

T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMEN
ADAYLARININ İSPATA İLİŞKİN ALGI VE
BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FARUK GENÇ

DANIŞMAN
DOÇ. DR. MUHAMMED FATİH DOĞAN

ADİYAMAN, 2025

ÖZET

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPATA İLİŞKİN ALGI VE BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Faruk GENÇ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ağustos/2025, Sayfa:156

Danışman: Doç. Dr. Muhammed Fatih DOĞAN

Bu çalışma, ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat konusundaki algı ve yeterliliklerini, görüşlerine, ispat yapma becerilerine ve ispatları değerlendirme yaklaşımlarına odaklanarak incelemiştir. Bu boyutların anlaşılması, gelecekteki öğretmenlerin ispat öğretimine nasıl yaklaşabilecekleri konusunda fikir verirken, aynı zamanda öğretim uygulamalarını etkileyebilecek bilgi eksikliklerini ya da yanlış anlamalarını da ortaya koymaktadır.

Hem bireysel hem de kavramsal bakış açılarını saptayabilmek için iç içe geçmiş çoklu durum çalışması deseni kullanılmıştır. Çalışma grubunu 2022-2023 akademik yılında Türkiye'deki bir devlet üniversitesinde dört sınıf düzeyinden (her sınıf düzeyinde altı öğretmen adayı) amaçlı olarak seçilen 24 ortaokul matematik öğretmen adayı oluşturmuştur. Veriler, üç aşamalı bir protokole göre yönlendirilen yarı yapılandırılmış görüşmeler yoluyla toplanmıştır: (1) ispat algılarına ilişkin sorular, (2) ispat oluşturma becerilerini ölçen görevler ve (3) örnek argümanların değerlendirilmesi.

Veriler, Gömülü Teori çerçevesinde içerik analizi ve açık kodlama kullanılarak analiz edilmiştir. Bulgular, öğretmen adaylarının oybirliğiyle ispatın önemini vurguladığını fakat ortaöğretim matematik eğitiminde ispatın yeterince yer almadığını belirttiğini ve bunu genellikle öğretmenlerin ispata ilişkin sınırlı farkındalığa sahip olmalarına bağladıklarını göstermiştir. Birçok öğretmen adayı, mevcut araştırmalardaki yönelimlerle tutarlı olarak ispat oluştururken örnek tabanlı yaklaşımlara güvenmiştir. İspat konusunda çok yönlü anlayışlar ifade etmelerine rağmen bu anlayışlar ispat üretimlerine veya değerlendirmelerine tutarlı bir şekilde yansımamıştır. Sınıf seviyeleri arasındaki gelişim beklenen ilerlemeyi göstermemiş ve öğretmen adaylarının öğretim zorluklarına önerdikleri çözümler sınırlı ve yüzeysel kalmıştır.

Çalışma, öğretmen adaylarının ispatla ilgili yeterliliklerindeki hem güçlü hem de zayıf yönleri vurgulamakta ve öğretmen eğitim programlarında hedefleri olan bir desteğe ihtiyaç duyulduğunu vurgulamaktadır. Gelecekteki araştırmalar, kurum kültürü, öğretim programı ve öğretmenlik uygulaması deneyimleri gibi bağlamsal etkiler de göz önünde bulundurularak ispat algılarının ve yeterliliklerinin zaman içindeki gelişimini incelemeleri önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel ispat; İspat algısı; İspat yeterlilikleri; İspat yapma ve değerlendirme; Matematik öğretmen adayları

ABSTRACT

PRE-SERVICE MIDDLE SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS' PERCEPTIONS AND COMPETENCIES REGARDING PROOF

Faruk GENÇ

Department of Mathematics and Science Education

Adiyaman University, Graduate Education Institute, August/2025, Page:156

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed Fatih DOĞAN

This study examined the perceptions and competencies of middle school mathematics preservice teachers regarding proof, focusing on their views, proof-construction skills, and approaches to evaluating proofs. Understanding these dimensions provides insights into how future teachers might approach teaching proofs while also revealing any gaps in knowledge or misunderstandings that might influence their teaching practices.

A nested multiple case study design was used to capture both individual and conceptual perspectives. The study group consisted of 24 preservice middle school mathematics teachers purposively selected from four grade levels (six preservice teachers per grade level) at a state university in Türkiye during the 2022-2023 academic year. Data were collected through semi-structured interviews guided by a three-stage protocol: (1) questions regarding perceptions of proof, (2) tasks assessing proof-construction skills, and (3) evaluation of sample arguments.

Data were analyzed using content analysis and open coding within the framework of Grounded Theory. Findings indicated that preservice teachers unanimously emphasized the importance of proof but indicated that it was not sufficiently included in secondary mathematics education, often attributing this to teachers' limited awareness of proof. Consistent with current research trends, many preservice teachers relied on example-based approaches to constructing proofs. Although they expressed multifaceted understandings of proof, these understandings were not consistently reflected in their proof production or evaluation. Development across grade levels did not demonstrate the expected progression, and preservice teachers' proposed solutions to teaching challenges remained limited and superficial.

The study highlights both strengths and weaknesses in preservice teachers' proof-related competencies and highlights the need for targeted support in teacher education programs. Future research is recommended to examine the development of proof perceptions and competencies over time, while also considering contextual influences such as institutional culture, curriculum, and teaching practice experiences.

Keywords: Mathematical proof; Proof perceptions; Proof competencies; Proof-construction and evaluation; Pre-service mathematics teachers

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Faruk GENÇ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgilerini esirgemeyen, tecrübeleri ile yol gösteren, çalışmalarımın olgunlaşmasında emek ve destekleri ile her daim yanımda olan çok değerli danışmanım Doç. Dr. Muhammed Fatih DOĞAN' a,

Tezimin olgunlaşmasında, eksikliklerinin giderilmesinde ve son şeklinin verilmesinde değerli yorumları ve bilgileri ile katkı sağlayan sayın Prof. Dr. Ali BOZKURT ve Prof. Dr. Ramazan GÜRBÜZ hocalarıma,

Eğitim ve meslek hayatım boyunca emek, sevgi, özveri ve değerli tecrübeleri ile bana her daim ışık tutan, yol gösteren, dualarını benden esirgemeyen, koşulsuz destekleri ile yanımda olan değerli eşim Emine TÜRKMEN GENÇ ve sevgili aile üyelerime,

Son olarak hayatım boyunca kişisel gelişimlerim için katkılarını benden esirgemeyen tüm öğretmenlerime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Araştırmanın Amacı.....	7
1.2. Araştırmanın Problem Durumu	7
1.3. Araştırmanın Sınırlılıkları	7
2. LİTERATÜR TARAMASI.....	9
2.1. İspat Tanımı.....	15
2.2. İspat Şemaları	17
3. YÖNTEM	29
3.1. Araştırmanın Yöntemi.....	29
3.2. Çalışma Grubu.....	30
3.3. Araştırmanın Tasarlanması ve Veri Toplama Aracı.....	31
3.4. Verilerin Toplanması.....	33
3.5. Araştırmacının Rolü	34
3.6. Veri Analizi	34
4. BULGULAR.....	38
4.1. Öğretmen Adaylarının İspata İlişkin Görüşlerine Dair Bulgular	38
4.1.1. Öğretmen adaylarının matematiksel ispat kavramına dair görüşleri.....	38
4.1.2. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın önemine dair görüşleri.....	42
4.1.3. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın okul matemateğindeki yerine dair görüşleri.....	46
4.1.4. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın amacına dair görüşleri.....	52

4.1.5. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın okul matemateğindeki rolüne dair görüşleri.....	57
4.1.6. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın verilmesi gereken sınıf seviyesine dair görüşleri	62
4.1.7. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın özelliklerine dair görüşleri ...	69
4.2. Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Becerilerine Yönelik Bulgular	75
4.3. Öğretmen Adaylarının İspatı Değerlendirme Biçimlerine Dair Bulgular	105
5. TARTIŞMA.....	129
5.1. İspatın Doğasına İlişkin Görüşlere Yönelik Tartışma.....	129
5.2. İspat Yapma Becerilerine Yönelik Tartışma	132
5.3. İspatın Değerlendirilmesine Yönelik Tartışma	136
5.4. Sınıf Seviyeleri Arasında Anlamlı Bir Farklılık Bulunmaması	141
5.5. Kuramsal Bilgi ile Uygulama Arasındaki Boşluk.....	143
6. SONUÇ	145
7. ÖNERİLER	147
KAYNAKLAR	148
EKLER	
ÖZ GEÇMİŞ	

TABLÖLAR DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 3.1. Çalışma grubunu oluşturan öğretmen adaylarına ilişkin bilgiler	30
Tablo 3.2. Verilerin analizi için kullanılan örnek kodlama şeması.....	36
Tablo 4.1. Öğretmen adaylarının ispat kavramına ilişkin görüşleri.....	38
Tablo 4.2. Öğretmen adaylarının ispatın önemine ilişkin görüşleri.....	42
Tablo 4.3. Öğretmen adaylarının ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşleri.....	46
Tablo 4.4. Öğretmen adaylarının ispatın amacına ilişkin görüşleri	52
Tablo 4.5. Öğretmen adaylarının ispatın okul matematiğindeki rolüne ilişkin görüşleri.....	57
Tablo 4.6. Öğretmen adaylarının ispatın verilmesi gereken sınıf seviyelerine ilişkin görüşleri	63
Tablo 4.7. Öğretmen adaylarının geçerli ve kabul edilebilir ispatın özelliklerine ilişkin görüşleri	69
Tablo 4.8. Öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerini ölçme amaçlı sorulan sorular	76
Tablo 4.9. Öğretmen adaylarının ispat yapma becerisi sorularına verdikleri cevaplar	76
Tablo 4.10. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirme biçimlerini ölçme amaçlı sorulan sorular	106
Tablo 4.11. Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanların geçerliliğinin değerlendirilmesine ilişkin cevaplar.....	106
Tablo 4.12. Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanlardan en yakın olan argümana ilişkin cevaplar	114
Tablo 4.13. Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanlardan en çok ikna edici olan argümana ilişkin cevaplar	118
Tablo 4.14. Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanlardan matematiksel açıdan en güçlü olan argümana ilişkin cevaplar	121
Tablo 4.15. Bütün sınıf seviyelerinde sınırlı ispat algılarını özetleyen ispat yapma becerisi tablosu.....	125
Tablo 4.16. Bütün sınıf seviyelerinde sınırlı ispat algılarını özetleyen ispat değerlendirme tablosu.....	126
Tablo 4.17. Birinci ifadede oluşturulan eksik formal argümanı en çok ikna edici bulan öğretmen adayları.....	126

Tablo 4.18. İkinci ifadede oluşturulan eksik formal argümanı matematiksel açıdan en güçlü bulan öğretmen adayları	127
--	-----



ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1.	İspat şemaları sınıflandırması	22
Şekil 4.1.	ÖA _{1.2} 'nin birinci soru için oluşturmuş olduğu otoriteye bağlı ispat argümanı..	77
Şekil 4.2.	ÖA _{4.1} 'in birinci soru için oluşturmuş olduğu otoriteye bağlı ispat argümanı...	79
Şekil 4.3.	ÖA _{1.5} 'in birinci soru için oluşturmuş olduğu genelleyici örnek argümanı.....	80
Şekil 4.4.	ÖA _{2.6} 'nın birinci soru için oluşturmuş olduğu genelleyici örnek argümanı.....	82
Şekil 4.5.	ÖA _{3.6} 'nın birinci soru için oluşturmuş olduğu genelleyici örnek argümanı.....	83
Şekil 4.6.	ÖA _{4.5} 'in birinci soru için oluşturmuş olduğu genelleyici örnek argümanı.....	84
Şekil 4.7.	ÖA _{2.4} 'ün ikinci soru için oluşturmuş olduğu algısal ispat argümanı	87
Şekil 4.8.	ÖA _{2.6} 'nın ikinci soru için oluşturmuş olduğu algısal ispat argümanı	88
Şekil 4.9.	ÖA _{4.6} 'nın ikinci soru için oluşturmuş olduğu algısal ispat argümanı	90
Şekil 4.10.	ÖA _{1.1} 'in üçüncü soru için oluşturmuş olduğu otoriter ispat argümanı.....	91
Şekil 4.11.	ÖA _{4.1} 'in üçüncü soru için oluşturmuş olduğu otoriter ispat argümanı.....	93
Şekil 4.12.	ÖA _{2.4} 'ün üçüncü soru için oluşturmuş olduğu otoriteye ispat argümanı	94
Şekil 4.13.	ÖA _{2.5} 'in üçüncü soru için oluşturmuş olduğu otoriteye bağlı ispat argümanı.	95
Şekil 4.14.	ÖA _{4.5} 'in üçüncü soru için oluşturmuş olduğu genelleyici örnek argümanı.....	96
Şekil 4.15.	ÖA _{2.4} 'ün dördüncü soru için oluşturmuş olduğu formal ispat argümanı	98
Şekil 4.16.	ÖA _{4.5} 'in dördüncü soru için oluşturmuş olduğu formal ispat argümanı	99
Şekil 4.17.	ÖA _{4.4} 'ün dördüncü soru için oluşturmuş olduğu sembolik ispat argümanı ..	100
Şekil 4.18.	ÖA _{3.5} 'in dördüncü soru için oluşturmuş olduğu örnek tabanlı (1.çözüm) argümanı	101
Şekil 4.19.	ÖA _{3.5} 'in dördüncü soru için oluşturmuş olduğu formal ispat (2.çözüm) argümanı	102
Şekil 4.20.	ÖA _{1.6} 'in birinci soru için oluşturmuş olduğu örnek tabanlı argümanı	103
Şekil 4.21.	ÖA _{1.6} 'in ikinci soru için oluşturmuş olduğu örnek tabanlı argümanı	104

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\sqrt{}$	:Karekök
$\in$	:Elemanıdır
$\forall$	:Her, Bütün
$\geq$	:Büyük Eşittir
Σ	:Toplam Sembolü
$\mathbb{N}^+$	: Pozitif Doğal Sayılar Kümesi
MEB	: Millî Eğitim Bakanlığı
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics
CCSSI	: The Common Core State Standards for Mathematics
MİYGÖ	: Matematiksel İspata Yönelik Görüş Ölçeği
TTİ	: Tanım, Teorem, İspat

1. GİRİŞ

İspat ve ispatın öğretiminin, öğrenenlere kazandırdıkları ve sağladığı fırsatlar göz önüne alındığında her zaman matematik ve matematik eğitiminde araştırmaların konusu olmuştur. İspat kavramının matematik eğitimindeki önemi ne kadar vurgulanırsa vurgulansın az kalır (Hanna ve De Villiers, 2012; Schoenfeld, 2009). Bu önem ispat kavramının matematiğin temelini oluşturmasının yanında matematiksel bilginin yapısının anlaşılması ve bu bilginin aktarımının gerçekleşmesinde bir araç olmasından kaynaklanmaktadır (Ball et al. 2002; Knuth, 2002a; Stylianides ve Ball, 2008). İspat, matematik öğrenmenin temelini oluşturduğu için matematiğin yapısının öğrenilmesi, takdir edilmesi ve matematiksel bilginin iletişiminin geliştirilmesi ve yaygınlaştırılması için olmazsa olmazdır (Polya, 1981). Schoenfeld (2009), ‘Problem çözme matematiğin kalbi ise ispat ruhudur’ diyerek ispatın matematiğin can damarlarından biri olduğunu vurgulamaktadır. Aynı şekilde Solow (2005), “Matematik, matematikçilerin dilidir ve ispat bu dili konuşabilen diğer kişilerle matematiksel doğruyla iletişim kurma yöntemidir” diyerek ispatın matematikteki önemini farklı bir açıdan sunmuştur. Matematiksel bilginin teminatını sağlayan matematiksel ispat, matematik yapma/bilme ve anlamada temel bir aktivitedir (Almeida, 2000). Matematiksel ifadeleri ispatlama süreci matematiksel iddiaların altında yatan nedenlerin ortaya çıkarılmasını ve matematiksel kavramlar arasında bağlantı kurulmasına imkân sağlar. Bu sayede matematiği ezberleyerek değil anlayarak öğrenme fırsatı sunar. Yani ispat matematikte öğrenmeyi destekleyen önemli bir araçtır (Uğurel, Kertil ve Moralı, 2020). Pek çok araştırmacı ve öğretim programı, ispat kavramının ve buna karşılık gelen ispat etkinliklerinin öğrenim süreci boyunca öğrenenlerin matematiksel tecrübelerinin bir bileşeni olmasını önermektedir (Stylianides, 2007). İspatın matematik öğretimindeki yeri, matematik eğitimindeki reform hareketleri kapsamında okul matematiği içinde içerik olarak daha zengin, öğretim biçiminin ise daha geniş ele alındığı söylenebilir (Uğurel ve Moralı, 2010). Bu yüzden matematiksel ispatın matematiğin öğretilmesi hususunda merkez bir konumda yer alması düşüncesi gittikçe önem kazanmaktadır. Akıl yürütme ve ispatın gerek yurtiçi gerek yurt dışında uygulanan matematik öğretim programlarının geliştirmeyi hedeflediği beceriler arasında olduğu görülmektedir (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018;2024; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Okul matematiğinde ispat kavramının doğasının ve rolünün matematik eğitimcileri tarafından gün geçtikçe artan ilgiyle karşılanması, ispat kavramının ilkokuldan liseye kadar bütün düzeylerdeki öğrenenlerin matematik eğitimlerinde merkezde olmasının

gerekliliği tartışmalarını gündeme getirmiştir (Knuth, 2002a; Schoenfeld, 1994; Sowder ve Harel, 1998). Matematik eğitimcileri tarafından gösterilen bu yoğun ilginin yankıları güncel matematik yeniliklerinde de varlığını hissettirmiştir (Knuth ve Sutherland, 2004). Okul matematiği için standartlarda son 10-15 yıllık zaman diliminde öğrenenlerin matematiksel düşünme, matematiksel argüman oluşturma ve değerlendirme ve matematiksel akıl yürütme ve ispat düşünceleri ile erken yaşlardan başlayarak tanışmalarının ne kadar önemli olduğunun vurgusu her geçen gün artmaktadır (CCSSI, 2010; NCTM, 2000,2009; Yackel ve Hanna, 2003).

Amerika Birleşik Devletleri'nde yaygın olarak kabul gören matematik standartlarında—Devlet Ortak Çekirdek Standartları (The Common Core State Standards for Mathematics [CCSSI], 2010)—matematiksel muhakeme ve ispat etkinlikleri öğrencilerin ana okuldan lise son sınıfa kadar tüm seviyelerde;

- (a) soyut düşünme,
- (b) uygulanabilir matematiksel argümanlar oluşturma,
- (c) başkalarının argümanlarını kritik etme,
- (d) matematiksel argümanları doğru bir şekilde ifade etme gibi öğrenciler için önemli üst düzey bilişsel becerileri içeren ‘Matematik Uygulamaları için Standartlar’ kabul edilmiştir. Bu ilkeler ve standartlar akıl yürütme ve ispat etkinliklerinin öğrenenlerin erken yaşlardan itibaren gündelik matematiksel tecrübelerinin önemli bir bileşenini oluşturmalarının gerekliliğini önerdiği görülmektedir.

Amerika Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin ([NCTM], 2000) yayınladığı “Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar” (Principles and Standards for School Mathematics) kitabında da “*öğretim programları ana okuldan lise son sınıfa kadar bütün öğrencilere matematiksel ispatların matematiğin önemli bir parçasını oluşturduğunu anlayabilmeleri, matematiksel çıkarımlarda bulunup bu çıkarımların doğruluğunu araştırabilmeleri, matematiksel ispat oluşturmabilmeleri, çeşitli matematiksel argümanların ispat oluşturup oluşturmadığını kritik edebilmeleri ve çeşitli ispat yöntemlerini seçip kullanabilmeleri için olanak verecek şekilde olmalıdır*” (s.56) ifadesi yer almaktadır.

Çeşitli ülkelerde yapılan güncel eğitim revizyonlarında matematiksel ispatların matematik eğitiminde ne kadar önemli olduğunu gözler önüne sermektedir. Örneğin, Finlandiya, İsveç ve Estonya gibi ülkelerde matematik öğretim programı değişikliğinde öğrencilerin akıl yürütme, muhakeme, çıkarımda bulunma, gerekçelendirme, açıklama ve ispat yapmasının önemi vurgulanmıştır (Hemmi, Lepik ve Viholainen, 2013). Buna paralel

bir biçimde Türkiye’de 2013 yılında yapılan öğretim programı düzenlenmesinde de matematiksel akıl yürütme becerisi üst düzey olan bireylerin yetişmesinin önemi vurgulanmıştır ([MEB], 2013). MEB (2018)’de ise matematik dersi öğretim programının özel amaçları içerisinde “Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade edebilecek, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilecektir” (s.9) ifadesine yer verilmesiyle akıl yürütmenin önemine atıfta bulunulmuştur. Öte yandan 2024 Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli hem Ortaokul Matematik Ders Programı hem de Ortaöğretim Matematik Ders Programı içerik tasarımında *“Matematiksel muhakeme becerisi; çözümleme, yorumlama, çıkarım yapma, matematiksel doğrulama ve/veya ispat yapma şeklinde dört ana beceriden ve bunların süreç bileşenlerinden oluşmaktadır. Örüntü arama, genelleme, tahmin etme, önerme sunma, farklı temsillerden yararlanma, ilişkilendirme gibi pek çok matematiksel beceriye muhakeme becerisinin süreç bileşenleri bağlamında yer verilmiştir.”* (s.15) ifadesi ile kavramsal beceriler ile matematiksel alan becerilerini geliştirmeyi hedefleyen beş alan becerisinden biri olan matematiksel muhakeme becerisinin önemine dikkat çekilmiştir ([MEB], 2024). Burada matematiksel muhakeme becerisinin alt süreçlerinden biri olan matematiksel doğrulama ve/veya ispat yapma becerisi dikkat çekmektedir. 2024 yılı öğretim programı ile 2018 yılı öğretim programı karşılaştırıldığında 2024 yılı öğretim programı ispatın açıkça vurgulandığı, matematiksel muhakeme becerisinin sadece problem çözme bağlamında değil temel yetkinliklerden biri sayıldığı, matematiksel akıl yürütmenin sadece bazı kazanımlarla sınırlı olmayıp sistematik şekilde öğrenciye neden-sonuç ilişkisi kurarak çıkarımda bulunma ve gerekçelendirmelerini sağladığı, matematiksel ispatın tüm düzeylerde vurgulanarak öğrencilerin farklı ispat türleri (örnekleme, karşıt örnek verme, genelleme, analogi ve formal akıl yürütme yollarıyla ispat üretmeleri) kullanmalarına teşvik etmesi gibi yönlerden farklılaştığı tespit edilmiştir.

CCSSI göre *“matematiksel olarak yeterli düzeye erişen öğrenci kabul edilen kişi kavram, tanım ve önceden belirlenmiş (doğruluğu ispatlanmış veya kabullenilmiş) sonuçları kullanarak bir argüman oluşturabilendir”* (CCSSI, 2010, s.6). Son yıllarda ispat kavramının matematik öğretim programlarındaki yeri ve önemi konusunda giderek artan bir ilgi olmasına rağmen müfredatlarda ispatın yalnızca mantıksal biçimi ile sunulması, ispatın içselleştirilerek anlamını ve açıklayıcı işlevini gölgelemektedir (Balacheff, 2023). Ayrıca öğrencilerin ispatla anlamlı bir şekilde karşılaşmalarının sağlanamadığı yapıların da müfredat bütünlüğünde matematiksel ispatların rolünü zayıflamaktadır (Stylianides,

Stylianides ve Moutsios-Rentzos, 2023). Yapılan araştırmalarda ispat kavramının birçok öğrenci için anlamsız bir ritüel olmaktan öteye geçemediğini göstermektedir (Harel ve Sowder, 2007). Bunun en önemli nedenlerinden biri olarak öğrencilerin ispat yapabilme yetilerinin yetersiz olmasından kaynaklı olduğu söylenebilir.

Bu soruna bir çözüm olarak NCTM (2014) sekiz etkili matematik öğretme uygulamalarından özellikle üçünü gerekli olarak belirtmiştir. Bunlar;

- (a) Matematiksel akıl yürütme ve ispat gerektiren etkinliklere yer verme,
- (b) Matematiksel gösterimleri kullanma ve ilişkilendirme,
- (c) Matematik sınıflarında verimli zorlanmayı desteklemedir.

NCTM (2014) gerekli gördüğü yukarıdaki gereklilikler incelendiğinde matematiksel akıl yürütme ve ispat etkinlikleri öğrencilerin matematiksel düşüncelerini yapılandırma, çıkarım yapma, neden-sonuç ilişkisi kurma, matematiksel bir önermenin/ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını mantıklı ve tutarlı bir şekilde gerekçelendirerek üst düzey matematiksel düşünme becerilerini ortaya çıkaracak fırsatlar bulabileceklerdir. Aynı şekilde matematiksel gösterimleri kullanan bir öğrenci farklı matematiksel temsillerle düşünebilme, bu temsiller arasında bağlantı kurarak kavramsal anlamayı derinleştirebilecektir. Son olarak matematik sınıflarında öğrencilere onları zihinsel olarak düşüncelerini ve zorlanmaları sağlayacak matematiksel görevlerin sunulmasının gerekliliğinden bahsedilmektedir.

Öğrenciler için ana bilgi kaynağı olan öğretmenlerin, ispata ve ispat yapmaya öğrenme ortamlarında yer vererek öğrencilerin ispatı anlamlandırma ve içselleştirmelerine fırsatlar sunarak öğrenebilmelerine yardımcı olabilmek için kendilerini iyi bir şekilde hazırlamaları beklenmektedir. Bunun yanında öğretmenlerin ispatla ilgili uygulamaları sınıf içi öğretim yöntemlerine doğru bir şekilde entegre edebilmeleri konusunda ne kadar hazır oldukları ise akıl yürütme ve ispatın öğretiminde önemli bir engel oluşturabilecektir.

Öğretmenlerin çoğunun matematiksel ispat hakkındaki bilgileri sınırlı olduğu dolayısıyla öğretmenler, öğrencilerin sınıf içindeki matematiksel etkinliklere seyrek olarak katılabildikleri geleneksel yaklaşımlarla derslerini yürütmekte ve yeniliklere uyum sağlayamamaktadırlar (Knuth, 2002a, 2002b). Knuth (2002c) bu durumu, “*Ortaokul matematik öğretmenlerinin karşı karşıya kaldıkları en büyük zorluğun, matematiksel ispatların tüm öğrenciler için uygun olduğuna ve matematiksel ispat görevlerinin sınıf içi pratiklerine taşıyabilmelerine kendilerini ikna etmeleridir*” (s.83) ifadesiyle belirtmiştir. Aynı şekilde Bieda’nın (2010) da ifade ettiği gibi öğrencilerin ispat ve gerekçelendirme algılarını geliştirebilmek için öncelikle öğretmenlerin kendilerinin ispat bilgilerini

derinleştirmelerinin gerekliliği vurgulanmıştır. Ayrıca matematiksel ispatları bütün öğrencilerin matematiğin öğrenilmesinde yer verilebilecek temel bileşenlerden biri olarak görmek yerine yalnızca başarılı öğrenciler için uygun olduğu ve özel bir uygulama alanı olduğunu düşünmektedirler (Knuth 2002c; Steele, 2006). Genel olarak öğretmenler matematiksel ispatların öğretim programlarına entegre edilebilecek bir uygulama olmadığını düşünmekte bu yüzden tüm sınıf seviyelerinde ispatın öğretilmesinin zor olduklarını düşünmektedirler (Bieda, 2010; Knuth, 2002a; 2002c). Dolayısıyla bütün öğretim basamaklarında öğretmenlerin öğrencilerine matematiksel ispatlarla ilgili anlamlı fırsatlar sunabilmeleri için öncelikle öğretmenlerin akıl yürütme ve ispatın önemi anlamlandırması ve içselleştirmesi gerekmektedir.

Yukarıda bahsedilenlerden de anlaşılacağı üzere matematiksel ispatların matematiğin öğrenilmesi ve öğretilmesi konusundaki önemi yadsınamaz bir gerçektir. (Hanna, 2000; NCTM, 2000; Stylianides, 2007). İspat öğrencileri matematiksel olarak birçok yönden geliştirerek matematiğe karşı olan ilgi ve motivasyonlarını arttırarak zevk almalarını sağlayacaktır. Şöyle ki ispat süreçleri öğrencilerin mantıksal akıl yürütme ve eleştirel düşünme becerilerini geliştirdiği (Selden ve Selden, 2003), genelleme ve soyutlama becerilerinin gelişmesine katkıda bulunduğu (Stylianides, 2007), problem çözme stratejilerini çeşitlendirmelerine katkı sunduğu (NCTM, 2000), epistemolojik farkındalıklarını artırdığı (Hanna, 2000), öz-değerlendirme ve öz-yeterlik inançlarını desteklediği (Aydoğdu İskenderoğlu ve Baki, 2011) ve matematiksel iletişim becerilerini geliştirdiği (NCTM, 2000) saptanmıştır. Ayrıca, öğrenciler ispat aracılığıyla matematiğin katı kurallar ve salt ezberden ibaret olmadığını, aksine yaratıcılık, açıklık ve mantıksal tutarlılık gerektiren bir süreç olduğunu keşfederler (Harel ve Sowder, 1998). Bu farkındalık, matematiğe karşı geliştirilen "anlamsız", "ezberci" ya da "soğuk" gibi önyargıların zamanla dönüşmesini sağlamaktadır. Böylece ispat, öğrencilerin matematiğe karşı olumsuz inançlarını sorgulamasına ve yerini daha yapılandırılmış, mantıksal gerekçelendirmelere ve güvene dayalı bir öğrenme yaklaşımına bırakmasına ortam hazırlamaktadır.

Özetle ispat matematiksel düşüncelerin geliştirilmesi/iyileştirilmesinde, matematiksel bilgi/kavramların özünün kavranmasında, matematiksel bilgi ve kavramlar arasındaki bağlantıların keşfedilmesinde ve bu süreçte ortaya çıkan fikirlerin matematiksel dili doğru bir şekilde kullanılarak paylaşılması bağlamında matematiğin öğrenilmesi ve öğretilmesi açısından çok önemlidir. Ayrıca ispatlar öğrencilere sadece matematiksel bir kavramı ya da bilgiyi öğrenmekten daha öte bu kavramları derinlemesine öğrenme; neden, nasıl, niçin gibi

soruları sorarak bilginin altında yatan gerçek sebepleri görme; matematiksel olarak bir iletişim kurarak bilgiyi kendilerinin yapılandırması gibi faktörleri kullanıp kalıcı ve anlamlı öğrenmeyi sağlayarak kavramsal öğrenmeye öncülük etmesi yönlerinden de kritik öneme sahiptir.

Öğretmen adaylarının ispat görüşü, kendi matematiksel düşüncelerinin yanısıra öğrencilerine nasıl bir ispat anlayışı aktaracaklarını da belirlemektedir. Schoenfeld (1994), ispatın matematik öğretiminde en çok yanlış anlaşılan kavramlardan biri olduğunu savunurken, Knuth (2002a), öğretmen adaylarının ispatı genellikle işlem temelli ve sembolik bir eylem olarak gördüklerini ifade etmiştir. Bu durum, ispatın açıklama, keşfetme ve genelleme yönlerinin ihmal edilmesine neden olmaktadır. İskenderoğlu (2010) tarafından yapılan çalışmada, öğretmen adaylarının ispatı çoğunlukla “doğruluğu kanıtlama” aracı olarak gördükleri, matematiksel anlam üretme ve gerekçelendirme yönüne yeterince değer vermediklerini saptamıştır. Stylianides (2007) ise ispatı yalnızca doğrulama değil, matematiksel açıklama ve bilgi üretme süreci olarak görmenin önemine dikkat çekmiştir. Bu çerçevede, öğretmen adaylarının ispatı nasıl anlamlandırdıkları, onların sınıf içi ispat öğretimini nasıl yapılandıracaklarını doğrudan etkilemektedir.

Öğretmen adaylarının ispat becerileri, sadece matematiksel doğruluğu sağlamak değil aynı zamanda öğrencilerine model oluşturma ve matematiksel düşünmeye sevk etme açısından önemli bir rol oynar. Harel ve Sowder’ın (1998) ortaya koyduğu ispat şemaları çerçevesinde, öğretmen adaylarının kullandığı şemaların büyük ölçüde ampirik (deneysel) ve otoriteye dayalı olduğu, analitik şemalara geçişte zorluk yaşadıkları belirlenmiştir (İskenderoğlu, 2010). Stylianides (2007), geçerli bir ispatın genellik, geçerlilik ve gerekçelendirme unsurlarını taşıması gerektiğini belirtmiş, bu üç unsurun öğretmen adaylarının ispat üretimlerinde sıklıkla eksik kaldığını vurgulamıştır. Dolayısıyla, öğretmen adaylarının ispat becerilerinin geliştirilmesi, hem içerik bilgisi hem de pedagojik matematik bilgisiyle bütünleştirilmiş öğretim tasarımlarını gerektirmektedir.

Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirme biçimleri, hem kendi ispat anlayışlarının hem de öğrenci ispatlarını yorumlayabilme kapasitelerinin bir yansımasıdır. Selden ve Selden (2003), öğretmen adaylarının genellikle ispatın doğruluğuna odaklandıklarını; ancak açıklık, mantıksal tutarlılık ve uygun gerekçelendirme gibi niteliksel unsurları göz ardı ettiklerini ortaya koymuştur. Uygan, Tanışlı ve Köse (2014), öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken genellikle yüzeysel özelliklere (örneğin kullanılan semboller veya biçim) odaklandıklarını; matematiksel yapı ve gerekçelendirmeye yönelik derinlemesine analiz

yapmakta zorlandıklarını belirtmişlerdir. Stylianides, Stylianides ve Moutsios-Rentzos (2023) ise öğretmenlerin, müfredatta yer alan ispat etkinliklerini değerlendirirken çoğu zaman didaktik indirgemelere başvurduklarını ve ispatın anlam boyutunu geri plana attıklarını ifade etmiştir. Bu çalışmalardan öğretmen adaylarının hem öğrencilerinin hem de kendi oluşturdukları ispatları değerlendirme süreçlerinde epistemolojik ve pedagojik açıdan daha bütüncül yaklaşımlar geliştirmesi gerektiği anlaşılmaktadır.

1.1. Araştırmanın Amacı

Bu çalışma ile matematik öğretmeni adaylarının ispata ilişkin algılarının (ispat yapma becerilerinin, ispata dair görüşlerinin ve ispatı değerlendirme biçimleri) belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu sayede bu çalışma öğretmen adaylarının gelecekteki öğretimleri esnasında ispatı öğrenenlere nasıl ve ne şekilde öğretecekleri hakkında bilgiler verebilir, öğretmen adaylarının ispata ilişkin bilgi eksikliklerinin ya da varsa kavram yanlışlarının tespit edilmesi ve konuya dair öneriler sunulması için fırsatlar sunabilir.

1.2. Araştırmanın Problem Durumu

Bu çalışmanın ana araştırma sorusu “*Matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik algıları nasıldır?*” şeklindedir. Aynı şekilde çalışmaya ait alt sorular da şu şekildedir:

- (1) *Matematik öğretmen adaylarının ispata dair görüşleri nelerdir?*
- (2) *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma becerileri nasıldır?*
- (3) *Matematik öğretmen adaylarının ispatı değerlendirme biçimleri nasıldır?*

1.3. Araştırmanın Sınırlılıkları

- Bu çalışma sadece belirli bir üniversitede matematik öğretmeni yetiştiren bölümde öğrenim gören öğretmen adaylarıyla sınırlı olduğundan bulgular farklı coğrafi bölgelerde veya farklı öğretim programlarında eğitim gören öğretmen adaylarına doğrudan genellenemeyecektir.
- Araştırma kesitsel bir çalışma olduğundan öğretmen adaylarının ispat görüşlerinin veya ispat yapma becerilerinin zaman içinde nasıl geliştiği izlenememiştir. Oysa ispatın doğası gereği ispat anlayışının gelişimsel ve evrimsel olduğu bilinmektedir (Harel ve Sowder, 2007; Stylianides, 2007).
- Her ne kadar çalışma Harel ve Sowder’ın (1998) çerçevesi sistematik biçimde uygulanmış olsa bile öğretmen adaylarının yapmış oldukları argümanlar bazen

birden fazla şemayı içerebilmekte ve yorumlamada öznel kararlara ihtiyaç duyulabilmektedir. Ayrıca bazı yanıtlar açık uçlu olduğundan adayın niyet ettiği yapıyı tam olarak ortaya koymak her zaman mümkün olmamıştır.

