ ve $z = y + m$ eşitliklerini kullanmayı tercih etmiştir. İşlemlerde bu kadar çok karışıklık yaşamasının sebebinin S16'nın düşünmeyi zorlaştıracı temsil seçmesinden kaynaklandığı tahmin edilmektedir. Çünkü S16, bu seçimiyle değişken sayısını arttırmıştır. Bu durum işlemlerinin takibinin zorlaşmasına sebep olmuştur. Dolayısıyla, işlemleri takip etmek daha fazla çaba sarf etmeye neden olmaktadır. Bu durum hem çözümü yapan hem de çözümü inceleyenler için geçerlidir. Benzer şekilde, S16 Problem 1a'da birçok işlem yapmış fakat bu işlemlerden bir sonuç çıkaramamıştır, yani işlemlere saplanıp problemden uzaklaşmıştır.

Handwritten mathematical work by S16 for Problem 1a. The work shows a series of algebraic manipulations involving factorials and variables x, y, z, k, m . The student starts with "Söyleyebilir miyiz? Yani 2" and proceeds through various steps, including "x! + x! (y-1) ... (y+k) = 2!", "y = x+2" substitution, and several factorial expansions. The work is messy and shows signs of being a draft or a student's attempt at a solution.

Şekil 4.31. S16'nın Problem 1a için yazdığı günlük

S16'nın Problem 2a'da zor da olsa doğru bir şekilde elde ettiği son eşitlikle ilgili açıklamalarında detayları gözden kaçırdığı gözlemlenmiştir. Yaptığı ispatın

da sonuca ulaşamamalarına neden olduğu görülmüştür. Bu durumu belirtmek için “düşünmeyi zorlaştıracı tercih yapmak” ifadesi kullanılacaktır.

Buna S8’in Problem 1b’deki çözümü örnek olarak verilebilir (Şekil 4.33). S8, bu problemdeki çözümünde $y! = (x+1)(x+2)\dots(x+p)$ eşitliğinden hareketle bu eşitliği sağlayan örnek bulmaya çalışırken, S2 aynı problemde $z! = z(z-1)!$ şeklinde yazarak $x! = z$ ve $y = z-1$ eşitliklerini kolay bir şekilde fark edebilmiştir (Şekil 4.34). Üstelik S2 buradan genel bağıntıyı belirleyebilmişken, S8 bu eşitliği sağlayan yalnızca bir örnek belirleyebilmiştir. Burada S8 bakış açısını “önce hangi sayıların faktöriyeli $n(n+1)\dots(n+p)$ şeklinde yazılır ona baktım” cümlesi ile özetlemektedir. S8’in çözüm yolu tercihi olarak bu seçimi S2’nin çözümüne göre daha fazla çaba sarf ettirecek bir seçimdir. Bu nedenle, S8’in düşünmek için daha zor bir yol tercih etmiş olduğu söylenebilir.

b) $x! \cdot y! = z!$

$x! \dots 1 \cdot y! \dots 1 = z! (z-1)! \dots 1$

Bence burada x ve y nin ilişkisinin açıklamasını
yapıp çarpma işi u batır.
biri olduysa diğeri de
eşitliğiyle karşılaştık üzerine tonanlamak
daha kolay olur bence
bu eşitliği sağlayacak sayıların
ortak üstlüğü nedir?
önce hangi sayıların faktöriyeli $n(n+1)\dots(n+p)$ şeklinde yazılır
ona baktım sonra anlaşıyor bir $y! = (n-1)!$ olup z yi yaptım

$120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
 $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$
 $5! \cdot 3! = 6!$
bir örnek buldum birden parçallama
yapmayı çalışıyorum

$7!$
 $265 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
 10987653
 $7! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \dots$ $y = 6$ buldum
 $7! \cdot 6! = 10!$

Şekil 4.33. S8’in Problem 1b için yazdığı günlükten alıntı

b) $x! \cdot y! = z!$ $0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $6! = 720$

Yine burada x ve y arasındaki ilişkiye bakarız.

$$z! = z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Eğer $z=0$ veya $z=1$ ise x ve y için eşitlikler söylenemez.

Yani $z! = 1$ iken

i) $x=0, y=0$

ii) $x=1, y=0$

iii) $x=0, y=1$

iv) $x=1, y=1$

Varyasyonları sağlanır.

Eğer $z=2$ ise

i) $x=2, y=0$

ii) $x=2, y=1$

iii) $y=2, x=1$

iv) $y=2, x=0$

Seçenekleri sağlanır.

Eğer $z > 2$ ise

$z!$ in parçalarına bakarız.

$$z! = z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

$0! = 1! = 1$ olduğundan $x! = 1$ yaptığımızda $y!$ için $y! = z!$ dir.

Yine aynı şekilde $y! = 1$ olduğunda $x! = z!$ dir.

Şimdi $x > 1, y > 1$ durumlarına bakalım.

$$z! = z \cdot (z-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

$$z! = z \cdot (z-1)! \text{ yazabiliriz.}$$

$x! = (z-1)!$ kabul edersek $z = y!$ olur. z nin kendisi herhangi bir sayının faktoriyelidir.

$x! \cdot y! = z!$ $\Rightarrow$ Bu eşitliğin sağlanması için z sayısı herhangi bir sayının faktoriyelidir.

Eğer z sayısı herhangi bir sayının faktoriyelidir değilse kesinlikle eşitlik sağlanmaz.

Örneğin $z=6$ alalım. $z=6=3!$

$$z! = 6! = 720 = 6 \cdot 5! = 3! \cdot 5! \text{ dir.}$$

$$z=24 \text{ alalım } z! = 24! = 24 \cdot 23! = 4! \cdot 23! \text{ dir.}$$

Şekil 4.34. S2'nin problem 1b için yazdığı günlükten alıntı

Daha ileri analizi zorlaştıracak tercihler yapmak: Öğretmen adaylarından bazılarının çözüm için yaptıkları seçimlerin, daha ileri analiz yapmalarını zorlaştıracı türden olduğu görülmüştür. Problem 3'teki çözümlerinin bir kısmında aynı stratejiyi

kullanan öğretmen adaylarının günlüklerinin karşılaştırılması sonucu bazı durumlar dikkati çekmiştir. Bu problemi çözmeye algoritmik işlemlerle başlayan öğretmen adaylarından yalnızca S5 incelemelerini daha da derinleştirebilmiş ve sonuca ulaşabilmiştir, diğerleri (S2, S3, S9, S15) bir sonuca ulaşamamıştır (EK 7). Sonuca ulaşamayan öğretmen adaylarının günlükleri (örneğin S2'nin günlüğü Şekil 4.35) S5'inki (Şekil 4.36) ile karşılaştırıldığında, S5'in çarpanlara ayırma işlemini diğerlerinin ise binom açılımını kullanmayı gerektirecek şekilde ifadeyi düzenlemeye çalıştıkları görülmüştür.

$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ $n=2$ için $5^2 + 6 \cdot 7^2 + 1 = 320$
 $n=3$ için $5^3 + 6 \cdot 7^3 + 1 =$

$6 \cdot 7^n$ her zaman çifttir, 5^n her zaman tektr. Yani $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ her zaman çifttir.

$(6-1)^n + 6 \cdot (6+1)^n + 1$
 $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$
 $n \geq 2$ çift tam sayı olsun.

$5^n = (6-1)^n = \binom{n}{0} 6^n + \binom{n}{1} 6^{n-1} (-1) + \binom{n}{2} 6^{n-2} (-1)^2 + \dots + \binom{n}{n-1} 6 (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} (-1)^n$
 $7^n = (6+1)^n = \binom{n}{0} 6^n + \binom{n}{1} 6^{n-1} + \binom{n}{2} 6^{n-2} + \binom{n}{3} 6^{n-3} + \dots + \binom{n}{n-1} 6 + \binom{n}{n} 1$
 $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 6 \cdot \binom{n}{0} 6^n + 5 \cdot \binom{n}{1} 6^{n-1} + 7 \cdot \binom{n}{2} 6^{n-2} + 5 \cdot \binom{n}{3} 6^{n-3} + \dots + 5 \cdot \binom{n}{n-1} 6 + 7 \cdot \binom{n}{n} + 1$
 $= 5(6+1)^n + \binom{n}{0} 6^n + 2 \cdot \binom{n}{2} 6^{n-2} + \dots + 2 \cdot \binom{n}{n-1} 6 + 1$

Şekil 4.35. S2'nin Problem 3 için yazdığı günlükten alıntı

dişim

Ber bu sayılardan daha düzenli görünmesi için uğraşacağım

Sayıya etlene ve çıkartma yaptım.

Binom açılımı.

$$5^{n-1} + 6 \cdot 7^{n-1} + 8$$

$$= (5^{n-1}) + 6(7^{n-1}) + 8$$

$$= 4(5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 1) + 36(7^{n-1} + 7^{n-2} + \dots + 1) + 8$$

$$= 4 \left(\frac{5^n - 5^0}{5 - 1} + 1 \right) + 36 \left(\frac{7^n - 7^0}{7 - 1} + 1 \right) + 8$$

5^n n ne kadar da tek ve çift ise $(5^{n-1} + \dots + 1)$ tek ve çifttir.

7^n n ne kadar da tek ve çift ise $(7^{n-1} + \dots + 1)$ da tek ve çifttir.

$5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 1$ tek ve çifttir.

$7^{n-1} + 7^{n-2} + \dots + 1$ tek ve çifttir.

$4(5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 1) + 36(7^{n-1} + 7^{n-2} + \dots + 1) + 8$ 2 ile bölünür.

netice n çift iken bu sayı 8 ile bölünür.

n tek iken 0 zaman $5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 1$ çifttir.

Aynı şekilde $7^{n-1} + 7^{n-2} + \dots + 1$ da çifttir. tek sayı çift + çift = çift

$4 + 4 + 8 = 16$ dir.

yani $(5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 1) + 9(7^{n-1} + 7^{n-2} + \dots + 1) + 2$ 2 ile bölünür.

belirli yarı

$5 + 6 \cdot 7 + 1$ sayıları 8 ile bölünür.

$n = 1, 0$ iken olmayıp da $n \geq 2$ iken ele alalım.

$n = 0$ iken $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 8$

$n = 1$ " $= 48$

$n = 2$ " $= 320$

$n = 3$ " $= 2184$

$n = 4$ " $= 14932$

$n = 5$ " $= 103968$

$n = 6$ " $= 721520$

42	2058	
378	126	
168	2284	
2058	14606	
14406	526	
100842	14932	
400842	825	
705874	3125	
	3725	
	15625	
	100842	
	3126	
	103968	
	705874	
	15626	
	721520	

Şekil 4.36. S5'in Problem 3 için yazdığı günlükten alıntı

Binom açılımını kullanacak şekilde düzenleme yapmak daha ileri inceleme yapmayı zorlaştırmıştır. Çünkü binom açılımında terimlerin başına gelen katsayılar

ortak paranteze alma işlemlerini zorlaştırmıştır. Özellikle de $\binom{n}{r}$ şeklinde genel ifadelerin olması için zorlaşmasına neden olmuştur.

Zorlaştırıcı tercih yapan öğretmen adaylarının incelemelerinde daha ileri gidememeleri “*analizi zorlaştırıcı tercih*”, S5’in ise incelemelerinde daha ileri gidebilmesi “*analizi kolaylaştırıcı tercih*” olarak ele alınabilir.

Önceden öğrenilmiş çözüm yoluna saplanmak: Analizlerde önceden öğrenilmiş olan çözüm yolunu hatırlamaya çalıştığı için problemi çözemeyen öğretmen adayları da olmuştur. S6 ile yapılan görüşmede Problem 17’yi çözme sürecinde onun böyle bir durumu yaşadığı anlaşılmaktadır.

G: Peki bugünkü soru nasıldı? Senin ilgini çeken bir soru muydu?

S6: Hı hı. [hayır]

G: Çekmiyor muydu?

S6: Çekmedi. İşte formülü vardı. Formülü düşünmeye başladım. Çıkaramadım. Ondan sonra tam gelmiştim, hani 5x6’ydi ya orada

G: Bir formül mü hatırlamaya çalıştın?

S6: Hı hı.

G: Nasıl bir formül hatırlamaya çalıştın?

S6: Permütasyonla ilgili bir formülü vardı onun, hatırlayamadım. Yani hatta ÖSS sorusu.

G: Yani direkt böyle bir soru mu?

S6: Hı hı buna benzer bir soru. Hani burada 6x5’di orada 5x4 falandı yani. Onu hatırlamaya çalıştım böyle faktöriyelerle ilgili bir şeydi.

S6’nın bu problemi çözerken formül hatırlama çabasından kendini kurtaramadığı, dolayısıyla önceden öğrenmiş olduğu çözüm yoluna saplandığı görülmektedir.

İlk yapılan çözüme saplanmak: Görüşmelerde, ikinci çözümün araştırılması halinde yapılan ilk çözüme saplandıklarını ifade eden öğretmen adayları da olmuştur. Bu öğretmen adaylarından biri S4’tür. S4’ün görüşmede böyle bir durumu yaşamış olduğundan bahsettiği problem, Problem 20’dir. S4, ilk çözümünde Δ ’yı kullanarak problemi çözmüş ve yaptığı çözüm oldukça net ve sade olmuştur. İkinci çözüm yolunu araştırırken önemli ipuçları yakalamış olmasına rağmen bu ipuçlarını iyi

değerlendirememiştir. Burada özellikle de denklemin kökünün olmaması halinde Δ 'nın sıfırdan küçük olması gerektiği bilgisine saplandığı görülmektedir.

G: ...Peki problem için bir çözüm buldun?

S4: Buldum. Diğer başka bir çözüm yöntemi bulmak zor oluyor. Yani mesela, geçen en son, işte parabollerle ilgili orada...

G: Bahçedeki?

S4: Hı hı. Yani aslında onu, ben parabolleri, şey, arkadaş için çizmiştim, ama yani ben hiç onu kullanmamıştım, şey, problemle bağdaştırmamıştım. Yani bazen de göremiyorum. Orada reel çözüm olmayacağını düşününce hep şey düşünüyorum daltalı. Yani delta negatif olmalı. Yani, eee, parabollerin işte kökünün olmaması durumunu hiç bu şekilde olmayacağı, aklıma gelmiyor, hani şekil çizmiş olsam bile gözümün önünde olsa bile cevap, göremiyorum bazen.

S4'ün benzer bir durumu, açık uçlu ifadelerde de yaşadığı aşağıdaki ifadesinden anlaşılmaktadır. S4, önceki düşündüklerinden uzaklaşabilmek için bir süre problemden uzaklaşma ihtiyacını hissettiğini burada dile getirmektedir.

“Uzun bir süre, yani, yapamıyorsam biraz daha uğraşırım. Eğer yapamıyorsam da bir kenara koyarım, yani, sonuçta ben hani, mesela şeyde de oluyor bir sonuç bulunca ucu açık sorularda, bir çözüm bulmuşken diğer başka bir çözüme kolaylıkla geçemiyorum, onu bir tarafa koyuyorum sonra tekrar bakarım diyorum belli bir süre ara vermem gerekiyor.”(S4)

Öğretmen adaylarından S1'in önceki çözüme saplandığı başka bir örnekte görülmektedir. Yapılan seçmeli derste Imai'nin (2000a) makalesinin tanıtılması esnasında S1 böyle bir durumu yaşadığını kendisi ile yapılan görüşmede dile getirmiştir. Bu makalede öğrencilere sorulan bir dizi soruda, ölçekleri verilen üç kap yardımıyla belirtilen miktarı ölçmek için ne yapılması gerektiği soruluyordu. Her seferinde kaplar ve ölçülecek miktar değişiyordu. İlk birkaç soruda a, b, c kaplarına aynı işlem uygulayarak sonuca ulaşılıyordu. Fakat ileriki sorularda bu işlemin doğru olmasının yanında daha iyi çözümler de mevcuttu. Öğretmen adaylarına bu sorular slayt ile gösterilmiştir. S1, yaptığı ilk çözümün kendisini etkilediğini burada bahsedilen sorular yardımıyla açıklamıştır. Haylock (1997) buradaki durumu *algoritmik saplantı* olarak ifade etmiştir.

G: Bir problemi çözdün diyelim ikinci bir çözüm istiyoruz sizden ilk yaptığın çözüm, bir sonraki çözümü araştırırken yani ikinci çözümü araştırırken seni engeller mi veya bir etkisi olur mu?

S1: Etkisi olur.

G: Ne açıdan, nasıl bir etkisi olur?

S1: Ya mesela o örneğiniz vardı ya

G: Hangisi?

S1: $3a - b + c$..

G: Kaplarla ilgili?

S1: Kaplarla ilgili. Orada mesela etkiledi. İlk çözümler hep aynı çıkıyor. Ben öyle düşündüm.

G: Sonra ister istemez diğerleri de öyledir dedin çok da dikkat etmedin?

S1: Evet

G: Tek başına gelse?

S1: Tek başına gelse direkt c dersin yani. Çünkü bariz açık yani. Etkiliyor demek ki. Aşırı etkiliyor hatta. Gözünü kapatıyor resmen.

G: Olumlu yönde etkilediği oluyor mu?

S1: Farklı bir şey bulanacaksa olumlu etkileyemez. Çünkü neden? Hep o çözüm üzerinden düşünülür belki de mesela bir çözüm bulundu. Onu bırakmalı iki üç gün sonra bakmalı. Çünkü o anda beyin o çözümü yapmaya odaklandı önce, onu yaptı ya başka bir şeye geçmesi zor oluyor artık.

S4 gibi S1'de ilk çözümün etkisinden kurtulmak için zamana ihtiyaç duyduğunu belirtmektedir. S1, özellikle de farklı bir çözüm ya da fikir üretme durumunda ilk düşünülenlerin olumsuz etkisinin olduğunu ifade ederken bir yandan da benzer fikir ya da düşünce üretmede olumsuz etkilemediğini de ima etmektedir.

İlk çözüme saplandığı anlaşılan diğer öğretmen adaylarının (S8, S9) bu durumla ilgili ifadeleri aşağıdadır.

G: Peki çözdükten sonra tekrar bir bakayım yeniden çözeyim, başka bir çözüm yolu bulayım...

S8: Çözdükten sonra şey oluyor işte başka bir yol bulmaya çalışıyorum ama o zaman da çözümün etkisinde kaldığım için yine olmuyor yani.

G: Yani sonucu bildiğin için...

S8: Evet bir de daha önceki çözümün etkisinde kalıyorum. Yani o çözümden yola çıkmaya çalıştığım için esnek olmuyor o zaman. Yani o cevabı bilince farklı bir yol şey olmuyor nasıl deyim...direkt gelmiyor.

G: Yani...

S8: Biraz kalıntısı kalıyor yani. İzi kalıyor.

G: O problemi bir yoldan çözdükten sonra hep o yol aklına geliyor. Başka açıdan düşünme konusunda zorluk mu çekiyorsun?

S8: Evet. Yani şöyle olursa belki düşünüyorum da mesela bugün bunu çözdüm uğraştım. Diyelim ki bu soruyla uğraştığımı unuttum o kadar zaman geçtikten sonra belki farklı şekilde düşünebiliyorum ama o sorunun çözümü aklımdayken direkt farklı bir şey düşünmek zor geliyor.

“Yani durum genelde doğru çıkıyor yani. Çıkarsa bir daha çözemiyorum o soruyu zaten. Genelde ilk aklıma gelen doğru oluyor.”(S9)

Bir çözüm bulma rahatlığı: Problem için bir çözüm bulduktan sonra ikinci çözümü araştırmada karşılaşılan engellerden birinin de bir şekilde çözüm bulmuş olmanın verdiği rahatlık olduğu görülmüştür. Bunu, görüşme yapılan öğretmen adaylarından S1 ve S4 dile getirmiştir. Öte yandan S3 ise bir çözüm bulmuş olmanın daha rahat düşünmesini sağladığını iddia etmiştir. Fakat S3’ün bahsettiği rahatlık, ikinci çözümü bulmayı olumlu yönde etkileyen bir rahatlıktır. Bu durumla ilgili kanıtlar aşağıdadır:

G: Tamam. Peki kendinde eksik gördüğün noktalar var mı bu açıdan?

S1:Eksik gördüğüm, ...var. İkinci çözüm üretmekte mesela, ilk çözümü bulduktan sonra zorlanıyorum ikinci çözümde.

G: Neden acaba? nedeni konusunda?

S1: Neden, yani sıfırdan başlarken ilk önce soruya bir çözüm bulayım gayreti oluyor. Bir çözüm bulduktan sonra bir rahatlama geliyor insana. Yani nasıl olsa bir çözüm buldum diyorum, cepte falan. Ondan sonra hani olursa diye uğraşıyorsun artık ikinci çözüm için. Eski gayret kalmıyor. Daha rahat belki bulurum belki denk gelir falan diye. Ondan diye düşünüyorum ben bu yönden, eksik yönlerimi.

S1’in “nasıl olsa bir çözüm buldum” ifadesi öğretmen adayının ikinci çözüm araştırmada dışsal motivasyona sahip olduğunu göstermektedir. Çünkü öğretmen adayının içsel motivasyona sahip olması durumunda ikinci çözüm için daha ısrarlı uğraşacağı tahmin edilmektedir.

S4, bir çözüme ulaştığında kendisine sıkıntı veren bir durumdan kurtulmuş olmanın rahatlığını yaşadığını ima etmektedir. Öğretmen adayı, aşağıda belirtmiş olduğu durumu Problem 11’de yaşamıştır.

“...çok fazla bunun üzerinde de sonrasını düşünme fırsatım olmadı düşünmedim açıkçası. Çünkü soru bayağı korkuttu böyle. Dedim tamam çözdüm yeterli.”(S4)

S4’ün durumu S1’den biraz daha farklıdır. Dikkat edilmesi gereken bir durum vardır ki S4’ün belli bir problem üzerinde konuştuğu, S1’in ise genel bir ifade kullandığıdır. Dolayısıyla S1’in bu durumunun genelde doğru olduğu, fakat S4’ün durumunun ise problemle sınırlı olduğu söylenebilir.

Bir çözüm bulmanın rahatlığını ikinci çözümü bulma konusunda engel olarak ifade eden S1 ve S4'ün aksine S3, bu rahatlığı olumlu olarak ifade etmiştir.

“Evet herhalde öyleydi hocam. İşte o sorunun mesela şeyini biz normal yine denklem kurarak çözüliyordu. Bir de normal çözüm yaptıktan sonra insan daha rahat düşünüyor onu da diyeyim. Ahmet hoca da bahsetmişti ondan ya insan ne bileyim daha rahat oluyor böyle. Çözümü buldun ama ekstradan o cebinde ama daha rahat rahat dolanıyorsun yani etrafta. Öyle düşünüyorum yani.”(S3)

...
“Başka bir şeye dönsem aklım hep orada kaldı yani yine. Ama orada çözümünü yapsam belki... Yani farklı türden yapsam belki çözümü de bulurdum dershanedeki öğretmenimin verdiğini. Öyle yani. Çözümünü bir yapsak aklımızda daha orijinal çözümler üretmeye daha çok çalışıyoruz yani.”(S3)

S3 kendisi ile yapılan görüşmenin farklı kesitlerinde bu rahatlığı dile getirmiştir. S3'ün özellikle ikinci ifadesi bu rahatlığın olumlu yanını daha net bir şekilde ortaya koymaktadır. Ancak bunun nedeni hakkında açık bir bilgi mevcut değildir.

4.2.2. Çözüm Bulma Güçlüğü İle İlgili Yorumlar

Bu araştırmada bilgi eksikliği nedeniyle problemi çözememe sorunu ile karşılaşmamak ve orijinal çözümlerin ortaya çıkmasına ortam sağlamak amacıyla öğretmen adaylarının ortaöğretim bilgilerinin çözüm için yeterli olacağı problemler seçilmiştir. Buna rağmen çok az problem dışındaki tüm problemlerde hatalı çözüm yapan ya da çözüm yapamayan öğretmen adaylarının olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının hatalı çözüm yapma ya da çözüm yapamama nedenleri olarak yukarıdaki başlıklar belirlenmiştir. Bu nedenlerden işlemlerde hata yapma ve mantıksal hata yapma, dikkatsizlik nedeniyle ortaya çıkmış olabilir ancak sık sık tekrarlanıyorsa bu durum düşündürücüdür. Araştırmada bazı öğretmen adaylarının diğerlerine göre daha çok mantıksal hata yaptıkları görülmüştür.

Yapılan bu araştırmada farklı problem tipleri kullanılmıştır. Bu problemler için yapılan çözümlerde çözüm üretme güçlüğüne yaşanmasına neden olabilecek durumlar belirlenmiştir. Burada verilmiş olan başlıklardan ikisi II. grup problemlerde yani birden fazla çözüm yapılması istenen problemlerde belirlenmiş olan güçlük nedenlerindendir. Bunlar, *ilk yapılan çözüme saplanmak* ve *bir çözüm bulma rahatlığıdır*. Birden fazla çözüm üretme durumunda ortaya çıkmış olan bu güçlüklerin tek başına etkili olamayabileceği düşünülmektedir.

“Zor yolları tercih etmek”, “daha ileri analizi zorlaştıracı tercihler yapmak” ve “düşünmeyi zorlaştıracak sembol veya temsiller seçmek” başlıkları günlüklerin karşılaştırmalı olarak incelenmesi ile ortaya çıkarılmış çözüm üretme güçlüğü nedenleridir. Bazı öğretmen adaylarının yaptıkları seçimler onların çözüm için daha fazla çaba sarf etmesini sağlarken bazıları seçimlerini çözüme kolayca ulaştıracak şekilde yaptıkları görülmüştür. Dolayısıyla yapılan seçimler çözüm sürecinde güçlükler ortaya çıkarabilir ya da çıkarmayabilir. Bu tercihlerin bilinçli yapılıp yapılmadığı ya da öğretmen adaylarının neden bu tercihleri yaptıkları konusunda detaylı veri olmadığı için bu araştırma bu sorulara cevap veremeyecektir.

Bu araştırmada belirlenmiş olan çözüm bulma güçlüklerinin yalnızca biri değil birden fazlası da çözüm üretmede güçlük yaşamaya neden olabilir. Öte yandan bu güçlükler birbirine neden olmuş da olabilir. Örneğin herhangi bir problemde verileri iyi analiz edememiş bir kişi çözüm için uygun strateji de geliştirememiş olabilir. Bu araştırmada, bu konuda detaylı veri mevcut değildir.

Çözüm bulma güçlüğünün nedenleri arasında belirlenmiş olan *bir çözüm bulma rahatlığı* diğer nedenlerden farklıdır. Diğer nedenler bilişsel nedenler iken *bir çözüm bulma rahatlığı* problem çözme sürecinin psikolojik boyutu ile ilgilidir. Bu durum problem çözme sürecindeki güçlüklerin yalnızca bilişsel nedenlerden kaynaklanmadığını göstermektedir.

4.3. Yaratıcı Düşünme Becerileri

Bu bölümde “Yaratıcı düşünme becerileri (akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerileri) nelere bağlıdır?” alt problemine cevap aranmaya çalışılacaktır. Bu amaçla, akıcı düşünme, esnek düşünme ve orijinal düşünme becerileri ayrı ayrı ele alınarak farklı problem durumları ve davranışlar açısından analiz edilecek ve yaratıcı düşünme becerilerini etkileyen faktörler tespit edilmeye çalışılacaktır.

4.3.1. Akıcı Düşünme Becerisi

Bu araştırmada akıcı düşünme becerisi, çok fikir ya da çözüm üretebilme becerisi olarak ele alınmıştır. Bunun için I. grup problemlerde üretilen fikir sayılarına, II. grup problemlerde ise yapılan çözüm sayısına bakılarak incelenmiştir. Dolayısıyla I. grup problemlerle fikir üretmedeki akıcılık, II. grup problemlerle de fikirlerin bütünü olan çözüm üretmedeki akıcılık incelenmiştir. 3. Bölümde bahsedildiği gibi, I. grup problemler ile II. grup problemler kendi içinde ikişer grupta ele alınmıştır (Tablo 3.3).

Araştırmanın yürütüldüğü seçmeli derste öğretmen adaylarına akıcı düşünme kavramı tanıtılmıştır. Görüşmelerde bu kavram ile ilgili sorular sorulduğunda, akıcı düşünmeyi önemsemediğini ifade edenlerin yanı sıra önemseyen öğretmen adaylarının da olduğu görülmüştür.

Akıcı düşünmeyi önemseme: Görüşmelerde akıcı düşünmeyi önemseyen ve bu konuda çaba gösteren öğretmen adaylarının olduğu gözlemlenmiştir. Akıcı düşünmeyi önemseyen öğretmen adayları S1, S5 ve S6 olarak belirlenmiştir. Aşağıda bu bulgulara yer verilmiştir.

G: Peki akıcılık konusunda bir gelişme oldu mu bu dersten sonra?

S1:Oldu. Mesela en başta bariz tanımlarla hiç uğraşmazdım. Yani o bölünebilmeye ilgili sorularınız vardı ya

G: Hangi soruydu?

S1: Ya direkt işte pozitif bölenleri falan yazıyorduk. Hiç onları düşünmezdik eskiden. Hani basit şeyleri de düşünmeye başladık. Hangi soruydu hatırlayamadım da.

Ayrıca S1, akıcı düşünmeye çalıştığını ve dolayısıyla akıcı düşünmeyi önemseydiğini günlüğünde de şu şekilde ifade etmiştir:

“Akıcı düşünme becerimde bu dersten sonra gelişme oldu. Problemlere yaklaşırken bazı bilgileri önemsiz görerek gözden kaçırabiliyordum. Akıcı düşünme bunu azalttı diyebilirim” (S1)

Öğretmen adaylarından S5 esnek düşünebilmek için öncelikle akıcı düşünmenin gerekli olduğu düşüncesindedir. Bu durum onun akıcı düşünmeyi önemseydiğini göstermektedir.

“Hani esneklik için ilk önce akıcı olmak lazım gibi geliyor bana, sonra esnek olasin” (S5)

Görüşme yapılan öğretmen adaylarından S6, kendisinin esnek düşünebilmekten ziyade akıcı düşünebildiğini ifade etmiştir. Bu durum onun akıcı düşünme becerisini önemseydiğini düşündürmektedir.

“daha çok bende akıcılık var, yani esneklik çok değil. Mesela, genelde çözülmüş sorulara bakarım, ondan fikir üretmeye çalışırım”

Akıcı düşünmeye gerek duymama: Görüşmelerde akıcı düşünmeyi önemsemedikleri için akıcı düşünme üzerinde durmayan öğretmen adaylarının da var olduğu gözlemlenmiştir. Bu öğretmen adayları S2, S3, S4, S8 ve S9’dur. Öğretmen adaylarının görüşleri aşağıda yer almaktadır.

G: Peki o zaman sen akıcı düşünmek için çaba sarf ediyor musun?

S2: Ya söylenemez genelde esnek olmaya çalışıyorum.

G: Esnek olmaya çalışıyorsun?

S2: Daha farklı yani düşünce yapısını tamamen değiştirerek

S9’un, akıcı düşünmeyi önemsemediği ve fazla fikir üretmek gibi bir amacının olmadığı anlaşılmaktadır:

G: Ama orda zaten sorunun amacı şey yani onun hakkında ne düşünebiliyorsanız neler aklınıza geliyorsa onları yazmanız.

S9: Hocam her şeyi yazınca da ne bileyim bana biraz saçma geliyor. Çok basit şeylerle sayfalarca şeyler yazılabilir.

G: Yani sen çok daha farklı bir açıdan nasıl yaklaşabilirim şeklinde ...

S9: Bir tanesini yaptım sonra başka bir şey var mı diye düşündüm bulamadım ki o soruda yok gibi geldi. O kadar düşündüm hiç bir şey gelmedi.

S9'un yukarıdaki ifadeleri; benzer çözümlerle ilgilenmediğini göstermektedir. “Hepsinde mantık bence, aynı mantık yani” cümlesi ile öğretmen adayının farklı bakış açıları geliştirmeye çalıştığı ve dolayısıyla esnek düşünmeye çalıştığı anlaşılmaktadır. Özellikle “herkesin aklına gelir zaten” ifadesi ile de orijinal bir çözüm bulma çabasının olduğu düşünülmektedir. Kısacası orijinal çözüm bulma ve esnek düşünme çabası, akıcı düşünmesinin önüne geçmiştir. Görüşmede bu sonucu destekleyen başka ifadeler de kullanmıştır. Bu ifadelerden biri de; “*bu ders için, yani en azından normal çözümlere bakmıyorum. Hani formülle çıkabilecek sorulara hiç yazmıyorum, yani cevabını, cevap olarak hiç yazmıyorum*”.

Benzer şekilde, S8 akıcı düşünmeye gerek duymadığını şu şekilde ifade etmiştir:

“yani, herhalde ben sorulara bakarken akıcılığı geri planda tutuyormuşum, şimdi aklıma geldi. Yani, aynı mantığı kullanarak çözebileceksem bile çözmiyorum. Mesela şunun farklı bir şekilde, yani aynı mantığı kullanıp, farklı bir yoldan da gidebilirdim çözüme. Ama yani bunu bir yolla çözdükten sonra farklı bir şey arıyorum, yani esnek olmaya çalışıyorum önce.” (S8)

S8 ile yapılan görüşmenin başka bir bölümünde ise aşağıdaki diyalog geçmiştir:

G: Bu dersten sonra akıcı düşünme becerinde nasıl bir gelişme oldu?

S8: Pek gelişmedi.

G: Pek gelişmedi diyorsun az önceki verdiğin örnekten de yararlanarak.

S8: Ama geliştirebilirim yani. Şöyle gelişme derken aklıma gelmiyor değil de aklıma geleni yazmaya gerek duymuyorum.

Öğretmen adaylarından S3 ve S4 de akıcı düşünmeye gerek duymadığı belirlenen öğretmen adayları arasında yer almıştır.

“İşte daha çok esnekliğe odaklandığım için akıcılığı ondan herhalde biraz ihmal ettik.” (S3)

S3 yukarıdaki ifadesinde akıcı düşünme becerisini önemsemediğini ima ederken bunun nedeni olarak esnek düşünmeye çalışmasını göstermektedir.

G: Matematiksel problemleri çözmeye çalışırken esnek olduğunu düşünüyor musun?

S4: Çok fazla değil ama genelde esnek olmasına çalışıyorum. Hani benzer çözümler olunca es geçiyorum direkt düşünmüyorum bile çok fazla.

G: Yani?

S4: Akıcılığı çok fazla kullanmıyorum.

G: Akıcı olmaya çalışmıyorsun ama esnek olmaya çalışıyorsun.

S4, matematiksel problemleri çözerken çok fazla esnek olmadığını fakat esnek düşünmek için çaba sarf ettiğini açıkça dile getirmiştir. Öte yandan öğretmen adayı benzer çözümleri yazmaya gerek duymadığını yani akıcı düşünmeye gerek duymadığını da ifade etmektedir.

Kısaca özetlenecek olursa araştırmaya katılan öğretmen adaylarını akıcı düşünmeyi önemseyen ve önemsemeyen (akıcı düşünmeye gerek duymayan) olmak üzere iki gruba ayırmak mümkündür. Akıcı düşünmeyi önemseyen öğretmen adaylarından biri esnek olmak için akıcı olmanın ön şart olduğunu düşünürken bir diğeri önemsiz görerek gözden kaçırdığı noktaların akıcı düşünme sayesinde azaldığını iddia etmektedir. Akıcı düşünmeyi önemsemeyen öğretmen adaylarının bu duruma gerekçeleri esnek olmayı tercih etmeleri olarak belirlenmiştir. Diğer yandan bir öğretmen adayının orijinal düşünmeye çalıştığından akıcı düşünmeyi göz ardı ettiği tespit edilmiştir.

4.3.1.a. I. grup problemlerin akıcı düşünme becerisi açısından analizi:

Bu bölümde öğretmen adaylarının I. grup problemlerde ürettikleri fikir sayıları incelenmiş ve bu problem grubunda en fazla ve en az fikir üreten öğretmen adayları belirlenmiştir. En fazla fikir üreten öğretmen adaylarının çözümleri ile eğer varsa aynı stratejiyi kullanan diğer öğretmen adaylarının çözümleri; fikir sayıları ile çözümün niteliği karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Ayrıca, problem ortamına göre karşılaştırma yapılabilecek dikkat çeken durumlar da incelenmiştir. Aşağıda yer alan Tablo 4.1 öğretmen adaylarının fikirlerinin sayılarını göstermektedir. Tabloda her bir problemdeki üst sırada yer alan fikir sayısı koyu olarak alt sıralarda yer alan fikir

sayıları ise altı çizili olarak gösterilmiştir. Tablo incelendiğinde hemen hemen her öğretmen adayının fikir sayılarının az, orta, çok arasında değiştiği görülmüştür. Ancak bazı öğretmen adaylarının biraz daha istikrarlı performans serdiledikleri dikkati çekmiştir.

Tablo 4.1 I. Grup Problemlerde Üretilen Fikir Sayıları

Öğretmen adayları	I-A grubu problemler					I-B grubu problemler	
	1a	1b	3	8	9	5	6
S1	G	G	9	6	<u>3</u>	16	15
S2	7	19	7	<u>3</u>	5	10	11
S3	6	5	<u>2</u>	G	8	<u>4</u>	8
S4	13	<u>2</u>	13	8	9	16	29
S5	9	3	33	30	26	10	28
S6	9	16	16	5	<u>2</u>	12	14
S7	12	10	21	<u>2</u>	6	11	11
S8	4	5	<u>1</u>	4	<u>2</u>	14	15
S9	8	6	<u>1</u>	7	5	<u>4</u>	<u>6</u>
S10	5	<u>2</u>	7	7	7	<u>6</u>	8
S11	<u>1</u>	<u>2</u>	8	10	5	12	11
S12	6	10	4	<u>0</u>	<u>2</u>	<u>5</u>	10
S13	<u>1</u>	<u>0</u>	11	14	<u>3</u>	12	12
S14	5	3	12	4	5	13	20
S15	6	<u>2</u>	6	<u>2</u>	G	10	14
S16	<u>1</u>	<u>0</u>	3	<u>3</u>	<u>2</u>	12	11
S17	8	<u>2</u>	10	6	<u>1</u>	8	14
S18	G	G	G	G	G	10	<u>5</u>
S19	8	5	G	G	4	10	<u>6</u>
S20	7	9	10	4	<u>3</u>	13	11
S21	<u>2</u>	5	7	<u>3</u>	5	8	11
S22	16	<u>0</u>	11	7	4	<u>6</u>	9

G: Öğretmen adayı problemin verildiği gün gelmedi

Tablo 4.1'deki tüm problemler dikkate alındığında S4, S5, S6 ve S7'nin daha çok problemde akıcı düşünme becerisi açısından üst sıralarda olduğu görülmüştür. Diğer yandan bu öğretmen adaylarının fakülte genel not ortalaması incelendiğinde en

yüksek ortalamaya sahip öğretmen adayları oldukları görülmüştür. Ayrıca bu öğretmen adaylarının hepsinin de kız olduğu dikkati çeken durumlardan bir diğeridir.

S4, S5, S6 ve S7'nin her problemde aynı performansı gösteremedikleri Tablo 4.1'de görülmektedir. Ayrıca, diğer öğretmen adaylarından bazılarının, bazı problemlerde en fazla fikir üretenler arasında iken bazılarında en az ya da orta seviyede fikir üretenler arasında olması dikkate alınırsa akıcı düşünme becerisinin problemden probleme değişebileceği sonucu ortaya çıkar. Diğer yandan, akıcı düşünme becerisi açısından S9'un I-A grubu problemlerde genel olarak orta düzeyde iken I-B grubundaki problemlerde alt sıralarda yer alması, S14'ün I-A grubu problemlerde genel olarak alt sıralarda iken I-B grubu problemlerde üst sıralarda yer alması, S16'nın I-A grubu problemlerde genel olarak alt sıralarda iken I-B grubu problemlerde orta sıralarda yer alması dikkate alındığında ise akıcı düşünme becerisinin problem tipine göre de değişebileceği söylenebilir.

a. I-A grubu problemlerin akıcı düşünme becerisi açısından analizi:

I-A grubu problemlerin hepsi göz önüne alındığında akıcı düşünme becerisi açısından S4, S5, S6 ve S7'nin diğer öğretmen adaylarına göre daha çok problemde üst sıralarda, S8, S16 ve S21'in daha çok problemde alt sırada olduğu dikkati çekmiştir. Çoğu öğretmen adayının ise performansının problemden probleme farklılık gösterdiği tespit edilmiştir (Tablo 4.1). Bu tablo öğretmen adaylarının fikirlerinin sayısını göstermektedir. Bunun yanında ilerleyen kısımlarda üretilen fikirlerin niteliği de incelenecektir.

Öğretmen adaylarının ilk karşılaştıkları açık uçlu durum Problem 1'dir. Bu problem, öğretmen adaylarına daha sonra Problem 2 olarak verilen problemin koşullarının gizlenmesi ile oluşturulan bir problemidir.

Problem 1:

a) $x!+y!=z!$ b) $x!y!=z!$ eşitlikleri için neler söyleyebilirsiniz?

Problem 2 :

a) $x!+y!=z!$ olacak şekilde $x>1, y>1, z>1$ tamsayılarının olmadığını gösteriniz.

b) $x!y!=z!$ olacak şekilde sonsuz sayıda $x>1, y>1, z>1$ tamsayılarının olduğunu gösteriniz. (Erickson ve Flowers, 1999: 30)

Bu problem; öğretmen adaylarına akıcılık, esneklik kavramları tanıtılmadan önce verilmiştir. Problem 1'deki çözümler fikir sayıları açısından incelendiğinde S22'nin Problem 1'in a şikkında, S2'nin ise b şikkında en çok fikir üreten öğretmen adayları olduğu görülmüştür.

S22, Problem 1(a)'da özel değerleri (0 ve 1 değerlerini) inceleyerek eşitliğin sağlandığı dört durumu da belirlemiş ve daha sonra özel durumları ($y=x$, $y=x+1$, $y=x-1$, $y=x-2$), hatta bu özel durumlar altında özel değerleri inceleyerek fikir üretmiştir. Ancak ürettiği bu küçük fikirler, sonucu görebilmesi için yeterli olmamıştır (Şekil 4.37). Yani birçok fikir üretmiş fakat eşitliğin dört durum dışında sağlanmadığını görememiştir.

S22'nin Problem 2a'daki çözümünde doğru bir ispat yapamadığı görülmüştür (Şekil 4.38). Günlüğünün sonuna yazdığı “*ama soru genel bir soru olduğundan ispatlama gücümü çekiyorum.*” ifadesi genel ifadeler üzerinde düşünmede güçlük çektiğini göstermektedir. S22'nin diğer günlüklerinde de benzer duruma rastlanmıştır (Problem 21'deki günlük). Sonuç olarak S22'nin Problem 1a'da küçük küçük çok fikir üretmesi, genel ifadeler üzerinde düşünmekte zorluk çekmesinden kaynaklanabilir.

$$\begin{aligned}
 & \text{i) } x=1 \text{ ve } y=1 \text{ iken } z=2 \quad 1!+1!=2! \\
 & \text{ii) } x=0 \text{ ve } y=0 \text{ iken } z=2 \quad 0!+0!=2! \\
 & \text{iii) } x=1 \text{ ve } y=0 \text{ iken } z=2 \quad 1!+0!=2! \\
 & \text{iv) } x=0 \text{ ve } y=1 \text{ iken } z=2 \quad 0!+1!=2! \\
 & \underline{y=x \text{ iken}} \quad (\text{Giriş durumu}) \\
 & z! = x! \cdot x! = (x!)^2 \\
 & x = 0, 1, 2
 \end{aligned}$$

a) $x! + y! = z!$ seçilen durumlar

$$\begin{aligned}
 & \text{i) } x=1 \text{ ve } y=1 \text{ iken } 1!+1!=2! \\
 & \text{ii) } x=0 \text{ ve } y=1 \text{ iken } 0!+1!=2! \\
 & \text{iii) } x=1 \text{ ve } y=0 \text{ iken } 1!+0!=2! \\
 & \text{iv) } x=0 \text{ ve } y=0 \text{ iken } 0!+0!=2!
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \text{ veya } x=1 \\ y=0 \text{ veya } y=1 \\ z=2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \underline{y=x+1 \text{ ise}} \\
 & z! = x! + (x+1)! = x! (1+x+1) = x! (x+2) \\
 & x=0 \text{ iken } z! = 2! \Rightarrow z=2 \\
 & x=1 \text{ iken } \text{sağlanır} \\
 & \text{"} \\
 & \text{"}
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (0!+1!=2!) \\ x=0, y=1, z=2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \underline{y=x \text{ ise}} \\
 & z! = x! + x! = 2x! \\
 & x=0 \text{ iken } z=2 \text{ dir.} \\
 & x=1 \text{ iken } z=2 \text{ dir.} \\
 & x=2 \text{ iken } z!=4 \text{ böyle bir } z \text{ bulunmaz.}
 \end{aligned}
 \left(\begin{array}{l} x=0 \quad y=0 \quad z=2 \\ x=1 \quad y=1 \quad z=2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \underline{y=x-1 \text{ ise}} \\
 & x! + (x-1)! = z! \\
 & (x-1)! (x+1) = z! \\
 & x=1 \text{ iken } 0! \cdot 2 = 2! \\
 & x=2 \text{ " } 1! \cdot 3 = 3! \rightarrow z!=3 \text{ o.s. } z \text{ yok} \\
 & \text{"}
 \end{aligned}
 \quad \underline{x=1, y=0, z=2}$$

$$\begin{aligned}
 & \underline{y=x-2 \text{ ise}} \\
 & x! + (x-2)! = z! \\
 & (x-2)! (x(x-1)+1) = z! \Rightarrow (x-2)! (x^2-x+1) = z! \\
 & \text{böyle bir } x \text{ olmadığından durumu} \\
 & x=2 \text{ sağlanır. } z!=0 \text{ olarak alınır.} \\
 & x=3 \quad 1 \cdot 7 = 2! \quad z!=7 \quad \text{"} \\
 & x=4 \quad 2 \cdot 13 = 2! \quad \text{"}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.37. S22'nin Problem 1a için yazdığı günlük

$$a) x! + y! = z! \quad x > 1, y > 1, z > 1 \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2, 3, \dots \\ y &= 2, 3, \dots \\ z &= 2, 3, \dots \end{aligned}$$

değerlerini alabilir. ($x, y, z \in \mathbb{Z}$)

$$(2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, \dots)$$

Varsayalım ki $x=2$ olsun.

$z! = 2! + y! = 2 + y!$ bu eşitlikle y nm yerine ne yazarsak yazalım, hiçbir zaman $2+y!$ ifadesini bir sayının faktöriyel şeklinde yazamayız. Çünkü sayıların faktöriyelleri alınıp devam edilirse bu faktöriyeler arasındaki farkın sürekli açılacağı açıktır. ($2, 6, 24, 120, 720, \dots$)

Aynı şekilde $x=n$ olsun. $2 \leq n, n \in \mathbb{Z}$

$z! = n! + y! \Rightarrow n! = z! - y!$, n sayısını faktöriyellerin farkı şeklinde de ifade edemeyiz.

Yani sadece $x=0, 1$; $y=0, 1$ ve $z=2$ sonucundan başka bir sonuç bulamayacağımızı düşünüyorum. Bu durumda $x > 1, y > 1$, tarihi z yi bulamayız. Çünkü bir z yok.

Ama soru genel bir soru old. dan ispatlama gereği gelmiyor.

Şekil 4.38. S22'nin Problem 2a için yazdığı günlük

Problem 1a'da en çok fikir üretenler arasında olan S7'nin günlüğünde de küçük küçük birçok fikir vardır ve öğretmen adayı eşitlikle ilgili genel bir sonuca ulaşamamıştır. Eşitliği sağlayan özel değerleri belirlemiş ve verilen eşitlikle ilgili yüzeysel inceleme yaparak göze ilk çarpacak özellikleri belirlemiş, yani basit fikirler üretmiştir. Fakat fikir sayısının çok olması kendisini ulaşılabilceği en iyi sonuca götürmemiştir (Şekil 4.39). Bu durum, I-A grubu problemlerde üretilen fikir sayısının çok olmasının sonuca ulaşmayı garanti etmeyebileceğini göstermektedir.

② $x! = x(x-1)(x-2) \dots 1$ şeklinde $2! = 2(2-1)(2-2) \dots 1$
 $y! = y(y-1)(y-2) \dots 1$ şeklindedir.

$$x! + y! = x(x-1)(x-2) \dots 1 + y(y-1)(y-2) \dots 1 = 2!$$

$$= 2(2-1)(2-2) \dots 1$$

1 den büyük sayılar için faktöriyel çarpımı sonucu daima çifttir.

$n=2$ için	$2! = 2.1 = 2$	$1! = 1$
$n=3$ için	$3! = 3.2.1 = 6$	
$n=4$ için	$4! = 4.3.2.1 = 24$	

Bu şekilde sırasıyla devam ettiğimizde sonuç hep çift sayı olarak bulunur.

x ve y sayılarını 1 den büyük olarak seçtiğimizde sonuç olarak $x!$ ve $y!$ sonuçları çift çıkacaktır.

$x! + y!$, çift sayının toplamı çift olduğundan bu sonuçta çift olacaktır. Bu da bize sonucu çift olan 2 'nin de 1 den büyük bir sayı olduğunu gösterir.

x ya da y den herhangi birisi 1 değerini 1 den büyük alırsak faktöriyel sonucu olarak bir çift, bir de tek sayı sonucu elde ederiz ki çift sayı ile tek sayı toplamı tektr. (1 tek, 2 çift $1+2=3$ tek). Bunun için $2!$ tek olarak ve tek olması 2 nin 1'den büyük

olmasını gösterir $x! + y! > 1$ olacağı için böyle gösteririz. ②

şeklinde kavrayabiliriz. Örnek olarak

$$x=1 \text{ derseniz } x! + y! = 1! + 2! = 1 + 2.1 = 3$$

$$y=2$$

$3 = 2!$ olarak şekilde 2 sayıları yoktur.

x ve y sayılarını 1 seçerseniz

$$x! + y! = 1! + 1! = 1 + 1 = 2 = 2! \Rightarrow 2 = 2 \text{ sonucu elde edilir}$$

Aynı sonucu 0 sayısı için de bulabiliriz. Çünkü $0! = 1$ olarak alınmaktadır.

0 dan küçük sayıları ve rasgele sayıları seçmek ise faktöriyel terminde yoktur, bu yüzden bu sayılarla çalışmaya

S4'ün Problem 1(a) için yapmış olduğu çözüm en iyi çözüm olarak kabul edilebilir. S4, anlaşılması kolay ve şık bir formal çözüm yapmıştır. Çözümüne eşitliği sağlayan özel değerleri belirlemekle başlamış, eşitliği sağlamayan değerler olduğunu görmüş ve “Başka hangi şartlarda sağlanabilir?” sorusunu sorarak, bu sorunun cevabını araştırmaya çalışmıştır. Verilen eşitlikte sadeleştirme yaparak elde ettiği yeni eşitlikle ilgili çıkarımlar yapmıştır. Yaptığı çıkarımlarda basit fikirlerden yararlanmış, eşitliğin her iki tarafının tek veya çift olma durumuna bakmıştır (Şekil 4.40). S4, verilen eşitlikle ilgili sonucu görebilen az sayıda öğretmen adaylarından biridir (EK 3).

0) $x=y=0$ için $2=2$ $x=0, y=1$ için $2=2$
 $x=y=1$ " $2=2$
 Fakat, $x=1, y=2$ için $2 \neq 2$ bulunmaz.
 Yani her zaman doğru değil.
 Başka hangi şartlarda sağlanabilir?
 $x, y \neq 0, 1$ $x > y$ olsun. $(x(x-1) \dots (y+1) + 1) y! = 2!$
 $x(x-1) \dots (y+1) + 1 > y+1$ old. göre $x(x-1) \dots (y+1) + 1$ sayı.
 $2(2-1) \dots (y+2)(y+1)$ o.s. çarpımlara ayrılabilir mi?
 $x(x-1) \dots (y+1)$ çarpımı tam sayıların tek arifit sıralanması
 olduğundan arifit oldu söyleyebiliriz. Yani
 $x(x-1) \dots (y+1) + 1$ tek sayıdır. Kabul edelim ki bu tek sayı
 $2(2-1) \dots (y+2)(y+1)$ şeklinde çarpımlara ayrılabilir. Bu çarpımın
 sonucu da arifit olacaktır. Bu bir çelişkidir. Yani
 $x(x-1) \dots (y+1) + 1$ tek sayıdır, $2(2-1) \dots (y+2)(y+1)$ şeklinde
 çarpımlara ayrılmayacağından $x > y$ ile $(x, y \neq 0, 1)$
 $x! + y! = x(x+1) \dots (y+1) y! + y!$
 $= y! (x(x-1) \dots (y+1) + 1)$
 toplamın bir faktöriyel biriminde çarpımlarına ayrılmaz.
 Yani $x! + y! = 2!$ eşitliği x 'in ve y 'nin 0 ve 1 olması
 halinde geçerlidir. Özel olarak $x=y$ seçtsek de $(x \geq 2)$
 $x! + x! = 2 x! = 2!$ eşitliğini sağlayarak herhangi bir doğal
 sayı bulamayız.

Şekil 4.40. S4'ün Problem 1a için yazdığı günlük

Problem 1a'da özel değerleri inceleyerek sonucu sezgisel olarak görebilen fakat formal olarak ispatlamayan S2, S15 ve S17'nin ürettikleri fikir sayıları birbirine yakındır ve bu problem için üretilen ortalama fikir sayısı kadardır (EK 3, EK 17). Bu öğretmen adaylarının problemin yapılandırılmış halindeki (Problem 2a) çözümleri incelendiğinde yalnızca S2'nin tam olarak doğru bir ispat yaptığı görülmüştür. Diğerlerinin formal yollardan tam olarak doğru ispat yapamamış olmaları onların sezgisel olarak gördükleri sonucu formal yollarla ispatlama konusunda sıkıntı çektiklerini gösterdiği düşünülmektedir (Şekil 4.41).

a) Faktöriyel kavramından; $x! + y! = z!$ gibi bir toplama işlemi için $z = x + y$ şeklinde bir ifade düşünebiliriz. ($x > 1, y > 1, z > 1$ durumunda) örneğin; $5! = 2! + 3!$ gibi bir işlemde eşitliğin her iki tarafı da farklı sonuçlar verir. Yani $120 \neq 2 + 6$

Ama $0! = 1$ $1! = 1$ ve $2! = 2$ faktöriyel kullanılarak $x! + y! = z!$ işlemi bize doğru sonuçlar verecektir.

Şekil 4.41. S15'in Problem 2a için yazdığı günlük

Problem 1b'deki en iyi çözüm aynı zamanda en çok fikir üreten öğretmen adaylarından biri olan S2'ye aittir. S2'nin çözümünün en iyi olması, genel bağıntıyı belirleyebilen tek öğretmen adayı olmasından dolayıdır. Bu problem için yazdığı günlükte kullandığı stratejiler incelendiğinde, özel değerleri ve özel durumları incelediği ve eşitliği sağlayan x, y, z arasındaki bağıntıyı belirlediği görülmüştür (Şekil 4.42). S2'nin ürettiği fikirler tümevarımsal bir yaklaşım göstermektedir. Günlüğünün en başına 0'dan 6'ya kadar olan sayıların faktöriyelerini yazmış ve çözümüne önce özel değerleri inceleyerek başlamıştır. S2'nin özel değer incelemesi diğer öğretmen adaylarından farklıdır. S2 z'ye (0, 1 ve 2) değerlerini vererek x ve y'nin değerlerini belirlemiş, diğer öğretmen adayları ise x ve y'ye değerler vererek inceleme yapmışlardır.

b) $x! \cdot y! = z!$ $0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $6! = 720$

Yine burada x ve y arasındaki ilişkiye bakarız.

$$z! = z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Eğer $z=0$ veya $z=1$ ise x ve y için eşitli seçer seçilebilir.

yani $z!=1$ iken i) $x=0, y=0$

ii) $x=1, y=0$

iii) $x=0, y=1$

iv) $x=1, y=1$

variasyonları sağlar.

Eğer $z=2$ ise

i) $x=2, y=0$

ii) $x=0, y=2$

iii) $y=2, x=1$

iv) $y=2, x=0$

seçenekleri sağlar.

Eğer $z > 2$ ise $z!$ 'in asıluna bakarız.

$$z! = z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$0! = 1! = 1$ olduğundan $x! = 1$ yaptığımızda $y!$ tam $y! = z!$ dir.

Yine aynı sebeple $y! = 1$ olduğunda $x! = z!$ dir.

Şimdi $x > 1, y > 1$ durumlarına bakalım.

$$z! = z \cdot (z-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$z! = z \cdot (z-1)! \text{ yazabiliriz.}$$

$x! = (z-1)!$ kabul edersek $z = y!$ olur. z 'nin kendisi herhangi bir sayının faktöriyelisi olmak zorundadır.

$x! \cdot y! = z!$ $\Rightarrow$ Bu eşitliğin sağlanması için z sayısı herhangi bir sayının faktöriyelisi olmalıdır.

Eğer z sayısı herhangi bir sayının faktöriyelisi değilse kesinlikle eşitlik sağlanmaz.

Örneğin $z=6$ alalım. $z=6=3!$

$$z! = 6! = 720 = 6 \cdot 5! = 3! \cdot 5! \text{ dir.}$$

$$z=24 \text{ alalım } z! = 24! = 24 \cdot 23! = 4! \cdot 23! \text{ dir.}$$

Şekil 4.42. S2'nin Problem 1b için yazdığı günlük

S2, özel değer incelemesi yaptıktan sonra eşitliği sağlayan özel durumları belirlemiştir ($x!=z!$, $y!=1$ veya $y!=z!$, $x!=1$). Bu sonucu bulan S2 dışında sekiz öğretmen adayı (S6, S7, S11, S12, S14, S15, S19, S20) vardır (Ek 4). Ancak S2 dışında daha ileri inceleme yapan olmamıştır. S2'nin $x!=z!$, $y!=1$ veya $y!=z!$, $x!=1$ sonucu ile yetinmeyip neden daha ileri inceleme yaptığı ile ilgili detaylı veri yoktur ancak bu durumun onun sezgisel düşünmesinin bir sonucu olabileceği tahmin edilmektedir. S2'nin, daha sonraki incelemelerinde işlemlere başvurmamış olması dikkat çekicidir. S2, $z!=z(z-1)!$ eşitliğinden hareketle $x!=(z-1)!$, $z=y!$ eşitliklerini yazarak genel bağıntıyı görebilmiştir.

Eşitliği sağlayan 2'den büyük özel değerler belirleyen öğretmen adayları (S8, S10, S21) ile S2'nin günlüğü karşılaştırıldığında, S2'nin $z!=z(z-1)!$ eşitliğini kullanarak diğer öğretmen adaylarına göre fikir üretmek için daha kolay bir yol seçmiş olduğu söylenebilir. S2'nin aksine S8 fikir üretmek için daha zor bir yol seçmiştir. Sadeleştirme yaptıktan sonra elde ettiği eşitliği sağlayan örnek araştırmıştır ve bir örnek bulmuştur. Çözüm için bu tercihi 2'den büyük sayılar için bir örnek ($x=3$, $y=5$, $z=6$) belirleyebilmesi ile sonuçlanmış, fakat genel bağıntıya ulaşması için yeterli gelmemiştir (Şekil 4.43). Bu durum S8'in daha az fikir üretmesine neden olmuş gibi görünmektedir. Bu durum *düşünmek için daha zor yolları tercih etmenin* akıcı düşünme becerisini olumsuz etkileyebileceğini düşündürmektedir. Öte yandan duruma S2 açısından bakıldığında, S2'nin daha kolay yoldan düşünme tercihi sezgisel düşünmesinin bir sonucu olabileceğini akla getirmiştir.

$$b) x! \cdot y! = z!$$

$$x \dots 1 \cdot y \dots 1 = z(z-1) \dots 1$$

Bence burada x ve y mihir ikisinin ocuklarını
yapıp çarpmak işi v. b. tır.
biri mi olduğu biriktirip diğerinin

esitliğiyle aynıysa z eğerine tonanlamak
daha kolay olur bence
bu esitliği sağlayacak sayıların
ortak özellikleri nedir?

önce hangi sayıların faktöriyelini $n(n+1) \dots (n+p)$ şeklinde yazılır
ona baktım sonra anımsa bir $y! = (n-1)!$ olup z yi yazdım

$$120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$5! \cdot 3! = 6!$$

bir örnek buldum birden parçallama
yapmaya çalışıyorum

$$7!$$

$$265 \cdot 4321$$

$$10987653$$

$$7! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \dots y = 6 \text{ buldum}$$

$$7! \cdot 6! = 10!$$

$$x! \cdot y! = z!$$

$$7! \cdot 6!$$

$$654321$$

$$10987653$$

$$6! \cdot 10987653$$

$$5! \cdot 3! = 6! \cdot 5! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$3! = 6$$

burada x, y yi tonanlarken y de x i tonanlıyor gibi
gözüyor ohalde eğer $x! = n(n+1) \dots (n+p)$ şeklinde yazılabilir
hiçbir sayı da onu tamamlamaz gibi (emin değilim).

Şekil 4.43. S8'in Problem 1b için yazdığı günlük

Problem 2b'de x, y ve z birden büyük tamsayı olmak üzere $x!y! = z!$ eşitliğini sağlayan sonsuz tane x, y, z sayılarının var olduğunun ispatlanması istenmiştir. "Bu eşitliği sağlayan sonsuz tane sayı vardır" sonucu S6 tarafından fark edilmiş, fakat onun incelemesi üç değer birlikte 1'den büyük olması şartını karşılamamaktadır (Şekil 4.44). Aslında bu şart, Problem 1b'de verilmemiştir. Dolayısıyla S6'nın Problem 1a'daki çözümü doğrudur ve S2'nin bulduğu sonuçtan sonra en iyi sonuç olarak nitelendirilebilir. Öte yandan, S6'nın fikir sayısı da S2'ninkiyle aynıdır. Bunun yanında, ikisinin günlüklerinde ortak olan şey, çözümlerinin başına bazı doğal sayıların faktöriyelerini yazmış olmalarıdır. Ancak iki öğretmen adayının fikirlerinin niteliğine bakıldığında S6'nın daha küçük fikirler ürettiği söylenebilir. Çünkü S2'nin $z! = 1$ için incelediği dört durumu S6, sekiz durumda incelemiştir. S6'nın günlüğünden, bu eşitliği sağlayan durumların sayısına odaklandığı, S2'nin ise eşitliğin hangi durumlarda sağlandığını belirlemeye odaklandığı anlaşılmaktadır.