- Çalışma, sınıf seviyeleri arasında istatistiksel anlamlı fark olup olmadığını sayısal yöntemlerle ölçmemiş sadece sınıf seviyeleri göre bulguların dağılımına dair nitel örüntüler üzerinden yorum yapılmıştır. Bu nedenle sınıf seviyesi karşılaştırmaları izlenim ve betimleme düzeyindedir.



2. LİTERATÜR TARAMASI

İspat ile ilgili hem ulusal hem de uluslararası alanda bir çok çalışma yapılmıştır. Bu bölümde önce ulusal literatür daha sonra uluslararası literatürde yer alan çalışmalar sentezlenerek sunulmuştur.

Ülkemizde yapılan ispata dair görüşleri irdeleyen çalışmalar (Aydoğdu İskenderoğlu ve Baki, 2011; Doruk ve Güler, 2014; Morali, Uğurel ve Boz, 2006) genel olarak öğrencilerin ispatın anlamlandırılması ve ispat yapma konusunda zorluklar yaşadıklarını ortaya koymuşlardır. Ayrıca öğrencilerin ispat oluşturma konusunda özgüvenlerinin önemli derecede düşük olduğunu saptamışlardır. Dolayısıyla ülkemizde yapılan çalışmalar neticesinde öğrencilerin ispat algılarının beklenenden daha düşük olduğu saptanmıştır.

Aydoğdu İskenderoğlu ve Baki (2011) çeşitli sınıf düzeylerinde öğrenim gören 187 ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü lisans öğrencisinin ispata dair görüşlerini belirlemeyi amaçladıkları çalışmalarında bu görüşleri tespit edebilmek adına geliştirdikleri “Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği” kullanılarak incelenmiştir. Çalışmanın çıktıları incelendiğinde öğrencilerin ispata dair bakış açılarının olumlu olduğu fakat ispat yapmaya dair özgüvenlerinin zihinsel süreç, özdeğerlendirme ve inanç-tutum boyutlarından daha düşük olduğunu saptamışlardır. Burada zihinsel süreç boyutu öğrencilerin ispat yaparken yapmış oldukları bilişsel işlemler, akıl yürütmeleri ile düşünme ve mantıksal yapılar kurabilme becerileri ilişkilidir. Yani öğrencilerin matematiksel bir önermeyi/ifadeyi ispatlamak için gerekli olan aşamaları zihinsel olarak kurgulayabilmesi, önermeler arasındaki ilişkilendirmeleri kurabilmesi ve varsayımlardan sonuca ulaşırken mantıksal gerekçelendirmeleri de yaparak anlamlardırma becerisine sahip olmasıdır. Eğer öğrenci düşük özgüvene sahip ise ispat yaparken ne yapması gerektiğini bilse dahi bu zihinsel adımları yeterince sistematik ve doğru bir şekilde uygulama konusunda kararsız kalacaktır. Özdeğerlendirme boyutunda ise öğrencinin kendi ispat yapma yeterliliğini değerlendirmesi ile ilişkilidir. Yani öğrenci ispat yaparken neyi doğru veya yanlış yaptığının farkında olabilmesi, kendi bilişsel düşünme sürecine eleştirel bir gözle bakabilmesi ve zayıf veya güçlü yönlerini analiz edebilmesi ile bağlantılıdır. Eğer düşük özgüvene sahip bir öğrenci ise kendi ispat sürecini değerlendirme konusunda zorluk yaşaması, hatalarını fark edememesi veya fark etse dahi çözüm yolları üretememesi ile ortaya çıkacaktır. İnanç-tutum boyutu ise öğrencilerin ispat yapmaya yönelik inançları ve eğilimleri ile bağlantılıdır. Yani öğrenci ispat yapmanın matematikteki öneminin farkında olup olmaması, ispat yapma konusunda kendini yeterli görüp görmemesi ve ispat yapmayı sevip sevmemesi ya da zor,

sıkıcı ve anlamsız bir uğraş olarak görüp görmemesi ile ilişkilidir. Düşük özgüvene sahip öğrencide ispatı yapamama, ispat yapma becerisinin olmadığını düşünmesi ve motivasyonel olarak kendine engeller çıkarması ile ortaya çıkacaktır.

Benzer olarak Doruk ve Güler (2014) 480 lisans öğrencisinin katılımıyla “Matematiksel İspata Yönelik Görüş Ölçeği (MİYÖ)” kullanarak onların ispata dair görüşlerini ortaya çıkarmayı amaç edindikleri çalışmalarında Aydoğdu İskenderoğlu ve Baki’den (2011) farklı olarak katılımcıların ispata dair görüşlerinde olumlu ya da olumsuz bir yaklaşım olmadığı saptanmıştır. İspatı anlama ve ispat yapma bağlamında kendilerine olan güvenlerinin düşük olduğunu belirlemişlerdir. Çalışmanın sınıf düzeylerine göre ispata yönelik görüşleri irdelendiğinde düzeyler arasında anlamlı farklılıklar olduğu saptanmıştır. Üçüncü sınıfta öğrenim gören öğrenenlerin diğer sınıftakilere nazaran ispata dair görüşlerinin daha olumsuz olduğu görülürken birinci sınıfta öğrenim görenlerin ispata daha olumlu anlamlar yüklediklerini belirtmişlerdir.

Moralı, Uğurel ve Boz (2006) lisans öğrenimi gören 337 ilk ve orta öğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin ispat ve ispat yapmaya dair görüşlerini almak amacı ile geliştirilen bir ölçek yardımıyla “bireysel ispat yeterlilikleri, ispat yapmanın önemi, ispatın teoremi anlamaya etkisi, ispat yapmaya dair benlik algıları, örnek-teoreme dair bakış açıları ve problem çözme ve ispat yapma arasındaki ilişki” alt boyutları bağlamında irdemişlerdir. Çalışma sonucunda öğrenenlerin %36,8’i yüksek puan (70 ve üzeri), %41,8’i kararsız olarak kabul edilen orta düzey puan (61 ile 70 arası) ve %21,4’ü düşük puan (60 ve aşağısı) aldıkları gözlenmiştir. Bu çıktılar öğrenenlerin ispata dair görüşlerinin ne olumlu ne de olumsuz olduğu sonucunu çıkarmaktadır. Araştırmaya katılan öğrenenlerin ispat yapma benlik algısı alt ölçeği sonuçları incelendiğinde ispat yapabilme konusundaki özgüvenleri bağlamında %24,9’unun düşük, %40,9’unun kararsız ve %34,1’inin ise yüksek olduğu görülmesi ile öğrenenlerin ispat yapabilme bakımından kendilerini tanımadıkları ve ispat yapma yetilerinin farkında olmadıklarını göstermektedir. İspatı anlama alt ölçeği sonuçlarına göre %38,9’unun olumlu, %27,6’sının kararsız ve %33,9’unun olumsuz tutum sergilediği ve bu da öğrenenlerin ispatı anlama konusunda zorluk çekenlerin yüzdesinin azımsanmayacak oranda olduğunu göstermektedir. Bu çalışma Doruk ve Güler’in (2014) yapmış oldukları çalışmanın aksine sınıf düzeyleri arasında anlamlı bir fark olmadığını ortaya koymuştur. Ayrıca öğrenenlerin %83,7’sinin ispatın matematik disiplini bağlamında olmazsa olmaz bir unsur olarak görmelerine rağmen daha önceden kanıtlanmış bir önerme veya teoremin

tekrardan ispatının yapılmasının istenmesinin gereksiz olduğunu düşünenlerin (%62,3) yüzdesinin de ciddi bir oran olduğu gözlemlenmiştir.

Doruk (2014), ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata dair farkındalıklarını irdelemiş ve öğretmenlerin ispatın eğitimdeki rolüne yönelik sınırlı bir algıya sahip olduklarını ortaya koymuştur. Araştırmaya göre, öğretmen adayları ispatı genellikle sadece sınavlarda kullanılacak bir araç olarak görmek ve bu da öğrencilerin kavramsal anlayışlarını sınırlandırmaktadır. Benzer olarak Güven, Çelik ve Karataş (2012) ise, öğretmen adaylarının ispata yönelik farkındalıklarının çoğunlukla sınırlı olduğunu ve bu durumun öğrencilerin matematiksel kavrayışlarını olumsuz etkilediğini belirtmiştir. Güler ve Dikici (2012), öğretmen adaylarının öğretim programlarının ispat konusundaki eksikliklerine dikkat çektiğini ve bu durumun öğrencilerin matematiksel anlayışlarını olumsuz etkilediğini belirtmiştir.

Bununla birlikte matematiksel ispatların kullanımının öğrenciler üzerinde nasıl etkileri olduğuna dair de çalışmalar bulunmaktadır. Öyle ki, Altıparmak ve Öziş (2005), matematiksel ispatın öğrencilerin matematiksel muhakeme ve mantıksal düşünme becerilerini geliştirdiğini ve bu süreçlerin öğrencilerin matematiksel kavramların altında yatan mantığı anlamlandırmalarına yardımcı olduğunu vurgulamaktadır. Aynı şekilde Cihan (2024), YouTube™ üzerindeki matematiksel ispat videolarının öğrencilerin öğrenme süreçlerine nasıl katkı sağladığını irdelemiş ve ispat süreçlerinin dijital ortamda bile öğrencilerin öğrenme süreçlerini derinleştirdiğini ortaya koymuştur. Benzer olarak Güven, Çelik ve Karataş (2012), öğretmen adaylarının matematiksel ispata ilişkin görüşlerinde, ispatın matematiksel anlayışı geliştirme sürecinde önemli bir araç olduğunu belirtmişlerdir. Bu süreç, öğrencilerin matematiksel kavramları daha iyi anlamlandırmalarına ve derslere daha derin bir ilgi duymalarına katkı sağlamaktadır. Bir başka çalışmada Güler ve Dikici (2012), öğretmen adaylarının ispata dair olumlu tutumlarının, öğrencilerin matematiğe olan ilgilerini ve sevgilerini artırdığını göstermiştir. Araştırmasında, ispata dayalı öğrenme süreçlerine katılan öğrencilerin matematiğe karşı daha olumlu bir tutum geliştirdikleri ve matematiği daha zevkli buldukları ortaya koymuştur. Dede ve Karakuş (2014) ise, matematiksel ispatın pedagojik boyutunu ele alarak, öğretmenlerin ispat süreçlerini derslerine nasıl entegre edeceklerini bilmelerinin, öğrencilerin matematiksel kavrayışlarını artırmada temel bir unsur olduğunu belirtmektedir.

Son dönemde yapılan ulusal çalışmalar (Altıntaş ve İlgün, 2020; Kaplan, Demir ve Şahin, 2023), öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik algılarında önemli ölçüde

kavramsal eksiklikler ve tutarsızlıklar olduğunu göstermektedir. Özellikle ispatın rolü bağlamında adayların görüşleri “kararsızım” seviyesinde kalmakta ve bu durum, adayların ispatı sadece matematiğin öğretiminde teknik bir araç olarak benimsemeleriyle ilişkilendirilmektedir. Bu çalışmalar, öğretmen adaylarının önemli bir bölümü ispatı matematiksel doğrulamanın bir bileşeni olarak değerlendirdiğini, fakat pedagojik bir öğrenme aracı olarak kullanabilme yetilerinin kısıtlı kaldığını ortaya koymuştur. Buna benzer olarak Çontay (2024) tarafından yapılan bir araştırmada, tümdengelimsel bir matematiksel ispatın öğretmen adayları tarafından doğru şekilde kavranmadığı, hatta genellikle sezgisel veya örnek tabanlı bir akıl yürütme ile karıştırıldığı görülmüştür. Bu sonuçlar ispat türlerinin (örnekleme, çürütme vb.) öğretiminde açık bir şekilde ayrımların yapılması gerektiğini ve öğretmen adaylarının bu yöntemleri sadece uygulama değil aynı zamanda anlamlandırma düzeyinde içselleştirmesinin gerekli olduğuna işaret etmektedir. Öte yandan Doruk ve Cihan (2024) tarafından yapılan bir araştırmada, öğretmen adaylarının geometri ve cebir alanındaki matematiksel ispatları üretme şekillerinde önemli derecede farklılıklar bulunduğu tespit edilmiştir. Geometri bağlamında öğrenciler daha çok sezgisel ve görsel ispatlara yönelirken, cebirsel ispatlarda daha sınırlı kalmakta, formel düşünmeyi içeren tümdengelimsel yapılarda ise ciddi eksiklikler gözlenmektedir. Bu fark, disiplinin doğasından kaynaklanan düşünme biçimlerinin ispat üretimine nasıl yansıdığını göstermektedir.

Kaya ve Keşan (2023) tarafından yapılan araştırma, öğretmen adaylarının problem kurma ve modelleme süreçlerinde ispat içeriği olan durumları üretmede zorlandıklarını ortaya koymuştur. Özellikle açık uçlu, bağlamsal problem senaryolarında öğretmen adaylarının ispatı bir gerekçelendirme aracı olarak kullanmak yerine yalnızca sonuç doğrulaması amacıyla kurguladıkları gözlemlenmiştir. Ancak Ülker’in (2018) çalışmasında, sözsüz (görsel) ispatların ortaokul öğrencilerinin ispata yönelik algılarını olumlu yönde etkilediği belirlenmiştir. Özellikle sözsüz ispatlar, öğrencilerin ispatın sadece formel ve soyut bir süreç olmadığını, somutlaştırılabilir ve deneyimlenebilir bir düşünme biçimi olduğunu fark etmelerini sağlamıştır. Bu tür temsiller, öğrencilerin kavramsal anlamalarını derinleştirdiği gibi, ispat yapma sürecine olan katılımlarını da artırmaktadır. Bu bağlamda, sadece sözlü-akademik anlatımlara dayalı bir ispat öğretiminin yerine çoklu temsil sistemlerinin (grafik, katlama, animasyon, somut modelleme) entegre edilmesi gerektiği öne sürülmektedir.

Uluslararası alanyazı incelendiğinde öğrenenlerin ispatın gayesi ve görevine dair fikirlerinin ispat anlayışlarını ve ispat yapma yetilerini doğrudan etkileyebileceği düşüncesinden hareket ederek (Bell, 1976; Healy ve Hoyles, 2000; Porteous, 1990) öğrenenlerin ispatın görevi ve gayesi hakkındaki görüşlerini irdemişlerdir. Bu araştırmaların neticelerine birlikte bakıldığında öğrenenlerin daha çok ispatın üç ana işlevini göz önünde bulundurdıkları görülmektedir: **(a)** bir önermenin doğruluğuyla ilgili *doğrulama*, **(b)** iyi bir ispatın önermenin neden doğru olduğuna dair fikir vermesi yani *açıklama/izah etme*, **(c)** bir önermenin ispatı için gereken aksiyomlar, ana kavramlar ve teoremler ve bunlardan çıkarılacak küçük sonuçların tümdengelimli bir sistemle organizasyonu yani *keşfetme ve sistematize etme*.

Örnek olarak, Healy ve Hoyles'in (2000) yapmış olduğu geniş çaplı araştırma bize bazı bilgileri açıkça sunmaktadır. Araştırmada öğrenenlerin ispatın doğrulama ve açıklama işlevlerinin farkında olduklarını fakat yeni bir bilginin üretilmesini ispatın bir rolü olarak benimsemediklerini ortaya çıkarmışlardır. Şöyle ki öğrenenlere ispatın işlevi ve amacının ne olduğu sorulduğunda öğrenenlerin %50'si (1234 kişi) teyit etme, geçerlilik ve delil sağlamak gibi kavramlar kullanarak ispatın doğrulama işlevine vurgu yaparlarken %35'i (895 kişi) izah etmek, gerekçe sunmak ve başkalarıyla iletişim kurmak gibi ifadeler kullanarak ispatın açıklama işlevine öne çıkarmıştır. Öte yandan öğrenenlerin sadece %1'i ispatın gayesinin yeni teori ve fikirleri keşfetmek veya sistematize etmek olduğunu belirtmişlerdir. Benzer olarak, Porteous (1990) 11-16 yaş aralığında rastgele olarak seçilmiş 300 kişi ile anket ve 50 kişiyi kapsayan görüşme yöntemini kullanarak yapmış olduğu araştırmada öğrenenlerin büyük bir ekseriyetinin ispatın gayesinin doğrulamak olduğuna inandıklarını, çok az öğrenenin ise ispatın açıklamak ve sistematize etme işlevinin farkında olduğunu saptamışlardır.

Benzer bulgular Coe ve Ruthven'un (1994) ileri düzey matematik öğrencilerinden oluşan üniversite birinci sınıftaki bir grup öğrenen ile yapmış olduğu çalışmada da ortaya çıkmaktadır. Çalışma sonuçlarına bakıldığında öğrenenlerin ispat ile ilgili birincil kaygısının kuralları ve yapıları birkaç örnek ile doğrulamak olduğunu saptamışlardır. Bazı öğrenenler ispatı matematiksel kuralların işe yarayıp yaramadığını bireysel olarak test etmenin yani doğruluğunu titiz ve kapsamlı göstermek olduğunu "genellik, genel bir formül" gibi ifadelerle betimlemişlerdir. Çok az öğrenci ispatı geniş bir matematiksel sistem içerisinde kuralların veya yapıların neden doğru olduğu veya oluştuğunu açıklamak olduğunu düşünmüşlerdir. Bu da öğrenenlerin ispata dair anlayışlarının çoğunlukla doğrulama ve

onaylama işlevi ile kısıtlı olduğunu göstermektedir. Schoenfeld (1985) ise yapmış olduğu çalışmada çok fazla sayıda öğrenenin ispat yapmayı şekilsel ve manasız ritüel olarak gördüklerini saptamıştır. Bunun sebebinin ise öğrenenlerin ispat yapma tecrübelerinin çoğunlukla (dışsal otoriteler tarafından) doğru olduğu belirtilen matematiksel önermeleri doğrulamak veya doğruluğu apaçık bir şekilde belli olan önermelerin doğru olduğunun tasdik edilmesi ile kısıtlı olmasından kaynaklandığını belirtmiştir. Çünkü öğrenenler her iki durumda da (doğru olduğu aşıkâr veya bilinen bir önermenin doğrulanmasında) ispat yapmak için herhangi bir zorunluluk olduğunu düşünmemektedirler.

Yapılan araştırmalar öğretmenler genellikle matematik dersi bağlamında ispat yapmanın gayesine ilişkin çok kısıtlı bir seviyede bilgi ve fikre sahip olduklarını göstermektedir. Bu sonucun çıkması çok da şaşırtıcı değildir. Çünkü öğretmenler matematiksel bilgilerin yapılandırılmasında ispatın önemi ve işlevini anlamadıkları sürece matematik derslerinde ispatın gerekliliğini değerlendirmeleri de mümkün olmayacaktır. Bu yüzden öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin gelişimine yardımcı olabilmek için öğretmenler önce öğrencilerine ispatın matematikteki görevi ve rolünü daha kapsamlı bir şekilde takdim ederek ispatın önemini ve ihtiyacını öğrencilerine sezdirmelidirler. Selden ve Selden (2003) yaptıkları çalışmada, öğretmenlerin ispatın eğitimdeki rolüne ilişkin farkındalıklarını inceleyerek, öğretmenlerin büyük bir bölümünün öğrencilerin ispat yapma becerilerini değerlendirme konusunda yetersiz olduklarını ortaya koymuştur. Benzer şekilde Ball vd. (2002), öğretmenlerin ispatı nasıl sunduklarının ve öğrencilerle nasıl etkileşim kurduklarının, öğrencilerin ispatı anlamlandırma ve uygulama becerileri üzerinde belirleyici iki önemli faktör olduğunu belirtmektedir. Çalışmada, öğretmenlerin pedagojik alan bilgisinin, öğrencilerin ispat süreçlerine katılımını ve kavrayışlarını artırmada önemli bir rol oynadığını vurgulanmıştır.

Öğretmenlerin matematiksel ispatlarda yetersiz olmalarının yanında müfredat ve ezberci sistemden kaynaklı da öğrenenlerin ispat algıları kısıtlanmaktadır. Öyle ki, Stylianides (2007), sınav merkezli eğitim sistemlerinin öğrencileri ispat gibi üst düzey düşünme gerektiren süreçlerden uzaklaştırdığını ve onları yüzeysel bilgiye yönelttiğini savunmaktadır. Diğer taraftan Ball et al. (2002), uluslararası bağlamda yaptıkları çalışmalarda, birçok ülkede matematik öğretim programlarının ispatı yeterince vurgulamadığını ve bu durumun öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini sınırladığını ortaya koymuştur. Aynı şekilde Knuth (2002a), sınav merkezli eğitim sistemlerinin,

öğrencilerin matematiği sadece testlerde başarılı olmak için öğrendikleri bir araç haline getirdiğini ve bu durumun ispata dayalı düşünme süreçlerini ihmal ettiğini belirtmiştir.

Güncel çalışmalar, matematik öğretmen adaylarının ispat süreçlerine ilişkin değerlendirmelerinin çoğunlukla ispatın biçimsel ve örnek tabanlı yapılar üzerinden şekillendiğini göstermektedir (Buchbinder ve Zaslavsky, 2019; Kinnear, Iannone ve Davies, 2024; Vallejo-Vargas, 2025). Buchbinder ve Zaslavsky (2019), öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde örnek kullanımı ve ispatın biçimsel yapısı arasında bir denge aradıklarını belirterek somut örneklerin kavramların anlaşılmasında güçlü bir dayanak olduğunu belirtirken, bazı öğretmen adaylarının biçimsel ispatları daha geçerli gördükleri ancak örnek tabanlı ispatları bazen eksik değerlendirdikleri saptanmıştır. Kinnear, Iannone ve Davies (2024) ise, öğretmen adaylarının ispat yapma ve örnek üretme yöntemlerinin yazılı ve elektronik değerlendirme ortamlarında ayrıştığını saptamışlar ve öğretmen adaylarının yazılı ortamda daha çok biçimsel ispatları tercih ederken, elektronik ortamda örnek tabanlı ispatlara daha fazla eğilim gösterdiklerini ortaya koymuşlardır. Bu durum öğretmen adaylarının ispatı değerlendirme biçimlerinin bağlamsal olarak esnetilebileceğine işaret etmektedir. Vallejo-Vargas (2025) benzer şekilde öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde somut örnek tabanlı stratejileri soyut yapısal (formal) ispatlara göre daha kolay anlamlandırdıkları ve bu şekilde oluşturulmuş ispatlara daha çok güvendiklerini belirlemiştir.

2.1. İspat Tanımı

Her ne kadar ispat kavramı matematik disiplini ve matematikçiler açısından önemi sürekli vurgulansa da tam anlamıyla uzlaşa sağlanmış bir ispat tanımı bulunmamaktadır. Ulusal ve uluslararası alanyazı incelendiğinde ispat kavramının farklı şekillerde değerlendirildiği görülmektedir. Matematiksel ispat kavramına dair alanyazındaki tanımlar incelendiğinde bu kavramın iki sınıfa ayrılıp ele alındığı görülmektedir. Bu sınıflandırmalar matematiksel ispatın formal ve sosyokültürel yönü şeklindedir. Dede ve Karakuş'a (2014) göre ispatın formal yönü, matematiksel bir ifadenin doğrulanması aşamasındaki tanım, kural, önerme, postulat, aksiyom gibi bileşenleri içerirken; ispatın sosyokültürel yönü ise yapılan ispatın geçerliliği için süreç, işlem ve yöntemleri içermektedir.

İspatın formal yönünü vurgu yapan tanımlardan biri olarak Bell (1976) ispatı, "başlangıç noktası ya genellikle üzerinde anlaşılmaya varılmış gerçekler veya ilkelere ya da verilerden oluşan, bitiş noktası ise sonucu oluşturan birbirine çıkarımlarla bağlı

yönlendirilmiş ifadeler ağacı” olarak tanımlamaktadır. Benzer şekilde Balacheff (1988) ispatı, “doğruluğu daha önceden onaylanmış önermeler üzerine tutarlı bir şekilde kurulmuş özenli seçilen adımlar zinciri” olarak tanımlamıştır. Thurston (1994) matematiği tanımladığı modelde ispatın formal yönüne vurgu yapan TTİ modelini şu şekilde belirtmiştir.

T(tanım): Matematikçiler birkaç ana matematiksel yapı ve bu yapılara dair verilen aksiyomlarla işe başlar,

T(teorem): Biçimsel matematiksel önermeler olarak ifade edilebilecek bu yapılar hakkında cevaplanması gereken çeşitli önemli sorular bulunur,

İ(ispat): Matematikçinin görevi, aksiyomlardan önermelere veya onların reddine giden tündengelimli bir yol aramaktır.

İspatın formal yönüne vurgu yapan bu tanımlar matematiksel olarak elverişli bir ispatlama sürecinin çıktılarını betimlese de matematiksel ispatların esas öğelerini ve bilhassa ispat yapma sürecindeki sosyal öğeleri görmezden gelmektedir. İspatın sosyokültürel boyutuna vurgu yapan Hersh (1993) ispatı “birşeyin ispat olup olmadığının kanıtı nitelikli yargıçları ikna edip etmediğidir” diyerek ispatın başkaları tarafından da kabul görmesinin önemine değinerek ispatın salt bireysel bir öğeden ziyade sosyokültürel bir öğe olduğunu belirtir. Aynı şekilde Dawson (2006) ispatı “belirli matematiksel bir ifadenin doğru olup olmadığını (ideal olarak neden doğru olduğunu) konusunda çaba gösterenleri ikna etmek için oluşturulan argüman” olarak tanımlamıştır. Hersh gibi Dawson’da ispat yapma sürecinin bireysel olmasına ek olarak sosyal bir süreç olduğunu savunmaktadır.

Harel ve Sowder (2007) ispatı, “bir kişinin veya topluluğun bir iddia hakkındaki şüpheleri ortadan kaldırmak için kullandığı süreç” olarak tanımlayarak ispatın birbirini tamamlayan iki önemli alt sürecine dikkat çekmişlerdir. Bu alt süreçler;

- (1) Emin olmak (ascertaining): Bir iddianın doğruluğu veya yanlışlığı hakkında kişinin kendi şüphelerini ortadan kaldıran bireysel veya toplumsal süreç,
- (2) İkna etmek (persuading): Bir iddianın doğruluğu veya yanlışlığı hakkında başkalarının şüphelerini ortadan kaldıran bireysel veya toplumsal süreç.

Yani Harel ve Sowder bir anlamlandırma süreci olarak ispatın kişinin yalnızca kendisi açısından anlamlı olmasından emin olması değil aynı zamanda başkalarını da kendi sonuçları hakkında açıklamalar ve gerekçelendirmeler yoluyla ikna etmesi olduğunu savunmaktadırlar. Benzer şekilde Raman (2003) ispatın “anlamayı meydana çıkaran argüman” olarak bireysel yönüne ve “belirli matematiksel topluluk açısından yeterli titizlikte olan argüman” olarak toplumsal yönüne vurgu yapmaktadır.

Stylianides'in (2007) yapmış olduğu ispat tanımı öğrenenlerin matematiğin öğrenilmesi sürecinde meşgul oldukları ispat etkinliklerinin sosyokültürel boyutuna ve matematikçilerin ispat algılarına uygun bir tanım yapmaktadır. Stylianides'e (2007) göre "ispat, aşağıdaki karakteristik özellikleri taşıyan birbirine bağlı iddialar dizisi veya matematiksel bir iddiaya karşı olan matematiksel argümandır." (s.291)

1. Sınıf topluluğu tarafından kabul edilen (kabul edilen ifadeler kümesi) başka bir gerekçe olmaksızın doğru ve uygun ifadeleri kullanır;
2. Sınıf topluluğu tarafından bilinen ve geçerli veya onların kavramsal erişimleri içerisinde olan akıl yürütme biçimlerini (argümantasyon biçimleri) kullanır; ve
3. Sınıf topluluğu tarafından bilinen ve uygun veya onların kavramsal erişimleri içerisinde olan ifade etme biçimleri (argümantasyon temsil biçimleri) ile iletilir.

Özetle ispat tanımı olarak şu üç tanımı yapmak mümkündür. **(1)** İspat "ikna etmek" kelimesinin karşılığıdır. Burada kişinin öncelikle yapmış olduğu ispatın ileri sürülen önermenin/savın doğruluğu veya yanlışlığı konusunda kendisinin ikna olduğundan emin olması daha sonra ise yapmış olduğu bu ispatları mantıksal gerekçelendirmelere dayalı açıklamalar yaparak başkalarını ikna ederek inandırması anlamına gelmektedir. **(2)** İspat sınıf topluluğu tarafından kabul edilen ifadeler üzerine inşa edilen yani doğruluğu daha önceden kanıtlanmış önermeler/savlar üzerine mantıksal gerekçelendirmeler dayandırılarak ve tutarlı argümanlarla desteklenerek yapılan birbirini tamamlayan adımlardan oluşan bilgi oluşum sürecidir. **(3)** İspat bir önermenin/savın doğrulanmasını veya yanlışlanmasını kanıtlara dayandırarak gösterme esasına dayanan aynı zamanda mantıksal gerekçelendirmelere dayandırarak açıklama, derinlemesine düşünerek keşfetme, matematiksel dili doğru bir şekilde kullanarak iletişimi sağlama, sistemli ve tutarlı bir organizasyon sağlama gibi üst düzey bilişsel becerileri barındıran kapsamlı bir süreci temsil etmektedir. Bu çalışmada Harel ve Sowder'ın (1997) yapmış oldukları ispat tanımı kuramsal çerçeve olarak benimsenmiştir.

2.2. İspat Şemaları

Healy ve Hoyles (2000) 2459 öğrenen ile anket gerçekleştirerek öğrenenlerin ispat algılarını yani onların neyi ispat olarak kabul ettikleri ve bunların niteliklerinin neler olduğu ve bu algılarının sebeplerini incelemişlerdir. Araştırmacılar öğrenenlere onların aşına oldukları ve aşına olmadıkları birer cebirsel problem için farklı farklı öğrenenler tarafından oluşturulmuş çeşitli argümanları vermişler ve öğrenenlerden bu argümanlar içerisinde

seçim yapmalarını belirtmişlerdir. İlk olarak kendilerine en yakın olan argümanı (kendileri o ispatı yapmış olsalardı hangi argümanı üretirlerdi) ve daha sonra ise hangi argümanın öğretmenleri tarafından en yüksek notu alacağını düşündükleri argümanı seçmeleri istenmiştir. Çeşitli öğrenenler tarafından oluşturulan argümanlar sözel, görsel, deneysel ve cebirsel biçimlerde olmakla beraber bir de doğru olmayan/ geçersiz cebirsel argüman şeklindedir. Araştırmanın çıktıları, öğrenenlerin kendileri ve öğretmenleri bağlamında farklı ispat algılarına sahip olduklarını ortaya çıkarmaktadır. Yani öğretmenleri tarafından en yüksek notun cebirsel argümanlara verileceğini düşünürlerken, kendilerinin üretecekleri ispatlar için diğer argüman çeşitlerini (sözel, görsel veya deneysel) seçme eğiliminde olmuşlardır. Aşına olunan cebirsel ifadenin ispatı için sunulan argümanlar incelendiğinde öğrenenler öğretmenleri tarafından en yüksek notu alacağını düşündükleri argümanların cebirsel argümanlar (%64 fakat %42'si doğru olmayan/geçersiz cebirsel argüman) olduğunu belirtmişlerdir. Bu bağlamda %25'i sözel argümanı, %9'u görsel argümanı ve %3'ü ise deneysel argümanı seçmişlerdir. Öte yandan öğrenenlerin kendilerine sunulan argümanlar içerisinde kendilerinin yapacağı ispata yakın olan argüman bağlamında %46'sı sözel, %24'ü deneysel (ampirik), %16'sı görsel argümanı seçerken yalnızca %14'ü (%2'lik kısmı ise doğru olmayan/geçersiz cebirsel argüman) cebirsel argümanı seçmişlerdir. Öğrenenlerin aşına olmadıkları problemde ise cebirsel bir argüman seçme eğilimlerinde artış gözlenmiştir. Aşına olmadıkları cebirsel ifadenin ispatı için sunulan argümanlar incelendiğinde öğrenenler öğretmenleri tarafından en yüksek notu alacağını düşündükleri argümanların %79 ile cebirsel argüman, %19 ile sözel ve %2 ile deneysel argüman olacağını belirtmişlerdir. Öte yandan öğrenenlerin kendilerine sunulan argümanlar içerisinde kendilerinin yapacağı ispata yakın olan argüman bağlamında %20 cebirsel argüman, %41 sözel ve %39 deneysel argümanı seçmişlerdir. Bu çıktılarından hareketle öğrenenleri kendileri açısından göz önüne aldıkları ispat ölçütleri ile öğretmenlerinin göz önünde bulundurduklarını düşündükleri kriterler birbirinden önemli ölçüde farklılıklar taşımaktadır. Öğrenenler kendilerinin aşına olmadıkları problem bağlamında verilen cebirsel argümanın doğruluğunun yorumlanmasında ciddi ölçüde zorluklar yaşadıkları görülmektedir. Bir diğer sonuç ise öğrenenlerin kendilerinin yapacağı ispata en yakın argümanı seçerken argümanın kendileri için anlamlı ve ikna edici olup olmasını göz önünde bulundururlarken öğretmenlerinin en yüksek notu vereceklerini düşündükleri argümanlar konusunda ise matematiksel dil ve gösterimlerle ifade edilen cebirsel argüman olup olmadığını göz önünde bulundurdukları sonucu çıkarılabilir.

Buna paralel olarak Chazan (1993) 17 lise öğrencisi ile geometri dersi bağlamında yapmış olduğu görüşmelerle deneysel (ampirik) ispatları üzerine konumlandırılan çalışmada öğrenenlerin bireysel ispat algılarının öğretmenlerinin tercihlerinden farklı olduğunu gözlemiştir. Yani öğrenenler kesin sayıları ve bunun gibi şeylerin (örneklerin) ispatlama sürecinde ispatı görebilmelerini sağladığına inandıkları için geometri üzerine çalışmayanlar için örnekler kullanılarak yapılan ispatın tündengelimli ispatlardan daha ikna edici olduğunu belirtmişlerdir. Esasen öğrenenlerin kendileri ve öğretmenleri açısından geçerli olduğuna inandıkları ispat ölçütleri arasındaki farklılık, Raman (2003) betimlediği kişisel ve toplumsal argüman terimleri ile de açıklanabilir. Raman kişisel argümanı “anlamayı meydana çıkaran bir argüman” ve toplumsal argümanı ise “belli bir matematik toplumu için yeterli titizliğe sahip argüman” (Raman, 2003; 320) olarak tanımlamıştır. Yani kişisel argüman kişinin matematiksel ifade veya duruma ilişkin anlamasını ve kavramsallaştırmasını iyileştirmesi bakımından önem arz ederken toplumsal argümanda ise ispatın şekilsel bakımdan kesinlik ve güçlü olma durumu göze çarpmaktadır. Kişisel ve toplumsal argüman arasındaki bu ayrım Harel Sowder’ın (1998) ispatı tanımladığı aslını anlama (‘kendi şüphesini ortadan kaldırmak’) ile ikna etmek (‘başkasının şüphesini ortadan kaldırmak’) ve Mason’ın (1985) pedagojik olarak nasıl ispat oluşturulur bağlamında sunduğu “önce kendini ikna et, sonra arkadaşını ikna et, sonra düşmanını ikna et.” önerisine benzerlik göstermektedir. Bundan dolayı öğrenenlerin ispata dair anlayışlarını irdeleyebilmek için onların hem kişisel hem de toplumsal argümanlarının birlikte göz önünde bulundurulmasının gerekliliği görülmektedir.