$x!y! = z!$
 $0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $6! = 720$

$2! = 5040$	$x=0$ $y=1$ $z=0$	$x=0$ $y=0$ $z=0$	$x=0$ $y=0$ $z=1$	$x=1$ $y=1$ $z=1$	$x=0$ $y=1$ $z=1$	$x=1$ $y=0$ $z=0$	$x=1$ $y=0$ $z=1$
-------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

$x=1$
 $y=1$
 $z=0$

8 tane farklı çözüm var.

$x=0$
 $y=2$
 $z=2$

$x=1$
 $y=2$
 $z=2$

$x=2$
 $y=0$
 $z=2$

$x=2$
 $y=1$
 $z=2$

4 farklı çözüm var.

Aynı yöntem diğer sayılar için kullanılabiliriz 2'nin yerine
 3'ün etkisi elemanı 1 dir. ben 0 ve ben 1
 bu işlemleri sağladığını. 8, 4, 1 - - sayıları için her biri
 için 4 çözüm mevcut.
 $8 + 4 + 1 = 13$ tane çözümü var.

Şekil 4.44. S6'nın Problem 1b için yazdığı günlük

Problem 1b'de çok fikir üretenler arasında olan S7 ve S12'nin yalnızca özel değer incelemesi yaptığı görülmüştür. Her iki öğretmen adayının ulaştıkları sonuç $x!=1$, $y=z$ veya $y!=1$ ve $x=z$ olması durumunda eşitliğin sağlandığıdır. Ancak bu sonuç doğru olmasına rağmen ulaşılabilecek daha iyi sonuçlar vardır. Burada, çok fikir üretmiş olmanın I-A grubu problemlerinde sonuca ulaşmayı garantilemediğini gösteren bir durum mevcuttur.

Problem 3, 8 ve 9'da en çok fikir üreten öğretmen adayı olan S5 bu problemlerde diğer öğretmen adaylarından oldukça fazla fikir üretmiştir. İlerleyen kısımda S5'in bu problemlerdeki günlükleri diğer bazı öğretmen adayları ile karşılaştırmalı olarak incelenecektir. S5'in en çok fikir ürettiği problemlerden biri olan Problem 3 için yapılan çözümlerin şeması EK 7'te verilmiştir. Problem 3'te öğretmen adaylarından $n \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ tamsayısı için neler söyleyebilecekleri sorulmuştur. Problemin orijinalinde ise bu ifadenin 8 ile bölündüğünün ispatlanması isteniyordu. Çözümlerin şeması oluşturulurken günlükler bu sonucu fark eden ve etmeyen olarak ikiye ayrılmıştır. Sonucu fark eden öğretmen adayları arasında formal yollarla ispat yapan yalnızca iki öğretmen adayı vardır ki bunlardan biri S4 (Şekil 4.46) diğeri S5'tir (EK 7). Sonucu fark eden öğretmen

$$\begin{array}{ll}
 n \equiv 2 \pmod{10} & 8 \text{ örne} \\
 n = 4k + 2, \quad k \geq 0 & 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 0 \pmod{10} \\
 n = 4k + 3, \quad k \geq 0 & 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 6 \pmod{10} \\
 n = 4k + 4, \quad k \geq 0 & 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 2 \pmod{10} \\
 n = 4k + 5, \quad k \geq 0 & 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 8 \pmod{10}
 \end{array}$$

dönüşüne sahip

Görülüyor.

$$5^n = 5 \pmod{10} \quad \forall n \geq 1 \text{ için}$$

$$6 = 6 \pmod{10}$$

$$7^n = 7 \pmod{10} \quad n=1 \text{ için}$$

$$9 \pmod{10} \quad n=2 \text{ için}$$

$$3 \pmod{10} \quad n=3 \text{ için}$$

$$1 \pmod{10} \quad n=4 \text{ için}$$

$$7 \pmod{10} \quad n=5 \text{ için}$$

sayının mod 10 bakiyesi her 5 sayı modüler aritmetikte $5 \cdot 10^n$ gibi bir
 sayı bölür yani kalan sıfırdır. aile çarpımı ve tekrar mod

$7^n \pmod{10}$ göre kalanlar: 7, 9, 3, 1 'dir.

$$n=1 \text{ için} \quad 5 + 6 \cdot 7 + 1 = 48 = 8 \pmod{10}$$

$$n=2 \text{ için} \quad 5 + 6 \cdot 9 + 1 = 60 = 0 \pmod{10}$$

$$n=3 \text{ için} \quad 5 + 6 \cdot 3 + 1 = 26 = 6 \pmod{10}$$

$$n=4 \text{ için} \quad 5 + 6 \cdot 1 + 1 = 12 = 2 \pmod{10}$$

Şekil 4.45. S5'in Problem 3 için yazdığı günlük (devam)

$n \geq 2$ her tam sayı için

$$5^n + 6 \cdot 7^n + 1 \in \mathbb{Z}$$

$$5^n = (2+3)^n$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i 3^{n-i}$$

$$7^n = (-2+9)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-2)^i 9^{n-i}$$

$$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$$

$$n=2 \Rightarrow 5 \cdot 2^2$$

$$n=3 \Rightarrow 3 \cdot 2^3$$

$$n=4 \Rightarrow 2 \cdot 2^4$$

$$6 \cdot 26 = 156$$

$$6 \cdot 7^4 = 15006$$

$$n=2 \text{ için } 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 5 \cdot 2^6$$

$$n=3 \text{ için } " = 2^3 \cdot 2^6$$

$$n=4 \text{ için } " = 2^3 \cdot 2^6$$

n'e değerler verdikimizde 2^3 'ün kollarını elde ediyoruz.

Ayrıca her $n \geq 2$ için $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ tam sayı 2^3 'ün kolları olur mu? Yani $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ sayısı 2^3 'e bölünebilir mi?

Bunun için bölünebilme kurallarından yararlanarak;

$$5 \equiv 5 \pmod{2^3} \quad \vee \quad 7 \equiv 7 \pmod{2^3}$$

$$25 \equiv 1 \pmod{2^3} \quad 49 \equiv 1 \pmod{2^3}$$

$\Rightarrow$ n tek olan 5^n ve 7^n den kollar 5 ve 7 olurken n çift olan 5^n ve 7^n den kollar 1 oluyor.

Yani; n tek olan;

$$\begin{array}{r} 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 5 + 6 \cdot 7 + 1 = 49 \end{array}$$

n çift olan;

$$\begin{array}{r} 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 1 + 6 \cdot 1 + 1 = 8 \end{array}$$

elde ederiz. Bu demektir ki $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ her zaman 2^3 'ün kolları olduğundan $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ tam sayı (26) her zaman 2^3 'e tam bölünür.

Şekil 4.46. S4'ün Problem 3 için yazdığı günlük

Bu problemde en çok fikir üreten öğretmen adaylarından S6 ve S7 özel değer incelemişler ve basit fikirler üretmişlerdir (Şekil 4.47). Buradan özel değer incelemesi ve basit fikir üretme stratejilerinin akıcı düşünmeyi olumlu etkileyebileceği söylenebilir. Öte yandan bu öğretmen adaylarının çok fikir üretmelerine rağmen sonucu görememiş olmaları akıcı düşünmenin I-A grubu problemlerde sonuca ulaşmayı garantilemediği sonucunu desteklemektedir. Burada dikkati çeken durumlardan biri de S7'nin Problem 1a, 1b ve 3'te en çok fikir üreten öğretmen adayları arasında olmasına rağmen sonucu görememiş olmasıdır. S7'nin bu problemlerin yapılandırılmış hali olan Problem 2a, 2b ve 4'deki performansı incelendiğinde yalnızca Problem 4'te doğru bir şekilde ispat yaptığı dikkati çekmiştir. Bu durum öğretmen adayının temel fikir üretmede başarılı, fakat temel fikirlerin formal çıkarımlarla bir bütün halinde bir araya getirilerek sonuca ulaşmada yeterince başarılı olmadığını düşündürmektedir.

Çözüm: Tek sayılar bütün kuvvetleri tek sayı olduğu için 5^n ve 7^n sayılarının sonucu da tek olacaktır.

$6 \cdot 7^n \Rightarrow 6$ çift ve tekile çiftin çarpımı çift olduğu için $6 \cdot 7^n$ çarpımı da çifttir.

$5^n + 6 \cdot 7^n \Rightarrow 5^n$ tek, $6 \cdot 7^n$ çift, tek ve çiftin toplamı tektir.

$5^n + 6 \cdot 7^n + 1 \Rightarrow 5^n + 6 \cdot 7^n$ çift, 1 tek ve sonuçta $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ sayısı her zaman için bir çift tensayı olur.

*$6 = 5 + 1$, $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 5^n + (5 + 1) \cdot 7^n + 1$
 $= 5^n + 5 \cdot 7^n + 7^n + 1$
 $= 5(5^{n-1} + 7^n) + 1 \cdot (7^n + 1)$*

$n=0$ için	$5^0 + 6 \cdot 7^0 + 1 = 8$
$n=1$ için	$5^1 + 6 \cdot 7^1 + 1 = 48$
$n=2$ için	$5^2 + 6 \cdot 7^2 + 1 = 25 + 6 \cdot 49 + 1 = 320$
$n=3$ için	$5^3 + 6 \cdot 7^3 + 1 = 125 + 6 \cdot 343 + 1 = 2184$
$n=4$ için	$5^4 + 6 \cdot 7^4 + 1 = 625 + 6 \cdot 2401 + 1 = 25032$
$n=5$ için	$5^5 + 6 \cdot 7^5 + 1 = 3125 + 6 \cdot 16807 + 1 = 103968$
$n=6$ için	$5^6 + 6 \cdot 7^6 + 1 = 15625 + 6 \cdot 117649 + 1 = 721520$

$5 \mid 320$ $7 \nmid 320$

$5 \nmid 2184$ $7 \mid 2184$

$5 \nmid 25032$ $7 \mid 25032$

$5 \nmid 103968$ $7 \nmid 103968$

$5 \nmid 721520$ $7 \nmid 721520$

5 ya da 7 ile bölünebilirlik ile ilgili bir genelleme bulamaz.

Şekil 4.47. S7'nin Problem 3 için yazdığı günlük

Öte yandan en çok fikir üreten S5 dışında, algoritmik işlem yapmayı tercih eden diğer öğretmen adayları (S2, S3, S5, S9, S16) yaptıkları işlemlerden bir sonuç çıkaramamışlardır. Bunun nedeni, tercih ettikleri çözüm yolunun S5'inkine göre düşünmeyi daha da zorlaştırmış olmasıdır. Çünkü S5, çarpanlara ayırma işlemini kullanacak şekilde ifadeyi düzenlerken, diğerleri binom açılımını kullanacak şekilde düzenleme yapmaya çalışmışlardır. Binom açılımında terimlerin başına gelen katsayıların öğretmen adaylarının düşünmelerini, S5'in seçimine göre zorlaştırdığı düşünülmüştür (Şekil 4.35 ve Şekil 4.36). Bu öğretmen adaylarının işlemlerden bir sonuca ulaşamamış olmaları da bu düşünceyi desteklemektedir.

S5'in Problem 8'deki fikir sayısı, tüm öğretmen adaylarının ortalama fikir sayısından oldukça fazladır. S5, verilen şartları sağlayan M kümesinin toplama ve çarpma işlemlerine göre grup olup olmadığını inceleyerek fikir üretmeye başlamıştır. Yüzeysel inceleme ile ilk bakışta görünür özellikleri incelediğinden basit fikirler ürettiği söylenebilir. S5, bu incelemeleri ile M'nin toplamaya göre grup olmadığını ispatlamıştır. M'nin çarpmaya göre grup olduğunu ispatlamaya çalışırken ters elemanın kümede olduğu sonucunu çıkarmada mantıksal hata yapmıştır. Yani ters elemanın kümede olduğunu yanlış gerekçelere dayandırmıştır. Küme üzerinde fonksiyon tanımlamaya çalışmış, ardından özel değerleri inceleyerek kümenin elemanları hakkında ipucu yakalamaya çalışmıştır. Bu esnada kümenin Q^+ olduğunu fark etmiş ve bunu formal yolla ispatlamaya çalışmıştır. Ancak yaptığı ispat, ispatladığını sandığı durumun ispatı değildir (Şekil 4.48). S5'in bu çözümde basit fikirler ürettiği, özel değerler incelediği ve bu esnada kümenin ne olabileceğini fark ettiği için bu durumu formal yollarla ispatlamaya çalıştığı görülmüştür. S5 günlüğündeki düşünme süreçlerine şunları yazmıştır:

“Ne görebilirim diye baktım önce aklıma grup ve halka geldi çünkü soyut matematikte şu an onları görüyoruz. Bir şeyle ne kadar uğraşırsan hep onu görürsün ya galiba o yüzden. Daha sonra bu küme üzerinde 1-1 ve örten bir fonksiyon tanımlayıp tanımlayamayacağıma baktım. Elemanların neler olabileceğine baktım ama o sonucu bulacağımı hiç düşünmedim. İşlemleri kontrol ederken fark ettim ve ispatlamaya çalıştım. Doğru olduğunu gördüm. Açıkçası sorunun da bu sonuçla alakalı olduğunu düşündüğümünden başka düşünce geliştiremiyorum.”

Agar şekilde V_{AEO} için $\alpha_{EM} \approx$


 $a \rightarrow M$

(P) Wie viele EM gibt es? $\frac{1}{\lambda}$ EM. Die
für den de Broglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{mv}$

$$a = \frac{1}{2} = \frac{0.7+1}{2} \text{ cm. dir.}$$

$a + \frac{1}{a} = \frac{a^2 + 1}{a}$ EM'dir.
 (E) $a^2 - b^1$ EM olan bir sayı carpılarak ayrılıyor. Çünkü $\frac{(a+b)(a-b)}{\text{yani bu şekilde ayrılıyor}}$

[illegible]

1. $Q_1 = 100$ $Q_2 = 100$ $Q_3 = 100$ $Q_4 = 100$ $Q_5 = 100$ $Q_6 = 100$ $Q_7 = 100$ $Q_8 = 100$ $Q_9 = 100$ $Q_{10} = 100$ $Q_{11} = 100$ $Q_{12} = 100$ $Q_{13} = 100$ $Q_{14} = 100$ $Q_{15} = 100$ $Q_{16} = 100$ $Q_{17} = 100$ $Q_{18} = 100$ $Q_{19} = 100$ $Q_{20} = 100$ $Q_{21} = 100$ $Q_{22} = 100$ $Q_{23} = 100$ $Q_{24} = 100$ $Q_{25} = 100$ $Q_{26} = 100$ $Q_{27} = 100$ $Q_{28} = 100$ $Q_{29} = 100$ $Q_{30} = 100$ $Q_{31} = 100$ $Q_{32} = 100$ $Q_{33} = 100$ $Q_{34} = 100$ $Q_{35} = 100$ $Q_{36} = 100$ $Q_{37} = 100$ $Q_{38} = 100$ $Q_{39} = 100$ $Q_{40} = 100$ $Q_{41} = 100$ $Q_{42} = 100$ $Q_{43} = 100$ $Q_{44} = 100$ $Q_{45} = 100$ $Q_{46} = 100$ $Q_{47} = 100$ $Q_{48} = 100$ $Q_{49} = 100$ $Q_{50} = 100$ $Q_{51} = 100$ $Q_{52} = 100$ $Q_{53} = 100$ $Q_{54} = 100$ $Q_{55} = 100$ $Q_{56} = 100$ $Q_{57} = 100$ $Q_{58} = 100$ $Q_{59} = 100$ $Q_{60} = 100$ $Q_{61} = 100$ $Q_{62} = 100$ $Q_{63} = 100$ $Q_{64} = 100$ $Q_{65} = 100$ $Q_{66} = 100$ $Q_{67} = 100$ $Q_{68} = 100$ $Q_{69} = 100$ $Q_{70} = 100$ $Q_{71} = 100$ $Q_{72} = 100$ $Q_{73} = 100$ $Q_{74} = 100$ $Q_{75} = 100$ $Q_{76} = 100$ $Q_{77} = 100$ $Q_{78} = 100$ $Q_{79} = 100$ $Q_{80} = 100$ $Q_{81} = 100$ $Q_{82} = 100$ $Q_{83} = 100$ $Q_{84} = 100$ $Q_{85} = 100$ $Q_{86} = 100$ $Q_{87} = 100$ $Q_{88} = 100$ $Q_{89} = 100$ $Q_{90} = 100$ $Q_{91} = 100$ $Q_{92} = 100$ $Q_{93} = 100$ $Q_{94} = 100$ $Q_{95} = 100$ $Q_{96} = 100$ $Q_{97} = 100$ $Q_{98} = 100$ $Q_{99} = 100$ $Q_{100} = 100$ $Q_{101} = 100$ $Q_{102} = 100$ $Q_{103} = 100$ $Q_{104} = 100$ $Q_{105} = 100$ $Q_{106} = 100$ $Q_{107} = 100$ $Q_{108} = 100$ $Q_{109} = 100$ $Q_{110} = 100$ $Q_{111} = 100$ $Q_{112} = 100$ $Q_{113} = 100$ $Q_{114} = 100$ $Q_{115} = 100$ $Q_{116} = 100$ $Q_{117} = 100$ $Q_{118} = 100$ $Q_{119} = 100$ $Q_{120} = 100$ $Q_{121} = 100$ $Q_{122} = 100$ $Q_{123} = 100$ $Q_{124} = 100$ $Q_{125} = 100$ $Q_{126} = 100$ $Q_{127} = 100$ $Q_{128} = 100$ $Q_{129} = 100$ $Q_{130} = 100$ $Q_{131} = 100$ $Q_{132} = 100$ $Q_{133} = 100$ $Q_{134} = 100$ $Q_{135} = 100$ $Q_{136} = 100$ $Q_{137} = 100$ $Q_{138} = 100$ $Q_{139} = 100$ $Q_{140} = 100$ $Q_{141} = 100$ $Q_{142} = 100$ $Q_{143} = 100$ $Q_{144} = 100$ $Q_{145} = 100$ $Q_{146} = 100$ $Q_{147} = 100$ $Q_{148} = 100$ $Q_{149} = 100$ $Q_{150} = 100$ $Q_{151} = 100$ $Q_{152} = 100$ $Q_{153} = 100$ $Q_{154} = 100$ $Q_{155} = 100$ $Q_{156} = 100$ $Q_{157} = 100$ $Q_{158} = 100$ $Q_{159} = 100$ $Q_{160} = 100$ $Q_{161} = 100$ $Q_{162} = 100$ $Q_{163} = 100$ $Q_{164} = 100$ $Q_{165} = 100$ $Q_{166} = 100$ $Q_{167} = 100$ $Q_{168} = 100$ $Q_{169} = 100$ $Q_{170} = 100$ $Q_{171} = 100$ $Q_{172} = 100$ $Q_{173} = 100$ $Q_{174} = 100$ $Q_{175} = 100$ $Q_{176} = 100$ $Q_{177} = 100$ $Q_{178} = 100$ $Q_{179} = 100$ $Q_{180} = 100$ $Q_{181} = 100$ $Q_{182} = 100$ $Q_{183} = 100$ $Q_{184} = 100$ $Q_{185} = 100$ $Q_{186} = 100$ $Q_{187} = 100$ $Q_{188} = 100$ $Q_{189} = 100$ $Q_{190} = 100$ $Q_{191} = 100$ $Q_{192} = 100$ $Q_{193} = 100$ $Q_{194} = 100$ $Q_{195} = 100$ $Q_{196} = 100$ $Q_{197} = 100$ $Q_{198} = 100$ $Q_{199} = 100$ $Q_{200} = 100$ $Q_{201} = 100$ $Q_{202} = 100$ $Q_{203} = 100$ $Q_{204} = 100$ $Q_{205} = 100$ $Q_{206} = 100$ $Q_{207} = 100$ $Q_{208} = 100$ $Q_{209} = 100$ $Q_{210} = 100$ $Q_{211} = 100$ $Q_{212} = 100$ $Q_{213} = 100$ $Q_{214} = 100$ $Q_{215} = 100$ $Q_{216} = 100$ $Q_{217} = 100$ $Q_{218} = 100$ $Q_{219} = 100$ $Q_{220} = 100$ $Q_{221} = 100$ $Q_{222} = 100$ $Q_{223} = 100$ $Q_{224} = 100$ $Q_{225} = 100$ $Q_{226} = 100$ $Q_{227} = 100$ $Q_{228} = 100$ $Q_{229} = 100$ $Q_{230} = 100$ $Q_{231} = 100$ $Q_{232} = 100$ $Q_{233} = 100$ $Q_{234} = 100$ $Q_{235} = 100$ $Q_{236} = 100$ $Q_{237} = 100$ $Q_{238} = 100$ $Q_{239} = 100$ $Q_{240} = 100$ $Q_{241} = 100$ $Q_{242} = 100$ $Q_{243} = 100$ $Q_{244} = 100$ $Q_{245} = 100$ $Q_{246} = 100$ $Q_{247} = 100$ Q_{24

~~egor mda gift bir postiti~~

2 EM is
6. bir qatışı

-3€M ise 9-3€M 22€M 22€M 15€M
 0-1 anağı 9-3€M 22€M 22€M 15€M

$0 + 0 = 0$ $9 - 3 = 6$
 $-12 + -3 = -15$ $-15 = -15$

$-12 + 3 \text{ EM} - 15 \text{ EM}$
 Kreatifitas $\rightarrow$ (1 EM old. dan 12 EM baru) $\rightarrow$ (Bisa orkestrasi 12 EM tim)

[illegible]

ket. iain - 1 ~~PM~~ asikar - ket. ~~PM~~ iain. 2200
ket. iain - 1 ~~PM~~ asikar - ket. ~~PM~~ iain. 2200
ket. iain - 1 ~~PM~~ asikar - ket. ~~PM~~ iain. 2200

(iii) Let $k \in \mathbb{N}$. Then $k \cdot k = k^2 \in \mathbb{N}$.

$-k \in \mathbb{N}$ $k \in \mathbb{N}$ $k-k \in \mathbb{N}$ $0 \in \mathbb{N}$ $-k+k \in \mathbb{N}$
 dedüktör. $-k+k=0 \in \mathbb{N}$
 bir grupta 0
 yani

-kEMons k'EM dedigimiz de. -
dubard (k-1)EM dM oncek bu bir getiki ya

$-(k^2 + k) = k^2 - k \quad \text{dM an der } k$
 $k \in \mathbb{Z}^{+}$ $-k \in \mathbb{M}$ ald. dar.

$(-1)^{kl} = 1$ if $k \in \mathbb{Z}^{+}$ and $l \in \mathbb{Z}^{+}$

$N = Q^+ \text{ dir.}$

Şekil 4.48. S5'in Problem 8 için yazdığı günlük (devam)

S5'in yazdıklarından, fikir üretmeye başlarken M kümesinin ne olabileceği hakkında düşünmemiş ve kümenin özelliklerini belirlemeye odaklanmış olduğu anlaşılmaktadır. Öğretmen adayının günlüğüne yazdığı *“Açıkçası sorunun da bu sonuçla alakalı olduğunu düşündüğümünden başka düşünce geliştiremiyorum.”* ifadesi, çözüme başladığında M kümesinin Q^+ olabileceğini hissetmiş olsaydı bu kadar fikir geliştirmeyebileceği düşüncesini akla getirmektedir. Dolayısıyla, bu problemde çok fikir üretmesini, çözümün başlangıcında M kümesinin ne olabileceği ile ilgili fikir yürütmemesi sağlamış olabilir. Bu durum S5'in mantıksal düşünmeye sahip olmasından kaynaklanıyor olabilir.

Problem 8’de S5’den sonra en fazla fikir üreten öğretmen adayı S13 olmuştur. S13 de bu problemde S5 gibi basit fikir üretme stratejisinden yararlanmıştır. Bu strateji akıcı düşünme becerisini olumlu etkileyebilir.

Problem 8 için en az fikir üreten öğretmen adaylarından biri olan S2 düşünme süreçlerine şunları yazmıştır:

“a şıkkındaki koşulda M’nin ya sonsuz sayıda elemanı olması gerektiği ya da hiç elemanı olmaması gerektiğini anladım. Sonsuz sayıda elemanı da olamaz. Çünkü o zaman $M=Q$ olur. O zaman $M\subset Q$ olmaz. Yani M’nin kesinlikle elemanı yoktur.”

S2’nin yukarıdaki ifadelerinden ve günlüğünden *yüzeysel bir inceleme* yapmış olduğu, *incelemelerini derinleştirmede*ği anlaşılmaktadır. Verilen iki önerme için ayrı ayrı düşünmüş, önce birinci önermeyi kullanarak, toplama ve çarpma işlemleri ile M kümesinin a ve b elemanlarının çeşitli kombinasyonlarını oluşturmuştur. Bu şekilde devam ederek sonsuz elemanlı olması gerektiğini düşünmüştür. İkinci önermeyi kullanarak fikir üretmeye çalışmış fakat mantıklı görünmeyen ifadeler kullanmıştır. İlk önermenin doğruluğundan aklına gelen fikir üzerine yoğunlaşmış ve ikinci önermeyi yalnızca bu açıdan incelemiş olduğu görülmektedir. Günlüğünde yazmış olduğu şu ifadeler birbiriyle çelişmektedir (Şekil 4.49):

“düşündüm taşındım M’nin boş olduğuna kanaat getirdim”

“Q da olup da M’de olmayan bir tek eleman vardır. O da sıfırdır”

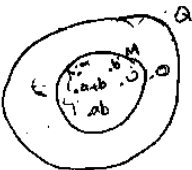
“M kesinlikle sonlu sayıda elemana sahip olamaz. Çünkü sürekli olarak toplama ve çarpma yapacağız.”

S2’nin az fikir üretmesinin nedeni olarak mantıksal hatalar yapması ve incelemelerini derinleştirmemesi olduğu düşünülebilir. S2’in bu problemi çözerken sıkılmış olduğu, problemle istekli bir şekilde uğraşmadığı görülmüştür. Görüşmelerde S2 çözmek için ısrarlı davranacağı problemler konusunda seçici olduğuna dair ipuçları vermiştir. Yapılan gözlemler de bu durumu desteklemektedir. Görüşmede bu durumla ilgili olarak elde edilen ipuçları aşağıdadır:

"...O yüzden çözmeye çalışırım yani. Zorlandıkça daha çok üzerinde dururum. Pek fazla soyut işlemler üzerinde durmam da. Soyutta dediğim gibi daha önce yapmış olduğum pratik falan çok önemli olduğundan dolayı. Soyut problemlerde pek fazla zorlamam kendimi ama somut olduğu zaman kesinlikle çözmeye çalışırım." (S2)

"...sabırlıyım ya pek şey değildir de bir gün falan uğraşabilirim bir soruya da tabii sorunun şeyine bağlı soruyu çözme isteğime bağlı. Soruyu çözmek istiyorsam." (S2)

$a = \frac{x}{y} \quad b = \frac{z}{t} \quad \text{o.s. } x, y, z, t \in \mathbb{Z} \text{ ve } y \neq 0, t \neq 0$



Eğer a ve b M 'nin elemanı ise
 $a+b$ ve $a.b$ 'de M 'nin elemanı mı?
 O zaman $a+(a+b), b+(a+b), a.(a+b)$ ve $b.(a+b)$ de M 'nin elemanıdır. Aynı şekilde $(a+b)+ab$ ve $(a+b).ab$ de M 'nin elemanıdır. Bu şekilde sürekli olarak kombinasyon yapabiliriz.
 $a, b, a+b, ab, a+(a+b), b+(a+b), (a+b)+ab, a+[a+(a+b)], b+[a+(a+b)] \dots$

b) $\forall r \in Q$ için ya $r \in M$, ya $r \notin M$, ya da $r=0$ mı?
 Eğer $r \notin M$ olursa o zaman $Q=M$ olur. Onda $M \subset Q$ ile çelişir.
 Çünkü $r \notin M$ iken aynı zamanda $-r \in Q$ ve $-(-r) \in M$ olmalıdır.
 Yani hem r hem de $-r$ M 'nin elemanı olur. O zaman $M=Q$ olur.
 Onda M 'nin seçimiyle sıkışır.
 Sonuç olarak tasarımlar M 'nin boş olduğunu kanıt getirdim.



Q da olupta M de olmayan bir tek eleman vardır.
 O da sıfırdır.
 M kesinlikle sonlu sayıda elemana sahip olamaz.
 Çünkü sürekli olarak toplama ve çarpma yapacağız.

Şekil 4.49. S2'nin Problem 8 için yazdığı günlük

Problem 8'in S2'nin soyut problem olarak ifade ettiği problemlerden biri olduğu düşünülmektedir. Dolayısıyla S2'nin bu problemde istekli ve ısrarlı davranmamasının problemin niteliğinden kaynaklandığı tahmin edilmektedir.

Tablo 4.1’de bu problem için üretilen fikir sayısı 0 olarak görülen S12’nin günlüğü anlamsız görünen ifadelerle doludur. Bu durum öğretmen adayının verilen koşulları iyi analiz etmediği ve yanlış anladığı şeklinde yorumlanabilir (Şekil 4.50).

$M \subset \mathbb{Q}$ $a, b \in M$ $a+b \in M$
 $r \in \mathbb{Q}$

(b)

M kümesi $\mathbb{Q}$ ’nın alt kümesi
 Kabul edelim ki (b)’deki önermelerden
 $r \in M$, $-r \in M$ aynı zamanda doğru olsun.
 Yani $r, -r \in M$ olan.
 Bir φ fonk. tanımlayalım.
 $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow M$
 $r \mapsto r$
 O zaman $\varphi(r) = r$ olacaktır. Yani her $r \in \mathbb{Q}$ için $\varphi(r) \neq -r$ dir.
 Bir θ fonk. tanımlayalım.
 $\theta: \mathbb{Q} \rightarrow M$
 $r \mapsto -r$
 $\theta(r) = -r$ olacağından $r \notin M$
 Aynı şekilde bir ψ fonk. tanımlayalım
 $\psi: \mathbb{Q} \rightarrow M$
 $r \mapsto 0$
 $\psi(r) = 0$ iken aynı zamanda $r, -r \in M$ olamaz.
 Bu durumda M sunulardan birisidir.
 $M = \{ -r : r \in \mathbb{Q} \}$
 $M = \{ r : r \in \mathbb{Q} \}$
 $M = \{ r=0 : r \in \mathbb{Q} \}$

Şekil 4.50. S12’nin Problem 8 için yazdığı günlükten alıntı

Bu örneklerden mantıksal hataların akıcı düşünmeyi olumsuz etkilediği sonucu çıkarılabilir.

Problem 8’de öğretmen adaylarının oldukça sezgisel incelemeler yaptıkları görülmüştür. Özellikle ikinci maddenin öğretmen adaylarının çoğunun sezgisel düşüncelerini harekete geçirdiği tahmin edilmektedir. Çünkü öğretmen adayları tahminlerinde gerekçe olarak ikinci maddeyi göstermiş, ilk maddeyi de kontrol için kullanmışlardır. Ancak bu yaklaşımları formal ispattan uzaktır. Kümenin elemanlarının ya pozitif ya da negatif sayılardan oluşacağı düşüncesiyle fikir üretmeye başlayan S9’un günlüğü sade ve net ifadeler içermektedir (Şekil 4.12).

Öğretmen adayı, bu çözümünü yaparken 0'ın kümede olamayacağını fark etmemiştir. Aksi halde bir tek $M=Q^+$ sonucunu elde edecekti ki bu da problemin orijinalinde belirtilen sonuçtu. Fikir sayısı açısından incelendiğinde, S9'un bu problem için fikir sayısı genel duruma göre ortalama bir sayı olmasına rağmen S5'in fikir sayısının çok gerisinde kalmaktadır. Bu farkın S9'un çözümün başında sonucu sezgisel olarak hissetmiş, S5'in ise hissetmemiş olmasından kaynaklandığı tahmin edilmektedir. Sezgisel düşünen S9 ile mantıksal düşünen S5'in bu problemdeki yaklaşımları dikkate alınırsa mantıksal düşünmenin akıcı düşünme eğiliminde olduğu söylenebilir. Öte yandan S9'un akıcı düşünmeyi önemsemediği, S5'in ise akıcı düşünmeyi önemseydiği de dikkate alınırsa ortaya çıkan sonuç üzerinde bu durumda etkili olabileceği düşünülmektedir.

S5'in en akıcı fikir ürettiği problemlerden bir diğeri de Problem 9'dur (Şekil 4.54). Problem 9'un uyarıldığı yapılandırılmış problem şu şekildedir: “Her x, y reel sayıları için $f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonunun birim fonksiyon olduğunu gösteriniz?”

Öğretmen adayları f 'nin birim fonksiyon olduğunu bilmeden fikir ürettikleri ve hepsinin de birim fonksiyonun bu eşitliği sağladığını fark ettikleri belirlenmiştir. Bazı öğretmen adaylarının fonksiyonun birim fonksiyon olup olmadığını yüksek sesle sorması üzerine onlara problemin aslı söylenmiştir. Buna rağmen, öğretmen adayları bu sonucu formal yollarla ispatlayamamışlardır. Bu problem için yapılan çözümlerin incelenmesiyle elde edilen şema EK 10'da verilmiştir. Öğretmen adaylarının bu problem için örnek bulma, özel değerleri inceleme, özel durumları inceleme ve fonksiyonun kuralını belirleme çabasını farklı kombinasyonlarda kullandıkları görülmektedir. Öğretmen adaylarından bazıları o haftaki derste yorgun ve uykusuz olduklarını, bazıları ise yaklaşan vize sınavları nedeniyle stresli olduklarını o hafta toplanan günlüklerde dile getirmişlerdir. Yalnızca S5 ispat yapmaya çalışmıştır ancak ispatında bazı hataların olduğu görülmüştür. S5 o hafta için yazdığı günlüğünde şunları belirtmiştir:

“biraz daha ıraksak düşünmeye başladım. Ama hala sorunun ne olduğunu bildiğim zaman daha rahat çözüyorum. Bu haftadaki sorular özellikle

fonksiyon sorusu canımı sıkıyordu. Çünkü çok zordu. Bir de hakkında ne söylersiniz deyince afalladım ama siz sorunun aslını söylediğinizde ne yapmam gerektiğini bildiğim için ona göre çözümler üretmeye çalıştım. Bu sonucu elde etmek için nasıl bir işlem yapmalıyım diye düşündüm. Fiziksel olarak kendimi yetersiz görüyorum genelde uykusuz ve başımda şiddetli bir ağrı oluyor. Ama biraz daha yaratıcı düşündüğümü düşünüyorum.” (S5)

Problem 9’da en çok fikir üreten öğretmen adayı S5’in çözüm yaparken özel değer ve özel durum incelediği, örnek bulmaya ve formal ispat yapmaya çalıştığı görülmüştür. S5 gibi özel değer incelemesi yapan öğretmen adaylarının (S4, S8, S9, S10) sayısının az olduğu dikkati çeken durumlardan biridir (EK 10).

Özel değer incelemesi yapan öğretmen adaylarının inceledikleri değerler karşılaştırıldığında S8’in (x,y) ikilisi için yalnızca (1,2) değerlerini yerine yazdığı ve başka değer incelemediği görülmüştür. Öğretmen adayı bu değerlerle elde ettiği $f(1^2+f(2))=2+f(1)^2$ eşitliğinden $f(1)=1$ ve $f(2)=2$ olması durumunda eşitliğin sağlandığını belirtmiştir (Şekil 4.51).

$x, y \in \mathbb{R}$
 $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$
 $f(x) = \sqrt{f(x^2 + f(y)) - y}$

f fonksiyonu tanım ve değer kümesi, hata ald. p.ı elemanı
 tanım kümesi ve değer kümesi elemanları gösteriyor. Tanım ve
 f ras. l. bir fonksiyon
 $(x^2 + f(y))$
 $f(y)$ olmasa bu fonksiyon ras. l. tanım kümesi
 $f(1^2 + f(2)) = 2 + f(1)^2$ $f(1) = 1$ $f(2) = 2$
 yani sbt f.ksiyon dob. l. r. olso es. l. ile seçilir.

Two set diagrams are shown. The first diagram shows a set X with elements x, y, x^2 and a set Y with elements $f(x), f(y), f(x)^2$. Arrows indicate mappings: $x \rightarrow f(x)$, $y \rightarrow f(y)$, and $x^2 \rightarrow f(x)^2$. The second diagram shows a set X with elements $x, y, x^2, x^2 + f(y)$ and a set Y with elements $f(x), f(y), f(x)^2, f(x^2 + f(y))$. Arrows indicate mappings: $x \rightarrow f(x)$, $y \rightarrow f(y)$, $x^2 \rightarrow f(x)^2$, and $x^2 + f(y) \rightarrow f(x^2 + f(y))$.

Şekil 4.51. S8’in Problem 9 için yazdığı günlük

Özel değer incelemesi yapan diğer öğretmen adaylarından S4, S9 ve S10; $x=y$ için değerler yazmışlardır. S9’un incelediği değerler (0,0), (1,1), (4,4) ve S10’un incelediği değerler (0,0), (1,1), (2,2), (3,3) ve (4,4)’tür. S4; (0,0), (1,1), (2,2) değerlerinin yanında S9 ve S10’dan farklı olarak $(-1, -1)$, $(-3/2, -3/2)$ değerlerini

de incelemiştir. S9, özel değer incelemesinden sezgisel olarak birim fonksiyonun verilen eşitliği sağladığı sonucunu çıkarmıştır (Şekil 4.52). S10 ve S4 ise birim fonksiyonun eşitliği sağladığını hiçbir ipucu belirlemeden önce, çözümünün en başında yazmıştır. Bu öğretmen adaylarının özel değer incelemesi birim fonksiyonu fark etmelerinden daha sonradır. S10'un özel değer incelemesinden sonra çıkardığı sonuç başta fark ettiği durumu destekler nitelikte olmuştur. S4 ise pozitif değerler için yaptığı incelemede pozitif sayıların görüntüsünün de pozitif olduğu sonucunu çıkarmıştır (Şekil 4.53). Devamında yaptığı incelemenin, negatif sayıların görüntüsünün işaretini belirlemeye yönelik olduğu anlaşılmaktadır. Öğretmen adayı bu incelemeden bir sonuç alamamıştır.

$$y = f(x^2 + f(y)) - (f(x))^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x=y \text{ olsun} \\ f(x^2 + f(x)) = x + (f(x))^2 \end{array} \right.$$

$$x=0 \text{ için } f(f(0)) = (f(0))^2$$

$$x=1 \text{ için } f(1 + f(1)) = 1 + (f(1))^2$$

$$x=2 \text{ için } f(4 + f(2)) = 2 + (f(2))^2$$

$$x=n \text{ için } f(n^2 + f(n)) = n + (f(n))^2$$

$f(n) = n$ için eşitlik sağlanır.

$$f(x) = x, f(y) = y$$

Şekil 4.52. S9'un Problem 9 için yazdığı günlük

$$\begin{aligned}
 f(x^2 + f(x)) &= x + f^2(x) \\
 x=0 &\Rightarrow f(f(0)) = f^2(0) \\
 x=1 &\Rightarrow f(1 + f(1)) = 1 + f^2(1) \\
 x=2 &\Rightarrow f(2 + f(2)) = 2 + f^2(2) \\
 \vdots \\
 r > 0 \text{ reel sayı } r \text{ için } x=r \\
 \Rightarrow f(r + f(r)) &= r + f^2(r) \\
 r > 0 \text{ ve } f^2(r) > 0 \text{ olduğundan pozitif reel sayılar için} \\
 \text{bu fonksiyon } \mathbb{R}^+ \text{ 'da } &\text{gösterilebilir.} \\
 x=-1 &\Rightarrow f(1 + f(-1)) = -1 + (f(-1))^2 \\
 x=-\frac{1}{2} &\Rightarrow f\left(\frac{1}{2} + f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2} + \left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 \\
 \vdots \\
 x \in \mathbb{R}^- \text{ için } f(x^2 + f(x)) &= x + f^2(x) \geq 0 \text{ alın} \\
 \Rightarrow x + f^2(x) \geq 0 &\Rightarrow f^2(x) \geq -x = |x| \\
 \Rightarrow f(x) \geq |x| \text{ ya da } f(x) &\leq -|x|
 \end{aligned}$$

Şekil 4.53. S4'ün Problem 9 için yazdığı günlükten alıntı

Özel değer inceleme stratejisini en etkili kullanan öğretmen adayının S5 olduğu görülmüştür (Şekil 4.54). Çünkü S5, bu stratejiyi kullanırken sistemli hareket etmiştir. Öğretmen adayı, sırasıyla (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (-1,0), (0,-1) değerlerini incelemiş ve buradan elde ettiği bilgilerle $f(1) = -f(-1)$ eşitliğini fark etmiştir. Ardından yaptığı incelemeler bu durumun genelde doğru olup olmayacağını anlama çabası olarak görülmüştür (bağıntı bulma çabası). Çünkü öğretmen adayı, (0,a), (a,0), (0,-a), (-a,0) özel durumlarını inceleyerek, verilen şartı sağlayan fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu (yani $f(a) = -f(-a)$ olduğunu) görmüştür. Sonuç olarak, S5'in özel değer incelemesinde, seçtiği değerlerin diğer öğretmen adaylarının incelediği değerlere göre daha üretken olduğu ve formal yollardan daha ileri analizi kolaylaştırdığı söylenebilir. Bu durum özel değer incelemesinin etkili bir şekilde kullanılmasının akıcı düşünme becerisini olumlu yönde etkilediği şeklinde yorumlanabilir.

S5, örnek arama stratejisini kullanırken daha önce belirlemiş olduğu ipuçlarını da dikkate almıştır. Eşitliği sağlayan fonksiyon örnekleri araştırırken düşüncesini polinom fonksiyonlarla kısıtlamış, yani yalnızca polinom fonksiyonlar

üzerinde durmuştur. İncelemelerine öncelikle sabit fonksiyon ile başlamış ve eşitliği sağlamadığını görmüştür. Ardından $f(x)=x^2$ fonksiyonu çift olduğu için verilen eşitliği sağlamayacağını belirtmiştir. Daha sonrasında x , $-x$, x^3 , $-x^3$ ve en son x^3-x tek fonksiyonlarını eşitlikte yazarak eşitliği sağlayıp sağlamayacaklarını kontrol etmiştir. Sonuncusunu kontrol ederken günlüğüne “*burada sadece birim fonksiyon olduğunu hissettim*” şeklinde yazmıştır. Öğretmen adayının bu cümlesi oldukça önemlidir. Çünkü S5’in oldukça detaylı ve uzun bir incelemenin sonucunda bu durumu fark ettiği anlaşılmaktadır. Aslında birim fonksiyon, örnek arama stratejisi kullanarak yapılacak incelemede ilk incelenecek fonksiyonlar arasındadır. Bu nedenle tüm öğretmen adaylarının birim fonksiyonun eşitliği sağladığını fark etmiş oldukları tahmin edilmektedir. Örnek arama listesinde bu kadar üst sırada olan bir fonksiyon olmasaydı herkes bu durumu göremeyebilirdi. Bu durum, birçok öğretmen adayının fazla ipucu belirlemeden birim fonksiyonu fark etmiş olmalarının nedenleri arasında yer alabilir.

S5’in formal ispat yapmaya çalışırken fikirlerinin daha da inceldiği ve karmaşıklaştığı görülmüştür. İncelemelerinin diğer öğretmen adayları tarafından düşünülmemiş olmasının yanında genel olarak da nadir rastlanabilecek türden olduğu tahmin edilmektedir. S5, incelediği ilk özel durumda eşitlikteki y yerine $x^2+f(y)$ yazmış, daha sonra y yerine $x^2+y+f(x)^2$ ve fonksiyonun tek olduğunu kullanacak şekilde $y=-x^2-y-f(x)^2$ değerini yazarak elde ettiği eşitlikler yardımıyla $[f(f(x))]^2=x^2$ sonucuna ulaşmıştır. Bundan sonraki incelemelerinde bazı hatalar yapmıştır. Dolayısıyla, f ’nin birim fonksiyon olduğunu formal yolla ispatlama çabası tam olarak doğru bir ispatla sonuçlanmamıştır. S5’in en son kısımdaki incelemeleri oldukça ilginçtir. İncelemelerini daha da derinleştirerek verilen $f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2$ eşitliğindeki y yerine $x^2+f(y)$, $x^2+y+f(x)^2$, $-x^2-y-f(x)^2$ değerlerini yazma seçimi fonksiyon hakkında daha fazla ipucu belirlemesine katkıda bulunmuştur. Özellikle çözümünün son kısımlarındaki fikirlerinin karmaşıklığı probleme iyi konsantre olduğunu göstermektedir. Diğer öğretmen adaylarından hiçbiri S5 gibi detaylı inceleme yaparak fonksiyonun bazı özelliklerini belirleyememiştir. Kimileri, fonksiyonun homomorfizma olması ya da tersinin var olması gibi kabuller üzerine

örnek belirlemeye çalışmışlardır. S6, bunlardan biridir ve ürettiği fikir sayısı da azdır.

Çözüm: $x=0$ $y=a$ olur.

$$f(0+f(0)) = f(0)^2 = f(f(0)) = f(a)^2$$

$x=1$ $y=0$ olur

$$f(1+f(0)) = f(1)^2$$

$x=0$ $y=1$

$$f(1+f(1)) = 1+f(1)^2$$

$x=1$ $y=1$

$$f(1+f(1)) = 1+f(1)^2$$

$x=-1$ $y=0$

$$f(1+f(0)) = f(1)^2$$

$x=0$ $y=-1$

$$f(f(1)) = f(0)^2 - 1$$

$f(1)^2 = f(1)^2 \Rightarrow f(-1) = \pm f(1)$ $f(1) = f(-1)$ olur.

$f(f(1)) = f(0)^2 + 1 = f(0)^2 - 1$
 $0 = -2$ çalışır.

$f(1) = -f(-1)$ olur. $0 \neq 0$

$x=0$ $y=a$ olur.

① $f(f(a)) = a + f(0)^2$

② $x=0$ $y=-a$

③ $f(f(-a)) = -a + f(0)^2$

$x=a$ $y=0$

$$f(a^2 + f(0)) = f(a)^2$$

$x=-a$ $y=0$

$$f(a^2 + f(0)) = f(-a)^2$$

$f(a) = \pm f(-a)$ $f(a) = +f(-a)$ olur.

④ $f(f(a)) = f(a)^2 + a = -a + f(0)^2$ $0 = 2a$ çalışır.

$f(a) = -f(-a)$ dir.

$\forall a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $f(a) = -f(-a)$ dir. 0 zaman f tek dir.

$-f(a) = f(-a)$ dir.

$f(x^2 + f(y)) = y^2 + f(x)^2$

Alıcılık Esneklilik	Düşünme Süreçleri Sadece Birim Farklıya
---	---

Şekil 4.54. S5'in Problem 9 için yazdığı günlük

$\forall x, y \text{ real sayıları için } f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$
 f s.b.t. fkt. olur.

$-f(a) = f(-a)$
 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq c$ olsun. $x^2 + f(y) \in \mathbb{R}$ old. için $f(x^2 + f(y)) = c$

$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$
 $c = y + c^2$
 $c - c^2 = y$ s.b.t. fkt. de f dual olarak sosyalmali ancak $\forall x, y$ dedisinden f s.b.t. fkt. değildir.

$f(x) = x^2$ olsa $f(x) = x^2$ olur ki bu bizim $-f(a) = f(-a)$ ile çelişir.
 yani bu fkt. da üstü qift olan sayı yoktur.

$f(x) = x$ olur.
 $f(x^2 + f(y)) = x^2 + f(y) = x^2 + y = y + x^2$ f birime fkt. olur.

$f(x) = x^3$ olur.
 $f(x^2 + f(y)) = (x^2 + f(y))^3 = (x^2 + y^3)^3 = y + x^6$ olmak gerek ki bu için sosyalmali y ve x öyledir $\forall x, y$ old. den olmaz.

$f(x) = -x$ olur.
 $f(x^2 + f(y)) = -x^2 + f(y) = -x^2 + y$, olmaz. $f(x) = -x$ olmaz çünkü $y + f(x)^2 = y + x^2$

$f(x) = -x^3$
 $f(x^2 + f(y)) = -(x^2 + f(y))^3 = -(x^2 - y^3)^3$
 $y + f(x)^2 = y + x^6$
 $(x^2 - y^3)(x^2 - y^3)(x^2 - y^3) = (x^4 - x^2y^3 - y^3x^2 + y^6)(x^2 - y^3) = x^6 - x^4y^3 - x^4y^3 + y^6x^2 - y^3x^4 + y^6x^2 - y^9 = x^6 - 3x^4y^3 + 3y^6x^2 - y^9 = y + x^6$
 bunun için de x ve y özel olarak olmaz.

$f(x) = x^3 - x$
 $f(x^2 + f(y)) = (x^2 + y^3 - y)^3 - (x^2 + y^3 - y) = y + (x^3 - x)^2$ Burda sadece Birim fkt. old. hissettir.

$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$

$f(x^2 + f(y)) = x^2 + f(y) + f(x)^2$
 $f(x^2 + y + f(x)^2) = x^2 + f(y) + f(x)^2$
 $f(y^2 + f(x^2 + y + f(x)^2)) = x^2 + y + f(x)^2 + f(y)^2$
 $f(y^2 + x^2 + f(y) + f(x)^2) = y^2 + x^2 + f(y) + f(x)^2 + f(y)^2$
 $f(y^2 + f(y^2 + x^2 + f(y) + f(x)^2)) = y^2 + x^2 + f(y) + f(x)^2 + f(y)^2$

Şekil 4.54. S5'in Problem 9 için yazdığı günlük (devam)

soruyu duyunca hemen cevabını veriyorum. Hani böyle şaşıyorum ben bunu nasıl düşündüm. Ve çok oluyor. Mesela bir soru sormuşlardı normal dizi olmayan bir şey, özel formülü olmayan bir dizi söyleyin demişlerdi ben hiç düşünmeden asal sayılar demiştim. Ama nasıl dediğimi kendim de bilmiyordum. Asal sayılar dedim ama nasıl dedim bilmiyorum. Bazen işte arkadaşlar soru getiriyor. Bunu bana bir anlat diyorlar, anlatıyorum ben normalde o konuyu anlamadığımı düşünürüm hep. Sonuna geldiğim zaman çok iyi anlamışım anlatırım ama onu nasıl yaptım kendim de anlamıyorum çok iyi.

G: İlginç bir durum!

S5: Zaten hep derim, insan beyninde ne var acaba? Siyah bir boşluk görürüm beynimi düşününce. Soru gelince ışık yanıyor.

Derste yapılan gözlemlerde S5'in hangi tip problem olursa olsun oldukça istekli ve ısrarlı bir şekilde problemle uğraştığı görülmüştür. Öğretmen adayı özellikle de *zorunlu olmadığı durumlarda* problem çözme konusunda ısrarlı davrandığını dile getirmiştir:

G: Takıldığın noktalarda ne yaparsın çözüm yaparken?

S5: Ben bir de çok kolay pes etmeyen biriyim. Genelde bayağı uğraşırım, araştırırım, onun cevabını bulmaya çalışırım. Üç gün çözmeye çalıştığım sorular oldu.

G: Problem çözmeyle uğraşmak için seni motive eden nedir?

S5: Ya aslında bana zorunlu olarak demeseler şu soruyu çöz demeseler ben çok seviyorum matematik sorusunu çözmeyi yani hobi gibi bir şey benim için, normalde süre verseler 3-4 saat uğraşırım ama hani böyle ödev ya da sınav olarak karşıma çıktığı zaman ve insan onun stresyle karşılaşılıyor....

G: Yani aynı soruyla dışarıda karşılaşırsan?

S5: Çözerim. Hani biri bana verse o soruyla 4, 5, 6 saat filan günlerce uğraşırım o soruyla. Çünkü seviyorum, hobi gibi bir şey benim için.

S5'in problem çözme konusunda ısrarlı davranmasının yanında kendisine güvendiği de aşağıda yer alan ifadesinden anlaşılmaktadır.

"hala düşünürüm yani bayağı bir çünkü sonuçta o soru sorulduysa cevabı vardır. Düşünürüm, bulanın benden farklı olduğunu sanmıyorum"(S5)

Öte yandan, S5 düşündüklerini yazmaktan kaçınmadığını belirtmiştir. Aşağıda yer alan görüşme kesitinde öğretmen adayı bilgilerin birbirlerini çağırıştırabileceğini ve böylece farklı şeylerin aklına gelebileceğini düşündüğünü açıkça göstermektedir. Bu düşüncesini uyguladığı, günlüklerinde ürettiği fikirlerin eklemeli olarak birbirini takip etmesinden anlaşılmaktadır.

G: Peki hemen kalem kağıt alıp yazmaya başlar mısın?

S5: Hıhı

G: Yoksa hani önce baştan sona düşünüp problemin çözümü hakkında ondan sonra mı başlarsın neler yaparsın?

S5: Ya böyle açıkçası sınavda falansam kağıdın temiz olması gerekiyorsa düşünürüm ama normalde hiç düşünmem hani direkt bir kağıda yazarım.

G: Hemen yazmaya başlayarak bir yandan düşünür bir yandan

S5: Yazarım

G: Yazarsın

S5: Çünkü görünce farklı yerlerden farklı şeyler aklıma gelir diye yazarım.

Problem çözme konusunda ısrarlı davranmak, kendine güvenmek gibi kişisel özelliklerin yanında, S5'in problem çözmedeki bilişsel sürecinin özelliklerinin ne olduğu incelenmiştir. İlerleyen kısımda, öğretmen adayının en çok fikir ürettiği problemlerdeki günlükleri, diğer öğretmen adaylarının günlükleri ile karşılaştırmalı olarak incelenecek ve öğretmen adayının nasıl daha çok fikir üretmiş olduğu belirlenmeye çalışılacaktır.

Problem 8 ve Problem 9'da mantıksal düşünme ve sezgisel düşünme net bir şekilde görülmektedir. İpuçları belirleyip formal yollarla sonuca ulaşmaya çalışan S5'in durumu, mantıksal düşünmeye; az ipucu ile sağlam temellere dayanmayan sonuçlar çıkaran S2 ve S9'un durumu ise sezgisel düşünmeye birer örnektir. Buradaki durum, mantıksal düşünmenin sezgisel düşünmeye göre daha akıcı fikir üretmeyi sağladığı sonucunu düşündürmektedir. Çünkü mantıksal düşünmeyi tercih edenler parçaları inceleyerek küçük küçük fikirler üretiyor gibi görünürken, sezgisel düşünmeyi tercih edenler ise küçük fikirlere önem vermiyor ve bütünü görmeye çalışıyor gibi görünmektedir. Bu durum, mantıksal düşünme sezgisel düşünmeye göre daha akıcı olarak fikir üretiyor sonucunu akla getirmektedir.

b. I-B grubu problemlerin akıcı düşünme becerisi açısından analizi:

I-B grubu problemler (Problem 5 ve Problem 6) belli bir sonucu olmayan matematiksel bir durum içeren açık uçlu problemlerdir. Problem 5 cebirsel, Problem 6 ise geometrik bir durum içermektedir. Öğretmen adaylarının bu problemler için ürettiği fikirler I-A grubu problemlerde olduğu gibi tablolştırılmış ve öğretmen

adaylarının toplam fikir sayıları I-A grubu problemlerle de karşılaştırmak için aynı tabloya (Tablo 4.1) yerleştirilmiştir. Tabloda dikkati çeken durumlardan biri I-A grubundaki problemlerde akıcı düşünme becerisi açısından çoğunlukla alt sıralarda yer alan S8 ve S16'nın I-B grubunda daha iyi performans sergiledikleridir. S9 ise I-A grubunda ortalama bir performansa sahipken I-B grubunda akıcı düşünme becerisi açısından alt sıralarda yer aldığı görülmüştür. Bu durum akıcı düşünme becerisinin farklı problem gruplarında farklılaşabileceği şeklinde yorumlanabilir. İlerleyen kısımlarda Problem 5 için yapılmış olan çözümler incelenecektir.

Problem 5 için üretilen fikirlerin sayıları incelendiğinde S1 ve S4'ün en çok fikir üreten öğretmen adayları olduğu görülmektedir (Tablo 4.1). Her iki öğretmen adayı da belli bir fikirden başlayarak daha çok bu fikri geliştirmek suretiyle çözümlerini oluşturmuşlardır. Ancak ürettikleri fikirler birbirinden oldukça farklıdır. S4 çoğunlukla dizi kavramının çağrıştırdığı kavramlar açısından inceleme yaparken (Şekil 4.55), S1'in fikirleri daha çok bölünebilme gibi daha temel kavramlar etrafında toplanmaktadır (Şekil 4.56). S4, bu problem için günlüğünde düşünme süreci hakkında dizi kavramının çağrıştırdığı kavramlar açısından inceleme yaptığını ve benzer düşüncelerle fikir ürettiğini açıkça ifade etmektedir.

“bu dizinin bir kuralının olup olmadığını inceleyerek başladım ve birkaç yoldan (a_n) dizisini formülleştirdim. Böylece dizi üzerinde yorum yapmam kolaylaştı. Dizinin özelliklerini farklı ama yine de kendi içinde benzer düşüncelerle incelemeye çalıştım. Dizi deyince limit kavramı öne çıkıyor. Bundan dolayı ilk önce dizinin limitini inceledim. Diziler yardımıyla seriler oluşturduğumuzdan bu dizi için seri oluşturmaya çalıştım fakat bu diziden seri oluşturmak yerine bu diziye seri şeklinde ifade etmenin daha şık olduğunu fark ettim. Dizinin elemanlarına bakarak bu sayıların ortak bölenleri olduğunu gördüm. Böylece (a_n/b_n) şeklinde bölüm dizileri tanımladım. Benzer düşünceyle bu dizi yardımıyla yeni diziler oluşturmaya çalıştım.”(S4)

$$a_0 = 9 = 10 - 1$$

$$a_1 = 99 = 100 - 1 = 10^2 - 1$$

$$a_2 = 999 = 1000 - 1 = 10^3 - 1$$

$$a_n = 10^{n+1} - 1 \quad \text{şeklinde}$$

disinin genel formunu yazdık.

Veya

$$a_0 = 9$$

$$a_1 = 99 = 90 + 9 = 10 \cdot 9 + 9 = 9 \cdot (10 + 1)$$

$$a_2 = 999 = 900 + 90 + 9 = 10^2 \cdot 9 + 10 \cdot 9 + 9 = 9(10^2 + 10 + 1)$$

$$a_n = 9(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1) = 9 \cdot \frac{(10^{n+1} - 1)}{(10 - 1)}$$

$$a_n = 10^{n+1} - 1$$

Veya

$$a_0 = 9$$

$$a_1 = 99 = 90 + 9 = 9 \cdot 10 + a_0$$

$$a_2 = 999 = 900 + 99 = 9 \cdot 10^2 + a_1$$

$$a_n = 9 \cdot 10^n + a_{n-1} \quad n \geq 1$$

$$a_n = 10^{n+1} - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{n+1} - 1 = \infty$$

Bu serinin
(an) dizisini kısımlar toplamları dizisi olarak
tanımlayabiliriz. Burada (bn) dizisi:

$$b_0 = 9$$

$$b_1 = 99 = 9 \cdot 10$$

$$b_2 = 999 = 9 \cdot 10^2$$

$$b_n = 9 \cdot 10^n$$

$$\Rightarrow a_0 = 9$$

$$a_1 = b_0 + b_1 = 99$$

$$a_2 = (b_0 + b_1) + b_2 = a_1 + b_2 = 99 + 900 = 999$$

$$\Rightarrow a_n = \sum_{k=0}^n b_k \quad \text{serisinin limiti:}$$

yukarıda topladığımız gibi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ olur.

Ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ old. d. a_n kısmı
toplamlar dizisinin ıraksak olduğunu söyleyebiliriz.

Akıcılık	- Defekli yolda formül bulma - Bu diziden 3 farklı dizi tanımlama
Esneklik	- Dizi için formül oluşturma - Dizi için limiti inceleme - Bu dizi yardımıyla farklı diziler tanımlama - Dizi elemanlarının bölünebilirliğini inceleme

Düşünme Süreçleri

Bu dizinin bir kuralı olup olmadığını inceleyerek başladım ve birkaç yoldan (an) dizisini formülleştirdim.

Böylece dizi için de işlem yapmanın kolaylaştı. Dizinin baskınlığını, farklı ana yine kendi içinde benzer dizi olarak inceleme yaptım.

Örnekle dizi dizince limit kavramını anımsadım. Buradan dolayı ilk önce dizinin limitini inceledim.

Dizi yardımıyla seriyi oluşturduğumdan bu dizi için seri oluşturmaya çalıştım. Fakat bu diziden seri oluşturmak yerine bu diziyi seri şeklinde ifade etmenin daha sık olduğunu farkettim.

Dizinin elemanlarına bakarak bu seriyi bir aritmetik dizi olarak gördüm. Böylece (bn) şeklinde bir dizi tanımladım. Benzer düşünceyle (a_n) dizisinde de bu dizi yardımıyla yeni diziler oluşturmaya çalıştım.

Şekil 4.55. S4'ün Problem 5 için yazdığı günlük

Şimdi $a_n = 10^{n+1} - 1$ dizisi yardımıyla başka bir dizi tanımlayalım;

$$b_0 = 10^{-1} \cdot a_0$$

$$b_1 = 10^{-2} \cdot a_1$$

$$b_2 = 10^{-3} \cdot a_2$$

$$\vdots$$

$$b_n = 10^{-(n+1)} \cdot a_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-(n+1)} \cdot a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-(n+1)} \cdot [10^{n+1} - 1]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - 10^{-(n+1)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-(n+1)} = 1 - 0 = 1$$

Fakat $0,99, 0,999, \dots$ şeklinde bir sayının olmadığını, bu sayının 1'e eşit olduğunu (aslında 1 olduğunu) sayısal matematik dersinden biliyoruz. Yani (b_n) dizisinin son teriminin 1 olduğuna ~~diye~~ söyleyebiliriz. Böylece (a_n) sayısal giden bir dizi iken (b_n) 'yi 1'e yakınsak belirsizlikten kurtulmuş oluruz.

Şişenin terimleri $9, 99, 999, \dots$ şeklinde olması (a_n) dizisinin 9'a bölünebilirliğini ^{göstere} gösteriyor. Aynı zaman da 9'a da bölünür. Yani;
 $(b_n) = (9, 9, 9, \dots)$ ve $(c_n) = (3, 3, 3, \dots)$ olsun. O zaman
 $(a_n) = (10^{n+1} - 1) = (9, 99, 999, \dots)$ için $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ve $\left(\frac{a_n}{c_n}\right)$ dizileri de tanımlı olur.

$(b_n) = \left(\frac{1}{a_n}\right)$ o.s. bir dizi tanımlayabiliriz. Bu dizi için de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^{n+1} - 1} = 0 \quad \text{olur.}$$

Şekil 4.55. S4'ün Problem 5 için yazdığı günlük(devam)

S4'ün aksine S1 verilen dizinin ilk göze çarpan özellikleri ile başlamıştır. Bölünebilme gibi temel kavramlar açısından inceleme yapan S1, dizinin herhangi iki teriminin toplamı, farkı, çarpımı ve bölümünün bölenlerini inceleyerek fikirler üretmiştir.

Problem 8

9, 99, 999, 9999, ... dizisi: İcin neler söyleyebilirsiniz?

- Bu dizinin bütün terimleri 9'a, 3'e tam bölünür.
- n . terimi n basamaklıdır.
- Herhangi iki teriminin farkının mutlak değeri 10'un bir katıdır. 10'a bölünür. Çünkü farkta en az birler basamağı olur.
 $|9 - 999| = 990 : 10 = 99$
- Herhangi iki teriminin farkının mutlak değeri 90'a, 30'a bölünür. 90'a bölünmesi için 9 ve 10'a tam bölünmesi lazım. 10'a bölündüğünü yukarıda gösterdim. Farkları aynı zamanda mutlaka 9'un katıdır. Çünkü 9'un katı olan iki terimi birbirinden çıkarıyorsa - Herhangi iki teriminin toplamı çifttir. Çift olma ya bakarken son rakamın (birler basamağı) çift old. göstermeliyiz. Her terimin son rakamı 9 old. dan 2 terim toplamı $9 + 9 = 18$ olacaktır.
- Yukarıdakileri genelleştirsek, bu dizinin terimlerinin istenildiği kadarının (2, 3, 4, ..., n tanesinin) toplamı 9 ve 3'e tam olarak bölünür.
- Herhangi iki terimini alalım: n . terim = n basamaklı
 t . terim = t basamaklı
 $n > t$ olsun. O zaman bu iki terimin farkı 10'a tam bölünür. ($n > t > 0$)
- Dizinin çiftinci terimleri (yani 2, 4, 6, ...) H 'in katıdır. Dolayısıyla çiftinci terimler 11'e tam bölünür. Aynı zamanda bütün terimler 9'un katıdır. 99 ve 33'e de tam.
- Bu dizinin n tane teriminin çarpımının sayısal değeri, 9^n 'e tam bölünür.
- Bu dizinin n tane teriminin çarpımının, asal çarpanlarından biri 3^n 'dir.

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = k \text{ taktirde bir tam sayıya esittir. } (n > 0)$$

Örneği:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{99}{9} = 11, \quad \frac{a_4}{a_2} = \frac{9999}{99} = 101, \dots$$

$$\frac{a_6}{a_3} = \frac{999999}{999} = 1001$$

- Yukarıdaki k sayısında 1 ($n-1$) tane sıfır 1 tipinde bir sayıdır. $\downarrow$ n bas. $\downarrow$ ($n-1$) bas. $\downarrow$ bir bas.

Şekil 4.56. S1'in Problem 5 için yazdığı günlük

Problem 5'te en çok fikir üreten öğretmen adayları S1 ve S4 verieln diziyi farklı şekilde ele almışlardır ancak her ikisinde de dikkati çeken durum fikirlerin birbirini çağrıştıran nitelikte olmasıdır. Bu durum, birbirine eklemeli olarak üretilen fikirler sayesinde akıcı düşünme sağlanabilir şeklinde yorumlanabilir.

Problem 5 için orta seviyede fikir üreten S2 günlüğündeki ifadelerinden belli bir sonuca ulaşma çabasının olduğu anlaşılmaktadır:

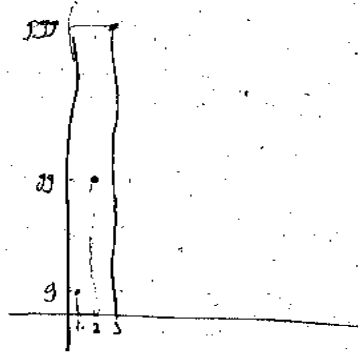
“bu problemin çözümü diye bir şey düşünemiyorum. Yani ortada problem olduğuna kendimi inandıramıyorum. İstenilen şeylere ulaşmak için izlediğimiz yollara bakmak istiyorsunuz ama ben ortada istenilen bir şey olduğunu göremiyorum. O yüzden herhangi bir yol izleyemiyorum. Özür dilerim. Aslında seri çok hoşuma gitti. Çünkü uzaktan baktığımda çok gizemli duruyor ama o gizemini çözemedim.” (S2)

Daha önce verilen açık uçlu problemlerde ulaşılabilecek bir sonuç olduğu için S2'nin böyle bir beklenti içine girmiş olabileceği tahmin edilmektedir. Ürettiği fikirlerin niteliğine bakıldığında S1 ve S4'ten farklı olarak S2'nin ürettiği fikirlerin birbirinden farklı olduğu görülmüştür. S2, dizinin genel terimi ile ilgili incelemeler yapmış, terimlerin 3 ve 9 ile bölünebildiğini belirtmiş, 3 tabanında yazmaya çalışmış ve bu diziden bir seri oluşturmuştur. Buradaki son fikir S4 tarafından da belirtilmiştir. Ancak temelde aynı olan bu fikri S4, S2'ye oranla daha matematiksel ve güzel ifade etmiştir. S2'nin açıklamaları ise oldukça yüzeysel kalmıştır (Şekil 4.57).

$$\frac{(10^n - 1)}{9(1, 11, 111, \dots)}$$

Her terimde 10 ile çarpılıp 9 eklenmiş.

Bu serinin terimleri 3 ve 9 ile tam bölünür.



$$0.9999 \dots = 0.\bar{9} = 1$$

Bu seriyi herhangi bir sayının virgülden sonradaki kısmı gibi düşünürsek bu seri bir a bîgimî sayının ardışığına geçirecekt.

$$9, 99, 999, 9999, 99999, 999999, 9999999, 99999999, 999999999$$

Seri 10^n a doğru gidiyor.

Her terime 1 eklersek 10^n serisini yakala, it.

$$\begin{array}{r} 99 \overline{) 3} \\ 0 \quad 33 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 11 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 999 \overline{) 3} \\ 0 \quad 333 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 111 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 33 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 12 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9999 \overline{) 3} \\ 0 \quad 3333 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 1111 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 9 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 21 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 12 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 18 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

Bu problemin çözümünü diye birşey düşünemiyorum. Yani ortadaki problem olduğuna kendimi inanmıyorum. İstenilen şeylere ulaşmak için izlediğim yolları bakmak istiyorsunuz ama ben burada istenilen birşey olduğunu görmüyorum. O yüzden herhangi bir yol izleyemiyorum. Ötür dilerim.

Aslında seri çok hoşuma gitti. Çünkü uzaktan bakıldığında çok güzel duruyor ama o güzelliğini gösteremedim.

Şekil 4.57. S2'nin Problem 5 için yazdığı günlük

En az fikir üreten öğretmen adaylarından biri olan S9 düşünme süreçlerine şunları yazmıştır:

“elimdeki diziye farklı bir şekilde yazıp ilişki kurmaya çalıştım ama bulamadım. Açıkça bu soruda neye ulaşmak istediğimi bilmediğim için bir şey üretemiyorum” (S9)

S2 ve S9’un günlüklerine yazdıkları ifadelerde ortak olan bir nokta ulaşmaları gereken bir sonuç olmadığı durumda nasıl bir yol izleyeceklerini bilemediklerini ifade etmeleridir. Her iki öğretmen adayının da sezgisel düşünceye sahip olmaları bu durumun sezgisel düşünme ile ilişkili olabileceğini düşündürmektedir.

S2 gibi S9’un da bir sonuca ulaşma çabası (sonuca odaklı problem çözme davranışı), yazdığı düşünme sürecinden anlaşılmaktadır. Öte yandan S9’un açık uçlu durumlar için yazdığı diğer günlükler de göz önüne alındığında genel olarak bir sonuç görme çabasının olduğu söylenebilir (Şekil 4.58).

The image shows handwritten mathematical work. At the top, it says $a_n = 10^n - 1$. Below this, there are three equations: $a_1 - a_2 = -90$, $a_2 - a_3 = -900$, and $a_{n-1} - a_n = 9 \cdot 10^{n-1}$. These are grouped by a large curly brace. To the right of the brace, there is a formula: $a_1 - a_n = -90(1101 - 10^3)$. Below this, there are two sequences: $3.3, 3.33, 3.333, \dots$ and $9.1, 9.11, 9.111, \dots$. To the right of these sequences, there are two formulas: $a_n = 3.333 \dots = \frac{33}{99 - 10^n}$ and $a_n = 9.111 \dots = \frac{11}{11 - 10^n}$. On the far right, there is a vertical line with a bracket and the number 1.

Şekil 4.58. S9’un Problem 5 için yazdığı günlük

4.3.1.b. II. grup problemlerin akıcı düşünme becerisi açısından analizi:

Seçmeli dersin 9. haftasından itibaren öğretmen adaylarından, verilen problemi çözdükten sonra problemin başka çözümlerini de araştırmaları istenmiştir. Bu haftadan sonra verilen problemler için yapılan doğru çözümlerin sayısı da dikkate

alınmıştır. Bu problemler arasında üç tane de geometri problemi (Problem 14, 15, 16) yer almaktadır. Öğretmen adaylarının uğraştıkları problemlerde, problemleri kaç yolla çözmeye çalıştıkları (çözüm denemelerinin sayısı), kaç yolla çözdükleri (doğru çözüm sayısı) ve yaptıkları çözümlerin kategorilerinin sayısı belirlenmiştir. Belirlenen bu sayılar iki tabloda gösterilmiştir. Bu tablolardan birinde (Tablo 4.5) geometri problemlerinin sonuçları, ikincisinde (Tablo 4.6) ise diğer problemlerin sonuçları yer almaktadır (bu tablolar 4.3.4’de yer almaktadır). Öğretmen adaylarının akıcı düşünme becerisi açısından yapılacak olan inceleme için öncelikle doğru çözüm sayıları dikkate alınmıştır. Bu nedenle Tablo 4.5 ve Tablo 4.6’daki doğru çözüm sayıları açısından incelemeleri kolaylaştırmak amacıyla bu tablolardan yararlanarak Tablo 4.2 ve Tablo 4.3 oluşturulmuştur. Diğer yandan öğretmen adaylarının çözüm denemelerinin sayısı da dikkate alındığı için Tablo 4.5 ve Tablo 4.6’dan da yararlanılmıştır.

a. II-A grubu problemlerin akıcı düşünme becerisi açısından analizi:

II-A grubu problemlerdeki doğru çözüm sayılarını (geometri problemlerinde), öğretmen adaylarının yaptıkları doğru çözüm sayıları açısından yapılan sıralamalar Tablo 4.2’de gösterilmiştir. Bu tablo, Tablo 4.5’teki doğru çözüm sayıları dikkate alınarak oluşturulmuştur. Öğretmen adaylarından bazıları problemin verildiği gün derse gelmedikleri için bazı problemlerle karşılaşmamışlardır. Bu durum Tablo 4.5’te G ile ifade edilmiştir.

Tablo 4.2 II-A grubu problemlerde doğru çözüm sayısı sıralaması

Problem	Doğru Çözüm Sayısı Sıralaması
14	S7>S6>S5=S11>S3=S19=S20>S1=S2=S10=S13=S15=S9=S16=S18=S21=S22>S8=S17>S14
15	S5 > S9=S20 > S10=S19 > S1=S7=S8=S15=S17=S21 > S11=S13=S16=S18=S22 > S2=S3
16	S5=S6>S10=S14=S16>S21>S1=S12=S13=S18=S19>S2=S3=S4=S7=S8=S11=S20=S22 > S9

Tablo 4.2 incelendiğinde, I. grup problemlerde olduğu gibi geometri problemlerinde de S5’in akıcı düşünme açısından dikkat çekici bir üstünlüğünün olduğu ve istikrarlı bir şekilde en fazla çözüm üretenler arasında (Problem 15’te en

fazla çözüm üreten öğretmen adayı) olduğu görülmüştür (Tablo 4.2). S6, Problem 14 ve 16'da en çok çözüm üreten öğretmen adaylarından biri olmuştur. Bazı öğretmen adaylarının (S3, S7, S9, S11, S14, S20) bazı problemlerde çok, bazılarında ise az çözüm üretmeleri akıcı düşünme becerisinin problemden probleme değişebileceğine işaret etmektedir.

Geometri problemlerinde S9 dışında tüm öğretmen adayları (problemlerle karşılaşmış olan tüm öğretmen adayları) tüm problemleri en az bir yoldan çözmüştür (Tablo 4.5). Yalnızca S9, Problem 16'da fark ettiği çözüm yolunu "*15-75-90 üçgenini kullanarak çıkar ama uzun biraz*" şeklinde belirtmiş fakat uzun olacağı gerekçesi ile çözümü yazmamıştır.

Tablo 4.2'de bazı öğretmen adaylarının performansının problemden probleme değiştiği görülmüştür (Örneğin S7, S20). Bu durum geometri problemlerinde akıcı çözüm üretme becerisinin problemden probleme değişebileceğini göstermektedir. Bunun yanında istikrarlı performans gösterenler de vardır (Örneğin S5).

b. II-B grubu problemlerin akıcı düşünme becerisi açısından analizi:

Problem 13, 17, 18, 19, 20, 21; II-B grubu problemler olarak adlandırılmıştır. Problem 20 ve 21'de öğretmen adayları arasında ikinci çözümü yapan olmamıştır. Hatta bu problemle uğraşmış olan bazı öğretmen adayları problemi çözememiştir. Öğretmen adaylarından S4, S5, S8 ve S9 tüm problemleri en az bir yolla çözmüşlerdir. Öte yandan S2 ise Problem 18 ve 21 ile karşılaşmamış ve karşılaşmış olduğu diğer tüm problemleri çözmüştür. Diğer öğretmen adaylarının hepsi karşılaştıkları problemlerden en az birini doğru bir şekilde çözememiştir (Tablo 4.6).

Tablo 4.3, Tablo 4.6'dan yararlanarak oluşturulmuştur. Tablo 4.3, II-B grubu problemlerde en fazla sayıda doğru çözüm yapan öğretmen adayları ile hiç doğru çözüm yapamayan öğretmen adaylarını göstermektedir.

Tablo 4.3 II-B grubu problemlerde en fazla çözüm yapan ve hiç doğru çözüm yapamayan öğretmen adaylarının karşılaştırılması

Problem	En fazla sayıda doğru çözüm yapanlar	Hiç doğru çözüm yapamayanlar
13	$S14=S20 >$ $S2=S4=S5=S6=S13=S17=S18$	-
17	S5	S1, S3, S6, S7, S15, S16, S21, S22
18	$S5=S15 > S12=S20$	S13, S16, S17, S18, S19, S21, S22
19	$S5 > S2=S4=S6 >$ $S1=S9=S11=S16=S17$	S3, S14, S18, S19, S21
20	$S1=S2=S4=S5=S7=S8=S9=S15=S16=S18=S21$	S3, S6, S10, S11, S12, S13, S14, S19, S20, S22
21	$S1=S4=S5=S8=S9=S18=S19$	S3, S10, S13, S15 S16, S17, S20, S21, S22

Tablo 4.3'ün her iki tarafında yer almış olan öğretmen adaylarının olması (örneğin S7, S11, S20) akıcı düşünme becerisinin problemden probleme değişebileceğini düşündürmektedir, ancak bu durumu etkileyen başka faktörle de olabilir. Tabloda II-B grubu problemlerin hepsi birlikte düşünüldüğünde çözüm üretmedeki akıcılık açısından ilk sırada yer alan öğretmen adayı S5 olmuştur. S5 diğer öğretmen adaylarından daha çok problemde birden fazla çözüm üretmiştir. Ardından S4 gelmektedir. İki problemle karşılaşmamış olan S2 de akıcı olarak çözüm üretme açısından dikkati çeken öğretmen adaydır. En fazla sayıda problemde hiç doğru çözüm üretememiş öğretmen adayları ise S3, S21 ve S22'dir.

Tablo 4.3 ve Tablo 4.2 karşılaştırıldığında II-B grubu problemlerde performansı iyi olmayan bazı öğretmen adaylarının (örneğin S19, S21) II-A grubu problemlerde daha iyi olduğu görülmüştür. Bu durum akıcı çözüm üretme becerisinin konuya (alana) göre değişebileceğini düşündürmektedir.

I. grup problemlerde temel fikir üretmede akıcılık açısından ilk sıralarda olan öğretmen adaylarından S5'in, II-B grubundaki problemlerde temel fikirlerin bir araya gelmesi ile oluşan formal çözümü oluşturmada yine ilk sıralarda olması dikkat çekicidir. I. grup problemlerde akıcılık açısından öne çıkan diğer öğretmen adaylarından S4'ün II-B grubu problemlerindeki performansı paralellik gösterirken S6 ve S7'de bu durum biraz farklıdır. Özellikle S7'nin karşılaştığı problemlerin her

birinde çözüm denemelerinin sayısı birden fazladır fakat hiçbir problemde birden fazla doğru çözüm yapmamıştır. Buradan S7'nin temel fikir üretmedeki akıcılığını temel fikirlerin birleşimi ile oluşturulmuş formal bir yapıya dönüştürmede fazla başarılı olmadığı sonucu çıkarılabilir. Öte yandan öğretmen adayının en çok fikir ürettiği problemlerden Problem 1a ve 1b'nin yapılandırılmış halinde (Problem 2a ve 2b) doğru formal bir ispat yapamamış olması bu düşüncüyü desteklemektedir (EK 5, EK6).

S5'in özellikle Problem 19'da doğru çözüm sayısı açısından dikkat çekici bir üstünlüğü vardır. S5 dışında hiçbir öğretmen adayı Problem 19'da 4 çözüm yapamamıştır. Hatta bu problemi doğru bir şekilde çözemeyen öğretmen adayları da vardır (Tablo 4.3, Tablo 4.6).

I. grup problemlerden bazılarında az, bazılarında orta seviyede fikir üretmiş olan S2'nin II-B problem grubunda karşılaşmış olduğu problemlerde çözüm üretme açısından performansı I. grup problemlere göre daha iyidir. S2'nin II-B grubu problemlerde az sayıda fikirle doğru sonuca ulaştığı görülmüştür. Günlükleri oldukça net ve sadedir (Şekil 4.59). Bu durum S9'un günlüklerinde de dikkati çekmiştir. Tüm problemleri doğru çözen S9'un doğru çözüm sayılarına bakıldığında yalnızca Problem 19'da iki tane doğru çözüm yaptığı görülmüştür (Şekil 4.60).

ax^2+bx+C $C = c_1 \cdot c_2$ $a = a_1 \cdot a_2$ a_1, a_2, c_1, c_2 tek sayılardır.	Alıştık	
Eğer $b = a_1 c_1 + a_2 c_2$ ise $a_1 x^2 + bx + C = (a_1 x - c_1)(a_2 x - c_2) = 0$ $x_1 = \frac{c_1}{a_1} \quad x_2 = \frac{c_2}{a_2}$ dir.	Esneklik	
$b = a_1 c_1 + a_2 c_2$ çift sayı olduğun bu mümkün değil.	Düşünme Süreçleri	
$ax^2+bx+C=0$ Denklemin bir çözümünü $\frac{k}{p}$ alalım $k, p \in \mathbb{Z} \quad (k, p)=1 \quad p \neq 0$ $\frac{k}{p}$ yi denkleme yerleştiririz $\frac{ak^2}{p^2} + \frac{bk}{p} + C = 0$ dir. $\frac{ak^2}{p^2} + \frac{bkp}{p^2} = -C \quad ak^2 + bkp = -Cp^2$ $(k, p)=1$ olduğun k ve p nin birbirinden farklı sayı olmaması. O zaman 3 ihtimal vardır. 1) $k = \text{tek sayı} \quad 2) \quad k = \text{tek sayı} \quad 3) \quad k = \text{çift sayı}$ $p = \text{tek sayı} \quad p = \text{çift sayı} \quad p = \text{tek sayı}$ 1. durum $(k = \text{Tek} \quad p = \text{tek})$ $\frac{ak^2 + bkp}{\text{Tek} \quad \text{Tek}} = \frac{-Cp^2}{\text{Tek}}$ $\frac{\text{Tek} \quad \text{Tek}}{\text{çift}}$ bu bir çeliştir.		

Şekil 4.59. S2'nin Problem 19 için yazdığı günlük

a, b, c tek tamsayılar o.Ü. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin rasyonel kökünün olmadığını gösteriniz.

$$\Delta = \frac{b^2 - 4ac}{4} \quad c_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad c_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = \dots$

İkinci dereceden bir denklemin köklerini bulurken Δ (delta)'yı kullanırız. Δ 'yı bulduktan sonra da kökleri kolayca yazabiliriz.

$\Delta = b^2 - 4ac$ dir. Soruda bize a, b, c nin tektamsayılar olduğu söylenmektedir. Bu durumda Δ tek tamsayıdır.

Fakat Δ nın tamkare olup olmadığını şimdiye bilmiyoruz. Δ nın tamkare olduğunu kabul edelim.

$$\Delta = b^2 - 4ac = d^2 \quad \text{o.b. } d \in \mathbb{Z} \text{ vardır.}$$

$$b^2 - 4ac = d^2 \quad b^2 - d^2 = 4ac \quad \frac{(b-d)}{2} \cdot \frac{(b+d)}{2} = \frac{4ac}{4}$$

d, b, c nin tek tamsayı olduklarını biliyoruz.

$(4ac)$ çifttir.

$(b-d)$ ve $(b+d)$ 'da çifttir. (b tek oldudan)

$$\begin{array}{l} (b-d) \text{ 2m} \\ (b+d) \text{ 2l} \end{array} \quad \begin{array}{l} (b-d) \cdot (b+d) = 4ac \\ 2m \cdot 2l = 4ac \end{array}$$

$$\frac{2}{2} \quad \frac{2b}{2} = \frac{2(m+l)}{2} \quad \frac{4m}{4} = \frac{4ac}{4} \quad m \cdot l = a \cdot c$$

$$b = m+l$$

b tekli!

$\therefore m$ ve l den biri tek ve diğeri çifttir.

$$m \cdot l = a \cdot c \quad \text{bulmuşuk}$$

Bu şartlara göre eşitlik sağlanmaz ve kabul yanlıştır.

Δ tamkare değildir

2. durum (k tek sayı, p çift sayı)

$$\frac{ak^2 + bkp}{\text{Tek} \quad \text{çift} \quad \text{çift}} = \frac{-cp^2}{\text{çift}} \quad \neq \text{bu bir çeliktir.}$$

3. durum (k = çift sayı p = tek sayı)

$$\frac{ak^2 + bkp}{\text{çift} \quad \text{çift} \quad \text{çift}} = \frac{-cp^2}{\text{tek}} \quad \neq \text{bu bir çeliktir.}$$

3 durumda sağlanmadığından " $ax^2 + bx + c = 0$ " denkleminin rasyonel olan bir $\frac{k}{p}$ rasyonel sayısı bulunamaz.

$$\begin{array}{lcl}
 a_1x^2 + b_1x + c_1 & & c_1 = c_2, c_2 \\
 a_2x^2 + b_2x + c_2 & & a_2 = a_1, a_1 \\
 & & a_1, a_2, c_1, c_2 \text{ tek} \\
 & & \text{sayılar.}
 \end{array}$$

$\text{ger } b = a_1c_1 + a_2c_2 \text{ ise}$

Akılcılık	
Esneklik	

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = (a_2x - c_1)(a_2x - c_2) = 0$$

$$x_1 = \frac{c_1}{a_1}, x_2 = \frac{c_2}{a_2} \text{ dir.}$$

$$b = a_1c_1 + a_2c_2 \quad \text{çift sayı oldun}$$

$\text{Tek sayı, Tek sayı}$

bu mümkün değil.

Düşünme Süreçleri

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Denklemin bir çözümü $\frac{k}{f}$ rasyonel sayısı olsun. $k, f \in \mathbb{Z}, (k, f) = 1, f \neq 0$

$\frac{k}{f}$ yi denkleminde yerine yazalım.

$$\frac{ak^2}{f^2} + \frac{bk}{f} + c = 0 \text{ dir.}$$

$$\frac{ak^2}{f^2} + \frac{bkf}{f^2} = -c$$

$$ak^2 + bkf = -cf^2$$

$(k, f) = 1$ olduğundan k ve f nin ikisi birden bir çift sayı olmak. 0 zaman geriye 3 ihtimal kalır.
 1. $k = \text{tek sayı}$ 2. $k = \text{tek sayı}$ 3. $k = \text{çift sayı}$
 1. $f = \text{tek sayı}$ 2. $f = \text{çift sayı}$ 3. $f = \text{tek sayı}$

Şekil 4.60. S9'un Problem 19 için yazdığı günlük

1. durumu gözönüne alalım. (k =Teksayı, l =Teksayı)

$$ak^2 + bk^2 = -cl^2 \quad (a, b, c \text{ tek sayılar})$$

Teksayı Teksayı Teksayı
Çift sayı

Esitliğin sol tarafı bir çift sayı ve sağ tarafı bir tek sayıdır.
Bu bir çelişkidir.

2. durumu gözönüne alalım (k tekkayı, l çift sayı)

$$ak^2 + bk^2 = -cl^2 \quad (a, b, c \text{ tek sayılar})$$

Teksayı Çift sayı Çift sayı
Tek sayı

Esitliğin sol tarafı bir tekkayı ve sağ tarafı bir çift sayıdır.
Bu bir çelişkidir.

3. durumu gözönüne alalım (k =çiftsayı, l =tekkayı)

$$ak^2 + bk^2 = -cl^2 \quad (a, b, c \text{ tek sayılar})$$

Çift sayı Çift sayı Teksayı
Çift sayı

Esitliğin sol tarafı bir çift sayı ve sağ tarafı bir tekkayıdır.
Bu bir çelişkidir.

3. durum da sağlamadığından " $ax^2 + bx + c = 0$ " denkleminin
 $ax^2 + bx + c = 0$ olan bir $\frac{k}{l}$ rasyonel sayısı bulunamaz. ($k \in \mathbb{Z}, (k, l) = 1$)

Şekil 4.60. S9'un Problem 19 için yazdığı günlük (devam)

II-B grubu problemlerin hepsinde de doğru çözüme ulaşan fakat yalnızca bir doğru çözüm yapabilen öğretmen adayı S8'in Problem 17 ve 20'de tek çözüm denemesi varken diğer problemlerde ikişer denemesi vardır. S8 bir çözüm bulduktan sonra ikinci çözümü bulmada sıkıntı çektiğini görüşmede dile getirmiştir. Bu durum Tablo 4.6'daki sonuçla örtüşmektedir.

G: Peki çözdükten sonra tekrar bir bakayım yeniden çözeyim, başka bir çözüm yolu bulayım..

S8: Çözdükten sonra şey oluyor işte, başka bir yol bulmaya çalışıyorum, ama o zaman da çözümün etkisinde kaldığım için yine olmuyor yani.

G: Yani sonucu bildiğin için...

S8: Evet bir de daha önceki çözümün etkisinde kalıyorum. Yani, o çözümden yola çıkmaya çalıştığım için esnek olmuyor o zaman. Yani, o cevabı bilince farklı bir yol şey olmuyor, nasıl deyim ...direkt gelmiyor.

G: Yani?

S8: Biraz kalıntısı kalıyor yani. İzi kalıyor.

G: Yani şunu mu demek istiyorsun? O problemi bir yoldan çözdükten sonra hep o yol aklına geliyor başka açıdan düşünme konusunda zorluk çekiyorsun?

S8: Evet. Yani şöyle olursa, belki düşünüyorum da, mesela bugün bunu çözdüm uğraştım. Diyelim ki bu soruyla uğraştığımı unuttum, o kadar zaman geçtikten sonra belki farklı şekilde düşünebiliyorum, ama o sorunun çözümü aklımdayken direkt farklı bir şey düşünmek zor geliyor.

S8, akıcı düşünmek için çabasının olmadığını daha çok esnek düşünmeye çalıştığını ifade etmiştir. Öte yandan, S8'in bazı problemlerde düşünmek için zor yolları tercih ettiği görülmüştür. Özellikle de II-B grubu problemleri arasında doğru çözüm sayısı ortalamasının en fazla olduğu Problem 19 için yazdığı günlükte bu durum dikkati çekmiştir (Şekil 4.61). S8'in açık uçlu durum olarak verilen problemlerden bazılarında da düşünmek için zor yolları seçmiş olduğu görülmüştür (Problem 1a). Problem 19'da verilen a, b, c tek tam sayılarını ve b^2-4ac ifadesini asal çarpanları cinsinden yazarak inceleme yapmaya çalışmıştır. Bu durum, işlemlerin daha karışık bir hal almasına neden olmuştur ve böylece öğretmen adayının bu seçimi düşünmesini zorlaştırmıştır. Daha sonra S8 asal çarpanlardan vazgeçip b^2-4ac 'nin tam kare olmasından hareketle çelişki bularak çözümü tamamlamıştır. S8'in hem akıcı düşünmeye gerek duymaması hem de düşünmek için zor yolları seçmiş olması onun akıcı düşünen öğretmen adayları arasında yer almamasına neden olmuş olabilir.

a, b, c tek tam sayılar $ax^2+bx+c=0$ denkleminin rasyonel çözümünün olduğunu gösteriniz.

$a, b, c, 1, 3, 5, 7, 9, \dots$

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Delta=?$$

kompozitler olabilir. Δ kompozitler olabilir.

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin iki çözümü vardır.

$$\Delta = (b^2 - 4ac)$$

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Bu keskin rasyonel olmalıdır.

Δ nın tek birine ait olması lazım

$b^2 - 4ac$ tam kare olmalıdır. ac da tek $\rightarrow$

Piler asal sayı olarak ötekere piler 2 domuz

$$b^2 - 4ac = p_1^{2k_1} \dots p_n^{2k_n}$$

$$b^2 - 4ac \text{ tek bir sayı}$$

$$(b^2 - 4ac) = (k+l)^2 \text{ olsun}$$

$$b^2 - 4ac = k^2 + 2kl + l^2$$

$$b^2 - 4ac > 0 \text{ olması } b^2 > 4ac$$

$$3 \ 9 \ 1$$

$$81 - 12 = 69 = 3 \cdot 23$$

$$59 = 41 - 3 \cdot 15$$

$$3 \ 9 \ 5$$

$$81 - 60 = 21$$

$$3 \cdot 7$$

$$2 \ 13 \ 5$$

$$169 - 140 = 29$$

$$169 - 84 = 85$$

$$b^2 > 4ac$$

$$(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n})^2 = 4 (p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}) (p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_l^{c_l}) \Rightarrow p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \dots p_n^{2a_n} = 2 p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k} p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_l^{c_l}$$

$$p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \dots p_n^{2a_n} = 2 p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k} p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_l^{c_l}$$

$$2^2 - 4 \cdot 3^2$$

Şekil 4.61. S8'in Problem 19 için yazdığı günlükten alıntı

Akıcılık için farklı şeyler düşünen, yani akıcı düşünmeyi önemsemediğini ifade eden S9 ile akıcı düşünmeye çalıştığı görülen S1'in doğru çözüm sayıları karşılaştırıldığında bu iki öğretmen adayının performanslarının benzer olduğu dikkati çekmiştir. 18, 19, 20, 21 numaralı problemlerde her iki öğretmen adayının da çözüm denemeleri sayısı ve doğru çözüm sayılarının tamamen aynı olduğu görülmektedir. Problem 17'yi S1 çözememiş, S9 çözmüştür. Problem 13'te ise her ikisi de birer çözüm yapmıştır fakat S1'in 5 çözüm denemesi varken S9'un 2 çözüm denemesi vardır. Bu iki öğretmen adayının açık uçlu durumlardaki fikir sayıları karşılaştırıldığında Problem 3, 5 ve 6'da bariz bir farklılık görülmüştür. Bu problemlerde S1, S9'dan fazla fikir üretmiştir. Daha net bir şekilde ifade edilecek olursa bu problemlerin hepsinde S9 en az fikir üreten öğretmen adayı iken S1 Problem 5'te en çok fikir üretenlerden biridir. Diğer iki problemde ise S1'in ürettiği fikir sayısı orta düzeydedir. Kısacası, temel fikirler bazında S1'in S9'a göre daha akıcı düşünmekte ancak çözüm üretmedeki akıcılıkta yani fikirler bütünü açısından akıcılıkta fark yoktur. Bu durum, temel fikir üretmede akıcı düşünmenin çözüm üretmedeki akıcılığı garantilemediği şeklinde yorumlanabilir. Ayrıca S9'un yazmayı sevmemesi, benzer çözümleri yazmaya gerek duymaması, orijinal çözüm bulma çabasının olması dikkate alınırsa çözüm üretme sürecine birçok faktörün etki ettiğini ve problem çözme sürecinin oldukça karmaşık bir süreç olduğunu ortaya çıkarmaktadır.

II-B grubu problemlerde çözüm üretmedeki akıcı düşünme becerisi açısından en kötü performans sergileyen öğretmen adaylarının S3, S21 ve S22 olduğu görülmüştür. Bu öğretmen adayları II-B grubundaki hiçbir problemde birden fazla doğru çözüm yapamadıkları gibi, en fazla sayıda hatalı çözüme sahiptirler. Öğretmen adaylarının hatalı olan çözümlerinde ortak olarak dikkati çeken, genel olarak düşünmesi zor olan yolları tercih etmiş olmalarıdır (Şekil 4.62, Şekil 4.63, Şekil 4.64). Problem 21'de S21 ve S22'nin temel fikir açısından akıcı düşünceleri doğru çözüme ulaşmaları için yeterli gelmemiştir. Onlar çözüm için uygun olmayan ve düşünmesi zor yolları tercih etmişler ve bu yola sadık kalmışlardır.

$$ax^2 + bx + c$$

$\frac{2}{9}$ Ros Jones Goding

9

$$x^2 + 1 = 0$$

8-1-611-310

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5$$

4) $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$x^2 + 5x + 8 = 0$$

$$\Delta = 13 - 4$$

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 2a^2 = 0$$

$\Delta = 0.0001$

② = 26-3

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2}$$

$$A + 6ac = b^2$$

$$c) x^2 + 6x + 4$$

$$(2n+1)x^4 + (2n+1)x^2 (2n+1) = 0$$

$$\Delta = 6n_2^2 + 6n_2 + 1 = 4(2n_2 + 1) \cdot (2n_2 + 1)$$

$$= \log^2 + \log 1 = \log(1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1)$$

$$= \frac{C_{n1} + C_{n2}}{4} - \frac{1}{T} \frac{C_{n1} \cdot C_{n2} - S_{n1} \cdot S_{n2}}{4}$$

Düşünme Süreçleri

Allina habing
admedi. abar tol
say adugando sin
toter cilmapagijir
jini cilmanus!
gawetijir gawetir
ancat bar o dume
akasa madim.

Şekil 4.62. S21'in problem 19 için yazdığı günlük

Soru: $(2a+b)(a+2b) = 2^c$
 Esitliği sağlayan a, b, c
 (a, b, c) pozitif tam sayı
 sıralı üçlüsü vardır.

Akıcılık

Esneklik

$$\begin{aligned} (2a+b)(a+2b) &= 2^c \\ 2a^2 + 2ab + ba + 2b^2 &= 2^c \\ 2a^2 + 2b^2 + 3ab &= 2^c \\ 2(a^2 + b^2 + 2ab) + ab &= 2^c \\ \frac{2(a+b)^2 + ab}{\text{sol taraf}} &= 2^c \end{aligned}$$

Denklemi mabedimize, iki durum
 olduğuna bakalım. (tabii daha çok da
 olabilir.)

1. Durum
 Diyelim $ab=0$ olsun.

O zaman ya $a=0$ ya da $b=0$ dir.

• $a=0$ olsun.

$$2b^2 + 0 = 2^c$$

$b=2^k$ o.k $b \in \mathbb{Z}^+$ olur.

$$2(2^k)^2 = 2^c$$

$$2^{2k+1} = 2^c$$

$$2k+1 = c \quad \text{Yani } (0, 2^k, c=2k+1)$$

• B.Ş $b=0$ olur. $a=2^k$ o.k $a \in \mathbb{Z}^+$
 $2k+1=c$ olur. $(a=2^k, 0, c=2k+1)$

* Fakat "0" pozitif değildir.

Şekil 4.63. S21'in Problem 21 için yazdığı günlük

~~İşlem~~ $2(a+b)^2 + ab = 2^c$ denkleminin de sol tarafta
terimlerin 2'nin kuvveti olması için $2(a+b)^2 = ab$
olmalı ki bu da...

$$a+b = 2^k \text{ olur.}$$

$$2(2^k)^2 = 2^{2k+1} = ab \text{ olur.}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2^{2k}$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = 2^{2k} - 2^{2k+1}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2^{2k}(1 - 2)$$

$$(a-b)^2 = 2^{2k}(-1)$$

a, b pozitif tam sayı olamaz.

$$2a^2 + 2b^2 + 8ab = 2^c$$

$$2(a^2 - 2ab + b^2) + 8ab = 2^c$$

$$2(a-b)^2 + 8ab = 2^c$$

$$a-b = 2^t$$

$$2(a-b)^2 = 2^{2t+1}$$

$$\underbrace{(a+2b)}_{2^t} + \underbrace{(2a+b)}_{2^t} = 2^c = 2^{t+1}$$

$$(a+2b) = 2^t \quad t \geq 1$$

$$2a+b = 2^t \quad t \geq 1$$

$$a^2 + 6ab + 6b^2 = 2^{2t}$$

$$6a^2 + 6ab + b^2 = 2^{2t}$$

$$5a^2 + 8ab + 5b^2 = 2^{2t+2}$$

$$12a^2 + 5ab + 2b^2 = 2^{t+1}$$

$$5a^2 + 8ab + 5b^2 = 2^{2t+2}$$

$$16a^2 + 10ab + 2b^2 = 2^{t+1}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2^{2t+2} - 2^{t+1} = 2^{t+1}(2^{t+1} - 1)$$

$$(a-b)^2 = 2^{t+1}(2^{t+1} - 1)$$

Besleyi sağtarafın

$$2(a+b)^2 + ab = 2^c$$

2'nin
kuvveti
olmalı

$$a+b = 2^c \quad \text{1. şık}$$

$$a+b = 2^c$$

~~İşlem~~

$$2+2 = 2 \cdot 2$$

$$4+6 = 2 \cdot 6$$

$$8+8 = 2 \cdot 8$$

$$12+12 = 2 \cdot 12$$

$$2^t + 2^t = 2^c \text{ olması için}$$

$$t=c \text{ olmalı}$$

$$a+2b = 2 \quad a+b = 2$$

$$2a+b = 2$$

$$3a^2 + 18ab + 9b^2 = 2^{2t+1} (2^{t+1} - 1)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2^{t+1} (2^{t+1} - 1)$$

Şekil 4.63. S21'in Problem 21 için yazdığı günlük (devam)

$$(2a+b)(2b+a) = 2^c$$

$$2^2 ab + 2a^2 + 2b^2 + ab = 2^c$$

$$(2^2 - 1)ab + 2(a^2 + b^2) = 2^c$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}ab + a^2 + b^2 = 2^{c-1}$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - \frac{1}{2}ab = 2^{c-1}$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - \frac{1}{2}ab = 2^{c-1}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + \frac{3}{2}ab = 2^{c-1}$$

$$(a-b)^2 + \frac{3}{2}ab = 2^{c-1}$$

$$(2a+b)(2b+a) = 2^c$$

2^c c ne olursa olsun ($c \in \mathbb{Z}^+$) çift sayıdır.

0 zaman $2a+b$ ve $2b+a$ nın her ikisi birden tek olamaz.

$$\textcircled{1} \quad \begin{array}{ccc} 2a+b = T & , & 2b+a = G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & & T \end{array}$$

0 zaman b tek ve a çift olmalıdır.

$$\textcircled{2} \quad 2a+b = G, \quad 2b+a = T$$

0 zaman b çift ve a tek olmalıdır.

$$\textcircled{3} \quad 2a+b = G, \quad 2b+a = G$$

0 zaman b çift ve a çift olmalıdır.

Şekil 4.64. S22'in Problem 21 için yazdığı günlük

- ① b tek, a çift. a tam sayı old. dan $a=0$ durumuna özel olarak $a=0$ olsun. 0 zaman $b^2 = 2^c$ ~~batmaya gerek yok.~~ ~~Hatırlattım.~~ ~~farkettim.~~
 $(2a+b)(2b+a) = 2^c \Rightarrow b \cdot 2b = 2^c \Rightarrow 2b^2 = 2^c \Rightarrow b^2 = 2^{c-1}$ (*)
 Herhangi bir tek sayının karesi tek olacağından ve hiçbir tek sayı 2^{c-1} şeklinde ifade edilemediğinden (*) eşitliğinden bir çelişki elde edilir.

$a=2$ olsun.

$$(4+b)(2b+2) = 2^c$$

$$\Rightarrow 2b^2 + 10b + 8 = 2^c \Rightarrow b^2 + 5b + 4 = 2^{c-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(b+1)}_G \underbrace{(b+4)}_T = 2^{c-1}$$

b tek old. dan $b=2t+1$ $0 \leq b \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$$(2t+2)(2t+5) = 2^{c-1} \Rightarrow 4t^2 + 14t + 10 = 2^{c-1}$$

$$\Rightarrow 2t^2 + 7t + 5 = 2^{c-2} \Rightarrow \underbrace{(2t+5)}_T \underbrace{(t+1)}_T = 2^{c-2}$$

k tek ise $(2t+5)(t+1) = T \cdot G = 4$ çift sayılar 2^k şeklinde almıyor.

k çift ise $(2t+5)(t+1) = T \cdot T = \text{Tek} = 2^{c-2}$ #

k tek olursa her durum için sağlanmaz

$$a=4 \text{ olsun.}$$

$$(8+b)(2b+4) = 2^c \Rightarrow 2b^2 + 20b + 32 = 2^c \Rightarrow \underbrace{b^2}_T + \underbrace{10b}_G + \underbrace{16}_G = 2^{c-1}$$

Hicbir tek sayı 2^{c-1} tipinde ifade edilemez.

$a=6$ yine geliştir

$$a=8 \quad (16+b)(2b+8) = 2b^2 + 40b + 128 = 2^c$$

$$\Rightarrow \underbrace{b^2}_T + \underbrace{20b}_G + \underbrace{64}_G = 2^{c-1} \Rightarrow 2^{c-1} \text{ tek olmaz} \quad \#$$

a nın tüm değerleri geliştirge düşüyor.

- ② b çift, a tek.

$$a=2t+1, b=2t$$

$$(2a+b)(2b+a) = (4t+2+2t)(4t+2t+1) = \underbrace{(6t+2)}_G \underbrace{(6t+1)}_T = 2^k$$

şeklinde yazılıyor. t ne olursa olsun

- ③ b çift, a çift

$$a=2t, b=2k$$

$$(4t+2k)(4k+2t) = 16kt + 8t^2 + 8k^2 + 4kt = 20kt + 8t^2 + 8k^2$$

2^k şeklinde yazılmıyor. #

Şekil 4.64. S22'in Problem 21 için yazdığı günlük (devam)

Sonuç olarak bu bölümde öğretmen adaylarının günlükleri akıcı düşünme becerileri açısından analiz edilmiştir. Burada akıcı düşünme becerisi farklı problem

ortamlarıyla farklı açılardan ele alınmıştır. I-A grubu problemler temel fikirler bazında incelenmiş ve bir sonuca ulaşma durumuna bakılmıştır. I-B grubu problemler temel fikirler bazında incelenmiş üretilen fikirlerin birbirine yakınlığına bakılmıştır. II. grup problemler ise doğru sonuca ulaşabilmiş fikirler bütünü açısından incelenmiştir. Analiz sonucunda tespit edilen bulgular aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Farklı problem tiplerinde akıcı düşünme becerisi performanslarında farklılıklar olabilir. Akıcı düşünme becerisi problemden probleme, hatta problem grubuna göre değişebilir.
- I-A grubu problemlerde çok fikir üretmiş olmanın problemlerde gizlenmiş olan sonucu görmeyi garantilemediği tespit edilmiştir. Yani fikir üretmedeki akıcılık çözüm üretmedeki akıcılık için yeterli olmayabilir
- Düşünmek için zor yolları seçmek hem temel fikir üretmede hem de fikirlerin birleşimi olan çözüm üretmedeki akıcı düşünme becerisini olumsuz yönde etkileyebilir.
- Temel fikir üretmede basit fikir üretme, özel değer inceleme stratejilerini etkili kullanmak akıcı düşünme becerisini olumlu yönde etkileyebilir.
- Problemi çözmeye iyi konsantre olmak, problemi çözmek için motive olmak, istekli ve ısrarlı bir şekilde problemle uğraşmak, akıcı düşünmeyi önemsemek, düşündüklerini yazmaktan kaçınmamak, fikir üretmek (düşünmek) için daha kolay yolları seçebilmek gibi özellikler akıcı düşünme becerisini olumlu etkileyebilir.
- Her problemde istikrarlı bir performansa sahip olmak için birçok özelliğin bir araya gelmesi gerekmektedir.
- Akıcı düşünmeye gerek duymayarak esnek ya da orijinal düşünme çabası içinde olmak, mantıksal hatalar yapmak, problemle isteksiz bir şekilde uğraşmak akıcı düşünmeyi olumsuz yönde etkileyebilir.
- Mantıksal düşünmeye sahip öğretmen adaylarının sezgisel düşünmeye sahip öğretmen adaylarına göre özellikle temel fikir üretmede daha fazla akıcı düşünme eğiliminde gibi görünmektedir.

4.3.2. Esnek Düşünme Becerisi

Bu çalışmada esneklik, problemlerde üretilen fikir veya çözümlerin kategori sayısı (çeşitliliği) olarak ele alınmıştır. Bu şekilde verilen açık uçlu durum ya da probleme kaç farklı açıdan bakıldığı incelenmiş olacaktır. Dolayısıyla esnek düşünme becerisi verilen probleme farklı bakış açıları geliştirebilme becerisi olarak ele alınmış olacaktır. Diğer yandan Haylock (1997) esnekliğin, saplantı ya da zihinsel eğilimlerden kurtulmak için düşüncede katılığın (sabit fikirli olmanın) üstesinden gelme yeteneği olduğunu savunmuştur. Bu durum esnek düşünememeye neden olan davranışlar açısından ele alınacaktır.

Araştırmanın yürütüldüğü seçmeli derste öğretmen adaylarına esnek düşünme kavramı tanıtılmış ve görüşmelerde “*Matematiksel problemleri çözmeye çalışırken esnek olduğunu düşünüyor musun?*” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adayları arasında esnek düşünebildiğini iddia edenlerin (S2) yanı sıra esnek düşünemediğini iddia edenler (S1, S3, S4, S5, S6, S8) ve esnek düşünmeyi akıcı düşünmeye tercih edip bu konuda uğraş verenler olmuştur.

Esnek düşündüğünü iddia edenler: Herkes tarafından kullanılan alışlagelmiş çözüm yollarından ziyade, farklı çözüm yollarını bulmaya çalıştığı için esnek düşünebildiğini ifade edebilen tek öğretmen adayı S2’dir:

“Evet. Yani, ben genelde normal yolları tercih etmem, yani sorunun bize göstermiş olduğu çözüm yolunu değil de daha farklı bir şekilde çözmeye çalışırım genelde. Bu da esneklik olduğunu gösteriyor herhalde.” (S2)

G: Peki o zaman sen akıcı olmak için çaba sarf ediyor musun?

S2: Ya söylenemez genelde esnek olmaya çalışıyorum.

G: Esnek olmaya çalışıyorsun?

S2: Daha farklı yani düşünce yapısını tamamen değiştirerekten.

Esnek düşünemediğini iddia edenler: S1, S3, S4, S5, S6 ve S8 esnek düşünmeye çalıştıklarını ancak bu konuda yeterince başarılı olamadıklarını dile getirmiştir.

“Çalışıyorum ama... Pek çok esnek olduğum söylenemez. Yani bariz varsa onu görürüm de.” (S1)

“Esnek olduğumu düşünmüyordum eskiden, yani normal hep bize verilenleri uyguluyordum, uyguluyorduk yani, işte bu ders olduktan sonra, ilk başta, işte bu mesela, bir soru geldiği zaman karşımıza o yöntemden kendimi kurtarıp böyle daha farklı düşünmeye, şeye, ama oradan kendimi çekebilmek zor oluyor bazen. Yani kendimi kaptırıyorum denklem çözmeye başlıyorum hemen böyle, ama işte şimdi bu dersten sonra şöyle bir ... kendine gel diyorum. Şöyle bir daha bak bu soruya şöyle diyorum. Daha üstten bakmaya çalışıyorum işte. Faydası oluyor bazen, bazen olmuyor tekrar eski türden yapıyorum. Ama öbür türlü olduğunda çok mutlu oluyorum yani.” (S3)

“Çok fazla değil ama genelde esnek olmasına çalışıyorum. Hani benzer çözümler olunca es geçiyorum, direkt düşünmüyorum bile çok fazla. ...Esnek olmaya çalışıyorum, onu da pek beceremiyorum.” (S4)

“Bilmiyorum yani, değilim herhalde. Daha çok şey, genelde, hani bildiğimiz formül varsa, bildiğimiz, bildiğim formülden çözmeye çalışıyorum. O yüzden çok esnek değilim herhalde yani. Bildiğim yoldan gitmesi herhalde işime geliyor. Çok farklı yaratıcı çözümler olduğunu sanmıyorum. Ama böyle bilmediğim bir konusuyorsa herhalde farklı çözümler üretiyorum. Hani konu hakkında hiçbir bilgim yoksa. O zaman farklı şeyler üretebiliyorum. Hani bilmediğim için işin içinden çıkmaya çalışıyorum o zaman farklı şeyler ürettiğimi söylüyorlar. Ama hani bildiğim bir konu olursa herkesin bildiği gibi çözerim yani.” (S5)

“Daha çok bende akıcılık var, yani esneklik çok değil. Mesela, genelde çözülmüş sorulara bakarım, ondan fikir üretmeye çalışırım. Kendim şey yapamam pek, kabiliyet olarak yok bende.” (S6)

“Ya, genelde değilim. Çünkü ilk önce çözmek için uğraşıyoruz. Ya, esneklik değil, o anda aklımıza ne geliyorsa. Zaten genelde soruları çözerken biliyorsak çözüyoruz, bilmiyorsak kalıyor yani... Yani becerilerde gelişme oldu mu fark etmiyorum da esnek düşünmeye çalışmada bir gelişme oluyor. Yani soruyu çözünce farklı bir yol aramaya başladım. Eskiden aramazdım. Bu derste esnek düşünmeye çalışıyorum ama becerebiliyor muyum? Bilmiyorum.” (S8)

Görüşmelerde bazı öğretmen adaylarının akıcılıktan ziyade esnek düşünme üzerine yoğunlaştıkları da dikkat çekmiştir:

G: Matematiksel problemleri çözmeye çalışırken esnek olduğunu düşünüyor musun?

S4: Çok fazla değil ama genelde esnek olmasına çalışıyorum. Hani benzer çözümler olunca es geçiyorum direkt düşünmüyorum bile çok fazla.

G: Yani?

S4: Akıcılığı çok fazla kullanmıyorum.

G: Akıcı olmaya çalışmıyorsun ama esnek olmaya çalışıyorsun.

“İşte daha çok esnekliğe odaklandığım için akıcılığı ondan herhalde biraz ihmal ettik.” (S3)

“Yani herhalde ben sorulara bakarken akıcılığı geri planda tutuyordum şimdi aklıma geldi. Yani aynı mantığı kullanarak çözebileceksem bile çözmiyorum. Mesela şunun farklı bir şekilde yani aynı mantığı kullanıp farklı bir yoldan da gidebilirdim çözüme. Ama yani bunu bir yolla çözdükten sonra farklı bir şey arıyorum yani esnek olmaya çalışıyorum önce.” (S8)

Kendisi ile yalnızca bir görüşme yapılmış olan S9’un bazı ifadeleri onun akıcı olarak çözüm üretmek yerine esnek olmayı tercih ettiğini göstermektedir.

“...onlara hiç girmedim yani. Çünkü oradan çözüm çıkacağı belli yani onun için... genelde başka bir şeye baktım.” (S9)

“...
“ben sadece bu derste düşünüyorum. Mesela bakıyorum genelde her sorunun bir formülü oluyor matematik formüller var ya oradan çıkacağını görüyorum ama yapmıyorum. Başka bir şey bulmaya çalışıyorum. Ama başka bir derste olsa mesela sınavda olmuş olsam direkt o şekilde yaparım” (S9)

Öğretmen adaylarının bu görüşleri daha detaylı olarak incelendiğinde, esnek düşünme konusunda başarısız olmalarına neden olabilecek durumlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Farklı bir yoldan problemin çözümü için gayret sarf etmek yerine sadece soruyu çözmek için odaklanmak, diğer bir deyişle, sonuca odaklı problem çözme davranışı,
- Önceden öğrenilmiş yoldan problemin çözümüne ulaşmaya çalışmak ve herkesin bildiği çözüm yolunu tercih etmek,
- Çabuk pes etmek,
- Esnek düşünme konusunda kabiliyet sahibi olmadığına inanmak,

- Esnek düşünme konusunda yeterli deneyime sahip olmamak,
- Esnek düşünme çabasının ders ortamı ile sınırlı olması.

4.3.2.a. I. grup problemlerin esnek düşünme becerisi açısından analizi

Tablo 4.4 öğretmen adaylarının I. grup problemler için ürettikleri fikir sayıları ve fikirlerin kategori sayılarını göstermektedir. Tablo incelendiğinde öğretmen adaylarının esnek düşünme becerisi açısından farklı problemlerde farklı performans sergiledikleri görülmüştür. Bu duruma örnek olarak S7, S11 ve S17'nin I-A problemlerindeki performansları gösterilebilir. Bu öğretmen adaylarının fikirlerinin kategori sayıları (çeşitliliğine) açısından bakıldığında öğretmen adaylarının bazı problemlerde daha üst sıralarda yer alırken bazılarında alt sıralarda yer aldığı görülmüştür. Öte yandan bazı öğretmen adaylarının esnek düşünme becerisi açısından performanslarının problem gruplarında farklılık göstermektedir. Örneğin; S3'ün I-B S16'nın ise I-A grubu problemlerinde esnek düşünme becerisi açısından daha düşük performans gösterdiği tespit edilmiştir.

Tabloda dikkati çeken bir durum da fikir sayısı az olan öğretmen adaylarının doğal olarak fikirlerinin çeşitliliği de azdır. Tablo 4.4'te belli bir örüntü ortaya çıkmamıştır ancak fikir sayısının artması çeşitliliğinin de artmasına neden oluyor ancak çeşitliliği garantilemiyor gibi görünmektedir. Bu durum akıcı düşünme esnekliği destekleyebilir ancak garanti etmeyebilir şeklinde ifade edilebilir.

a. I-A grubu problemlerin esnek düşünme becerisi açısından analizi

Tablo 4.4'de, I-A grubu problemlerde en çok fikir çeşitliliğine sahip olduğu görülen öğretmen adaylarının buldukları sonuçlar da öğretmen adayları arasında en iyi sonuçlardır. Bu durum, problem çözme sürecinde esnek düşünmenin gerekliliğini işaret etmektedir.

S5, matematiksel problemleri çözerken yeterince esnek olmadığını ifade eden öğretmen adaylarından biri olduğu halde hem akıcılık ve hem de esneklik açısından

diğer öğretmen adaylarına göre daha istikrarlı bir performans sergilemiştir (Tablo 4.4). Problem 3, 8 ve 9’da en fazla fikir sayısı ve fikir çeşitliliğine sahip öğretmen adayı S5’dir. Bu problemlerdeki fikir sayısı, diğer öğretmen adaylarına göre çok daha fazladır. Bu durum görüşmede belirttiği “*Hani esneklik için ilk önce akıcı olmak lazım gibi geliyor bana sonra esnek olasin.*” cümlesi ile tutarlıdır. Bu cümle S5’in açıkça akıcı düşünmeyi önemseydiğini, performansı ise onun akıcı düşündüğünü göstermektedir.

Tablo 4.4 I. grup problemde üretilen fikirlerin ve kategorilerinin (çeşitliliği) sayısı

	I-A grubu										I-B grubu			
	Pr 1a		Pr 1b		Pr 3		Pr 8		Pr 9		Pr 5		Pr 6	
	FS	KS	FS	KS	FS	KS	FS	KS	FS	KS	FS	KS	FS	KS
S1	G	G	G	G	9	2	6	3	3	2	16	4	15	6
S2	7	2	19	3	7	3	3	2	5	3	10	6	11	6
S3	6	3	5	2	2	2	G	G	8	2	4	3	8	4
S4	13	4	2	2	13	3	8	1	9	3	16	5	29	9
S5	9	3	3	2	33	4	30	4	26	4	10	5	28	8
S6	9	3	16	2	15	3	5	2	2	1	12	4	14	6
S7	12	3	10	2	21	2	2	1	6	1	11	6	11	5
S8	4	3	5	3	1	1	4	3	2	2	14	5	15	5
S9	8	2	6	2	1	1	7	2	5	3	4	3	6	4
S10	5	1	2	2	7	3	7	2	7	3	6	3	8	4
S11	1	1	2	1	8	2	10	2	5	2	12	5	11	7
S12	6	3	10	2	4	2	0	0	2	1	5	2	10	6
S13	1	1	0	0	11	2	14	3	3	2	12	5	12	6
S14	5	2	3	2	12	3	4	2	5	1	13	6	20	9
S15	6	3	2	1	6	2	2	1	G	G	10	6	14	6
S16	1	1	0	0	3	1	3	1	2	1	12	5	11	5
S17	8	3	2	2	10	3	6	2	1	1	8	5	14	6
S18	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	10	3	5	4
S19	8	1	5	2	G	G	G	G	4	1	10	5	6	4
S20	7	3	9	2	10	3	4	2	3	3	13	4	11	3
S21	2	1	5	3	7	2	3	2	5	2	8	5	11	5
S22	16	2	0	0	11	3	7	2	4	2	6	4	9	2

G: Öğretmen adayı problemin verildiği gün gelmedi

Fikir sayısı: FS

Fikirlerin Kategori sayısı: KS

S5'in birbirine ekleyerek ürettiği fikirlerinin bir süre sonra farklılaşmaya başladığı, temel fikirler açısından diğer öğretmen adaylarına göre hem akıcı ve hem de esnek olduğu gözlemlenmiştir. Bu durum akıcı düşünmenin, esnek düşünmeyi besleyebildiği sonucunu düşündürmektedir. Diğer yandan en fazla fikir üreten öğretmen adayları arasında olmasına rağmen fikir çeşitliliği fikirlerine oranla daha az olan öğretmen adaylarının (örneğin S7 problem 3, S22 problem 1a) olması akıcı düşünmenin esnek düşünmeyi garanti etmediğini göstermektedir. S5'in durumunda ortaya çıkan farklılığın öğretmen adayının esneklik için akıcılığın şart olduğu düşüncesinden ileri geldiği düşünülmektedir.

Görüşmelerde esnek düşünebildiğini ifade eden tek öğretmen adayı olan S2'nin Problem 1b dışındaki diğer problemlerdeki fikir sayısı fazla olmamasına rağmen, birçok öğretmen adayına göre daha çok çeşitte fikir üretmiş olması, S2'nin esnek düşünmeye çalıştığını göstermektedir (Tablo 4.4). S2'nin özellikle de birinci grup problemlerdeki performansı S5'inki ile karşılaştırıldığında S2'nin daha esnek, S5'in de daha akıcı düşünme eğiliminde olduğu görülmektedir. Çünkü S2'nin fikir çeşitliliği, fikir sayısına oranla S5'inkinden daha fazladır. Bunun nedeni olarak da S5'in akıcı düşünme becerisine öncelik vermesinden kaynaklandığı söylenebilir.

S5'in araştırmadaki her bir problem için oldukça ısrarlı bir şekilde çözüm bulmaya çalışmıştır. S5'in performansı da bu gözlemi desteklemektedir. Öte yandan öğretmen adayı görüşmede de ısrarlı bir şekilde çözüm üretmeye çalıştığını ifade etmiştir.