Öğrenenlerin ispat yapma ve değerlendirme süreçlerinde onlara verilen görevler ve onların bu görevleri nasıl algıladıklarının öğrenenlerin ispata dair anlayışlarını ve ispat yapmadaki isteklerini etkilediği bilinen bir gerçektir. Öğrenenler ispatı tam manasıyla kavramadan dışsal otoritelere (matematikçiler, öğretmenler, kitaplar gibi) bağımlı bir şekilde ispatı kavramaya ve anlamlandırmaya çalıştıkları için kısıtlı bir ispat anlayışına sahip olmalarına sebep olmaktadır. Fried ve Amit (2006) 8. sınıf öğrenenlerinin ispat anlayışları ve öğrenme ortamındaki otoriteler arasındaki bağlantıyı irdeledikleri çalışmalarında, onların ispat anlayışlarının dinamik olduğunu yani sarmal bir süreç içerisinde sürekli ilerlediğini ve öğrenme ortamında otorite ilişkileri ile onların ispat anlayışlarının birbirlerine yakın bir şekilde gelişim gösterdiğini belirtmişlerdir. Araştırmacılar, öğrenenlerin matematikçilerin tersine tanımı ve kriterleri açık bir şekilde belirlenmiş yerleşik bir ispat görüşünün gerçekten

olması gerektiğine fakat matematik otoritelerinin ancak böyle bir görüşe sahip olabileceğini savunduklarını belirtmiştir.

Öğrenenlerin ispata dair anlayışları ve yeterlilikleri hakkında önemli çıkarımlarda bulunmamızı sağlayan faktörlerden biri de onların ispat yapma yaklaşımlarının nasıl olduğudur. Bell (1976), Coe ve Ruthven (1994) ve Porteous (1990) öğrenenlerin ispat yapma becerilerini irdeleyen çalışmalar yapmışlardır ve öğrenenlerin ispat yapma yaklaşımlarını genellikle deneysel (ampirik) ve tümdengelimsel olmak üzere iki temel başlıkta kategorize etmişlerdir. Harel ve Sowder (1998; 2007), ispatlamanın bireyin önce kendisini ikna etmek daha sonra başkalarını etmek gibi iki süreçten meydana geldiğini ve sosyal bir olgu olarak da ele alınmasının gerekliliğini ileri sürmüşlerdir. İleri sürülen bu fikirden yola çıkarak öğrenenlerin önce kendini daha sonra başkalarını ikna etmenin ne demek olduğunu saptamak için Sowder ve Harel (1998) 128 lisans öğrencisi ile 6 öğretim deneyi gerçekleştirerek onların ispat anlayışlarını, ortaya çıkarmış oldukları ispatları ve ispatı nasıl değerlendirdiklerini irdeledikleri ve Harel ve Sowder (2007) matematikteki ispatı hem informal gerekçelendirmeler hem de genellikle matematiksel ispatlar olarak adlandırılan gerekçelendirme türlerini inceledikleri detaylı ve kapsamlı çalışmalar sonucunda öğrenenlerin ispat yapma yaklaşımlarını, ispata dair anlayışları ve değerlendirmelerini üç temel başlık altında birleştirdiğini saptamışlardır. Bunlar;

(1) Dışsal ikna şeması: (a) bir öğretmen veya bir kitap üzerine, (b) sıkı bir şekilde argümanın görünümüne üzerine (örneğin geometrideki ispatlar çift sütun formatta olması zorunludur gibi), (c) potansiyel tutarlı bir sistemi (örneğin niceliksel, uzamsal vb.) olmayan manipülasyonlar ya da sembollerle yapılan sembol manipülasyonları üzerine.

- **Otoriter ispat şeması:** Kişi öğretmene, kitaba veya başka bir otoriteye dayalı olarak ikna olur. Öğrenenlerin verdikleri yanıtları otorite ve bilgi kaynağı olarak gördükleri kitaba veya öğretmene dayandırdıkları durumlar veya yaptıklarından emin olmayıp bir otoritenin onayına ihtiyaç duydukları durumlarda ortaya çıkmaktadır.
- **Ritüel İspat şeması:** Kişi ispatın içeriğine değil biçimine dayalı olarak ikna olur. Öğrenenlerin "*ispat gibi görünmüyor, ispata benzemiyor*" gibi söylemleri ispatın biçimine göre karar verdiklerini gösterir. Yapılan ispat doğru olsa bile işlemler, sembolik ifadeler vs. içermediği zaman öğrenenlerde şüphe uyandırmaktadır. Ayrıca kimi durumlarda ispat yanlış olsa da açıklamalar ve doğrulamalar görüşleri itibarıyla ispata benzediği için ispat olarak kabul etmektedirler.

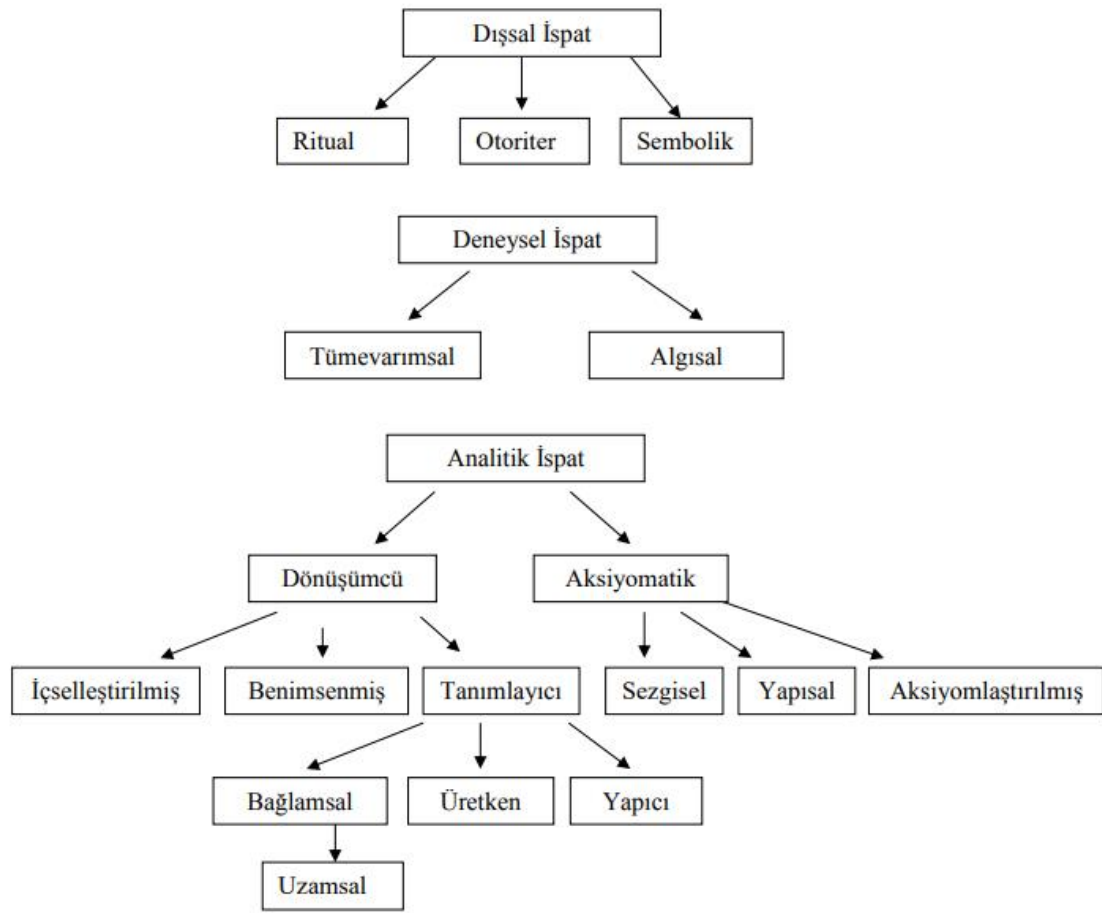
- **Dayanağı olmayan sembolik ispat şeması:** Kişinin matematiksel ifadeler, sembollerin işlevi ve anlamı düşünülmeden sembolik manipölasyonlar ile ispatın yapılmasıdır. Öğrenenlerin verilen problemi sadece bir defa okuyup problemdeki sembolik ifadeleri rastgele bir şekilde manipüle etmeye başlamaları ve problem durumunu anlamaya yönelik herhangi bir çaba harcamamaları bu şemada gözlenen davranışlardır.

(2) Deneyisel (ampirik) ispat şeması: (a) niceliklerin doğrudan ölçümünün örneklerden kanıtı (bazen sadece bir örnek) ve cebirsel ifadelerde belirli sayıların yerine koyulması, (b) algılar.

- **Tümevarımsal ispat şeması:** Bu ispat şemasına sahip olan öğrenen hipotezin/önermenin doğruluğuna ikna edici delil olarak bir veya daha fazla örneği göz önünde bulundurur, oluşturulan argümanlar özel durumlara ve örneklerle dayanmaktadır. Kendini ve başkalarını niceliklerin doğrudan ölçümünü yaparak sayısal hesaplamalarla cebirsel ifadelerde belli örnekleri yerine koyarak hipotezin/önermenin doğruluğuna ikna etmeye çalışırlar.
- **Algısal ispat şeması:** Öğrenen tümdengelimden sağlanmamış yetersiz gösterimlere dayalı çıkarımlar yapar ve bu çıkarımların kendisi ve başkaları için yeterince ikna edici olduğunu düşünürler. Öğrenenlerin basit çizimleri ve sezgilerini temel alarak ikna olmaları sonucun zaten yeterince açık olduğunu iddia etmeleri bu durumun özelliklerindendir.

(3) Tümdengelimsel ispat şeması: Dönüşümsel veya aksiyomatik olabilir.

- **Dönüşümsel ispat şeması:** Bu ispat şemasında öğrenen kendini ve başkalarını dedüktif bir süreçle ikna etme yoluna gider. Bu süreçte öğrenen genellenebilir durumları göz önünde bulundurur; amaca yönelik zihinsel süreçleri uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar.
- **Aksiyomatik ispat şeması:** Bu şema dönüşümsel ispat şemasının özelliklerine sahiptir ve bunlara ek olarak öğrenen matematiksel sistemlerin ispatsız olarak kabul edilen durumlara yani aksiyomlara dayandığını fark eder.



Şekil 2.1. İspat şemaları sınıflandırması (**Kaynak:** Harel ve Sowder, 1998)

Harel ve Sowder’in oluşturmuş olduğu bu ispat şemaları yapısı üniversitede öğrenim gören bireylerle yapılan çalışma sonucu ortaya çıkmasına rağmen bu yapı bütün öğrenim düzeylerinde öğrenenlerin ispat anlayışlarını irdelemek için yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Bazı öğrenenler onlara sunulan bir argümanı ispat olup olmama konusunda değerlendirirken daha çok argümanın biçimsel formuna göre yorumlamaktadır. Dışsal ispat şeması türü olan bu durum sunulan bir argümanın içeriğinin mantıklı ve yerinde olmasından çok onun formuna ilişkin bir yorumlama yoluna gidilmesidir ki öğrenenler arasında sıkça karşılaşılan bir durumdur. Mesela Healy ve Hoyles (2000) araştırmasında çoğu öğrenenin öğretmenleri tarafından en iyi notun verileceğini düşündükleri argümanı seçmeleri istendiğinde büyük çoğunlukla seçmiş oldukları ama mantığı kontrol edilmeden seçilen argüman olan cebirsel (sembolik) argümanın “takip edilmesi zor” ve “ispata daha yakın gibi görüldüğü” gerekçeleriyle yanlış olan cebirsel argümanı seçmeleri onlar için sadece bir cebirsel formun varlığı ispat olarak değerlendirmeleri için yeterli olmuştur.

Öğrenenler arasında çok sık rastlanan bir diğer ispat şeması ise verilen bir önermeyi doğrulamak adına örnekleri kullandıkları deneysel ispat şemasıdır. Bu ispat şeması eğitimin bütün kademelerindeki öğrenenler arasında sıkça gözlenmektedir. Örnek olarak Porteous'un (1990) yapmış olduğu çalışmada öğrenenlerin yaklaşık %75'inin deneysel (ampirik) argümanlara göre çıkarımın doğru olduğuna inandıklarını saptamıştır. Fakat bu öğrenenlerden sadece %10'u bu deneysel (ampirik) argümanların doğruluğunu destekleyici ekstra mantıksal gerekçelendirmeler yapmışlardır. Benzer şekilde, Chazan'ın (1993) lise geometri öğrenenleri ile yapmış olduğu deneysel (ampirik) kanıt ve matematiksel ispata dair bakış açılarını irdelediği çalışmasında öğrenenlerle yapılan görüşmelerin neticesinde onların deneysel (ampirik) argümanları matematiksel ispat için kâfi gördüklerini saptamıştır. Bieda ve Lepak (2014) 22 ortaokul 7. sınıf öğreneni ile yapmış oldukları çalışmada 15 öğrenenin deneysel (ampirik) argümanın diğer argümana nazaran daha ikna edici bulduklarını ve bu argümanı seçmelerinin nedeni sorulduğunda ise “örneklerin argümanı anlamayı arttırdığı”, “örneklerin daha fazla bilgi sağladığı” ve “örneklerin matematiksel argümanlarda gerekli” gibi nedenler sunmuşlardır.

Benzer bulgular Recio ve Godino'nun (2001) öğrenenlerin ispat şemalarını analiz etmek için yapmış oldukları çalışmada ortaya çıkmıştır. Recio ve Godino (2001) 1994-95 yılında 429 lisans öğrenenine anket uygulamış daha sonra ise 1997-98 yılında 193 lisans öğrenenine aynı anketi uygulayıp önceki sonuçlarını doğrulamak istemişlerdir. Çalışmada bir tane cebirsel (sembolik) ve bir tane de geometrik ifadeyi ispatlamaları istenmiştir. Recio ve Godino öğrenenlerin ispatlarını deneysel (ampirik) ve tümdengelsel olmak üzere iki farklı ispat düzeyine göre kategorize etmişler ve 1994-95 akademik yılındaki öğrenenlerin cebirsel probleme verdikleri cevapların %39,6'sı (170 kişi) ve geometrik probleme verdiklerin cevapların %37,3'ü (160 kişi) deneysel ispat şemasını kullandıklarını gözlemlemişlerdir. Aynı şekilde Stylianaou, Blanton ve Rotou'nun (2015) 6 Amerikan üniversitesinde öğrenim gören 535 lisans öğreneni ile yapmış oldukları geniş katılımlı çalışmada öğrenenlerden onlara sunulan 4 farklı argüman arasından kendi oluşturacakları argümana en yakın olan argümanı seçmeleri söylendiğinde öğrenenlerin seçtikleri argümanların %42'sinin, matematiksel açıdan en titiz ve doğru olan argüman seçiminde %21,75'inin ve problemi sınıftaki akranlarına açıklamak için kullanacakları en açıklayıcı argümanın seçiminde ise %52,25'inin deneysel (ampirik) argüman seçtiğini gözlemlemişlerdir.

Öte yandan Porteous'un (1990) yapmış olduğu çalışmada öğrenenlerin bir önermenin doğru olup olmadığını kanıtlamak için tek bir aksine örnek bulmanın kâfi geleceğini düşündüklerini gözlemlemişlerdir. Yapmış oldukları çalışmada hemen hemen her öğrenenin (50 kişiden 48'i) tek bir aksine örnek ile yanlış olan geometri önermesini çürüttüklerinin ortaya çıkarmışlardır. Bu da öğrenenlerin aksine örneğin ispattaki işlevini daha iyi anlamlandırabildiklerini göstermektedir. Benzer biçimde Edwards'ın (1999) yaşları 14-15 arasında değişen 10 lise birinci sınıf öğrenenin ile yaptığı çalışmada tüm öğrenenlerin doğru olup olmadığının irdelenmesini istediği ifadeye tek bir aksine örnek vererek ispatlama yoluna gittiklerini gözlemlemiştir.

Diğer taraftan öğrenenlerin öğrenim yaşamlarında ilerleme olduğunda tümdengelimsel ispat şemalarında buna paralel olarak gelişmesi beklenirken ne yazık ki yapılan araştırmalar genellikle üzücü ve hayal kırıklığına neden olan sonuçlar ortaya koymuştur. Örnek olarak Bell (1976) yaşları 11-18 arasında olan ilköğretim kademesinde öğrenim gören 160 öğrenen ile yapmış olduğu çalışmada çok az bir oranda öğrenenin tümdengelimsel bir ispat şeması olabilecek bir argüman sunduklarını ifade etmiştir. Healy ve Hoyles'in (2000) başarı seviyesi olarak yüksek olan lise öğrenenleri ile yapmış oldukları kapsamlı çalışmada öğrenenlerin büyük bir ekseriyetinin tümdengelimsel bir ispat şemasına sahip olmadıklarını ortaya çıkarmışlardır. Benzer olarak Coe ve Ruthven'in (1994) lisans öğrencileri ile yapmış olduğu çalışmada tümdengelimsel olarak değerlendirilebilecek stratejilerin çok düşük bir sıklıkta olduğunu ortaya çıkarmışlardır. Araştırmalar öğrenenlerin az bir çoğunluğunun tümdengelimsel ispat şemasına sahip olduklarını göstermektedir. Bu sonuçlar bizlere öğrenenlerin tümdengelimsel ispat şemalarını iyileştirme ve geliştirmenin gerekliliğini ve onların bu şema bağlamında nasıl bir yardıma ihtiyaçlarının olduğunu anlamaya daha çok kafa yorulması gerektiğini göstermektedir.

Çeşitli araştırmalar öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin hem ampirik (örnekler, desenler, gözlemler) hem de tümdengelimsel argümanları geçerli bir ispat olarak kabul etme eğiliminde olduklarını göstermektedir. Hatta çalışmalar, bazı öğretmen adaylarının yanlış tümdengelimsel argümanları bile geçerli ispatlar olarak değerlendirdiklerini ortaya koymuştur (Knuth, 2002b; Martin ve Harel, 1989; Morris, 2002). Örnek olarak, Martin ve Harel (1989) çalışması, öğretmen adaylarının ampirik ve tümdengelimsel argümanları nasıl değerlendirdiklerini ve bu argümanları ispat olarak kabul etme eğilimlerini incelemiştir. Araştırma, öğretmen adaylarının ispat kavramına dair anlayışlarını ölçmek için kapsamlı bir değerlendirme yapmıştır. Çalışmaya 101 ilköğretim öğretmen adayı katılmıştır.

Katılımcılara dört farklı ampirik argüman (örnek, örüntü, büyük sayı kullanımı ve karşıt örnek) ile üç farklı tümdengelsel argüman (genel ispat, yanlış ispat ve özel ispat) sunulmuştur. Öğretmen adaylarından her bir argümanı geçerli bir ispat olup olmadığı konusunda değerlendirmeleri ve bir (geçersiz ispat) ile dört (geçerli ispat) arasında puanlamaları istenmiştir. Katılımcıların çoğu, tümdengelsel argümanlara yüksek puan vermiştir (genellikle üç veya dört). Bu, öğretmen adaylarının tümdengelsel argümanların ispat olarak kabul edilmesi gerektiğini kavradıklarını göstermektedir. İlginç bir şekilde, katılımcıların yarıdan fazlası ampirik argümanlara da yüksek puan vermiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının örnekler ve gözlemlerle desteklenen argümanları da geçerli ispatlar olarak görme eğiliminde olduklarını göstermektedir. Katılımcılar ispatın doğası üzerine ders almış olmalarına rağmen, %46'sı genel bir tümdengelsel argümanı geçerli bir ispat olarak değerlendirirken aynı zamanda en az bir ampirik argümana da yüksek puan vermiştir. Bu, ispat eğitiminin öğretmen adaylarının kavramsal anlayışını derinleştirmede yetersiz kaldığını ortaya koymaktadır. Öğretmen adaylarının %52'si, yanlış tümdengelsel argümanları da geçerli ispatlar olarak değerlendirmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının yalnızca argümanın biçimsel yapısına (örneğin cebirsel form) odaklanarak değerlendirme yaptıklarını göstermektedir. Araştırma, öğretmen adaylarının argümanları değerlendirirken biçimsel unsurlara (cebirsel, görsel veya sözel sunum) odaklandıklarını göstermiştir. Bu durum, argümanların mantıksal geçerliliğinden çok biçimsel yapının öğretmen adaylarının değerlendirmelerini etkilediğini ortaya koymaktadır. Öğretmen adaylarının aşına olmadıkları argümanlar karşısında doğru değerlendirme yapma oranlarının düştüğü bulunmuştur. Bilinmedik veya alışık olunmayan bir argüman sunulduğunda, yanlış tümdengelsel argümanları ispat olarak kabul etme eğilimi artmıştır. Buna paralel olarak, Morris (2002) çalışmasında öğretmen adaylarının matematikte ampirik ve tümdengelsel argümanları nasıl değerlendirdiklerini ve bu argümanları geçerli bir ispat olarak kabul etme eğilimlerini incelemiştir. Öğretmen adaylarının büyük bir kısmı, hem ampirik hem de tümdengelsel argümanları geçerli ispatlar olarak kabul etmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının gözleme dayalı kanıtlarla mantıksal çıkarımlar arasında net bir ayrım yapmada zorlandıklarını göstermektedir. Katılımcılar, hem ampirik hem de tümdengelsel argümanların matematiksel ifadelerin doğruluğunu gösterdiğine inanmışlardır. Öğretmen adayları, sonucun doğruluğuna odaklanarak argümanın yapısını ve geçerliliğini sorgulamaktan kaçınmışlardır. Bazı öğretmen adayları, yanlış tümdengelsel argümanları bile geçerli ispatlar olarak değerlendirmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının mantıksal

tutarlılığı gözden kaçırarak, argümanın biçimsel yapısına veya örneklerle desteklenmiş olmasına daha fazla önem verdiklerini göstermektedir. Bu bulgular, öğretmen adaylarının da öğrenciler gibi argümanların biçimsel yapısından etkilendiklerini ortaya koymaktadır. Hem öğrenciler hem de öğretmen adayları, cebirsel formda sunulan argümanları geçerli ispatlar olarak kabul etme eğilimindedir.

Knuth (2002c) 17 öğretmen adayının katıldığı çalışmada öğretmenlerin ispat anlayışlarını, neyin geçerli bir ispat oluşturduğuna dair bilgi düzeylerini ve sınıf içi uygulamalarda ispatı nasıl kullandıklarını incelemeyi amaçlamıştır. 11 öğretmen, ispatı "matematiksel bir ifadenin doğruluğunu gösteren mantıklı ve tümdengelimsel bir argüman" olarak tanımlamıştır. 6 öğretmen ise ispatı "ikna edici bir argüman" olarak tanımlamış ancak neyin ikna edici olduğu konusunda net bir açıklama yapmamıştır. 17 öğretmenden 10'u, geçersiz tümdengelimsel argümanları geçerli bir ispat olarak kabul etmiştir. Bazı öğretmenler, cebirsel işlemler doğru olduğu için veya alışlagelmiş ispat yöntemleri (örneğin tümevarım) kullanıldığı için bu argümanları ispat olarak değerlendirmiştir. Ayrıca araştırmada, bazı öğretmenlerin geçerli bir ispat için bile karşıt örnek bulunabileceğini ifade ettikleri belirtilmiştir. Buna benzer olarak Knuth (2002b) öğretmen adaylarının ampirik (örnek ve gözlem temelli) ve tümdengelimsel (mantıksal çıkarıma dayalı) argümanları nasıl değerlendirdiklerini ve bu argümanları geçerli bir ispat olarak kabul etme eğilimlerini incelemeyi amaçladığı çalışmada öğretmen adaylarının büyük bir kısmı, hem ampirik hem de tümdengelimsel argümanları geçerli ispatlar olarak kabul etmiştir. Özellikle örneklerle desteklenen ampirik argümanlar, öğretmen adayları tarafından ikna edici bulunmuş ve matematiksel doğruluğu göstermek için yeterli görülmüştür. Katılımcıların önemli bir kısmı, yanlış tümdengelimsel argümanları geçerli ispatlar olarak değerlendirmiştir. Öğretmen adayları, argümanların biçimsel sunumuna (örneğin cebirsel ifadeler, düzenli yapı) aşırı önem vermiştir. Özellikle cebirsel formda sunulan argümanlar daha ikna edici bulunmuş ve bu argümanların geçerliliği sorgulanmamıştır. Dickerson ve Doerr (2014) ise öğretmenlerin ispat anlayışlarını, özellikle de ispatın biçimsel (formal) ve biçimsel olmayan (informal) yönlerine nasıl yaklaştıklarını incelediği çalışmada daha az deneyimli öğretmenler, ispatın biçimsel (formal) olması gerektiğine inanmışlardır. Bu öğretmenler, ispatın geleneksel olarak standart matematiksel formatlara uygun sunulması gerektiğini düşünmüş ve cebirsel veya mantıksal tümdengelimsel ispatları tercih etmişlerdir. Öte yandan deneyimli öğretmenler, özellikle lise öğrencileri için görsel ve somut ispatların daha etkili olduğunu savunmuşlardır.

Doğan'ın (2015, 2019a), öğretmenlerin ispat anlayışlarını ve bu anlayışların sınıf içi uygulamalara nasıl yansıdığını incelemeye odaklandığı çalışmalarında araştırmaya katılan 12 ortaöğretim matematik öğretmenin hepsi görsel destekli argümanları ve örnek tabanlı açıklamaları daha açıklayıcı ve ikna edici bulduklarını belirtmişlerdir. Öğretmenler, görsel argümanların hem kendileri hem de öğrencileri için daha anlaşılır ve öğretici olduğunu ifade etmişlerdir. Cebirsel formda sunulan argümanlar ise öğretmenler tarafından daha az açıklayıcı bulunmuş ve çoğu öğretmen bu tür argümanların öğrenciler için erişilmesi zor olduğunu dile getirmiştir. Çalışmaya katılan bir öğretmen, sınıfta oluşturulan iki argümanı değerlendirirken, cebirsel olarak doğru bir argümanı "doğru ama anlamsız" bulunduğunu belirtmiştir. Buna karşın, örneklerden faydalanarak oluşturulan ve görsel destekli olan diğer argümanı daha açıklayıcı ve anlamlı bulmuştur (Doğan, 2015; Doğan ve Williams-Pierce, 2019). Aynı çalışmada öğretmenler, formal (tümdengelimsel ve cebirsel) argümanları öğrenciler için erişilmez olarak görmüş ve bu tür argümanların öğrenciler tarafından anlaşılmasının zor olduğunu ifade etmişlerdir. Bunun yerine, öğretmenler informal (sözel ve örnek tabanlı) argümanların öğrenciler tarafından daha kolay oluşturulabileceğine ve anlaşılabilmesine inanmışlardır. Ayrıca öğretmenler, ispatı sınıfta kullanırken öğrencileri ikna etmek için örnek tabanlı açıklamalara başvurduklarını, ancak tümdengelimsel ispatları doğrudan öğretmeyi genellikle tercih etmediklerini belirtmişlerdir. Benzer şekilde çeşitli lise düzeylerinde görev yapan matematik öğretmenleri ile yürüttüğü çalışmasında Miyakawa ve Herbst (2007), öğretmenlerin ispatı öğrencilerini ikna etmek için kullanmadıklarını ve öğretmenlerin öğrencilerin ispat süreçlerinden ikna olmayacaklarını düşündükleri için, ispatı genellikle sınıfta doğrudan öğretmekten kaçındıklarını tespit etmiştir. Bu öğretmenler, geçerli bir ispatı sunmak yerine, matematiksel teoremleri veya ifadeleri açıklarken öğrencilerin konuyu anlamalarını sağlamak amacıyla örnek tabanlı argümanlar kullanmayı tercih etmişlerdir. Öğretmenlerin sahip oldukları bu anlayışları öğrenciler üzerinde ispata dair olumsuz anlayışlara neden olduğu, öğrencilerin ispat süreçlerine aktif katılımını sınırladığı ve ispatın öğrenme süreçlerine entegre edilmesini zorlaştırdığı alan yazında ortaya açıkça konulmuştur (Bieda, 2010; Healy ve Hoyles, 2000).

Halihazırdaki çalışmalar genellikle öğretmenlerden verilen argümanları değerlendirmelerini isterken, Stylianides ve Stylianides (2009) 39 ilköğretim matematik öğretmen adayını ile özel öğretim yöntemleri dersinin bir parçası olarak erilen bir matematiksel ifadeyi ispatlamak için kendi argümanlarını oluşturmaları ve ardından oluşturdıkları argümanların geçerli bir ispat olup olmadığını değerlendirmeleri istediği ve

öğretmen adaylarının ampirik argümanlar (örnekler, gözlemler) ve tümdengelimsel ispatlar (mantıksal çıkarımlara dayalı argümanlar) arasında nasıl bir ayrım yaptıklarını incelediği çalışmada 39 öğretmen adayından dokuzu, bir matematiksel ifadeyi ispatlamak için ampirik argümanlar üretmiştir. Bu adaylar, örnekler ve gözlemlerle desteklenen argümanlar oluşturarak matematiksel ifadeyi doğrulamaya çalışmışlardır. Bu dokuz öğretmen adayından beşi, oluşturdukları ampirik argümanın geçerli bir ispat olmadığını fark etmiş ve ispatın yalnızca örneklerle yapılamayacağını kabul etmiştir. Dört öğretmen adayı ise, oluşturdukları örnek tabanlı argümanların geçerli bir ispat olduğunu düşünmüştür. Çalışmada öğretmen adaylarının büyük bir kısmının ampirik argümanlar ile geçerli tümdengelimsel ispatlar arasındaki farkı anladıklarını ortaya koymuştur.

Uygan, Tanışlı ve Köse'nin (2014) öğretmen adaylarının ispatın doğasına dair anlayışlarını, özellikle de ampirik argümanların sınırlılıklarını nasıl kavradıklarını incelediği çalışması da benzer sonuçlar vermiştir. Çalışmaya katılan öğretmen adayları, ampirik argümanların sınırlılıklarının farkında olduklarını belirtmişlerdir. Ancak bu farkındalığa rağmen öğretmen adayları, örnek tabanlı düşünme eğilimlerini sürdürmüş ve ispat süreçlerinde ampirik argümanlara güvenmeye devam etmişlerdir. Moral ve arkadaşlarının (2006) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarıyla yaptığı örnekler yardımıyla ispat yapmanın yeterliliği hakkındaki düşüncelerini incelemek ve bu anlayışın matematik öğretim süreçlerine nasıl yansıdığını ortaya koymayı amaçladığı çalışmada ise, öğretmen adaylarının büyük bir kısmı, yalnızca örnekler kullanarak yapılan ispatların geçerli bir ispat oluşturmayacağını farkında olduklarını belirtmelerine rağmen bu farkındalığa rağmen bazı öğretmen adayları, pratikte örnek tabanlı ispat yöntemlerini kullanma eğiliminde olmuş ve bu yöntemleri öğretim süreçlerinde daha anlaşılır ve kolay bulmuşlardır.

Bu çalışmanın kuramsal çerçevesini Harel ve Sowder'ın (1998, 2007) çalışmalarında yapmış olduğu ispat tanımı ve ispat şemaları temel olarak alınmıştır. Çünkü bu çalışma öğretmen adaylarının bireysel olarak ispat algılarını (ispatın doğasına ilişkin tanımları, ispat yapma becerileri ve ispatı değerlendirme biçimleri) incelemeyi amaçladığından Harel ve Sowder'ın (1998, 2007) ispata ilişkin anlayışının çalışma için uygun olduğuna karar verilmiştir.

3. YÖNTEM

Bu bölümde; araştırma yöntemine, araştırma grubuna, araştırmanın tasarlanmasına ve verilerin toplanması, veri toplama aracı ile veri analizine yer verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Yöntemi

Bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Yin durum çalışmasını gerçek yaşam, bağlam veya bir olgu içerisinde yer alan durumun araştırılması olarak tanımlamaktadır (akt. Creswell, 2020: 98; Yin, 2009). Creswell ve Poth ise belli bir zaman dilimi içinde gerçek veya güncel bir durumun çeşitli veri toplama araçlarıyla derinlemesine incelenmesi, ilgili durumun betimlenmesi ve ortaya çıkan temalarla durumun açıklandığı nitel araştırma yöntemi olarak ifade etmektedir (akt. Şen ve Yıldırım, 2019: 229). Çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel ispata algılarına (ispata yönelik görüşleri, ispat yapma becerileri ve ispatı değerlendirmeleri) ilişkin olarak bakış açılarını derinlemesine incelemek olduğundan durum çalışması yöntemi kullanılmıştır.

Durum çalışması araştırmaları, araştırmanın amacına, sürece ve durum sayısına göre farklı kategorilerde ve farklı yazarlar tarafından sınıflandırılmıştır. Yin (2009) yaptığı sınıflandırmasında dört adet desen oluşturmuştur:

- *Bütüncül tekli durum çalışması deseni*; araştırılan bir durumun sadece bir analiz birimi aracılığıyla bütünüyle incelenmesi
- *İç-içe tekli durum çalışma deseni*; araştırılan bir durumun birden fazla analiz birimleri aracılığıyla incelenmesi
- *Bütüncül çoklu durum çalışma deseni*; araştırmaya konu olan birden fazla durumun sadece bir analiz birimi aracılığıyla bütünüyle incelenmesi
- *İç-içe çoklu durum çalışma deseni*; araştırmaya konu olan birden fazla durumun yine birden fazla ve farklı analiz birimleri aracılığıyla incelenmesi olarak ifade edilmektedir (Şen ve Yıldırım, 2019: 236-237). Bu çalışmada birden fazla durumun (ispat kavramı, ispat yapma becerisi ve ispatın değerlendirilmesi) uygulanmasına yönelik oluşabilecek etkileri belirleyebilmek için birden fazla ve farklı analiz birimleri (bireysel ve kavramsal analiz) aracılığıyla incelenmesi gerektiğinden durum çalışması desenlerinden iç-içe çoklu durum çalışması deseni tercih edilmiştir.

3.2. Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu 2022-2023 eğitim öğretim yılında Yüksek Öğretim Kurumu bünyesinde yer alan bir devlet üniversitesinde öğrenim gören öğretmen adayları olmaktadır. Çalışma grubunu dört farklı sınıf seviyesinden ve her seviyeden altışar öğretmen adayı olmak üzere toplam 24 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemiyle belirlenmiştir. Amaçlı örnekleme, nitel araştırmalarda sıkça tercih edilen ve araştırma amacına en uygun, bilgi yönünden zengin bireyleri bilinçli şekilde seçmeyi esas alan bir yöntemdir (Patton, 2002; Yıldırım ve Şimşek, 2021). Bu çalışmada her sınıf seviyesinden (1., 2., 3. ve 4. sınıf) belirli sayıda öğretmen adayının seçilmesinin nedenlerinden biri, öğretmen adaylarının ispata ilişkin algılarında sınıf seviyesine göre bir farklılık olup olmadığı incelemektir. Diğer bir neden ise, üniversite eğitiminin ilk yılından son yılına kadar öğretmen adaylarının epistemolojik anlayışlarında ve matematiksel bilgiye yaklaşımlarında gelişimsel değişimlerin yaşanabileceği öngörülmektedir (Hofer ve Pintrich, 1997). Bu bağlamda, sınıf seviyeleri arasındaki karşılaştırma, öğretmen adaylarının ispata ilişkin algılarının zamanla doğal bir şekilde mi geliştiğini yoksa sistematik öğretimsel müdahalelerle mi desteklenmesi gerektiğini ortaya koymak açısından önemli görülmüştür. Ayrıca her sınıf seviyesinden katılımcı alınması, araştırma verilerinde çeşitlilik ve zenginlik sağlamış; farklı öğrenim seviyelerindeki öğretmen adaylarının düşünce yapılarının bir arada analiz edilmesine olanak tanımıştır. Öğretmen adaylarının 7'si erkek, 17'si kadındır. Öğretmen adayları gönüllülük esası ile araştırmaya katılmışlardır ve öğretmen adaylarına çalışma hakkında gerekli bilgiler sunulmuştur. Araştırmada kullanılan isimler katılımcıların kendi isimleri olmayıp araştırmacı tarafından kullanılan ÖA_{1.1}, ÖA_{1.2},....., ÖA_{1.6}, ÖA_{2.1}, ÖA_{2.2},....., ÖA_{2.6}, ÖA_{3.1}, ÖA_{3.2},....., ÖA_{4.6} şeklinde oluşturulan kod isimleridir. Bu kodlamada ilk rakam sınıf seviyesini ikinci rakam ise sırasını göstermektedir. Örnek olarak ÖA_{1.1} şeklinde kodlanan bir öğretmen adayının birinci sınıf birinci adayı olduğu, ÖA_{3.5} şeklinde kodlanan birinin ise üçüncü sınıf beşinci adayı olduğu anlaşılmaktadır.