“ben bir de çok kolay pes etmeyen biriyim. Genelde bayağı uğraşırım araştırırım onun cevabını bulmaya çalışırım. Üç gün çözmeye çalıştığım sorular oldu.” (S5)

“...Takıldığım yerde çözmeye uğraşırım yani vaktim varsa bir saat iki saat bakarım çıkmıyorsa başka bir yol denerim. Gene uğraşırım o soruyu bırakmam eğer vaktim varsa.” (S5)

S5'in ısrarlı çözüm bulma çabasına karşılık S2'nin yalnızca ilgisini çeken problemlerde ısrarlı davrandığı görülmüştür. S2, görüşmede çözeceği problemlerde seçici davrandığını gösteren ipuçları vermiştir:

“...Ya o soruyu çözmememin nedeni yani şimdi matematikten kendimi problemin içinde hissetmediğim zaman yani zevk alamıyorum yani. Kendimi problemin, olayın içinde hissetmem lazım. O problem tamamen soyut olduğundan dolayı yani çözesim gelmedi, çözmek istemedim yani.” (S2)

Akıcı düşünme eğiliminde olduğu görülen S1, görüşmede esnek düşünmeye çalıştığını ancak başaramadığını ifade etmiştir. S1, ayrıca esnek düşünmemesinin nedeninin çabuk sıkılarak pes etmesi olabileceğini de belirtmiştir.

G: Peki sen matematiksel problemleri çözerken esnek düşünmeye çalışıyor musun? Esnek olduğunu düşünüyor musun?

S1: Çalışıyorum ama.. Pek çok esnek olduğum söylenemez. Yani bariz varsa onu görürüm de.

G: Peki neden dersin?

S1: Yani çok düşünürsem bulurum herhalde de çabuk pes ettiğimden midir nedir?

G: Çabuk mu pes edersin?

S1: Yani sıkılırım herhalde, o yüzden belki.

G: Peki bu dersten sonra esnek düşünme becerilerinde nasıl bir gelişme oldu?

S1: Gelişme oldu mutlaka böyle bir şeyden haberdar değildim. En azından hani farklı şeyler düşüneyim diye geçiriyorum artık. Bir soruya baktığımda tek bir şeye takılıp kalmamaya çalışıyorum. Yani fark ettiğimde bırakıyorum. Bu şekilde.

Burada görülen üç farklı durumun öğretmen adaylarının akıcı ve esnek düşünme performanslarına da paralel olarak yansıdığı görülmüştür. S5'in problemi ısrarlı çözme davranışının, onun akıcı ve esnek düşünme becerisindeki istikrarlı performansının nedenlerinden biri olduğu düşünülmektedir.

S2'nin Problem 1b'deki performansını I-A grubundaki diğer problemlerde gösterememesinin nedeni olarak çözeceği problemlerde seçici ve hatta problemlerle ilgili önyargılı davranması olduğu tahmin edilmektedir. Problem 8 ve 9'da sıkılmış olduğu gözlemlenen S2'nin bu problemlerdeki performansının iyi olmamasının problemi çözme isteği ile ilgili olduğu düşünülmektedir. Öte yandan, S2'nin Problem 9'da günlüğüne (Şekil 4.65) yazmış olduğu *“fonksiyon konusunda diğer arkadaşlarımdan daha farklı şeyler yazabileceğime inanmıyorum. Halbuki siz bizden birazcık sınırları aşmamızı bekliyorsunuz”* cümlesi öğretmen adayının fonksiyon konusundaki bilgilerine yeterince güvenmediğini göstermektedir. S2'nin buradaki ilk

cümlesi aslında orijinal çözüm üretemeyeceği önyargısını, ikinci cümlesi ise öğretmen adaylarından esnek düşünmelerinin beklendiği algısını göstermektedir. S2'nin buradaki önyargısının beklentilere cevap verme çabasının önüne geçtiği düşünülmektedir. S2'nin bu önyargısının esnek düşünme ve hatta orijinal çözüm üretme konusunda ısrarlı davranmasını engellediği tahmin edilmektedir.

$$\begin{aligned}
 f(a) &= a^2 + b \text{ olsun.} \\
 f(x^2 + f(y)) &= a(x^2 + f(y))^2 + b = a(x^4 + 2x^2 f(y) + (f(y))^2) + b \\
 &= ax^4 + a2x^2 f(y) + a(f(y))^2 + b \\
 &= ax^4 + a2x^2(ay^2 + b) + a(ay^2 + b)^2 + b \\
 &= ax^4 + 2a^2x^2y^2 + 2abx^2 + a(a^2y^4 + 2a.y^2.b + b^2) + b \\
 &= ax^4 + 2a^2x^2y^2 + 2abx^2 + a^3y^4 + 2a^2y^2b + ab^2 + b \\
 &= ax^4 + a^3y^4 + 2a^2x^2y^2 + 2abx^2 + 2a^2y^2b + ab^2 + b
 \end{aligned}$$

$$x=0 \text{ alalım} \quad f(f(y)) = y + (f(0))^2$$

$$y = y + (f(0))^2$$

$$\boxed{0 = f(0)}$$

$$f(x) = a \quad f(y) = b \text{ olsun.}$$

$$y + (f(x))^2 = y + a^2 \quad f(x^2 + b) = y + a^2$$

$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$ den-sonune birer dikkatlice bakılırsa $x^2 \rightarrow y$ ve $f(y) \rightarrow (f(x))^2$ olmuş demek birar yankı ama x ve y değişkenleri yer değiştirip 1. den-sonunde kare-lik- alınmış ve 2. den-sonunde kare-si alınmış algebralıdır. Bu bir bakış açısı

Şekil 4.65. S2'nin Problem 9 için yazdığı günlük

Acaba bu fonksiyon birim fonksiyonmu? diye düşünürsek;
 Yani $f(x)=x$ $f(y)=y$ olsun.
 $f(x^2+f(y)) = f(x^2+y) = x^2+y = y + (f(x))^2$ olur.
 O zaman şartımız sağlanmış olur.

$y=0$ alalım

$$f(x^2+f(0)) = f(x^2) = 0 + (f(x))^2 \Rightarrow f(x^2) = (f(x))^2 \text{ olur.}$$

Fonksiyon konusunda diğer arkadaşlarımdan daha farklı şeyler yazabileceğime inanmıyorum. Halbuki sırtlarımdan birazcak sınırları aşmamızı bekliyorsunuz.

Şekil 4.65. S2'nin Problem 9 için yazdığı günlük (devam)

S1 ile S2'nin fikir sayısı ve çeşitliliği karşılaştırıldığında (Tablo 4.4) çoğunlukla S1'in fikir sayısı açısından S2'den önde, S2'nin ise fikir çeşitliliği açısından daha önde olduğu görülmüştür. Bu durum; S1'in daha çok akıcı düşünmeye çalışan, S2'nin de esnek düşünmeye çalışan öğretmen adayları olduklarını göstermektedir ki bu sonuç öğretmen adaylarının görüşmedeki ifadeleri ile tutarlıdır.

I-A grubu problemlerinden Problem 1a'da en iyi çözümün S4'e ait olduğu görülmüştür. Fikir sayısı açısından bakıldığında ikinci en fazla fikir üreten öğretmen adayı iken en çok fikir çeşitliliğine sahiptir. Diğer taraftan, Problem 3'te verilen ifadenin 8 ile bölündüğünü formal yollarla ispatlayabilen iki öğretmen adayından biri S4 diğeri de S5'dir (Şekil 4.66 ve Şekil 4.67). Bu iki öğretmen adayının fikir sayıları arasında oldukça fazla fark vardır. Günlükler karşılaştırıldığında S4'ün özel değer incelemesi yaparak ifadenin 8 ile bölündüğünü fark ettiği, bunu net ve sade bir şekilde ispatlamış olduğu görülmüştür. S5, ifadenin 8 ile bölündüğünü algoritmik işlem yaparak fark etmiştir. Dolayısıyla daha uzun bir yoldan ispatı yaparak daha fazla fikir üretmek durumunda kalmıştır. S4'ten farklı olarak S5, bu sonuçla yetinmemiş ve verilen ifade ile ilgili daha ileri analizler de yapmıştır. Bu durum fikir sayılarının ve dolayısıyla fikirlerde çeşitliliğin artmasına neden olmuştur.

$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ sayısının için n=0, 1, 2, 3, 4, 5 için

Ber bu sayılardan daha düzenli bir şekilde düzenli için yazmam

$$5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 5^n + 6(7^n - 1) + 7$$

$$= 5^n + 6(7^{n-1} + 7^{n-2} + \dots + 7 + 1) + 7$$

$$= 5^n + 6(7^{n-1} + 7^{n-2} + \dots + 7 + 1) + 7$$

8 ile bölünür.

n çift ise bu sayı 8 ile bölünür.

n tek ise 0 zaman $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ çifttir.

Aynı şekilde $7^{n-1} + 7^{n-2} + \dots + 7 + 1$ de çifttir. tek carp çift

8 ile bölünür.

n=0 için $5^0 + 6 \cdot 7^0 + 1 = 8$

n=1 için $5^1 + 6 \cdot 7^1 + 1 = 48$

n=2 için $5^2 + 6 \cdot 7^2 + 1 = 320$

n=3 için $5^3 + 6 \cdot 7^3 + 1 = 2184$

n=4 için $5^4 + 6 \cdot 7^4 + 1 = 14932$

n=5 için $5^5 + 6 \cdot 7^5 + 1 = 105968$

n=6 için $5^6 + 6 \cdot 7^6 + 1 = 721510$

n=7 için $5^7 + 6 \cdot 7^7 + 1 = 5052074$

n=8 için $5^8 + 6 \cdot 7^8 + 1 = 3592960$

n=9 için $5^9 + 6 \cdot 7^9 + 1 = 2581390$

n=10 için $5^{10} + 6 \cdot 7^{10} + 1 = 1814000$

n=11 için $5^{11} + 6 \cdot 7^{11} + 1 = 12544000$

n=12 için $5^{12} + 6 \cdot 7^{12} + 1 = 8780000$

n=13 için $5^{13} + 6 \cdot 7^{13} + 1 = 6146000$

Şekil 4.66. S5'in Problem 3 için yazdığı günlük

$n \geq 2$ iken $\text{mod } 10$ göre
 $n = 4k+2 \quad k \geq 0 \quad 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 0 \pmod{10}$
 $n = 4k+3 \quad k \geq 0 \quad 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 6 \pmod{10}$
 $n = 4k+4 \quad k \geq 0 \quad 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 2 \pmod{10}$
 $n = 4k+5 \quad k \geq 0 \quad 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 8 \pmod{10}$ döngüsüne sahip

Görülür ki:

$5^n \equiv 5 \pmod{10} \quad \forall n \geq 1$ için
 $6 \equiv 6 \pmod{10}$
 $7^n \equiv 7 \pmod{10} \quad n=1$ iken
 $3 \pmod{10} \quad n=2$ iken
 $9 \pmod{10} \quad n=3$ iken
 $3 \pmod{10} \quad n=4$ iken
 $1 \pmod{10} \quad n=5$ iken
 $7 \pmod{10} \quad n=6$ iken

sayının mod 10'da kalanlar 7, 9, 3, 1'dir. modüler aritmetikte 10^n gibi bir sayının mod 10'da kalanlar sürekli olarak 0'dır ve tekrar mod 10'da kalanlar 7, 9, 3, 1'dir.

$n=1$ iken $5 + 6 \cdot 7 + 1 = 48 \equiv 8 \pmod{10}$
 $n=2$ iken $5 + 6 \cdot 9 + 1 = 60 \equiv 0 \pmod{10}$
 $n=3$ iken $5 + 6 \cdot 3 + 1 = 26 \equiv 6 \pmod{10}$
 $n=4$ iken $5 + 6 \cdot 7 + 1 = 48 \equiv 8 \pmod{10}$

Şekil 4.66. S5'in Problem 3 için yazdığı günlük (devam)

$n=2$ için $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 5 \cdot 2^6$
 $n=3$ için $" = 2^3 \cdot 2^9$
 $n=4$ için $" = 2^3 \cdot 2^9$

n 'e değeri verdiğimizde 2^3 'ün kollarını elde ediyoruz. Acaba her $n \geq 2$ için $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ tam sayısı 2^3 'ün kolları olur mu? Yani $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ sayısı 2^3 'e bölünebilir mi?

Bunun için bölünebilme kurallarından yararlanarak;

$5 \equiv 5 \pmod{2^3} \quad \vee \quad 7 \equiv 7 \pmod{2^3}$
 $25 \equiv 1 \pmod{2^3} \quad 49 \equiv 1 \pmod{2^3}$

$\Rightarrow n$ tek iken 5^n ve 7^n den kalanlar 5 ve 7 olurken n çift iken 5^n ve 7^n den kalan 1 oluyor.

Yani n tek olursa;

$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $5 + 6 \cdot 7 + 1 = 48$

n çift olursa;

$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $1 + 6 \cdot 1 + 1 = 8$

elde ederiz. Bu demektir ki $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ve 2^3 'ün kolları olduğundan $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ tam sayısı (≥ 2) her zaman 2^3 'e tam bölünebilir.

Şekil 4.67. S4'ün problem 3 için yazdığı günlük

b. I-B grubu problemlerin esnek düşünme becerisi açısından analizi

I-B grubu problemlerde öğretmen adaylarının genel olarak doğru fikir sayısının I-A grubu problemlerden daha fazla olduğu ve fikir sayılarının birbirine daha yakın olduğu görülmüştür (Tablo 4.4). Aynı durum fikir çeşitliliğinde de mevcuttur. Fikir sayılarının ve çeşitliliğinin genel olarak daha fazla olmasının nedeninin problemlerin niteliğinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Çünkü I-A grubu problemlerde birbirini takip eden zincirleme fikir üretimini de gerektiren durumlar mevcuttur. Bu durum bir aşamada takılan öğretmen adaylarının daha fazla fikir üretememesine neden olabilmektedir. I-B grubu problemlerde başlangıç noktası çoğunlukla verilen matematiksel durumdur. Öte yandan üretilen fikirler her ne kadar merkezdeki matematiksel duruma bağlanmış olsa da fikirlerin yeni açılımlar için birbirini desteklediği görülmüştür (Şekil 4.68 ve Şekil 4.69).

Problem 5'te en çok fikir üreten öğretmen adayları olan S1 ve S4'ün en çok fikir çeşitliliğine sahip olamadıkları görülmüştür. S4 dizi kavramının hatırlattığı kavramlar açısından incelemesini yapmıştır. İncelemesini şöyle açıklamıştır:

“bu dizinin bir kuralının olup olmadığını inceleyerek başladım ve birkaç yoldan (a_n) dizisini formülleştirdim. Böylece dizi üzerinde yorum yapmam kolaylaştı. Dizinin özelliklerini farklı ama yine de kendi içinde benzer düşüncelerle incelemeye çalıştım. Dizi deyince limit kavramı öne çıkıyor. Bundan dolayı ilk önce dizinin limitini inceledim. Diziler yardımıyla seriler oluşturduğumuzdan bu dizi için seri oluşturmaya çalıştım fakat bu diziden seri oluşturmak yerine bu diziye seri şeklinde ifade etmenin daha şık olduğunu fark ettim. Dizinin elemanlarına bakarak bu sayıların ortak bölenleri olduğunu gördüm. Böylece (a_n/b_n) şeklinde bölüm dizileri tanımladım. Benzer düşünceyle bu dizi yardımıyla yeni diziler oluşturmaya çalıştım.”

S4'ün bu açıklaması, fikirlerini birbirinden türettiğini açıkça ortaya koymaktadır. Başka bir deyişle, fikirleri eklemeli olarak artmıştır. S4'ün günlüğünün diğerlerine göre daha formal matematiksel ifadeler içerdiği de ayrıca dikkati çeken bir durumdur (Şekil 4.68).

$$a_0 = 9 = 10 - 1$$

$$a_1 = 99 = 100 - 1 = 10^2 - 1$$

$$a_2 = 999 = 1000 - 1 = 10^3 - 1$$

$\vdots$
 $a_n = 10^{n+1} - 1$ şeklinde
 dizinin genel formunu yazabiliriz.

Yeya

$$a_0 = 9$$

$$a_1 = 99 = 90 + 9 = 9 \cdot 10 + 9 = 9 \cdot (10 + 1)$$

$$a_2 = 999 = 900 + 90 + 9 = 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9 = 9(10^2 + 10 + 1)$$

$$\vdots$$

$$a_n = 9(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1) = 9 \cdot \frac{(10^{n+1} - 1)}{(10 - 1)}$$

$$a_n = 10^{n+1} - 1$$

Yeya

$$a_0 = 9$$

$$a_1 = 99 = 90 + 9 = 9 \cdot 10 + a_0$$

$$a_2 = 999 = 900 + 99 = 9 \cdot 10^2 + a_1$$

$$a_n = 9 \cdot 10^n + a_{n-1} \quad n \geq 1$$

$$a_n = 10^{n+1} - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{n+1} - 1 = \infty$$

Bu serinin
 (an) dizisini kismi toplamlar dizisi olarak
 tanımlayabiliriz. Burada (bn) dizisi:

$$b_0 = 9$$

$$b_1 = 90 = 9 \cdot 10$$

$$b_2 = 900 = 9 \cdot 10^2$$

$$b_n = 9 \cdot 10^n$$

$$\Rightarrow a_0 = 9$$

$$a_1 = b_0 + b_1 = 99$$

$$a_2 = (b_0 + b_1) + b_2 = a_1 + b_2 = 99 + 900 = 999$$

$$\Rightarrow a_n = \sum_{k=0}^n b_k \quad \text{serisinin limiti:}$$

yukarıda hesapladığımız gibi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ olur.
 Aynı şekilde $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ oldu. an birime

toplamlar dizisinin ıraksak olduğunu söyleyebiliriz.

Akıcılık	- 2 farklı yolda formül bulma - 20'den 3 farklı dizi tanımlama
Esneklik	- Dizi için formül oluşturma - Dizinin limitini inceleme - Bu dizi yardımıyla farklı diziler tanımlama - Dizi elemanlarının bölünebilirliğini inceleme

Düşünme Süreçleri

Bu dizinin bir kuralı olup olmadığını inceleyerek başladım ve birkaç yoldan (an) dizisini tanımladım.

Böylece dizi için de işlem yapmanın kolaylaştı. Dizinin bağıllıklarını, farklı onu yine kendi içinde benzer dillerle inceleyerek çalıştım.

Özellikle dizi dizince limit kavramını aklıma geldi. Bundan dolayı ilk önce dizinin limitini inceledim.

Diziler yardımıyla serileri oluşturdum. Bu dizi için seriyi oluşturmaya çalıştım. Fakat bu diziden seriyi oluşturmaya yerine bu diziyi serisi şeklinde ifade etmenin daha sık olduğunu farkettim.

Dizinin elemanlarına bakarak bu sayılara ortak bölenleri olduğunu gördüm. Böylece (bn) şeklinde bütün dizileri tanımladım. Benzer durumlarla (a_n) dizisinde de aynı şekilde bu dizi yardımıyla yeni diziler oluşturmaya çalıştım.

Şekil 4.68. S4'ün Problem 5 için yazdığı günlük

Şimdi $a_n = 10^{n+1} - 1$ dizisi yardımıyla başka bir dizi tanımlayalım;

$$b_0 = 10^{-1} \cdot a_0$$

$$b_1 = 10^{-2} \cdot a_1$$

$$b_2 = 10^{-3} \cdot a_2$$

$$\vdots$$

$$b_n = 10^{-(n+1)} \cdot a_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-(n+1)} \cdot a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-(n+1)} [10^{n+1} - 1]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - 10^{-(n+1)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-(n+1)} = 1 - 0 = 1$$

Fakat $0,99 \dots 9 \dots$ şeklinde bir sayının olmadığını, bu sayının 1 ile eşit olduğunu (aslında 1 olduğunu) sayısal matematiğin dersinden biliyoruz. Yani (b_n) dizisinin son teriminin 1 olduğunu söyleyebiliriz. Böylece (a_n) sonsuz giden bir dizi iken (b_n) 'yi 1 ile yaklaşıyorak belirsizlikten kurtulmuş bir noktaya ulaştırabiliriz.

Dizinin terimleri $9, 99, 999, \dots$ şeklinde olması (a_n) dizisinin 9'a bölünebileceğini gösterir. Aynı zamanda 3'e de bölünür. Yani;

$$(b_n) = (9, 9, 9, \dots) \text{ ve } (c_n) = (3, 3, 3, \dots) \text{ olsun. O zaman}$$

$$(a_n) = (10^{n+1} - 1) = (9, 99, 999, \dots) \text{ için } \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ ve } \left(\frac{c_n}{b_n}\right) \text{ dizileri de}$$

tanımlı olur.

$$(b_n) = \left(\frac{1}{a_n}\right) \text{ o.s. bir dizi tanımlayabiliriz. Bu dizi için de}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^{n+1} - 1} = 0 \text{ olur.}$$

Şekil 4.68. S4'ün Problem 5 için yazdığı günlük (devam)

S1'in ise günlüğündeki fikirlerin genel olarak bölünebilme üzerine inşa edildiği görülmüştür (Şekil 4.69). S1, terimlerin bölünebildiği sayıları belirtip dizinin terimlerinin farkları, toplamları, çarpımlarının hangi sayılar ile bölüneceğini belirlemeye çalışmıştır. Dolayısıyla bu günlükteki fikirleri eklemeli olarak artmıştır.

- Bu dizinin bütün terimleri 9'a, 3'e tam bölünür.
- n . terimi n basamaklıdır.
- Herhangi iki teriminin farkının mutlak değeri 10'un bir katıdır. 10'a bölünür. Çünkü farkta en az birler basamağı "0" olur.
 $|9 - 99| = 990 : 10 = 99$

— Herhangi iki teriminin farkının mutlak değeri 90'a, 30'a, 3'e bölünür. 90'a bölünmesi için 9 ve 10'a tam bölünmesi lazım. 10'a tam bölündüğünü yukarıda gösterdim. Farkları aynı zamanda mutlaka 9'un katıdır. Çünkü 9'un katı olan iki terimi birbirinden çıkarıyoruz.

- Herhangi iki teriminin toplamı çifttir. Çift olma ya bakarken son rakamın (birler basamağı) çift old. göstermeliyiz. Her terimin son rakamı 9 old. 2 terim toplamı $9 + 9 = 18$ olacaktır.

— Yukarıdakileri genelleştirirsek, bu dizinin terimlerinin istenildiği kadarının (2, 3, 4, ..., n tanesinin) toplamı 9 ve 3'e tam olarak bölünür.

- Herhangi iki terimini alalım: n . terim = n basamaklı
 t . terim = t basamaklı

$n > t$ olsun. O zaman bu iki terimin farkı 10^t 'ye tam bölünür. ($n > t > 0$)

- Dizinin çiftinci terimleri (yani 2., 4., 6., ...) 11'in katıdır. Dolayısıyla çiftinci terimler 11'e tam bölünür.

Aynı zamanda bütün terimler 9'un katıdır, 99 ve 999'a da tam. — Bu dizinin n tane teriminin çarpımının sayısal değeri, 9^n 'e tam bölünür.

- Bu dizinin n tane teriminin çarpımının, asal çarpanlarından biri 3^n 'dir.

- $\frac{a_{2n}}{a_n} = 10^k$ nite bir tam sayıya eşittir. ($n > 0$)

örnek:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{99}{9} = 11, \quad \frac{a_4}{a_2} = \frac{9999}{99} = 101, \dots$$

$$\frac{a_6}{a_3} = \frac{999999}{999} = 1001$$

- Yukarıdaki k sayısında 1 ($n-1$) tane sıfır $\frac{1}{10}$ tipinde bir sayıdır. $\downarrow$ bir bas. $\downarrow$ ($n-1$) bas. $\downarrow$ bir bas.

Şekil 4.69. S1'in Problem 5 için yazdığı günlük

(1) $a_i = i$ tarafe 10^{i-1} yazarsa 10^{i-1} ile

bu dizinin her teriminin 10 ile

belli bir ¹ titaklar denemisin

$a_i = 10^{i-1}$ dir. $(i=1 \text{ den başlar})$

bu dizinin 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111111, 1111111111, 11111111111, ... serisi olur.

$a_i = \frac{1}{100} 10^i \cdot 9 + 10^{i-1} \cdot 9 + \dots + 10 \cdot 9 + 9$ elemanı

$a_i = \frac{1}{100} 3^i \cdot 11 \cdot 10^i + \dots + 3 \cdot 11 \cdot 10 + 3^2$

Bu sayı 9 ve 3 ile bölünür çift sıradaki terimler 11 ile bölünür.

$a_i = i$ tarafe 9'un yazarsa yazılan diye düşünerek bu dizide kaç tane 9 vardır.

$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{9}{9}, \dots$

$\frac{1}{9}$ bulursen bu kadar bu dizide kaç tane 9 olduğunu gösterir

$a_i = 10^i + 9$ ($i=0$ den başlar)

$b_i = 1, 11, 111, \dots$ serisi olur.

$a_i = 9, 99, 999, \dots$ serisi

$a_i = 9 \cdot b_i$ dir. b dizisi 1, 11, 111, ... olur.

$1 = 1$

$11 = 1+10$ 11 tane

$111 = 1+10+10^2$ 111 tane

b_i dizisindeki her bir terimin toplamı

$\frac{1}{101} 10^i$ terim toplamıdır.

$a_i = 9, 99, 999, \dots$ dizisi olur.

$a_i = 9 \cdot b_i$ dir.

a dizisindeki her bir terimin toplamı

5'deki her bir terimin toplamının 9 katıdır.

igari $a_i = 10^i - 1$ serisini, göz önüne alırsanız

Akıcılık

Esneklik

Şekil 4.70. S5'in Problem 5 için yazdığı günlük

$$\sum_{i=1}^{\infty} 10^i - 1 = 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 1$$
 (çünkü a^i 'den a^i dirine eşittir dolayısıyla terimleri toplamda eşittir.)

$$\sum_{i=1}^{\infty} 10^i - 1 = 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 1$$

yani $\sum_{i=1}^{\infty} 10^i = 10 \sum_{i=1}^{\infty} 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} 10^i = \frac{\infty}{10} = \frac{\infty}{1}$

2) 9'ist sıradaki terimler 11 ile bölünmediğinde kendinden bir önceki terimler elde edilir. bu yolla

Bir sonraki terim 99999'dir.

3) Aslında soruyu ters çevirip baktığımızda arab alfabesinde harflerin yazılışına göre 6'dan büyük bir rakamla yazılan bir dizi elde edilmiştir. (9 için düşündüğüm bir rakam seçti bu dizi için de düşündüm)

Aslında bu diziyi 9 tabanına göre yazarsam:

4) $(110)_9, (1320)_9, (1330)_9, (11460)_9, (162150)_9, (1783660)_9, (1370)$

Bu arada kaç tane biri yazarsa ya da seçiyi 11'e bölse sonuçta kalan bu yazarsa ya da seçiyi 9'a bölse kalana eşittir.

5) Taban 11'e göre yazılırsa:

$(91)_{11}, (190)_{11}, (1109)_{11}, (7320)_{11}$

Şekil 4.70. S5'in Problem 5 için yazdığı günlük (devam)

S5 ise bölünebilme ile ilgili fikirler üretmiş, ilk terimleri 9 tabanında ve 11 tabanında yazarak örüntü bulmaya çalışmıştır (Şekil 4.70). Fikirleri birbirini çağrıştıracak niteliktedir. Kısacası fikirler eklemeli olarak artmıştır.

S6, genel olarak terimlerin bölünebilirliği ile ilgilenmiştir. Her terimin bazı doğal sayılarla bölünüp bölünemediğini incelemiştir (Şekil 4.71). Dizinin genel terimini belirlemesi ve iraksak olduğunu belirtmesi haricinde bölünebilirliğin dışına çıkmamıştır. Genelde birbirine benzer fikir üretmiştir. Günlüğüne düşünme süreci ile ilgili "önce dizinin genel terimini buldum. Bu diziyi ilgili bölünme kurallarını inceledim" ifadesini yazmıştır.

999,999... dizisi için ne söylebiliriz?

- sonsuza uzanan bir dizi.

- dizinin genel terimi

$$a_n = 10^n - 1 \quad (n \geq 1) \text{ veya } a_n = 10^n - 1 \quad (n \geq 0) \text{ dir.}$$

- dizinin tüm terimleri 3'e ile bölünebilir.

- dizinin çift terimleri 11 ile bölünür.

- dizinin terimleri hep tek sayıdır.

- " " 6 ile bölünebilir ve 6 ile bölündüğünde 3 kalanını verir.

$$9 = 4 \pmod{5}$$

$$99 = 4 \pmod{5}$$

$$999 = 4 \pmod{5}$$

Her n değeri için 5 ile bölündüğünde 4 kalanını verir.

- Dizi sonsuza yakın sağlığı için S_n dizisinin terimleri sonsuza yakınsar.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (10^n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (10^n - 1) = \infty$ olur.

$9(1, 11, \dots) = a_n$

8 ile bölümünden kalanlara bakalım.

$9 \equiv 1 \pmod{8}$ olduğundan diğerleriyle çarpımı sonucu etkilemez.

$$\begin{array}{r} 11111111 \\ 8 \overline{) 11111111} \\ \underline{8} \\ 31 \\ \underline{24} \\ 71 \\ \underline{56} \\ 15 \\ \underline{16} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111111 \\ 8 \overline{) 11111111} \\ \underline{8} \\ 31 \\ \underline{24} \\ 71 \\ \underline{56} \\ 15 \\ \underline{16} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111111 \\ 8 \overline{) 11111111} \\ \underline{8} \\ 31 \\ \underline{24} \\ 71 \\ \underline{56} \\ 15 \\ \underline{16} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111111 \\ 8 \overline{) 11111111} \\ \underline{8} \\ 31 \\ \underline{24} \\ 71 \\ \underline{56} \\ 15 \\ \underline{16} \\ 1 \end{array}$$

$n \neq 2$ için dizinin bütün terimleri 8'e bölündüğünde 7 kalanını verir.

$$9 \equiv 1 \pmod{8} \quad 9 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$11 \equiv 3 \pmod{8} \quad 111 \equiv 3 \pmod{8}$$

$$999 \equiv 7 \pmod{8} \quad 9999 \equiv 7 \pmod{8}$$

Şekil 4.71. S6'nın Problem 5 için yazdığı günlük

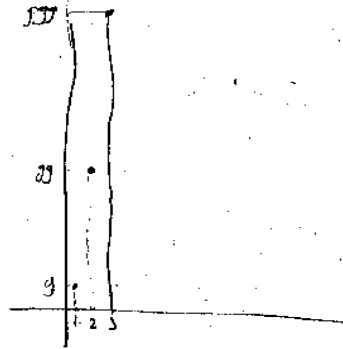
Yukarıda bahsedilen tüm örneklerde, farklı çeşitlilikte de yer alsa fikirlerin birbirini çağırıştırabileceği görülmektedir. Ancak, S2'nin günlüğünde birbirinden türetilmiş olan fikirlerin yanında, geçişlerin kopuk olduğu fikirler de vardır (Şekil 4.72). S2 burada detaylara girmeden fikirlerini oldukça sade bir şekilde yazmıştır. Fikirlerini ifade etmede matematiksel dili iyi kullanamadığı görülmüştür. S2'nin en fazla fikir sayısına sahip olmamasına rağmen en fazla fikir çeşitliliğine sahip öğretmen adayları arasında olması (Tablo 4.4) onun bu problemde akıcı düşünmekten çok esnek düşünmeyi tercih ettiğini düşündürmektedir.

$$(10^n - 1)$$

$$9(1, 11, 111, \dots)$$

Her terimde 10 ile çarpılıp 9 eklenmiş.

Bu serinin terimleri 3 ve 9 ile tam bölünür.



$$0.99999\dots = 0.\bar{9} = 1$$

Bu seriyi herhangi bir sayının virgülden sonraki kısmı gibi düşünersek bu seri bir tane ablığımla sayının ardışığına geçecektir.

$$9, 99, 999, 9999, 99999, 999999, 9999999, 99999999, 999999999$$

Seri ∞ 'a doğru gidiyor.

Her terime 1 eklersek 10^n serisini yakalarız.

$$\begin{array}{r} 99 \overline{) 3} \\ 0 \quad 33 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 11 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 999 \overline{) 3} \\ 0 \quad 333 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 111 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 32 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 12 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9999 \overline{) 3} \\ 0 \quad 3333 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 1111 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 21 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 370 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 123 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 41 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 18 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \overline{) 3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

Bu problemin çözümünü diye birşey düşünemiyorum. Yani ortada bir problem olduğuna kendimi inandıramıyorum. İstenilen şeylere ulaşmak için izlediğim yollara bakmak istiyorsanız ama ben ortada istenilen birşey olduğunu göremiyorum. O yüzden herhangi bir yol söyleyemiyorum. Öyle dilerim.

Aslında seri çok hoşuma gitti. Çünkü uzaktan bakıldığında çok güzel görünüyor ama o güzelliği gösteremedim.

Şekil 4.72. S2'nin Problem 5 için yazdığı günlük

4.3.2.b. II. grup problemlerin esnek düşünme becerisi açısından analizi

Öğretmen adaylarından birden fazla çözüm üretmeleri istenen II. grup problemlerde birden fazla çözüm üretme açısından esnek düşünme becerileri incelenmiştir. Öğretmen adaylarının doğru çözümlerin çeşitliliğinin sayısı öğretmen adaylarının aynı problemi çözmek için ne kadar farklı bakış açısı geliştirdiklerini, kısacası, ne kadar esnek düşünebildiklerini göstermiştir.

a. II-A grubu problemlerin esnek düşünme becerisi açısından analizi

Öğretmen adaylarının II-B grubu problemlerdeki çözüm denemelerinin sayısı (ÇDS), doğru çözüm sayısı (DÇS) ve birbirinden farklı doğru çözümlerin sayısı (FÇS) Tablo 4.5’de verilmiştir. Üretilmiş farklı çözüm sayıları öğretmen adaylarının çözüm üretmedeki esnekliğini göstermektedir.

Tablo 4.5’te bazı öğretmen adaylarının en çok çözüm üretenler arasında olmalarına rağmen çözümlerinin çeşitliliği bazı öğretmen adaylarından daha azdır (Örneğin Problem 14’te S5, S6 ve S7’nin durumu ile S3 ve S13’ün durumu). Bu durum öğretmen adaylarının akıcı ya da esnek olarak çözüm üretme tercihlerini göstermektedir. Birincilerin tercihi akıcılıktan yana iken ikincilerin tercihi esneklikten yanadır.

S3 ve S13 Problem 14’te en çok çözüm üretenler arasında olmadıkları halde en çok çözüm çeşitliliğine sahip olan öğretmen adayları olmuşlardır (Tablo 4.5). S3 ve S13’ün bu problemde esnek düşünebildikleri görülmüştür. Ancak, her iki öğretmen adayının Problem 15 ve 16’daki esneklik performansları, esnek düşünme becerisinin problemden probleme değişebileceğini göstermiştir.

Mantıksal düşünmenin belirgin olarak görüldüğü S5 ile sezgisel düşünmenin görüldüğü S9’un bu problem grubundaki performansları karşılaştırıldığında S5’in akıcı düşünmeyi tercih ettiği, S9’un Problem 14 ve 15’te esnek düşünmeyi tercih ettiği görülmüştür. Problem 16’da S9’un fark ettiği çözümü, uzun olacağı

düşüncesiyle hiç yazmamış olması onun orijinal çözüm arayışı içinde olduğunu düşündürmektedir.

Tablo 4.5 Geometri Problemleri için Yapılan Çözümlere Dair Sonuçlar

	Problem 14			Problem 15			Problem 16		
	ÇDS	DÇS	FÇS	ÇDS	DÇS	FÇS	ÇDS	DÇS	FÇS
S1	4	4	1	4	3	2	4	2	1
S2	5	4	3	2	1	1	3	1	1
S3	5	5	4	1	1	1	3	1	1
S4	G	G	G	G	G	G	1	1	1
S5	6	6	2	7	7	3	6	5	2
S6	8	7	3	G	G	G	6	5	2
S7	8	8	3	3	3	2	2	1	1
S8	2	2	2	3	3	3	2	1	1
S9	3	3	3	5	5	4	2	0	0
S10	4	4	2	4	4	1	4	4	1
S11	6	6	3	2	2	2	1	1	1
S12	G	G	G	G	G	G	4	2	1
S13	4	4	4	3	2	2	2	2	1
S14	G	G	G	G	G	G	5	4	1
S15	5	4	2	3	3	2	G	G	G
S16	3	3	2	3	2	2	4	4	1
S17	4	2	2	4	3	1	G	G	G
S18	3	3	3	2	2	1	2	2	1
S19	5	5	2	5	4	2	3	2	1
S20	6	5	2	5	5	3	1	1	1
S21	3	3	3	3	3	1	4	3	2
S22	3	3	2	4	2	1	1	1	1

G: Öğretmen adayı problemin verildiği gün gelmedi

ÇDS: Çözüm denemelerinin sayısı

DÇS: Doğru çözümlerin sayısı

FÇS: Birbirinden farklı doğru çözümlerin sayısı

S6'nın Problem 14 ve 16'daki akıcılık ve esneklik açısından performansı S5 ile paralellik göstermektedir.

S2'nin bu Problem 14'teki esneklik performansını diğer iki problemde gösteremediği görülmüştür. Bu durum esnek düşünme becerisinin problemden probleme değişebileceğini göstermektedir.

İkinci görüşmenin yapıldığı S1, S2, S3, S4, S5, S6 ve S8'e hangi tip problemlerde esnek düşünebildikleri sorulmuştur. S8 dışında hepsi geometride daha esnek düşünebildiklerini ifade etmişlerdir. S8 ise bu soruya net bir cevap vermemiştir. Aşağıda öğretmen adaylarının ifadeleri yer almaktadır.

“hangi tip problemler? Daha çok geometrik”.(S1)

“hangi tip? Geometri sorularında genelde. Üçgenler olsun, çember olsun. Yani o tür şekilde. Yoksa günlük, normal problemlerde yani normal problem dediğim işlemsel problemlerde mesela çarpanlara ayırmalarda falan esnek düşünme söz konusu değildir herhalde. Ama işte dediğim gibi genelde geometriyi bir bütün olarak ele almaktan aldığımız zaman daha farklı şekilde düşünebiliriz yani. Çeşitli çözüm yolları düşünebiliriz. O yüzden...”(S2)

“...belli bir tipi yok ama genelde geometride falan oluyor yani” (S3).

“Belki geometri olabilir ama genelde o da çözünce hani her türlü yoldan zaten bulunur falan düşüncesiyle de çok fazla hani çözüm üretmiş olmayabilirim.”(S4)

“Geometri...çizmesi kolay olduğu için herhalde”(S5)

S6: geometriyi çok severim onda daha fazla esnek düşünürüm yani.

G: başka nedeni var mı hani geometride esnek düşünebilmenin nedeni?

S6: başka bir nedeni, sevmem yani işte böyle yeni fikirler üretmeyi seviyorum geometride, hani böyle özellikle şeylerde falan, hani yıldızlı sorular falan olur ya onları çözmeyi çok severim.

G: geometriden

S6:hıhı geometride. Hani öyle soruları severim. Hani ÖSS hazırlık kitaplarında bazen oluyor zor sorular. Onları çözmeyi severim yani

Öğretmen adayları geometride daha çok esnek düşünebildiklerini ifade ederken bu duruma gerekçe olarak geometrinin bir bütün olarak ele alınabileceğini, şekil çizmesinin kolaylığını, ve geometri problemlerini sevmeyi gösteren öğretmen adayları olmuştur. Bir öğretmen adayı ise geometride her türlü yoldan çözüm

olabileceğini belirterek bu durumun çok fazla esnek düşünme gerektirmediği düşüncesindedir.

b. II-B grubu problemlerin esnek düşünme becerisi açısından analizi:

II-B grubu problemlerde yapılan doğru çözüm sayıları ve birbirinden farklı doğru çözüm sayıları Tablo 4.6'da yer almaktadır. Tablo 4.5 ile Tablo 4.6 karşılaştırıldığında genel olarak tüm öğretmen adaylarının II-A grubu problemlerde daha çok sayıda farklı çözüm üretebildikleri görülmüştür. Buradan öğretmen adaylarının geometri problemlerinde cebirsel problemlere göre daha esnek düşünebildikleri söylenebilir. Bu da görüşme yapılan öğretmen adaylarının geometride daha esnek düşünebildikleri düşünceleri ile tutarlıdır. Bu durumun geometride daha çok çözüm üretmenin mümkün olmasından kaynaklandığı düşünülmüştür.

Tablo 4.6'da Problem 20 ve 21'de farklı çözüm üretme açısından esnek düşünen öğretmen adayı olmamıştır. Çünkü bu problemlerde tüm öğretmen adayları birden fazla çözüm yapamamıştır. Problem 17 ve 18'de yalnızca birer öğretmen adayı, Problem 13'te dört öğretmen adayı ikişer farklı çeşitte çözüm yapmıştır. Yalnızca Problem 19'da 2'den fazla çözüm çeşitliliğine sahip öğretmen adayları mevcuttur. Aslında temel olarak Problem 19'da yapılan çözümler birbirinden çok fazla farklı değildir. Tüm çözümler cebirsel incelemelerle yapılmıştır. Bu çözümlerin hepsinin benzer çözüm olduğunu iddia eden S9'un fikirlerinin aksine, bu çözümlerin her biri farklı çeşitte olarak düşünülmüştür. Böyle bir tercihin yapılmasında problem için bir tane doğru çözüm yapan öğretmen adayları ile hiç doğru çözüm yapamayan öğretmen adaylarının olması etkili olmuştur.

Yukarıdaki durumlar farklı çözüm üretme açısından esnek düşünme becerisinin problemden probleme değişebileceğinin göstermektedir. Çözüm üretmedeki esnek düşünme becerisi açısından ilk sırada olan öğretmen adayı S5'tir. S5 üç tane problemde farklı çeşitte çözüm üretebilmiştir. Problem 13, 17 ve 19'da S5 birden fazla çeşitte çözüm üretmiştir. S5 dışında yalnızca S2 ve S17, Problem 13 ve 19 için birden fazla çeşitte çözüm üretmişlerdir. S17'nin bir çözüm üretmediği

problemlerin olmasından dolayı S2'nin S17'den daha esnek olarak çözüm üretebildiği söylenebilir (Tablo 4.6).

Tablo 4.6 II- B Grubu Problemler için Yapılan Çözümlere Dair Sonuçlar

	Pr 13			Pr 17			Pr 18			Pr 19			Pr 20			Pr 21		
	ÇDS	DÇS	FÇS	ÇDS	DÇS	FÇS	ÇDS	DÇS	FÇS	ÇDS	DÇS	FÇS	ÇDS	DÇS	FÇS	ÇDS	DÇS	FÇS
S1	5	1	1	1	-	-	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1
S2	2	2	2	1	1	1	G	G	G	3	3	3	1	1	1	G	G	G
S3	3	1	1	1	-	-	G	G	G	3	-	-	1	-	-	1	-	-
S4	5	2	1	1	1	1	2	1	1	3	3	3	2	1	1	2	1	1
S5	3	2	2	2	2	2	4	3	1	4	4	4	3	1	1	2	1	1
S6	4	2	1	1	-	-	1	1	1	3	3	3	2	-	-	G	G	G
S7	4	1	1	2	-	-	2	1	1	3	1	1	3	1	1	G	G	G
S8	2	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1
S9	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1
S10	3	1	1	1	1	1	G	G	G	1	1	1	2	-	-	1	-	-
S11	2	1	1	G	G	G	2	1	1	3	2	2	1	-	-	G	G	G
S12	G	G	G	1	1	1	3	2	1	3	1	1	3	-	-	G	G	G
S13	3	2	1	2	1	1	2	-	-	2	1	1	2	-	-	2	-	-
S14	5	3	2	1	1	1	3	1	1	2	-	-	3	-	-	G	G	G
S15	3	1	1	1	-	-	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	-	-
S16	2	1	1	3	-	-	1	-	-	3	2	1	3	1	1	1	-	-
S17	3	2	2	G	G	G	1	-	-	2	2	2	G	G	G	2	-	-
S18	2	2	1	1	1	1	1	-	-	1	-	-	1	1	1	1	1	1
S19	2	1	1	1	1	1	2	-	-	1	-	-	1	-	-	1	1	1
S20	4	3	1	G	G	G	3	2	1	5	1	1	2	-	-	1	-	-
S21	2	1	1	1	-	-	1	-	-	1	-	-	1	1	1	1	-	-
S22	G	G	G	1	-	-	1	-	-	2	1	1	1	-	-	2	-	-

G: Öğretmen adayı problemin verildiği gün gelmedi

ÇDS: Çözüm denemelerinin sayısı

DÇS: Doğru çözümlerin sayısı

FÇS: Birbirinden farklı doğru çözümlerin sayısı

İlerleyen kısımlarda bu gruptaki problemler için yapılan çözümler daha detaylı incelenecektir.

Dokuzuncu haftada verilen Problem 13 “ $\sqrt{10} + \sqrt{17}$ ile $\sqrt{53}$ sayılarından hangisi daha büyüktür?” (Hekimoğlu, 2004) şekilde verilmiş bir problemdir. Bu problemin cebirsel ve geometrik olmak üzere iki farklı çeşitte çözümü vardır. Bu problem, tüm öğretmen adaylarının cebirsel yollarla kesinlikle çözebileceği türden bir problem olarak düşünülmüştür. Bu problemin sorulma amacı, geometrik çözümünün öğretmen adayları tarafından fark edilip edilmeyeceğini belirlemek olmuştur. Öğretmen adaylarının bu çözümü fark edebilmeleri, onların bu problemde esnek düşünebildiğini göstermiş olacaktır.

Problem 13 öğretmen adaylarına verildiğinde, onların sonucu bulmakla yetinmeyip farklı çözüm arayışına girmelerini sağlamak için bu problemin güzel bir çözümünün olduğu belirtilmiştir. Hatta bu çözümün bir 7. sınıf öğrencisi tarafından yapılmış olduğu da ifade edilmiştir. Öğretmen adaylarından bazıları bu çözümü bulabilmek için 7. sınıf öğrencisinin nasıl bir çözüm yapabileceğine dair fikir yürüterek çözümü bulmaya çalıştıklarını söylemişlerdir. Bu problemi çözmeye çalışan tüm öğretmen adaylarının en az iki tane çözüm denemesi yaptığı ve en az bir yoldan doğru çözüm yaptığı görülmüştür (EK 15). Yalnızca S2, S5, S14 ve S17 hem cebirsel hem de geometrik olmak üzere iki çeşit çözüm yapmıştır (Örnek olarak S2'nin günlüğü Şekil 4.73'tedir). Ancak bu çözüm, öğretmen adaylarına tam kare sayılara dikkat etmeleri konusunda ipucu verildikten sonra yapılabilmektedir. Diğer yandan öğretmen adaylarından S4'ün bu problemi çözmek amacıyla fonksiyonlardan yararlanma çabası, esnek düşünme çabası olarak yorumlanmıştır.

Problem 13'te tüm öğretmen adaylarının verilen sayıların karelerini karşılaştırmak yoluyla çözüme ulaşmışlardır (EK 15). İkinci çözümler için en çok tercih edilen yol, problemde verilen sayıları içine alan aralıkları belirlemek olmuştur. Ancak öğretmen adaylarının yarıya yakını bu çözüm yolunda mantıksal hata yapmışlardır (Şekil 4.74). Buradaki hata, belirlenmiş olan aralıklar ayrık değilken daha geniş aralıkta yer alan sayının büyük olduğu sonucunun çıkarılmasıdır. Buradaki mantıksal hatanın oluşmasında sezgilerin etkili olduğu düşünülmektedir.

Düşünme Süreçleri

$a = \sqrt{10} + \sqrt{17}$ Bu sayıların 17'den 1'den büyük.
 $b = \sqrt{53}$ kareleri aldıkça hangisinin
 büyük olduğunu anlayabiliriz.

$$a^2 = (\sqrt{10} + \sqrt{17})^2 = 10 + 2\sqrt{170} + 17 = 27 + 2\sqrt{170}$$

$$a^4 = (27 + 2\sqrt{170})^2 = 729 + 108\sqrt{170} + 680 = 1409 + 1404\sqrt{170} = 2813.1$$

$$b^4 = 2809$$

$$(\sqrt{10} + \sqrt{17})^4 - (\sqrt{53})^4 = 13.1 - 10 = 3.1$$

yani $2813.1 > 2809$
 $\sqrt{10} + \sqrt{17} > \sqrt{53}$

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1}$$

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1}$$

$$\sqrt{53} = \sqrt{49+4} = \sqrt{(7+4)^2+4} = \sqrt{(9+16+24)+4} = \sqrt{(16+9)+28}$$

$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} \stackrel{?}{=} \sqrt{(a+b)^2+4}$$

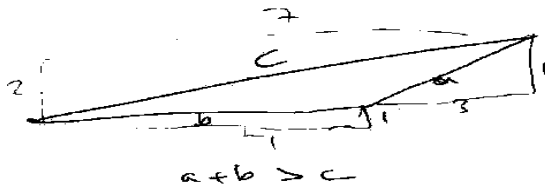
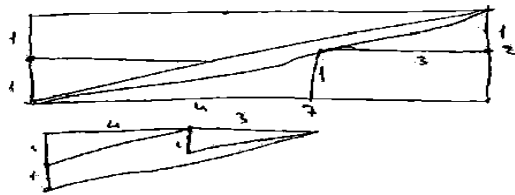
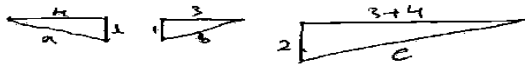
$$\sqrt{10} + \sqrt{17} \stackrel{?}{=} \sqrt{53}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \stackrel{?}{=} \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = \sqrt{(a^2+c^2)+(b^2+d^2)+2ac+2bd}$$

$10+17 > 26.5 \rightarrow$ Acaba böyle bir genelleme yapılabilir mi?

$$\sqrt{\frac{4^2+3^2}{2}} + \sqrt{\frac{3^2+4^2}{2}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{(4+3)^2+3^2}{2}} \quad \text{Üçgenler olabilir!!!}$$

$\rightarrow$ Bu uzunluklar Pisagor teoreminin
 uzunlukları arasındaki ilişkileri kullanarak
 üçgenler oluşturulabilir.

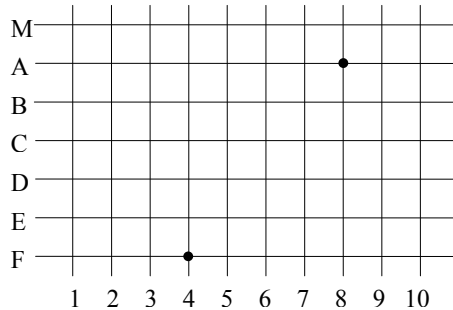


Şekil 4.73. S2'nin Problem 13 için yazdığı günlük

$\begin{aligned} & \sqrt{13} < \sqrt{10} < \sqrt{16} \\ & \sqrt{22\sqrt{10}} < 4 \quad (1) \\ & \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25} \\ & 4 < \sqrt{17} < 5 \quad (2) \\ & \sqrt{13} < \sqrt{33} < \sqrt{64} \\ & \sqrt{17} < \sqrt{33} < 8 \quad (3) \end{aligned}$ ① ile ② yi asal olarak toplarsak $7 < \sqrt{10} + \sqrt{17} < 9$ Bunun ③ ile karşılaştırarak $\sqrt{10} + \sqrt{17} < 9$ $\sqrt{53} < 8$ $\Rightarrow \sqrt{53} < \sqrt{10} + \sqrt{17} < 9$ diyebiliriz. O zaman $\sqrt{53}$ daha küçük. $(\sqrt{10} + \sqrt{17})^2 = 10 + 2\sqrt{170} + 17$ $= 27 + 2\sqrt{170}$ $13 = \sqrt{169} < \sqrt{170} \Rightarrow 2 \cdot 13 < 2 \cdot \sqrt{170}$ $\Rightarrow 2 \cdot 13 + 27 < (\sqrt{10} + \sqrt{17})^2$ $\Rightarrow 53 < (\sqrt{10} + \sqrt{17})^2$ $\Rightarrow \sqrt{53} < \sqrt{10} + \sqrt{17}$ $\Rightarrow \sqrt{10} + \sqrt{17}$ daha büyüktür	<table border="1"> <tr> <td>Akıcılık</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>Esneklik</td> <td>1</td> </tr> </table> Düşünme Süreçleri Önce verilen baklava kutusuna en yakın bulunan baklavalara karşılaştırdım. Sonra da diğer baklavalara karşılaştırdım. Sonra verilen toplamın karşısına aldım yine baklava ile karşılaştırdım. O da baklava ile en yakın baklavalara karşılaştırdım. O zaman sonuçta ulaştım.	Akıcılık	7	Esneklik	1
Akıcılık	7				
Esneklik	1				

Şekil 4.74. S16'nin Problem 13 için yazdığı günlük

II-B grubu problemleri arasında bir tane kombinatorik problem (Problem 17) vardır. Problem 17 şu şekildedir:



Şekilde bir şehrin haritası verilmiştir. Akın 4. cadde ile F'nin köşesinde oturuyor ve 8. cadde ile A'nın köşesinde oturan Betül'ü ziyarete gitmeyi planlıyor. Caddelerde trafik akışı sadece kuzey ve doğu istikametindedir. Buna göre Akın kaç değişik şekilde Betül'ü ziyaret edebilir (Posamentier ve Krulik, 1998).

Bu problemin en azından iki çözümünün olduğu biliniyordu. Problem 17 için iki farklı çözüm yapan yalnızca S5 olmuştur. Problem 17'yi çözememiş olan S6'nın problemi çözememe nedenlerinden biri, belki de tek nedeni, S6'nın benzer problemlerin çözüm yolunu daha önceden öğrenmiş ve Problem 17 için formülü hatırlamaya çalışmış olmasıdır. Bunu öğretmen adayı kendisi ile yapılan görüşmede dile getirmiştir. Öğretmen adayının bu durumla ilgili olarak söyledikleri “*önceden öğrenilmiş çözüm yoluna saplanma*” başlığı altında incelenmiştir. Öğretmen adayının bu problemde önceden öğrenmiş olduğu çözüm yoluna saplanmış ve dolayısıyla esnek düşünememiş olduğu tahmin edilmiştir.

Benzer bir şekilde, Problem 17'de sorulan yolların sayısını saymaya çalıştığını belirten S3, ne sistemli saymak için strateji geliştirebilmiş ne de farklı bir çözüm yolu bulabilmiştir. S3'ün aşağıdaki ifadesinden sistemli sayma stratejisine saplandığı için esnek düşünemediği sonucuna varılmıştır.

“O ulaşma sorusunda mesela yapamadım soruyu farklı düşünemedim yani ona odaklandım. O sistemli sayma dediniz ya daha demin, onunla cebelleştim bir ders boyunca, çıkamadım içinden. Başka bir şeye dönsen aklım hep orada kaldı yani yine. Ama orada çözümünü yapsam belki... yani farklı türden yapsam belki çözümü de bulurdum dershanedeki öğretmenimin verdiği. Öyle yani. Çözümünü bir yapsak aklımızda daha orijinal çözümler üretmeye daha çok çalışıyoruz yani.” (S3)

S6 ve S3'üne benzer bir durum S4'te de karşılaşılmıştır. S4 görüşmede bu problem ile ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

S4: Demek ki. Mesela hocam, şu, bugünkü soru, ben ÖSS'ye hazırlanırken de böyle sorulardan hiç hoşlanmazdım. Yani, oturup sayıyorum çoğu kez, bunda da o yöntemi denemeye çalıştım, ama bir şey elde edemedim açıkçası. Yine oturup saymak kalıyor sanki. Ya mesela, az önce de düşündüm de, mesela, tek tek noktalar üzerinde, hani noktaları belirledim. Eee, her nokta için şöyle bir yöntem belirledim. Buradaki noktaları ele alırım, ya buraya gidecektir, ya buraya. Buraya gittiğinde ya buraya, ya buraya. Hani, yine tek tek saymak oluyor, ama en azından bir şema haline getirdiğinde, eee, hani düzenli gözüküyor, en azından daha sağlıklı bir sonuç olur.

G: Ee tabi o da bir çözüm yolu.

S4: de, uzun bir yöntem yine.

G: Onu sistemli bir şekilde kullanabilirsin.

S4: Bunda esnek olacağımı hiç düşünmüyorum bu soruda.

S4 problemde sorulan yolların sayısını saymaktan başka bir çözüm geliştiremediğini açıkça belirtmekle birlikte, bu tip problemlerden hoşlanmadığını ve hatta, bu problemde esnek olamayacağını düşünmüştür. Bu durum, problemden hoşlanmama, esnek düşünemeyeceği konusunda önyargılı olma gibi davranışların esnek düşünme becerisini olumsuz yönde etkileyebileceği sonucu düşündürmektedir.

Derste yapılan orijinallikle ilgili alıştırılardan hemen sonra verilmiş olan Problem 18 şu şekildedir:

“ $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ tamsayılar ve $b_1, b_2, \dots, b_{17}$ bu sayıların başka bir sıralanışı olsun. $S = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{17} - b_{17})$ sayısının bir çift sayı olduğunu gösteriniz (Karakaş ve Aliyev, 2003b).”

Problem 18’in en az iki çözümünün olduğu biliniyordu. Bu çözümlerden biri problemin az çok belli ettiği çözüm diğeri ise farklı bakış açısı benimseyerek yapılabilecek bir çözümdür. Bu nedenle, öğretmen adaylarından bu problem için orijinal bir çözüm araştırmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarından yalnızca S15, problemin farklı bakış açısı benimsenerek yapılabilecek olan çözümünü fark etmiştir. S15, bu problem için üç çözüm yapmıştır. Bunlardan ikisi aslında aynı sayılabilecek çözümlerdir. Yalnızca ifade edilişlerinde biraz farklılık vardır. Üçüncü çözümü ise sınıfta S15 dışında kimsenin yapamadığı orijinal bir çözümdü (Şekil 4.75). S15, yapmış olduğu bu çözümünü sınıftaki diğer öğretmen adayları ile paylaşmıştır.

S5, S12, S15 ve S20, Problem 18 için birden fazla çözüm yapan öğretmen adaylarıdır (Tablo 4.6). Bu problemde en çok sayıda çözüm denemesi S5’e aittir. S5, 4 denemenin 3’ünü doğru bir şekilde sonuca ulaştırmıştır ancak bu üç çözüm aslında birbirine çok benzer nitelikte çözümlerdir. Çözümlerin temelindeki mantık aynı olup yalnızca ifade edilişlerinde biraz farklılık vardır. S5’in yanlış olan diğer çözümde tümevarım yöntemini kullanmaya çalıştığı görülmüştür. S5’in birbirine benzer olan bu üç çözümü günlüğüne yazması burada da onun esnek olmaktan ziyade akıcı düşündüğünü göstermektedir.

Görüş Kabul edelim ki $S = (a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2) \dots (a_{17} - b_{17})$ çarpım.

bir Tek sayı olsun öyleyse $a_1 - b_1 = T, a_2 - b_2 = T, \dots$
 $a_{17} - b_{17} = T$ olmalıdır. Öyleyse

$$\left. \begin{array}{l} a_1 - b_1 = T \\ a_2 - b_2 = T \\ \vdots \\ a_{17} - b_{17} = T \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{olmak üzere taraf tarafa toplanırsa} \\ (a_1 + a_2 + \dots + a_{17}) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{17}) = T \text{ olur.} \end{array}$$

$b_1, b_2, \dots, b_{17}$ sayıları $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ sayılarının bir sıralaması
 old. dğ bu sayılar birbirine eşittir yani;

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{17}) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{17}) = 0 = C_1$$

Bu durum bir çelişkidir. Öyleyse kabulümüz
 yanlıştır ve S bir çift sayıdır.

Şekil 4.75. S15'in Problem 18 için yazdığı günlükten alıntı

Problem 18'i çözmek için epeyce uğraşmış olan S4, çözümü net bir şekilde ifade edememiştir (Şekil 4.76). Öğretmen adayı, kendisi ile yapılan görüşmede S15'in çözümünü "... daha güzel, hani daha basit, daha böyle ikna edici, daha somut" şeklinde ifade etmiştir:

S4: ...Mmm, mesela arkadaşın taraf tarafa topladığı sorunun ikinci bir cevabı vardı, ben o cevabı vermiştim. Çok da açık net gözüküyor hani.

G: Teklik çiftlik sorusu muydu o?

S4: Hı hı, S sayısı vardı 17 tane sayı, sıralaması farklı oluyor. Mmm, bazen de tesadüfler belki etkili oluyor benim için, mesela, alt alta yazsaydım aklıma gelebilirdi, ama ben yan yana ifade etmiştim onları, yani, onu görmek bazen de yani tesadüf mü oluyor bu durumda? Öyle oluyor.

G: Evet, biraz şans da lazım diyorsun?

S4: Ya, orada genelde ben hep, şey, 17 tane parantez var, işte bunlar, s tek mi çift miydi, tek olsaydı demiştik sanırım.

G: Çift olduğunu gösteriniz diyordu.

S4:Eee, çelişki yöntemiyle, işte hani, bu tektir, bu tektir, hepsi tek olmak zorunda, o zaman direkt şeylere takılmıştım, oradaki a'lara, b'lere takılmıştım, yani o zaman bu tekse buradaki çıkan sayılar, işte biri tek, biri çift olmak zorunda diye düşünüyordum, yani direkt ona takıldım ben. Her bir parantez için.

G: Tek tek düşünüyorsun?

S4:Hı hı, tek tek düşünüyorum.

G:Bütün durumları?

S4:Bu da, bu sayılar da, hepsi yani aynı olduğuna göre, bir sıralama farkı olduğuna göre, bu olmuyor o zaman, yani, tekle çift sayısı eşit olmak zorunda, ama orada tek sayıda sayı var, yani, 17 tane şeklinde cevap vermiştim.

G: Bu doğru bir cevap aslında.

S4:Doğru bir cevap da, hani diğer cevabı düşündüğümde daha güzel, hani, daha basit, daha böyle ikna edici, daha somut.