Tablo 3.1. Çalışma grubunu oluşturan öğretmen adaylarına ilişkin bilgiler

Kod Adı	Cinsiyet	Sınıf Seviyesi
ÖA _{1.1}	Erkek	1.Sınıf
ÖA _{1.2}	Erkek	1.Sınıf
ÖA _{1.3}	Kadın	1.Sınıf
ÖA _{1.4}	Kadın	1.Sınıf
ÖA _{1.5}	Kadın	1.Sınıf

Tablo 3.1. (Devamı) Çalışma grubunu oluşturan öğretmen adaylarına ilişkin bilgiler

ÖA _{1.6}	Erkek	1.Sınıf
ÖA _{2.1}	Kadın	2.Sınıf
ÖA _{2.2}	Kadın	2.Sınıf
ÖA _{2.3}	Kadın	2.Sınıf
ÖA _{2.4}	Erkek	2.Sınıf
ÖA _{2.5}	Kadın	2.Sınıf
ÖA _{2.6}	Erkek	2.Sınıf
ÖA _{3.1}	Kadın	3.Sınıf
ÖA _{3.2}	Kadın	3.Sınıf
ÖA _{3.3}	Kadın	3.Sınıf
ÖA _{3.4}	Kadın	3.Sınıf
ÖA _{3.5}	Kadın	3.Sınıf
ÖA _{3.6}	Kadın	3.Sınıf
ÖA _{4.1}	Erkek	4.Sınıf
ÖA _{4.2}	Kadın	4.Sınıf
ÖA _{4.3}	Kadın	4.Sınıf
ÖA _{4.4}	Erkek	4.Sınıf
ÖA _{4.5}	Kadın	4.Sınıf
ÖA _{4.6}	Kadın	4.Sınıf

Tablo 3.1’de çalışma grubunu oluşturan öğretmen adaylarına ait “kod isimler, cinsiyet ve sınıf seviyelerine” ilişkin bilgilere yer verilmiştir.

3.3. Araştırmanın Tasarlanması ve Veri Toplama Aracı

Bu çalışma ile matematik öğretmeni adaylarının ispata ilişkin algılarının belirlenmesi yani onların ispat yapma becerilerinin, ispata dair görüşlerinin ve ispatı değerlendirme biçimlerinin neler olduğunun ortaya konulması amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda araştırma tasarlanmış olup veriler toplanmıştır.

Bu çalışmada veri toplama aracı olarak yarı-yapılandırılmış görüşmeler tercih edilmiştir. Görüşme, bir çalışmanın araştırma konusu ya da bir durum hakkında detaylı bilgi edinmeyi sağlamak amacıyla konu ya da durumu ilişkin hazırlanmış olan sorular çerçevesinde ilgili kişilerden veri toplama olarak tanımlanmaktadır (Büyüköztürk vd. 2014). Stewart ve Cash ise önemli bir amaç doğrultusunda soru sorma ve yanıtlama şeklinde karşılıklı etkileşime dayalı olarak gerçekleştirilen bir iletişim süreci olarak ifade etmektedir (akt. Yıldırım ve Şimşek, 2018). Yarı-yapılandırılmış görüşmeler, belirli bir duruma ilişkin yapılacak görüşmeler için hazırlanmış temel soruların belirli olduğu ancak görüşmenin ilerleyen sürecinde yeni soruların da sorulabildiği görüşme türü olarak tanımlanmaktadır (Şen ve Yıldırım, 2019). Bu araştırmada veriler çalışmanın amacı doğrultusunda gönüllü 24

ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yarı-yapılandırılmış görüşmeler sonucunda elde edilmiştir. Öğretmen adayları ile yapılan yarı-yapılandırılmış görüşmeler için araştırmacı tarafından üç aşamalı bir görüşme formu hazırlanmıştır.

Görüşme formunun ilk aşamasında öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini (EK-1) sorgulayan yedi adet soru bulunmaktadır. Görüşme formunun ilk aşaması için öğretmen adaylarına yöneltilecek soruların son haline gelmesi konusunda uzman görüşleri dikkate alınmıştır. Örnek olarak, birinci soru ilk taslakta soru sadece ‘İspat nedir?’ biçiminde hazırlanmıştır. Fakat uzman görüşü sonucunda bu hâlin öğretmen adaylarından yüzeysel ve sözlük tanımı niteliğinde yanıtlar getireceği ifade edilmiştir. Uzman önerisiyle soruya hem “kişisel anlam” hem de “ilk çağrışım” boyutu eklenmiştir. Böylece öğretmen adaylarının ispata ilişkin zihinsel imgeleri ve kişisel anlam yüklemeleri daha açık şekilde ortaya çıkabileceği öngörülmüştür. Çağrıştırmak kelimesinin bazı öğretmen adayları tarafından zor anlaşılacağı düşünülse de kavramın akademik dilde korunması gerektiği belirtilmiştir. Bu sebeple ikinci bir açıklama cümlesi (“ne anlam ifade etmektedir?”) eklenerek soru çift yönlü hale getirilmiştir. Sonuçta soru, hem tanımsal hem de öznel cevapları ortaya çıkarabilecek şekilde düzenlenmiştir. Benzer şekilde ikinci soruda ise ilk taslakta soruyu yalnızca ‘Okul matematiğinde ispat hakkında ne düşünüyorsunuz?’ biçiminde hazırlanmıştır. Ancak bu hâliyle öğretmen adaylarının yüzeysel yanıtlar vereceği öngörülmüştür. Uzman görüşleri doğrultusunda sorunun kapsamı genişletilerek dört alt boyuta ayrılmıştır: önem, yer, amaç ve rol. Böylece öğretmen adaylarının ispata dair hem değer atfını hem de müfredat içindeki konumunu değerlendirmeleri mümkün kılınmıştır. “Önem” ve “yer” boyutları kolay anlaşılır bulunurken, ‘rol’ kavramının soyut kalabileceği düşünülmüştür. Bu nedenle “derslerde nasıl bir işlev üstlenmeli?” gibi ek açıklamalar yapılmasına karar verilmiştir. Son halinde soru, öğretmen adaylarının ispata ilişkin algılarını okul matematiği bağlamında çok boyutlu biçimde ifade etmelerini sağlayacak şekilde yapılandırılmıştır.

Görüşme formunun ikinci aşamasında öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerini (EK-2) irdeleyen dört adet matematiksel ispat yapmalarına yönelik soru bulunmaktadır. Bu soruların da son haline getirilmesi uzman görüşleri ile yapılandırılmıştır. Örnek olarak, birinci soru ilk taslakta “Tam kare sayıların bölen sayısı nasıldır?” biçiminde iken uzman görüşleri bu sorunun bu şekilde yalnızca sonuç bildirimiyle sınırlı kalacağı ve gerekçelendirmeyi yeterince teşvik etmediğini belirtmiştir. Bu doğrultuda soru, bir öğrenci iddiası üzerinden kurgulanarak “Fatih ... iddia etmektedir” yapısına dönüştürülmüş; “Sizce haklı mıdır?” ifadesiyle yargı ve gerekçe talebi arttırılmıştır. “Doğruluğunu veya yanlışlığını

nasıl gösterirsiniz?” eklemesi, öğretmen adaylarına ispat üretmeye yönlendirecek şekilde açık bırakılmıştır. Dilin anlaşılır olduğu, ancak bazı öğretmen adaylarının yalnızca örnekle yetinme eğiliminde bulunabileceği belirtilmiş; bu nedenle görüşme kılavuzuna, gerektiğinde bölenlerin eşleşmesi ve karelerde kök bölenin tek kalması fikrini hatırlatmaya yönelik sonda açıklamalar not edilmiştir. Böylece soru, hem ispat üretimini hem de gerekçeli red/ kabulü destekleyecek biçimde son hâline getirilmiştir.

Son aşamada ise öğretmen adaylarının matematiksel ispatları nasıl değerlendirdiklerini (EK-3) inceleyen iki adet soru bulunmaktadır. Burada her bir soru için dört farklı argüman öğretmen adaylarına sunulmuş olup bu argümanların öğretmen adayları tarafından değerlendirilmesi istenmiştir. Bu soruların ve argümanların son haline getirilmesi adına uzman görüşlerinden faydalanılmıştır. Örnek olarak, bu görüşme formundaki ilk soru başlangıçta yalnızca $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$ eşitliğini ispatlayınız” biçiminde olan soru, uzman görüşleriyle yeniden tasarlanmış ve öğretmen adaylarının yalnızca ispat üretme becerilerini değil, farklı ispat şemalarına yönelik değerlendirme eğilimlerini de açığa çıkaracak bir yapıya dönüştürülmüştür. Bu amaçla dört farklı argüman hazırlanmış; örnek tabanlı, dönüşümsel, formal ve eksik formal. Bu argüman tipleri, Harel ve Sowder’ın (1998, 2007) ispat şemaları temel alınarak seçilmiş ve her biri ispat anlayışındaki farklı bir boyutu temsil etmiştir. Öğretmen adaylarından bu argümanları yakınlık, ikna edicilik ve matematiksel güç açısından değerlendirmeleri istenerek, şemalar arası algılarının ve tercihlerinin derinlemesine incelenmesi sağlanmıştır.

3.4. Verilerin Toplanması

Verilerin toplanması sürecinde ise 2022-2023 eğitim öğretim yılı güz dönemi Yüksek Öğretim Kurumu bünyesinde olan bir devlet üniversitesinde öğrenim gören 24 ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yarı-yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmeler Zoom programı üzerinden yapılmıştır. Her bir görüşme öğretmenlerle ayrı ayrı olarak onların uygun olduğu bir zaman diliminde yapılmıştır. Görüşmelerin uzunluğu 40 ile 70 dakika arasında değişmektedir. Öğretmenlere görüşme formunda yer alan sorular daha önceden sunulmamış olup, görüşme sürecinde sorulara verilen anlık cevaplar alınmıştır. Tüm görüşmeler katılımcıların onayı ile Zoom programı üzerinden ses/video kaydı altına alınmıştır. Kayıtlar görüşme sonrasında analiz edilmek üzere yazıya dökülmüştür.

3.5. Araştırmacının Rolü

Araştırma öğretmen adaylarıyla Zoom programı üzerinden yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı görüşme öncesinde her bir öğretmen adayına kayıtların gizli kalacağını ve sadece araştırmacı tarafından değerlendirileceğini belirtmiştir. Böylece öğretmen adaylarının araştırmaya ve araştırmacıya güvenilmesi hedeflenmiştir. Görüşme sürecinde araştırmacı öğretmen adaylarının görüşme formunda yer alan sorulara verdikleri cevaplara karşın bir düzeltme vermemiş ve herhangi bir müdahalede bulunmamıştır. Araştırmacı ortaokul öğretmen adaylarının ispat algılarını (ispata ilişkin görüşler, ispat yapma becerileri ve ispatı değerlendirme biçimleri) incelemek üzere veri toplarken amacına odaklanmış, elde ettiği verileri gerçekliğinden saptırmadan okuyucuya sunmuştur.

3.6. Veri Analizi

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik algılarını ortaya çıkarmak üzere yarı-yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşmelerin analizi için farklı metotlar bir arada kullanılmıştır. Görüşmelere ait transkriptler hem içerik analizi hem de Gömülü Teori'nin veri analiz yönteminin bir parçası olan açık kodlama süreci kullanılmıştır (Charmaz, 2014; Strauss ve Corbin, 1998). Araştırmalara ait verileri açıklayabilecek, durumu tanımlayabilecek kavramlara ve kelimelere ulaşmaya imkan tanıyan içerik analizi, verilerin altında yatan saklı gerçekleri ulaşmayı sağlayan kavramları ortaya çıkarmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). İçerik analizinde birbiri ile aynı anlama gelen veriler tema altında toplanır ve çalışma sonucunda elde edilen resim okuyucuya sunulmuş olur. Açık kodlama Charmaz (2006) tarafından ilk kodlama olarak da isimlendirilmektedir. Açık kodlama sürecinde, verilerin karşılaştırılır ve verileri tanımlayan temel kavramsal kategoriler belirlenir (Charmaz, 2006: 47). Bu analiz sürecinde araştırmaya ait verilerin yer aldığı kategoriler ve başlangıç kodları oluşturulur, anahtar kelimeler belirlenir. Bu doğrultuda nitel bir araştırma olan çalışmada yapılan yarı-yapılandırılmış görüşmeler sırasında analiz sürecine açık kodlama ile başlanmış olup görüşmeler sonunda görüşmelere ait transkriptlerin analizi için içerik analizi kullanılmıştır. Görüşmelerin tamamlanması ile görüşmelere ait ses/video kayıtları öncelikle bilgisayar ortamında yazıya aktarılmış ve elde edilen görüşme kayıtları içerik analizi ile analiz edilmiştir. Görüşme kayıtlarının genel incelenmesi sonucunda ifadeleri temsil eden anahtar kelimeler oluşturulmuş olup anahtar kelimelerden aynı anlamı ifade edenler bir araya getirerek kodlar

oluşturulmuştur. Ardından kodlar ilgi düzeylerine göre kategoriler altında birleştirilmiş daha sonra temalar altında toplanmış ve analizi sũreci tamamlanmıştır.

Görüşmelerin analizi neticesinde elde edilen kategoriler, kategorilere ait kodlar ve öğretmen adaylarının görüşlerine bulgular kısmında yer verilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatın önemine ilişkin görüşlerine ait örnek kodlama tablosu ise Tablo 3.2’de sunulmuştur.



Tablo 3.2. Verilerin analizi için kullanılan örnek kodlama şeması

Kategori	Anahtar Sözcükler	Kod	Örnek Öğretmen Adayı Görüşü
Anlamlı ve Kalıcı Öğrenme	➤ Ezber yapmak öğrenmek değil ➤ Ezber yerine ispatının yapılarak mantığını kavrama ➤ Ezber olunca unutulması	Ezberden Kaçış / Uzaklaşma	“Ezberlemek öğrenmek olmuyor aslında o yüzden ispat gerekli ki yani ispatını bilelim ki o zaman öğrenmiş olalım, ezberleyince yani öğrenmiyoruz.” (ÖA_{1.1}) “Öğrenciler ezber yerine o asıl ispatladığı zaman asıl mantığını kavlıyor. Formülün nereden geldiğini, nasıl olduğunu onu tam olarak kavlıyor. Yani ezberlemek yerine ispatı yapılması daha muhtemelen düşünüyorsun bir de direkt olarak kabullenmiyorsun.” (ÖA_{1.2}) “Ezber bir noktaya kadar var. Sınavlarda o heyecanla kaygıyla, korkuyla o ezberlerin bir kısmı gidiyor ama ispatını bildiğiniz olayların hemen 10 dakika ufak bir şeyle size çağrıştırabilir aslında olan bilgilerinizi.” (ÖA_{2.2})
	➤ Direkt kabullenmeme ➤ Açıklamalar sunabilme	Öğrenmeyi Derinleştirme	“Yani ezberlemek yerine ispatı yapılması daha muhtemelen düşünüyorsun bir de direkt olarak kabullenmiyorsun.” (ÖA_{1.2}) “Neyin nereden geldiğini daha iyi açıklayabiliriz. Ezbere dayalı olmadan bence daha iyi olur mantığını kavrarız.” (ÖA_{1.3})
	➤ Bilginin zihinde kalması ➤ Kalıcı öğrenmenin sağlanması	Kalıcılık	“Benim açımdan denklem ezberlemek yerine neyi nereden geldiğini öğrenirsem daha kafamda kalıcı oluyor.” (ÖA_{1.3}) “Her zaman bize hocalar, formülleri direkt verip geçti ama geldiği yeri bilsek daha akılda kalıcı olurdu.” (ÖA_{2.1}) “Formülü direkt verdiğinde ezberlemem pek kolay değil ama ispatıyla birlikte verildiğinde ve kafamıza daha çok detay girdiğinde formül aklımıza daha kolay kalıyor.” (ÖA_{2.4}) “Sürekli bir işlemler yapıyorduk da niye yaptığımızı bilmiyorduk açıkçası. O yüzden hani eee nasıl desem matematiği biraz daha ezbere dayalı gördük. Şu anda da öyle anlatılmaya devam ediyor diye düşünüyorum. Yani ispatlarla verilmiş olsaydı neyi niye yaptığımızı bilerek yapsaydık bizim için daha kalıcı öğrenmeyi sağlar diyebilirim.” (ÖA_{2.6})
	➤ Bilginin rahat anlaşılması ➤ Kolay öğrenme ➤ Daha iyi anlamlandırma	Öğrenmeyi Kolaylaştırma	“Öğrencilerin anlaması için. Eğer o formülü daha rahat oturtması için hani soru çözerken onu görebilmesi için o formüllerde kullanacağını onu ispatını yaparsa daha kolay öğrenir.” (ÖA_{1.5}) “Öğrencilerin daha iyi anlamaları için. Çünkü hocam bu ispatın gerçekten doğru olduğunu nereden bilebilirim diyorlar. Bu formülü biz bir ispatta bir genelleme yaptığımız için öğrencilerin kafasına takılıyor. Bu her yerde geçerli midir diye.” (ÖA_{4.3})
	➤ Gerçek öğrenme olması	Öğrenmenin Gerçekleşmesi	“Bir formül olsun bir işte herhangi bir şey olsun. Bunu direkt öğrenciye verince daha çok ezber tarzı oluyor ama bunu nasıl nereden geldiğini verirken matematiği hissetme dediğimiz şey daha güzel olur. Yani daha güzel. Nasıl desem öğrenme gerçekten gerçekleşir.” (ÖA_{4.6})

Tablo 3.2’de verilerin analizi için kullanılan örnek kodlama şemasına yer verilmiştir. Tabloda kategoriler, anahtar sözcükler, kodlar ve örnek öğretmen adaylarına ait görüşler bulunmaktadır. Veri analizinin güvenilirliğini sağlamak amacıyla ilk önce görüşmelere ait kayıtların (transkriptlerin) yarısı (oniki adet) araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Oniki adet transkriptin kodlanmasından sonra yüksek lisans ve doktora eğitimini yurtdışında tamamlamış, Türkiye’de bir devlet üniversitesinde çalışan, matematiksel ispatlar üzerine hem ulusal hem de uluslararası çalışmaları olan bir danışman tarafından daha kodlanması istenmiştir. Kodlama sürecinden sonra danışman ve araştırmacı bir araya gelip verilere ait kodlamaları değerlendirmiştir. Her iki kodlamaya ait uyumu saptamak için kodlayıcı güvenilirlik formülü kullanılmıştır. Miles ve Huberman (1994) tarafından geliştirilen kodlayıcı güvenilirlik formülü

$$\frac{\text{Uyumlu Kodlar}}{\text{Uyumlu Kodlar} + \text{Uyumsuz Kodlar}} \times 100$$

kullanılarak kod güvenilirliği hesaplanmıştır. Bu formüle göre kodlamalar arasındaki uyum görüşmeler için %95 olarak hesaplanmıştır. Miles ve Huberman (1994) kodlayıcı güvenilirliğinin en az %80 olması gerektiğini belirttiğinden sonuçların araştırmanın güvenilirliği için yeterli olduğu tespit edilmiştir. Uzman ve araştırmacı kodlamaların değerlendirme süreci esnasında farklı ad ile isimlendirilmiş fakat aynı anlama gelen kodlar için ortak bir ad ile kod oluşturma işlemini gerçekleştirmişlerdir. Uyumsuz kodlar ise değerlendirilmeye tabi tutulmuş olup iki seçenek olarak ya aynı anlamı taşıyan kodlar ile birleştirilmiş ya da yeni bir kod olarak son şeklini almıştır. Bu sürecin ardından verilere ait transkriptlerin tamamı araştırmacı tarafından tekrar kodlanmış ve bu süreç tez danışmanın kontrolü ile devam etmiştir.

4. BULGULAR

Çalışmanın bu bölümü üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşlerinin neler olduğuna dair bulgulara yer verilmiştir. İkinci kısımda öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerini ölçmek için sorulan sorulardan elde edilen bulgular sunulmuştur. Son kısımda ise öğretmen adaylarının ispatı değerlendirme biçimlerinin neler olduğuna ilişkin sunulan argümanlara dair görüşlerinden elde edilen bulgular yer almaktadır.

4.1. Öğretmen Adaylarının İspata İlişkin Görüşlerine Dair Bulgular

Bu kısımda öğretmen adaylarına ispat kavramının doğasına ilişkin görüşlerini ölçmek için yöneltilen yedi adet soruya verilen cevaplardan oluşturulan kodların yer aldığı tabloları ve örnek öğretmen adayı açıklamaları yer almaktadır.

4.1.1. Öğretmen adaylarının matematiksel ispat kavramına dair görüşleri

Öğretmen adaylarının matematiksel ispat kavramına ilişkin görüşlerini almak için öğretmen adaylarına “İspat kavramı size ilk olarak ne çağrıştırmaktadır? İspat sizin için ne anlam ifade etmektedir? Açıklayınız.” soruları yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat kavramına ilişkin görüşleri Tablo 4.1’de sunulmuştur.

Tablo 4.1. Öğretmen adaylarının ispat kavramına ilişkin görüşleri

Tema	Kategori	Kod (Frekans)	Öğretmen Adayları
İspatın Güvence ve Gerekçeleştirme İşlevi	Matematiksel Geçerlilik ve Güvence	Doğrulama (2)	ÖA _{1.1} , ÖA _{4.2}
		Kesinlik (5)	ÖA _{2.3} , ÖA _{2.4} , ÖA _{3.2} , ÖA _{3.4} , ÖA _{4.4}
		Kanıtlama (8)	ÖA _{1.5} , ÖA _{1.6} , ÖA _{2.3} , ÖA _{3.2} , ÖA _{3.5} , ÖA _{4.3} , ÖA _{4.4} , ÖA _{4.5}
		İnandırıcılık (3)	ÖA _{2.3} , ÖA _{3.2} , ÖA _{3.5}
		Kaynağını Bulma (4)	ÖA _{2.1} , ÖA _{2.2} , ÖA _{2.6} , ÖA _{3.1}
		Genelleme ve Sınırları Anlama	Genelleme (1) ÖA _{3.2}
		Aksine Örnek (1)	ÖA _{4.1}
		Mantığını Kavrama/Anlama (11)	ÖA _{1.1} , ÖA _{1.2} , ÖA _{1.3} , ÖA _{1.4} , ÖA _{1.5} , ÖA _{2.2} , ÖA _{3.1} , ÖA _{3.3} , ÖA _{3.5} , ÖA _{4.1} , ÖA _{4.6}
İspatın Öğrenme Sürecindeki İşlevi	Anlamlandırma ve Kavramsallaştırma	Açıklama (4)	ÖA _{1.3} , ÖA _{1.5} , ÖA _{2.5} , ÖA _{3.1}
		Kavramsal Öğrenme (1)	ÖA _{3.3}

Tablo 4.1. (Devamı) Öğretmen adaylarının ispat kavramına ilişkin görüşleri

Tema	Kategori	Kod (Frekans)	Öğretmen Adayları
İspatın Öğrenme Sürecindeki İşlevi	Anlamlandırma ve Kavramsallaştırma	Parçalara Ayırma (1)	ÖA _{3,1}
	Matematiğin Yapısal Doğası	Matematiğin Temeli (2)	ÖA _{2,6} , ÖA _{4,4}
		Matematiksel Yapı (1)	ÖA _{4,6}
		Sembol (1)	ÖA _{3,4}
		Kalıcılık (3)	ÖA _{2,3} , ÖA _{3,2} , ÖA _{3,5}
	Bilişsel Gelişim	Analitik	ÖA _{1,4}
		Düşünme (1)	
İspatın Bireysel Etkisi	Motivasyonel Rol ve Öğrenci Tercihi	Motivasyon Kaynağı (1)	ÖA _{4,4}
		En Doğru Yol (1)	ÖA _{3,6}

Tablo 4.1’de öğretmen adaylarının matematiksel ispat kavramına ilişkin görüşleri yer almaktadır. Öğretmen adayları ispatı “mantığını kavrama / anlama, kanıtlama, kesinlik, açıklama, kaynağını bulma” gibi kavramlarla nitelendirmişlerdir. Tablo 4.1’den de görüleceği üzere öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı (~%46) matematiksel ispatı “mantığını kavrama / anlama” olarak tanımlamışlardır. Her sınıf seviyesinden en az bir öğretmen adayının ispat kavramını bu şekilde nitelendirmiştir. Örneğin; birinci sınıf adaylarından “**ÖA_{1,1}**: “*Hem **nasıl yapıldığını öğrenmek** hem de doğruluğunu öğrenmek gibi iki temel yararı var daha çok doğrulamak anlamında.*” ve “**ÖA_{1,2}**: “*Yani elindeki **verinin nereden geldiğini, nasıl toplandığını, hangi mantıkla yürütüldüğünü gösterme biçimidir bence ispat.***” tarafından bu şekilde ifade edilmiş olup “nasıl yapıldığını öğrenmek, verinin nereden geldiği, nasıl toplandığı, hangi mantıkla yürütüldüğü” gibi açıklamalar matematiksel bilgilerin/kavramların anlamlandırılmasını ve mantığının kavranması olarak görüldüğü anlaşılmaktadır. Benzer şekilde “**ÖA_{2,2}**: “*Mantık aslında ezberden çok o olayın **mantığını anlamak.** Bunu **niçin yapıyoruz** ya da bunu **nereden geliyor, nasıl ispatlarız** o şekilde düşünüyorum.*” şeklinde ifade etmiş ve “mantığını anlamak, niçin yapıyoruz, nereden geliyor” gibi ifadeler ispat kavramının bu anlamda görüldüğünü göstermektedir. Diğer taraftan üçüncü sınıf öğretmen adaylarından “**ÖA_{3,3}**: “*İspat deyince hocam **matematiğin ne anlama geldiğini, hani kavramların nereden geldiğini.** Yani mesela örnek verecek olursak, işte üçgenin iç açılar toplamı neden 180 derece. Bunun neden 180 derece olduğunu size gösteriyor. **Kavramsal öğrenmeyi.** Matematiksel ifadelerin **nereden geldiğini, ne anlama geldiğini bir de gösteren belli yönergelere ispat diyebiliriz.***” şeklinde

ifade ederek “matematiğin ne anlama geldiği, nereden geldiği, kavramsal öğrenmeyi” gibi açıklaması ile ispatı kavramına ilişkin görüşünü ortaya koymuştur. Dördüncü sınıf öğretmen adayı **ÖA_{4.1}** ise “İspat kavramı deyince benim aklıma ilk şu geliyor, herhangi bir verilen önerme ya da verilen **bilginin neden geldiği, nereden geldiği o sonuca nasıl ulaştığının temel kaynağıdır**. Aslında ispat yani aslında yani onun yanlışlığını var mı? Yani onu yanlış yanlışla götürecek o **teoremin yanlış olduğunu ispatlayacak herhangi bir durum var mı yok mu?** Bunu incelememizdir ispat. Ben öyle tanımlıyorum kendime açımdan.” açıklamasında bulunmuştur. Burada öğretmen adayının “bilginin nereden geldiği, sonuca asıl ulaştığı” gibi ifadeleri ispat kavramına dair görüşünü ifade etmektedir. Diğer taraftan öğretmen adaylarından sekizinin (~%33) ispat kavramını “kanıtlama” olarak gördükleri tespit edilmiştir. Örnek olarak; “**ÖA_{1.5}**: “Yani bir şeyin **kanıtlanması**, açılarak anlatılması, direkt formülü vermek yerine daha anlatarak anlat yani açıklayarak anlatmak.” ve “**ÖA_{1.6}**: “Bir şeyin **kanıtlanabilir olduğunu bana çağrıştırıyor**” tarafından bu şekilde ifade edilmiş olup “bir şeyin kanıtlanması, bir şeyin kanıtlanabilir olması” gibi ifadelerle ispat kavramını kanıtlama ile ilişkilendirmişlerdir. Benzer biçimde “**ÖA_{2.3}**: “Bir kavram olarak **kanıt**. Söz konusu kuralım tüm durumlar için geçerliliğinin göstergesi. İnanırcılık. Tam anlamıyla kalıcılık aynı zamanda.” direkt olarak “kanıt” kelimesi ile ilişkilendirmiştir. Öte yandan üçüncü sınıf öğretmen adayı “**ÖA_{3.2}**: “Yani yapılan bir teorem veya kullanılan bir formülün değişken vererek her değişken içinde sağlandığını ispat etmek, aslında tekrar kelimeyle içinde kullanmış oldum ama. Göstermek, mesela, tümevarım bir şey yani küçükten gelip bunun bütün genelde olabilecek her şeyde olduğunu göstermek tümevarım yöntemiyle genelde aklıma ispat geliyor. Tamam bazen tümdengelim yöntemleri de var ama o konuya çok aşına değilim sanırım. Genellemek. Yani matematikteki herhangi bir şey ispat derken aslında **bir şeyi böyle kanıtlamak**.” şeklinde ifade ederek ispat kavramını “bir şeyin kanıtlanması” olarak düşündüğünü ortaya koymuştur. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{4.3}**: “İspat bir **ifadenin doğruluğunu kanıtlamak** aslında bence.” ve **ÖA_{4.5}**: “**Kanıtlama, kanıt çağrıştırıyor. Yani kanıt kelimesi. İspat gerçekliği kanıtlanabilir bir düşünce ya da argüman olabilir**.” şeklinde açıklamalar yaparak “ifadenin doğruluğunu kanıtlamak, kanıtlanabilir bir düşünce ya da argüman” gibi ifadelerle ispat kavramını doğrudan kanıtlama ile bağdaştırmışlardır. Buradan hareketle her sınıf seviyesinden en az bir öğretmen adayının ispat kavramını kanıtlama ile ilişkilendirdiği tespit edilmiştir. Ayrıca beş (~%21) öğretmen adayının ise ispat kavramını “kesinlik” olarak nitelendirdikleri tespit edilmiştir. birinci sınıf dışındaki diğer sınıf seviyesindeki öğretmen adaylarının ispat

kavramını bu şekilde nitelendirdikleri görülmüştür. Örneğin; **ÖA_{2.3}**: “Bir kavram olarak kanıt. Söz konusu kuralın **tüm durumlar için geçerliliğinin göstergesi. İnandırıcılık. Tam anlamıyla kalıcılık aynı zamanda.**” ve **ÖA_{2.4}**: “İspat **belirli bir formülün işe yaradığını %100 olarak gösteren bir kavram olarak geliyor.**” şeklinde açıklayarak “tüm durumlar için geçerliliği, bir formülün %100 işe yaraması” gibi ifadelerle ispat kavramını kesinlik ile ilişkilendirmişlerdir. Benzer şekilde üçüncü sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{3.2}**: “Yani yapılan bir teorem veya kullanılan bir formülün **değişken vererek her değişken içinde sağlandığını ispat etmek, aslında tekrar kelimeyle içinde kullanmış oldum ama.**” ve **ÖA_{3.4}**: “İspat deyince verilen bir ifadenin **hangi koşulu sağladığı yani her koşulda sağlaması için bir formül geliyor. Yani o ifadeyi her önermede doğru kabul ettiren formül, sembol geliyor aklıma. Şöyle diyebilirim, aslında bir ifade için yapılan önermelerin hepsine doğru yapan formül ya da işlem ya da düşünce temsili olabilir.**” şeklinde açıklamışlar ve “her değişken için sağlaması, her koşulda sağlama, her önermede doğru olması” gibi ifadeler kullanarak ispat kavramının kesinliğin göstergesi olarak tanımlamışlardır. Dördüncü sınıf adaylarından **ÖA_{4.4}** ise “İspat kavramı direkt kanıt çağrıştırmakta hocam, eğer birebir kelime anlamına bakacak olursak, kanıt çağrıştırmakta, bir şeylerin meçhul olan bazı şeylerin veya belli olan **bir şeylerin kesinliğini gösterme anlamını taşıyor benim için.**” açıklaması ile “bir şeylerin kesinliğini gösterme” şeklinde ifade ederek ispat kavramını matematiksel bilgilerin/ kavramların/önermelerin kesinliğinin gösterilmesi olarak algıladığını ortaya koymaktadır.

Öğretmen adaylarının ispata ilişkin görüşleri incelendiğinde sınıf seviyeleri arasında belirgin bir farklılık olmadığı görülmüştür. En çok dile getirilen görüşlerden biri olan “mantığını kavrama/anlama”, birinci sınıftan beş, ikinci sınıftan bir, üçüncü sınıftan üç ve dördüncü sınıftan iki aday tarafından ifade edilmiştir. Benzer biçimde “kanıtlama” görüşü de her sınıf seviyesinde karşılık bulmuş; birinci sınıftan iki, ikinci sınıftan bir, üçüncü sınıftan iki ve dördüncü sınıftan üç aday bu ifadeyi kullanmıştır. Bu bulgu, her iki görüşün de tüm sınıf düzeylerinde ortak olarak paylaşıldığını göstermektedir. Öne çıkan bir diğer görüş olan “kesinlik” kavramı ise ikinci ve üçüncü sınıftan ikişer, dördüncü sınıftan bir aday tarafından dile getirilmiş, böylece üç farklı sınıf seviyesinde temsil edilmiştir. Bu bulgular, öğretmen adaylarının ispata ilişkin temel kavrayışlarının sınıf düzeylerinden bağımsız şekilde benzer temalarda yoğunlaştığını ortaya koymaktadır.

4.1.2. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın önemine dair görüşleri

Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın önemine ilişkin görüşlerini almak için öğretmen adaylarına “İspatın okul matematiğinde önemi hakkında neler söyleyebilirsiniz?” sorusu yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatın önemine ilişkin görüşleri Tablo 4.2’de sunulmuştur.

Tablo 4.2. Öğretmen adaylarının ispatın önemine ilişkin görüşleri

Tema	Kategori	Kod	Öğretmen Adayları
İspatın Bilişsel Süreçlere Katkısı	Anlamlı ve Kalıcı Öğrenme	Ezberden Kaçış / Uzaklaşma (7)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₂₂ , ÖA ₂₄ ,ÖA ₂₆ ,ÖA ₄₆
		Öğrenmeyi Derinleştirme (4)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₂₆
		Kalıcılık (7)	ÖA ₁₃ ,ÖA ₂₁ ,ÖA ₂₂ ,ÖA ₂₃ , ÖA ₂₄ ,ÖA ₂₆ , ÖA ₃₂
		Öğrenmeyi Kolaylaştırma (3)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₄₃
		Öğrenmenin Gerçekleşmesi (1)	ÖA ₄₆
	Kavramsal ve Derin Anlama	Matematiksel Düşünmeyi Geliştirme (5)	ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₃₃ ,ÖA ₃₄ , ÖA ₄₅
		Mantığını Anlama (9)	ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₆ ,ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₃ , ÖA ₃₄ ,ÖA ₃₅ ,ÖA ₃₆ ,ÖA ₄₂ , ÖA ₄₆
		Temelden Anlamlandırma (1)	ÖA ₃₁
		Anlama Kapasitesinin Arttırılması (1)	ÖA ₃₆
		Farklı Bakış Açısı (1)	ÖA ₄₅
		Matematiği Hissetme (1)	ÖA ₄₆
		Bağlantı Kurma (1)	ÖA ₃₆
		Genelleme Yapmak (1)	ÖA ₄₃
		Her Durumda Geçerlilik (1)	ÖA ₄₃
		Formülün Kaynağı (2)	ÖA ₂₁ , ÖA ₂₅
İspatın Duyuşsal Gelişime Öğrenci Tutumuna Etkisi	ve Duyuşsal Kazanımlar ve Öğrenci Tutumu	Matematik Yapma Fırsatı (1)	ÖA ₃₃
		Motivasyonu Arttırma (1)	ÖA ₄₄
		Matematik Sevgisini Arttırma (1)	ÖA ₄₄

Tablo 4.2’de öğretmen adaylarının matematiksel ispatın önemine ilişkin görüşleri yer almaktadır. Öğretmen adayları ispatı “mantığını anlama, ezberden kaçış/uzaklaşma, kalıcılık, matematiksel düşünmeyi geliştirme, öğrenmeyi derinleştirme” gibi nedenlerden dolayı önemli bulduklarını belirtmişlerdir. Tablo 4.2’den de görüleceği üzere öğretmen adaylarından dokuzu (~%38) matematiksel ispatların matematiksel ifadelerin/kavramların/bilgilerin “mantığını anlamaya” fırsat sunduğu için önemli olduğunu beyan etmişlerdir. Örnek olarak; **ÖA_{1.2}**: *“Önemlidir ispatlar çünkü öğrenciler ezber yerine o asıl ispatladığı zaman asıl mantığını kavlıyor. Formülün nereden geldiğini, nasıl olduğunu onu tam olarak kavlıyor. Yani ezberlemek yerine ispatı yapılması daha muhtemelen düşünüyorsun bir de direkt olarak kabullenmiyorsun.”* ve **ÖA_{1.6}**: *“Önemlidir. Bilgileri öğrenirken daha derine dalmak biraz daha etkili olabiliyor.”* şeklinde açıklamalar yaparak ispat ile “formülün nereden geldiği, nasıl olduğu, bilgi öğrenirken daha derine dalmak” gibi ifadelerle matematiksel bilgilerin mantığını anlamayı sağladığı için önemli demişlerdir. Benzer şekilde üçüncü sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{3.3}**: *“Önemlidir bence. Yani dediğim gibi öğrencilerin neyi nerden geldiğini bilmek bence çok güzel bir matematik yapma fırsatı ta sunar yani öğrencilere. Çünkü günümüzde şu an çok ezbere veriliyor diye düşünüyorum. Hani öğrencilerin düşünme becerilerini sınırlandırdığını düşünüyorum bu ezbere verilen eğitimin. O yüzden hani öğrencilere matematik yapma fırsatı sunmuyor ezbere eğitim.”* ve **ÖA_{3.4}**: *“Tabiki önemlidir. Sonuçta biz öğrencilere bir şeyleri öğretince ya da biz de aynı şekilde öğrenince onun ne nerden geldiğini, nasıl olduğunu biz de aynı şekilde öğrettiğimizde daha bir farklı öğretiriz. Aynı şekilde öğrendiğimizde de onun nereden geldiğini, nasıl olduğunu bildiğimiz için matematiksel düşüncemize katkısı olur.”* açıklamaları ile ispatın önemini bilgilerin “nereden geldiği, nasıl olduğu” bağlamında katkı sunarak mantığının anlamlandırılmasına fırsatlar sunduğu için önemli olduğunu belirtmişlerdir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{4.2}** ve **ÖA_{4.6}** ise sırasıyla *“Önemlidir. Nereden geldiğini öğrenmemiz için ispatını da yapmak gerekiyor.”*, *“Evet önemli. Çünkü bir formül olsun bir işte herhangi bir şey olsun. Bunu direkt öğrenciye verince daha çok ezber tarzı oluyor ama bunu nasıl nereden geldiğini verirse matematikçi hissetme dediğimiz şey daha güzel olur. Yani daha güzel. Nasıl desem öğrenme gerçekten gerçekleşir.”* açıklamalarında bulunmuş olup “nereden geldiğini öğrenmek, nasıl olduğunu” gibi ifadelerle ispatın önemini mantığını anlama ile ilişkilendirdikleri düşünülmektedir. İspatın önemine ilişkin bu görüşü yedişer (~%29) cevap ile “ezberden kaçış / uzaklaşma” ve “kalıcılık” görüşleri izlemiştir. Ezberden kaçış/uzaklaşma olarak beyan edenlere örnek

olarak; ÖA₁₁: “**Önemlidir ezberlemek öğrenmek olmuyor** aslında o yüzden ispat gerekli ki yani **ispatını bilelim ki o zaman öğrenmiş olalım, ezberleyince yani öğrenmiyoruz.**” ve ÖA_{1.3}: “**Önemlidir** neyin nereden geldiğini daha iyi açıklayabiliriz. **Ezbere dayalı olmadan bence daha iyi olur mantığını kavrarız.**” “Benim açımdan denklem **ezberlemek yerine neyi nereden geldiğini öğrenirsem daha kafamda kalıcı oluyor.**” açıklamaları ile ispatın ezberden uzaklaştırma yönünden dolayı önemine dikkat çekmişlerdir. Benzer biçimde ikinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{2.2}: “**Kesinlikle çok önemli** çünkü **ezber bir noktaya** kadar var. Sınavlarda o heyecanla kaygıyla, korkuyla o ezberlerin bir kısmı gidiyor ama ispatını bildiğiniz olayların hemen 10 dakika ufak bir şeyle size çağrıştırabilir aslında olan bilgilerinizi bu yönden bence önemli.” ve ÖA_{2.6}: “**Bence önemli.** Hani hepimiz ilkokul, ortaokul, lise matematikten hani öğrenerek geldik. Buralara hep biraz geri plana atıldı. Bence bu hani sürekli bir işlemler yapıyorduk da **niye yaptığımızı bilmiyorduk** açıkçası. O yüzden hani eee nasıl desem **matematiği biraz daha ezbere dayalı gördük.** Şu anda da öyle anlatılmaya devam ediyor diye düşünüyorum. Yani ispatlarla verilmiş olsaydı neyi niye yaptığımızı bilerek yapsaydık bu hem ülke genelinin matematik ortalamasını belki bence bir nebze artırdı. Hem hani bir şeyini yaptığımızı biliyorsak daha iyi olur. Bizim için daha kalıcı öğrenmeyi sağlar diyebilirim. Yani gerekli bence.” şeklinde açıklamalar yaparak ispatın direkt olarak ezber yerine neyi, niçin yapmayı sağladığı, ezbere dayalı olmaktan çıkardığı için önemli olduğunu beyan etmişlerdir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{4.6} ise “Evet **önemli.** Çünkü bir formül olsun bir işte herhangi bir şey olsun. Bunu **direkt öğrenciye verince daha çok ezber tarzı oluyor** ama bunu **nasıl nereden geldiğini verirse matematiği hissetme** dediğimiz şey daha güzel olur. Yani daha güzel. Nasıl desem öğrenme gerçekten gerçekleşir.” benzer şekilde ispatın ezberden uzaklaştırma işlevine vurgu yaparak önemli olduğunu belirtmiştir. Diğer taraftan ispatın kalıcılığı sağladığını düşünenlere örnek olarak; “ÖA_{1.3}: **Önemlidir** neyin nereden geldiğini daha iyi açıklayabiliriz. **Ezbere dayalı olmadan bence daha iyi olur mantığını kavrarız.** Benim açımdan denklem **ezberlemek yerine neyi nereden geldiğini öğrenirsem daha kafamda kalıcı oluyor.**” açıklaması ile daha kalıcı olmasından dolayı önemli olduğunu ifade etmiştir. Benzer şekilde ikinci sınıf öğretmen adaylarından “ÖA_{2.1}: **Önemlidir.** Çünkü her zaman bize hocalar, formülleri direkt verip geçti ama **geldiği yeri bilsek daha akılda kalıcı olurdu.**”, “ÖA_{2.4}: İspat okumak için de önemli, şöyle önemli. Kendimden örnek veriyim, formülü direkt verdiğinde ezberlemem pek kolay değil ama ispatıyla birlikte verildiğinde ve **kafamıza daha çok detay girdiğinde formül aklımızda daha kolay kalıyor.** O yüzden bence ispat **önemli.**” ve “ÖA_{2.6}: **Bence önemli.**”

Hani hepimiz ilkokul, ortaokul, lise matematikten hani öğrenerek geldik. Buralara hep biraz geri plana atıldı. Bence bu hani sürekli bir işlemler yapıyorduk da niye yaptığımızı bilmiyorduk açıkçası. O yüzden hani eee nasıl desem matematiği biraz daha ezbere dayalı gördük. Şu anda da öyle anlatılmaya devam ediyor diye düşünüyorum. Yani ispatlarla verilmiş olsaydı neyi niye yaptığımızı bilerek yapsaydık bu hem ülke genelinin matematik ortalamasını belki bence bir nebze artırdı. Hem hani bir şeyini yaptığımızı biliyorsak. Daha iyi olur. **Bizim için daha kalıcı öğrenmeyi sağlar diyebilirim.** Yani gerekli bence.” açıklamaları ile “akılda kalıcı olması, aklımızda daha kolay kalması, kalıcı öğrenmeyi sağlaması” gibi ifadelerle ispatın bu nedenlerden dolayı önemli olduğunu beyan etmişlerdir. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{3.2} ise “Kendi açımdan da okul matematiğinde **çok önemli** olduğunu düşünüyorum. Çünkü kendim matematiği öğrenirken şunu görmüştüm, lise yıllarımda falan, özellikle 11. Sınıf işte trigonometrik kısımlara falan geldiğimizde TYT matematik hani o bildiğimiz problemsel matematikten çıktığımızda formül gerektiren işlere girdiğimde eğer o formül ispatına hoca bana bir defa yapmamışsa o ispat bir türlü aklımda kalmıyordu ve o formülü de aklımda tutup soru çözmiyordum ama işte formül şuradan geliyor veya bir olasılıkla aslında şuradan geliyor gibi bana onun ispatı yapıldığında. O formül istemesemde aklımda kalıyordu ve ben o formülü sonradan kullanabiliyordum. Yani nereden geldiğini bilmediğin formülleri kullanamıyorum. O yüzden kendi matematik öğrenirken de ispatsız öğrenemiyorum. Bu anlamda bence öğrencilerde de çok önemli olduğunu düşünüyorum. Yani sekizle yediyi çarp formül böyle yani niye çarpıyoruz mesela? Hani ya da işte olasılıkta bütün olasılıklar çarpılarak gider ya niye çarpılıyor işte orada niye toplanmıyor vesaire yani bence **matematikte neden sonra sonuç daha kalıcı bir öğretim sağlıyor.**” açıklamasında ispatın “kalıcı öğretim sağlamasına” vurgu yaparak önemli olduğunu söylemiştir. Ayrıca bütün öğretmen adayları matematiksel ispatların okul matematiğinde önemli olduğunu beyan etmişlerdir.

Bulgular, ispata yönelik önem algısında sınıf düzeyleri arasında anlamlı bir ayrışma olmadığını göstermektedir. Her sınıf seviyesinden adaylar benzer görüşleri paylaşmışlardır. Örneğin, “mantığını anlama” gerekçesi yalnızca belirli bir sınıfa özgü değil; birinci, üçüncü ve dördüncü sınıflardan adaylar tarafından dile getirilmiştir. Benzer bir şekilde, “ezberden kaçış” görüşü hem alt sınıflarda (birinci ve ikinci sınıflar) hem de üst sınıflarda (dördüncü sınıf) ifade edilmiştir. “Kalıcılık” vurgusu da farklı seviyelerden adaylar tarafından dile getirilmekle birlikte özellikle ikinci sınıfta daha yoğun biçimde öne çıkmıştır. Tüm bu

bulgular, öğretmen adaylarının ortak bir şekilde ispata okul matematiğinde önemli bir işlev yüklediklerini ortaya koymaktadır.

4.1.3. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın okul matematiğindeki yerine dair görüşleri

Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşlerini almak için öğretmen adaylarına “İspat okul matematiğinde yeterince yer alıyor mu? Yeterince yer almıyorsa sebebi nedir ve neler yapılabilir?” soruları yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşleri Tablo 4.3’te sunulmuştur.

Tablo 4.3. Öğretmen adaylarının ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşleri

Tema	Kategori			Kod	Öğretmen Adayları
Sistemsel ve Müfredatsal Engeller	Müfredat ve Zaman Kısıtları			Müfredat Yetersizliği (12)	ÖA ₁₂ , ÖA ₁₄ , ÖA ₁₆ , ÖA ₂₂ , ÖA ₂₄ , ÖA ₂₆ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₅ , ÖA ₃₆ , ÖA ₄₃ , ÖA ₄₅ , ÖA ₄₆
				Ders Saati Yetersizliği (3)	ÖA ₁₂ , ÖA ₁₆ , , ÖA ₂₁
				Ders İçeriklerinin Yoğunluğu (1)	ÖA ₄₁
	Sistemsel Engeller			Sınav Odaklı ve Ezberci Sistem (9)	ÖA ₁₂ , ÖA ₁₃ , ÖA ₁₄ , ÖA ₁₅ , ÖA ₂₂ , ÖA ₂₃ , ÖA ₃₂ , ÖA ₄₂ , ÖA ₄₅
				İspata Özel Ders Eksikliği (2)	ÖA ₁₆ , ÖA ₃₅
				Öğretmen Farkındalığı (16)	ÖA ₁₁ , ÖA ₁₂ , ÖA ₁₃ , ÖA ₁₄ , ÖA ₁₅ , ÖA ₂₃ , ÖA ₂₅ , ÖA ₂₆ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₃ , ÖA ₃₄ , ÖA ₃₅ , ÖA ₃₆ , ÖA ₄₃ , ÖA ₄₅ , ÖA ₄₆
Öğretimsel Yetersizlikler	Öğretmen Yetersizliği	ve	Kaynak	Ders Kitabının Yetersiz Olması (2)	ÖA ₃₃ , ÖA ₄₄

Tablo 4.3’te öğretmen adaylarının matematiksel ispatın okul matematiğindeki yerine ilişkin görüşleri yer almaktadır. Öğretmen adayları ispatın okul matematiğinde “öğretmen farkındalığı, müfredat yetersizliği, sınav odaklı ve ezberci sistem” gibi nedenlerden dolayı yeterince yer almadığını ifade etmişlerdir. Tablo 4.3’ten de görüleceği üzere öğretmen adaylarının çoğunluğu (~%67) “öğretmenlerin farkındalığı”nın az olmasından dolayı matematiksel ispatların okul matematiğinde yeterince yer almadığını söylemişlerdir. Örneğin; ÖA_{1.2}: “Yani benim gördüğüm okuduğum okullarda öyle bir şey sorduğumuz

zaman şey ezberle geç diyorlardı. **Pek geçmiyor.** Bence ispat kitaplarda bazen geçiyor ama pek fazla geçtiğini düşünmüyorum. Yeni bir müfredat hazırlanması lazım bence. Bir de matematik ders saatleri az bence, çünkü hoca konuyu yetiştirmek için hiç üzerinde durmuyor. **Öğretmenin çok güzel yetişmesi lazım.** Bence her türlü problemin ispatının matematiği çok iyi bilmesi lazım. Yani **hocaların bu konuda biraz yetersiz olduğunu düşünüyorum.**” ve ÖA_{1.5}: “**Hayır, bence yeterince yer almıyor.** Bence bunun için hani **hocalar daha bilinçlendirilebilir.** Ezber yöntemi yerine hani nasıl desem formüllerin yerine daha çok onların ispatlarını, neyi nereden geldiğini göstererek anlatmayı hani anlatmaları söylense biraz daha **hocalar bilinçlendirilse** bence daha iyi anlatılır. Tüm öğrenciler olarak bir sınava bağlı çalıştığımız için hepimiz hani formülü ezberle sınavda ne kadar çıkarsa o kadar mı ezberle bu mantıkta gidiyoruz. **O yüzden bence öğretmenler yetersiz olduğundan bilinçlendirilse daha etkili olur.**” açıklamaları ile ispatın okul matematiğinde yeterince yer almamasını öğretmenlerin yetersizliğinden kaynaklı olduğunu ve bilinçlendirilmeleri gerektiğini beyan etmişlerdir. Benzer şekilde ikinci sınıf öğretmen adaylarından “ÖA_{2.3}: **Çok az.** Benim okuduğum okullarda ya da benim dönemimde ben bir de yani biraz daha az. Bundan 9, 10 yıl önce ortaokul olduğu için o dönemler daha azdı. Yeni gelişen eğitim sistemiyle belki yer veriliyordur çağın gereklerine yönelik olarak. En başta **bu işin başında olan, yani lider olarak gördüğümüz öğretmenler tabi bu konuda yeterli duruma gelmeli ya onların eğitiminde ispatı ağırlaştırmalıyız.** Arkasından yani **sınav sistemi** diyeceğim ama bunun değişmesi tabi biraz zor olacak. Yani öğretmenler bu konuda bilinçlense en azından ihtiyacı olan öğrencilere ulaşılabilir.” ve “ÖA_{2.5}: **Bence yer almıyor ya da müfredatta bulunuyorsa bile öğretmenler vermiyor.** Bunun için bence **öğretmenlerin ayrı bir ders verilebilir ya da nasıl desem öğretmenler uyarılabilir** diye düşünüyorum. Mesela böyle alt düzey öğrenciler daha meraklı olurlar. Onlara kural verildiği zaman hani öğrenciler ki bu nereden geliyor? O sıra ben mesela öğretmen kuralı verip altına hemen ispatı yapmalı. Üst sınıflara gelindiği zaman kural verilsin ispat çok uzunsa verilmesine gerek yok diye düşünüyorum.” öğretmenlerin ispat konusunda yeterli farkındalıklarının olmamasından kaynaklı ispatın okul matematiğinde yeteri kadar yer almadığını ifade etmişlerdir. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{3.5} ise “**Okul matematiğinde yeterince yer almıyor. Müfredatta zaten hiç bir şekilde yer almıyor** bence. Bence **öğretmen bazlı daha çok şey yapılması farkındalık lazım.** Her konuyla alakalı hani bu eğitim fakültelerinde de geçerli hepimize vereceğimiz dersler mesela biz ilköğretim matematik öğretmeniyiz. Beşten sekize kadar öğrencilerden sorumluyuz. Bunu mesela geometri olabilir. Geometri bize hani bu

hangi konuyu anlatacaksak onunla alakalı ispatlarının tek tek verilmesinin taraftarıyım. Ben hani bununla alakalı **özel bir derste açılabilir, yani öğretmenler de yetiştirilebilir.** Böyle olması gerektiğini düşünüyorum. **Müfredatta ise bunun üstüne daha fazla durması, öğrencinin ilişkilendirmeyi daha fazla yapmasını gerektiğini düşünmekteyim.**” benzer biçimde öğretmenlerin yeteri kadar ispata dair olumlu anlayışlarının gelişmemiş olmasının yeteri kadar okul matematiğinde yer bulamadığını söylemiştir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarının da diğer sınıf seviyesindeki öğretmen adaylarına paralel düşünceye sahip oldukları saptanmıştır. Örnek olarak; “ÖA_{4.3}: **“Hayır, hocam üniversitede bile almıyor. Hocam bence öğretmenlere burda görev düşüyo daha fazla ispatsal işlemler, etkinlikler çok yapılmalı bence. Hocam programda da bence biraz eksiklikler var ama genel olarak öğretmenlerde eksiklik olduğunu düşünüyorum.”** ve “ÖA_{4.5}: **Yani kendi eğitim hayatıma bakınca bence yeterince yer almıyor. Hep böyle özlerden gidiliyor ya da böyle hazır bilgi olarak olarak veriliyor. Yani yeterli seviyede değil bence. Lise seviyesine zaten hani ufaktan veriliyor? Hani geometri daha doğrusu hani aslında verilmiyor da hani öğrenciyi kendi isteğiyle bakabilir ama ortaokul seviyesinde verilmiyor. Böyle öğrencilerin etkinlikler yapılarak alt seviyede ispatlar verilebilir. Hani onun o kendisi oluşturabilir. Yani ispat etkinliklerini ispat kendisi oluşturabilir bence öğrenci. Ben hani müfredatta eksiklik var zaten öğretmenler de eksik zaten. Hani onların da gördüğü eğitimden kaynaklı eksiklik var. Bu kadar hani öğretmenle tam bilmediği için aslında öğrendim ispatla.”** açıklamaları ile öğretmenlerinden kaynaklanan eksikliklerinde ispatın okul matematiğinde yeterince yer almamasının nedenlerinden biri olarak görmüşlerdir. Diğer taraftan öğretmen adaylarının yarısı ise “müfredat eksikliği”nden dolayı ispatın okul matematiğinde yeteri kadar yer almadığını beyan etmişlerdir. Örnek olarak; ÖA_{1.2}: **“Yani benim gördüğüm okuduğum okullarda öyle bir şey sorduğumuz zaman şey ezberle geç diyorlardı. Pek geçmiyor. Bence ispat kitaplarda bazen geçiyor ama pek fazla geçtiğini düşünmüyorum. Yeni bir müfredat hazırlanması lazım bence. Bir de matematik ders saatleri az bence, yani o ispatı verene, çünkü hoca konuyu yetiştirmek için hiç üzerinde durmuyor. Öğretmenin çok güzel yetişmesi lazım. Bence her türlü problemin ispatının matematiği çok iyi bilmesi lazım. Yani hocaların bu konuda biraz yetersiz olduğunu düşünüyorum.”** ve “ÖA_{1.6}: **Hayır, bence yer almıyor yeterince. Bunun için programlarda değişiklik yapılabilir ve eksiklikler giderilmeli. Onunla ilgili ek bir ders eklenebilir diye düşünüyorum. Yani aslında ispatla ilgili bir sınav da olabilir.”** açıklamaları ile öğretim programlarındaki eksikliklerden kaynaklı olarak ispatın okul matematiğinde yeterince yer bulamadığını ifade etmişlerdir. İkinci sınıf

öğretmen adaylarından ÖA_{2.2} ve ÖA_{2.6} ise sırasıyla “**Hayır, kesinlikle yeterince almıyor.** Hocaların özellikle geometri konusunda bu var. Bence fazla sayıda böyle şeyden çok formülden çok nereden geliyor bunlar. Hani öklitte nasıl yapacağız? Hani 2 üçgen neden şurada bile şu neden hipotenüs kullanıyoruz? Hani o şekilde öğrencilere anlattıklarında **mantığını oturttuklarında daha iyi seviyelere ulaşacaklarını düşünüyorum.** Dediğim gibi ezber kesinlikle bir noktaya kadar kalıyor. Öğrencilerin de öyle bir isteği yok. Zor geliyor çünkü ispat başka ezberlemek onlara bir tık daha kolay geliyor. Şöyle aslında **müfredatta almadığından dolayı da öğretmenler kullanamıyor.** Müfredatta test kitaplarında olanı soruyor. Ösym sınavda o zaman öğrenci öğrencilerde öğretmenler de kısa yoldan nasıl sonuca varabiliriz. Bunu düşündükleri için bir nevi ezbere kaçıyorlar diyebiliriz.” ve “Hocam şöyle, şu an hani üniversitede matematik bölümünü okuyoruz. Ona rağmen yeterince ispatlara girmediğimizi düşünüyorum ki bu düzey ilkokulda hadi ilkokulu geçtim. Ortaokul ve lisede çok çok daha az görülüyor ve bence hiç yeterliliği zaten. Mesela ben öğretmen adayıyım. Şu an benim öğrencilere bunların kavramların ne anlama geldiğini, hani neyi neden yaptıklarını bilecek öğrenciler yetiştirmemi sağlaması gerekiyor. Üniversitede benim o yönde eğitilmem gerekiyor. Diğer öğretmenleri o yönde eğittikten sonra. Artık iş tamamen öğretmene ve meb kısmına kalıyor. **Hani müfredatta daha çok koyulması gerekiyor.** Bir öğrenciye bu konuyu anlattığında detaylarına ince ince ne yaptığını, en azından basitçe açıkla şeklinde kazanımlar koymak. Yani **müfredat tabii iyileştirme yapma belki nispeten iyileşmeye sebep olabilir**” açıklamaları ile müfredattaki yetersizliğin doğrudan ispatın okul matematiğinde kullanımını etkilediğini ifade etmişlerdir. Benzer biçimde üçüncü sınıf öğretmen adaylarından “ÖA_{3.1}: Müfredatımızı incelediğimizde biraz ta temelden alıyor ama **bence yeterli bir seviyede olduğunu düşünmüyorum.** **Müfredat daha çok detaylandırılabilir,** yani daha çok müfredat, geniş olarak ele alınabilir bence. Tabiki bu sadece müfredat için geçerli değil. Onunla müfredatı uygulamaya dökmek için de önemli. Öğretmene de çok büyük görevler düşüyor.” ve “ÖA_{3.5}: “Okul matematiğinde yeterince yer almıyor. Müfredatta zaten hiç bir şekilde yer almıyor bence. Bence öğretmen bazlı daha çok şey yapılması farkındalık lazım. Her konuyla alakalı hani bu eğitim fakültelerinde de geçerli hepimize vereceğimiz dersler mesela biz ilköğretim matematik öğretmeniyiz. Beşten sekize kadar öğrencilerden sorumluyuz. Bunu mesela geometri olabilir. Geometri bize hani bu hangi konuyu anlatacaksak onunla alakalı ispatlarının tek tek verilmesinin taraftarıyım. Ben hani bununla alakalı özel bir derste açılabilir, yani öğretmenler de yetiştirilebilir. Böyle olması gerektiğini düşünüyorum.

Müfredatta ise bunun üstüne daha fazla durması, öğrencinin ilişkilendirmeyi daha fazla yapmasını gerektiğini düşünmekteyim.” açıklamalarından ispatın okul matematiğinde yeteri derecede yer almamasının önemli faktörlerinden birini müfredat yetersizliği olarak gördükleri anlaşılmaktadır. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{4.6}** ise *“Hayır yani benim aldığım eğitim sisteminde yer almadı. Ben çok hissetmedim onu. Müfredat değiştirebilir eksiklik var çünkü ya da öğretmenler bunu kendi bilgisiyle kendisi verebilir.”* açıklaması ile müfredattaki eksikliğe vurgu yaptığı görülmektedir. Öte yandan öğretmen adaylarından dokuzu (~%38) “sınav odaklı ve ezberci sistem”i gerekçe olarak sunmuştur. Örnek olarak; **ÖA_{1.2}**: *Yani benim gördüğüm okuduğum okullarda öyle bir şey sorduğumuz zaman şey ezberle geç diyorlardı. Pek geçmiyor. Bence ispat kitaplarda bazen geçiyor ama pek fazla geçtiğini düşünmüyorum. Yeni bir müfredat hazırlanması lazım bence. Bir de matematik ders saatleri az bence, yani o ispatı verene, çünkü hoca konuyu yetiştirmek için hiç üzerinde durmuyor. Öğretmenin çok güzel yetişmesi lazım. Bence her türlü problemin ispatının matematiği çok iyi bilmesi lazım. Yani hocaların bu konuda biraz yetersiz olduğunu düşünüyorum.*” ve **ÖA_{1.3}**: *Yok kadar bence yok gibi, yani ispat biz sorduğumuzda bunun neyin nereden geldiğini sorduğumuzda da bu sınavda çıkmayacak genelde denildi. Hocaların açıklaması bizim anlayacağımız düzeyde açıklaması daha iyi olur bence. Biz direkt geçtik yani öyle işlemedik açıkçası. Ya açıklayıp anlatsalar bizim için çok daha iyi olacağını düşünüyorum. Kendi başımıza da çok uzun geldiği için korkup sayfaları çeviriyorduk.*” açıklamalarından “ezberle geç, sınavda çıkmayacak” gibi ifadeler sınav odaklı ve ezberci sistemin ispatın okul matematiğinde yeteri kadar yer almasının önünde engel olarak gördükleri anlaşılmaktadır. Benzer şekilde **ÖA_{2.2}** ve **ÖA_{2.3}** ise sırasıyla *“Hayır, kesinlikle yeterince almıyor. Hocaların özellikle geometri konusunda bu var. Bence fazla sayıda böyle şeyden çok formülden çok nereden geliyor bunlar. Hani öklitte nasıl yapacağız? Hani iki üçgen neden şurada bile şu neden hipotenüs kullanıyoruz? Hani o şekilde öğrencilere anlattıklarında mantığını oturttuklarında daha iyi seviyelere ulaşacaklarını düşünüyorum. Dediğim gibi ezber kesinlikle bir noktaya kadar kalıyor. Öğrencilerin de öyle bir isteği yok. Zor geliyor çünkü ispat başka ezberlemek onlara bir tık daha kolay geliyor. Şöyle aslında müfredatta almadığından dolayı da öğretmenler kullanamıyor. Müfredatta test kitaplarında olanı soruyor. Ösym sınavda o zaman öğrenci öğrencilerde öğretmenler de kısa yoldan nasıl sonuca varabiliriz. Bunu düşündükleri için bir nevi ezbere kaçıyorlar diyebiliriz.*” ve *“Çok az. Benim okuduğum okullarda ya da benim dönemimde ben bir de yani biraz daha az. Bundan 9, 10 yıl önce ortaokul olduğu için o*

dönemler daha azdı. Yeni gelişen eğitim sistemiyle belki yer veriliyordur çağın gereklerine yönelik olarak. En başta bu işin başında olan, yani lider olarak gördüğümüz öğretmenler tabi bu konuda yeterli duruma gelmeli ya onların eğitiminde ispatı ağırlaştırmalıyız. Arkasından **yani sınav sistemi diyeceğim ama bunun değişmesi tabi biraz zor olacak.** Yani öğretmenler bu konuda bilinçlense en azından ihtiyacı olan öğrencilere ulaşılabilir.” açıklamaları ile sınav odaklı sistemden kaynaklı ezbere yönlendirilmesinin ispatın okul matematiğinde yeteri kadar yer almadığını ifade etmişlerdir. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{3.2} ise “**Yok, bence çok düşük düzeyde yer alıyor. Bizim eğitim sistemimizin %90 civarının ezberden oluştuğunu düşünüyorum.** Kendi bunları öğretmenliğimde değilde daha lise yıllarımdaki kendi öğrenim kısmıyla ilgili söyleyeyim, öğretmenimiz çok ezberciydi. Çoğunlukta olduğu gibi en az yani 10 öğretmeni yedi sekizi ezberciydi ve ben ezberci anlatmayan, ispatla anlatan bir matematikçi tanıdıktan sonra matematiği tekrar yapabildim. Yani benim orta ortaokul yıllarında matematikte çok iyiydi. Gayet gayet başarılı bir öğrenciydim. Lise bir ikide yine o bilgilerle teyit etmek oldu ama bu **AYT dediğimiz kısma geçtiğimiz zaman** formüller işin içine girince ben formül ezberleyemediğim için ve ezberci bir sistem içinde olduğumuz için matematik notlarım ciddi düşüş yaşamıştım. Ta ki liseyi bitirip, yani lise son sınıfa kadar gelip o zaman ezberci anlatmayan bir matematik öğretmeniyle tanıştığımda tekrar bir yükselişe geçti ve ondan sonra matematik öğretmenliği seçmeye bile karar verdim. Öyle söyleyeyim, o yüzden bence çok düşük düzeyde var, artırılmalı ve çok daha fazla da yani %60 düzeyinde. Bence ispata dayalı bir matematik eğitimi daha kalıcı bir öğretim sağlayabilir.” açıklamasında ezbere dayalı ve sınava odaklı bir eğitim sisteminin olmasını ispatın okul matematiğindeki yerine karşı en büyük engel olduğunu söylemiştir. ÖA_{4.2}’te benzer şekilde “**Yeterince yer almamış ki direkt ezber olarak veriliyor. Bize direk bu şekilde verilip bırakılıyor. Yani neyin nereden geldiğini öğretilmiyor. Sınava yönelik hazırlanıyor.** Neyin nereden geldiğini göstererek öğretilmeli. Yani ilkokul seviyesine düşürerek ortaokul seviyesini düşürerek anlatılmalı. bunun için örnekler vererek ya da ne bileyim o ifadenin ispatını yaparak anlatılabilir. Bence her konu üzerinde verilmesi gerekiyor ve desteklenmesi gerekiyor. Materyallerle ne bileyim bilgisayar destekli olarak veya geogebra üzerinden göstererek hani şu an bunlar aklıma geldi.” gibi açıklamalarda bulunarak sınav odaklı ve ezberci eğitim sistemine vurgu yapmıştır. Ayrıca bütün sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının ispatın okul matematiğinde yeteri kadar yer almadığı konusunda hemfikir oldukları tespit edilmiştir.

Bulgular, öğretmen adaylarının ispata okul matematiğinde verilen yere ilişkin görüşlerinde sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmadığını göstermektedir. Öğretmen adayları farklı sınıf düzeylerinden gelseler de benzer temaları öne çıkarmışlardır. Örnek olarak, “öğretmen farkındalığı” hem alt sınıflardan (birinci ve ikinci sınıf) hem de üst sınıflardan (üçüncü ve dördüncü sınıf) adaylarca dile getirilmiştir. “Müfredat yetersizliği” görüşü ise yine tüm sınıf seviyelerinde ortak biçimde ifade edilmiştir. “Sınav odaklı ve ezberci sistem” vurgusu da farklı seviyelerde karşılık bulmuş, özellikle birinci sınıfta daha yoğun dile getirilmiştir. Genel olarak tüm öğretmen adayları, ispata okul matematiğinde yeterince yer verilmediğini vurgulamışlardır.