S4'ün çözümündeki son aşama biraz sezgisel kalmıştır. Aslında sezgileri ile doğru olduğunu fark ettiği durumu formal açıdan kesin bir şekilde ifade edememiştir ve öğretmen adayı “Çok da açık net gözüküyor hani” cümlesi ile bundan duyduğu rahatsızlığı dile getirmiştir (Şekil 4.76). S15'in çözümünü kendi çözümüne göre daha ikna edici bulması onun mantıksal düşünmeye daha çok önem verdiğini göstermektedir.

$$S = \prod_{i=1}^n (a_i - b_i) \quad a_i \neq b_i$$

Kabul edelim ki S tek sayıdır. O halde S 'nin çarpanları $(a_i - b_i)$ o'dokların göre her $(a_i - b_i)$ çarpanı tek sayı olmalı. Zaten $a_i - b_i$ her iki sayı da tek ise $a_i - b_i$ de tek olur. Aynı şekilde a_i ve b_i her ikisi de çift sayı olmalı. Zaten a_i ve b_i her ikisi de çift sayı olursa $a_i - b_i$ de çift olur. O halde S çift olur. Bu ise S 'nin tek olmasıyla çelişir. O halde S çift değildir. S bir çift sayıdır.

Şekil 4.76. S4'ün Problem 18 için yazdığı günlükten alıntı

S4, S15'in bu çözümü yapabilmesini problemdeki S sayısının çarpım durumundaki terimlerini alt alta yazmış olmasına bağlamaktadır. Eğer kendisi de bu terimleri alt alta yazmış olsaydı bu çözümün aklına gelebileceğini belirtmektedir. Gerçekten S15 bu terimleri alt alta yazmakla alternatif çözümü görme şansını artırmıştır. Ancak, bu terimleri alt alta yazdığı halde, orijinal çözümü fark edemeyen öğretmen adayları da olmuştur (Şekil 4.77). Buradaki durum, çözümün nasıl ifade edildiğinin esnek düşünme açısından önemli olabileceğini düşündürmektedir.

Fikirlerin yazılış şekli daha sonraki düşüncelerin ortaya çıkmasını kolaylaştıracağı ya da zorlaştıracağı için esnek düşünmeyi etkileyebilir.

★ Kabul edelim ki 3 tek olsun. O zaman
 $a_i - b_i \rightarrow$ Tek olur. Yani ya a_i tek
 b_i çift ya da a_i çift b_i tek olur.
 Ama 17 tane sayı olduğundan
 her zaman bu mümkün değildir.
 Mesela;
 $a_1 - b_1 \rightarrow$ tek
 $a_2 - b_2 \rightarrow$ tek
 $a_3 - b_3 \rightarrow$ tek
 $a_{17} - b_{17} \rightarrow$ tek
 b_1 çift $\rightarrow$ tek
 b_2 çift $\rightarrow$ tek
 b_8 çift $\rightarrow$ tek
 b_9 tek $\rightarrow$ tek
 b_{16} çift $\rightarrow$ tek
 O zaman $\{a_1, \dots, a_{17}\}$ a'ların farklı sıralanışı
 olduğundan $\{b_1, \dots, b_{17}\}$ arasında 8 tane
 tek olmalı ve $\{a_9, \dots, a_{17}\}$ arasında
 8 tane çift olmalı. Genelliği bozmadan
 $\{a_9, \dots, a_{17}\}$ çift olsun $\{b_1, \dots, b_{17}\}$
 tek olsun. O zaman devam edelim.
 Gözde a_{17} ve b_{17} kaldı.
 Eğer a_{17} çift ise b_{17} de çift
 olur tek ise b_{17} de tek
 olacak $\therefore b_{17} - a_{17}$ çift sayı
 $\therefore 5$ çift sayı.

Şekil 4.77. S14'ün Problem 18 için yazdığı günlükten alıntı

Problem 18'de doğru çözüm yapan ve yapamayan öğretmen adaylarının stratejileri incelendiğinde her iki grupta da özel değer incelemesi, özel durum incelemesi ve genel duruma yönelik ispat yapmaya çalışan öğretmen adaylarının olduğu görülmüştür (EK 12). Özel durum ya da özel değer incelemesi yapmadan direkt olarak genel duruma yönelik ispat yapabilen öğretmen adayları (S1, S5, S8, S9) çözümlerini net ve sade bir şekilde ifade etmişlerdir (Örneğin; Şekil 4.78, Şekil 4.79).

S'nin çift sayı olması için
 $(a_1-b_1) - (a_{12}-b_{12})$ biçimindeki
 çarpanlarından en az biri
 çift sayı olmalıdır.

Esneklik

S'nin $(a_1-b_1) - (a_{12}-b_{12})$ biçimindeki çarpanlarının
 hepsi tek sayı olsun. O zaman (a_1-b_1)
 biçimindeki biçimindeki S'nin çarpanları
 $(T-G)$ ya da $(G-T)$ biçiminde olmalı. (T: Tek sayı, G: Çift sayı)
 S'nin 17 tane çarpanı var ve bu çarpanların
 hepsinin birden $(G-T)$ ya da $(T-G)$ biçiminde
 olması için $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ sıralamasındaki tek sayılar ve
 çift sayılar eşit olmalıdır. Oğların sayısı 17 old.
 dan buna göre değil. Yani $(T-G)$ ya da $(G-T)$ olacak
 şekilde bir sayıları eşleştirdiğimizde geriye
 $(T-T)$ ya da $(G-G)$ olacak şekilde en az bir
 sayı kalır ve bu sayı çifttir. Dolayısıyla
 S de çift dur.

Şekil 4.78. S9'un Problem 18 için yazdığı günlük

$T \oplus T = T$ $T \oplus G = G$ $G \oplus G = G$ ald. da bu sayıların hepsi Tek olmalıdır. $T \oplus T = G$ $G \oplus G = G$ $T \oplus G = T$ dir. Örneğin $a = b = 2$ ise $a + b = 4$ ile sıralanmaktadır. $(a_1 - b_1) = T$ olar. Örneğin $a_1 = T$ ise $b_1 = G$ olmalı yani Tek ve çift sayı eşit olmalı ancak 17 tane tane ald. da 8 Tek 8 Çift olsa ve Tek lerden çift ler olsa 8 sayı kalır bu Tek ise $T \oplus T = G$ olur $T \oplus T \oplus T \oplus T \oplus G = G$ olur sayı çift dir. Çift ise $G \oplus G$ çift dir. $T \oplus T \oplus T \oplus T \oplus T \oplus G = G$ olur sayı çift dir. $S = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) \dots (a_n - b_n)$ bu sayı tek olur. Örneğin $a_1 - b_1 = 2$ dir. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ Örneğin ya a_i tek ; b_i çift a_i çift ; b_i tek yani $a_i - b_i$ dir ve Tek ve çift sayı eşittir. yani toplam 17 tek 17 çift sayı var Örneğin bu Tek lerin sayısı $a_1 - a_{17}$ diğer sayı da $b_1 - b_{17}$ ise diğer eşittir. 17 tane ald. da. Gelişir yani 8 çift dir. $n = 1$ olan bir tek sayı olur. $a_1 - a_{17}$ olan 17 tane sayı sıralanır $(b_1 - b_{17})$ olur. $S = (a_1 - b_1) \dots (a_n - b_n)$ olur. n=1 için $a_1 = b_1$ olur. $S = (a_1 - b_1) = 0$ çift $n = 2$ için ifade diğer olur. $S = (a_1 - b_1) \dots (a_{n-2} - b_{n-2})$ çift olur. $b_1 - b_{n-2} \quad a_1 - a_{n-2}$ her hangi bir sıralanmış olursa. $(a_1 - b_1) \dots (a_{n-2} - b_{n-2}) (a_n - b_n) = (a_n - b_n) \cdot 0$ dir. çift	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center; padding: 5px;">Akıcılık</td> <td style="width: 50%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">Esneklik</td> <td></td> </tr> </table> Düşünme Süreçleri	Akıcılık		Esneklik	
Akıcılık					
Esneklik					

Şekil 4.79. S5'in Problem 18 için yazdığı günlük

Problem 19 için yapılan üç çözüm sınıfta öğretmen adayları ile paylaşılmıştır. S9, bu üç çözümün aynı mantıkla yapıldığını kendisi ile yapılan görüşmede dile getirmiştir. Bu problem için yaptığı iki çözümün yanında, arkadaşları tarafından yapılmış olan diğer çözümü de fark ettiğini, fakat benzer olduklarını düşündüğü için yazmaya gerek duymadığını da belirtmiştir. Bu durum, öğretmen adayının bakış açısını çok daha fazla değiştirmeyi gerektirecek çözümler araştırdığını göstermektedir. Aslında bu üç çözüm cebirsel işlemler içermesi açısından aynıdır. Fakat yapılan işlemler farklıdır. Ayrıca, bu üç çözüm de herkes tarafından düşünülebilecek çözümlerdir. S9'un bunların farklı çözüm olmadıkları şeklindeki itirazının da buradan kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu problemi doğru bir şekilde çözemeyen ya da yalnızca bir yoldan çözen öğretmen adaylarının da olması, bu çözümlerin hepsini de yapabilen öğretmen adaylarının diğerlerine göre daha esnek düşünebildiği sonucunu düşündürmüştür.

Problem 19'da hiç doğru çözüm yapamayan öğretmen adayları da vardır (EK16). Bunlardan S3'ün düşüncesini tamsayılar ile kısıtlamış ve uygun temsil seçememiş olduğu 4.2'de belirtilmiştir (Şekil 4.81). Öğretmen adayı üç çözüm denemesi yapmış fakat hiçbirinde başarılı olamamıştır. Son denemesinde parabollerden yararlanmaya çalışmış olması, S3'ün esnek düşünmeye çalıştığını göstermektedir.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (tek) \quad x_1 = 2k+1$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (tek) \quad x_2 = 2l+1 \quad \text{o.s. } k, l \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 + x_2 = 2(k+l+1)$$

$$x_1 \cdot x_2 = (2k+1)(2l+1)$$

$$x_1 = 2k+2l+2 - x_2 \quad x_1 \cdot x_2 = 4kl + 2(k+l) + 1$$

$$(2k+2l+2 - x_2) \cdot x_2 = 4kl + 2(k+l) + 1$$

$$2k \cdot x_2 + 2l \cdot x_2 + 2x_2 - x_2^2 = 4kl + 2k + 2l + 1$$

$$2k \cdot (2l+1) + 2l \cdot (2l+1) + 2 \cdot (2l+1) - (2l+1)^2 =$$

$$4kl + 2k + 4l + 2l + 2 - 4l^2 - 4l - 1 =$$

$$(2k+1)x^2 + (2l+1)x + 2m+1 = 0$$

$$2kx^2 + x^2 + 2lx + x + 2m+1 = 0$$

$$2kx^2 + 2lx + 2m + x^2 + x + 1 = 0$$

Varsayalım ki a, b, c tek tamsayı ve $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi rasyonel köke olsun. $x_1 = \frac{k_1}{k_2}$ ve $x_2 = \frac{k_3}{k_4}$ olsun.

$$a \cdot \frac{k_1^2}{k_2^2} + b \cdot \frac{k_1}{k_2} + c = 0$$

$$(2k+1) \frac{k_1^2}{k_2^2} + (2l+1) \frac{k_1}{k_2} + 2m+1 = 0$$

$$\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_3}{k_4} + 2k$$

$$\frac{k_1 k_4 + k_3 k_2}{k_2 k_4} \quad \frac{c_1 k_2 + c_2 k_4}{k_2 k_4}$$

Şekil 4.81. S3'ün Problem 19 için yazdığı günlük

$$ax^2+bx+c=0 \quad a, b, c \text{ tek sayılar. } k, l, m \in \mathbb{Z}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $2k+1 \quad 2l+1 \quad 2m+1$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (2l+1)^2 - 4(2k+1)(2m+1) \\ &= 4l^2 + 4l + 1 - 4(4km + 2k + 2m + 1) \\ &= 4l^2 + 4l + 1 - 16km - 8k - 8m - 4 \\ \Delta &= 4l^2 + 4l - 16km - 8k - 8m - 3 \\ &= (2l+1)^2 - (16km + 8k + 8m + 4) = (2l+1)^2 - 8m(2k+1) - 4(2m+1) \end{aligned}$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a, b > 0$$

$$2ax+b=0$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

$$a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

$$\frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c = 0$$

$$\frac{-b^2}{4a} + c = 0$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = 0$$

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\frac{2ap+b=0}{2ak+b=0} \quad \begin{matrix} f'(p) \\ f'(k) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (2l+1)^2 - 8m(2k+1) - 4(2m+1) \\ &= T^2 - 8 \cdot T - 4 \cdot T \end{aligned}$$

$$a \cdot \frac{k_1^2}{k_1^2} + b \cdot \frac{k_1}{k_1} + c = 0$$

$$\frac{a \cdot k_1^2}{k_1^2} + \frac{b \cdot k_1}{k_1} + \frac{c \cdot k_1^2}{k_1^2} = 0$$

Şekil 4.81. S3'ün Problem 19 için yazdığı günlük (devam)

Problem 21'de yedi öğretmen adayı doğru çözüm yapmıştır, dokuz öğretmen adayının çözümü hatalıdır diğer öğretmen adayları ise bu problemle karşılaşmamışlardır. Doğru çözüm yapan öğretmen adaylarının hepsi de yalnızca bir yoldan çözüm yapmıştır. Doğru çözümler incelendiğinde çözümlerin geometrik ve cebirsel olarak iki kategoriye ayrılabilir. Geometrik çözümü S9

tarafından yapılmış ve aslında tam olarak mantıksal bir ispat içermemektedir. S9'un sezgisel temelli çözümü, verilen durumu doğru ailesi ile ilişkilendirmesi açısından oldukça ilginçtir (Şekil 4.82). Öğretmen adayı ile yapılan görüşmede bu çözümü hakkında konuşulmuştur:

G: Peki son hafta çözdüğümüz bir soru vardı, hani sen farklı bir şekilde çözmüştün?

S9: Çarpımların ikisini sağlayacak şekilde çözüm bulmaya çalıştım.

G: Ama yani o şekilde düşünen başka kimse yoktu mesela. Yani, senin ilk aklına gelen çözüm o muydu?

S9: Soru nasıldı? Hatırlamıyorum.

G: $(2a+b)(2b+a)=2^c$. Bu a , b , c sayılarını belirleyiniz diyor. Kaç tane var, sayısını soruyordu.

S9: Hocam, önce işte aralarında bir bağıntı falan var mı, ilk başta çözüm varmış gibi düşündüm, daha sonra, işte, bir yere kadar geldim, işte, bir iki tane eşitlik bulmuştum. Sonra baktım, çözüm yok. Çözümün olmadığını gördüm de, hani, net denklemle ifade edemedim. Daha sonra ona göre düşünmeye başladım. Çözüm yokmuş gibi düşünmeye, ondan sonra.

G: Yani, öncelikle.

S9: Önce çözümün olmadığını gördüm, yani ilk başta.

G: Fark ettin, ondan sonra o tarafa yöneldin.

S9: İşte, o tarafı düşündüm, acaba nerden çıkabilir falan diye. Sonra iki tane eşitlik olduğunu iki tane eşitliğin çarpımı şeklinde olduğunu gördüm. Daha sonra direkt yani bir de bunlar denklem şeklinde, hani doğrusal denklemler falan. Sonra direkt çizmek geldi aklıma çizeyim bakalım ne çıkıyor falan diye. Oradan da zorladı çizirken bayağı çizgisiz kağıt falan böyle, grafikler karıştı.

G: Peki bu derste değil de başka bir zaman o soruyu çözüyor olsaydın yine aynı çözüm yolunu düşünür müydün?

S9: Hocam o zaten normal çözdüğüm yöntemdi. Yani başka yoldan çözemedim soruyu zaten. Mecburen onu yazacaktım.

G: İlk aklına gelen

S9: İlk başta soruyu çöz... Baktım şöyle bir hani genelde öyle yaparım hani çözüm yolunu bulmaya şey doğru çözüm hangisi diye bulmaya çalışırım.

G: Onu nasıl yaparsın? Yani Ne yaparsın?

S9: Bakıyorum şöyle değer falan veriyorum bir şekilde çıkıyor yani ÖSS mantığı. Çözüm olmadığını gördüm orada geriye sadece anlatması kaldı onu. Onu da hangi yöntemle yani nasıl bir şekilde anlatabilirim diye düşündüm.

G: Evet

S9: Çözüm olmadığı da hemen çıktı yani. Bir iki tane iş..yani

G: Hangi değerler verdin ne denedin?

S9: Şey bir kere birileri çift çıkmıştı. Sayıların ikisi çift mi çıkıyordu ne onu bulmuştum herhalde. Hem eşit mi çıkmıştı yo çift çıkmıştı ve bir şey daha bulmuştum ya. Ne bulmuştum hatırlamıyorum ki. Bir şey daha bulmuştum da sonra düşündüm oradan a 'yla b 'nin birbirine eşit ya pozitifken a 'yla

b'nin birbirine eşit olması gerekiyor gibi ve denedim ki zaten öyle olmak zorunda çıkıyor falan. Baktım da sonuç çıkmıyor, dedim herhalde bunun çözümü yok. Sonra negatif-pozitif oldu mu çözüm çıkıyor zaten direkt görülüyor. A pozitif olduğu için baktım çözüm yok yani. Zaten mantıken de çözümünün olmaması gerekiyor sonsuz tane çözümü olur zaten olursa. ya bir tane çözüm bile olsa direkt sonsuza gider orada. Hani

G: Belli bir k ...

S9: Ya bir tane çözüm olduğu zaman genel çözüm olacak ya bir tane hani direkt a sayısı b sayısı değil de genel çözüm çıkacak ordan sonsuz yani yerine koyduğumuz zaman bir sürü çözüm..

Kısaca özetlemek gerekirse S9, öncelikle $(2a+b)(2b+a)=2^c$ eşitliği ile ilgili çıkarımlar yapmıştır. Sezgisel olarak bu eşitliği sağlayan sayıların olamayacağını fark etmiş ve böyle sayıların olamayacağını nasıl gösterebileceğini belirlemeye çalışmıştır. Fakat bu durumu formal yollarla ispatlayamamıştır. Günlüğüne yazdığı $2a+b=2^x$ ve $2b+a=2^y$ eşitliklerinin birlikte sağlanması gerektiğini düşünmüş ve bu düşünceden hareketle $2x+y=2^k$ ve $2y+x=2^l$ doğru ailelerinin kesişimlerinin, aradığı çözüm olacağını fark etmiştir. Dolayısıyla, bu doğruların grafiklerini çizerek inceleme yapmıştır. Ancak çözümü yazdığı kağıt çizgisiz olduğu için grafik karışmıştır (Şekil 4.82). Buna rağmen, doğruların $x=y$ doğrusu üzerinde kesiştiğini fark etmiştir. Öğretmen adayı önceki incelemelerinde $a=b$ durumunun olamayacağını belirlediği için x ile y 'nin (a ile b 'nin) birbirlerine eşit olamayacağını belirterek çözümünü tamamlamıştır. Günlüğünde kesişimlerin 1. ve 3. bölgede olduğunu belirtmiş, fakat bu noktada hata yapmıştır. Çizdiği grafikte kesişimin 1. bölgede olacağı görülmekle beraber 3. bölgede kesişim olacağını neye dayanarak yazdığı anlaşılamamıştır.

$$(2a+b)(2b+a)=2^c$$

a ile b çift sayıdır.

$$(2a+b)=2^x$$

$$(2b+a)=2^y$$

$$|a|=|b| \text{ dir.}$$

$$a=b \vee a=-b$$

$a=b$ olsun.

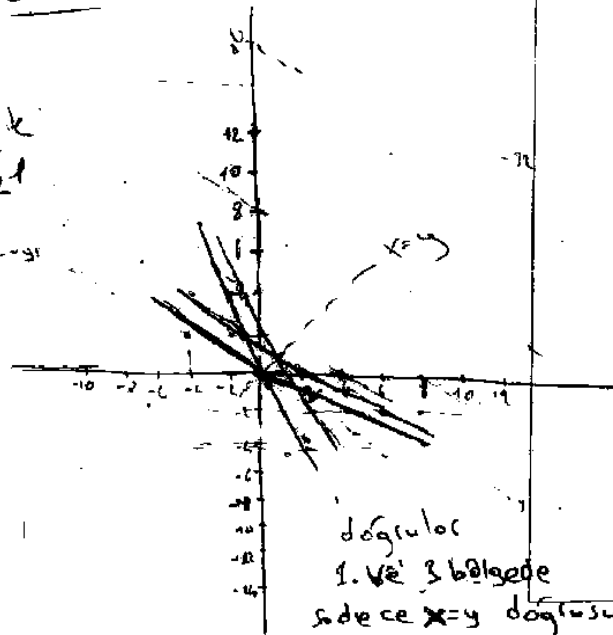
$$(3a)(3a)=2^c$$

$$9a^2=2^c \quad \text{Bununla da değil.}$$

$$a \text{ kare ise } a=-b$$

$$2x+y=2^k$$

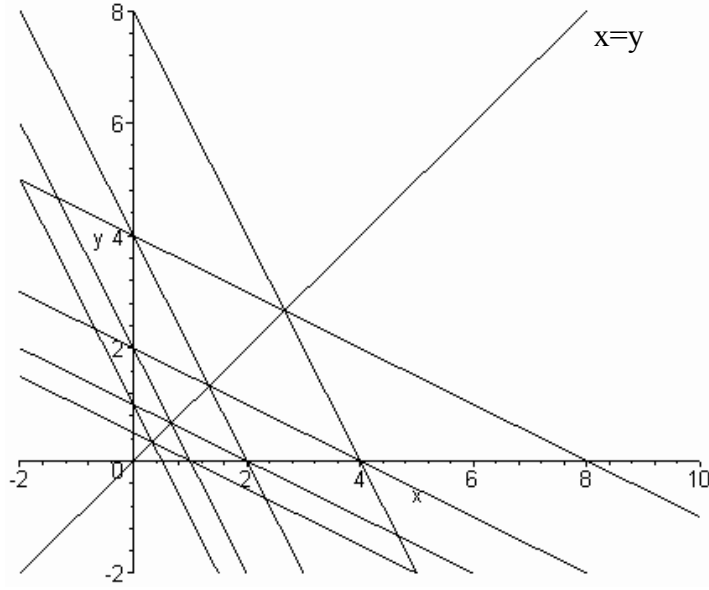
$$x+2y=2^l$$



doğrular
1. ve 3 bölgede
sadece $x=y$ doğrusu üzerinde kesişiyor
ama $x=y$ olamıyor çünkü bu noktada

Şekil 4.82. S9'un Problem 21 için yazdığı günlük

S9'un çizmeye çalıştığı grafikler $k=0,1,2,3$ ve $l=0,1,2,3$ değerleri için Maple programında çizilmiştir (Şekil 4.83). Grafikte doğruların 1., 2. ve 4. bölgeler ve eksenler üzerinde kesiştiği görülmektedir. Başlangıçta verilmiş olan eşitlikteki a , b ve c sayılarının pozitif tamsayı olmasından dolayı ilgilenilen bölge yalnızca 1. bölgedir. Öğretmen adayının fark ettiği gibi bu doğrular 1. bölgede yalnızca $x=y$ doğrusu üzerinde kesişmektedirler. Bu durumda ise çelişki ortaya çıkmaktadır.



Şekil 4.83. Maple programında çizilen S9'un grafiği

S9'un bu çözümünün mantıksal olarak doğruluğu kesin olmasa da $2a+b=2^x$ ve $2b+a=2^y$ eşitlikleri ile doğru denklemlerini ilişkilendirmesi onun bu problemde esnek düşündüğünü göstermektedir.

Problem 21'de sonucu fark eden öğretmen adaylarının (S1, S4, S5, S8, S9, S18, S19) hepsi de önce basit fikir üreterek (eşitlikten çıkarımlar yaparak) çözüme başlamışlardır (EK 14). Sonuca ulaşamayanlardan ise yalnızca S16 durumla ilgili çıkarım yaparak çözüme başlamış fakat son bulduğu durumu yorumlayamamıştır. Algoritmik işlemlerle çözüme başlayıp bu seçimlerinden vazgeçen öğretmen adayları da basit fikir üretmişler fakat sonuca ulaşamamışlardır. Doğru çözüm yapamayan öğretmen adaylarından çoğu önce eşitliği düzenlemek için algoritmik işlemlere başvurmuşlardır. Fakat bu zor yolu tercih etmeleri, eşitlikle ilgili fikir üretmede işleri daha da zorlaştırmıştır. Bazı öğretmen adayları bu çözüm yolundan vazgeçip başlangıçtaki eşitliğe geri dönmüş ve eşitlikten çıkarım yapmışlardır (basit fikir üretmişlerdir). S10 ve S21 ise aynı çözüm yoluna sadık kalarak incelemesi daha zor ifadeler elde etmişlerdir. Karmaşık hal alan ifadeleri özel durum incelemesi ile basitleştirmeye çalışmışlar fakat genel durumla ilgili bir sonuca ulaşamamışlardır. Bu öğretmen adayları ilk başladıkları çözüm yoluna saplanmışlar ve esnek

0 halde $c \neq k$ dir.

① $c > k$ olsun $c-k > 0$.

$$(a+b)^2 = \frac{2^c}{2} - \frac{2^k}{2}$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = \frac{2^k}{2} \cdot (2^{c-k} - 1)$$

• $k=0$ olsun.

$$(a+b)^2 = \frac{2^0}{2} \cdot (2^{c-0} - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2^c - 1)$$

$$= \frac{2^c}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2^c - 1}{2}$$

$$(a+b)^2 = \frac{2^c - 1}{2}$$

• $a+b=0$ olsun $\Rightarrow \frac{2^c - 1}{2} = 0 \Rightarrow 2^c - 1 = 0 \Rightarrow 2^c = 1 \Rightarrow c=0$

$$a = -b$$

$a+b > 0$ dir. $\Rightarrow a+b=1$ olsun

$$(a+b)^2 = \frac{2^c - 1}{2} \Rightarrow$$

$$1 = \frac{2^c - 1}{2}$$

$$2 = 2^c - 1$$

$$3 = 2^c$$

$$a+b=2 \Rightarrow (a+b)^2 = \frac{2^c - 1}{2}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{2^c - 1}{2} \quad 8 = 2^c - 1 \Rightarrow 9 = 2^c$$

• $a+b$ çift olamaz

hiçbir çift sayının karesinin 2 katının 1 fazlası 2^c şeklinde ifade edilemez. (tek sayı olamaz)

② $k > 0$ olsun $k-c > 0$

$$(a+b)^2 = \frac{2^c}{2} - \frac{2^k}{2}$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = \frac{2^c}{2} \cdot (1 - 2^{k-c})$$

$\therefore 1 - 2^{k-c} \in \mathbb{Z}^-$ dir.

$$(a+b)^2 = \frac{2^c}{2} \cdot (1 - 2^{k-c})$$

dir.

$$4 \cdot 2 + 1 = 2^c$$

$$7 \cdot 2 + 1 = 2^c$$

Sonuç olarak, bu bölümde öğretmen adaylarının günlükleri esnek düşünme becerileri açısından analiz edilmiştir. I. grup problemlerde fikir çeşitliliği açısından II. grup problemlerde ise çözüm çeşitliliği açısından inceleme yapılmıştır. Günlükler karşılaştırmalar yapılarak incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda tespit edilen bulgular aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Sezgisel düşünmeye sahip öğretmen adayları mantıksal düşünmeye sahip öğretmen adaylarına göre daha fazla esnek düşünme eğiliminde gibi görünmektedir.
- Akıcı düşünme sayesinde birbirini çağrıştıran birçok fikrin üretilmesi, bu fikirlerin çeşitliliğinin de artmasına yani esnek düşünmeye yol açabilmektedir. Bu durum, akıcı düşünmenin esnek düşünmeyi besleyebileceği şeklinde yorumlanabilir.
- Esnek düşünme çabası esnek düşünebilmek için tek başına yeterli değildir.
- Esnek düşünme becerisi farklı problem tiplerinde farklı seviyelerde olabilir.
- Esnek düşünme becerisi problemden probleme değişkenlik gösterebilir.
- Esnek düşünme becerisi problemin içerdiği konudan konuya (alandan alana) değişkenlik gösterebilir.

Esnek düşünmeyi negatif yönde etkileyebilecek alışkanlıklar :

- Farklı bir yoldan problemin çözümü için gayret sarf etmek yerine sadece soruyu çözmek için odaklanmak, diğer bir deyişle, sonuca odaklı problem çözme davranışına sahip olmak,
- Çabuk pes etmek
- Kendine güvenmemek
- Esnek olamayacağı önyargısına sahip olmak,
- Esnek düşünme konusunda kabiliyet sahibi olmadığına inanmak,
- Esnek düşünme konusunda yeterli deneyime sahip olmamak,
- Düşünülenleri uygun şekilde ifade etmemek
- Önceden öğrenilmiş çözüm yolunu tercih etmek,

Esnek düşünememe nedenleri arasında olabilecek davranışlar “çözüm bulma güçlüğü nedenleri” başlığı altında yapılan incelemelere de dayanarak şu şekilde belirlenmiştir:

- İşlemlere saplanmak
- Önce öğrenilmiş çözüme saplanmak,
- Belli bir problem çözme stratejisine saplanmak
- Düşünmeyi zorlaştıracı tercihler yapmak
- Düşünmeyi zorlaştıracı temsiller ya da semboller seçmek
- İlk yapılan çözüme saplanmak

4.3.3. Orijinal Düşünme Becerisi

Bu bölümde, bir tek öğretmen adayı tarafından üretilmiş fikirler ya da çözümler (çözümün tamamı ya da bir kısmı açısından) orijinal olarak değerlendirilmiştir. Dolayısıyla orijinal çözüm üretebilme becerisi de böyle çözümleri üretebilme becerisi olarak ele alınmıştır. Bu nedenle öğretmen adayları arasında diğerlerinden farklı fikir üretmiş, yaptığı çözümün tamamı ya da bir kısmında diğerlerinden farklı düşünmüş olan öğretmen adayları belirlenmek suretiyle veriler analiz edilmiştir. Bu analizlerde orijinal düşünme çabası içinde olanların yanı sıra orijinal çözüm üretme açısından kendilerini başarısız bulan öğretmen adayları olmuştur.

Diğer yandan öğretmen adayları orijinallikle ilgili alıştırmalarda başkalarının yapamayacağını düşündükleri şekilde davranmaları konusunda cesaretlendirilmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının diğer arkadaşlarından farklı çözüm yapmaya çalışmaları orijinal çözüm bulma çabası (orijinal düşünme çabası) olarak ele alınmıştır.

Orijinal çözüm bulma çabası: Görüşmelerde bazı öğretmen adayları orijinallikle ilgili olmayan bazı sorularda orijinal çözüm bulma çabalarının olduğuna dair ipuçları vermişlerdir. Öğretmen adaylarının ifadeleri aşağıda yer almaktadır:

G: Peki bu dersten sonra esnek düşünme becerilerinde nasıl bir gelişme oldu?

S2: Ya, becerilerim, yani şöyle farklı çözüm yollarını görebilmek onların farkına varabilmek, farkına varabildim diyebilirim bu derslerden sonra, yani, herkes direkt görünen yolu çözer ama ben biraz farklı düşünmeye çalışırım.

G: Burada daha iyi bir çözüm olabilir mi düşüncesiyle yaklaştın mı?

S5: Daha çok, burada daha ilginç bir çözüm olabilir mi diye yaklaşmışım hani.

G: İlginç derken, kimsenin aklına gelemeyecek anlamında?

S5: Hı hı. En, aslında her zaman için aklıma gelir, çember çizmek çok fazla kişinin aklına gelmez. Ama kesin daha ilginç de vardır. Aslında ben katlamayı falan da düşündüm. Sonra onu ispatlayamam herhalde.

S2 “herkes direkt görünen yolu çözer ama ben biraz farklı düşünmeye çalışırım” ifadesi ile herkesten farklı çözüm arayışının olduğunu ima etmektedir. Ancak S2’nin orijinal çözümler bulmak için çaba gösterip göstermediği sorulduğunda verdiği cevapta “o kadar kapasitem olduğuna inanmıyorum zaten” ifadesini kullanmıştır. Bu durum öğretmen adayının orijinal çözüm bulmayı üst düzey bir yetenek olarak gördüğünü düşündürmektedir.

G: Sen orijinal çözümler üretmek için çaba gösteriyor musun?

S2: Yani onu, o kadar kapasitem olduğuna inanmıyorum zaten. Yani çözümü görünce zaten, çözümü görmek bile yani çok müthiş bir olay gibi geliyor bana. Yani onu düşünüp de kendimi oraya koyabilmem çok zor yani. O biraz zor herhalde.

S5’in yukarıdaki ifadesinde yer alan “aslında her zaman için aklıma gelir, çember çizmek çok fazla kişinin aklına gelmez” cümlesinde fazla kişinin aklına gelmeyeceğini düşündüğü fikirler üretebildiğini ima etmektedir. Ardından söylediği “Aslında ben katlamayı falan da düşündüm” cümlesi geometri problemlerinden biri için yapmaya çalıştığı çözümle ilgili söyledikleridir. Öğretmen adayının bu fikri ise gerçekten farklı bir yaklaşımdır.

S4 aşağıda yer alan “Bilindik şeyler oluyor ama hani çok fazla düşünülmeyen hani başkaları belki bunu yapmıştır ben şöyle yapayım dediğim oluyor birçok konuda” ifadesinde orijinal çözüm bulma çabasının olduğunu göstermektedir. S4 bu çabanın varlığını ima ederken bu konuda çok başarılı olamadığını da belirtmektedir.

G: Hangi durumlarda orijinal çözüm üretmeye çalışırsın?

S4: Yani, genelde, hani o çaba var galiba bende, ama çok böyle belirgin bir şekilde değil. Hani uğraşmak istemiyorsam bilindik bir yöntemle çözebiliyorum. Zaten çok fazla aslında orijinal şeyler bulamıyorum. Bilindik şeyler oluyor ama hani çok fazla düşünülmeyen hani başkaları belki bunu yapmıştır ben şöyle yapayım dediğim oluyor birçok konuda. Genelde”.

S4 üniversite genel başarı ortalaması en yüksek olan öğretmen adayıdır. S4, görüşmede sorulmuş olan orijinallikle ilgili sorularda genelde arkadaşları tarafından beğenilen çözümler yapmış olduğuna dair ifadeler kullanmıştır. S4, arkadaşlarından gelen dönütlere dayanarak kendisinin farklı yani orijinal çözümler yapabildiğini düşündüğünü ifade etmektedir. Ancak bu durum öğretmen adayının daha önceki ifadesiyle çelişir gibi görünmektedir. Diğer yandan burada dikkat edilmesi gereken bir durum vardır ki bu ifadelerden biri kendi kendisini değerlendirmesi, diğeri ise arkadaşlarından aldığı yansımalarından yorum yapmasıdır.

“Belki bütün derslere yansımıyor hani böyle biraz daha matematiksel olan şeylerde yani yapmaya çalışıyorum bir şekilde hani. En azından arkadaşlarım yani benim için öyle bazen sen yine yapmışsın yapacağını falan dedikleri oluyor bazen hani. Hani onları düşününce de farklı bir şeyler yapıyorum demek ki diye düşünüyorum.” (S4)

S5 ise orijinal olma çabasının seçmeli ders ortamı ile sınırlı olduğunu aşağıda yer alan ifadesinde belli etmektedir:

G: Orijinal çözümler üretmek için sen çaba gösteriyor musun?

S5: Sadece sizin dersinizde.

Orijinal çözüm üretme açısından kendilerini başarısız bulanlar: Orijinal çözüm üretme açısından kendilerini başarısız bulan öğretmen adaylarının ifadeleri incelendiğinde aslında öğretmen adaylarının orijinal düşünme becerisini kendilerine hedef olarak belirlemedikleri gözlemlenmiştir. S1 seçmeli dersin bu konuda etkisinden bahsetmekle beraber, yine de orijinal çözüm üretme açısından kendini başarısız bulmuştur:

S1: Sizin dersiniz aracılığıyla biraz böyle soru çözüyoruz. Orijinal yakalamaya çalışıyoruz tabii ama pek.

G: Sen orijinal çözümler üretmek için çaba gösterir misin?

S3: Çabalarım, yani çabalamaya çalışıyorum.

Benzer bir şekilde, S6 da hedefinin hiçbir zaman orijinal çözüm üretmek olmadığını ima etmiştir. Vakit yetersizliğini ve sonuca odaklı problem çözme gayretini orijinal çözüm üretmeme konusunda gerekçe olarak göstermiştir.

G: Orijinal çözümler üretmek için çaba gösteriyor musun?

S6: İşte vaktim olmuyor yani, böyle ancak derslerde olabiliyor, sınavlarda falan orijinal düşünmeyi hiç düşünmedim hani doğru olsun puan alayım da ne olursa olsun yani.

4.3.3.a. I. grup problemlerin orijinal düşünme becerisi açısından analizi

Birinci grup problemlerde temel fikirler bazında inceleme yapılmıştır. Bir tek öğretmen adayı tarafından üretilmiş fikirler orijinal fikir olarak sayılmıştır. Öğretmen adaylarının akıcı düşünme becerisi ile orijinal düşünme becerisini de karşılaştırmak amacıyla üretilen fikir sayıları ile birlikte orijinal fikir sayıları Tablo 4.7’de yer almaktadır. I-A ve I-B grubu problemlerdeki orijinal fikir sayıları karşılaştırıldığında I-B grubu problemlerde daha çok sayıda öğretmen adayının orijinal fikir üretmiş olduğu tespit edilmiştir. Bu durum I-B grubu problemlerde daha fazla fikir üretilmiş olmasından kaynaklanmış olabilir. Bu da akıcı düşünme becerisi orijinal düşünme becerisini besleyebilir düşüncesini akla getirmektedir.

a. I-A Grubu Problemler

Tablo 4.7’de yer alan fikir sayıları ve orijinal fikir sayıları karşılaştırıldığında genel olarak orijinal fikir sayısı fazla toplam öğretmen adaylarının üretmiş oldukları fikir sayılarının da fazla olduğu ve herhangi bir problemde az fikir üretmiş olan öğretmen adaylarının genellikle orijinal fikir üretmediği görülmüştür. Bununla beraber, bazı problemlerde orta seviyede fikir üretmiş olan bazı öğretmen adaylarının da hiç orijinal fikir üretmediği de dikkati çekmiştir. Buna durum akıcı düşünmenin, orijinal fikirlerin ortaya çıkmasında etkili olabileceğini ancak orijinal fikir üretmek için yeterli olamayabileceğini düşündürmektedir.

Tablo 4.7 incelendiğinde S11, S12, S15, S16, S21’in en az sayıda orijinal fikir üreten öğretmen adayları olduğu görülmüştür. Bu öğretmen adayları en az üç

problemde hiç orijinal fikir üretmemişlerdir. Diğer yandan en çok orijinal fikir üreten öğretmen adayının S5 olduğu, ardından S4'ün geldiği belirlenmiştir. Tabloda bazı problemlerde çok, bazılarında az orijinal fikir üretmiş ya da hiç orijinal fikir üretememiş öğretmen adaylarının olması orijinal fikir üretme becerisinin problemden probleme değişkenlik gösterebileceğini düşündürmektedir.

Tablo 4.7 I. grup problemlerde üretilen fikir sayıları ve orijinal fikir sayıları

	I-A grubu problemler										I- B grubu problemler			
	Pr 1a		Pr1b		Pr 3		Pr 8		Pr 9		Pr 5		Pr 6	
Öğretmen adayı	FS	O	FS	O	FS	O	FS	O	FS	O	FS	O	FS	O
S1	G	G	G	G	9	2	6	6	3	2	16	8	15	5
S2	7	2	19	4	7	-	3	1	5	2	10	2	11	6
S3	6	1	5	1	2	-	G	G	8	2	4	-	8	1
S4	13	8	2	-	13	8	8	4	9	5	16	6	29	9
S5	9	1	3	3	33	25	30	21	26	20	10	2	28	13
S6	9	-	16	5	15	5	5	-	2	1	12	1	14	2
S7	12	7	10	6	21	8	2	-	6	3	11	3	11	1
S8	4	3	5	2	1	-	4	2	2	1	14	-	15	5
S9	8	1	6	5	1	-	7	3	5	-	4	-	6	1
S10	5	1	2	-	7	-	7	1	7	2	6	1	8	2
S11	1	-	2	1	8	-	10	-	5	-	12	2	11	1
S12	6	2	10	1	4	-	0	-	2	-	5	4	10	2
S13	1	-	0	-	11	-	14	4	3	-	12	-	12	1
S14	5	-	3	-	12	4	4	1	5	1	13	3	20	2
S15	6	-	2	-	6	3	2	-	G	G	10	1	14	4
S16	1	-	0	-	3	-	3	-	2	-	12	2	11	4
S17	8	2	2	1	10	1	6	1	1	-	8	-	14	2
S18	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	10	-	5	1
S19	8	7	5	-	G	G	G	G	4	1	10	1	6	-
S20	7	-	9	-	10	4	4	1	3	-	13	1	11	5
S21	2	-	5	-	7	-	3	-	5	1	8	-	11	4
S22	16	12	0	-	11	-	7	4	4	-	6	1	9	5

G: Öğretmen adayı problemin verildiği gün gelmedi

FS: Fikir sayıları

O: Orijinal fikir sayıları

İlerleyen kısımlarda yapılmış olan çözümler daha detaylı olarak incelenecektir.

Problem 1a'da en çok orijinal fikir üreten S22'nin fikirleri incelendiğinde $y=x$, $y=x+1$ gibi özel durumlar altında özel değer incelemesi yapmış olduğu görülmüştür. S22'nin bu incelemeleri onu genel durumla ilgili bir sonuca götürmemiştir. Dolayısıyla, ürettiği orijinal fikirlerin fazla bir değerinin olduğu düşünülmemektedir.

Problem 1a'da fazla orijinal fikir üreten öğretmen adaylarından S7 ve S19'un da genel durumla ilgili bir sonuca ulaşmadıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının diğer öğretmen adaylarından farklı ve ortak olarak kullandıkları strateji basit fikirler üretmedir (Örnek Şekil 4.85). Öğretmen adayları bu problemde üç öğretmen adayı tarafından kullanılan bu stratejinin orijinal fikir üretmede etkili olabileceğini akla getirmektedir.

Öte yandan, basit fikirlerin klasik çözümlerin yanında alternatif çözümler üretmede yardımcı olabileceği düşünülmektedir. Çünkü Problem 1a'da $x>y$ için yapılacak incelemede $z>x$, $x!|z!$, $y!|x!$ ve $x!|x!$ basit fikirlerini üreten bir kişinin $x!+y!=z!$ eşitliğinde $x!|y!$ olduğunu görmesi ihtimali de ortaya çıkmaktadır. Bunun yanında $y!|x!$ ve $x!|y!$ ifadelerinin her ikisinin doğru olduğunun düşünülmesi $x!=y!$ eşitliğine götürür ki sonraki inceleme $2x!=z!$ eşitliğidir. Bu şekildeki bir çözüm algoritmik işlemlerle yapılacak çözümden daha orijinal bir çözüm olabilir. Çünkü bu problemde algoritmik işlem yapma en sıradan stratejilerden biridir. Kullanılan en sıradan stratejilerden diğeri ise özel değer incelemesidir.

② $x! = x(x-1)(x-2) \dots 1$ şeklinde $2! = 2(2-1)(2-2) \dots 1$
 $y! = y(y-1)(y-2) \dots 1$ şeklinde

$$x! + y! = x(x-1)(x-2) \dots 1 + y(y-1)(y-2) \dots 1 = 2!$$

$$= 2(2-1)(2-2) \dots 1$$

1 den büyük sayılar için faktoriyel çarpımı sonucu daima çifttir. $n=2$ için $2! = 2.1 = 2$ $1! = 1$.
 $n=3$ için $3! = 3.2.1 = 6$
 $n=4$ için $4! = 4.3.2.1 = 24$

Bu şekilde sorular kadar devam ettiğimizde sonucu hep çift sayı olarak buluruz.

x ve y sayılarını 1 den büyük olarak seçtiğimizde sonucu olarak $x!$ ve $y!$ sonuçları çift çıkacaktır.

$x! + y!$, çift sayının toplamı, çift oldı, den bu sonuçta çift olacaktır. Bu da bize sonucu çift olan 2 'nin de 1 den büyük bir sayı olduğunu gösterir.

x ya da y den herhangi birisi 1 değerini 1 den büyük alırsak faktoriyel sonucu olarak bir çift, bir de tek sayı sonucu elde ederiz ki çift sayı ile tek sayı toplamı tektr. (1 tek, 2 çift $1+2=3$ tek). Buna göre $2!$ tek olarak ve tek olması 2 nin 1' den büyük

olmasını gösterir. $x! + y! > 1$ olacağı için böyle çözümde kusura olmama örnek olarak

$x=1$ dersek $x! + y! = 1! + 2! = 1 + 2.1 = 3$

$y=2$ $3 = 2!$ olarak şekilde 2 sayıları yoktur.

x ve y sayılarını 1 seçersek

$$x! + y! = 1! + 1! = 1 + 1 = 2 = 2! \Rightarrow 2 = 2 \text{ sonucu elde edilir}$$

Aynı sonucu 0 sayısı için de bulabiliriz. Çünkü $0! = 1$ olarak alınmaktadır.

0 dan küçük sayılar ve rasgele sayılar seçmek ise faktoriyel terminde yoktur, bu yüzden bu sayılarda galileonayla

Şekil 4.85. S7'nin Problem 1a için yazdığı günlük

Problem 1a için yapılan, diğer öğretmen adaylarına nispeten daha iyi ve daha orijinal çözüm S4'e aittir (Şekil 4.86). Genel duruma yönelik sonucu formal yoldan ispatlayan S4'ün incelemeleri özel değer incelemesi ve sadeleştirme çoğu öğretmen adayının başvurduğu sıradan incelemelerle başlamıştır. Fakat verilen eşitlikte yaptığı sadeleştirmeden sonraki tek-çift incelemesi başka bir öğretmen adayı tarafından yapılmamıştır.

a) $x=y=0$ için $z=2$ $x=0, y=1$ için $z=2$
 $x=y=1$ " $z=2$
 Fakat; $x=1, y=2$ için $z \in \mathbb{Z}^+$ bulunmaz.
 Yani her zaman - doğru değil.
 Başka hangi şartlarda sağlanabilir?
 $x, y \neq 0, 1$ $x > y$ olsun. $(x(x-1) \dots (y+1) + 1) y! = z!$
 $x(x-1) \dots (y+1) + 1 > y+1$ old. göre $x(x-1) \dots (y+1) + 2$ sayısı
 $z(z-1) \dots (y+2)(y+1)$ o.s. çarpımlara ayrılabilir mi?
 $x(x-1) \dots (y+1)$ çarpımı tam sayıların tek arifit sıralanması
 örneğinden arifit old. söyleyebiliriz. Yani
 $x(x-1) \dots (y+1) + 2$ tek sayıdır. Kabul edelim ki bu tek sayı
 $z(z-1) \dots (y+2)(y+1)$ şeklinde çarpımlara ayrılabilir. Bu çarpımın
 sonucu da arifit olacaktır. Bu bir çelişkidir. Yani
 $x(x-1) \dots (y+1) + 1$ tek sayıdır, $z(z-1) \dots (y+2)(y+1)$ şeklinde
 çarpımlara ayrılmayacağından; $x > y$ için $(x, y \neq 0, 1)$
 $x! + y! = x(x+1) \dots (y+1) y! + y!$
 $= y! (x(x-1) \dots (y+1) + 1)$
 toplamını bir faktöriyel biçiminde çarpımlarına ayıramayız.
 Yani $x! + y! = z!$ eşitliği x 'in ve y 'nin 0 ve 1 olması
 halinde geçerlidir. Özel olarak $x=y$ seçtsek de; $(x \geq 2)$
 $x! + x! = 2 x!$ eşitliğini sağlayarak herhangi bir doğal
 sayı bulamıyoruz.

Şekil 4.86. S4'ün Problem 1a için yazdığı günlük

Bu inceleme S4'ün çözümünü daha orijinal bir hale getirmiştir. Benzer bir incelemeye, basit fikirler üreterek çözüm yapan S7'nin günlüğünde rastlanmıştır (Şekil 4.85). Ancak S7'nin incelemesi, özel durum incelemesi olarak kalmış, ve bu düşüncesini genel duruma uyarlamadığı görülmüştür. Diğer yandan, S4'ün yapmış olduğu bu çözüme, problemin yapılandırılmış hali olan Problem 2a'daki çözümlerde de rastlanmamıştır. Bu durum onun çözümünün bu kısmının orijinalliğini daha da kuvvetlendirmektedir.

Problem 1b'de bulunan en orijinal sonuç sezgisel düşünmenin daha çok görüldüğü S2'ye aittir. Çünkü çoğu öğretmen adayı $x!$ veya $y!$ 'den herhangi birinin 1 olması durumunda eşitliğin sağlandığını fark etmişken S2, eşitliği sağlayan birden büyük sayılar arasında bir bağıntı bulmuştur. Bağıntıyı gören tek öğretmen adayı olması açısından S2'nin çözümünün bu kısmı, orijinal çözüm olarak nitelendirilebilir (Şekil 4.87). Öte yandan, Problem 2b'deki çözümler arasında bu çözümün benzerini yapan öğretmen adayları olmuştur.

Problem 3, 8 ve 9'da en fazla sayıda orijinal fikir üreten öğretmen adayı S5 olmuştur. S5 bu problemlerde oldukça detaylı incelemeler yapmıştır. Bu incelemelerden ürettiği fikirler başka öğretmen adayları tarafından bulunmamıştır. Çünkü S5 kadar ısrarlı, detaylı ve derin inceleme yaparak fikir üreten olmamıştır. Öğretmen adayının fikirleri incelendiğinde onun probleme iyi konsantre olduğu anlaşılmaktadır.

b) $x! \cdot y! = z!$ $0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $6! = 720$

Yine burada x ve y arasındaki ilişkiye bakalım.

$$z! = z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Eğer $z=0$ veya $z=1$ ise x ve y için eşitli sayılar sayılabılır.

yani $z!=1$ iken i) $x=0, y=0$

ii) $x=1, y=0$

iii) $x=0, y=1$

iv) $x=1, y=1$

variasyonları sağlanır.

Eğer $z=2$ ise

i) $x=2, y=0$

ii) $x=0, y=2$

iii) $y=2, x=1$

iv) $y=2, x=0$

seçenekleri sağlanır.

Eğer $z > 2$ ise $z!$ in ifadesine bakalım.

$$z! = z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$0! = 1! = 1$ olduğundan $x! \cdot z!$ yaptığımızda $y!$ için $y! = z!$ dir.

Yine aynı şekilde $y! = 1$ olduğunda $x! = z!$ dir.

Şimdi $x > 1, y > 1$ durumlarına bakalım.

$$z! = z \cdot (z-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$z! = z \cdot (z-1)! \text{ yazabiliriz.}$$

$x! = (z-1)!$ kabul edersek $z = y!$ olur. z nin kendisi herhangi bir sayının faktöriyelisi olmak zorundadır.

$x! \cdot y! = z! \Rightarrow$ Bu eşitliğin sağlanması için z sayısı herhangi bir sayının faktöriyelisi olmalıdır.

Eğer z sayısı herhangi bir sayının faktöriyelisi değilse kesinlikle eşitlik sağlanmaz.

Örneğin $z=6$ alalım. $z=6=3!$

$$z! = 6! = 720 = 6 \cdot 5! = 3! \cdot 5! \text{ dir}$$

$$z=24 \text{ alalım } z! = 24! = 24! \cdot 23! = 4! \cdot 23! \text{ dir}$$

Şekil 4.87. S2'nin Problem 1b için yazdığı günlük

I-A grubu problemlerin hepsi göz önünde bulundurulduğunda, orijinal çözüm sayıları açısından öne çıkan öğretmen adayları S4, S5 ve S7'dir. Bu öğretmen adaylarının fikirlerinin niteliğine bakıldığında; S5'in detaylı ve ısrarlı

incelemelerinin sonunda elde ettiği fikirlerine karşılık, S7'nin herkesin görebileceği tarzda yüzeysel fikirleri dikkati çekmiştir (Şekil 4.89). S4'ün fikirlerinde de zaman zaman derinleşmeler söz konusu olmasına rağmen S5'inki kadar belirgin değildir (Şekil 4.88, Şekil 4.54). Bu üç öğretmen adayının orijinal fikir sayısı açısından üst sırada oldukları Problem 9 için yazdıkları günlükler örnek olarak verilmiştir.

Çözüm: 4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ birim fonksiyonu bir şartları sağlar. $f = I: \mathbb{R} \xrightarrow{x} x$ $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$ mı? $f(x) = x, \quad f(y) = y$ $(f(x))^2 = x^2$ $\Rightarrow f(x^2 + f(y)) = f(x^2 + y) = x^2 + y$ $= (f(x))^2 + y$ O halde f birim fonksiyonu tüm birim fonksiyonları karşılar. Yani süreklilik, limit, $\mathbb{R}-\mathbb{R}$ ilişkisi, örtenliği gibi. Birim fonksiyonu lineer olduğunda $\mathbb{R}-\mathbb{R}$ ilişkisi, örtenliği, süreklilik, tersi vardır ve süreklilikler... Tersinde kendisine eşittir. $x=0, y=0 \Rightarrow f(f(0)) = (f(0))^2$ $f(0) = a \in \mathbb{R}$ o.s. $a \in \mathbb{R}$ vardır. Fakat $a=?$ $\Rightarrow f(f(0)) = (f(0))^2$ $f(a) = (a)^2 = a^2 \rightarrow f(a) = a^2$ $\Rightarrow$ Bu fonksiyon, $f: \mathbb{R} \xrightarrow{x} x^2$ ile $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{0\}$ fonksiyonu ile $f(a) = a$ için (a, a^2) noktalarında kesirler. Buradaki f fonksiyonu $\mathbb{R}-\mathbb{R}$ mi? $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ mi? $f(x_1^2 + f(x_1)) = f(x_2^2 + f(x_2))$ $x_1 + f(x_1)^2 = x_2 + f(x_2)^2$ $x_1 - x_2 = [f(x_2)^2 - f(x_1)^2] [f(x_1) + f(x_2)]$ $x_1 - x_2 = 0$ $\Rightarrow x_1 = x_2. \Rightarrow f$ $\mathbb{R}-\mathbb{R}$ 'dir.	Akıcılık Esneklilik
--	---

Şekil 4.88. S4'ün Problem 9 için yazdığı günlük

Örten mi? $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \in \mathbb{R}$ dır. $x \in \mathbb{R}$ var mı?

$$f(x^2 + f(x)) = x + f^2(x)$$

$$f(x^2 + f(x)) - f^2(x) = x.$$

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x^2 + f(x)) - f^2(x) = f(y)$ dır.
 y var mı? bilmiyoruz.

$$f(x^2 + f(x)) = x + f^2(x)$$

$$x=0 \Rightarrow f(f(0)) = f^2(0)$$

$$x=1 \Rightarrow f(1 + f(1)) = 1 + f^2(1)$$

$$x=2 \Rightarrow f(2 + f(2)) = 2 + f^2(2)$$

$x \neq \dots$

$r > 0$ reel sayı için de $x=r$

$$\Rightarrow f(r + f(r)) = r + f^2(r)$$

$r > 0$ ve $f^2(r) > 0$ old. dan pozitif reel sayılar için bu fonksiyon $\mathbb{R}^+$ 'de görüntülenir.

$$x=-1 \Rightarrow f(-1 + f(-1)) = -1 + (f(-1))^2$$

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow f(-\frac{1}{2} + f(-\frac{1}{2})) = -\frac{1}{2} + (f(-\frac{1}{2}))^2$$

$$x \in \mathbb{R}^- \text{ için } f(x^2 + f(x)) = x + f^2(x) \geq 0 \text{ olur}$$

$$\Rightarrow x + f^2(x) \geq 0 \Rightarrow f^2(x) \geq -x = |x|$$

$$\Rightarrow f(x) \geq |x| \text{ ya da } f(x) \leq -|x|$$

$$x \in (-1, 0] \text{ için } x^2 \leq |x| \text{ dir! } f(x) \geq |x| \text{ olur}$$

$$\Rightarrow x + f(x) \geq x + |x| \geq 0 \Rightarrow x + f(x) \geq 0$$

$$x^2 + f(x) \geq x^2 + |x| \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$\cancel{\mathbb{R}(x) < |x| \text{ için } x^2 + f(x) \leq x^2 + |x|}$$

Şekil 4.88. S4'ün Problem 9 için yazdığı günlük (devam)

$$\begin{aligned} f(x) &= a \Rightarrow x = f^{-1}(a) \\ f(y) &= b \Rightarrow y = f^{-1}(b) \end{aligned} \Rightarrow f((f^{-1}(b))^2 + f^{-1}(a)) = f^{-1}(a) + (f^{-1}(b))^2$$

$$f(x^2 + b) = y + a^2$$

$$\begin{aligned} f(x^2 + f(y)) &= y + (f(x))^2 \\ f^{-1}(f(x^2 + f(y))) &= f^{-1}(y + (f(x))^2) \\ x^2 + f(y) &= x^2 + f(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = x^2 + f(y) &= x^2 + b & f(c) &= y + a^2 \\ f(c) &= f^{-1}(b) + (f(x))^2 \end{aligned}$$

* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ birim fonksiyonu olarak ele alırsak
 $x \rightarrow f(x) = x$

$$\begin{aligned} f(x) &= x & f(x^2 + f(y)) &= f(x^2 + y) = x^2 + y = y + x^2 = y + (f(x))^2 \\ f(y) &= y \end{aligned}$$

esitlik sağlanır. Birim fonksiyondur.

* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabit fonksiyonuna bakalırsak
 $x \rightarrow f(x) = c$

$$\begin{aligned} f(x) &= c & f(x^2 + f(y)) &= c \neq y + c^2 = y + (f(x))^2 \\ f(y) &= c \end{aligned}$$

0 zaman f bir sabit fonksiyon değildir.

$a = 0$ ve $y = 0$ alınırsa fonksiyon bu şartı sağlar.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & f(x) &= 0 & f(x^2 + f(y)) &= 0 = 0 + 0^2 = y + (f(x))^2 \\ x \rightarrow f(x) &= 0 & y = 0 \Rightarrow f(y) &= 0 \end{aligned}$$

Şekil 4.89. S7'nin Problem 9 için yazdığı günlükten alıntı

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \quad f(x^2 + f(y)) - y = f(x^2 + f(y)) - x$$

$$f(x^2 + f(y)) = x + (f(x))^2 \quad f(x^2 + f(y)) - f(x^2 + f(x)) = y - x$$

$$x^2 + f(y) = f(y)$$

$$f(x) = \frac{x}{3}$$

$$f(y) = \frac{y}{3}$$

$$f(x^2 + f(y)) = f\left(x^2 + \frac{y}{3}\right) = \frac{x^2 + \frac{y}{3}}{3} = \frac{x^2 + y}{9} = \frac{x^2}{9} + \frac{y}{9} \neq y + \left(\frac{x}{3}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(y) = \frac{1}{y}$$

$$f\left(x^2 + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{y}} = \frac{y}{yx^2 + 1} \neq y + \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = x + a$$

$$f(y) = y + a$$

$$f(x^2 + y + a) = x^2 + y + a + a$$

$$y + f(x)^2 = y + (x + a)^2$$

$$x^2 + y + 2a = y + x^2 + 2ax + a^2$$

$$2a - a^2 = 2ax$$

$$x(2 - a) = 2ax$$

$$\frac{2 - a}{2} = x$$

$$x = 1 - \frac{a}{2}$$

$$f(x) = 2(x - x^2)$$

$$f(y) = 2(y - y^2)$$

$$x + 2 - 2x$$

$$\frac{2 - x}{(2 - y)y}$$

$$x^2 + 2 - y$$

$$f(x^2 + 2(y - y^2)) = 2(x^2 + 2y - 2y^2 - (x^2 + 2y - 2y^2)^2)$$

$$= 2(x^2 + 2y - 2y^2 - (x^4 + 4x^2y + 4y^4 + 2x^2y - 2x^2y^2 - 4y^4)(2 - x))$$

$$f(x^2 + 2y) = 2(x^2 + 2y - y)$$

$$y + f(x)^2 = y + (2 - x)^2$$

$$= y + 4 - 4x + x^2$$

Şekil 4.89. S7'nin Problem 9 için yazdığı günlükten (devam)

S5'deki ısrar ve konsantrasyon S4'te gözlemlenememiştir. Görüşmelerde kendisine güveninin olmadığını sık sık dile getiren S4, bu durumun probleme konsantre olmasını zorlaştırdığını belirtmiştir:

"Genelde matematiğe karşı az da olsa bir korku taşıyorum, soruyu çözemeyeceğim gibi. Öyle bir his doğuruyor, ama hani, basit yöntemleri deniyorum, yani, belki çok uğraşmış oluyorum ama sonrasında diyorum, boş yere uğraşmışım bunlara diyorum, hani, biraz soruyu kavramam başka bir

şeylerin ortaya çıkması biraz uzun sürüyor olabiliyor. Daha doğrusu, bunun cevabı kompleks bir şeydir ya da benim yapamayacağım çok basit bir yoldur falan düşüncesi oluyor, o yüzden hemen göremiyorum öyle, yani öyle deyim. Yani, en azından beş dakika falan geçmesi gerekiyor.”(S4)

G: Kendine güvenir misin?

S4:Aslında sorulara ilk bakarken ben yapamam, yani, güvensizlik duygusu çok fazla var hocam. Sorulara başlarken çözmeye çok bocalıyorum. Yani, şu soruyu şöyle mi çözeyim? Yani, şu çözüm yöntemini mi denesem? Şunu mu? Yani, klasik yöntemleri denemeye çalışırım. Hani, güvensiz olduğum için, tam bir fikir üretemem diye düşünürüm. Ama sonrasında bu böyle olabilir, şöyle olabilir diye biraz düşünme sürecim uzun oluyor bu şekilde.