4.1.4. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın amacına dair görüşleri

Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın amacına ilişkin görüşlerini almak için öğretmen adaylarına “İspatın okul matematiğinde hangi amaçlarla kullanıldığını düşünüyorsunuz?” sorusu yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatın amacına yönelik görüşleri Tablo 4.4’te sunulmuştur

Tablo 4.4. Öğretmen adaylarının ispatın amacına ilişkin görüşleri

Tema	Kategori	Kod (Frekans)	Öğretmen Adayları
Zihinsel Gelişim ve Kavramsal Öğrenme	Bilgiye Ulaşma ve Sorgulama	Bilginin Kaynağını Bulma (12)	ÖA _{1.1} , ÖA _{1.3} , ÖA _{1.5} , ÖA _{2.1} , ÖA _{2.5} , ÖA _{2.6} , ÖA _{3.2} , ÖA _{3.4} , ÖA _{3.5} , ÖA _{4.1} , ÖA _{4.2} , ÖA _{4.6}
		Düşünmeye Sevk Etme (4)	ÖA _{1.2} , ÖA _{1.3} , ÖA _{2.2} , ÖA _{3.2}
		Sorgulama/Araştırma (2)	ÖA _{1.2} , ÖA _{1.4}
		Matematiğin Anlaşılması / Anlamlandırılması (10)	ÖA _{1.1} , ÖA _{1.3} , ÖA _{1.5} , ÖA _{1.6} , ÖA _{2.2} , ÖA _{2.6} , ÖA _{3.5} , ÖA _{4.3} , ÖA _{4.4} , ÖA _{4.5}
	Kavramsal Anlama ve Kalıcılık	Kalıcılığı Arttırma (6)	ÖA _{2.1} , ÖA _{2.4} , ÖA _{2.5} , ÖA _{3.4} , ÖA _{3.6} , ÖA _{4.2}
		Ezberden Uzaklaşma (1)	ÖA _{4.5}
		Matematiksel Düşünme Becerisi Geliştirme (3)	ÖA _{3.2} , ÖA _{3.3} , ÖA _{4.4}
	Üst Düzey Düşünme	Farklı Bakış Açısı Geliştirme (1)	ÖA _{4.5}

Tablo 4.4. (Devamı) Öğretmen adaylarının ispatın amacına ilişkin görüşleri

Tema	Kategori	Kod (Frekans)	Öğretmen Adayları
Zihinsel Gelişim ve Kavramsal Öğrenme	Bilişsel Gelişim ve Üst Düzey Düşünme	Matematiksel	ÖA _{3,4}
		Muhakeme ve İlişkilendirme (1)	
		Bağlantı Kurma (1)	ÖA _{3,5}
		Genelleştirme (1)	ÖA _{4,6}
	İlgii Arttırma ve Güdüleme	Matematiğe Karşı İlgiyi / Merakı Arttırma (7)	ÖA _{1,2} , ÖA _{1,5} , ÖA _{1,6} , ÖA _{2,1} , ÖA _{3,1} , ÖA _{3,6} , ÖA _{4,4}
		Günlük Hayat İle İlişkilendirme (1)	ÖA _{1,5}
		Matematiğin Eğlenceli / Zevkli Hale Getirilmesi (1)	ÖA _{4,5}
		Öğrenci Seviyesini Ortaya Çıkarma (1)	ÖA _{2,3}
	Öğrenme Sürecine Katkı	Matematik Yapma Fırsatı (2)	ÖA _{3,3} , ÖA _{4,4}
		Matematiğin Öğretilmesi (2)	ÖA _{4,5} , ÖA _{4,6}

Tablo 4.4’te öğretmen adaylarının matematiksel ispatın amacına ilişkin görüşleri yer almaktadır. Öğretmen adayları ispatın “bilginin kaynağını bulma, matematiğin anlaşılması/anlamlandırılması, matematiğe karşı ilgiyi/merakı arttırma, kalıcılığı arttırma ve düşünmeye sevk etme” gibi amaçları olabileceklerini belirtmişlerdir. Tablo 4.4’ten de görüleceği üzere öğretmen adaylarının yarısı matematiksel ispatın amacını “bilginin kaynağını bulma” olarak belirtmişlerdir. Örnek olarak; “**ÖA_{1,1}**: Yani daha çok öğrencinin ilk defa gördüğü bir bilgide bu **bilginin nereden geldi** ya da zorlandığı bir bilgide bu **bilgiye nasıl ulaşabileceği** gibi iki temel durum şu an aklıma gelen.” ve “**ÖA_{1,5}**: Öğrencileri matematiğe sadece sınavda çözebilecekleri bir şey olmadığını göstermek için. Şöyle bir ispatı anlatırken bunu **nereden geldiğini** de **nerden bulunduğunu** da anlatırsa, hani o işlemin sadece matematikte değil de günlük hayattan gelip matematiğin içine girdiğini gösteririz. Bence öğrenciler bundan daha çok etkilenir. Hani daha bilinçli bireyler olurlar” açıklamaları ile matematiksel bilgilerin “nereden geldiği, nasıl bulunduğu” gibi ifadelerle ispatın amaçlarından birinin bilginin kaynağının bulunması olarak ifade etmişlerdir. Benzer şekilde ikinci sınıf öğretmen adaylarından “**ÖA_{2,5}**: İşte dediğim gibi mesela biz bazı kurallar öğrencileri ezbere itiyor. Aslında bence matematik ezbere dayalı bir ders değil. Bu yüzden ispat verilerek öğrencilere o konuyla ilgili şey sağlam bilgiler kazandırılmalı. Asla

unutmayacağı kurallar unutulur. Çünkü ezber yapıyor öğrenci ama **ispatı bilirse nereden geldiğini bilirse** ileriki zamanlarda yine gördüğü zaman aklına gelecektir.” ve “ÖA_{2.6}: “Ya hangi amaçla yine benzer cümleleri kuracağım? **Öğrenci neyi niye yaptığını bilmeli**, hani bir şeyler yapıyor, **nereden geldiğini bilsin** o öğrenci, hani **neden** yani? Daha çok sorgulayıcı öğrenciler yetiştirmemiz gerekiyor. Mesela öğrenci bir şey öğrenciye bir formül verdiğimizde **bu niye böyle, neden böyle** dediğinde onun cevabını alabilmesi gerekiyor ki bunların cevabı matematikte var. Hiçbir şey matematikte rastgele hasbelkader bulunmadı. Hepsinin bir temeli var. Bu temellerin öğrenciye aktarılması lazım ki öğrencinin işlemsel becerilerden çok kavramsal öğrenmesi de gerçekleşsin diye düşünüyorum.” açıklamaları ile ispatın amaçlarından birinin bilginin kaynağını bulma olarak nitelendirdikleri tespit edilmiştir. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{3.2} ve ÖA_{3.4} sırasıyla “Yani bence ispatı bildiğinde **neden sorusuna cevap veriyorsun**. Yani ben işte bir karışım probleminde karışan miktarla karışımın türünü çarptığımda aslında ne yapmış oluyorum veya işte adı nedir onun bir tane şey teoremi vardı. Yani ben aslında teoremin ispatını bildiğimde veyahut işte o kullandığım formül ispatını bildiğimde **neyi niçin yaptığını öğrenmiş oluyorum** ya da orda matematiksel olarak daha derin düşünmüş oluyorum. Matematiksel düşünme becerisi geliştirdiğini düşünüyorum ben ispat yapmanın.” ve “İspat kullanılması ya sonuçta biz öğrencilere ispatları kullandırdığımızda aslında şu anki düzeyde sadece işte yerine koy. Bu bizim formülümüz bunu yapmalıyız diyoruz ama normalde hani o öğrenci **onun nereden geldiğini**, hani ispatı mantığını anlarsa matematiksel o muhakemeye daha iyi yapar. Bu yüzden ilişkilendirmeyi de daha sağlam oturtmuş olur ve öğrenmesi kalıcı olmuş olur.” açıklamalarında bulunarak “bilginin nereden geldiği, neyi niçin yaptığı” gibi ifadelerle ilişkilendirerek ispatın amacını bilginin kaynağını bulma olarak belirttikleri tespit edilmiştir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{4.1} ve ÖA_{4.2} benzer biçimde “Yani dediğim gibi yine ispat öğrencilerin o **matematiksel kavramların nereden geldiği matematiksel sonuçları nereden geldiği** mesela iki üzeri sıfır neden bir olduğu biraz sıfır bölü sıfırı neden tanımsız olduğunu açıklamaları için gerekli nedenler bağlanıyor ve bazen biz de sorguluyoruz mesela neden iki üzeri sıfır bir oluyor? Ben bile hocam lise düzeyine kadar iki üzeri sıfırın neden bir olduğunu bilmiyordum, normalde iki üzeri sıfır belki ortaokulda ispatı yapılan bir şeydir. Biz lisenin ta sonuna doğru öğrendik hocam yani bu gerçekten çok vahim bir şey. O yüzden ispat gerekli yani.” ve “Yani **ezber yerine neyi nereden geldiğini göreceği için** öğrenci hem bilgi kalıcı olmuş oluyor. Yani anlık öğrenmedeydim, kalıcı kalmış kalıyor. O bilgi bu şekilde kullanılabilir.” açıklamalarında kullandıkları “neden böyle, nereden

geldiği” gibi ifadelerden ispatın amaçlarından birinin bilginin kaynağı ile olarak tanımlandıkları anlaşılmaktadır. Diğer taraftan öğretmen adaylarından 10’u (~%42’si) matematiksel ispatın amacı olarak “matematiğin anlaşılması/anlamlandırılması” şeklinde görüş bildirmişlerdir. Örneğin; birinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{1.3} “**Analitik düşünmek için çok daha anlaşılır olması için olabilir. Yani detaylı düşünmek, anlamak, daha çok anlamak için bence, yani teste dayalı ezbere dayalıdan ziyade nereden geldiğini öğrenmek daha iyi olur.**” açıklamasında “çok daha anlaşılır olması, daha çok anlamak” gibi ifadelerle ispatın amacını bu şekilde nitelendirdiği görülmektedir. Benzer biçimde ikinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{2.6} ise “**Ya hangi amaçla yine benzer cümleleri kuracağım. Öğrenci neyi niye yaptığını bilmeli, hani bir şeyler yapıyor, nereden geldiğini bilsin o öğrenci, hani neden yani. Daha çok sorgulayıcı öğrenciler yetiştirmemiz gerekiyor. Mesela öğrenci bir şey öğrenciye bir formül verdiğimizde bu niye böyle, neden böyle dediğinde onun cevabını alabilmesi gerekiyor ki bunların cevabı matematikte var. Hiçbir şey matematikte rastgele hasbelkader bulunmadı. Hepsinin bir temeli var. Bu temellerin öğrenciye aktarılması lazım ki öğrencinin işlemsel becerilerden çok kavramsal öğrenmesi de gerçekleşsin diye düşünüyorum.**” açıklamasında ispatın öğrencilerin sorgulayarak, neyi niçin yaptığını farkında olarak kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirmesi ile matematiği anlamlandırma yoluna gidebilmesi amacıyla kullanılacağını ifade etmiştir. ÖA_{3.5}’te paralel olarak “**Şuan ispatın çok fazla kullanıldığını okul matematiğinde görmedim. Çünkü bizde ortaokul okuduk ve öğretmenlerimizin hiçbiri bu burdan geliyor demedi. Hatta sınıftan her zaman bir farklı öğrenci çıkar. Hocam nereden geliyor der öğretmen tahtaya bir şeyler karalar işte bu böyle falan filan yapar, o da kendini gösterebilmek için yapar, öyle yaparlar öyle kalır yani unutup gideriz yani. Bence öğrenciyi bağlantılar kurmasını sağlamak amacıyla aynı şekilde az önce de söyledim, ondan sonra konuların kavramları anlaşılmasını daha iyi anlatılması amacıyla kullanılmalı. Öğrencilerin zihninde şemalar oluşturmali diye düşünüyorum.**” şeklinde bir açıklama ile “bağlantılar kurma, kavramların anlaşılması” gibi ifadelerle ispatın amaçlarından birinin matematiğin anlaşılması/anlamlandırılması ile ilişkilendirdiği tespit edilmiştir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{4.4} ve ÖA_{4.5} ise sırasıyla “**Yani pek bir amaçsa, daha doğrusu çok kullanılmadığı için bir amaçla kullanıldığını söyleyemem ama neden kullanılmalı diye soracak olursak, öğrencinin gerçekten de matematiksel motivasyonunu artırmak için veya gereski matematiği veya konuyu daha kolay anlayabilmesi için ve öğrencinin matematik yapabilmesi için matematiksel düşünmesi için kullanılmalı. Çünkü kanıt dediğimiz şeye**

oluştururken veya yaparken misal birazdan sorun. Matematik yapmak zorunda kalacağım. Bunu öğrenciler de yansıtırsak gayet de iyi olacaktır. Çünkü matematiksel düşüncenin önemi yadsınamaz derecede büyüktür.” ve “Bence **matematik daha iyi öğretebilmek için ezberden uzaklaştırmak için** ya da hani öğrenci hani bir kural var o kuralı sanki öyle her yerde kullanabileceğini düşünüyor ya da ne bileyim. matematiği öğretmek için kullanılmalı. Daha sonra **farklı bakış açıları geliştirmek için** kullanılmalı. **Sıkıcı olmaktan uzaklaştırmak için** kullanamalı. Hani öğretmen şey yapıyor diyor ki, hani öyle geliyor, kuralı veriyor öğrenciye hani öğrenci o kuralı ya unutuyor ya da mantıklı bulmuyor. **Anlamli kılmak için** de verilmeli.” açıklamalarında bulunarak “matematiği daha kolay anlaması, anlamli kılınması” gibi ifadelerle ispatın amacı olarak matematiğin anlaşılması ve anlamlandırılması şeklinde ifade ettikleri tespit edilmiştir. Öte yandan bu görüşleri yedi (~%29) görüş ile “matematiğe karşı ilgiyi / merakı arttırma” cevabı izlemektedir. Örnek olarak; “**ÖA_{1.2}: Öğrencinin matematiğe olan ilgisini arttırmak için.**” “Yani öğrencinin bu konu hakkında biraz düşünmesi, araştırma yapması için.” ve “**ÖA_{1.6}: Matematiği sevdirmeye yönelik. Matematiği daha rahat anlatmaya yönelik.**” açıklamaları ile “matematiği sevdirmek, ilgiyi arttırmak” gibi ifadelerle ispatın amacının matematiğe karşı olan ilgiyi arttırma olarak gördükleri anlaşılmaktadır. Benzer biçimde **ÖA_{2.1}** ise “**Kalıcılığı arttırmak için yani öğrenciler için diyorum. Merak arttırmak, formül nereden geldi onu daha merak edebilirler. Ondan dolayı öğrencilerin merak düzeyi için ve kalıcılığı arttırmak için.**” açıklaması ile ispatın öğrencinin merakının arttırma amaçlı kullanılabileceğini belirtmiştir. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{3.1}** ve **ÖA_{3.6}** sırasıyla “Dediğim gibi öğrencilerin mesela konuyu daha iyi mesela matematik öğrenciler için korkutucu bir şey gibi görünüyor. Tüm herkes için sadece öğrencileri için de değil, böyle matematiğin öyle olmadığını, **daha böyle zevkli anlaşıldığında daha böyle insana mutluluk veren bir ders olduğunu** bence o için önemli olabilir yani. İnsan matematik yaptığında mutlu hissediyor kendini.” ve “Şey ispat öğrenciye verilirse, okul matematiğinde o konu öğrenci de daha kalıcı olur. **Matematiğe karşı belki tutum daha olumlu olur, olumlama yapabilir, yani matematiğe karşı.**” açıklamalarında kullandıkları “matematiği daha zevkli hale gelmesi, olumlu tutum geliştirme” gibi ifadelerden ispatın amaçlarından birinin matematiğe karşı ilgiyi arttırma olarak gördükleri tespit edilmiştir. **ÖA_{4.4}** ise benzer şekilde “Yani pek bir amaçsa, daha doğrusu çok kullanılmadığı için bir amaçla kullanıldığını söyleyemem ama neden kullanılmalı diye soracak olursak, öğrencinin gerçekten de **matematiksel motivasyonunu arttırmak için** veya gerekse matematiği veya konuyu daha kolay anlayabilmesi için ve

öğrencinin matematik yapabilmesi için matematiksel düşünmesi için kullanılmalı. Çünkü kanıt dediğimiz şeye oluştururken veya yaparken misal birazdan sorun. Matematik yapmak zorunda kalacağım. Bunu öğrenciler de yansıtırsak gayet de iyi olacaktır. Çünkü matematiksel düşüncenin önemi yadsınamaz derecede büyüktür.” şeklinde açıklamada bulunarak “matematiksel motivasyonu arttırmak için” ifadesiyle ispatın bu amaçla kullanılabileceğini belirtmiştir.

Öğretmen adaylarının ispata ilişkin amaç konusundaki görüşleri incelendiğinde, sınıf seviyeleri arasında belirgin bir farklılık olmadığı görülmüştür. Öne çıkan görüşler her sınıf düzeyindeki adaylar tarafından dile getirilmiştir. Örneğin, “bilginin kaynağını bulma” görüşü tüm sınıflardan öğretmen adaylarınca ortak biçimde ifade edilmiştir. “Matematiğin anlaşılması/anlamlandırılması” görüşü ise farklı sınıf seviyelerinde dile getirilmiş, özellikle birinci sınıfta daha yoğun şekilde öne çıkmıştır. Benzer biçimde “matematiğe karşı ilgiyi ve merakı artırma” görüşü de tüm sınıflar seviyelerinde karşılık bulmuştur. Bu bulgular, öğretmen adaylarının ispata yönelik amaç algılarının sınıf düzeylerinden bağımsız olarak benzer doğrultuda şekillendiğini göstermektedir.

4.1.5. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın okul matematiğindeki rolüne dair görüşleri

Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın okul matematiğindeki rolüne ilişkin görüşlerini almak için öğretmen adaylarına “İspatın okul matematiğinde rolünün ne olduğunu düşünüyorsunuz?” soruları yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatın okul matematiğindeki rolüne ilişkin görüşleri Tablo 4.5’te sunulmuştur.

Tablo 4.5. Öğretmen adaylarının ispatın okul matematiğindeki rolüne ilişkin görüşleri

Tema	Kategori	Kod	Öğretmen Adayları
Öğrenmeyi Derinleştirme ve Kavramsallaştırma	Kavramsal Derinlik ve Anlam Kurma	Kavramsal Öğrenmeyi Destekleme (6)	ÖA ₁₂ , ÖA ₁₃ , ÖA ₂₂ , ÖA ₂₃ , ÖA ₂₄ , ÖA ₂₅
		Matematiğin Sistemiğini Ortaya Çıkarma (1)	ÖA ₃₃
		Matematiğin Keşfedilmesi (1)	ÖA ₄₅
	Bilginin Kalıcılığına Katkı	Kalıcılık (2)	ÖA ₂₁ , ÖA ₂₅
		İçselleştirme (1)	ÖA ₂₂

Tablo 4.5. (Devamı) Öğretmen adaylarının ispatın okul matematiğindeki rolüne ilişkin görüşleri

Tema	Kategori	Kod	Öğretmen Adayları	
Eleştirel ve Üst Düzey Düşünmenin Geliştirilmesi	Bilişsel Etkinleştirme	Sorgulama (1)	ÖA ₂₆	
		Matematiksel Düşünmeyi Geliştirme (8)	ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₆ ,ÖA ₂₁ ,ÖA ₂₃ , ÖA ₂₄ , ÖA ₂₆ ,ÖA ₃₂ ,ÖA ₄₄	
	Üst Düzey Matematiksel Düşünme ve Muhakeme	Akıl Yürütme / Muhakeme Yapma (1)	ÖA ₃₆	
		Soyut Düşünme Becerisi Geliştirme (1)	ÖA ₃₂	
		İlişkilendirme Bağlantı Kurma (1)	/ ÖA ₃₅	
	Öğretmen Rolü ve Rehberliği	Öğretmenin Pedagojik Alan Bilgisi (13)	Alan	ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ , ÖA ₁₆ ,ÖA ₂₂ ,ÖA ₂₆ ,ÖA ₃₁ , ÖA ₃₅ ,ÖA ₃₆ ,ÖA ₄₄ ,ÖA ₄₅ , ÖA ₄₆
		Öğretmen Rehberliği (2)	Öğretmen Rehberliği	ÖA ₄₁ ,ÖA ₄₂
			Güven Verme (1)	ÖA ₄₂
		Derse Olan İlgi/Bakış Açısı (2)	ÖA ₁₁ , ÖA ₁₅	
Öğrenci Tutumu ve Öğrenme İklimi	Öğrencinin Zekası ve Yeteneği (3)	Öğrencinin Zekası ve Yeteneği (3)	ÖA ₁₂ , ÖA ₁₄ , ÖA ₁₅	
	Öğrenci Merkezli Öğrenme (3)	Öğrenci Merkezli Öğrenme (3)	ÖA ₃₄ ,ÖA ₄₁ ,ÖA ₄₆	

Tablo 4.5’te öğretmen adaylarının matematiksel ispatın okul matematiğindeki rolüne ilişkin görüşleri yer almaktadır. Öğretmen adayları ispatın okul matematiğinde “öğretmenin pedagojik alan bilgisi, matematiksel düşünmeyi geliştirme, kavramsal öğrenmeyi destekleme, öğrencinin zekası ve yeteneği” gibi rolleri ortaya çıkardığını ifade etmişlerdir. Tablo 4.5’ten de görüleceği üzere öğretmen adaylarının yarısından fazlası (~%54) matematiksel ispatların okul matematiğinde “öğretmenlerin pedagojik alan bilgisi”ni ortaya çıkardığını söylemişlerdir. Örnek olarak; “ÖA_{1.2}: *Düşünebilen kabiliyetli öğrencilere bence ortaya çıkarır. Zeka seviyesi yüksek olan öğrencileri düşünen öğrencileri. Bu ispatı yapan hocaların da yani iyi matematik mesleğini en iyi şekilde yaptığını gösterir bence. Bence hem öğrencinin kabiliyetini hem öğretmenin öğretme kabiliyeti. Yani kısaca pedagojik alan bilgisi.*” ve “ÖA_{1.5}: *Öğretmenin ne kadar bilgi sahibi olduğunu ortaya koyar bence*

*hani ne kadar araştırmış ne kadarını biliyor? Sadece ders anlatmak için mi gelmiş yoksa gerçekten bu dersi öğrenmiş ve öğretmek mi istiyor? Hani ilgisini çeken derse ilgili öğrenciyi ispatını öğrenmek ister. İlgisiz öğrenci formülü öğrenir, geçer.” açıklamalarından “öğretmenin öğretme kabiliyeti, ne kadar bilgi sahibi olduğu” gibi ifadelerle ispatın öğretmenlerin pedagojik alan bilgisi rolünü ortaya çıkardığını düşündükleri tespit edilmiştir. İkinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{2.2} ve ÖA_{2.6} ise sırasıyla “**Öğretmenin iyi bir eğitim aldığı ve o eğitimi nasıl daha iyi aktarabildiğini**, öğrenciye etkili bir şekilde aktarabildiğini gösterir. Öğrenci açısından da evet. Bir tık ilk zamanlar zorlanabilir ama kavradığında ya da ileriki zamanlarda diyecektir. Yani evet ilkökul öğretimi yada ortaokul öğretmenim ya da lise hiç fark etmez. Bana bunun mantığına oturtmuştu. Ben buna ispatlayarak mantığını inerek gerçekten hayatıma geçirerek öğrenmiştim. Öğrenci açısından o yönden iyi olur diye düşünüyorum ama biz sadece çok az kısmında lisede ve üniversitede gördük. Yani bizde de öyle.” ve “Öğrencinin sorgulayıcı rolünü. Hani böyle derin düşünme tefekkür dediğimiz sorgulama rolünü özelliğini ön plana çıkarması gerekiyor. Öğretmen dedi işte **öğretmenin daha çok alan bilgisini ölçecek bir şey**. Hani öğretmen artık sorgulamaya geçti, onları bilmesi gerekiyor. O da alan bilgisiyle alakalı alan bilgisinin yüksek olmasına gerektiriyor. **Öğretmen açısından bakarsak pedagojik bilgisine de ölçer**. şimdi bir 12. sınıf öğrencisine vereceği ispatla bir beşinci sınıf öğrencisine vereceği ispatı aynı düzeyde açıklayamaz. Hani aynı düzeyde açıklaması anlamsız olur. Beşinci sınıf öğrencisi daha belki o seviyeye erişmemiş. Hani daha o olgunlukta değil, o yüzden kimi **kime nasıl anlatacağını da bilmesi gerekiyor**. Pedagojik açıdan öğretmen.” açıklamaları ile ispatın okul matematiğine öğretmenin pedagojik alan bilgisi rolünü ortaya çıkardığını vurgulamışlardır. Benzer şekilde “ÖA_{3.1}: **İspat öğretmenin öğretmen olarak mesela öğretmenin bilgisini, seviyesini, alan bilgisini ölçmek olarak olabilir**. Öğrencinin de konuyu anlayıp anlamadığını tespit etmek için olabilir bence.” ve “ÖA_{3.5}: **İlişkilendirme yönünü bağlantı kurma, ilişkilendirme üstüne ekleme gibi. Öğretmen de ise hani konuya hakimiyetini bence ön plana koyuyor? Ya bence bir öğretmenin alan bilgisini ortaya koyduğunu düşünüyorum.**” açıklamalarından ispatın okul matematiğinde öğretmenler açısından pedagojik alan bilgisi rolünde etkili olduğunu beyan ettikleri anlaşılmaktadır. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{4.5} ve ÖA_{4.6} ise “Bence bir öğrenci ispat yapıyorsa herhangi bir şey keşfedebiliyor. Öğrencinin, keşif, keşfetme özelliğini ortaya çıkarabilmeli. O yönünü çıkarabiliyor. Hani **öğretmenin de daha iyi öğreten, öğretici olduğunu göstermeli**. O yönünü göstermeli yani. Yani öğretmenin aslında şey **pedagojik***

bilgisini ortaya koyar. Öğretmenler hani alan bilgisini ne kadar yeterliyse bunu ispatta da gösterebilmeli. Gösteremiyorsa zaten alan bilgisini de eksik demek.” ve “İspat düzeyleri var bence hocam. Bazı ispatlar öğrenciyi daha aktif hâle getirir. Yani kendisi bir şeyler yapabilir. Bazı ispatlarda direkt olarak hoca verebilir. Bunu belirleyerek aslında ders yapılabilir. Yani orada öğretmen ve öğrencinin rolü ispata göre değişebilir diye düşünüyorum. Hocam ispatı kendisi yapan öğrenci, aslında üst düzeylik rolünü gösterebilir. Öğretmen ise bunu yaparak öğrenmenin aslında alan olarak daha yeterli olduğunu gösterir. Alan bilgisinin yeterliğini gösterir.” açıklamalarında “daha iyi öğretene, alan bilgisi yeterliliği” gibi ifadelerle öğretmen bağlamında ispatın rolünün pedagojik alan bilgisi ile ilişkili olduğunu düşündükleri anlaşılmaktadır. Ayrıca her sınıf seviyesinden en az bir öğretmen adayının ispatın rolüne ilişkin bu görüşü ifade ettiği tespit edilmiştir. Diğer taraftan öğretmen adaylarından sekizi (~%33) matematiksel ispatların okul matematiğinde “matematiksel düşünmeyi geliştirme” rolünü ortaya çıkardığını ifade etmişlerdir. Örneğin; “**ÖA_{1.3}: Sanırım düşüncemizi genişletiyor ya daha çok anlıyoruz ya matematik daha çok matematiksel düşünüyoruz. Öğretmenin çok daha bildiğini onu da anlayıp daha çok iyi anlatabildiğini düşünürüm.**” ve “**ÖA_{1.6}: Öğretmenin işte daha etkili anlatması olabilir. Daha derin bilgiyi daha derin aktarması olabilir. Öğrencinin de eğer soruyu ispatı anlayabilirse çözebilirse daha yaratıcı olduğu düşünülebilir. Daha derin düşünmeye sahip olduğu ortaya çıkar.**” açıklamaları ile “düşünceyi genişletme, matematiksel düşünme, derin düşünme” gibi ifadelerle ispatın matematiksel düşünmeyi geliştirdiğini vurguladıkları tespit edilmiştir. Benzer biçimde “**ÖA_{2.1}: Öğrenciyi düşünmeye sevk ediyor. Mesela verilen bir formül öğretmen verse önce bir sizce bunu nereden geliyor dese öğrenci düşünür yani nereden geliyor olabilir diyoruz. Hani düşünme rolünü daha çok hani düşünme şeyi gücünü iyileştiriyor. Öğretmenin ders anlatırken daha kalıcı olması için ya o da daha öğrenciyi düşünmesi sevk ediyor.**” ve “**ÖA_{2.4}: Şimdi u öğretmenin böyle yapması yani ispatla gitmesi öğretmenin öğrenciyi düşündüreceği düşündürme isteğinin olduğunu gösteriyor. Yani direkt formülü verip şey de diyebilirdi. Hani bunu ezberle yenili sorular çözüm geçin gidin ama ispatı vererek hem formül kalıcılığı döküyor ve çocuğun düşünme düzeyini üst seviyeye çıkartıyor ki çocuk o düşünce sistemiyle zaten formülü buluyor, ispat yöntemiyle dediğinizde. Yani çocuğu düşünmeye sevk ediyor. Böyle bir öğretmen, öğrenci odaklı merkezi bir öğretmen. Öğrenci de tamamen matematiği olan şeyine yani işlem yapabilecek kapasite ve mantığını kavrar, kağıt üstünden olmadığını düşünerek ve belli bir şeyin bir formülün daha öncesinin var olduğunu ve ispatlanabileceğini öğrenmiş olur. Bana**

*ispatı verilseydi bence çoğu formülü unutmazdım.” açıklamaları ile “düşünmeye sevk etme, düşünme düzeyini üst seviyeye çıkarma” gibi ifadelerle ispatın okul matematiğinde öğrencilerin matematiksel düşüncelerini geliştirdiğine vurgu yaptıkları anlaşılmaktadır. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{3.2} ise “**Daha nesnel düşünen bir insan profili yaratabilir, ispat bilmek, ispat öğrenmek, daha soyut düşünen bir insan profili yaratabilir. Soyut nesnel ve hani matematikte biz şey diyoruz ya hep somut olarak öğretiyoruz ama soyutlaştıramadığımız için tam olarak öğrenme sağlayamıyoruz. İspat öğrenimi başladığında ben insanın sosyal hayatında da matematik bilgisinde de daha soyutlaştırıcı yani kısacası zihninin daha matematiksel bir düşünceye geçiş yaptığını düşünüyorum insan zihninin daha matematiksel daha. Ne derler onu soyut düşünebildiğini düşünüyorum.**” açıklaması ile öğrencilerin matematiksel düşünmelerine, soyut düşünebilmelerine vurgu yaparak bu görüşü desteklediği görülmektedir. ÖA_{4.4}’te benzer biçimde “Öğrencinin ve öğretmeni şimdi önce öğrenciden başlayacak olursam, öğrencinin açıkçası konuya en başta hazır bulunuşluk sonra da **konuyu anlama veya konuyu gösterme** kanıtlama nasıl diyeyim yani sürekli aynı kelimeleri kullanıyor gibiyim ama doğru şey çıkartamıyorum aslında. Hani **öğrencinin matematiksel düşüncesini veya matematiksel bilgisini yansıtmaya, geliştirme rollerini ortaya çıkartacaktır. Öğretmeninse matematiği gösterme, yani matematiği anlatma veya matematiği öğrencide ortaya çıkartma rolünü ortaya koyacaktır. Öğretmenin bir nevi pedagojik alan bilgisini ortaya koyar.**” açıklamasında ispatın “öğrencinin matematiksel düşüncesinin yansıtmaya, geliştirme” rollerini ortaya çıkaracağını beyan ettiği tespit edilmiştir. Bu görüşü de her sınıf seviyesinden bir öğretmen adayının vurguladığı görülmektedir. Öte yandan öğretmen adaylarından altısı (~%25) ise ispatın “kavramsal öğrenmeyi destekleme” rolünü ortaya çıkardığını belirtmişlerdir. Örnek olarak; “ÖA_{1.2}: **Düşünebilen kabiliyetli öğrencilere bence ortaya çıkarır. Zeka seviyesi yüksek olan öğrencileri düşünen öğrencileri ortaya çıkarır. Ezber yapmak yerine anlayarak matematik öğrenmeyi sağlar. Kavramları derinlemesine düşünmeyi sağlar. Bu ispatı yapan hocaların da yani iyi matematik mesleğini en iyi şekilde yaptığını gösterir bence. Bence hem öğrencinin kabiliyetini hem öğretmenin öğretme kabiliyeti. Yani kısaca pedagojik alan bilgisi.**” açıklamasında öğrencilerin salt ezber yerine anlamlandırma, derin düşünme ile kavramsallaştırma gibi ifadelerle ispatın kavramsal öğrenmeyi desteklediğini beyan etmişlerdir. Benzer şekilde ikinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{2.3} ve ÖA_{2.5} ise sırasıyla “Aslında ilgisine göre hani ilgili öğrencilerin ilgilendiği noktada **daha derinlemesine bilgi almasını sağlar ispat. İspat sayesinde daha anlamlı öğrenme gerçekleşir neyi niçin***

*yaptığını bilir. Onlar için bir yoldur bence çünkü. Bir şeyin sen ayrıntısına ne kadar girersen yani ayrıntısına götürebilmek için artık orada belli bir heveste olan kişilerle bir arada olman gerekir. Hani? Çünkü matematiği sevmeyen bir öğrenciye sen ispatı vermeye kalkışırsan şöyle de bir noktası var, orada parantez açmak istiyorum. Belki o öğrenci matematiği sevmiyordur ama ispatı gördükten sonra ona göre bir merak duygusu gelişmiş olabilir. O öğrenciye kazanabiliriz. Bir de zaten matematikte iyidir, meraklı ilgilidir o öğrenci. Öğrenci tam anlamıyla o yönde kendini geliştirebilir.” ve “Mesela öğrenci için bazı öğrenciler ezber öğrenen öğrencilerimiz vardır, bazıları da daha çok böyle alt kısımdan kavramaya çalışırlar. Hani **nereden geldiğini öğrenciler konusunda bazıları ezber yapsın ama o ezber yapanlar hemen unuttur, diğerleri de nereden geldiğini anlamadığı için o konuyu geçecektir. Öğrencilere ispat vererek öğrencilerin öğrenme seviyesini yükselterek öğrenmelerini sağlayabiliriz. Öğretmenler için de bence öğrencilerin sordukları soruya daha mantıklı cevap vermeleri açısından ispat önemlidir.**” açıklamalarında bulunarak “derinlemesine bilgi sağlama, anlamlı öğrenme, öğrenme seviyesinin yükseltilmesi” gibi ifadelerle ispatın okul matematiğinde matematiksel öğrenmeyi desteklediğine dair görüşlere sahip oldukları tespit edilmiştir.*

Öğretmen adaylarının ispata ilişkin okul matematiğindeki rol konusundaki görüşleri incelendiğinde, sınıf seviyeleri arasında belirgin bir farklılık olmadığı görülmüştür. Öne çıkan görüşler her sınıf düzeyindeki adaylar tarafından dile getirilmiştir. Örnek olarak, “öğretmenin pedagojik alan bilgisi” vurgusu farklı sınıflardan birçok öğretmen adayı tarafından ifade edilmiş; benzer şekilde “matematiksel düşünmeyi geliştirme” görüşü de tüm sınıf seviyelerinde dile getirilmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının ispata yükledikleri rolün sınıf düzeylerinden bağımsız biçimde ortaklaştığını ve özellikle pedagojik katkı ile düşünme becerilerini geliştirme işlevine odaklandıklarını göstermektedir.

4.1.6. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın verilmesi gereken sınıf seviyesine dair görüşleri

Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın daha iyi anlamlandırılması ve konumlandırılması için verilmesi gereken sınıf seviyesine ilişkin görüşlerini almak için öğretmen adaylarına “Öğrenenlerin okul matematiğinde ispatı daha iyi anlamlandırabilmesi ve konumlandırabilmesi adına hangi sınıf seviyelerinde karşılaşmaları gerektiğini düşünüyorsunuz? Nedenleriyle açıklayınız.” sorusu yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının

ispatın daha iyi anlamlandırılması ve konumlandırılması için verilmesi gereken sınıf seviyelerine ilişkin görüşleri Tablo 4.6’da sunulmuştur.