S4'ün not ortalaması açısından ilk sırada olması, onun bu konumunu koruma ya da bu konuma layık olma gibi kaygılarını beraberinde getirmiş olabilir.

b. I-B Grubu Problemler

I-B grubu problemlerde öğretmen adayları tarafından üretilen orijinal çözümler incelenerek karşılaştırılmıştır. Ancak, I-A grubu problemlerde üretilen fikir sayısı ile orijinal fikir sayısı arasında doğrusal gibi görünen bir ilişki dikkat çekerken, I-B grubu problemlerde böyle bir ilişki gözlemlenememiştir. I-B grubu problemlerde, fikir sayısı ile birlikte orijinal fikir sayısı çok olan öğretmen adaylarının (S1, Problem 5; S5 Problem 6) olmasının yanında, çok fikir üretenler arasında olmasına rağmen hiç orijinal fikir üretmeyen (S8, Problem 5) ya da çok az orijinal fikir üreten öğretmen adaylarının (S14, Problem 6) da olduğu Tablo 4.7’de görülmektedir. Bu durumun I-A ve I-B grubu problemlerinin tiplerinin farklılığından kaynaklandığı tahmin edilmektedir.

4.3.3.b. II. grup problemlerin orijinal düşünme becerisi açısından analizi

İkinci grup problemlerde çözümün tamamı ya da bir kısmında diğerlerinden farklı düşünmüş öğretmen adaylarının günlükleri incelenmiştir. Tablo 4.8 ve Tablo 4.9 orijinal çözüm yapan öğretmen adaylarını göstermektedir.

a. II-A Grubu Problemler

Bu grupta yer alan geometri problemlerinde en az bir problemde diğer öğretmen adaylarından farklı yani orijinal çözüm yapan öğretmen adayları S3, S5, S6, S8, S9, S20, S21 ve S22'dir. Bu öğretmen adaylarından S3, S5 ve S9 diğerlerine göre daha fazla orijinal çözüm yapmışlardır (Tablo 4.8).

Tablo 4.8 II-A Problemleri için Yapılan Çözümlere Dair Sonuçlar

Öğretmen adayları	Problem 14			Problem 15			Problem 16		
	DÇS	FÇS	OÇS	DÇS	FÇS	OÇS	DÇS	FÇS	OÇS
S1	4	1	-	3	2	-	2	1	-
S2	4	3	-	1	1	-	1	1	-
S3	5	4	2	1	1	1	1	1	-
S4	G	G	G	G	G	G	1	1	-
S5	6	2	-	7	3	2	5	2	1
S6	7	3	-	G	G	G	5	2	1
S7	8	3	-	3	2	-	1	1	-
S8	2	2	-	3	3	1	1	1	-
S9	3	3	-	5	4	3	0	0	-
S10	4	2	-	4	1	-	4	1	-
S11	6	3	-	2	2	-	1	1	-
S12	G	G	G	G	G	G	2	1	-
S13	4	4	-	2	2	-	2	1	-
S14	G	G	-	G	G	G	4	1	-
S15	4	2	-	3	2	-	G	G	G
S16	3	2	-	2	2	-	4	1	-
S17	2	2	-	3	1	-	G	G	G
S18	3	3	-	2	1	-	2	1	-
S19	5	2	-	4	2	-	2	1	-
S20	5	2	1	5	3	1	1	1	-
S21	3	3	1	3	1	-	3	2	1
S22	3	2	-	2	1	-	1	1	1

G: Öğretmen adayı problemin verildiği gün gelmedi

DÇS: Doğru çözümlerin sayısı

FÇS: Birbirinden farklı doğru çözümlerin sayısı

OÇS: Orijinal çözüm sayısı

Orijinal çözüm yapan öğretmen adaylarından ikisinin doğru çözüm sayısının 1, diğerlerinin ise en az 3 olduğu görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının farklı çözüm sayılarının (çözüm çeşitliliğinin) 2’den fazla olduğu tespit edilmiştir.

I-A ve I-B problem gruplarında olduğu gibi, bu problem grubunda da S5 orijinal çözüm üretme açısından öne çıkan öğretmen adaylarından biri olmuştur.

Geometrik problemlerde orijinal çözüm üretme açısından dikkat çeken öğretmen adaylarında biri olan S3’ün diğer II. grup problemlerdeki (cebirsal problemlerdeki) orijinal çözüm üretme performansı oldukça farklıdır. Hatta S3, II-B grubu problemlerde doğru bir çözüm yapma açısından da kötü performans sergilemiştir. Benzer bir durum S20 ve S21 için de geçerlidir. Bu öğretmen adayları geometrik problemlerde orijinal çözüm üretebilmişken cebirsal problemlerde üretememişlerdir. Ortaya çıkan bu durumun cebirsal-geometrik farkından kaynaklandığı düşünülmektedir. Buradan, orijinal çözüm üretme becerisinin konudan konuya (alandan alana) değiştiği sonucuna ulaşılabılır.

b. II-B Grubu Problemler

Öğretmen adaylarına birden fazla çözüm yapmaları için verilmiş olan II-B grubu problemlerde çözümün tamamı ya da bir kısmının yalnızca bir tek öğretmen adayı tarafından yapılmış ise bu tür çözümler orijinal çözüm olarak ele alınmıştır. Tablo 4.9 II-B grubu problemlerde orijinal çözüm üreten öğretmen adaylarını göstermektedir. İlerleyen kısımlarda orijinal çözümler ve bu çözümleri hangi öğretmen adaylarının yapmış olduğu incelenecektir.

Tablo 4.9 II-B Problemleri için Orijinal Çözüm Yapan Öğretmen Adayları

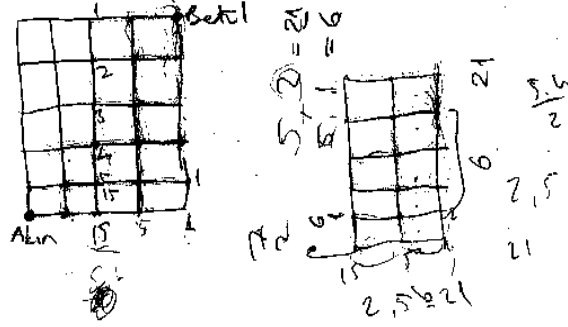
	Pr 13	Pr 17	Pr 18	Pr 19	Pr 20	Pr 21
S2		X				
S5		X		X		
S8					X	
S9						X
S15			X			

Tablo 4.9’da da görüldüğü gibi Problem 13 için orijinal çözüm yapan olmamıştır (EK 15). Bu problemin cebirsel ve geometrik olmak üzere iki kategoride yer alabilecek farklı çözümleri vardı. Çeşitli cebirsel çözümler tüm öğretmen adayları tarafından yapılmıştır. Geometrik çözümü ise ancak ipucu verildikten sonra 4 öğretmen adayı tarafından doğru bir şekilde yapılmıştır. Yalnızca bir öğretmen adayı tarafından yapılmış bir çözüm olmamıştır.

Problem 17’de yolların sayısını sayarak bulmaya çalışan öğretmen adaylarından S2, küçük değerlerden yararlanarak bir genel bağıntı bulmuştur (Şekil 4.90). Sezgisel düşünmenin baskın olduğu S2’nin bulduğu bu bağıntı başka öğretmen adayı tarafından fark edilmemiştir. Bu problemde bazı öğretmen adayları sadece sonucu bulmaya yani problemde sorulan yolların sayısını saymaya çalışmışlardır. Küçük değerlerden hareket ederek bağıntıyı bulmaya çok yaklaşmış olmasına rağmen bağıntıyı fark edememiş öğretmen adayı da vardır (EK 11). S2’nin bu problemde bağıntıyı fark edebilmesinin, onun sezgisel düşünmesinden kaynaklandığı tahmin edilmektedir. Yaptığı çözümde S2, oluşturduğu matrisin satır ve sütun sayıları yardımıyla yolların sayısını hesaplayabileceğini fark etmiştir. Yani burada satır ve sütun sayılarını kullanarak bir formül oluşturmuştur ve oluşturduğu formül doğrudur(Şekil 4.90).

Problem 17’de Çoğu öğretmen adayı tarafından çözüm yolu için tercih edilmiş olan sistemli bir şekilde sayma işlemi, mantıksal düşünmenin baskın olduğu S5 tarafından da tercih edilmiştir. Ancak S5, yolları sistemli olarak sayarken bir örüntü belirlemiştir (Şekil 4.91). Bu örüntü yalnızca S5 tarafından fark edildiği için onun çözümü de orijinal olarak değerlendirilmiştir. S5 ile S2’nin çözümleri karşılaştırıldığında S5’in çoğunlukla tercih edilen çözüm yolunu tercih ettiği, S2’nin ise daha az öğretmen adayı tarafından tercih edilen çözüm yolunu tercih ettiği görülmüştür (EK 11).

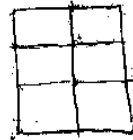
Trafik Akısı sadece Lüzey ve
Doğu istikametine ise Akın
Betül'e yolda 4 sokak, diğerde
ise 5 sokak giderek ulaşır.



Buradan permutasyon yaporduk ama tam olarak
işlenleri bilmiyordum.

$$5.3! = 5.6 = 30$$

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$



3, 2

10

Hipotezinin ne kadar doğru olduğunu bilmiyordum
ama denediğim bütün örneklerde doğru
sonuçtu gördüm.

Akıcılık	
Esneklik	

Düşünme Süreçleri

Matrisimle 5×4 lık
bir matris. Normalde
böyle bir soruda
kullanmam gereken
formülü bilmiyordum.
Kendi kendime bir
hipotez geliştirdim ve
Hipotezinin doğru
olarak çalıştığını gördüm.
Örneği 5×2 lık bir
matris te toplam 21
farklı yoldan gidebiliyoruz.
Dikkat ettiyseniz
 $21 = \binom{7}{2}$ dir. Herhangi bir
 5×1 lık bir matris te ise
toplam 6 farklı yol
gidebiliyoruz. $6 = \binom{6}{1}$ dir.
Yani kombinasyonun
üst tarafına toplamlar
yazılıyor ve alt tarafında
sütun sayısını yazarak
Buradan sorunun cevabı
 $\binom{9}{4} = 126$ olur.

Şekil 4.90. S2'nin Problem 17 için yazdığı günlük

	1	2	3	4	5
1	5	10	15	20	25
2	10	20	30	40	50
3	15	30	45	60	75
4	20	40	60	80	100
5	25	50	75	100	125

126 gol
Ben karsiden gittim

$$\begin{aligned}
 (A,7) &= 1 \text{ gol} & (B,8) &= 1 \\
 (A,6) &= 1 \text{ gol} & (C,8) &= 1 \\
 (A,5) &= 1 \text{ gol} & (D,8) &= 1 \\
 (A,4) &= 1 \text{ gol} & (E,8) &= 1 \\
 & & (F,8) &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (B,7) &= (A,7) + (B,8) = 2 \\
 \Rightarrow (C,7) &= (B,7) + (C,8) = 3 \\
 \Rightarrow (D,7) &= (C,7) + (D,8) = 4 \\
 \Rightarrow (E,7) &= (D,7) + (E,8) = 5 \\
 \Rightarrow (F,7) &= (E,7) + (F,8) = 6 \\
 (B,6) &= (B,7) + (A,6) = 3 \\
 (C,6) &= (B,6) + (C,7) = 6 \\
 (D,6) &= (C,6) + (D,7) = 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E,6) &= (D,6) + (E,7) = 15 \\
 (F,6) &= (E,6) + (F,7) = 21 \\
 (B,5) &= (B,6) + (A,5) = 4 \\
 (C,5) &= (B,5) + (C,6) = 10 \\
 (D,5) &= (C,5) + (D,6) = 20 \\
 (E,5) &= (D,5) + (E,6) = 35 \\
 (F,5) &= (E,5) + (F,6) = 56 \\
 (B,4) &= (A,4) + (B,5) = 5 \\
 (C,4) &= (B,4) + (C,5) = 15 \\
 (D,4) &= (C,4) + (D,5) = 35 \\
 (E,4) &= (D,4) + (E,5) = 70 \\
 (F,4) &= (E,4) + (F,5) = 126 \text{ gol}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.91. S5'in Problem 17 için yazdığı günlükten alıntı

Problem 18, orijinallikle ilgili alıştırılmalardan hemen sonra verilmiştir. Bu problemin farklı bakış açısı benimseyerek yapılabilecek bir çözümünün olduğu biliniyordu. Bu nedenle, öğretmen adaylarından bu problem için orijinal bir çözüm araştırmaları istenmiştir. Yalnızca S15 farklı olan bu çözümü fark etmiştir. S15, bu problem için üç çözüm yapmıştır. Bunlardan ikisi aslında aynı sayılabilecek çözümlerdir. Yalnızca ifade edilişlerinde biraz farklılık vardır. Öğretmen adayının üçüncü çözümü ise problemin gösterdiği yoldan farklı bir yoldur (Şekil 4.75). S15, bu çözümünü sınıftaki diğer öğretmen adayları ile paylaşmıştır.

Problem 18'i çözmek için epeyce uğraşmış olan S4, çözümü net bir şekilde ifade edememiştir. Öğretmen adayı, kendisi ile yapılan görüşmede S15'in çözümünü "... daha güzel, hani daha basit, daha böyle ikna edici, daha somut" şeklinde ifade etmiştir. S4'ün yeterince ikna edici bulmadığı kendi çözümü Şekil 4.92'dedir. Öğretmen adayının, yaptığı ispatın son kısmının biraz sezgisel kalması onu rahatsız etmiştir. Bu durum, onun formal ispata daha çok önem verdiğini göstermektedir. Bu problemde S20, aynı çözüm yolunu ikna edici şekilde yapmıştır (Şekil 4.93).

$$\Delta \quad P = \prod_{i=1}^n (a_i - b_i) \quad a_i \neq b_i$$

Kabul edelim ki P tek sayıdır. O halde P 'nin asparahan $(a_i - b_i)$ olukları
 göre her $(a_i - b_i)$ asparhan tek sayı olmalı. Zaten $a_i - b_i$ 'lerin tek sayı olması
 için de a_i ve b_i 'den biri tek diğeri çift sayı olmalı. Buna göre
 ailerin tek bilerin çift olma münfer değil. Zaten eğer ailerin çift olan
 biler tek olamaz.
 a_1, b_1 çifti için a_1 çift, b_1 tek olur.
 a_2, b_2 " " " a_2 tek, b_2 çift olur...

Bu şekilde kabulünden yola çıkarsak, ailerin tek sayı kadar bilerin tek,
 ailerin çift sayı kadar da bilerin çift sayı. ~~bulunması~~ bulunması
 durumuna gelir. Genellikle en az her $(a_i - b_i)$ için a_i de b_i de
 ya çift ya da tek olur. Bu ise P 'nin tek olması kabulümüzle çelişir.
 O halde P tek değildir. P bir çift sayıdır.

Şekil 4.92. S4'ün Problem 18 için yazdığı günlükten alıntı

III.491:

Öyle ki $S = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{17} - b_{17})$ tek sayı olsun. O zaman $1 \leq i \leq 17$ o.ö. her $(a_i - b_i)$ tek sayıdır. Bu durumda ya a_i tek, b_i çift ya da a_i çift, b_i tek. Peki a_i ler tek b_i ler çift olsun dersek S tek olur fakat bu çelişkidir. Çünkü b_i ler diğerin farklı sayıda mı yoksa aynı $a_i = b_j$ a.ö. a_i ve b_j ler var. Aynı sayı diğerin çift olması için de geçerlidir.

a_i lerden bir kısmı; mesela k tane $(k \in \mathbb{Z})$, tek olsun. $\Rightarrow b_i$ lerden k tane çift olması gerekir. $17 - k$ tane a_i çift, $17 - k$ tane b_i tek olur. $a_i = b_j$ oldu. a_i ve b_i ler için teker teker ve çiftlerin sayısı eşit olmalıdır.

$\Rightarrow 17 - k = k \Rightarrow 17 = 2k \Rightarrow k = \frac{17}{2}$

Bu mümkün olmadığından kabulümüz yanlıştır ve S çift sayıdır.

Şekil 4.93. S20'nin Problem 18 için yazdığı günlükten alıntı

Çözümü doğru bir şekilde yapan öğretmen adaylarının hepsinin çözüm yolu S4'ün çözümüyle hemen hemen aynıdır. Çözümlerdeki tek fark, ifade edilişlerindeki farktır. Bu nedenle S4'ün bu çözümü sıradan çözümdür. Yapılan çözümler incelendiğinde bazı öğretmen adaylarının çelişki bulma yoluyla ispat yapmaya çalıştıkları, bazılarının özel durum ve bazılarının da özel değer inceleyerek çözüm yapmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu çözümlerin hepsi problemde görünür olan çözüm yoludur. S15'in orijinal çözümü ise farklı ilişkilerin kurulmasını gerektiren bir çözümdür.

Problem 21'de 7 öğretmen adayı doğru çözüm yapmış, problemle karşılaşmış olan 9 kişi ise doğru çözüm yapamamıştır. Doğru çözüm yapanlardan S9 dışına diğerlerinin tercih ettiği yollar birbirine benzerdir ve problemin gösterdiği yollardır (Şekil 4. 94).

$$(2a+b)(2b+a) = 2^c$$

$$4ab + 2a^2 + 2b^2 + a.b$$

$$2(a+b)^2 + a.b = 2^c \text{ dir.}$$

$$ab = 2^c - 2.(a+b)^2$$

$$a.b = 2(2^{c-1} - (a+b)^2)$$

- $a.b$ bir pozitif çift tamsayıdır.

- Buradan a ve b sayılarının, (her) ikisi de pozitif çift tamsayı
 2. ") a poz. tek tamsayı, b poz. çift tamsayı
 3. ") a poz. çift tamsayı, b poz. tek tamsayı olabilir.

$$(2a+b)(2b+a) = 2^c \text{ için,}$$

T = Pozitif tek tamsayı

G = Pozitif çift tamsayı olmak üzere

$$a = T \text{ ve } b = G \text{ için,}$$

$$(2.T + G)(2.G + T) = 2^c$$

$$(G + G)(G + T) = 2^c$$

$$G : T = 2^c \quad \#$$

bu bir eşitliktir. Çünkü 2^c 'nin bir poz. tek sayı çarpanı yoktur.

Benzer şekilde $a = G$ ve $b = T$ olamayacağı gösterilir.

$\Rightarrow$ Sonuç: a ve b poz. çift tamsayı

$$(2a+b)(2b+a) = 2^c \text{ eşitliği}$$

$$2a+b = 2^l$$

$$2b+a = 2^k \text{ ve } l+k=c \text{ dir.}$$

$$-3b = 2^l - 2^{k+1} \Rightarrow b = \frac{2^{k+1} - 2^l}{3}$$

$$-3a = 2^k - 2^{l+1} \Rightarrow a = \frac{2^{l+1} - 2^k}{3}$$

burada a, b poz. tam sayı old. dan

$l > k, k > l, k = l$ olabilir.

$k = l$ için b ve a tam sayı olamaz.

$k > l$ için $l+1 > k$ dir. $\Rightarrow a$ için $l+1 > k \Rightarrow 1 > k-l$ old. dan

Benzer şekilde $l > k$ için b negatif çıkar.

$\therefore$ Eşitliği sağlayan

(a, b, c) poz. tamsayı üçlüsü yoktur.

Şekil 4.94. S1'in Problem 21 için yazdığı günlük

Orijinal çözüm yapan S9'un çözümü daha uzak bağlantılar kurmayı gerektirecek bir çözümdür. S9'un verilen cebirsel durumu doğrularla ilişkilendirmesi orijinal bir düşüncedir. Diğer yandan S9'un çözümü informal bir çözümdür (Şekil 4.82). Bu çözüm yolu öğretmen adayının sonucu görmesini sağlamıştır ancak çözümü matematiksel kesinliğin olmadığı bir çözümdür. Bu problemdeki sıradan çözümlerden biri ise S1'in çözümüdür (Şekil 4. 94).

Problem 19'da en fazla sayıda doğru çözüm yapan öğretmen adayı S5'in indirgenmezlik kavramını kullanarak yaptığı çözümü başka öğretmen adayları tarafından yapılmamış olan bir çözümdür (Şekil 4.80). Bu çözüm, yapılmış olan diğer çözümlere göre daha uzak bağlantı kurulması gereken bir çözümdür. Diğer çözümler ise problemin direkt olarak gösterdiği çözümdür.

Her problem grubunda akıcılık, esneklik ve orijinallik açısından her problem tipinde ön plana çıkan S5'in bu konuda doğal bir yeteneğe sahip olduğu düşünülmektedir. Bu düşüncenin ortaya çıkmasında öğretmen adayının göstermiş olduğu performansın yanında görüşmede verdiği bilgiler de etkili olmuştur. Esnek düşünme becerisi hakkında konuşurken orijinal düşünme becerisi ile ilgili bilgiler vermiştir:

G: Esnek düşünme becerisini sence ne kadar sürede kazanabilirsin?

S5: Bence uzun bir sürede kazanabilirim ben. Kolay bir şey değil böyle. Gerçi küçüklükten olması gereken bir alışkanlık, ama küçüklükte köreltilmiş bir şey. Çünkü ben küçükken daha esnektim, hatta çok esnek olduğum için hocalar biraz kızarlardı, anlayamazdı, farklı düşünürdüm. Sonra onu köreltmeye çalışıyorsun. O şekilde düşünmemeye çalışıyorsun. İşte, mesela, benim ağabeyim de, mesela, çok çok esnek bir çocuktü. O yüzden şeydi, böyle sınavlarda hoca gibi çözmezdi sıfır alırdı. Ama sorunun cevabı doğru, ama hoca anlamazdı. Yani, onun mesela o özelliğini köreltirlerdi sürekli. Hani, şey, onun gibi çözmek zorunda. Hoca gibi çözmeye çalışıyordu. Hani, biraz da küçüklükten, hocalarda da olduğu için bastırılmış bir özellik, bilmiyorum ki nasıl çıkar.

...

S5: Ya, aslında zor bir şey... Bastırdığın için artık öyle düşünmemeye zorluyorsun kendini mesela,

G: Ne zamandan beri böyle?

S5: Ortaokuldan beri.

G: Ortaokuldan beri?

S5:Farklı çözdükçe insanlar anlamadığı zaman, “bu yanlış” diyor. Sen de insanların bildiği gibi çözeyim diyorsun, sonra bildiğin yoldan gitmeyip onların bildiği gibi gitmeye başlıyorsun.

S5’in buradaki ifadeleri oldukça önemli ve anlamlı bir konuya işaret etmektedir. Öğretmen adayı burada kendinde var olan yeteneğin küçük yaştan beri köreltildiğini iddia etmektedir. S5’in bu ifadeleri toplumda ve eğitim sisteminde söz konusu olabilecek bir önyargıya işaret etmektedir. S5’in deyişiyle, farklı çözüm yollarını insanların anlamadıkları için “yanlış” olarak nitelendirmeleri, üretilen farklı düşünceleri anlamadıklarında hocaların kızmaları, sınavlarda hoca gibi çözüm yapılmadığında düşük not alınması gibi durumlar S5 ve ağabeyini de *herkes gibi* düşünmeye zorlamış görünmektedir.

Diğer yandan öğretmen adaylarından S2’nin görüşmedeki bir ifadesi oldukça ilginçtir. Çünkü öğretmen adayı en sıradan çözüm yolu olarak nitelendirilebilecek algoritmik işlemleri sevmemesini ve işlemlerden kaçınmasını kendinde bir eksiklik olarak ifade etmiştir:

G: Peki bu konuda kendinde eksik gördüğün noktalar var mı? Yani farklı çözümler üretme konusunda sence sende eksik gördüğün noktalar varsa neler?

S2:Ya evet eksik gördüğüm noktalar var. Mesela problem geldiği zaman yani hoşuma gidecek tarzda çözmeye çalışıyorum problemi. Halbuki yani işlemsel kalabalığa girmemeye çalışıyorum kendim sevmediğimden dolayı, ya işte biraz daha işlem yönüm kuvvetli olsa daha iyi olurdu diye düşünüyorum bir çok konuda.

G: sence daha mı gerekli işlemsel açıdan

S2:evet işlem pratiği. Yani kimi arkadaşlarımız var mesela işlemleri çok iyi diferansiyel denklemler ve geometri dersini çok iyi yapıyorlar mesela hiç işlem hatası yapmayan arkadaşlarım var yani ama bu bende fazla yok, işlem hatası yapıyorum genelde. İşlem kalabalığına girdiğim zaman tıkanıyorum kalıyorum diyebilirim. Bazen gözüm korkuyor bakıyorum upuzun denklem oluyor öyle bıraktığım zamanlar oluyor halbuki yani biraz daha uğraşsam yapabilirim yani belki de yolum doğru yani. O yüzden biraz kendimi eksik görüyorum işlemsel konularda, öyle yani.

S2’nin üniversiteki başarı ortalaması düşüktür ve öğretmen adayı başarısının düşüklüğünü işlemleri sevmemesi ve işlem yapmak istememesine bağlıyor görünmektedir.

Sonuç olarak, bu bölümde öğretmen adaylarının orijinal çözüm üretme becerileri analiz edilmiştir. I. Grup problemlerde öğretmen adaylarının fikirleri, II. Grup problemlerde ise üretilen orijinal çözümler incelenerek karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar sonucunda elde edilen bulgular aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Öğretmen adaylarından bazılarının orijinal düşünme becerisini kendilerine hedef olarak belirlemedikleri gözlemlenmiştir. Bu duruma vakit yetersizliği ve sonuca odaklı problem çözme gayreti gerekçe olarak gösterilmiştir. Diğer taraftan da öğretmenlerdeki bazı olası önyargı ve yanlış tutumların; orijinal düşünme becerilerini körelttiğini ileri süren öğretmen adayı da olmuştur. Öğretmen adayı öğretmenlerin ‘farklı çözüm yollarını anlamadıkları için “yanlış” olarak nitelendirmeleri’, ‘üretilen farklı düşünceleri anlamadıklarında öğrencilere tepki vermeleri ve sınavlarda öğretmen tarafından beklenen çözüm yapılmadığında düşük not alınması’ gibi durumların kendilerini *herkes gibi* düşünmeye zorladığını ileri sürmektedir. Öğretmen adayının bu iddialarına benzer şekilde de Gardner (2008) insanların yaratıcılıklarını engellemenin onları yaratıcı yapmaktan daha kolay olduğunu söylemiştir. Tek doğru cevabın olduğunu söyleyerek ve yanlış cevabı veren öğrenciyi cezalandırarak öğrencilerin yaratıcılığını asla teşvik edilemeyeceğini savunmuştur.

Orijinal çözüm üretme becerisi hakkında bulgular kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Basit fikirler üretme stratejisi ve detaylı incelemeler yapmak orijinal çözüm üretmeyi olumlu yönde etkileyebilir.
- Algoritmik işlem yapma en sıradan stratejilerden biri olup, orijinal çözüm üretme konusunda yetersiz kalabilir.
- Kendine güven, probleme konsantre olmak, ısrarlı ve derin inceleme yapmak orijinal çözüm üretmeyi olumlu yönde etkileyebilir.
- Mantıksal ve sezgisel düşünme davranışının her ikisi de orijinal çözüm ve fikir üretmede etkili olabilir.
- Başarısız olma korkusu orijinal düşünme becerisini olumsuz etkileyebilir.

- Orijinal düşünme yeteneği problem tiplerine göre farklılık gösterebilir.
- Problemin gösterdiğinin ötesine geçmek ve uzak bağlantılar kurmak orijinal çözüm bulmayı sağlayabilir.

V. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Çağdaş yaratıcılık görüşünün, yaratıcılıkla zenginleştirilmiş eğitimin yalnızca birkaç sıra dışı öğrenci için değil, tüm öğrenciler için uygun olduğunu iddia etmesine ve matematiksel aktivitelerin yaratıcılıkla çok yakından iç içe olmasına rağmen, okullarımız öğrencilere matematiğin bu yönü ile ilgili çok az deneyim sağlamaktadırlar. Öğrencilerin yaratıcı olarak sorgulama ve düşünme yeteneklerini cesaretlendirmenin daha çok önemli hale geldiği günümüzde matematiksel yaratıcılık konusu büyük önem taşımaktadır, bu nedenlerle bu çalışma matematiksel yaratıcılığı konu edinmiştir.

Matematiksel problemleri çözme durumlarında, öğretmen adaylarını cesaretlendirmek suretiyle yaratıcı düşünme becerilerini ortaya çıkarmaya çalışarak, yaratıcı düşünmenin bileşenlerini incelemek ve adayların yaratıcılık süreçlerinin özelliklerini belirlemek amacıyla Ankara'daki bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümü (OFMA) Matematik Eğitimi Anabilim Dalında öğrenim gören öğretmen adaylarının;

- Matematiksel problemleri çözme durumlarında sergiledikleri problem çözme davranışları,
- Problem çözme süreci içinde yaşadıkları güçlüklerin nedenleri,
- Akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerisi açısından yaratıcı düşünme becerileri incelenmiştir.

Kısaca, bu araştırmada temel olarak “Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel problemleri çözme durumlarında sergiledikleri yaratıcı

düşünme becerilerinin özellikleri nelerdir?” sorusuna cevap aranmıştır. Bu doğrultuda da bu araştırmada şu alt problemler cevaplandırılmaya çalışılmıştır:

1. Matematiksel problemleri çözme durumlarında öğretmen adaylarının sergiledikleri problem çözme davranışları nelerdir?
2. Problem çözme süreci içinde öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlüklerin nedenleri nelerdir?
3. Yaratıcı düşünme becerileri (akıcı düşünme, esnek düşünme ve orijinal düşünme becerileri) nelere bağlıdır?

2006–2007 öğretim yılı bahar döneminde 3. sınıflar için ‘Matematikte Seçme Konular’ adındaki seçmeli dersi alan 22 öğretmen adayı ile yürütülen bu araştırmada nitel araştırma yaklaşımı kullanılmıştır. Konu hakkında ‘derinlemesine bilgi’ edinilmek amacıyla ders içi gözlemler, öğretmen adaylarının günlükleri ve yarı yapılandırılmış görüşmeler olmak üzere üç farklı veri toplama metodu kullanılmıştır. Verilerin analizi sonucunda şu sonuçlar elde edilmiştir.

5.1.1. Matematiksel problemleri çözme durumlarında sergilenen problem çözme davranışları nelerdir?

Bu araştırmada matematiksel problem çözme durumlarında öğretmen adaylarının farklı problem çözme davranışları sergiledikleri tespit edilmiştir. Bu davranışların genel olarak; Çözüm Yolu Tercihi, Sezgisel Düşünme, Mantıksal Düşünme ve Sonuca Odaklı Problem Çözme davranışı olduğu gözlemlenmiştir.

Çözüm yolu tercihinde öğretmen adaylarının; özel değerleri inceleme, özel durum inceleme, örnek araştırma, basit fikirler üretme, algoritmik çözüm yapma, bağıntı araştırma ve örüntü bulma gibi çeşitli stratejiler kullandıkları gözlemlenmiştir. Bu stratejilerin kullanılış şekillerinin, problemten probleme ve hatta kişiden kişiye farklılık gösterdiği tespit edilmiştir.

Bu araştırmada iki tip sezgi ile karşılaşılmıştır. Biri *sonucu tahmin etmeye yönelik sezgi* diğeri ise *başka çözümün var olup olmadığına yönelik sezgidir*. Fischbein'in (1999) açıklayıcı ve ileriye yönelik sezgi olarak ifade ettiğı sezgi tiplerinin bu araştırmada *sonucu tahmin etmeye yönelik sezgi* içerisinde örneklerinin olduğı söylenebilir.

Sonucu tahmin etmeye yönelik sezginin bazı öğretmen adaylarında formal yoldan çözüm yapmayı zorlaştırdığı tahmin edilmektedir. *Başka çözümün var olup olmadığına yönelik sezginin* ise zaman zaman ön yargılı davranmaya neden olabileceğı görülmüştür. Özellikle başka çözümün olmayacağına sezilmesi durumu, ikinci veya daha sonraki çözümleri araştırmada ısrarlı davranmamaya neden olabilmektedir. Bu durum, birden fazla çözüm bulma durumuna, dolayısıyla da yaratıcı düşünme becerilerine bir engel yaratabileceğı şeklinde yorumlanabilir.

Poincare (2001) Alman geometricilerinden fonksiyonlar genel teorisini geliştiren Weierstrass ve Riemann'dan bahsetmiştir. Kitaplarında bir tek şekil bulunmayan Weierstrass her şeyi seri fikrine ve bunların analitik dönüşümlerine indirgemiş, yani o analizi aritmetiğın bir nevi uzantısı haline getirmiştir. Onun aksine Riemann, çalışmalarında geometriden yararlanarak düşüncelerini somut hale getirmiştir. Bu da sonuçların akılda kalıcılığını artırmıştır. Poincare (2001) öğrencilerde de Weierstrass ve Riemann'a benzer şekilde farklılıklar olduğunu savunmuştur. Bazı öğrencilerin problemleri “analizle”, bazılarının da “geometri” ile çözmeyi tercih ettiklerine işaret etmiştir. Problemleri “analizle” çözenlerin “uzayda görebilmede” yetersiz olduğunu, “geometri” ile çözenlerin de uzun hesaplardan kolayca yorulduklarını ve zihinlerinin karıştığını ifade etmiştir.

Bu araştırmada, problem çözme davranışlarında Poincare'in bahsettiğı bu iki farklı eğilime sahip öğretmen adaylarının olduğı görülmüştür. Mantıksal düşünmenin belirgin olduğı öğretmen adayının problem çözme sürecinde belli bir doğrultuda küçük ve birbirini takip eden adımlarla ilerlediğı, yanlışa ulaşma riskini göze almadığı için kesin adımlarla ilerlemeyi tercih ettiğı dikkati çekmiştir. Bunların yanında, düşüncelerini detaylı bir şekilde yazmaktan ve algoritmik işlemler

yapmaktan kaçınmadığı da görülmüştür. Bunun aksine, sezgisel düşünmenin belirgin olduğu öğretmen adaylarının problem çözme davranışlarında ise detaylara fazla önem vermedikleri, yazmayı sevmedikleri, cebirsel problemlerde zaman zaman şekil, grafik ve geometriden yardım aldıkları ve genel olarak algoritmik işlemlerden kaçındıkları görülmüştür. Bunların yanında, problem çözümünde risk alabildikleri de dikkati çekmiştir. Bu özellikler Poincare'in (2001) açıklamalarıyla örtüşmektedir. Ancak, Poincare'in aksine her öğretmen adayını düşünme tiplerine göre kesin çizgilerle ayırmak mümkün değil gibi görünmektedir. Bu durum Tall'un (1991) yalnızca iki zıt tip matematiksel zihni göz önüne almanın uygun olmadığı fikri ile örtüşmektedir.

Bu araştırmadaki sonuçlar, ÖSS'ye hazırlık sürecinin öğretmen adaylarının problem çözme davranışlarını önemli ölçüde etkilediğini ortaya koymaktadır. Nitekim bu sınavda süre ile yarışıldığı için sonuca en hızlı ve doğru bir şekilde ulaşmak önemli olup, öğrencilerin düşündüklerini yazarak ifade etmelerine gerek olmamaktadır. Bunun sonucu olarak, çoğu öğrencilerin *sonuca odaklı problem çözme davranışı* geliştirdikleri düşünülmektedir. Bu durum, çoğu öğrencinin Polya (1997) tarafından önerilen problem çözme basamaklarından geriye bakış basamağını tam olarak yerine getirmediğini göstermektedir ki Polya da oldukça iyi öğrencilerde bile bu davranışın olduğunu iddia etmektedir.

Bazı öğretmen adaylarının birden fazla çözüm üretmede güçlük yaşamalarının nedeni olarak sonuca odaklı problem çözme davranışı göstererek *önceki çözüm yoluna saplandıkları* veya *bir çözüm bulma rahatlığı içinde oldukları* düşünülebilir. Bu tür davranışların öğretmen adaylarının akıcı, esnek veya orijinal düşünme becerilerini olumsuz yönde etkileyebileceğini söylemek mümkündür.

Sınavlarda vakit kazanmak (hızlı bir şekilde sonuca ulaşmak) amacıyla zaman zaman sezgisel çözüm yapmayı tercih eden öğretmen adayının tespit edilmesi ve bu öğretmen adayında sezgisel düşünmenin belirgin olarak dikkat çekmesi, böyle bir kaygının sezgilerini geliştirmede etkili olabileceğini düşündürmektedir. Ancak

sezgisel yollarla sonuca ulaşmak, öğretmen adayının formal yollardan sonuca ulaşma konusunda sıkıntı yaşamasına neden olabilir.

Mantıksal düşünmenin baskın olduğu öğretmen adaylarının, sezgisel düşünmenin daha baskın olduğu öğretmen adaylarına göre fakülte genel not ortalamaları açısından daha başarılı oldukları tespit edilmiştir. Bu araştırmada, sezgisel düşünen öğretmen adaylarının formal yolla kendi düşüncelerini ifade etmekte zaman zaman sıkıntı çektikleri görülmüştür. Bu tür öğrenciler yazmayı sevmedikleri için düşüncelerini daha az ifade ettiklerinden dolayı, yazılı sınavlarda daha az başarılı olarak algılanabilirler.

5.1.2. Çözüm bulma süreci içinde yaşanan güçlüklerin nedenleri nelerdir?

Matematiksel problem çözmede temel sorun, belirli bir problemin çözümü için gerekenleri bilen bir kişinin problemi çözmede hala başarısız olmasıdır. Bazen olası bir açıklama bu kişilerin akıllarının uygun olmayan yöne eğilimli olmasıdır ki onlar çözüme götürmeyecek bir yaklaşıma katı bir şekilde sadık kalırlar (Haylock, 1997: 69).

Bu araştırmada belirlenmiş olan çözüm bulma güçlüklerini sık sık yaşayan öğretmen adaylarının Haylock'un (1997) belirttiği gibi çözüme götürmeyecek bir yaklaşıma sadık kaldıklarını göstermektedir. Bu sadık kalma durumu, farklı problemlerde farklı şekillerde ortaya çıkabilmektedir. Öğretmen adaylarının zaman zaman *mantıksal hatalar yaptıkları, işlemlerde hata yaptıkları, işlemlere saplandıkları, problemdeki verileri iyi analiz edemedikleri, çözüm için uygun strateji geliştiremedikleri, kendi düşüncelerini sınırlandırdıkları, düşünmeyi zorlaştıran sembol ve temsiller seçtikleri, düşünmeyi zorlaştıran tercih yaptıkları, daha ileri analizi zorlaştıracak tercih yaptıkları, önceden öğrenilmiş çözüm yoluna saplandıkları, ilk yapılan çözüme saplandıkları, bir çözüm bulma rahatlığı içinde oldukları*, bu nedenlerle de problem çözme süreci içinde güçlüklerle karşılaştıkları tespit edilmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının çözüm için daha fazla çaba sarf etmelerine veya çözüme ulaşamamalarına neden olmuştur. Öğretmen adaylarının

çözüm bulma süreci içinde karşılaştıkları güçlüklerin onların akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerilerini engelleyebileceğini söylemek mümkündür.

Matematiksel yaratıcılık matematiksel kavramların temsili için uygun kelime ve sembolü seçme kabiliyetini içerir. Matematikte sembolik gösterimin önemi tahmin edilemez. İyi seçilmiş semboller, bir kavramla ilgili birkaç görüşü tek bir bütün halinde özetleme olanağı verirler öyle ki bu sembol bir metin içinde her görüldüğünde bu bütün akla gelir. Böylece sembollerin kullanımı beyindeki hafıza alanını bilinmeyen ya da net olmayan bir kavramla karşılaşana kadar özgür bırakır (Ervynck, 1991).

Her ne kadar Ervynck'in bu açıklaması daha çok profesyonel matematikçilere yönelik olsa da bu durum öğretmen adayları için de seviye farkı ile geçerlidir. Öğretmen adaylarının problem çözerken kullanmayı tercih ettikleri sembol ve temsillerin, çözüm bulma sürecinde onları doğru ya da yanlış yollara götürebileceği gibi kolay ya da zor yollara da götürebileceği dikkati çekmiştir. Bu durum, Polya'nın (1997) sembollerin kullanımının matematiksel düşünmeyle yakından ilişkili olduğu ve Skemp'in (1986) problem çözmede sembol kullanımının önemli bir rolü olduğu düşüncesi ile desteklenmektedir.

Sriraman'ın (2004) işaret ettiği, yaratıcılık sürecinin dört basamaklı Gestalt modelinin problemden uzaklaşma aşaması olan kuluçka aşaması ve Sriraman'ın (2005) bahsettiği *Gestalt prensibi* göz önünde bulundurulduğunda, matematikte yetenekli bireylerin yaratıcılığını geliştirmede problem çözümü için gerekli süreyi uzatıp, keşfetme için olanaklar sağlamak gereklidir. Bu çalışmada, öğretmen adaylarının açık uçlu ifadelere ya da birden fazla çözüm üretilmesi istenen problemlerde zaman zaman ilk düşündüklerine ya da ilk yaptıkları çözüme saplandıkları ve bu saplantının üstesinden gelmek için bir süre problemden uzaklaşmaya ihtiyaç duydukları tespit edilmiştir. Bu durum, Gestalt modelinin kuluçka aşamasının ve Gestalt prensibinin öğretmen adayları için de geçerli olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Araştırmada belirlenmiş olan çözüm bulma güçlüğü nedenlerinin yalnızca bilişsel özelliklerden kaynaklanmadığı, öğretmen adaylarının içinde bulunduğu psikolojik etkenlerin de çözüm bulma güçlüğüne neden olabileceği söylenebilir.

Bu araştırmada belirlenmiş olan çözüm bulma güçlüklerinin yalnızca biri değil birden fazlası da çözüm üretmede güçlük yaşamaya neden olabilir. Öte yandan, bu güçlükler birbirine neden olmuş da olabilir. Örneğin; herhangi bir problemde verileri iyi analiz edememiş öğretmen adayı çözüm için uygun strateji de geliştirememiş olabilir. Ancak, bu araştırmada, bu konuda detaylı veri mevcut değildir.

5.1.3. Yaratıcı düşünme becerileri (akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerileri) nelere bağlıdır?

Bu araştırma, akıcı düşünme sayesinde birbirini çağrıştıran birçok fikrin üretilmesi, bu fikirlerin çeşitliliğinin de artmasına yani esnek düşünmeye ya da kimsenin görmediği fikir ya da çözümlerin üretilmesine yol açabileceğine işaret etmiştir. Bu durumda, akıcı düşünmenin esnek düşünmeyi ya da orijinal düşünmeyi besleyebileceği ancak, bunu daima garanti etmeyebileceği söylenebilir.

Ayrıca, bazı öğretmen adaylarının akıcı düşünmeyi önemsemeyerek esnek düşünmeye ya da orijinal bir çözüm bulmaya çalıştığı dikkati çekmiştir. Bu durum esnek düşünme ve orijinal düşünme çabasının akıcı düşünmeyi engelleyebileceği şeklinde yorumlanabilir.

4. Bölümde de incelendiği gibi, yaratıcı düşünme becerileri (akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerileri) bazı faktörlere bağlı gibi görünmektedir. Bu faktörler genel olarak bireysel ve dış faktörler olmak üzere ikiye ayrılabilir.

- **Bireysel Faktörler:** Bireysel özellikler, bireysel tercihler, bireysel önyargı ve tutumlar, alışkanlıklar, mantıksal ve sezgisel düşünme, çözüm bulma süreci

içinde yaşanan güçlükler, problemi doğru anlamak, problem çözümlerinde kullanılan stratejiler ve stratejilerin kullanılışındaki farklılıklar, sonuca odaklı problem çözme davranışı ve deneyim,

- **Dış Faktörler:** Farklı problem tipleri, eğitimcilerdeki olası önyargı ve tutumlar.

Ancak, bu faktörlerin hiçbirinin tek başına yaratıcı düşünme becerilerini % 100 doğrudan etkileyeceği şeklinde yorum yapılmamalıdır.

5.1.3.a. Bireysel faktörler

Bu araştırmada bireysel özelliklerin, tercihlerin, önyargı ve tutumların, alışkanlıkların, mantıksal ve sezgisel düşünmenin, çözüm bulma süreci içinde yaşanan güçlüklerin, problemi doğru anlamının, problem çözümlerinde kullanılan strateji ve bu stratejilerin kullanılışındaki farklılıkların, ve sonuca odaklı problem çözme davranışı ve deneyimin de problem çözme sürecindeki yaratıcı düşünme becerilerini etkileyebileceği tespit edilmiştir.

Bireysel Özellikler: Bu çalışmanın bulguları, yaratıcı düşünme becerilerini önemsemek ve bu konuda çaba göstermek, kendine güvenmek, problemi çözerken motive olmak, problemle istekli ve ısrarlı bir şekilde uğraşmak ve çözeceği problem konusunda seçici olmak gibi bireysel özelliklerin zincirleme olarak birbirlerini etkileyebileceği gibi akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerilerini etkileyebileceğini ortaya koymuştur. Bu özelliklerden bazıları, Lubart'ın (1994) belirtmiş olduğu yaratıcılığın kişilik bileşenindeki özellikler arasında da yer almaktadır.

- *Yaratıcı düşünme becerilerini önemsemek ve bu konuda çaba göstermek:* Bu araştırmada, yaratıcı düşünme becerilerinden bazılarını önemseyen ve bu konuda çaba gösterenlerin yanı sıra, yaratıcı düşünmeyi önemsemeyen öğretmen adaylarının olduğu görülmüştür. Dolayısıyla yaratıcı düşünmeyi önemsemek öğretmen adaylarının bu konuda çaba göstermelerini sağlayacağından, yaratıcı düşünme becerilerini pozitif yönde etkileyebilir.

- *Kendine güvenmek:* Bu araştırmada, kendine güvenen öğretmen adaylarının problemin çözümünde daha ısrarlı ve kararlı oldukları veya kendine güvenmeyen öğretmen adaylarının da problem çözümünde çabuk pes ettikleri veya probleme önyargılı yaklaştıkları gözlemlenmiştir. Bütün bu nedenlerden dolayı kendine güvenmek öğretmen adaylarının yaratıcı düşünme becerilerini olumlu yönde etkileyebilir.
- *Problemi çözerken motive olmak:* Sternberg ve Lubart (1991b, 1993, akt. Lubart, 1994) görev odaklı motivasyonun (iç motivasyon), kişinin görev üzerindeki dikkatini korumasını sağlayacağını ve çalışma enerjisi vereceğini, amaç odaklı motivasyonun (dış motivasyon) ise ödüle odaklanmayı sağlayacağını savunur. Bu araştırmada bir çözüm bulma rahatlığı içinde olan öğretmen adaylarının amaca ulaşmanın rahatlığı ile farklı çözüm yolu üretmek için ısrarlı davranmadıkları gözlemlenmiştir. Bu durum, iç motivasyon eksikliğinin yaratıcı düşünmeyi engelleyebileceği şeklinde yorumlanabilir.
- *Problemlle istekli ve ısrarlı bir şekilde uğraşmak:* Araştırmada, kendine güvenen ve motive olan öğretmen adaylarının problemlle istekli ve ısrarlı bir şekilde uğraştıkları tespit edilmiştir. Bu tür durumlarda öğretmen adaylarının daha akıcı, esnek veya orijinal çözüm ve fikirler ürettikleri gözlemlenmiştir.
- *Çözeceği problem konusunda seçici olmak:* Bazı öğretmen adaylarının çözümlerle istekli ve ısrarlı uğraşlarının problemden probleme değişkenlik gösterdiği de tespit edilmiştir. Bazı öğretmen adaylarının çözecekleri problemlerde daha seçici davrandıkları gözlemlenmiştir. Sevdikleri problemlerde çözüm bulmada daha fazla ısrarcı olurken sevmedikleri problemlerde problem çözümünden vazgeçtikleri, daha iyi çözüm yolları üretilmedikleri veya bildiği bir çözüm yolunu tercih ettikleri gözlemlenmiştir. Dolayısıyla, çözeceği problem konusunda seçici olmak da yaratıcı düşünmeyi olumlu ya da olumsuz yönde etkileyebilir.

Ancak bu bireysel özelliklerin yaratıcı düşünmek için tek başına yeterli olmayacağı da göz önünde bulundurulmalıdır.

Bireysel tercihler: Bu araştırmada öğretmen adaylarının yaratıcı düşünme becerilerini birbirleri yerine tercih ettikleri durumlarla karşılaşılmıştır. Örneğin; orijinal çözüm bulmayı akıcı düşünmeye tercih eden, esnek düşünmeyi akıcı düşünmeye tercih eden öğretmen adayları olmuştur. Bu tür tercihler öğretmen adaylarının yaratıcı düşünme becerilerini olumlu ya da olumsuz yönde etkileyebilir.

Bireysel önyargı ve tutumlar: Bu araştırma bireysel önyargıların yaratıcı düşünme becerilerini negatif yönde etkileyebileceğini göstermiştir. Öğretmen adaylarının akıcı, esnek veya orijinal düşünemeyeceği ve bu konuda kabiliyet sahibi olmadıklarına yönelik düşünceleri onların yaratıcı düşünme becerilerini engelleyebilir. Örneğin; orijinal çözüm üretme açısından kendilerini başarısız buldukları durumlarda orijinal düşünme becerisini kendilerine hedef olarak almayan öğretmen adayları olmuştur.

Alışkanlıklar: Bu araştırmada, yazmayı sevmeyen ve benzer çözümleri yazmaya gerek duymayan öğretmen adaylarının zaman zaman diğerlerine göre daha az fikir ürettikleri gözlemlenmiştir. Bu nedenle bu özelliklere sahip olmak akıcı düşünme becerisini engelleyebilir. Diğer taraftan, önceden öğrenilmiş çözüm yolunu tercih etmek, herkesin bildiği çözüm yolunu kullanmak, çabuk pes etmek gibi alışkanlıklar akıcı, esnek veya orijinal düşünmeyi engelleyebilir.

Mantıksal ve sezgisel düşünme: Bu araştırmada mantıksal düşünmeyi tercih edenlerin parçaları inceleyerek küçük küçük fikirler ürettikleri, sezgisel düşünmeyi tercih edenlerin ise bütünü görmeye çalıştıkları için küçük fikirlere fazla önem vermedikleri gözlemlenmiştir. Bu durum, mantıksal düşünmenin sezgisel düşünmeye göre daha akıcı fikir üretmeyi sağladığı şeklinde yorumlanabilir. Sezgisel düşünmeye sahip öğretmen adaylarının daha çok esnek veya orijinal düşünmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Diğer yandan mantıksal ve sezgisel düşünme davranışının her ikisi de orijinal çözüm ve fikir üretmede etkili olabilir.

Çözüm bulma süreci içinde yaşanan güçlükler: Çözüm bulma güçlükleri arasında belirlenmiş olan işlemlere saplanmak, önceden öğrenilmiş çözüme saplanmak, ilk yapılan çözüme saplanmak bakış açısını değiştirmeye engel teşkil eden durumlardır. Dolayısıyla bu güçlükler esnek düşünme becerisini engelleyebilir. Düşünmeyi zorlaştırıcı tercihler yapmak, temsiller veya semboller seçmek çözüm için daha fazla çaba sarfetmeyi gerektireceği için esnek düşünme becerisini olumsuz yönde etkileyebilir.

Problemi doğru anlamak ve probleme iyi konsantre olmak: Problemi doğru anlamak ve probleme iyi konsantre olmak problemin çözümü için bir ön şarttır. Problemi doğru anlayan ve iyi konsantre olan birey çözüm için daha uygun stratejiler geliştirebilme şansına sahip olacaktır. Araştırmada, bazı öğretmen adayları problem çözümünde kendine güvenmediklerinden dolayı problemlere iyi konsantre olamadıklarını ifade etmişlerdir. Bu konsantrasyon eksikliği öğretmen adaylarının akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerileri için de bir engel sayılabilir.

Problem çözümlerinde kullanılan stratejiler ve stratejilerin kullanılışındaki farklılıklar: Bu araştırmada öğretmen adaylarının problemleri çözmek için çeşitli stratejilerden yararlandıkları görülmüştür. Bu stratejilerin kullanım şekli problemden probleme değişebildiği gibi, aynı problemde aynı stratejiyi kullanan kişiden kişiye göre de değişebilmektedir. Bir problem için tercih edilen herhangi bir stratejinin kullanımındaki farklılık, kişiyi düşünmesi kolay ya da zor yollara götürebilmektedir. Yani, öğretmen adaylarının aynı stratejiyi kullanmalarına rağmen, o stratejiyi kullanım şekillerindeki farklılıklardan dolayı sonuca ulaşmada ve farklı çözüm yolları üretmede başarılı ya da başarısız oldukları gözlemlenmiştir. Bu durum, sonuca ulaşamama ya da sonuca ulaşmak için daha fazla çaba sarf etmeye neden olabilmekte ve dolayısıyla akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerisini olumsuz yönde etkileyebilmektedir. Bu sonuç daha çok, kullanılan stratejinin başarılı veya başarısızlığından ziyade, öğretmen adaylarının bu stratejileri etkili kullanıp kullanmamalarına bağlı olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Öğretmen adaylarının kullandıkları stratejilerden basit fikir üretme stratejisinin akıcı, esnek ve orijinal düşünme açısından önemli bir yeri olduğu düşünülebilir. Çünkü basit fikir üretme stratejisi ile problemin verilerinde yer alan, herkesin gözü önünde olmasına rağmen çoğu kişinin gözden kaçırdığı ya da bakmaya gerek duymadığı bilgiler ulaşma şansı doğabilir ki bu sayede orijinal çözümlerin ortaya çıkması sağlanabilir. Bu strateji problemi anlama aşamasında alternatif çözüm yolları belirlemek ya da çözüm yaparken ortaya çıkabilecek takılma noktalarını aşmak için işe yarayabilecek bir strateji gibi görünmektedir.

Basit fikir üretme stratejisinin yanı sıra problem üzerinde detaylı ve derin incelemeler yapmak ulaşılması zor fikirlere ulaşmayı sağlayabileceğinden orijinal düşünme becerisini pozitif yönde etkileyebilir.

Genel ifadeler üzerinde düşünmekte güçlük çeken öğretmen adaylarının özel değer incelemesi ve özel durum incelemesi stratejilerini kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Diğer taraftan özel değer inceleme ya da özel durum inceleme stratejisi yeni fikirlerin ortaya çıkmasına imkan sağlayabileceği için akıcı ve esnek düşünme becerilerini olumlu yönde etkilediği söylenebilir. Bu stratejiler aslında bir çeşit deneme-yanılma ya da tahmin ve test etmedir. Meissner (2008) benzer olarak değerli matematiksel davranış olarak görülmeyen tahmin ve test etme veya deneme-yanılmanın sezgisel düşünme için gerekli olduğunu iddia eder.

En çok tercih edilen stratejilerden biri olan algoritmik işlem yapma stratejisi genellikle problemin gösterdiği çözüm yolu olduğu için orijinal çözüm veya fikir üretmede etkili değil gibi görünmektedir.

Aslında bir stratejiye bağlı kalmaktan ziyade birden çok stratejiyi bir arada kullanmanın ve strateji seçiminde esnek olmanın daha yaratıcı çözümlerin ortaya çıkmasında etkili olabileceği söylenebilir.

Sonuca odaklı problem çözme davranışı ve deneyim: Bölüm 5.1.'de de bahsedildiği gibi, bu araştırmadaki sonuçlar, ülkemizdeki sınav sisteminin öğretmen

adaylarının problem çözme davranışlarını önemli ölçüde etkilediğini ve öğretmen adaylarının sonuca odaklı problem çözme davranışı geliştirdiklerini göstermektedir. Öğretmen adaylarının birden fazla çözüm üretmede güçlük yaşamalarının nedenlerinden biri olarak sonuca odaklı problem çözme davranışının olabileceği tahmin edilmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının farklı çözüm yolları kullanarak sonuca ulaşmaktan ziyade, belli bir yoldan sonuca ulaşmayı tercih etmelerine neden olabileceği ve dolayısıyla da akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerilerini engelleyebileceği söylenebilir.

Bu araştırmada veri toplama süreci içinde işlenen seçmeli ders kapsamında farklı çözüm yolları üretme konusunda cesaretlendirilmesinin öğretmen adaylarının problem çözme alışkanlıklarını etkilediği de tespit edilmiştir. Araştırma bulguları, uygulanan bu seçmeli dersin öğretmen adaylarında daha önceden var olmayan başka çözümler araştırma çabasının oluşmasını sağladığını göstermektedir. Bu durum, yaratıcı düşünme becerilerinin geliştirilmesi için farklı çözüm yolları üretme konusunda öğretmen adaylarının cesaretlendirilmesinin uygun bir strateji olduğu şeklinde yorumlanabilir.

5.1.3.b. Dış faktörler

Farklı problem tipleri: Bu araştırmada, akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerileri açısından öğretmen adaylarının performanslarında aynı problem gruplarında bile farklılıklar olduğu tespit edilmiştir. Diğer bir deyişle, yaratıcı düşünme becerileri problemden probleme, problem tipinden problem tipine göre ve hatta konudan konuya (alana) göre değişiklik gösterebilmektedir.

Eğitimcilerdeki olası önyargı ve tutumlar: Bulgular, bazı öğretmen adaylarının ifadelerine göre eğitimcilerin öğrencilerinin ürettikleri farklı fikir veya çözümleri “yanlış” olarak nitelendirmeleri ve sınavlarda kendi öğrettikleri doğrultuda çözüm yapılmadığında öğrencilerine düşük not vermeleri sonucunda öğrencilerin *herkes gibi* düşünmeye zorlanabileceğine ve orijinal düşünme becerilerinin

köreltilebileceğine işaret etmiştir. Bu durum, Lubart'ın (1994) yaratıcılığın bileşenlerinden biri olarak ifade ettiği çevrenin olumsuz etkisini göstermektedir.

5.2. Öneriler

Yaratıcı problem çözme becerisine sahip bireylerin yetişmesi için öncelikle öğretmenlerin bilinçli olması gereklidir. Benzer şekilde, öğretmen adaylarının yaratıcı düşünme becerileri konusunda bilinçlendirilmesi için de yaratıcı düşünme becerileri konusunda bilinçli öğretmen eğitimcilerine ihtiyaç vardır. Bu durum yaratıcı düşünme becerileri konusunda öğretmen eğitimi kurumlarında özellikle de matematik eğitiminde daha fazla araştırma yapılmasını gerektirmektedir.

Öğrencilerin bir takım çözüm metotlarını öğrenmeleri gereklidir. Ancak kendi çözümlerini geliştirmelerine de fırsat verilmelidir. Yalnızca belli bir yoldan çözüm yapmalarını istemek veya en iyi çözüm yolunu öğretmek yerine farklı çözümlerin yapılmasını desteklemek gereklidir. Farklı çözüm yolları geliştirme konusunda öğrenciler özgür bırakılmalı, hatta kendi çözüm yollarını oluşturmaları konusunda alışkanlık kazanmaları sağlanmalıdır. Problem çözmede sonuca ulaşmış olmanın yeterli olduğu gibi bir anlayışın yerleşmemesi için önlemler alınmalıdır.

Doğru sonuca ulaşmanın önemli olduğu ÖSS'ye hazırlık sürecinde de öğrencilerin sonuca ulaşmanın farklı yollarını bulmaları sağlanmalıdır. Bu şekilde hızın önemli olduğu bu sınav için sonuca en hızlı ulaştıran çözümü de belirlemeleri sağlanabilir.

Alışılmışın dışında üretilmiş matematiksel fikirler desteklenmeli ve değerlendirilmelidir. Akıcı, esnek ve orijinal düşünme becerilerinin değerlendirildiğini bilen öğrenciler bu becerilerini geliştirmek için çaba sarf edebilirler.

Araştırmada açık uçlu durum olarak verilmiş bazı problemlerin (özellikle de araştırmada kullanılmış olan I-A tipindeki problemler) sezgisel düşünmeyi harekete geçirdiği görülmüştür. Sezgisel düşünmenin geliştirilmesi için özellikle ortaöğretim ve lisans düzeyinde böyle problemler kullanılabilir.

Kanıt problemlerinden sonucun çıkarılması ile oluşturulmuş problemler (araştırmada kullanılmış olan I-A grubu problemler gibi) ulaşılacak sonucun ne olduğu bilinmediği için yapılandırılmış haline göre daha belirsiz bir problem ortamı oluşturacaktır. Profesyonel matematikçilerin uğraştıkları problemlerin her zaman iyi yapılandırılmış olmaması bu belirsizliğin öğrencilere de belli bir seviyede yaşatmak gerektiğini düşündürmektedir. İspat gerektiren problemlerin sonuçlarının çıkarılmasıyla açık uçlu durumlar oluşturmak, belirsizliği oluşturmak için bir yöntem olabilir. Bu şekilde öğrenciler verilen ifadeyi sonuç doğrultusunda incelemek yerine daha detaylı incelemek durumunda kalacaklardır. Bu nedenle, derslerde bu tür problem ortamları yaratılmalıdır. Bu tip problemler daha çok ortaöğretim ya da lisans düzeyi için uygun olabilir.

Öğrencilerin uğraşıp çözemedikleri problemlerde ya da problemin farklı çözümlerini araştırma durumunda problemin çözümünü hemen açıklamak yerine, onların problemle daha sonra tekrar uğraşmalarına fırsat verilmelidir.

Öğrencilerin hem mantıksal ve hem de sezgisel düşünmeyi bir arada kullanabilmeleri konusunda çaba sarf edilmelidir. Bunlardan yalnızca birine önem vermek öğrencilerin tek yönlü yetişmesine neden olabilir. Ayrıca sezgilerin yanılabilirliğinin bilincinde olarak formal yollarla bu sezgileri doğrulamanın gerekli olduğunu bilmelidirler.

Problem çözerken kendi düşünmesini kısıtlandırmış olabileceğini bilen bir öğrenci bakış açısını genişletmek için çaba harcayabilir ya da seçtiği temsillerin veya sembollerin düşünmeyi zorlaştırıcı tercih olup olmadığını yargılayabilir. Bu nedenle, öğrenciler problem çözme süreci içerisinde yapılabilecek hatalar ya da karşılaşılabilecek güçlükler konusunda bilinçlendirilmelidir.