Tablo 4.6. Öğretmen adaylarının ispatın verilmesi gereken sınıf seviyelerine ilişkin görüşleri

Tema	Kategori	Kod (Frekans)	Öğretmen Adayları
İspatın Eğitim Kademelerinde Konumlandırılması	Erken Dönem Öğretimi	Erken Yaşlar (4) İlkokul (7)	ÖA _{1.5} , ÖA _{2.3} , ÖA _{3.4} , ÖA _{4.5} ÖA _{3.1} , ÖA _{3.2} , ÖA _{3.4} , ÖA _{3.6} , ÖA _{4.2} , ÖA _{4.3} , ÖA _{4.4} , ÖA _{4.6}
	Orta ve Üst Kademedeki Öğretim	Ortaokul (10)	ÖA _{1.2} , ÖA _{1.3} , ÖA _{2.1} , ÖA _{2.2} , ÖA _{2.4} , ÖA _{2.5} , ÖA _{2.6} , ÖA _{3.3} , ÖA _{3.6} , ÖA _{4.1}
		Lise (3)	ÖA _{1.1} , ÖA _{1.4} , ÖA _{1.6}
	Bilişsel Uygunluk ve Konu Derinliği	İlerleyen Konular (1)	ÖA _{1.1}
Öğrencinin Hazırbulunuşluk Düzeyine Göre İspatın Zamanlaması	Öğretimde Kademeli Yaklaşım	Soyut Matematiğe Geçiş (5)	ÖA _{1.2} , ÖA _{2.2} , ÖA _{3.1} , ÖA _{3.3} , ÖA _{4.3}
		Sürekli ve Kademeli Olarak (3)	ÖA _{2.6} , ÖA _{4.5} , ÖA _{4.6}

Tablo 4.6’da öğretmen adaylarının matematiksel ispatı öğrencilerin daha iyi anlamlandırmaları adına verilmesi gereken sınıf seviyesine ilişkin görüşleri yer almaktadır. Öğretmen adayları ispatın “ortaokul, ilkokul, erken yaşlar, soyut matematiğe geçiş, lise” aşamalarında verilmesinin uygun olacağını belirtmişlerdir. Tablo 4.6’dan da görüleceği üzere matematiksel ispatın okul matematiğinde daha iyi anlamlandırılması ve konumlandırılması adına öğretmen adaylarının 10’u (~%42) “ortaokul” seviyesinde verilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Örnek olarak; “**ÖA_{1.2}**: Bence **ortaokulda** verilmesi lazım ya neden en uygun ortaokul? Çünkü **matematiğin temelleri** orada atılıyor. Yani bence **en önemli yer ortaokul**. Yani ilkokulda zaten hatırladığım kadarıyla bize ispat yaparken somut olarak gösteriyorlar. Toplama çıkarma olduğu için soyut matematiğe geçmeyiz. Somut matematikte kalıyor ama **ortaokulla birlikte yavaş yavaş soyut matematiğe de geçiliyor**. Ondan bence ispat önemli oluyor ondan derim.” ve “**ÖA_{1.3}**: Yani belki **beşinci sınıftan başlansa** ufak ufak çok daha iyi olacağını düşünüyorum. Şimdi toplama çıkarma çarpmayı dördüncü sınıfa kadar ancak öğreniyorlar bence. Yani gözlemlediğim kadarıyla kardeşim de o yüzden hani belki beşten önce olacağını düşünmüyorum. Ancak işte nesnelerle toplamayı falan anca o zaman (beşten öncesini kastederek) yani öğrenebiliyorlar ya da

bana öyle geliyor.” Açıklamaları ile ispatın öğrenciler tarafından daha iyi anlamlandırılabilmesi için ortaokul seviyesinden itibaren verilmesi gerektiğini beyan ettikleri tespit edilmiştir. Benzer biçimde ikinci sınıf öğretmen adaylarından “**ÖA_{2.2}: Şimdi ilkokula belki inemeyiz ama ortaokulda tam sayıları araştırken işlemler yaparken rasyonel sayılarla işlemler yaparken hep böyle modellerle gösterirsek materyal kullanırsak, hani bunları bir tık daha ispata yatkın hale getirebiliriz. Yani onlarla ispatlayabiliriz aslında bir nevi ilkokuldan veremeyiz. Şimdi öğrenci ilkokulda daha hani sayılarla arasındaki ilişkiyi soyuttan somuta geçirdiği için hani sanki materyalle öğrendiği olayı yazıya geçirebilir mi acaba? Onu düşündüm. Hani ikisi de onda ayrı kalabilir mi? Geri birleştiremeyebilir diye düşündüm. Mesela tümdengelim metodu kullansak bir öğrenci de o parçaları ayrı ayrı belki anlar ama birleştirdiğinde hani sentezleyemez belki diye o yaşından dolayı. Yani birden fazla duyuya hitap edecek videoyla dediğim gibi materyallerle desteklenirse elbette ki ilkokulda da yapılabilir ama ben hani ortaokul olarak düşündüm.**” ve “**ÖA_{2.6}: Ya şimdi kesin bir ayırım yapmama gerekiyor. En azından ilkokuldan daha çok çocuk sayılarla falan tanışıyor. Orada çok bir ispata girilmez. Sadece mantığı anlatılabilir ama ortaokuldan itibaren kademe kademe arttırılacak şekilde başlanması mantıklı olur. Hani beşinci sınıfta üzerinden basit şey geçip altıda biraz daha inceleyip yedi biraz daha sekize biraz daha artarak yaptırmak hem lise için bir temel oluşturur. Bu kez lisede daha üst düzey ispatlara anlamakta zorluk yaşamaz. Öğrenci hem de ortaokulda da neyini yaptığını hani temelini sağlam oluşturur. Yani beşinci sınıftan itibaren azar azar verilebilir. 1-2-3-4 te de verilebilir var şöyle onda da çok hani materyal kullanarak ya da normal yaşamdan örnekler verilerek de ispatlıyorlar. Hani bu da sonuçta bir ispat oluyor. Yani dediğim gibi aslında her öğrenme yaşında. Öğrencinin yaşına uygun olacak düzeyde sürekli verilebilir.**” yaptıkları açıklamada ortaokul seviyesinde öğrencilerin matematiğin temelini attıkları, daha iyi anlamlandırma yapabildikleri gibi nedenlerden dolayı ispatın o seviyede verilmesinin daha uygun olduğunu belirtmişlerdir. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{3.6}** ise “**Dördüncü sınıfta yeni işlemler zaten görülüyor. Bence beşinci sınıftan itibaren verilebilir. Bi de dördüncü sınıf yani öyle elle tutulur ispata dayalı bir konu yok bence o yüzden. Yok mesela u daha somut olursa öğrenciler o ispatı daha kolay anlayacaktır. O yüzden biraz daha konu beşinci sınıfta daha fazla bence ispata yönelik konu var diye beşinci sınıftan bak başlanmalı. Mesela sıfırın ya da birin ya da 1/2 hissini kazandırılması falan. Hani onlar biraz daha soyut bence. Bunlar daha zor. Somut olarak mesela pisagor ispatı, onlar biraz daha somut diye düşünüyorum ben.**” benzer açıklamalar yaparak beşinci sınıf seviyesinin ispata daha uygun olduğunu ifade

ederek bu sınıf seviyesinden itibaren verilmesi gerektiğini beyan etmiştir. **ÖA_{4.1}** ise ispatın ortaokulda verilmesi gerektiğini destekleyici “*Bence ispat üslû sayı kavramı ve şey değinirsek aslında altıncı sınıf ya da yedinci sınıftan başlamalı diye düşünüyorum hocam. Çünkü hocam bilişsel düzey olarak şu anki durumu konuşuyorum. Pandemiden dolayı şu an öğrenciler konularda çok eksikler. Ben şu an staja da gidiyorum. O yüzden öğrenciler daha çarpım tablosunu bilmiyor. Beşinci sınıftaki bir öğrenci pandemiden kaynaklanan çok büyük sorunlarımız var. Şu an hocam eğitimde o eksikler bir türlü kapatamadık ve bu eksiklikler hocam ispatı da etkiler. Yani şu an biz mesela beşinci sınıf öğrencilerine ispat yapmamız biraz daha zor olur. Ama altıncı sınıf öğrencileri onlar en azından belli bir temelle belli bir seviye aldıkları için hocam en azından şu an ki durum için altıncı ve yedinci sınıf seviyesi uygun diye düşünüyorum hocam. Ama şu anki pandemi durumu olmasa normal şartlarda hocam dörtten sonra beşinci sınıfta öğrenciler biraz daha kendini nasıl diyeyim hocam öğrencilerin zihni açık her şeyi düşünebiliyorlar. Hocam bir şeyin neden böyle olduğunu aslında açıklayabiliyorlar. Yani zihinleri her türlü gelişimi açıklar. Hocam ve öğrencilerin zihinsel yapıları bir büyüğünden çok daha iyi olabiliyor. Çok farklı düşünceler olabiliyor. Bizim özellikle bazı öğretmenler buna engel oluyor. Öğrencilerde ama biz fark ediyoruz ki hocam bazı kişiler çok farklı. Zihinsel süreçler yani bir şeyi tartışırken ya da bir şeyi anlatırken bir problemi çözerken çok farklı stratejiler çok farklı yöntemler kullanabiliyorlar. Bu da hocam onların ispat yeteneklerini de aslında bir nevi olabileceğini düşündürtmüyor değil hocam.*” açıklamasında bulunmuş olup beşinci sınıftan itibaren öğrencilerin ispatı yapabileceklerine dair düşünme yapısına sahip olduklarını ifade etmiştir. Diğer taraftan öğretmen adaylarından yedisi (~%29) ispatın “ilkokul” seviyesinde verilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Örneğin; “**ÖA_{3.1}**: Öncelikle tabii ki de temel oluşturmak için, matematik için **ilkokuldan** ama mesela biz ortaokulda daha çok gördüğümüz için **dört bence en önemli sınıf seviyesidir**. Çünkü dörtte böyle tam olarak matematiği soyut somut böyle ikisi birleştirmek aslında çok böyle uç bir şeydir. Onu yakalamak için ispat kullanmak önemlidir bence. Soyuttan somuta aynen onu anlamlandırmak için önemli olabilir.” ve “**ÖA_{3.4}**: Açıkçası, yani benim görüşüme göre okul öncesinden zaten aslında veriyoruz. Hani o sıralama yaparken işte hangi arkadaşınız daha büyük, hangi sayıda büyük. Onları işte nesnelerle gösterirken ispat yapıyoruz. Hani ama yine dediğim gibi ne yaptığını bilmediği için ispata girmiyor. Ama **bence ilkokuldan başlaması gerekiyor**. Ya tabiki böyle büyük büyük ispatlar değil. Basit düzeyde ispatları verebiliriz.” açıklamalarında ispatın ilkokul seviyesinde verilmeye başlanması gerektiğini savunmuşlardır. Benzer şekilde dördüncü sınıf

öğretmen adaylarından **ÖA_{4.4}** ve **ÖA_{4.6}** ise sırasıyla “Hocam şimdi konusuna göre değişebileceğini düşünüyorum. Misal kesirler konusundan direkt başlayayım. Kesirler konusu bildiğimiz gibi müfredatta ikinci sınıftan itibaren başlayan bir konu ama tabi biraz farklıdır. Misal ikinci sınıfta bütün yarım çeyrek kavramlarını öğreniyor. Üçüncü sınıfta bütün kesir veya tam kesir yarım kesir çeyrek kesir öğreniyor. Öğrenciye aslında üçüncü, hatta dördüncü sınıftan itibaren desem daha iyi olur. Çünkü dördüncü sınıfta tam olarak oturuyor. **Dördüncü sınıfta kesirler konusu için bir kanıt çalışmasına başlanabilir.** Misal bir bütünü. Birde bir kez içine denk geldiğini veya üçte 3 kere denk geldiğini, öğrencinin farklı yollarla gösterebilmesi istenebilir ve bu da bir ispat olabilir. **Öğrencinin modelleyerek ve ilişkilendirerek bir ispat yapmasını istenebilir.** Direkt ispat diyerek değil. Tabii ki öğrenciden bunu bize göster diyerek gösterebiliriz veya yarımın. Yani şimdi bahsettiğim gibi konusuna göre değişeceğini savunduğum için birinci, ikinci ve üçüncü sınıflarda hani öğrenciler dahi sayılarla tanışma veya işlemlerle tanışma işlemleriyle. Çalışmalarıyla karşılaştığı için sanmıyorum. Birinci ikincisi üçüncü sınıfta değil hani. **Dördüncü sınıfın ideal olacağını düşünüyorum.**” ve “Yani hocam mesela ispatlar vardır ki 2 tek sayının toplamı çifttir. Bunu bence **dördüncü sınıftan** başlatılıp verilebilir diye düşünüyorum, hatta en daha basit ispatlar var. Örneğin işte 2 sayının toplamı budur tarzında. Bunlar hepsi aslında bazı durumlarda ispatmış gibi geliyor. Yani her düzeye uygun ispat olduğuna olduğunu düşünüyorum. **Yani her düzeyde verilebilir ama ilkokuldan itibaren verilmesi en uygun.**” yaptıkları açıklamalarda ispatın ilkokul seviyesinde verilmeye başlanması gerektiğini ifade etmişlerdir. Öte yandan öğretmen adaylarından beşi (~%21) ispatın okul matematiğinde daha iyi anlamlandırılması ve konumlandırılmasını sağlamak için “soyut matematiğe geçiş” aşamasında verilmesinin gerekli olduğunu beyan etmişlerdir. Örneğin, **ÖA_{1.2}**: “Bence ortaokulda verilmesi lazım ya neden en uygun ortaokul? Çünkü matematiğin temelleri orada atılıyor. Yani bence en önemli yer ortaokul. **Yani ilkokulda zaten hatırladığım kadarıyla bize ispat yaparken somut olarak gösteriyorlar. Toplama çıkarma olduğu için soyut matematiğe geçmeyiz. Somut matematikte kalıyor ama ortaokulla birlikte yavaş yavaş soyut matematiğe de geçiliyor.** Ondan bence ispat önemli oluyor ondan derim.” açıklaması ile ortaokulda soyut matematiğe geçiş sağlandığından ispatın soyut matematiğe geçilmesi ile verilmesi gerektiğini belirtmiştir. Benzer şekilde **ÖA_{2.2}** ise “Şimdi ilkokula belki inemeyiz ama ortaokulda tam sayıları araştırırken işlemler yaparken rasyonel sayılarla işlemler yaparken hep böyle modellerle gösterirsek materyal kullanırsak, hani bunları bir tık daha ispata yatkın hale

getirebiliriz. Yani onlarla ispatlayabiliriz aslında bir nevi ilkokuldan veremeyiz. **Şimdi öğrenci ilkokulda daha hani sayılarla arasındaki ilişkiyi somuttan soyuta geçiremediği için hani sanki materyalle öğrendiği olayı yazıya geçirebilir mi acaba?** Onu düşündüm. Hani ikisi de onda ayrı kalabilir mi? Geri birleştiremeyebilir diye düşündüm. Mesela tündengelim metodu kullansak bir öğrenci de o parçaları ayrı ayrı belki anlar ama birleştirdiğinde hani sentezleyemez belki diye o yaşından dolayı. Yapılabilir, yani birden fazla duyuya hitap edecek videoyla dediğim gibi materyallerle desteklenirse elbette ki ilkokulda da yapılabilir ama ben hani ortaokul olarak düşündüm. **Çünkü orada somuttan soyuta geçebilir öğrenci.**” açıklaması ile ispatın soyut matematiğe geçiş zamanında verilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından $\text{ÖA}_{3,1}$ ve $\text{ÖA}_{3,3}$ ise sırasıyla “Öncelikle tabii ki de temel oluşturmak için, matematik için **ilkokuldan** ama mesela biz ortaokulda daha çok gördüğümüz için **dört bence en önemli sınıf seviyesidir**. Çünkü dörtte böyle tam olarak **matematiği soyut somut böyle ikisi birleştirmek** aslında çok böyle uç bir şeydir. Onu yakalamak için ispat kullanmak önemlidir bence. Somuttan soyuta onu anlamlandırmak için önemli olabilir.” ve “Bence **sekizinci sınıftan itibaren**. Ortaokul sekizden itibaren başlanması gerek. Belki **beş, altı ve yedide çok hani somut dönemde olduğu için öğrenciler çok soyut düşünemiyor**. O yüzden o dönemde verilmesi belki biraz öğrenci zorla zorlayabilir.” açıklamalarında bulunarak “somuttan soyuta geçiş, soyut düşünme” gibi ifadelerle soyut matematiğe geçildiğinde ispatın verilmesinin gerektiğini vurgulamışlardır. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından $\text{ÖA}_{4,3}$ ise benzer biçimde “İspatlar genelde genellemeden yapılıyor ya bence cebirsel ifadeler altıncı sınıftan sonra görülmeye başlıyor. Bunun içinde öğrencinin biraz daha **soyut düşünebilmesi** gerektiğini düşünüyorum. Altıncı sınıftan sonra verilmeli diye düşünüyorum. Hocam, çünkü biz şey Muhammed fatih hoca'yla da yapıyoruz. Genellemeler cebirsel ifadeler. **Öğrenciler artık altıncı sınıfta x li ifadeler y'li ifadeleri altıncı sınıftan sonra görmeye başlıyorlar**. Orada da zaten örüntüler konusunu öğrenciler işliyorlar. Altıncı sınıftan sonra görebilirler bence hocam. Aslında hocam **x li y li ifadeler yerine şey de koyabiliriz, semboller de koyabiliriz**. Aslında önceden de başlanılabilir. Çünkü x yerine bir kutu koyar. Hatta biz okulda işlediğimizde öğrenciler örüntülere de genelleme yapıyorlar. Yani biraz daha alt seviyeden de başlanabilir ama **soyutlama yapması lazım**.” yaptığı açıklamasında “doğut düşünme, soyutlama yapma” gibi ifadelerde bulunarak ispatın soyut matematiğe geçişte verilmesinin uygun olduğunu düşündüğü ortaya çıkmaktadır. Ayrıca dört (~%17) öğretmen adayının ispatın “erken yaşlar”da verilmesi gerektiğini belirttiği görüşleri de dikkat çekmektedir.

Örnek olarak; “ÖA_{1.5}: Bence bir öğrenciye yani **nereden başlasa o zaman hani nasıl anlattığına bağlı**. Aslında o biraz mesela birinci sınıf bir öğrenciye bir şeyi hani bilmiyor o zaman hani ikide desek **matematikle tanıştığı zaman** desek ispatla anlatsa yine orada ilgisini çeker.” açıklamasında “matematikle tanıştığı zaman” diyerek erken yaşları kastettiği düşünülmektedir. İkinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{2.3} ise “Yani bunu ortaokul, lise üniversite bazında da düşünebilirse beşinci sınıf yedinci sınıf sekizinci sınıfta edilebiliriz yani. Ya aslında bence bu hani şuan müfredatın hangi seviyede, hangi sınıfta, hangi müfredat içeriği olduğunu hakim değilim. Daha hani o dersleri almadık ama yani normal bir çocuk eğitiminden yaklaşacak olursam bence. Yani **algısı artık gelişmeye başladıktan sonra** çocuk 6-7 yaşları da olabilir. Yani onun algıladığı şekilde bir şeylerin neden nasıldığını da vererek yani aslında orada da bence ispata girilmiş olur. Yani 6 yaşlarında da sen eğer bir şey söylüyorsan doğru bu diyorsan neden doğru olduğunu da açıklıyorsan bir ispattır. **Yani algılayabildiği en erken dönemde bence ispatla eğitmeliyiz. Yani okul öncesinde bile verilebilir, verilmeli.**” açıklamasında “matematiği algılamaya başladığı en erken dönem, okul öncesi, 6-7’li yaşlar” ifadeleriyle ispatın erken yaşlarda verilmesi gerektiğini belirtmiştir. Benzer şekilde “ÖA_{3.4}: Açıkçası, yani benim görüşüme göre **okul öncesinden** zaten aslında veriyoruz. Hani o sıralama yaparken işte hangi arkadaşınız daha büyük, hangi sayıda büyük. Onları işte nesnelerle gösterirken ispat yapıyoruz. Hani ama yine dediğim gibi ne yaptığını bilmediği için ispata girmiyor. Ya tabiki böyle büyük büyük ispatlar değil. Basit düzeyde ispatları verebiliriz.” açıklamasında okul öncesi ifadesi ile erken yaşlara vurgu yaptığı görülmektedir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{4.5} ise “Ben de hani **her sınıf seviyesinden itibaren verilmeli** zaten **ana sınıfından bile verilmeli** ama bu hani bizim bildiğimiz göre harflendirmelerle ya da ne bileyim o tarzda ispatlarla değil de hani etkinlik yoluyla olabilir, sembollerle olabilir. O seviyeden itibaren verilebilmeli. Yani ispatlar, hani illa teorem ve eşittir işte bu buyusa işte bunun olduğunu göstereyim şeklinde değil de hani etkinlik olarak verilebilir yani böyle nasıl söyleyeyim, sembollerle kutular çizerek. Verilebilir **yani ana sınıfından itibaren.**” açıklamasında anasınıfından itibaren ifadesi ile ispatın erken yaşlardan itibaren verilmesi gerektiğini düşündüğü tespit edilmiştir.

Bulgular, öğretmen adaylarının ispata hangi seviyede yer verilmesi gerektiğine ilişkin görüşlerinde sınıf düzeylerine bağlı bir farklılık olmadığını ortaya koymaktadır. Tüm sınıf seviyelerinden adayların en sık dile getirdikleri görüş, ispatın ortaokulda verilmesi gerektiğidir. Bunun yanında, özellikle birinci, ikinci ve dördüncü sınıftan bazı öğretmen adayları ispata “soyut matematiğe geçiş” aşamasında yer verilmesinin uygun olacağını

belirtmişlerdir. Ayrıca her sınıf seviyesinden birer aday, ispata daha erken yaşlarda başlanması gerektiğini vurgulamıştır. Bu durum, farklı sınıflardaki öğretmen adaylarının benzer görüşleri paylaştığını, ancak gerekçelendirme boyutunda farklı vurgu ve önceliklere sahip olduklarını göstermektedir.

4.1.7. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın özelliklerine dair görüşleri

Öğretmen adaylarının geçerli ve kabul edilebilir ispatın özelliklerine ilişkin görüşlerini almak için öğretmen adaylarına “Bir ispat sizin için hangi durumlarda geçerli ve kabul edilebilirdir? Hangi özellikleri barındırmalıdır? Bir ispatın doğru olup olmadığına nasıl karar verirsiniz?” soruları yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının kabul edilebilir ve geçerli bir matematiksel ispatın özelliklerine ilişkin görüşleri Tablo 4.7’de sunulmuştur.

Tablo 4.7. Öğretmen adaylarının geçerli ve kabul edilebilir ispatın özelliklerine ilişkin görüşleri

Tema	Kategori	Kod	Öğretmen Adayları
Mantıksal Tutarlılık ve Matematiksel Yapıya Uygunluk	Doğruluk ve Tutarlılık	Sonucun/İşlemlerin Doğru Olması (4)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₃₁
		Tutarlı Olması (4)	ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₆ ,ÖA ₃₅
		Mantıklı Olması (9)	ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₂₅ ,ÖA ₃₁ ,ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₃ ,ÖA ₃₄ ,ÖA ₃₆
		Tanımlı Olması (1)	ÖA ₁₆
		Sonuca Ulaştırması (1)	ÖA ₂₆
		Önceki Bilgilerle Çakışmaması (2)	ÖA ₂₃ ,ÖA ₃₅
		Kesinlik İçermesi / Çelişki Olmaması (2)	ÖA ₂₆ ,ÖA ₃₂
		Matematiksel Kurallara / Kavramlara Uygun Olması (4)	ÖA ₂₂ ,ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₅ ,ÖA ₃₆
		Cebirsel İfadeler İçermesi (3)	ÖA ₂₄ ,ÖA ₄₄ ,ÖA ₄₆
		Matematiksel Temellere Dayanması (2)	ÖA ₃₅ ,ÖA ₃₆
	Matematiksel Uygunluk	Hiyerarşik Yapıya Sahip Olması (2)	ÖA ₂₃ ,ÖA ₂₄
		Birden Fazla Çözüm Yolu İçermesi (1)	ÖA ₂₂
	Matematiksel Esneklik ve Alternatif Yaklaşım		

Tablo 4.7. (Devamı) Öğretmen adaylarının geçerli ve kabul edilebilir ispatın özelliklerine ilişkin görüşleri

Tema	Kategori	Kod	Öğretmen Adayları
Anlaşılabilirlik, Açıklık ve Öğrenme Sürecini Destekleyici Sunum	Açıklık ve Anlatım	Açıklayıcı Olması (3)	ÖA ₁₂ , ÖA ₁₃ , ÖA ₃₃
		Anlaşılır Olması (8)	ÖA ₁₁ , ÖA ₁₃ , ÖA ₁₅ , ÖA ₂₁ , ÖA ₂₄ , ÖA ₂₅ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₅
		Tanımlı Olması (1)	ÖA ₁₆
		Maddeler Halinde / Düzenli Yazılmış Olması (7)	ÖA ₁₁ , ÖA ₁₂ , ÖA ₁₃ , ÖA ₂₁ , ÖA ₂₄ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₆
		Anlamlı Olması (1)	ÖA ₄₅
	Örnekleme Genelme Yoluyla Kavramsallaştırma	Doğru Örneklerin / Değişkenlerin Kullanılması (2)	ÖA ₃₂ , ÖA ₄₂
		Aksine Örnek İçermesi / İçermemesi (4)	ÖA ₂₁ , ÖA ₄₁ , ÖA ₄₂ , ÖA ₄₅
		Genelleştirilebilmesi (2)	ÖA ₃₄ , ÖA ₄₆
		Amacı Olması (1)	ÖA ₃₃
		Tüm Durumlar İçin Geçerli Olması (5)	ÖA ₄₂ , ÖA ₄₃ , ÖA ₄₄ , ÖA ₄₅ , ÖA ₄₆
Geçerlilik, Güvence ve Kabul Edilebilirlik	Destekleyicilik ve Güvence	Tecrübeli/Uzman Kişilerin Onaylamış Olması (4)	ÖA ₁₁ , ÖA ₁₄ , ÖA ₂₅ , ÖA ₃₃
		Evrensel Olması (2)	ÖA ₁₆ , ÖA ₄₁
		Başka Konularla İlişkilendirilmesi / Desteklenmesi (1)	ÖA ₁₄

Tablo 4.7’de öğretmen adaylarının geçerli ve kabul edilebilir matematiksel ispat bir ispatın özelliklerine ilişkin görüşleri yer almaktadır. Öğretmen adayları geçerli ve kabul edilebilir ispatın “mantıklı olması, anlaşılır olması, maddeler halinde/düzenli yazılmış olması, tüm durumlar için geçerli olması, tutarlı olması, sonucun/işlemlerin doğru olması, matematiksel kurallara/kavramlara uygun olması, tecrübeli/uzman kişilerin onaylamış olması” gibi özelliklere sahip olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Tablo 4.7’den de görüleceği üzere öğretmen adaylarından dokuzu (~%38) geçerli ve kabul edilebilir bir matematiksel ispatın “mantıklı olması” gerektiğini belirtmişlerdir. Örnek olarak “ÖA_{1.2}: Ben söylerim, bu nereden geliyor bu buradan geliyor diyor. Her şeyi yerli yerinde yani bunun sonucu gösterir. Ben nedenini sorduğumda oda bu dediğinde benim için geçerlidir yani. Yani açıklaması olacak. Tutarlı olacak. Düzenli olacak o tarz bir şey. **Mantığa uygun olacak.**” ve “ÖA_{1.5}: Yani **aklıma yatıyorsa** hani sonucu veriyorsa **mantıklı yollarda gidiyorsa hatası yoksa** benim için geçerlidir. Bir ispatın benim için böyle yani **mantıklı**

olması gerek ya en başta sonuca ulaştırması gerek. Sonuca geçirirken hani mantıklı olması gerek. Her şekilde her yere baktığımda bu neden burada nasıl, niye böyle yapmış bunu anlamam gerekiyor” açıklamalarında “mantığa uygun olması, mantıklı yollardan gitmesi” gibi ifadelerle geçerli ve kabul edilebilir bir ispatın ölçütlerinden birinin mantıklı olması olarak nitelendirdikleri tespit edilmiştir. İkinci sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{2,5}** ise “Yani **mantıklı gelmesi gerekiyor**. Önce tamam ya da nereden geldiğini bilmemiz gerekir. Kural teori verildiği zaman hani o ispatı yaptığımız zaman o şeyler yaparız, bilinmeyenler falan tam olarak gösterilmeli. Hani ben anlamalıyım bunu. Açık anlaşılır bir dili olması lazım. Yani bir de kabul edilirliliği yüksek olmalı. Çoğu bilim insanı ya da profesör tarafından onaylanmış olmalı. açık ve anlaşılır olmasına bakarım. Bir de bilmiyorum seviyeye göre değişir. Ben çoğu şeyi anlayabilecek şeydeyim. Hani çoğu kavramı bir matematiksel kavramlarımız vardır ya bizim ya onlardan anlarım da hani atıyorum bir ortaokul ya da lise seviyesindeki bir öğrenci anlamayabilir. **Onların seviyesine uygun kavramlar kullanıldığı zaman mantıklı gelir.**” açıklamasında ispatın mantıklı gelmesinin kendisi için geçerli ve kabul edilebilir ölçütü olduğunu beyan etmiştir. Benzer şekilde **ÖA_{3,1}** ve **ÖA_{3,4}** sırasıyla “O ispatı benim anlamam gerekiyor. Öncelikle anlaşılır ve ispatın düzenli, tane tane yazılması benim için yani uygundur. Yani böyle daha hem anlaşılır için hem böyle çözümün açıklığı için benim için uygundur. Yani doğru sonuçta tabi ki de önemli. Tabi ki belli bir mantık, belli bir doğru bir süreç. Sonuç sonucun benim için **mantıklı olması** tabi ki de olması gerekiyor. Aynı şeyler yani dediğim gibi tane tane böyle ispatın hem **bir mantık çerçevesinde** hem bir anlaşırılık çerçevesinde olması gerekiyor hem de çözümün öğrenci için yani tamam bu çözüm doğru ben anladım diyebilecek bir şekilde olması gerekiyor.” ve “Öncelikle biraz şey olacak ama değişken verdiğimde sağlaması gerekiyor. Yani en az bir iki örnek verdiğimde onu sağlaması gerekiyor. Aynı şekilde böyle o sembolün yada ispatın. Böyle düşündüğüm zaman **mantığıma yatması** gerekiyor ya. Evet, gerçekten de böyle olması gerekiyor. Örnekte de yaptım. Evet, bu formül bunun ispatı böyle olduğunda oluyor demem gerekiyor. Bir kere genelleştirmeye açık olması gerekiyor yani mesela x 'e bir verdiğimde de oluyor x 'e 100 verdiğimde de oluyor hani yani tek bir örnekle değil de örnekleri genelleştirme olması, **mantığa uygun olması** yeterli gibi.” yaptıkları açıklamalarda “bir mantık çerçevesinde, mantığıma yatması, mantığa uygun olması” gibi ifadelerle geçerli ve kabul edilebilir bir ispatın özelliği olarak mantıklı olmasına vurgu yapmışlardır. Diğer taraftan öğretmen adaylarından sekizi (~%33) geçerli ve kabul edilebilir bir matematiksel ispatın “anlaşılır olması” gerektiğini beyan etmişlerdir. Örneğin; “**ÖA_{1,3}**: Ya ispatta olması gereken özellikler

açıklayıcı bir şekilde hani işlemleri anlaşılır olması muhtemelen anlaşılır bir şekilde tek tek yazıldıysa o zaman kabul edilir.” ve “ÖA_{1.5}: Yani aklıma yatıyorsa hani sonucu veriyorsa mantıklı yollarda gidiyorsa hatası yoksa benim için geçerlidir. Bir ispatın benim için böyle yani mantıklı olması gerek ya en başta sonuca ulaştırması gerek. Sonuca geçirirken hani mantıklı olması gerek. Her şekilde her yere baktığımda bu neden burada nasıl, niye böyle yapmış bunu anlamam gerekiyor” açıklamalarında ispatın anlaşılır olması yönüne vurgu yaptıkları tespit edilmiştir. Benzer şekilde ÖA_{2.1} ve ÖA_{2.4} sırasıyla “O verilen formülün herşeyini şöyle diyeyim ispatın, yanlışlığını ortaya çıkaracak bir şey yoksa yanlışlayan bir sayı mesela yoksa o ispat geçerlidir benim için. Yani o zaman o aksine ispata örnek, yani görmemişsek kabul eden eğer ama bir kişi gördü diyelim, ortaya çıkar der. Bence bu ispat yanlış der. O yüzden o ispatsa bir ispat için. O yüzden bence bir çok görüş alınması daha iyi olur. Çünkü bizim göremediğimiz şeyi başka bir kişi görebiliyor o yüzden. Orası öyle ama mesela benim önüne konulan ispatla ben aksine bir örnek göremediğim sürece o ispat mesela yanlış bir ispat da olsa benim için doğrudur. **Net olmalı, açıklayıcı olmalı, belirsizlikler olmamalı.** Yani tüm her şey hangi işlemler yapılmışsa düzenli **açık ve net bir şekilde** orada yazılmalı. **Açık ve anlaşılır.**” ve “Benim için hocam dört işlem yapılan şeyler atıyorum, bir ritmik var örüntü var. Orada böyle böyle gidiyorsun ritmik olarak. bir kare verdiğinizde onu bilinmeyen olduğu için de başka bilinmeyenler katarak ya da bilinmeyenin değerini değiştirerek denediğimizi yine oluyorsa bu benim için doğru bir şeydir ispattır bence öyle. Yani değişken değiştirme ve örüntüde sayı değerleriyle değişmiyorsa ve bir örüntü oluşturuyorsa bence bu doğrudur. Cebirsel olması da benim için geçerli ve kabul edilebilir. Hocam öncelikle **açık olmalı.** Yani **karmaşık olmamalı**, adım adım olmalı çünkü formülü vereceğiz. O yüzden ispatı adım adım yapmalı, **basitçe yapmalı olabildiğince açık anlaşılır olmalı**, bir de fazla da abartılmamalı yani küçük değerlerden başlamalı. Bence $n=1$ gibi yine tümevarım yöntemlerden örnek vereceğim ama.” açıklamalarında bulunarak “açık, anlaşılır olması, belirsiz olmaması, karmaşık olmamalı” gibi ifadelerle ispatın anlaşılır bir şekilde yapılması özelliğini öne çıkarmışlardır. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından “ÖA_{3.1}: O ispatı benim anlamam gerekiyor. Öncelikle **anlaşılır ve ispatın** düzenli, tane tane yazılması benim için yani uygundur. Yani böyle daha hem anlaşılır için hem böyle çözümün açıklığı için benim için uygundur. Yani doğru sonuçta tabi ki de önemli. Tabi ki belli bir mantık, belli bir doğru bir süreç. Sonuç sonucun benim için mantıklı olması tabi ki de olması gerekiyor. Aynı şeyler yani dediğim gibi tane tane böyle ispatın hem bir mantık çerçevesinde hem bir **anlaşırılık çerçevesinde olması** gerekiyor hem de çözümün öğrenci için yani tamam

bu çözüm doğru ben anladım diyebilecek bir şekilde olması gerekiyor.” ve “ÖA_{3.5}: “Buna karar verme şeklim ya genelde soruda tarzını düşünürsek hani bunların hepsi bir geçmişe dayalı ispatlardan üstüne ispat çıkıyor. Hani buradan bu geliyor. O yüzden bunu buraya yerleştirdim. Şuradan şu geldi. O yüzden bunu buraya yerleştirdim. Geçmişteki ispatları doğru bir şekilde kullanılırsa bence o ispatın çıkan sonuçta doğruysa eğer bence yapılan ispat doğrudur. Temellere dayandırılmalı. Temeller dediğim geçerli kabul ettiğimiz matematiksel temeller bunlara dayanandırılmalı, bulduğumuz sonuç tutarlı olmalı. Yaptığımız işlemlerin tutarlı olması mı gerektiğini düşünüyorum. Aynı zamanda **anlaşılır olmalı.**” açıklamalarında benzer biçimde “anlaşılabilirlik çerçevesinde olması, anlaşılır olması” gibi ifadelerle geçerli ve kabul edilebilir ispatın anlaşılır olma özelliğine vergü yaptıkları tespit edilmiştir. Öte yandan öğretmen adaylarından yedisi (~%29) “maddeler halinde / düzenli yazılmış olması” özelliklerini öne çıkarmışlardır. Örnek olarak; ÖA_{1.1}: “Yani inceliyorum yani genelde bakıyorum sonucu doğru, yani işlemleri doğru, takıldığım bir yer varsa bunun neden böyle yaptığın diye bir sorarak bu şekilde kabul ediyorum. Genelde bu ispatı gösteren kişiler tecrübeli kişiler olduğu için de güveniyorum. En önemlisi ispat için anlaşılır olmalı. Çünkü ispatta takıldan en konu yani anlaşılmazsa konu çok zor. Çok büyük bir durummuş gibi geliyor, öğrenciyi zorlaştırıyor ama anlaşılırsa öğrenciye konuyu sevdirebilir. Bölümü sevdirebilir, daha iyi oluyor. Yani anlaşılır yazmak anlaşılır olarak göstermek, **maddeler halinde karmaşık olmadan** daha iyi olur.” ve “ÖA_{1.2}: “Ben söylerim, bu nereden geliyor bu buradan geliyor diyor. **Her şeyi yerli yerinde** yani bunun sonucu gösterir. Ben nedenini sorduğumda oda bu dediğinde benim için geçerlidir yani. Yani açıklaması olacak. Tutarlı olacak. **Madde madde düzenli olacak** o tarz bir şey. Mantığa uygun olacak.” açıklamalarında “maddeler halinde karmaşık olmadan, madde madde düzenli” ifadeleriyle geçerli ve kabul edilebilir ispatın ölçütü olarak maddeler halinde / düzenli yazılmış olması özelliğine vurgu yaptıkları tespit edilmiştir. Benzer biçimde ikinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{2.1} ve ÖA_{2.4} sırasıyla “O verilen formülün herşeyini şöyle diyeyim ispatın, yanlışlığını ortaya çıkaracak bir şey yoksa yanlışlayan bir sayı mesela yoksa o ispat geçerlidir benim için. Yani o zaman o aksine ispata örnek, yani görmemişsek kabul eden eğer ama bir kişi gördü diyelim, ortaya çıkar der. Bence bu ispat yanlış der. O yüzden o ispatsa bir ispat için. O yüzden bence bir çok görüş alınması daha iyi olur. Çünkü bizim göremediğimiz şeyi başka bir kişi görebiliyor o yüzden. Orası öyle ama mesela benim önüne konulan ispatla ben aksine bir örnek göremediğim sürece o ispat mesela yanlış bir ispat da olsa benim için doğrudur. Net olmalı, açıklayıcı olmalı, belirsizlikler olmamalı. Yani tüm

her şey hangi işlemler yapılmışsa **düzenli** açık ve net bir şekilde orada yazılmalı. Açık ve anlaşılır.” ve “Benim için hocam dört işlem yapılan şeyler atıyorum, bir ritmik var örüntü var. Orada böyle böyle gidiyorsun ritmik olarak. bir kare verdiğinizde onu bilinmeyen olduğu için de başka bilinmeyenler katarak ya da bilinmeyenin değerini değiştirerek denediğimizi yine oluyorsa bu benim için doğru bir şeydir ispattır bence öyle. Yani değişken değiştirme ve örüntüde sayı değerleriyle değişmiyorsa ve bir örüntü oluşturunca bence bu doğrudur. Cebirsel olması da benim için geçerli ve kabul edilebilir. Hocam öncelikle açık olmalı. Yani karmaşık olmamalı, **adım adım olmalı** çünkü formülü vereceğiz. O yüzden ispatı adım adım yapmalı, basitçe yapmalı olabildiğince açık anlaşılır olmalı, bir de fazla da abartılmamalı yani küçük değerlerden başlamalı. Bence $n=1$ gibi yine tümevarım yöntemlerinden örnek vereceğim ama.” açıklamalarında “düzenli, adım adım olmalı” ifadeleriyle geçerli ve kabul edilebilir ispat için düzenli/maddeler halinde yazılmış olması gerektiğini belirtmişlerdir. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından “**ÖA_{3.1}**: O ispatı benim anlamam gerekiyor. Öncelikle anlaşılır ve **ispatın düzenli, tane tane yazılması** benim için yani uygundur. Yani böyle daha hem anlaşılır için hem böyle çözümün açıklığı için benim için uygundur. Yani doğru sonuçta tabi ki de önemli. Tabi ki belli bir mantık, belli bir doğru bir süreç. Sonuç sonucun benim için mantıklı olması tabi ki de olması gerekiyor. Aynı şeyler yani dediğim gibi tane tane böyle ispatın hem bir mantık çerçevesinde hem bir anlaşırılık çerçevesinde olması gerekiyor hem de çözümün öğrenci için yani tamam bu çözüm doğru ben anladım diyebilecek bir şekilde olması gerekiyor.” ve “**ÖA_{3.6}**: Hani hangi yoldan gittiğine bakarım. Yani gidiş yolu mantıklı mı? O düzeyde o verilmeli mi? Ona bakarım bir de hani bazı ispatlar hem diyoruz ya x bu olsaydı şöyle olurdu mesela onlar ispat değil bence hani sayı yerleştiriyoruz. Örnek verme, onlar ispat değil bence. Bir de mesela önceden ispatlanmış şeyleri kullanmasına bakarım kullanmış mı ispat yaparken. mantıklı, **yani bir düzenli aşamalı bir şekilde de yazmış** mı bunların olması o ispatın, doğru ve geçerli olduğunu gösteriyor. Doğru şeyler olması lazım. Matematikte doğru kabul edilmiş şeyleri kabul etmeli.” açıklamalarında “düzenli, aşamalı, tane tane yazılması” ifadeleriyle düzenli/maddeler halinde yazılmış olması özelliğini geçerli ve kabul edilebilir bir ispatın ölçütü olarak öne çıkardıkları tespit edilmiştir.