Problem çözme sürecinde öğrencilerin algoritmik işlemleri etkili bir araç olarak kullanabilmeleri sağlanmalıdır. Öte yandan, algoritmik işlemlerin çoğunlukla sıradan çözümlerin ortaya çıkmasında etkili olduğu bilinmelidir. Özel değer inceleme ya da özel durum inceleme gibi stratejiler de önemsenmelidir. Bu stratejiler özellikle belirsizlik içeren açık uçlu durumlarda problemle ilgili ipucu belirlemek için önemlidir. Öğrencilerin bu stratejileri etkili kullanmaları sağlanmalıdır.

Matematiksel kavramları birbirleri ile ilişkilendirme konusunda öğrenciler cesaretlendirilmelidir. Bu şekilde, problem çözümlerinde görünen ilişkilerin ötesinde ilişkilendirme yapılarak orijinal çözüm üretmek mümkün olabilir.

Öğrenciler, problem çözme sürecinde akıcı, esnek veya orijinal düşünme becerilerini birbirlerine tercih etmek yerine bu becerileri esnek bir şekilde kullanmak için çaba göstermelidirler.

Ortaöğretim ya da ilköğretim seviyesindeki öğrencilerin problem çözme durumlarındaki yaratıcılıklarını konu alan araştırmalar yapılmalıdır. Daha detaylı inceleme yapmak için daha az sayıda ve aynı tip problemler kullanılarak benzer çalışmalar yürütülebilir.

KAYNAKÇA

BOGDAN, R. C. and BIKLEN, S. K., (1992). **Qualitative Research for Education: An Introduction to Theory and Methods**. Boston: Allyn and Bacon.

BRYMAN, A., (1988). **Quantity and Quality in Social Research**. London: Unwin Hyman.

CHAMBERLIN, S. A. and MOON, S. M. (2005). **Model-Eliciting Activities as a Tool to Develop and Identify Creatively Gifted Mathematicians**. The Journal of Secondary Gifted Education. Vol. 17, 37–47.

CHARLES, R. E. and RUNCO, M. A., (2000-2001). **Developmental Trends in the Evaluative and Divergent Thinking of Children**. Creativity Research Journal, Vol. 13, 417–437.

CROPLEY, A. J., (2001). **Creativity in Education & Learning: A Guide for Teachers and Educators**. London: Kogan Page.

DAVIS, G. A. and RIMM, S. B., (2004). **Education of the Gifted and Talented**. New York: Pearson.

ERICKSON, M. J. and FLOWERS, J., (1999). **Principles of Mathematical Problem Solving**. New Jersey: Prentice Hall.

- ERVYNCK, G., (1991). Mathematical Creativity. In **Advanced Mathematical Thinking**. D. Tall (Ed.), (p. 42–53). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- FISCHBEIN, E., (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. In **Forms of Mathematical Knowledge**. D. Tirosh (Ed.), (p. 11-50). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- GARDNER, H., (January 13, 2008), **Five Minds for the Future**, The Ecolint Meeting in Geneva.
<http://www.howardgardner.com/Papers/documents/ibo%204%2013%2008%202.doc>
- HADAMARD, J., (1945). **Essay on the psychology of invention in the mathematical field**. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- HAYLOCK, D., (1997). **Recognising Mathematical Creativity in School children**. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 29, 68–74.
<http://www.emis.de/journals/ZDM/zdm973i.html>
- HEKİMOGLU, S., (2004). **Conducting a Teaching Experiment With a Gifted Student**. The Journal of Secondary Gifted Education, Vol. XVI, No:1,14–19.
- HIGGINSON, W., (2000). **Creativity in Mathematics Education: The Role of the Teacher**. Proceeding of The 9th International Congress on Mathematical Education. Tokyo.
<http://www.math.uni-uenster.de/didaktik/u/meissne/WWW/creativity.crbh.doc>

HOONG, F. K., (2008). **Promoting Mathematical Creativity for All Students with Creative Assessment**. Proceedings of the Discussing Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education, The 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico. <http://dg.icme11.org/tsg/show/10>

IMAI, T., (2000a). **The Influence of Overcoming Fixation in Mathematics Towards Divergent Thinking in Open-Ended Mathematics Problems on Japanese Junior High School Students**. International Mathematics Education Science and Technology, Sayı:31, No:2, 187–193.

IMAI, T., (2000b). **The Relationships Between Fluency and Flexibility of Divergent Thinking in Open Ended Mathematics Situation and Overcoming Fixation in Mathematics on Japanese Junior High School Students**. Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 3, 79–86.

JENSEN, L. R., (1973), **The Relationships Among Mathematical Creativity, Numerical Aptitude and Mathematical Achievement**. Unpublished PhD Thesis. The University of Teksas, Austin.

KARAKAŞ, H. İ., ve ALİYEV, İ., (2003a). **Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri**. Ankara: TÜBİTAK Yayınları.

KARAKAŞ, H. İ., ve ALİYEV, İ., (2003b). **Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri**. Ankara: TÜBİTAK Yayınları.

KING, J. P., (2004). **Matematik Sanatı**. Çeviren: N. Arık. Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları.

KIRTON, M. J., (2003). **Adaptation-Innovation. In the Context of Diversity and Change.** New York: Routledge.

LIVNE, N. L. and MILGRAM, R. M., (2000). **Assessing Four Levels of Creative Mathematical Ability in Israeli Adolescents Utilizing Out-of-School Activities: A Circular Three-Stage Technique.** Roeper Review. Vol. 22, No:2, 111–116.

LUBART, I. T., (1994). Creativity. In **Thinking and Problem Solving (Handbook of Perception and Cognition).** R. J. Sternberg (Ed.) (p. 289–323). San Diego: Academic Press.

LUBART, T. I., (2000–2001). **Models of the Creative Process: Past, Present and Future.** Creativity Research Journal. Vol. 13, Nos. 3 & 4, 295–308.

MANN, E. L., (2005). **Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students.** Unpublished PhD Thesis. University of Connecticut.

MAYKUT, P. and MOREHOUSE, R., (1994). **Beginning Qualitative Research: A Philosophic and Practical Guide.** London: Falmer press.

MEB, (2005a). **İlköğretim Matematik Dersi 1–5. Sınıflar Öğretim Programı.** Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.

MEB, (2005b). **İlköğretim Matematik Dersi 6–8. Sınıflar Öğretim Programı.** Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.

MEB, (2005c). **Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) Dersi Öğretim Programı**. Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.

MEB, (2007). **PISA 2006 Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı Ulusal Ön Rapor**. Milli Eğitim Bakanlığı, Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Dairesi Başkanlığı, Ankara.

MEISSNER, H., (2000). **Creativity in Mathematics Education**. Proceeding of The 9th International Congress on Mathematical Education. Tokyo.
<http://www.math1.uni-muenster.de/didaktik/u/meissne/WWW/creativity.crhm.doc>

MEISSNER, H., (2005). **Creativity and Mathematics Education**. Proceeding of The Third East Asia Regional Conference on Mathematics Education. Shanghai, Nanjing, Hangzhou. <http://math.ecnu.edu.cn/earcome3/SYM1.htm>

MEISSNER, H., (2008). **Intuitive–Creative–Gifted–Logical. An Analysis for The Discussion Group 9 at ICME 11**. Proceedings of the Discussing Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education, The 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Mexico.
<http://dg.icme11.org/tsg/show/10>

MINA, F., (2008). **Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education**. Proceedings of the Discussing Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education, The 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico.
<http://dg.icme11.org/tsg/show/10>

- ORAL, G. (2006). **Creativity of Turkish Prospective Teachers.** Creativity Research Journal, Vol. 18, No. 1, 65–73.
- PARK, H., (2004), **The Effects of Divergent Production Activities with Math Inquiry And Think Aloud of Students with Math Difficulty.** Unpublished PhD Thesis. Texas A& M University.
- PATTON, M. Q., (1987). **How to use Qualitative Methods in Evaluation.** London: Sage Publications.
- PEHKONEN, E., (1997). **Fostering of Mathematical Creativity: The State of Art in Mathematical Creativity.** Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 29, 63–67. <http://www.emis.de/journals/ZDM/zdm973i.html>
- POINCARÉ, H., (2001). **Bilimin Değeri.** Çeviren: F. Yücel. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.
- POLYA, G., (1962) **Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving.** New York: John Wiley & Sons, Inc
- POLYA, G., (1997). **Nasıl Çözmeli? Matematikte Yeni Bir Boyut.** Çeviren: F. Halatçı. İstanbul: Sistem Yayıncılık.
- POSAMENTIER, A. S. and KRULIK, S., (1998). **Problem-Solving Strategies For Efficient and Elegant Solutions.** California: Corwin Press, Inc.

POSAMENTIER, A. S. and SALKIND, C. T., (1988). **Challenging Problems in Geometry**. Canada: Dale Seymour Publication.

RUNCO, M. A., (2004). **Creativity**. Annual Review of Psychology, 55, 657–687.

SHEFFIELD, L. J., (2005). **Using Creativity Techniques to Add Depth and Complexity to the Mathematics Curricula**. Proceeding of The Third East Asia Regional Conference on Mathematics Education. Shanghai, Nanjing, Hangzhou. <http://math.ecnu.edu.cn/earcome3/SYM1.htm>

SHEFFIELD, L. J., (2008). **Promoting Creativity For All Students in Mathematics Education: An Overview**. Proceedings of the Discussing Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education, The 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Mexico. <http://dg.icme11.org/tsg/show/10>

SILVER, E. A., (1997). **Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing**. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 29, 75–80.
<http://www.emis.de/journals/ZDM/zdm973i.html>

SKEMP, R. R., (1986). **The Psychology of Learning Mathematics**. London: Penguin Boks.

SRIRAMAN, B., (2003). **Mathematical Giftedness, Problem Solving, and the Ability to Formulate Generalizations: The Problem-Solving Experiences**

of Four Gifted Students. The Journal of Secondary Gifted Education. Vol. 14, 151–165.

SRIRAMAN, B., (2004). **The Characteristics of Mathematical Creativity.** The Mathematics Educator, Vol. 14, No. 1, 19–34.

SRIRAMAN, B., (2005). **Are Giftedness And Creativity Synonyms in Mathematics?** The Journal of Secondary Gifted Education. Vol. 17, 20–36.

SRIRAMAN, B. (2008). Gifted Ninth graders' Notions of Proof. Investigating Parallels in Approaches of Mathematically Gifted Students and Professional Mathematicians.. In **The Montana Mathematics Enthusiast Monograph 4- Creativity, Giftedness, and Talent Development in Mathematics.** B. Sriraman (Ed.), (p. 61–84). Charlotte: Information Age Publishing, Inc.

STERNBERG R. J. and LUBART T. I., (1999). The Concept of Creativity: Prospects and Paradigms. In **Handbook of Creativity.** R. J. Sternberg (Ed.) (p. 3–15). Cambridge: Cambridge University Press.

STRAUSS, A. and CORBIN, J., (1998). **Basics of Qualitative Research.** Thousand Oaks, London & New Delhi: Sage Publication.

TALL, D., (1980) **Mathematical Intuition with Special Reference to Limiting Processes.** Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Berkeley, 170–176.

<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/limits-infinity.html>

- TALL, D., (1991). **The Pyscology of Advance Mathematical Thinking.** In **Advanced mathematical thinking.** D. Tall (Ed.), (p. 42–53). Dordrecht: Kluwer.
- TEZCİ, E., KANDEMİR, M. A. and GÜR, H., (2008). **The Effects of Creativity Training in Problem Solving On the Achievement of the Prospective Mathematics Teachers.** New World Sciences Academy. Vol.3, 204–218.
- THOMAS, G. and JAMES, D., (2005). **Reinventing Grouded Theory: Some Questions About Theory, Ground And Discovery.** British Educational Research Journal, Vol. 32, No. 6, 767–795.
- USISKIN, Z., (2000). **The Development Into the Mathematically Talented.** Journal of Secondary Gifted Education, Vol. 11, No 3, 152–162.
- YILDIRIM, A. ve ŞİMŞEK, H., (2005). **Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Teknikleri.** Ankara: Seçkin Yayınları.

EKLER

EK 1: Görüşme Soruları

EK 2: Araştırmada Kullanılan Problemler

EK 3: Problem 1 (a) için yapılan çözümlerin şeması

EK 4: Problem 1 (b) için yapılan çözümlerin şeması

EK 5: Problem 2 (a) için yapılan çözümlerin şeması

EK 6: Problem 2 (b) için yapılan çözümlerin şeması

EK 7: Problem 3 için yapılan çözümlerin şeması

EK 8: Problem 4 için yapılan çözümlerin şeması

EK 9: Problem 8 için yapılan çözümlerin şeması

EK 10: Problem 9 için yapılan çözümlerin şeması

EK 11: Problem 17 için yapılan çözümlerin şeması

EK 12: Problem 18 için yapılan çözümlerin şeması

EK 13: Problem 20 için yapılan çözümlerin şeması

EK 14: Problem 21 için yapılan çözümlerin şeması

EK 15: Problem 13 için yapılan çözümlerin tablosu

EK 16: Problem 19 için yapılan çözümlerin tablosu

EK 17: Problem 1 (a) için üretilen fikirlerin tablosu

EK 18: Problem 1 (b) için üretilen fikirlerin tablosu

EK 19: Problem 3 için üretilen fikirlerin tablosu

EK 20: Problem 5 için üretilen fikirlerin tablosu

EK 21: Problem 6 için üretilen fikirlerin tablosu

EK 22: Problem 8 için üretilen fikirlerin tablosu

EK 23: Problem 9 için üretilen fikirlerin tablosu

EK 24: Seçmeli derste kullanılan Salvador Dali'ye ait iki eser

EK 1: GÖRÜŞME SORULARI

Birinci görüşme soruları

$F:A \rightarrow B$ fonksiyonu her $x,y \in A$ için

$$F(x+y)=F(x)F(y)$$

eşitliğini sağlıyorsa F fonksiyonu için neler söyleyebilirsin?

Problem hakkında yüksek sesle düşün.

- Problemin kolay ya da zorluğu hakkında ne düşündün?
- Problemi çözüp çözemeyeceğin konusunda ne düşündün?
- Genelde karşılaştığın problem hakkında bu açıdan düşünür müsün?
- Problemi çözmeye nasıl başladın? Çözüm hakkında ilk aklına gelen nelerdi?
 - Hangi sayıları denedin?
 - Neden bu sayıları seçtin?
 - Genelde bu tür problemleri bu yöntemle mi çözersin?
- Problemi çözerken kendi kendine hangi soruları sordun?
- Genelde karşılaştığın problemi çözerken kendi kendine hangi soruları sorarsın?
- Problemin çözümüyle uğraşırken takıldığın noktalarda ne yaptın?
- Problemi çözmeye uğraşmak için seni motive eden nedir?
 - Zorunlu olmasaydın böyle bir soruyu çözer miydin?
- Bu problemin çözümüyle uğraşırken neler hissettiğini açıklar mısın? Neden?
 - Kendine güvenir misin?
- Problemi çözerken sonuçları genellemeye çalışır mısın? Nasıl?
- Problem çözümlerini beyninde nasıl tasarlarsın? Özel olarak yaptığın bir şeyler var mı?
- Şu ana kadar derste çözmeye çalıştığın sorulardan hangileri ile uğraşmaktan hoşlandın? Hangileri sıkıcı geldi? Neden?
- Uğraştığın problemi çözemediğin zaman ne yaparsın? Neden?
 - Bakış açını nasıl etkiler?
- Çözümünün doğruluğundan nasıl emin oldun?

İkinci görüşme soruları

1. “Esnek düşünme” den ne anladığını ifade eder misin? Örnek verebilir misin?
2. Matematiksel problemleri çözmeye çalışırken esnek olduğunu düşünüyor musun? Neden? Hangi tip problemlerde esnek düşünebiliyorsun?
3. Bu dersten sonra esnek düşünme becerinde nasıl bir gelişme oldu?
 - i. Neden bir gelişme oldu (olmadı)?
 - ii. Geliştirmek için neler yapmak gerekir, ne yapmamızı istersin?
 - iii. Sence esnek düşünme becerisini ne kadar sürede kazanabileceğini düşünüyorsun?
4. “Akıcı düşünme” den ne anladığını ifade eder misin? Örnek verebilir misin?
5. Bu dersten sonra akıcı düşünme becerinde nasıl bir gelişme oldu?
 - i. Neden bir gelişme oldu (olmadı)?
 - ii. Geliştirmek için neler yapmak gerekir, ne yapmamızı istersin?
 - iii. Sence akıcı düşünme becerisini ne kadar sürede kazanabileceğini düşünüyorsun?
7. Matematiksel problemlerin çözümünün orijinal olması sana göre ne anlama gelmektedir?
8. Sana orijinal gelen bir çözüm ya da ispat ile daha önce karşılaştın mı? Ne açıdan çözüm orijinal göründü?
9. Orijinal çözümler üretmek için çaba gösterir misin? Neden?
10. Hangi durumlarda orijinal çözüm üretmeye çalışırsın? Neden? Hangi tip problemlerde?
11. Diğer kişilerden farklı çözümler üretmek sana neler hissettirir?
12. Diğer kişilerden farklı çözümler üretememek sana neler hissettirir?

Üçüncü Görüşme Soruları

1. Sana bir problem verdiğimi farz et. Problemi çözme sürecinde şu soruları da dikkate alarak neler yapacağını, nasıl davranacağını anlatır mısın?
 - a. Problemi çözmeye nasıl başlarsın? Nedenini açıklayabilir misin?
 - b. Problem çözmeye başlarken çözümü zihninde tasarlar mısın?
 - i. Nasıl tasarlarsın? Bu süreç zihninde nasıl gelişir?
 - ii. Neden tasarlamaya gerek duymuyorsun? Nedenini açıklayabilir misin?
 - c. Problem sana ilginç geldi ve çözmek istiyorsun fakat başlangıçta çözüm için hiçbir şey düşünemedin. Bu durumda ne yaparsın?
 - d. Problemin çözümü için algoritmik işlemlerin seni sonuca ulaştıracağını fark ettin. Bu durumda ne yaparsın Nedenini açıklayabilir misin?
 - e. Problemin çözümü için seni sonuca ulaştırmayacağını düşündüğün yollar fark ettin. Bu durumda ne yaparsın? Nedenini açıklayabilir misin?
 - f. Problem için bir çözüm buldun. Bu durumda ne yaparsın?
 - i. Yaptığın çözümün doğruluğundan nasıl emin olursun?
 - ii. Başka çözümlerin olup olmadığını araştırır mısın?
2. Bu dersin başından sonuna kadar geçirdiğin süreci nasıl değerlendirirsin? Problem çözme sürecinde nasıl bir değişiklik oldu? Nedenini açıklayabilir misin?
3. Yaptığın çözümü yazarken nelere dikkat edersin?
4. Birden fazla çözüm üretmen gerektiğinde ilk yaptığın çözüm seni nasıl etkiler?
5. Sence farklı çözümler üretmek için neler gereklidir? Bu konuda kendinde eksik gördüğün yönler var mı? Neden?
6. Bu derste çözdükten sonra çözümünü tartıştığımız problemlerden herhangi birine, senin düşünemediğin farklı çözümler bulan oldu mu? Eğer öyleyse bu çözümleri senin düşünememiş olmanın nedeni ne olabilir?

EK 2: Araştırmada Kullanılan Problemler

Problem 1.

a) $x!+y!=z!$

b) $x!y!=z!$

eşitlikleri için neler söyleyebilirsiniz?(Problem 2'den uyarlama)

Problem 2.

a) $x!+y!=z!$ olacak şekilde $x>1,y>1,z>1$ tamsayılarının olmadığını gösteriniz.

b) $x!y!=z!$ olacak şekilde sonsuz sayıda $x>1,y>1,z>1$ tamsayılarının olduğunu gösteriniz. (Erickson ve Flowers, 1999: 30,)

Problem 3.

$n \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere $5^n+6.7^n+1$ tamsayısı için neler söyleyebilirsiniz?

Problem 4.

$n \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere $5^n+6.7^n+1$ tamsayısının 8 ile bölünebileceğini gösteriniz.

Problem 5.

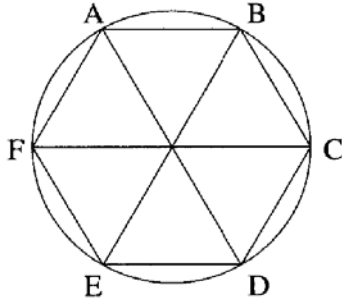
9,99,999,... dizisi hakkında neler söyleyebilirsiniz? (UMO 2001'den uyarlama)

Problem 6.

Bir altıgen çembere degecek şekilde çizilir. Altıgenin her bir köşesi, çemberin üzerinde; diğer noktaları ise çemberin iç bölgesinde bulunmaktadır. Altıgenin her bir açısının köşesi A,B,C,D,E ve F harfleri ile isimlendirilsin. Eğer bu çizimi inceleyecek olursanız, çizimle ilgili daha belirgin özellikleri gözlemleyebilirsiniz. Bu gözlemleri yaparken aklınıza gelen fikirleri çizimin altında bırakılan yere yazınız. Aklınıza gelen fikirler size çok aşıkarsa gelse de yazınız. Her bir ifadenizde yalnızca

bir fikri belirtmeye çalışın. Çizim ile ilgili herhangi bir ölçüm yapmayınız; çizim size nasıl görünüyorsa ona göre ifadenizi yazınız. Bundan dolayı eğer şeklin bazı yerleri size eşit büyüklükte görünüyorsa, bunları belirtin. Çemberin merkezi O'dur.

Şimdi aşağıdaki şekille ilgili aklınıza gelen tüm fikirleri yazma işlemine geçin. Aşağıda gözlemleriniz sonucunda yazabileceğiniz olası iki ifade örnek olarak verilmiştir: (Imai, 2000a)



(1)Altıgenin her bir açının köşesi (ya da “köşe noktası”) çember üzerindedir.

(2)Çemberin merkezi aynı zamanda altıgenin de merkezidir.

Problem 7.

Ayşe, masanın üstünde duran farklı renkteki dokuz topun ağırlıklarının 1,2,...,9 gram olduğunu biliyor, ancak hangi topun hangi ağırlıkta olduğunu bilmiyor. Barış ise her topun ağırlığını biliyor. Barış, hangi kefenin ağır olduğunu ve kefelerdeki ağırlıkların farkını gösteren bir teraziyi kullanarak bu bilgisini Ayşe'ye nasıl kanıtlayabilir? Üretebileceğiniz çözümleri yazınız. (UMO 2003'den uyarlama)

Problem 8.

$M \subset Q$ kümesinin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

a) Eğer a ve b , M nin elemanı ise $a+b$ ve ab de M 'nin elemanıdır

b) Her $r \in Q$ için aşağıdaki önermelerden yalnızca biri doğrudur

$$r \in M, -r \in M, r=0.$$

M kümesi hakkında neler söyleyebilirsiniz? (Karakaş ve Aliyev, 2003b:150) den uyarlama (sayılar teorisi)

Problem 9.

Her x, y reel sayıları için

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonu hakkında neler söyleyebilirsiniz? (Karakaş ve Aliyev'den (2003a:216) uyarlama)

Problem 10.

Her terimi 2001 den küçük ya da eşit olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitif tam sayıları dizisi, her $i \geq 3$ için, $x_i = |x_{i-1} - x_{i-2}|$ koşulunu sağlıyorsa, n en çok kaç olabilir? (UMO 2001)

Problem 11.

Bir hapishanede 1 den 100 e numaralandırılmış 100 hücre vardır. Bir gece gardiyan hücrelerin hepsinin kilidini açıyor, daha sonra her ikinci (2,4,6,...) hücreyi kilitliyor. Daha sonra her üçüncü (3,6,9,...) hücrenin kilidini eğer kilitliyse açıyor, açıksa kilitliyor. Aynı işlemi 99. ve en sonunda 100. kapıya kadar uyguluyor. Bu işlem bittiğinde hangi hücrelerin kilidi açıktır? (Erickson ve Flowers, 1999:7)

Problem 12.

$n > 1$ bir tek tamsayı ve A , her bir satır ve sütunu $1, 2, \dots, n$ nin bir permütasyonundan oluşan $n \times n$ simetrik bir matris olsun. A nın esas köşegeninde her bir $1, 2, \dots, n$ tam sayısının yer almak zorunda olduğunu gösteriniz. (Erickson ve Flowers, 1999:83)

Problem 13.

$\sqrt{10} + \sqrt{17}$ ile $\sqrt{53}$ sayılarından hangisi daha büyüktür? (Hekimoglu, 2004)

Problem 14.

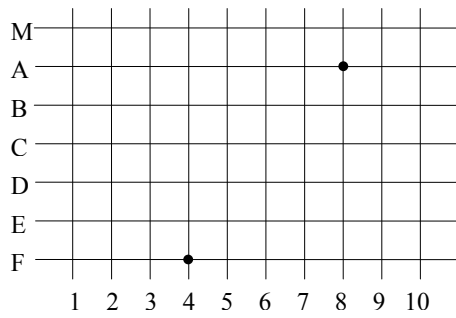
ABCD karesinde M AB kenarının orta noktasıdır. MC ye M noktasında çizilen dikme AD kenarını K noktasında kesiyor. $\hat{BCM}$ açısı ile $\hat{KCM}$ açısının eş olduğunu gösteriniz. (Posamentier ve Salkind, 1988)

Problem 15.

Çapı gören çevre açının dik açı olduğunu gösteriniz.

Problem 16.

ABCD bir kare ve E, bu karenin içinde bir nokta olsun. Eğer $s(\hat{EDC}) = s(\hat{ECD}) = 15^\circ$ ise $\triangle ABE$ üçgeninin eşkenar üçgen olduğunu ispatlayınız. (Posamentier ve Salkind, 1988)

Problem 17.

Şekilde bir şehrin haritası verilmiştir. Akın 4. cadde ile F'nin köşesinde oturuyor ve 8. cadde ile A'nın köşesinde oturan Betül'ü ziyarete gitmeyi planlıyor. Caddelerde trafik akışı sadece kuzey ve doğu istikametindedir. Buna göre Akın kaç değişik şekilde Betül'ü ziyaret edebilir (Posamentier ve Krulik, 1998).

Problem 18.

$a_1, a_2, \dots, a_{17}$ tamsayılar ve $b_1, b_2, \dots, b_{17}$ bu sayıların başka bir sıralanışı olsun. $S = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{17} - b_{17})$ sayısının bir çift sayı olduğunu gösteriniz. (Karakaş ve Aliyev, 2003b)

Problem 19.

a, b, c tek tamsayılar olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin rasyonel çözümünün olmadığını gösteriniz.

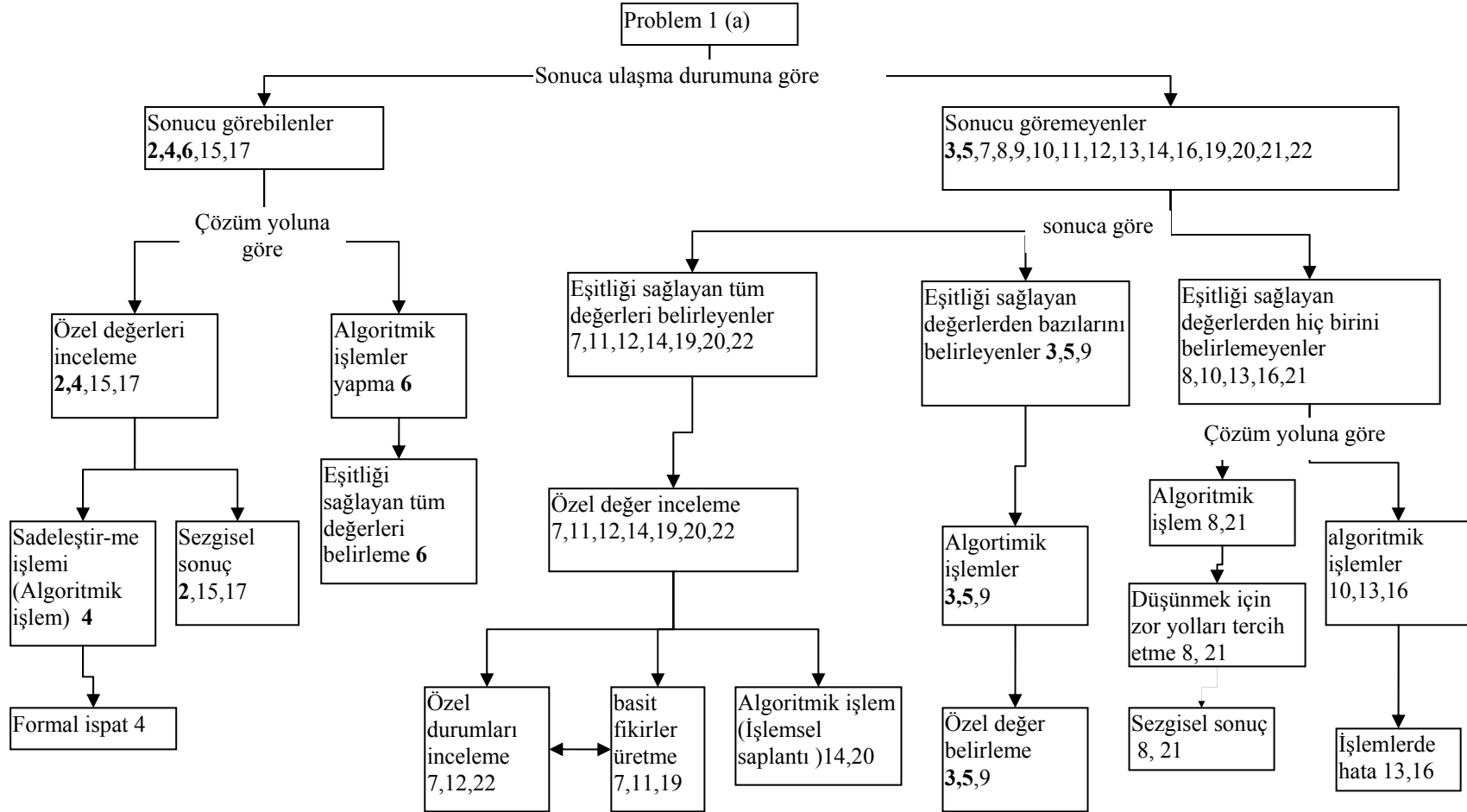
Problem 20.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a+b+c < 0$ olmak üzere $p(x) = ax^2 + bx + c$ polinomunun hiç kökü yoksa c 'nin işareti ne olmalıdır? (Karakaş ve Aliyev, 2003a)

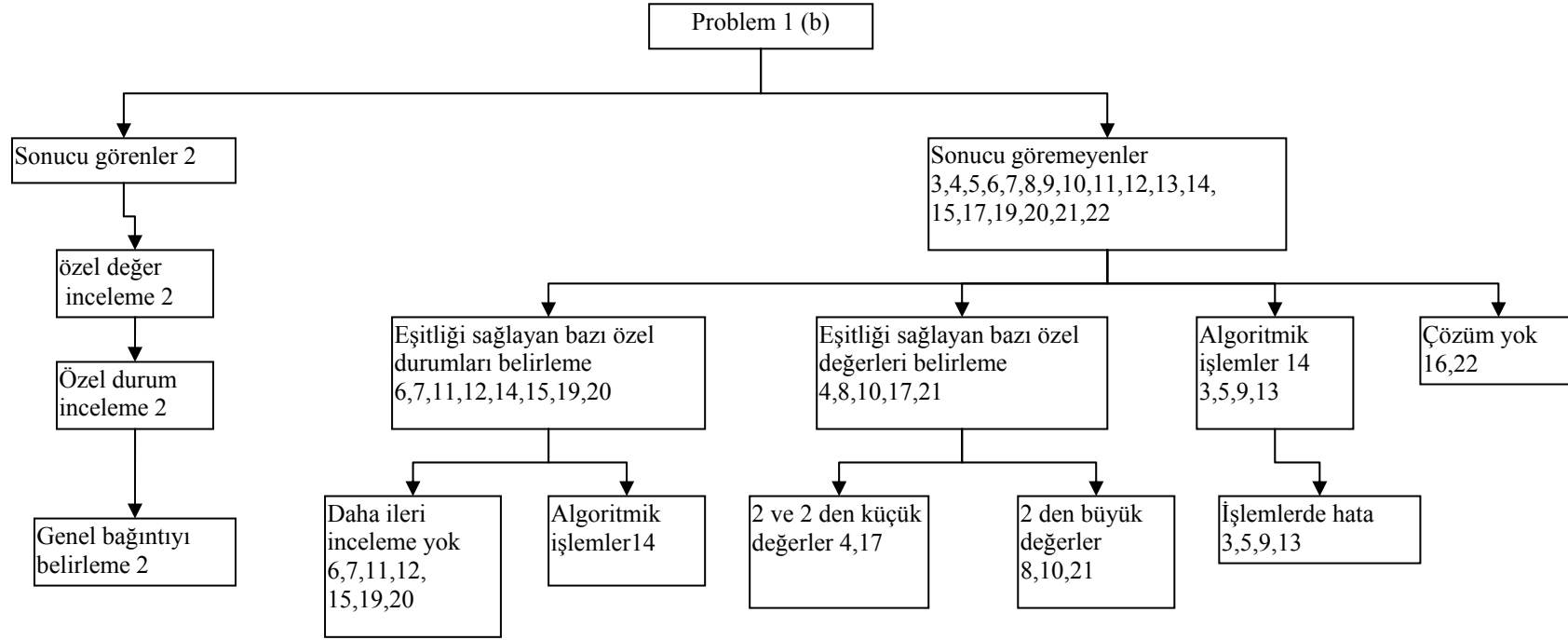
Problem 21.

$(2a+b)(2b+a) = 2^c$ eşitliğini sağlayan kaç tane (a, b, c) pozitif tam sayı üçlüsü vardır? (UMO 2001)

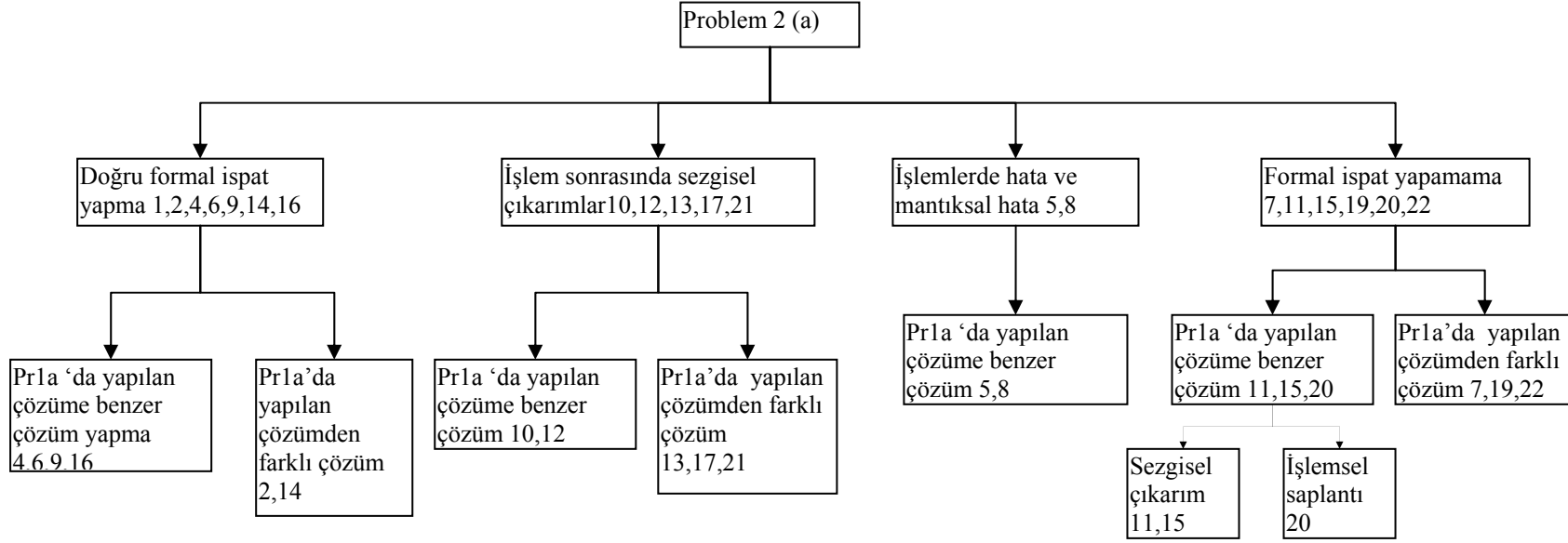
EK 3: Problem 1 (a) için yapılan çözümlerin şeması



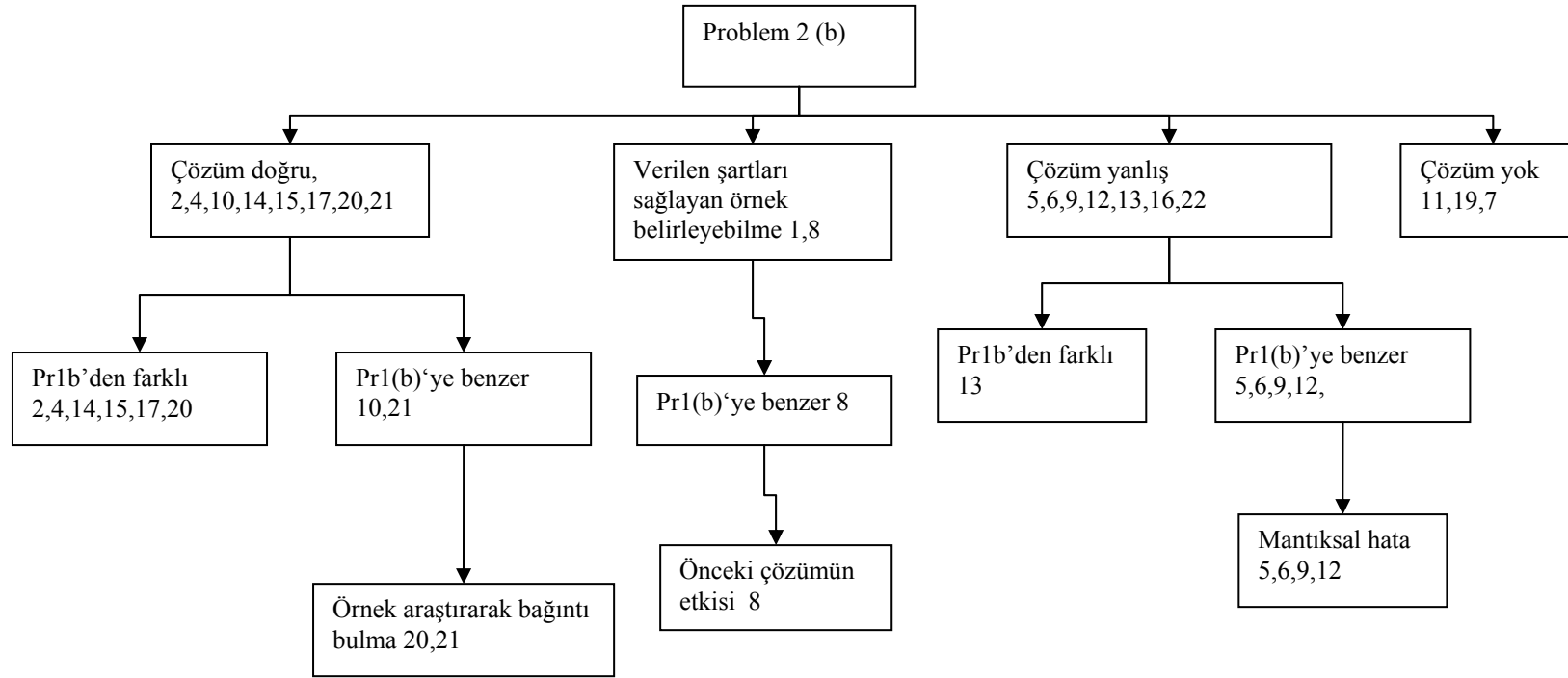
EK 4: Problem 1(b) için yapılan çözümlerin şeması



EK 5: Problem 2 (a) için yapılan çözümlerin şeması

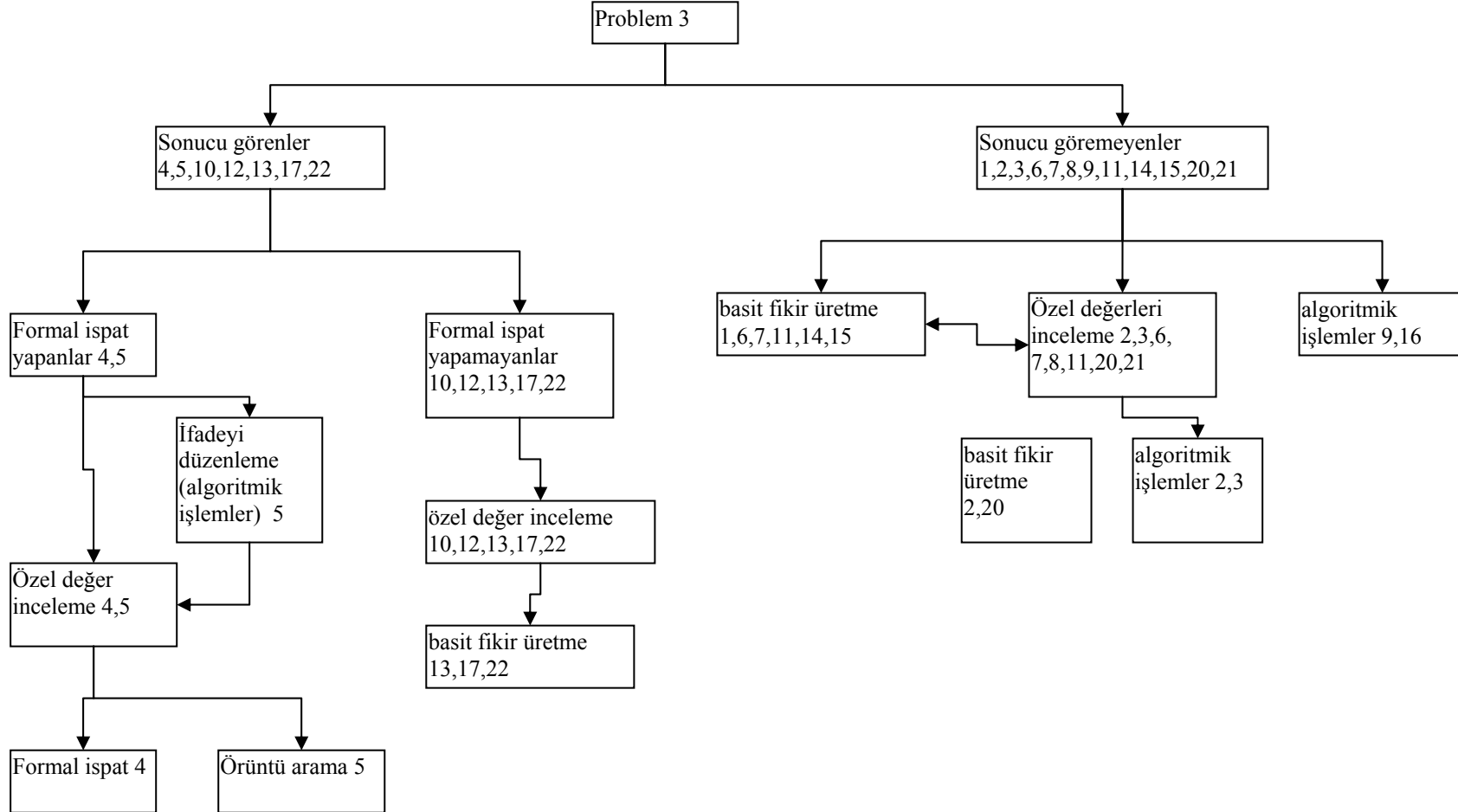


EK: 6 Problem 2 (b) için yapılan çözümlerin şeması

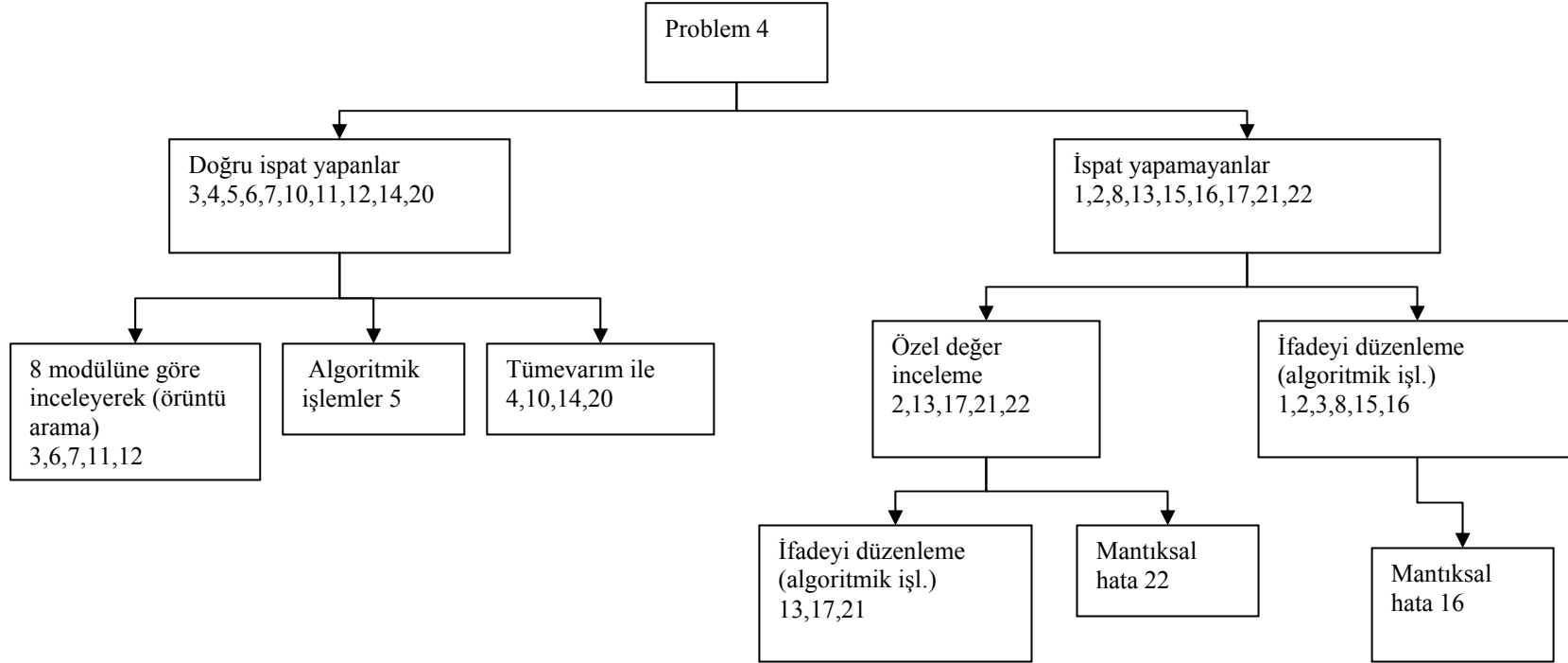


Genel ifadelerle düşünme güçlüğü: S22

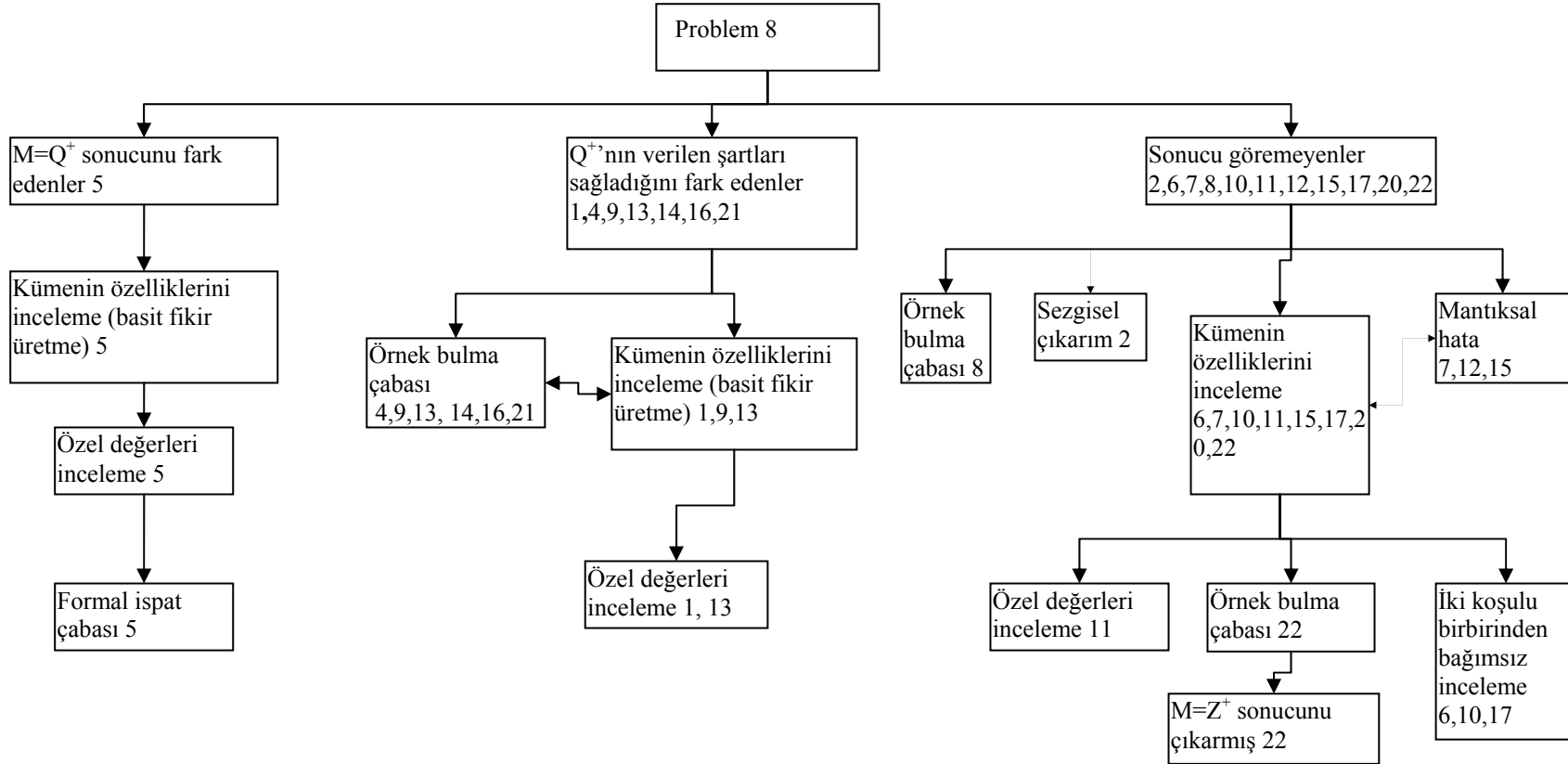
EK 7: Problem 3 için Yapılan Çözümlerin Şeması



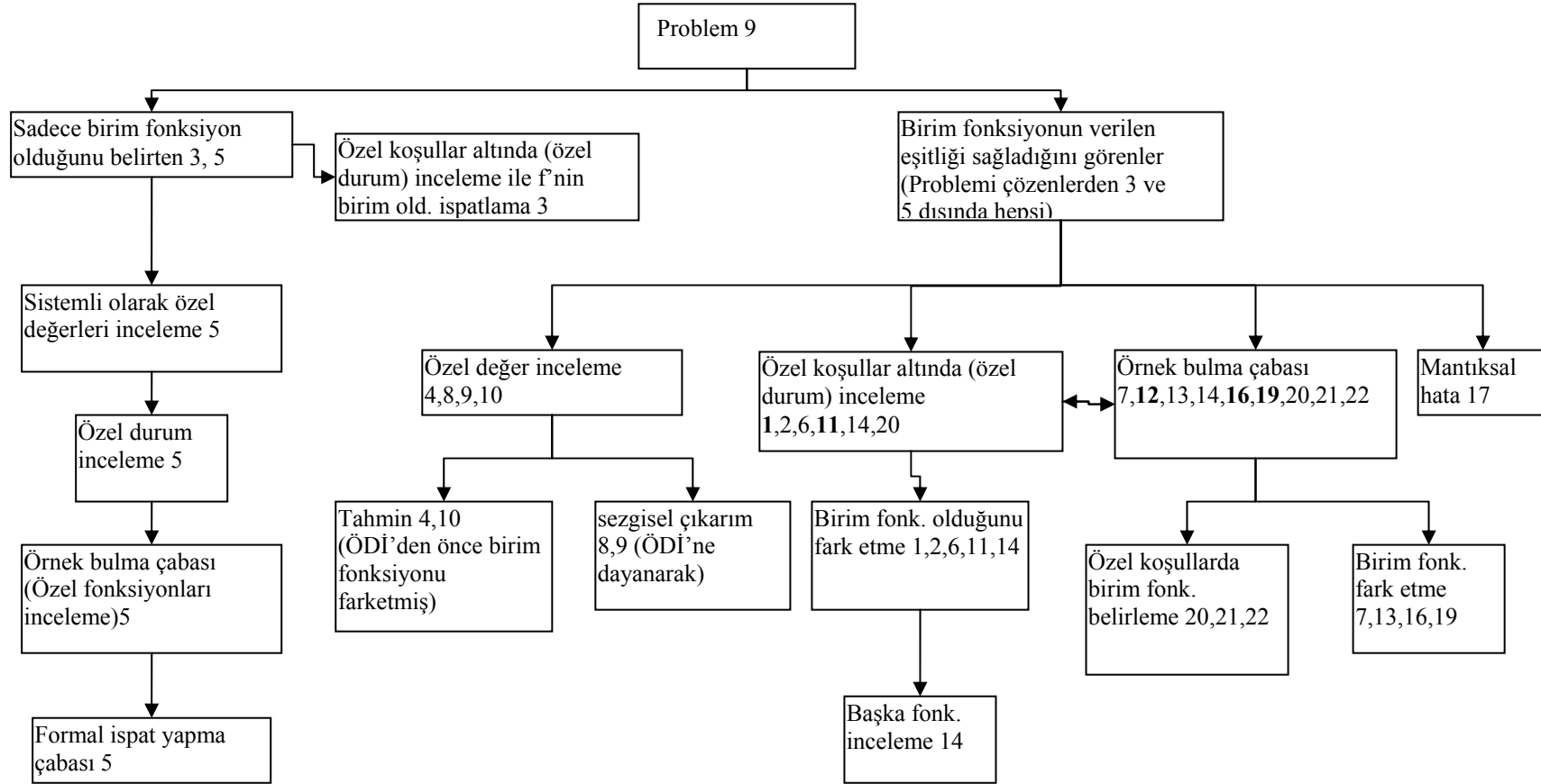
EK 8: Problem 4 için Yapılan Çözümlerin Şeması



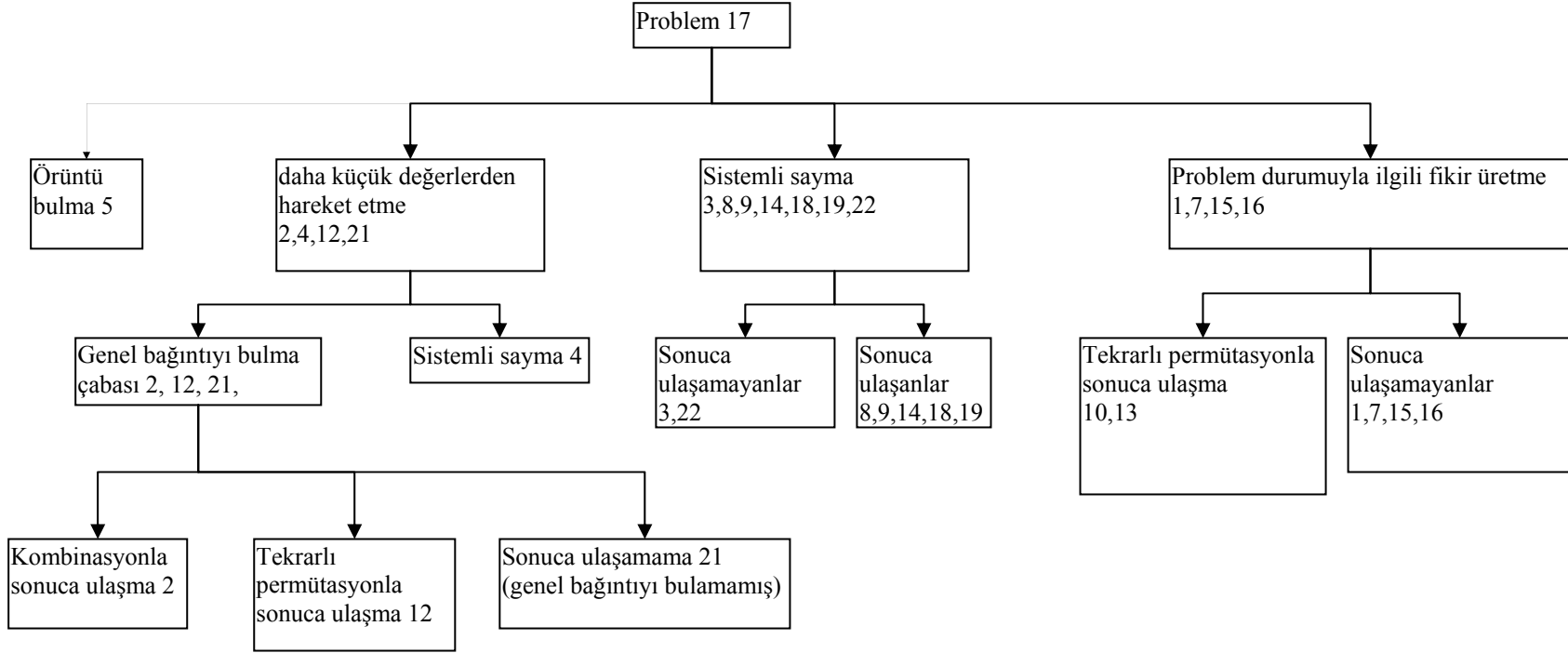
EK 9: Problem 8 için Yapılan Çözümlerin Şeması



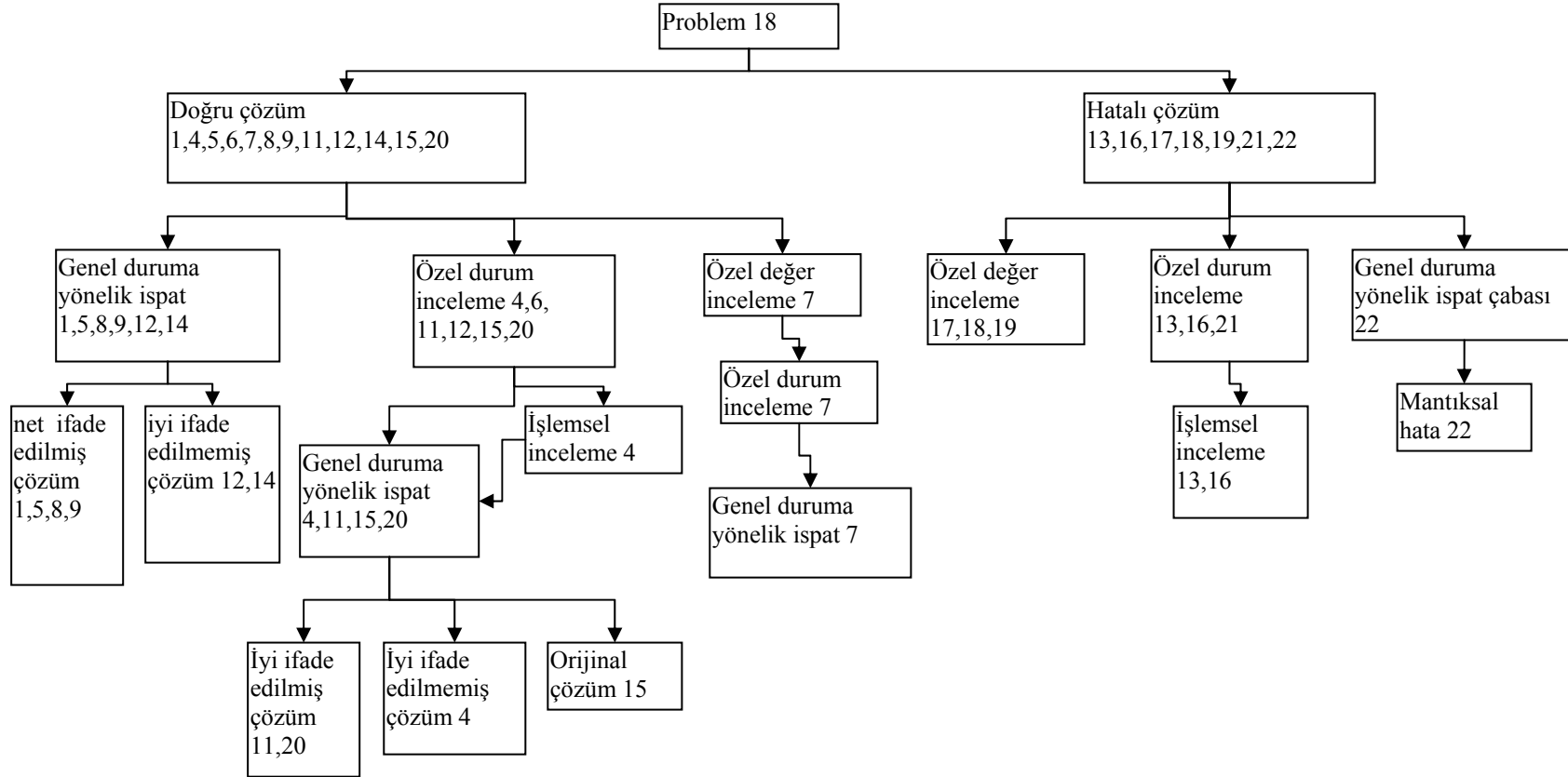
Ek 10: Problem 9 için Yapılan Çözümlerin Şeması



EK 11: Problem 17 için Yapılan Çözümlerin Şeması



EK 12: Problem 18 için Yapılan Çözümlerin Şeması

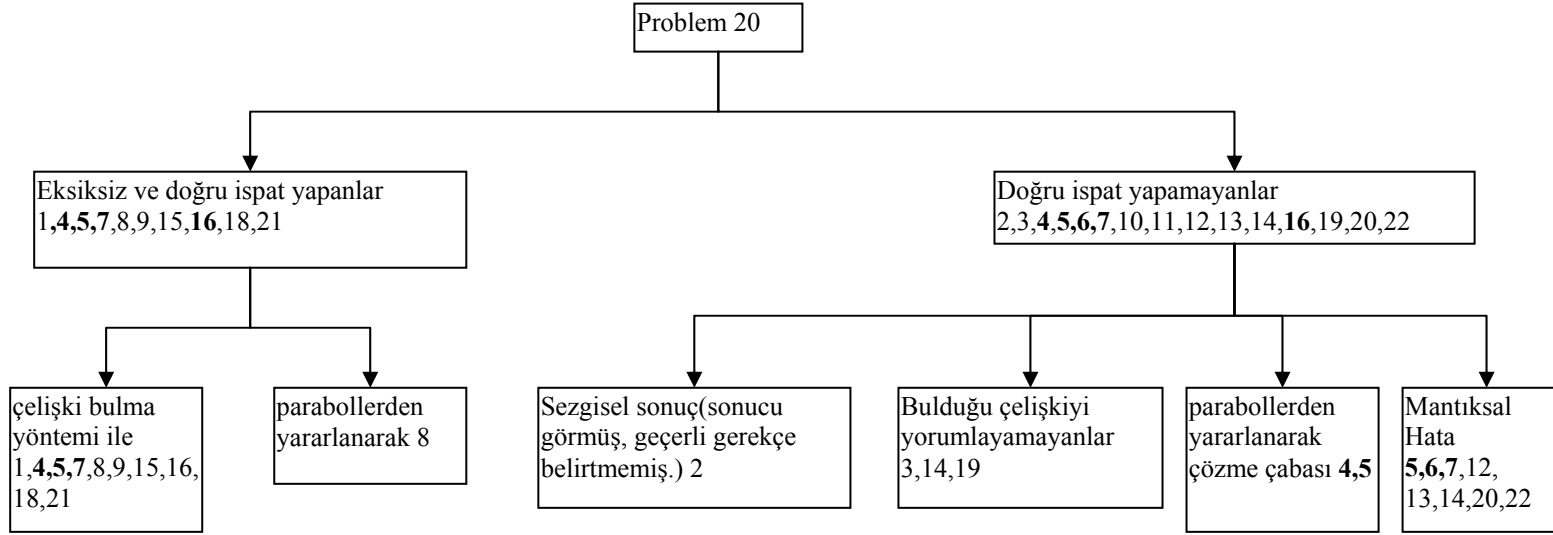


S5: 4 çözüm denemesi var. 3. de tümevarım uygulamaya çalışmış ama hatalı. diğerleri benzer.

S15: 3 çözüm yapmış 2 si aynı sayılır. Biri farklı

S21,S22 düşünmek için zor yol seçmiş

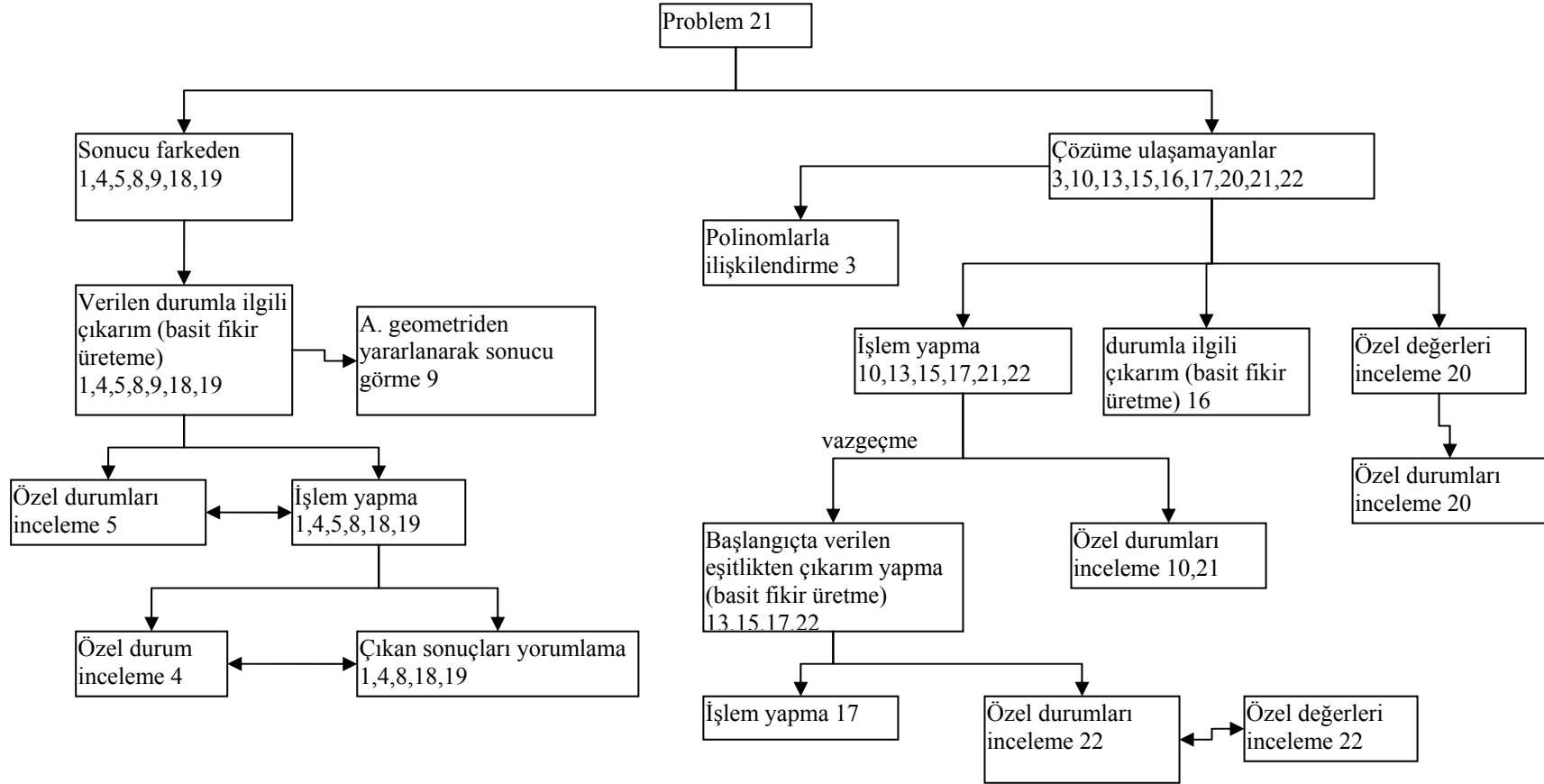
EK 13: Problem 20 için yapılan çözümlerin şeması



Düşünmek için zor yolları tercih etme: S6, S12, S13, S14

S5, S7, S12, S14 ve S16'nın 3; S4, S6, S10, S13 ve S20'nin 2 çözüm denemesi var.

EK 14: Problem 21 için Yapılan Çözümlerin Şeması



EK 15: Problem 13 için yapılan çözümlerin tablosu

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Çözüm denemeleri sayısı	5	2	3	5	3	4	4	2	2	3	2	G	3	5	3	2	3	2	2	4	2	3
Doğru çözüm sayısı	1	2	1	2	2	2	1	1	1	1	1	G	2	4	1	1	2	2	1	3	1	1
Doğru çözümlerin kategori sayısı	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	G	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1
Sayıların karelerini karşılaştırma	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>		<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>	<i>16</i>	<i>17</i>	<i>18</i>	<i>19</i>	<i>20</i>	<i>21</i>	<i>22</i>
Sayıların bulunduğu aralıkları belirleme							7*			<u>10*</u>	11		<i>13</i>	<i>14</i>	15*	16*	17			20*	21	22
Eşlenik ile çarpma				<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>															
Dik üçgenlerden yararlanarak inceleme		<i>2</i>		<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>								<i>14</i>			<i>17</i>					
Sayıların oranlarına bakma						6														<i>20</i>		
Verilen sayılar arasında ilişki araştırma çabası	1	2	3	4										14	15				19*			
Hesap makinesi kullanarak sayıların değerlerini belirleme														<i>14</i>						<i>20</i>		
Tam kare sayılar cinsinden yazma çabası	1	2			5		7	8	9				13	14			17					
Fonksiyon tanımlama çabası				4																		

1. *italik ve koyu* olanlar doğru cevaplardır
2. *:mantıksal hata
3. *italik* olanlar sezgisel cevap

EK 16: Problem 19 için yapılan çözümlerin tablosu

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Çarpanlara ayrıldığını kabul ederek	1	2		4	5	6			9	10		12			15	16	17					22
Δ 'yı tam kare kabul ederek	1	2		4	5	6		8			11		13				17		H		H	
p/q şeklinde kökünün olduğunu kabul ederek		2	H	4	5	6	7		9		11			H		16		H		20		
İndirgenmezlik kavramını kullanarak					5																	
Çözüm denemelerinin sayısı	2	3	3	3	4	3	3	2	2	1	3	3	2	2	2	3	2	1	1	5	1	2

Özel değerlerle inceleme yapanlar(katsayıları tek tamsayılar olarak inceleme) : S1, S21, S22

Özel durum inceleme (a=1 olması durumu) :14 (çift/tek çelişki düşüncesi, mantıksal hata)

Düşünmesi zor yolları tercih etme: S3, S8, S13, S16, S20, S21

Mantıksal hata: S12

H: Hatalı çözüm

EK 17: Problem 1 (a) için üretilen fikirlerin tablosu

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Özel değerleri inceleme	x=y=0 için z=2 veya 0!+0!=2		2	3	4		6	7				12		14	15		17			20		22
	x=y=1 için z=2 veya 1!+1!=2		2	3	4			7			11	12		14	15		17			20		22
	x=0 y=1 için z=2		2		4		6							14	15		17			20		22
	x=1 y=0 için z=2 veya 1!+0!=2		2				6					12		14	15		17			20		22
	x=1 y=2 için z yok				4			7														
	Y=3 için z=5 olmaz.							8														
Basit fikir üretme	En küçük faktöriyel değeri 1 dir											12										
	$z > x$ ve $z > y$			3		5							13							20		
	$z!/y! \geq 1$			3																		
	$Z!/x!$ tamsayıdır					5																
	$Z! \geq 2$ ($z > 1$), (z 0 ve 1 olamaz)						7					12							19			
	Eşitlik her zaman doğru değil				4																	
	1 den büyük sayıların faktöriyeli çifttir.						7															
	$x > 1$ ve $y > 1$ ise $x!+y!$ çifttir						7															
	$x! \geq 1, y! \geq 1$																		19			
	$x!+y! \geq 2$																		19			
	$x!+y!=1$ olamaz																		19			
	Z sıfırdan farklıdır. Çünkü $0!=1$ dir,																		19			
	$X=z$ ise $y!=0$ olur ki böyle bir şey olamaz																		19			

EK 17: Problem 1 (a) için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Basit fikir üretme	Y=z olamaz																		19			
	X=y=0 olsa bile z=2 olur.																		19			
	“Faktöriyel kavramı doğal sayılarda tanımlıdır.” Veya “0’dan küçük sayılar ve rasyonel sayılar faktöriyel tanımında yoktur.” Veya “negatif sayıların faktöriyeli alınmaz”					6	7								15					20		
	4 tane çözümü vardır					6											17					
	x=1 ve y>1 (veya tersi) ise x!+y! tektir.						7															
Özel durumları inceleme	x=1 ve y>1 (veya tersi) ise z! tektir.						7															
	x=1 ve y>1 ise z=0 ya da 1						7															
	x=1 ve y>1 ise x!+y!>1						7															
	x=1 ve y>1 iken z!=x!+y! olamaz.						7															
	Y=x+1 iken z!=x!(x+2) dir																					22
	Y=x+1 iken z!=x!(x+2) eşitliğinde x=0 için z=2 dir																					22
	Y=x+1 iken z!=x!(x+2) eşitliğinde x=1 için sağlamaz																					22
	y=x o.ü. z!=2x! eşitliğinde x=0 için z=2																					22
	y=x o.ü. z!=2x! eşitliğinde x=y=1 için z=2																					22

EK 17: Problem 1 (a) için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Özel durumları inceleme	y=x o.ü. z!=2x! eşitliğinde x=1 için z!=4 o.ş. z bulunamaz																					22
	Y=x-1 o.ü. z!=(x-1)!(x+1) eşitliğinde x=1 için z=2																					22
	Y=x-1 o.ü. z!=(x-1)!(x+1) eşitliğinde x=2 için z!=3 o.ş z yok																					22
	Y=x-1 o.ü. z!=(x-2)!(x ² -x+1) böyle bir x yoktur																					22
	Y=x-1 o.ü. z!=(x-2)!(x ² -x+1) x=2 için sağlamaz																					22
	Y=x-1 o.ü. z!=(x-2)!(x ² -x+1) x=3 için sağlamaz																					22
	Y=x-1 o.ü. z!=(x-2)!(x ² -x+1) x=4 için sağlamaz																					22
	k!+(k+1)!=(k+2)!/(k+1)											12										
Algoritmik işlemler	X>y o.ü. [x(x-1)...(y+1)+1]y! =z! veya Y=x+a o.ü. X!(1+(x+a)!/x!)=z! veya Y>x o.ü. [y(y-1)...(x+1)+1]x! =z!			3	4	5	6	8	9	10						16	17			20	21	

EK 17: Problem 1 (a) için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Algoritmik işlemleri	$y! \neq 0$ olduğundan $x(x-1) \dots (y+1)+1 = z(z-1) \dots (y+1)$ veya $x(x-1) \dots (y+1)+1 = z!/y!$ veya $1 + (x+1) \dots y = (x+1) \dots (z-1)z$			3	5	6			9	10											21	
	$x(x-1) \dots (y+1)+1 = n(n+1) \dots (n+p)$ şeklinde parçalayabilirsek z yi bulabiliriz.							8														
	$z(z-1) \dots (y+1) - x(x-1) \dots (y+1) = 1$				5	6			9	10												
	$1 = [(y+1)(y+2) \dots x][(x+1)(x+2) \dots z-1]$					6			9	10												
	$(y+1)(y+2) \dots x = 1/(x+1)(x+2) \dots z-1$									10												
	$Y!/x!+1=z!/x!$				5									14								
	$y=x$ iken $z!/x!=2$				5				9													
İşlem sonrası çıkarım	$y=x$ o.ü. $z!/x!=2$ $x=y=1$, $z=2$ dir				5				9													
	$x > y$ için çarpımları 1 e eşit olan doğal sayılardan hareketle $y=0$ $x=1$ $z=2$ değerleri belirlenmiş								9													
	$y < x$ için $x=0$, $y=1$, $z=2$ olmalıdır Veya $y < x$ için benzer				5				9													
	$x, y \neq 0, 1$ $x > y$ için $x(x-1) \dots (y+1)+1 > y+1$				4																	

EK 17: Problem 1 (a) için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
İşlem sonrası çıkarım	$x(x-1)\dots(y+1)$ çifttir			4																		
	$x(x-1)\dots(y+1)+1$ tektir			4																		
	$z(z-1)\dots(y+1)$ çifttir.			4																		
	$x(x-1)\dots(y+1)+1 = z(z-1)\dots(y+1)$ olması bir çelişkidir			4																		
	$x, y \neq 0, 1$ $x > y$ iken $x! + y! = y!(x(x-1)\dots(y+1)+1)$ toplamını bir faktöriyel şeklinde çarpanlarına ayıramayız.			4																		
	Eşitlik x ve y nin 0 ve 1 olması halinde geçerlidir.			4																		
Sezgisel çıkarımlar	Herhangi iki sayının faktöriyelerinin toplamının yine bir sayının faktöriyeli olması için bu sayı kesinlikle 2 olmalıdır		2																			
	$Z=2$ dir.		2																			
	$x(x-1)\dots(y+1)+1 = n(n+1)\dots(n+p)$ eşitliğini sağlayan bir örnek yok							8														
	$Z=2$ iken $x! = y! = 1$ olmalıdır. Başka durum söz konusu olamaz. Veya (eşitlik sadece 0! ve 1! için geçerlidir)		2												15							

EK 17: Problem 1 (a) için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
ilişkilendirme	$F:R \rightarrow R, f(x,y)=x!+y!$																	17					
	F birebir değildir																	17					
	Toplam fikir sayısı	g	7	6	13	9	9	12	4	8	5	1	6	1	5	6	1	8	g	8	7	2	16
	Kategori sayısı	g	2	3	4	3	3	3	3	2	1	1	3	1	2	3	1	3	g	1	3	1	2
	Orijinal	g	2	1	8	1	-	7	3	1	1	-	2	-	-	-	-	2	g	7	-	-	12

EK 18: Problem 1 (b) için üretilen fikirlerin tablosu

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Özel değerleri inceleme	0!.0!=0!	2	3			6						12								20		
	0!.1!=0!	2				6						12								20		
	1!.0!=0!	2				6														20		
	1!.0!=1!	2	3			6														20		
	1!.1!=0!	2				6						12										
	1!.1!=1!	2				6						12										
	0!.1!=1!	2	3			6														20		
	0!.0!=1!	2	3			6						12								20		
	1!.2!=2!	2				6						12								20		
	0!.2!=2!	2				6						12										
	1!.3!=3!						7					12										
	2!.0!=2!	2				6																
	2!.1!=2!	2				6														20		
	0!.3!=3!											12										
	5!.3!=6!	2						8		10											21	
	7!.6!=10!							8														
	24!=4!.23!	2																			21	
	X=2 y=2 için z!=4 o.ş. z yoktur.						7												19			
	X=3 y=3 için z!=36 o.ş. z yoktur.						7															
	X=4 y=4 için z!=576 o.ş. z yoktur.						7															

EK 18: Problem 1 (b) için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Özel değerleri inceleme	X ve y nin 0,1,veya 2 değerleri için $z=0,1,2$ sayıları bu durumu sağlar. Veya “Yalnızca x,y,z nin $[0,2]$ aralığından uygun değerler seçilmesi sonucu eşitlik gerçekleştirilebiliyor.”				4												17					
	X ve y, 1 ya da 0 seçildiğinde sonuç 1 olacaktır.						7															
Özel durumları inceleme	$x=1$ ve $y=n$ için $z=n$ veya $x=1$ için $y=z$ olan durumlarda eşitlik sağlanır.									10										20		
	$x=0$ veya $x=1$ için $y=z$ şeklindeki doğal sayılar	2												14	15				19		21	
	$y=0$ veya $y=1$ için $x=z$ şeklindeki doğal sayılar	2												14	15				19			
	“X ve y sayısından biri 0 veya 1 seçilirse sonuç seçilmeyene (diğerine) eşit olur.” Veya “x ve y den en az herhangi biri 0 veya 1 iken eşitlik sağlanır.”							7				12							19			
	X ve y, 0 ve 1 haricinde eşit sayılar olamaz.						7												19			

EK 18: Problem 1 (b) için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Basit fikir üretme	X ve y, 1'den büyük ise x! ve y! çifttir.						7															
	$Z! > 0$			3																		
	X ve y, 1'den büyük ise x! ve y! çifttir ve dolayısıyla z! çifttir.						7															
	X ve y, 1'den büyük ise z! 1' den büyüktür.						7															
	Eşitlik her zaman geçerli değildir.										11											
	Faktöriyeli 0 olan sayı olmadığından eşitlikte sadeleştirme yapılabilir.																17					
	$X < y$ ise faktöriyeller pozitif olduğundan $z \geq y > x$ dir				5																	
Sadeleştirme işlemleri	$x > y$ o.ü. $x! = (y+1) \dots (x-1)x \dots (z-1)z$							8	9												21	
	$x > y$ o.ü. $y! = (x+1) \dots (z-1)z$								9													
	$X < y$ o.ü. $Y! = x \dots (y-1)y \dots (z-1)z$								9													
	$X < y$ o.ü. $X! = (y+1) \dots (z-1)z$								9													
	$X! = z!/y!$ veya $y! = z!/x!$													14							21	
	$X < y$ $1^2.2^2 \dots (x-1)^2.x^2(x+1) \dots y = 1.2 \dots z$				5																	
	$1.2 \dots (x-1)x(x+1) \dots y/(x+1) \dots z = 1$				5																	

EK 18: Problem 1 (b) için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
x=y için x=1,y=1 ve z=1									9													
X,y,z sıfıra eşit olabilir									9													
x>y o.ü. eşitliğin sağlanması için x!= (y+1)...(x-1)x...(z-1)z şeklinde çarpıma dönüştürmeliyiz. Veya “hangi sayıların faktöriyeli x!=n(n+1)...(n+p) şeklinde yazılır, ona baktım.” Veya “y! bölenlerine ayrıldığında x den büyük ve x’e ardışık sayıların çarpımını veriyorsa ifade doğrudur.”				4				8			11											
x!=n(n+1)...(n+p) eşitliğini tamamlayan y!=(n-1)! Belirlenir								8														

EK 18: Problem 1 (b) için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

Genel duruma yönelik çıkarımlar		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22	
	Z nin 0 ve 1 değerleri için 8 farklı çözüm var						6																	
	z nin 2 değeri için 4 farklı çözüm var						6																	
	Z nin 3, 4,..değerlerinin her biri için 4 farklı çözüm var.						6																	
	Eşitliği sağlayan sonsuz çözüm vardır.						6																	
	$x>1$ $y>1$ için $z!=z(z-1)!$ Eşitliğinde $x!=(z-1)!$ kabul edilirse $z=y!$ olur.		2																					
	Eşitliğin sağlanması için z sayısı herhangi bir sayının faktöriyeli olmalıdır.		2																					
	Eğer z sayısı herhangi bir sayının faktöriyeli değilse kesinlikle eşitlik sağlanmaz.		2																					
Toplam fikir sayısı		19	5	2	3	16	10	5	6	2	2	10	0	3	2	0	2		5	9	5	0		
Kategori sayısı		3	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	-	2	1	-	2		2	2	3	-		
Orijinal		4	1	-	3	5	6	2	5	-	1	1		-	-		1		-	-	-	-		

EK 19: Problem 3 için üretilen fikirlerin tablosu

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Özel değer inceleme (ÖDeİ)	N=0 için sayının değeri 8 dir.					5		7															
	N=1 için sayının değeri 48 dir.					5		7														21	
	N=2 için sayının değeri 320 dir.	1	2		4	5	6	7	8		10	11	12	13	14			17			20	21	22
	N=3 için sayının değeri 2184 tır				4	5	6	7			10	11	12	13	14			17			20	21	22
	N=4 için sayının değeri 15032 tır				4	5	6	7			10	11	12	13				17				21	22
	N=5 için sayının değeri 103968 dir					5	6	7			10												22
	N=6 için sayının değeri 721520							7			10												
	N=2 için çift sayıdır			3												15							
	N=3 için çift sayıdır															15							
	N=4 için çift sayıdır															15							
	N=2 için sayı 5 ile bölünür						6	7															
	N=2 için sayı 7 ile bölünmez							7															
	N=3 için sayı 5 ile bölünmez						6	7															
	N=3 için sayı 7 ile bölünmez							7															
	N=4 için sayı 5 ile bölünmez							7															
	N=4 için sayı 7 ile bölünmez							7															

EK 19: Problem 3 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
ÖDeİ	N=5 için sayı 5 ile bölünmez							7															
	N=5 için sayı 7 ile bölünmez							7															
	N=6 için sayı 5 ile bölünmez							7															
	N=6 için sayı 7 ile bölünmez							7															
Özel değerlerden hareketle sonuç çıkarma	(Özel değerlerden hareketle) sayı 4 ile bölünebilir										10												22
	(Özel değerlerden hareketle) sayı 8 ile bölünebilir				4																		22
	Bazı n ler için sayı 3 ile bölünmez						6																
	Bazı n ler için sayı 6 ile bölünmez						6																
	$n \geq 2$ den sonra sayılar yaklaşık 6 kat olarak artıyor.												12										
	Bu sayılardan bazıları 5 ile bölünür bazıları bölünmez.						6	7															
Basit fikirler üretme	Pozitif bir tamsayıdır	1												13		15							
	5^n tek sayıdır	1	2			5	6	7				11		13	14						20		
	7^n tek sayıdır	1						7				11		13									22
	$6 \cdot 7^n$ çift sayıdır	1	2				6	7				11		13	14			17			20		22
	$6 \cdot 7^n$ 6'nın katıdır	1																					
	$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ çift sayıdır	1	2				6	7			10	11		13	14	15					20		22

EK 19: Problem 3 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Basit fikirler üretme	$5^n + 1$ çift sayıdır																17					22
	Çift ve 2 den büyük olduğundan $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ asal sayı değildir.	1																				
	Çift sayı olduğundan 2 ile bölünür	1				6					11						17					22
	N artarken ifade de artar												13	14								
	N artarken 2 terim arasındaki fark gittikçe artar.													14								
	N sonsuza gittikçe ifade de sonsuza gider (ıraksak bir dizidir)												13	14								
	$n \geq 2$ için $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 \geq 320$ dir													14			17					
	$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$, 4 ile bölünür					6																
	$n \geq 2$ için en az 3 basamaklıdır														15							
	$5^n \equiv 1 \pmod{4}$					6																
	Bu sayılardan bazıları 5 ile bölünür bazıları bölünmez.					6																

EK 19: Problem 3 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
5≡5 mod(8)				4																		
25≡1 mod(8)				4																		
7≡7 mod(8)				4																		
49≡1 mod(8)				4																		
n tek iken 5^n ve 7^n den kalanlar 5 ve 7				4																		
n tek iken 5^n ve 7^n den kalanlar 1 oluyor				4																		
n tek ise $5^n+6.7^n+1=$ $5+6.7+1=48$				4																		
N çift ise $5^n+6.7^n+1=$ $1+6.1+1=8$				4																		
$5^n+6.7^n+1$ tam sayısı her zaman 8 ile bölünür				4	5																	
N tek ise 5^n+1 , 3 e bölünür																				20		
N çift ise 5^n+1 , 3 e bölünmez																				20		
N tek ise $5^n+6.7^n+1$, 3 e bölünür																				20		
N tek ise $5^n+6.7^n+1$, 3 e bölünmez																				20		
N tek ise bu sayı 6 ile tam bölünür.																	17			20		
N çift ise bu sayı 6 ile bölünemez.																	17					
$N=4k+2$ ($k \geq 0$) $5^n+6.7^n+1 \equiv 0 \pmod{10}$					5																	
$N=4k+3$ ($k \geq 0$) $5^n+6.7^n+1 \equiv 4 \pmod{10}$					5																	

EK 19: Problem 3 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Örüntü bulma	$N=4k+4$ ($k \geq 0$) $5^n+6 \cdot 7^n+1 \equiv 2 \pmod{10}$					5																
	$N=4k+5$ ($k \geq 0$) $5^n+6 \cdot 7^n+1 \equiv 1 \pmod{10}$					5																
	10 modülüne göre 0,4,2,1 döngüsüne sahiptir.					5																
	$5^n \equiv 5 \pmod{10}$					5																
	$6 \equiv 6 \pmod{10}$					5																
	$7^1 \equiv 7 \pmod{10}$					5																
	$7^2 \equiv 9 \pmod{10}$					5																
	$7^3 \equiv 3 \pmod{10}$					5																
	$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$					5																
	$N=1$ iken $5^n+6 \cdot 7^n+1=$ $5+6 \cdot 7+1=8 \pmod{10}$					5																
	$N=2$ iken $5^n+6 \cdot 7^n+1=$ $5+6 \cdot 9+1=60=0 \pmod{10}$					5																
	$N=3$ iken $5^n+6 \cdot 7^n+1=$ $5+6 \cdot 3+1=24=4 \pmod{10}$					5																
	$N=4$ iken $5^n+6 \cdot 7^n+1=$ $5+6 \cdot 1+1=12=2 \pmod{10}$					5																

EK 19: Problem 3 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22	
Algoritmik işlemler	$5^n+6.7^n+1=8(5^n+7^n)-(7.5^n+2.7^n+1)$								9														
	$5^n+6.7^n+1=(6-1)^n+6.(6+1)^n+1$		2													16					21		
	$(6-1)^n$ binom açılımını yapmış		2																		21		
	$(6+1)^n$ binom açılımını yapmış		2																		21		
	$5^n+6.7^n+1=5^n+(7-1).7^n+1$						6									16							
	$5^n+6.7^n+1=5^n+6.(5+2)^n+1$													14									
	$5^n+6.7^n+1=5^n+(6+1).7^n+1$													14									
	$5(5^{n-1}+7^n)+7^n+1$														14								
	$(5+2)^n$ binom açılımı			3													16						
	$5^n+6.7^n+1=5^n-1+6.(7^n-1)+8$					5																	
	$5^n+6.7^n+1=4A+36B+8$					5																	
	N çift ise $(5^n-1)=4A$ nın A çarpanı tektir.					5																	
	N çift ise $(7^n-1)=6B$ nın B çarpanı tektir.					5																	
	$5^n+6.7^n+1=4(A+9B+2)$					5																	
	N çift ise 9B tektir					5																	
N çift ise A+9B+2 sayısı 2 ile bölünür					5																		

EK 19: Problem 3 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

Algoritmik İşlemler		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
	N tek ise $(5^n-1)=4A$ nın A çarpanı çifttir.					5																	
	N tek ise $(7^n-1)=6B$ nın B çarpanı çifttir.					5																	
	N tek ise $A+9B+2$ sayısı 2 ile bölünür					5																	
	Toplam	9	7	2	13	33	16	21	1	1	7	8	4	11	12	6	3	10	0	0	10	7	11
	Kategori	2	3	2	3	4	4	3	1	1	3	2	2	2	3	2	1	3	0	0	3	2	3
	Orijinal	2	-	-	8	25	5	8	-	-	-	-	-	-	4	3	-	1	0	0	4	-	-

EK 20: Problem 5 için üretilen fikirlerin tablosu

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Terimlerin bölünebilmesi	terimler 9 a bölünür	1	2		4	5	6	7	8			11		13	14	15	16	17	18		20	21	22
	terimler 3 e bölünür	1	2		4	5	6	7	8			11		13	14	15	16	17	18		20	21	22
	çift terimler 11 e bölünür	1				5	6		8			11									20		
	çift terimler 99 e bölünür	1																					
	çift terimler 33 e bölünür	1																					
	dizideki hiçbir terim asal değildir																		18	19			
	ilk terimlerin asal çarpanları (pozitif bölenleri) incelenmiş							7	8				12					17					
	her terimin 10 ile bölümünden kalan 9 dur					5			8														
	dizinin terimleri tek sayıdır						6														20		
	terimler 6 ile bölünmez						6														20		
	terimlerin 6 ile bölümünden kalan 3						6																
	n >2 için terimlerin 8 ile bölümünden kalan 7 dir						6														20		
	her terimin 5 ile bölümünden kalan 4 tür						6														20		
	i tek ise $a_i=9 \pmod{11}$																				20		
Terimlerin toplamı, farkı, çarpımının bölünebilmesi	herhangi sayıda(veya ardışık 18,19) terim toplamı 9 a bölünür	1													14				18	19			
	ardışık terimleri farkı 9 ile bölünür																			19			
	herhangi sayıda terim toplamı 3 e bölünür	1													14				18				
	herhangi iki terimin farkının mutlak değeri 10 bölünür (18 ardışık)	1																	18				
	herhangi iki terimin farkının mutlak değeri 90 bölünür	1																					
	herhangi iki terimin farkının mutlak değeri 30 bölünür	1																					

EK 20: Problem 5 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Devamı	Herhangi iki terim(ardışık 18) toplamı çifttir.	1																	18	19			
	$n > t$ olmak üzere $a_n - a_t$ 10^t ye bölünür	1																					
	n tane terim çarpımı 9^n ye tam bölünür.	1																					
	$9-9^1$, $99-9^2$, $999-9^3$, ... farkları 18 ile bölünür							7															
Farklı tabanda yazma	ilk terimleri 9 tabanında yazma					5		7	8														
	ilk terimleri 11 tabanında yazma					5																	
	3 tabanında yazma		2																				
Diziyi başka diziler yardımıyla yazma	$9=3+6$, $99=33+66$, $999=333+666...$							7															
	3.3, 3.33, 3.333,... veya 3(3,33,333,...)				4					9	10			13	14								
	9.1,9.11,9.111,... veya 9(1,11,111,...)		2		4	5	6	7	8	9	10	11		13	14	15		17			20	21	
	$9(10-9)$, $9(20-9)$, $9(120-9)$, $9(1120-9)$, $9(11120-9)$,...											11											
	$\sigma(i=1 \dots n) 9 \cdot 10^n$ serisinin kısmi toplamlar dizisidir.				4																		
Genel terim (GT)	genel terimi $10^n - 1$		2		4	5	6		8	9		11		13	14		16	17			20	21	22
	$a_n = 9 \cdot 10^{n-1} + a_{n-1}$				4												16					21	
	$a_0=9$, $a_1=10a_0+9$, $a_2=10a_1, \dots, a_{n+1}=10a_n+9$		2					7	8								16			19	20		
	bütün terimlere 1 eklersek 10 un kuvveti olur		2					7	8					13		15							
	$a_2=9+9 \cdot 10 \dots a_n=9+9 \cdot 10 + \dots + 9 \cdot 10^{n-1}$			3	4							11											
	$a_n = 9 + 9 \cdot 10 + \dots + 9 \cdot 10^{n-1}$			3	4																		

EK 20: Problem 5 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
GT	f:Z+ ---Z+, $f(x)=10^{x-1}$ olarak düşünebiliriz, $f(x)=10x+9$														14		16			19			
Terimler arasındaki ilişkiler	her terim bir önceki terimin 11 katının sırasıyla 0, 90, 990,... eksiği												12										
	her terim önceki iki terim top. 9 katının sırasıyla 27, 117, 1017,... fazlası												12										
	yukarıdaki farklar arasındaki ilişki $117-27=90$, $1017-117=90$,...												12										
	$9+99=108$, $999:108=9k+27$, $99+999=1098$ $9999:1098=9m+117$ ($27+90=117$)												12										
	$a_n/a_{n+1} < 1$ dir															16							
	a_{2n}/a_n tamsayıdır	1																					
	$a_{2n}/a_n = 1$ 00...01 şeklindedir. (0 sayısı n-1)	1																					
	her bir terim bir öncekinin 10 katından daha büyük bir sayıdır															15							
	a2 a1 in 11 katı, a3 a2 nin yaklaşık 10 katı, a4 a3 ün yaklaşık 10(öncekinden daha yakın)														14								
	oranların oluşturduğu dizi artma oranı azalan dizidir														14								
	terimlerin artma oranı sabit değildir														14								
	aritmetik ve geometrik değil.																						22

EK 20: Problem 5 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Genel özellikler	her sayıda bir basamak artıyor												13		15							
	sadece 9 dan oluşan bir dizi												13		15						21	
	bir tane 9, 2 tane 9, ...										11											
	$a_i = i$ tane 9 yanyana				5														19			
	9 ların sayısı $1+2+3+\dots$				5																	
	n. terim n basamaklıdır	1													15							
	5. terimde 5 tane 9 var							8											19			
	9 ile oluşabilecek 1,2,3 ve çok basamaklı sayıların dizisi						7															
	her terim başına 9 eklenerek artıyor							8										18	19			
Genel özellikler	dizinin her terimi sahip olduğu basamağın en büyüğü														16		18					
	dizinin n. terimine 1 eklersek n+1 basamaklı sayıların en küçüğü olur														16							
	artan bir dizidir						7	8		10	11		13	14		16						22
	alt sınırı 9 üst sınır yok															16				20		
	ıraksak		3			6											17					22
	$\lim_{n \rightarrow \infty} 9 \cdot 10^n$ sonsuz olduğundan lim an sonsuzdur			4																		
	lim an sonsuzdur	2		4		6		8		10	11		13	14		16		18		20		
	terimlerin farkından oluşan dizi artandır									10												
	İlk n terim toplamını bulma çabası (21 örüntü bulmuş)																17				21	
	$b_n = 1/a_n$			4																		
Diziden yeni dizi oluşturma	$\lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n$ sıfırdır			4																		
	$b_n = a_n/10^n$ $b_0=0,9$, $b_1=0,99, \dots$, $b_n=0,99..9$			4																		
	$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ (ispatlamış)			4																		
	$0,999..=1$	2		4													17					

EK 20: Problem 5 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Devamı	bu diziye herhangi bir sayının virgülden sonraki kısmı gibi düşünersek bu dizi aldığımız sayının ardışığına götürecektir		2																				
	terimler arasındaki fark 9. 10, 9.10 ² , 9.10 ³ ... şeklindedir			3						9	10	11		13		15				19		21	
	terimler arasındaki farkla oluşan dizi 9.10 ⁿ şeklindedir											11		13		15							
	Fikir sayısı	16	10	4	16	10	12	11	14	4	6	12	5	12	13	10	12	8	10	10	13	8	6
	Kategoriler	4	6	3	5	5	4	6	5	3	3	5	2	5	6	6	5	5	3	5	4	5	4
	Orijinallik	8	2	-	6	2	1	3	-	-	1	2	4	-	3	1	2	-	-	1	1	-	1

EK 21: Problem 6 için üretilen fikirlerin tablosu

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Şekil	6 tane eş üçgen oluşuyor			3	4	5	6	7			10	11		13	14	15		17	18	19	20	21	22
	Üçgenler eşkenardır.	1	2		4	5	6	7	8	9	10			13	14		16	17		19	20	21	
	Üçgenler ikizkenar								8														
	6 tane ikizkenar üçgen vardır.					5																	
	AO ...FO doğru parçaları altıgeni eşit eşkenar üçgenlere ayırır.	1																					
	Şekilde 3 tane köşegen var																					21	
	FC , AD , EB altıgenin köşegenleridir.													13									
	Şekilde 3 tane çap vardır		2																				
	6 tane kiriş vardır					5																	
	Üçgenlerin hepsi ortak bir noktaya sahiptir.																						22
	Üçgenlerin birer kenarları ortaktır																						22
	Karşılıklı köşeleri birleştiren doğru parçaları sadece bir noktada kesişir.															15							
	Altıgen düzgün olmasaydı köşegenler tek noktada kesişmezdi																					21	
	Altıgenin köşegenleri daireyi 6 eş parçaya böler.				4							11											
	bir köşegen çember ve daireyi 2 eşit parçaya ayırır.															15							
	İki köşegen çember ve daireyi 4 parçaya(eşit olmayan) ayırır															15							

EK 21: Problem 6 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Devamı	Altıgenin iki köşegeni altıgeni iki eşkenar dörtgen ve iki eşkenar üçgene ayırır.															15							
Şekil	BOC üçgeni BOC daire diliminin içindedir																						22
	çemberin içinde 6 tane paralelkenar vardır.			3					8		10						16						22
	ABFO eşkenar dörtgendir																				20		
	Altıgenin içine 3 tane eşkenar dörtgen yerleştirilebilir.				4																		
	6 tane köşegenleri dik kesişen eşkenar dörtgen vardır					5																	
	6 tane eşkenar dörtgen vardır					5		7		9							16						
	Eşkenar dörtgenler aynı zamanda deltoittir.										10												
	İki tane deltoit var																						22
	iki komşu üçgenden oluşturulan paralelkenarlar birbirine eşittir.								8					13									
	4 tane ikizkenar yamuk vardır			3																			
	ABFC ikizkenar yamuktur																				20		
	6 tane ikizkenar yamuk vardır.					5		7	8	9													22
	Bu kirişler dörtgenleri ikizkenar yamuklardır.				4											16							
	Altıgeni köşegenleriyle ikiye bölersek iki yamuk elde ederiz.											11			14	15		17					
	üç komşu üçgenden oluşturulan yamuklar birbirine eşittir.								8		10												
	Yamuklar üç eş parçaya ayrılmıştır.				4																		
	Altıgen düzgün altıgendir.				4		6					11		13	14		16	17			20	21	

EK 21: Problem 6 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Şekil	Altıgen iki tane kirisler dörtgeninin birleşimidir.				4																		
	A,O,D noktaları doğrusaldır.																				20		
	6 tane eş iç teget çember çizilir.		2																				
	Altıgenin diğer köşegenleri çizildiğinde 3 tane eş dikdörtgen oluşur.					5																	
	12 tane dik üçgen vardır					5																	
Denklik	Şekildeki tüm doğru parçaları birbirine eşittir.					5																	
	Karşılıklı kenarlar birbirine eşittir.					5																	
	Bir üçgen için yazılacak özellikler diğerleri için de geçerlidir.								8														
	FC , AD , EB çemberin çapı olduğundan aynı uzunluktadır.							7					12	13	14								
	O merkezi FC , AD , EB doğru parçalarını eşit iki parçaya ayırır.					5		7							14								
	Üçgenlerin en az iki kenarı eşitir.					5																	
	Üçgenler en az bir üçgenle eşitir.					5																	
	Üçgenlerin hepsi aynı yüksekliğe sahip								8														
	Yaylar birbirine eşittir (altıgen, çemberi 6 eşit yay parçasına ayırır)	1	2		4			7	8			11	12	13		15	16		18	19		21	

EK 21: Problem 6 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

Çember ve altıgen		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22	
	çember ve altıgenin ağırlık merkezi O noktasıdır.				4			7							14									
	Köşegenlerin kesiştiği nokta altıgenin merkezi																					21		
	Altıgenin iç teğet çemberinin merkezi de O noktasıdır.															16								
	Altıgenin köşegenleri O noktasında kesişir.				4																			
	çemberin merkezi aynı zamanda altıgenin köşegenlerinin kesişim noktasıdır. (Altıgenin ağırlık merkezidir.)			3		5										15								
	çemberin merkezinden köşelere çizilen doğru parçaları çemberin yarıçapıdır.	1				5									14									
	Üçgenlerin (altıgenin) kenarları çemberin yarıçapıdır.		2				6					10		12	13	14					19			
	Altıgenin şekildeki köşegenleri çemberin çapıdır ve birbirine eşittir.	1	2	3	4	5	6	7		9		11				15	16	17	18	19		21		
	Çember altıgenin çevrel çemberidir.				4								12			15					20			
	Altıgen kenarları çember üzerinde o.ş. çizilebilecek tek düzgün altıgendir.																	17						
Altıgenin iç teğet çemberinin yarıçapı üçgenlerden birinin yüksekliğine eşittir.																16								

EK 21: Problem 6 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
BDF üçgeninin alanı $r^2 3\sqrt{3} / 4$						6											17					
Eşkenar dörtgenlerin alanı $r^2 \sqrt{3} / 2$						6				10												
Daire dilimleri birbirinin alanları eşittir.								8			11											
Daire dilimlerinden üçgenlerin çıkarılmasıyla elde edilen alanlar birbirine eşittir.								8														
Üçgenlerin alanları eşit.								8														
Tüm dilimlerde (Daire dilimlerinin alanları-Üçgenlerin alanları) farkı birbirine eşittir.	1																					
Daire dilimlerinin alanları $\pi r^2 / 6$ dır	1																					
Altıgenin alanı dairenin alanından küçüktür.				4							11			14	15						21	
Üçgenlerin alanları eşittir																					21	
AO ...FO doğru parçaları çemberi eşit (alanlı)daire dilimlerine ayırır.	1						7					12			15							
BDF üçgeninin içine çizilen ve kenar uzunlukları her seferinde yarıya inen üçgenlerin alanları toplamı $r^2 \sqrt{3}$ tür						6																
Altıgenin alanı üçgenlerin toplam alanına eşittir.				4																		
Üçgenlerin alanları $r^2 \sqrt{3} / 4$	1				5																	
Dairenin alanı πr^2				4	5									14			17					

EK 21: Problem 6 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Alan	Daire dilimi alanı-üçgenin alanı $= \pi r^2/6 - r^2 \sqrt{3}/4$	1																					
	Dairenin alanı-altıgenin alanı= $\pi r^2 - r^2 3\sqrt{3}/2$	1				5							12										
	İç içe çember ve altıgenler çizilebilir. Bu durumda çemberlerin alanları πr^2 , $3/4\pi r^2$, $9/16\pi r^2$... şeklindedir												12										
	Çemberin herhangi bir çapı hem dairenin hem de altıgenin alanını iki eşit parçaya böler.	1																					
	Dairenin alanının altıgenin alanına oranı $= 2\pi/3\sqrt{3}$																16						
	Deltoitlerin alanı $r^2 \sqrt{3}/2$										10												
	Altıgenin alanı $r^2 3\sqrt{3}/2$				4	5	6								14			17					
	BDF üçgeninin alanı altıgenin alanının yarısıdır						6											17					
Simetri	Tepe açıları ters açı olan üçgenler çemberin merkezine göre simetriklerdir.					5																	
	Şekil çaplara göre simetriklerdir		2																				
	O noktasına göre simetrik düzgün dörtgenler vardır														14								
	Altıgen köşegenlerine göre simetriklerdir.				4								12					17					
	Ortak kenarları olan üçgenler ortak kenara göre simetriklerdir.														14								

EK 21: Problem 6 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Simetri	Altıgeni simetrik olarak ikiye bölersek çemberi de simetrik olarak ikiye böleriz.											11											
	çemberin alt kısmı ile üst kısmı FC doğru parçasına göre simetriktir.			3		5								13	14								
	çemberin merkezi simetri merkezidir.			3	4																		
Uzunluk	çemberin çevre uzunluğu altıgeninkinden büyüktür.									9												21	
	altıgenin köşegenleri (çemberin herhangi bir çapı) hem çemberin hem de altıgenin çevresini iki eşit parçaya böler.	1												13	14								
	$ AO = \dots = FO $					5																	
	$ BD = BF = FD = r\sqrt{3}$						6											17					
	Altıgenin köşegenlerinin uzunlukları toplamı, altıgenin çevresini verir.																16						
	Yarıçap a ise çemberin çevresi $2\pi a$ dır.				4																		
	Yay uzunlukları $\pi a/3$ br				4																		
Döndürme	şekil 180° döndürüldüğünde tepe açıları tes açı olan üçgenler çakışır.					5																	
	Üçgenler birbirinin ötelenmiş, simetrisi alınmış, ya da döndürülmüş halleridir.				4							11			14								
	Altıgen merkezine göre 360° döndürüldüğünde çember elde edilir									9													

EK 21: Problem 6 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Devamı	Üçgenlerden biri 360° döndürüldüğünde altıgen elde edilir					5																	
Açı	köşesi O olan açılar birbirine eşittir.	1			4				8							15					20		
	köşesi O olan açılar 60°' dir.	1					6		8														
	Altıgenin iç açıları 120° dir					5									14								
	m(EOC)=2 m(EBC)																				20		
	Altıgenin şekildeki köşegenleri iç açıların açığortayıdır				4	5									14								
	Altıgenin köşe açıları birbirine eşittir.				4							11											
	Merkez açıların toplamı 360°' dir.												12										
	Bu kirişler dörtgenlerinin karşılıklı iç açıları toplamı 180° dir.				4																		
	Üçgenlerin, köşesi O olan açıları gördüğü yaya eşittir.						6												18	19	20		
	Üçgenlerin, köşesi çember üzerinde olan açıları gördükleri yayın yarısına eşittir.																		18				
	EBC ve EOC aynı yayı gören açılardır																				20		
Pparalellik	Altıgenin karşılıklı kenarları paraleldir.				4																		
	Altıgenin kenarları çaplara paraleldir. AF / CD / EB		2						8				12	13	14	15							
	Altıgenin karşılıklı kenarlarına paralel bir köşegeni vardır.				4									13									

EK 21: Problem 6 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Üç boyutlu	6 tane koni var																						22
	Üçgenlerin çember yayları ile birlikte görünümü koniyi andırmaktadır.							7															
	Üç boyutlu düşünüldüğünde bir küp vardır.			3																			22
Çeşitli yaklaşımlar	BDF üçgeni eşkenardır																	17					
	BDF üçgeninin ağırlık merkezi O'dur						6																
	Üçgenlerin iç teğet çemberleri birbirine teğettir		2																				
	Birer nokta atlayarak seçilen 3 nokta birleştirilince oluşan üçgen eşkenardır		2																				
	Birer nokta atlayarak seçilen 3 nokta birleştirilince oluşan üçgenin çevrel çemberi şekilde verilen çemberdir.		2																				
	Fikir sayısı	15	11	8	29	28	14	11	15	6	8	11	10	12	20	14	11	14	5	6	11	11	9
	Kategori sayısı	6	6	4	9	8	6	5	5	4	4	7	6	6	9	6	5	6	4	4	3	5	2
	Orijinal fikir sayısı	5	6	1	9	13	2	1	5	1	2	1	2	1	2	4	4	2	1	-	5	4	5

EK 22: Problem 8 için Üretilen Fikirlerin Tablosu

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
özel değerleri inceleme	$0 \notin M$		2			5						11		13	14								
	$-1 \notin M$					5						11		13								21	
	$1 \in M$					5						11											
	$-2 \in M$ ise $4 \in M$					5																	
	$-2 \in M$ ise $2=4-2 \in M$ çelişkidir.					5																	
	$-2 \notin M$					5																	
	$-3 \in M$ ise $9 \in M$					5																	
	$-3 \in M$ ise $6=9-3 \in M$					5																	
	$-3 \in M$ ise $15=6+9 \in M$					5																	
	$-3 \in M$ ise $-27=(-3).9 \in M$					5																	
	$-3 \in M$ ise $-12=-27+15 \in M$					5																	
	$-3 \in M$ ise $-15=-12+(-3) \in M$ çelişkidir.					5																	
	$-3 \notin M$					5																	
	-1 ve 2 birlikte M’de değildir	1																					
	-1 ve -2 birlikte M’de değildir	1																					
	1 ve 2 birlikte M’dedir	1																					
Basit fikir üretme	$(M, +)$ kapalıdır					5	6	7			10	11		13		15		17			20		22
	$(M, .)$ kapalıdır					5	6	7			10	11		13		15		17			20		22
	$(M, +)$ değişme özel.										10												
	$(M, .)$ değişme özel.					5																	
	$(M, +)$ birleşme var										10	11											

EK 22: Problem 8 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Basit fikir üretme	Çarpmanın yutan el. yok					5																	
	$(M, +)$ ters ele. yok					5	6					11						17					
	$(M, \cdot)$ birleşme var					5					10	11											
	$a \in M$ için $1/a \in M$					5																	
	$(M, \cdot)$ ters ele. var																						
	$(M, +)$ grup değildir					5	6					11		13				17					
	$(M, \cdot)$ gruptur					5						11											
	$(a+b)c=ac+bc$								8		10												
Örnek bulma çabası	$M \subset Q^+ \cup \{0\}$ veya $M \subset Q^- \cup \{0\}$									9													
	$M \not\subset Q^-$									9													
	$M \subset Q^+ \cup \{0\}$				4					9													
	$M \subset Q^- \cup \{0\}$ olamaz				4																		
	$M = \{r, s \in Q: r+s=0\}$ olamaz				4																		
	M, Q^- olamaz				4					9				13			16					21	
	$M=Q^+$ veya $M=\{0\}$ veya $M=Q^+ \cup \{0\}$				4																		
	$M=Q^+$ veya $M=\{0\}$									9					14						20	21	
	$M=Q^+$ veya $M=Q^-$ veya $M=\{0\}$						6				10							17					
	$M=Q^+$ veya $M=Q^-$													13									
	$M \neq Q$ dir				4									13									
	$[1/2, \infty)$ kümesi verilen şartları sağlamaz				4																		
	$M, (0,1]$ aralığı olmaz													13									
	$M, (0,1)$ aralığı olmaz													13									
	M bir aralık olamaz				4									13									

EK 22: Problem 8 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Örnek bulma çabası	M=Z olamaz																						22
	$M=Z^+$ veya $M=Z^-$ veya $M=\{0\}$																						22
	$M=\{0\}$ olamaz. Çünkü önermelerin hepsini sağlıyor																						22
	$M=Z^-$ olamaz. Çünkü $(-1)(-2) \notin M$																						22
	$M=Z^+$ olabilir.													13									22
	$M=Q \setminus Q^+$ olamaz														14								
	$M=Q \setminus \{0\}$ olamaz.														14		16						
	$M=\{r \mid r \in Q \setminus \{0\}\}$ şartları sağlar																16						
	M'nin elemanı olan bir a rasyonel sayısının tamsayı katları ve kuvvetleri M'dedir									9													
Sezgisel çıkarım	$a, b \in M$ ise $a+b, ab, a+(a+b) \dots \in M$		2																				
	M nin elemanları ya pozitif ya da negatif	1																					
	M nin elemanları ya pozitif ya da negatif ya da sıfırdır																				20		
	M sonsuz elemanlıdır		2						8	9				13									
	M bir aralıktaki rasyonel sayılar olamaz								8														

EK 22: Problem 8 için üretilen fikirlerin tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Mantıksal çıkarım	Tam sayılardan oluşan sonlu bir küme değil								8														
	$a, b \in M$ ise $a^2 + b^2 \in M$	1																					
	Pozitif rasyonel sayılar M nin elemanı	1																					
	M de pozitif çift rasyonel sayı varsa negatif çift rasyonel sayı yoktur					5																	
	0 ve 1, M de bir arada bulunmaz																	17					
	M sadece negatif elemanlardan oluşamaz													13									
	$a \in Q^+$ için $a \in M$ ise $f: M \rightarrow M$ $a \rightarrow a^n$ 1.1 ve örtendir					5																	
	$k \in Q^+$ o.ü. $k-1 \in M$ ise $-k+1 \notin M$ dir.					5																	
	$-k \in M$ ise k^2 ve $k^2-k \in M$					5																	
	$-k \in M$ ise $k-1 \in M$ (tümevarım hipotezi) $-k(k-1) = -k^2 + k \in M$ dir.					5																	
	$-k \in M$ ise $k-1 \in M$ (tümevarım hipotezi) $-(-k^2+k) = k^2-k \notin M$ çelişkidir					5																	
	$k \in Q^+$ için $-k \notin M$ dir					5																	
	Fikir Sayısı	6	3		8	30	5	2	4	7	7	10	-	14	4	2	3	6	g	g	4	3	7
	Kategori sayısı	3	2		1	3	2	1	3	2	2	2	-	3	2	1	1	2	g	g	2	2	2
	Orijinal fikir sayısı	6	1		4	21	-	-	2	3	1	-	-	4	1	-	-	1	g	g	1	-	4

EK 23: Problem 9 için Üretilen Fikirlerin Tablosu

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Özel değerleri inceleme	$x=y=0$ için $f(f(0))=(f(0))^2$				4	5				9	10										20		
	$x=y=1$ için $f(1+f(1))=1+(f(1))^2$				4	5				9	10												
	$x=y=2$ için $f(2+f(2))=2+(f(2))^2$				4					9	10												
	$x=y=3$ için $f(3+f(3))=3+(f(3))^2$										10												
	$x=y=4$ için $f(4+f(4))=4+(f(4))^2$										10												
	$x=y=-1$ için $f(1+f(-1))=-1+(f(-1))^2$				4																		
	$x=y=-3/2$ için $f(9/4+f(-3/2))=-3/2+(f(-3/2))^2$				4																		
	$x=1$ $y=0$ için $f(1+f(0))=(f(1))^2$					5																	
	$x=0$ $y=1$ için $f(f(1))=1+(f(0))^2$					5																	
	$x=-1$ $y=0$ için $f(-1+f(0))=(f(-1))^2$					5																	
	$x=0$ $y=-1$ için $f(f(-1))=-1+(f(0))^2$					5																	
Sezgisel çıkarım	$x=1$ $y=2$ için $f(1+f(2))=2+(f(1))^2$								8														
	F birim fonksiyondur								8	9													
	Denklemin sağlaması için homomorfizma olması gerekir																					21	

EK 23: Problem 9 için Üretilen Fikirlerin Tablosu (devam)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Değişkene göre özel durum inceleme	x=0 y=a için inceleme $f(f(a))=a+(f(0))^2$		2			5																
	x=0 y=-a $f(f(-a))=-a+(f(0))^2$					5																
	x=a y=0 $f(a^2+f(0))=(f(a))^2$		2			5																
	x=-a y=0 $f(a^2+f(0))=(f(-a))^2$					5																
	x=y için $f(x+f(x))=x+(f(x))^2$								9	10			13									
	$Y=x^2+f(y)$ için inceleme					5																
	$Y=x^2+y+f(x)^2$ için inceleme					5																
	$y=-x^2-y-f(x)^2$ için inceleme					5																
Mantıksal çıkarımlar	Pozitif reel sayılar için fonksiyon R^+ da görüntülenir				4																	
	$F(-1)=\pm f(1)$					5																
	$F(-1)=f(1)$ olamaz					5																
	$F(a)=-f(-a)$					5																
	F tek fonksiyon					5																
	F birebirdir				4																	
	$F(0)=a$ için f, $g(x)=x^2$ ile (a,a^2) noktasında kesişirler.				4																	
	$f(f(y)+f(x)^2)=x^2+y$					5																

EK 23: Problem 9 için Üretilen Fikirlerin Tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22	
Devamı	$f(f(y)+f(x)^2)=y+f(f(x))^2$					5																		
	$f(f(x))^2=x^2$					5																		
Özel durum inceleme	Hom. İse $f \circ f=I$																				20		22	
	Hom. (belirtmemiş) Gibi işlem yapmış	1																						
	F homo. Ve $f^{-1}=f$ ise eşitlik sağlanır						6																	
	F homo. Ve $f^{-1}=f$ ise F birim olabilir						6																22	
	f^{-1} var (belirtmemiş) Gibi işlem yapmış	1																						
	$F(x)=ax^2+b$ ise $f(x^2+f(y))=a(x^2+f(y))^2+b$		2																					
	$f(x^2+f(y))=a(x^4+2x^2(ay^2+b)+(ay^2+b)^2)+b$		2																					
	$F(x)=mx+n$ ise $F(x^2+my+n)=y+(mx+n)^2$				3								11											
	$m(x^2+my+n)+n=y+m^2x^2+n^2+2mnx$				3								11											
Özel durum inceleme	$mx^2+m^2y+mn+n=y+m^2x^2+n^2+2mnx$				3							11												
	$m=m^2$ ve $mn=0$				3							11												
	$m=1$ veya $m=0$				3																			
	$m \neq 0$ ve $n=0$				3																			
	F birim fonksiyondur				3																			

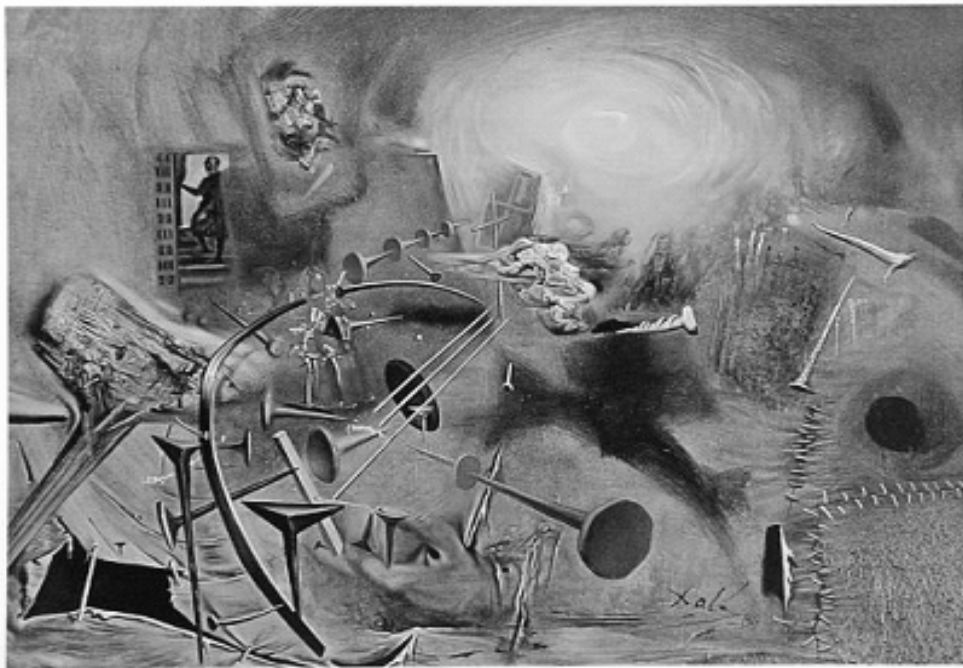
EK 23: Problem 9 için Üretilen Fikirlerin Tablosu (devam)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22
Örnek bulma çabası	Sabit fonksiyon değildir					5		7						13						19			22
	Sıfır fonksiyonu sağlamaz			3									12		14								
	Birim fonksiyon eşitliği sağlar	1	2		4	5		7			10	11	12	13	14		16	17		19	20	21	22
	F(x)= -x olmaz					5																	
	F(x)=ax+b eşitlikte yerine yazmış														14		16						
Örnek bulma çabası	F(x)=ax eşitlikte yerine yazmış														14							21	
	F(x)=x/3 eşitlikte yerine yazmış							7															
	F(x)=x+b eşitlikte yerine yazmış							7														21	
	F(x)=1/x eşitlikte yerine yazmış							7															
	F(x)=2(x-x ²) eşitlikte yerine yazmış							7															
	F(x)=x ² eşitlikte yerine yazmış																			19		21	
	F(x)=x ² tek değildir.					5																	
	F(x)≠x ²																			19			
	F(x)=x ³ olmaz					5																	
	F(x)=-x ³ olmaz					5																	
	F(x)=a/bx																						
	F(x)=a ^x eşitlikte yerine yazmış														14								
	Toplam fikir sayısı	3	5	8	9	26	2	6	2	5	7	5	2	3	5	g	2	1	g	4	3	5	4
Kategori sayısı	2	3	2	3	4	1	1	2	3	3	2	1	2	1	g	1	1	g	1	3	2	2	
Orijinal fikir sayısı	2	2	2	5	20	1	3	1	-	2	-	-	-	1	g	-	-	g	1	-	1	-	

EK 24: Salvador Dali'ye ait iki resim.



Hallucinogenic Toreador



Portrait of Juan de Pareja Adjusting a String on His Mandolin