Öğretmen adaylarının geçerli ve kabul edilebilir bir ispatın özelliklerine ilişkin görüşleri incelendiğinde, sınıf seviyeleri arasında belirgin bir farklılık olmadığı görülmüştür. Öne çıkan görüşler farklı sınıf düzeylerinden adaylar tarafından dile getirilmiştir. Örneğin, “mantıklı olması” vurgusu özellikle üçüncü sınıfta yoğun olmakla birlikte birinci ve ikinci

sınıftan adaylar tarafından da ifade edilmiştir. “Anlaşılır olması” görüşü ise hem alt (birinci ve ikinci sınıf) hem de orta (üçüncü sınıf) düzeydeki adaylarca dile getirilmiştir. Benzer şekilde, “maddeler halinde ve düzenli olması” özelliği de üç farklı sınıf seviyesinden adaylar tarafından belirtilmiştir. Bu bulgular, öğretmen adaylarının geçerli bir ispat için aradıkları temel özelliklerde ortaklaştıklarını göstermektedir.

İspatın doğasına ilişkin görüşlere dair bulgular göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun ispatı sadece matematiksel doğrulama aracı olarak değil aynı zamanda matematiksel anlamlandırmaya hizmet eden bir süreç olarak gördükleri tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının tamamı ispatın okul matematiğinde önemli olduğunu ifade etmişlerdir. Aynı şekilde öğretmen adaylarının tamamı ispatın okul matematiğinde yeterince yer almadığını ve büyük çoğunluğu ise bunun nedeni olarak öğretmenlerin ispata dair farkındalıklarının yetersiz olmasından kaynaklı olduğunu belirtmişlerdir. Öğretmen adayları ispatın amaçlarının çok farklı boyutlara hizmet ettiğini ifade etmişlerdir. Öğretmen adayları ispatın okul matematiğinde çok farklı rollerinin olduğunu ifade ederek yarısından fazlası ise öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerinin ortaya çıkarılmasında rol oynadığını belirtmişlerdir. Öğrencilerin ispatı okul matematiğinde doğru bir şekilde anlamlandırıp konumlandırabilmesi adına öğretmen adaylarının yarısına yakını erken dönemlerde ispatın verilmesi gerektiğini beyan etmişlerdir. Öğretmen adaylarının bu konuyu farklı boyutlardan ele alarak değerlendirdikleri görülmüştür. Geçerli ve kabul edilebilir bir ispatın özellikleri konusunda öğretmen adaylarının çok farklı kriterleri göz önünde bulundurduğu tespit edilmiştir. Mantıklılık, tutarlılık, düzenlilik, yapısal kurgu gibi kriterleri ön plana çıkardıkları görülmüştür.

4.2. Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Becerilerine Yönelik Bulgular

Öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerini ölçmek, farklı matematiksel içeriklerde nasıl ispat ürettiklerini gözlemlemek ve kullandıkları stratejilerin çeşitliliğini ortaya çıkarmak, farklı ispat şemalarının ortaya çıkmasını sağlayacak şekilde tasarlanan dört adet soru sorulmuş olup bu sorular Tablo 4.8’de sunulmuştur. Ayrıca her bir soru için öğretmen adaylarının yaptıkları çözümler incelenerek Sowder ve Harel (1998)’in ispat şemalarına göre kategorize edilmiştir. Bu ispat şemalarına ilişkin bulgular ise Tablo 4.9’da sunulmuştur.

Tablo 4.8. Öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerini ölçme amaçlı sorulan sorular

Soru No	Soru
1	Fatih pozitif tam kare olan bir doğal sayının doğal sayı çarpanlarının sayısının her zaman tek olduğunu iddia etmektedir. Sizce Fatih haklı mıdır? Bu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?
2	Emine “ $1^x + 2^x + 3^x + 4^x + 5^x$, x pozitif tek sayı olduğunda her zaman 5’in katıdır.” demiştir. Sizce Emine haklı mıdır? Bu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?
3	Ümit herhangi bir $n \in \mathbb{N}^+$ için $\sum_{k=1}^n (2k-1) = 1+3+5+\dots+2n-1 = n^2$ eşitliğinin her zaman doğru olduğunu söylemiştir. Sizce Ümit haklı mıdır? Bu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?
4	Ali $x \geq 1$ olmak üzere $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesinin her zaman doğru olduğunu söylemiştir. Sizce Ali haklı mıdır? Bu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?

Tablo 4.8’de öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerini ortaya çıkarmayı amaçlayan dört adet soru yer almaktadır. Bu sorular öğretmen adaylarına teker teker yöneltilerek kendilerine ait argümanlar oluşturabilmeleri için yeterli süreler verilmiştir.

Tablo 4.9. Öğretmen adaylarının ispat yapma becerisi sorularına verdikleri cevaplar

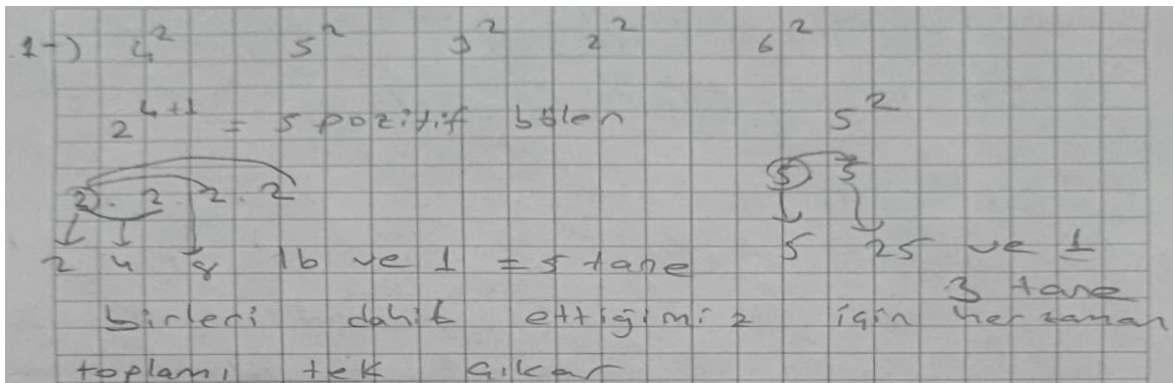
Soru	İspat Şeması	Öğretmen Adayları
İspat Yapma Becerisi	Dışsal İspat Şeması	Otoriter ÖA ₁₂ , ÖA ₃₂ , ÖA ₃₃ , ÖA ₄₁
1. Soru	Deneysel İspat Şeması	Tümevarımsal (Örnek Tabanlı) ÖA ₁₂ , ÖA ₁₃ , ÖA ₁₄ , ÖA ₁₆ , ÖA ₂₃ , ÖA ₂₄ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₃ , ÖA ₃₅ , ÖA ₄₁ , ÖA ₄₂ , ÖA ₄₃ , ÖA ₄₄ , ÖA ₄₆
	Analitik İspat Şeması	Genelleyici Örnek ÖA ₁₁ , ÖA ₁₅ , ÖA ₂₁ , ÖA ₂₂ , ÖA ₂₆ , ÖA ₃₄ , ÖA ₃₆ , ÖA ₄₅
İspat Yapma Becerisi	Deneysel İspat Şeması	Tümevarımsal (Örnek Tabanlı) ÖA ₁₁ , ÖA ₁₃ , ÖA ₁₄ , ÖA ₁₅ , ÖA ₁₆ , ÖA ₂₁ , ÖA ₂₂ , ÖA ₂₃ , ÖA ₃₃ , ÖA ₃₄ , ÖA ₃₅ , ÖA ₃₆ , ÖA ₄₂ , ÖA ₄₃ , ÖA ₄₄ , ÖA ₄₅
2. Soru		Algısal ÖA ₁₂ , ÖA ₂₄ , ÖA ₂₅ , ÖA ₂₆ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₂ , ÖA ₄₁ , ÖA ₄₆
İspat Yapma Becerisi	Dışsal İspat Şeması	Otoriter ÖA ₁₁ , ÖA ₁₂ , ÖA ₂₁ , ÖA ₂₂ , ÖA ₂₄ , ÖA ₂₅ , ÖA ₂₆ , ÖA ₃₅ , ÖA ₃₆ , ÖA ₄₁ , ÖA ₄₃ , ÖA ₄₄ , ÖA ₄₆
İspat Yapma Becerisi	Deneysel İspat Şeması	Tümevarımsal (Örnek Tabanlı) ÖA ₁₁ , ÖA ₁₂ , ÖA ₁₃ , ÖA ₁₄ , ÖA ₁₅ , ÖA ₁₆ , ÖA ₂₃ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₃ , ÖA ₃₄ , ÖA ₃₅ , ÖA ₄₂ , ÖA ₄₃
3. Soru	Analitik İspat Şeması	Genelleyici Örnek ÖA ₃₂ , ÖA ₄₅

Tablo 4.9. (Devamı) Öğretmen adaylarının ispat yapma becerisi sorularına verdikleri cevaplar

Soru	İspat Şeması	Öğretmen Adayları
	Dışsal İspat Şeması	ÖA ₁₄ , ÖA ₂₁ , ÖA ₄₄
İspat Yapma Becerisi	Deneysel İspat Şeması	ÖA ₁₁ , ÖA ₁₃ , ÖA ₁₅ , ÖA ₂₂ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₄ , ÖA ₃₅
4. Soru	Analitik İspat Şeması	ÖA ₁₂ , ÖA ₁₆ , ÖA ₂₃ , ÖA ₂₄ , ÖA ₂₅ , ÖA ₂₆ , ÖA ₃₂ , ÖA ₃₃ , ÖA ₃₅ , ÖA ₃₆ , ÖA ₄₁ , ÖA ₄₂ , ÖA ₄₃ , ÖA ₄₅ , ÖA ₄₆

Tablo 4.9’da öğretmen adaylarının dört adet ispat yapma becerisini ölçme amacıyla yöneltilen sorulara verdikleri yanıtlara göre her soru için hangi ispat şemasında hangi öğretmen adayının yer aldığına ilişkin bilgiler yer almaktadır. Tablo 4.9’dan da görüleceği üzere öğretmen adaylarının yarısından fazlası (~%58) birinci soruya örnek tabanlı bir yaklaşım benimsedikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarından dördü (~%17) ise ispat yapma sürecinde formül üzerinden işlemler yaparak otoriteye bağlı bir yaklaşım benimsemişlerdir. Bunların yanında öğretmen adaylarından sekizi (~%33) analitik bir düşünme içerisine girerek genelleyici örnek yaklaşımı ile ispatlama yoluna gitmişlerdir. Öğretmen adaylarının cevaplarından bazı kesitler aşağıda sunulmuştur.

Öğretmen adaylarından dördü birinci sorunun ispatlama sürecinde herhangi bir zihinsel çaba içerisine girmeden direkt olarak daha önceden öğrenmiş olduğu bir formül üzerinden işlemlerini yapma yoluna gitmişlerdir. Burada öğretmen adaylarının ispat algılarının kısıtlı olmasından dolayı otoriteye bağlı bir ispat yaptıkları tespit edilmiştir. Bu şekilde bir düşünme yapısı ile ÖA₁₂ tarafından oluşturulan argümana ilişkin görsel Şekil 4.1’de verilmiştir.



Şekil 4.1. ÖA₁₂’nin birinci soru için oluşturmuş olduğu otoriteye bağlı ispat argümanı

ÖA_{1.2}'nin oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{1.2}: *Doğru bence.*

A: *Neden?*

ÖA_{1.2}: *Ya hepsi için sağlıyor, tüm sayılar için sağlıyor, **üzeri pozitif oluyor ya bir ekleyip. Üstünü bir ekleyip şey yapıyoruz, topluyoruz ya.** 2+1. Hepsi 3 ediyor zaten karesi olan.*

A: *Bunun üzerine bir aktaracağımızı nereden biliyoruz?*

ÖA_{1.2}: *Bence biri de ekliyoruz. Onun için.*

A: *Nasıl bir ekliyoruz?*

ÖA_{1.2}: *Ha bir, çünkü hepsinin ortak çapanı.*

A: *Yani bu kaniya nereden vardın? Daha büyük pozitif tam karelerde de bunun geçerli olduğunu nereden biliyoruz? Üzerinin bir artılacağını nereden biliyoruz?*

ÖA_{1.2}: *Şimdi hocam bir dakika biraz düşünebilir miyim bu konu hakkında? İspatını yapamam ama hangi sonuç olursa olsun gene tek sayı çıkıyor. Onun böyle asal sayıları ayırdığımız zaman asal çarpanlarına. Yani çarpanlarının bulmak için yani **bize öğretilen üstünü bir artırıp şey yapma.**”*

A: *Peki bu ifadenin doğru olduğundan emin miyiz?*

ÖA_{1.2}: *Bu kesin birşeydir hocam, bilinen bir şey bu. Öğretmenimiz göstermişti, her kitapta da geçiyor zaten.*

ÖA_{1.2} kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu argümanı açıklaması istendiğinde “üzeri pozitif oluyor ya bir ekleyip. Üstünü bir ekleyip şey yapıyoruz, topluyoruz ya” dediği görülmektedir. Burada öğretmen adayının daha önceden öğrenmiş olduğu pozitif bölen sayısı ile ilgili formülü hatırlamaya çalıştığı düşünülmektedir. Açıklamaya çalıştığı şeyin dayanağının neler olduğu sorulmuştur. Öğretmen adayı birşeyler açıklamaya çalışsa da mantıksal gerekçelendirmelere dayandıramayarak “bize öğretilen üstünü bir artırıp şey yapma.” şeklinde bir açıklama yaparak aslında daha önceden öğretilmiş bir formül üzerinden argüman ürettiği fakat bu formülün nereden, nasıl geldiğini açıklamadan sadece bilginin kesinliğine odaklanarak otoriteye bağlı bir argüman oluşturma yoluna gitmiştir.

Başka bir öğretmen adayı olan ÖA_{4.1} tarafından oluşturulan argümana ilişkin görsel Şekil. 4.2’de verilmiştir.

Gerdeme Yolu Pozitif Bölen sayısı

$$1^2 = 1 \Rightarrow 1$$

$$2^2 = 4 \Rightarrow 1, 2, 4$$

$$3^2 = 9 \Rightarrow 1, 3, 9$$

$$n^2 = n \cdot n \Rightarrow ?$$

Pozitif Bölen sayısı

$$4 = 1, 2, 4 \rightarrow 3 \text{ tane} \Rightarrow 2 = 2 + 1 = 3 \text{ tane}$$

$$9 = 1, 3, 9 = 3 = 2 + 1 = 3 \text{ tane}$$

$$16 = 1, 2, 4, 8, 16 = 5 = 4 + 1 = 5 \text{ tane}$$

$n \Rightarrow n+1 \rightarrow$ doğal sayılar

Şekil 4.2. ÖA_{4.1}'in birinci soru için oluşturmuş olduğu otoriteye bağlı ispat argümanı

ÖA_{4.1}'in oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{4.1}: *Bu sanki şeyden ispatlayabiliyorduk hocam, yani bunun. Euler formülünden galiba geliyordu bu.*

A: *Nasıl mesela?*

ÖA_{4.1}: *Eee mesela hocam. 9 sayısı mesela üçün karesi, 16 dördün karesi, 81 dokuzun karesi sonuçta bunlar. Terimler, şey sayısı n+1 olmuyor muydu hocam? n+ 1 den her zaman sonuç tek gelmez mi orada?*

A: *Pozitif böyle sayısını mı diyorsun?*

ÖA_{4.1}: *Evet. Pozitif bölen sayısı. Oradan şey gelir. Her zaman tek gelmez mi sonuç? Aynen her zaman tek gelir.*

A: *Ama bu bir ispat mıdır sence? Yani sen bunu ispat olarak kabul eder misin ya da bunu nasıl açıklarsın?*

ÖA_{4.1}: *Bunu size nasıl açıklarım? Hocam dediğim gibi bir şekilde önce pozitif bölenleri yazarım. Hocam mesela 9 sayısını az önce yazdım. Dokuzun tam bölümleri mesela 1,3 ve 9 şeklinde olur, 3 tane. 16 ise 1,2,4,8 ve 16. Mesela burada 5 tane yani ben bunları mesela 9 u üçün karesi 16 yı dördün karesi. Yine mesela 25 i beşin kare şeklinde yazarım. Sürekli gözlemlediğimde hep üzeri çift zaten o zaman euler fi fonksiyonu ilk aklıma geldiğinde hocam oradaki pozitif yani. Tam böyle sayısından düşündüğümde her zaman bir fazlası oluyor ve o bir fazlası da sonucu teke götürür.*

A: *Tamam, peki euler fi ya da pozitif bölen sayısı formülünü nerden biliyoruz?*

ÖA_{4.1}: *Ben hocam yalan söylemeyeyim şeyden matematik tarihi dersinde hocamız anlatmıştı."*

ÖA_{4.1} kodlu öğretmen adayı da ÖA_{1.2} gibi otoriteye bağlı bir argüman oluşturma yolunu seçmiştir. Öğretmen adayı bu sorunun çözümünde daha önceden öğrenmiş olduğu bir bilgi üzerinden yapabileceğini düşünerek hatırlamaya çalışmıştır. Öğretmen adayına bu bilginin nereden geldiği, neden doğru olduğu gibi sorular sorulması üzerin “matematik tarihi dersinde hocamız anlattı.” demesi aslında sirekt olarak o formülün doğruluğuna kendini ikna ettiği ve onu açıklama gibi bir çabaya girmedikini göstermektedir. Bu nedenle öğretmen adayının otoriteye bağlı bir argüman oluşturduğunu göstermektedir.

Tablo 4.9’den da görüleceği üzere yedi öğretmen adayının birinci soruda analitik bir düşünme yapısı ile matematiksel akıl yürütmeler yaparak örneklerden yola çıkıp genelleme yoluna gittiği ve genelleyici örnek argümanı oluşturdukları tespit edilmiştir. Bu soruda her sınıf seviyesinden en az bir öğretmen adayı genelleyici örnek argümanı oluşturmuştur. Bu argüman türünü oluşturan öğretmen adaylarından biri olan ÖA_{1.5}’in argümanı Şekil 4.3’te verilmiştir.

Handwritten mathematical argument on grid paper:

4 = $\begin{matrix} 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 \end{matrix}$ } 3 tane

9 = $\begin{matrix} 1 \cdot 9 \\ 3 \cdot 3 \end{matrix}$ } 3 tane

16 → $\begin{matrix} 1 \cdot 16 \\ 2 \cdot 8 \\ 4 \cdot 4 \end{matrix}$ } 5 tane

64 → $\begin{matrix} 1 \cdot 64 \\ 2 \cdot 32 \\ 4 \cdot 16 \\ 8 \cdot 8 \end{matrix}$ } 7 tane

$n^2 = \begin{matrix} 1 \cdot n^2 \\ n \cdot n \\ -x- \end{matrix}$ } her zaman 3 tane $1, n^2$ ve $n \cdot n$ den gelir.

diger çarpan sayısı en az 2 olacağından
çarpan sayısı daima tek sayı olur.

* Çarpanları her zaman tek sayıdır çünkü,
 $1 \rightarrow 1$
 $4 \rightarrow 1, 2, 4$
 $16 \rightarrow 1, 2, 4, 8, 16$
 $25 \rightarrow 1, 5, 25$

Şekil 4.3. ÖA_{1.5}’in birinci soru için oluşturmuş olduğu genelleyici örnek argümanı

ÖA_{1.5}’nin oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{1.5}: Mesela 4 te denedim, 25 de denedim, 121 de denedim, 81 de denedim. 1 çarpı 81, 9 çarpı 9 ya hepsinde oluyor. Hepsinde 3 tane çarpan oluyor.

A: Peki hepsinde olduğunu nereden biliyoruz? Bütün tam kare sayılarda geçerli olduğuna nasıl kanaat getirdik?

ÖA_{1.5}: Yani birkaç tane de denedim. Biri vardı. Efendim daha sayıyı büyütmeye çalışıyorum. 5 çarpı 5 25. Bir oluyor sanırım.

A: Nasıl bir sonuca varırsın? Peki o yaptığın örneklerden?

ÖA_{1.5}: Birkaç örnek denedim, hani sınırlı sürede olmak üzere bu örneklerin hepsinde 3 tane çarpan olduğunu gördüm.

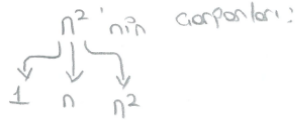
A: Üçten fazla çarpım olabilir mi?

*ÖA_{1.5}: Ya onu denemedim. 81 in başka çarpanı var mı? Yok mesela 16 diyelim 16 da kaç tane olur? 1 çarpı 16, 2 çarpı 8. 4 çarpı 4 he bunda 3 tane. Ama yine tek oldu mesela beşte oldu hep. Hani her zaman 2 kere 2 4 ya çarpanlara hep çift olsa da hani bir tane alacağız ikiyi alacağız. Yani mesela **ne kadar çarpanı olursa olsun 2 sayının çarpımı olacak**. Mesela bir kere bir, 5 kere 5 25. Burada sadece beşi aldık. Sonra 1-25. Burada her zaman 2 sayının çarpımı. Sonra bir de beşi eklediğimiz için her zaman tek olur çarpan sayısı.*

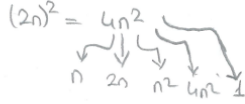
ÖA_{1.5} kodlu öğretmen adayının oluşturmuş olduğu argümana ilişkin açıklamaları dikkate alındığında öncelikle birkaç örnek üzerinden doğruluğunu göstermeye çalıştığı görülmektedir. Daha sonra bu örneklerden yola çıkarak daha genel bir yapı oluşturmuş ve gerekçelendirmeler yapmıştır. Şöyle ki n^2 ifadesinden sayının kendisi ile birin çarpımından iki çarpan olacağı ve nxn ifadesinden sadece n 'in çarpan olarak geleceği ve hangi sayı olursa olsun 3 tane çarpanı olacağını ifade etmiştir. Ayrıca hangi sayı olursa olsun herhangi iki sayının çarpımı olacağından her çarpan ikilisinden de ikişer çarpan geleceğinden çift sayı ile 3'ün toplamı da her zaman tek olacağını ifade etmiştir. Öğretmen adayının bir örnek üzerinden giderek daha sonra bunun genel bir matematiksel yapı içerisinde düşünerek ve gerekçelendirmeler yaparak genelleme yoluna gittiği tespit edilmiştir.

İkinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{2.6}'nın benzer şekilde oluşturmuş olduğu argümanı Şekil 4.4'te verilmiştir.

→ Bir doğal sayının karesi'ni alıyorsak:
Tek sayı oluyorum düşünelim.
 $n \rightarrow$ tek sayı olsun



→ $2n$ için bakalım (Çift)



Böylelikle:

Bir tam kere olan doğal sayının çarpanları; 1, karesi alınan sayı ve sayının kendisidir. O ifade çift sayı ise bu çarpanların yanında 2 ve ifadenin yarısı olan çarpanı da barındırır.

Böylelikle çarpan sayısı tek olur.

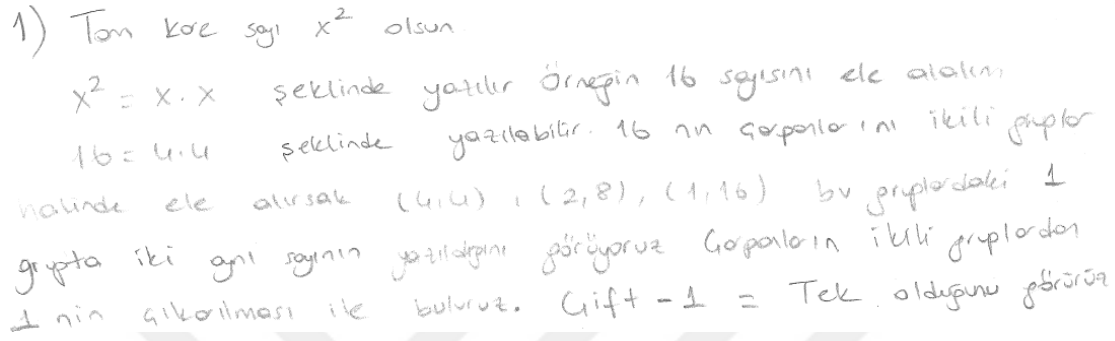
Şekil 4.4. ÖA_{2.6}'nın birinci soru için oluşturmuş olduğu genelleşici örnek argümanı

ÖA_{2.6}'nın oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir: “İspatını şu şekilde yapabilirim, sanırım sözel olarak yani en azından böyle olduğunu düşünüyorum. Şimdi hocam bir sayı var, onun karesini alıyoruz. Mesela n 'in karesi. Bir kere bu sayının çarpanlarından bir tanesi 1. Bir tane n 'in karesi aldığıma göre çarpanlarından biri n . Bir de kendisi, bu tek sayı olduğu durum için geçerli. Hani 3 tane kesin var. Tek sayılarda zaten. Başka ne olabilir? 25 te 1,5,25; 49 da 1,7,49 tek sayılarda zaten direkt bu gelir. Sağlar başka çarpan olmaz, çift sayı da barındıramayacağı için. Çift sayılarda da şu şekil benzer, mantıkla gidersek çarpanlarından biri, karesini aldığımız sayı. Bir de çift sayı olduğu için hani içinde 2 çarpanı olmak zorunda. Yani o 3 tane çarpanı elde ettik. Bu 2 çarpanı var 2 'nin de bu sayı sağlaması için sayının yarısıyla çarpılması gerekiyor. Yani sayının yarısı çarpı 2 var, oradan da 2 tane çarpan gelir çiftlerde yani ikişer tane içeride en az çarpan geliyor. 3 tek sayı bir de en az çift çarpan daha geleceği için yine tek sayı çarpan olur.”

ÖA_{2.6} kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu argüman için açıklamalarından öğretmen adayının belirli bir akıl yürütme çerçevesinde ilerlediği görülmektedir. Şöyle ki öncelikle tam kare sayıları tek ve çift sayılar olarak iki gruba ayırarak açıklama yapmıştır. Tek olan kare sayılarda sayının kendisi ve birin çarpımı ve iki aynı sayının çarpımından bir çarpan geleceğini beyan etmiştir. Çift sayılarda ise karesi alınan sayıdan gelen bir çarpan, çift olduğundan mutlaka iki çarpanının olacağı ve bunun çarpan ikilisinin tam kare sayının yarısı olduğunu ifade edip bundan sonra gelecek sayılarda da çarpan ikililerinden en az iki

çarpan geleceğini belirtmiştir. Birkaç örnek vererek daha sonra bu örneklerini daha genel ve kapsayıcı bir yapı haline getirecek mantıksal gerekçelere dayalı ifadelerle destekleyerek argümanını ürettiği görülmektedir.

Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{3.6}'nın yapmış olduğu genelleyici örnek argümanı Şekil 4.5'te sunulmuştur.



Şekil 4.5. ÖA_{3.6}'nın birinci soru için oluşturmuş olduğu genelleyici örnek argümanı

ÖA_{3.6}'nın oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{3.6}: Mesela 16 tam kare bi sayı. Onu çarpanları 4 çarpı 4. Bence doğrudur yani.

A: Nasıl buna karar verdin?

ÖA_{3.6}: Bir sayının tam kare olması mesela x çarpı x tam kare diyelim. Çarpanları da x çarpı x yani çarpanı da çok. Bir de 16 mesela diğer çarpanın mesela 2 çarpı 8. 1 çarpı 16 başka da yok.

A: Peki sadece 16 ya bakarak mı genelledin bunu? Yani bunu sadece 16 örneğine bakarak mı doğru olduğunu söyledin?

ÖA_{3.6}: Yok, hayır. Şöyle diyebilirim, hani **2 tane sayının çarpımı**. Bir de **bütün sayıların çarpanı bir var**. Çünkü birle kendisinin çarpımı. **O yüzden hep ikililer olacak**.

A: Peki bunu nasıl genelleleyebilirsin ya da bunu nasıl açıklayabilirsin? Mesela bunu bir ispat olarak nasıl gösterirsin?

ÖA_{3.6}: Tam kare olan sayıların çarpanları yazılırken. **İki şey** nasıl diyebilirim? Herhalde ben çarpanlarını yazardım ilk. Sonra derdim ki çarpanları hani küme olarak gösterelim. Kümede değil. **Aynı eleman 2 kez yazamayacağımızdan** her zaman oradaki o 2 aynı oradan x çarpı x ler bir tane x yazılacağından tek olur.

ÖA_{3.6} kodlu öğretmen adayının oluşturmuş olduğu argümana ilişkin açıklamaları dikkate alındığında ÖA_{2.6} kodlu öğretmen adayına benzer bir şekilde argüman ürettiği

söylenbilir. Öncelikle öğretmen adayının işe örnek üzerinden başladığı daha sonra bu örneği daha gelen bir yapı haline dönüştürdüğü görülmektedir. On altı sayısının çarpanlarını tek tek yazıp buradan çarpan ikilileri olarak düşünerek her sayının karşısında bir çarpan olduğunu daha sonra x^2 gibi bir sayı düşünerek burada x çarpy x 'ten sadece x çarpanı geleceğinden toplamda (çift-1) tane çarpan sayısı olacağını belirtmiştir. Öğretmen adayının bir örnek üzerinden giderek daha sonra bunun genel bir matematiksel yapı içerisinde düşünerek ve gerekçelendirmeler yaparak genelleme yoluna gittiği tespit edilmiştir.

Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından olan ÖA_{4.5}'in oluşturmuş olduğu genelleyici örnek türündeki argümanı Şekil 4.6'da sunulmuştur.

$$\begin{array}{l}
 1 \rightarrow 1 \quad \text{1 tane} \\
 9 \rightarrow 3^2 \rightarrow 1, 3, 9 \quad \text{3 tane} \\
 16 \rightarrow 4^2 \rightarrow 1, 2, 4, 8, 16 \quad \text{5 tane} \\
 25 \rightarrow 5^2 \rightarrow 1, 5, 25 \quad \text{3 tane} \\
 36 \rightarrow 6^2 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 \quad \text{9 tane} \\
 \vdots \\
 144 \rightarrow 12^2 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144 \quad \text{15 tane}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 9 \text{ sayısı için } 3^2 \rightarrow 3^0, 3^1, 3^2 \text{ } \} \text{ 3 çarpan} \\
 36 \text{ sayısı için } \rightarrow 3^2 \cdot 2^2 \rightarrow 2^0, 2^1, 2^2 \quad \left. \begin{array}{l} 2^0: \text{ seçerseniz çarpan olarak } 2^0 \text{ için } 3^0-3^1-3^2 \} \text{ 3 çarpan} \\ 2^1: \text{ seçerseniz çarpan olarak } 2^1 \text{ için } 3^0-3^1-3^2 \} \text{ 3 çarpan} \\ 2^2: \text{ seçerseniz çarpan olarak } 2^2 \text{ için } 3^0-3^1-3^2 \} \text{ 3 çarpan} \end{array} \right\} \text{ 9 çarpan} \\
 \quad \quad \quad 3^0, 3^1, 3^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 144 \text{ sayısı için } \rightarrow 12^2 \rightarrow 2^4 \cdot 3^2 \rightarrow 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \quad \left. \begin{array}{l} \text{her bir çarpan için 3 farklı durum} \\ 3^0, 3^1, 3^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{5 tane 2'inci çarpan olduğu için} \\ \text{15 tane çarpan} \end{array}
 \end{array}$$

$$n^2 \text{ sayısı için } = a^x \cdot b^y \text{ şeklinde parçalayalım.}$$

1. a^x için oluşturabileceğimiz çarpan sayısı; $a^0, a^1, a^2, \dots, a^x$ 'e kadar
2. b^y için oluşturabileceğimiz çarpan sayısı; $b^0, b^1, b^2, \dots, b^y$ 'e kadar

1. durum için çarpan sayısı 1 ve x tane çarpan var. $(x+1)$
2. durum için çarpan sayısı 1 ve y tane çarpan var. $(y+1)$

Tan kare olan sayıların üst kısmı her zaman çift (n^2 'den) asal çarpanlara ayrıldığımızda üst kısımları yine çift ve önceki örneklerde olduğu gibi parçalarsak a^0-b^0 'dan 1 çarpan her zaman geliyor ve x çarpan sayısına eklediğimizde tek sayı oluyor. Aynı işlemi b^y için yaparsak da orada da tek sayı geliyor. İki tek sayının çarpımı da her zaman için tektir çünkü çarpan sonuçlarının çift olması için çarpanlarda bir tane çift çarpan olması yeterli.

Şekil 4.6. ÖA_{4.5}'in birinci soru için oluşturmuş olduğu genelleyici örnek argümanı

ÖA_{4.5}'in oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{4.5}: Tam kare olan bir doğal sayının çarpanlarının tam kare olan mesela 16 tam kare dördün karesi evet. Çarpanların sayısını her zaman tek olduğun, şimdi hocam çarpanlarını ayırıyorduk ya. **Pozitif bölen sayısı diye** demi hocam 2 üzeri 4. Üstüne bir artırırsa evet 5 tane, 5 tane çarpanı var demektir. Her zaman doğrudur hocam bu.

A: Nasıl bunu nasıl söyleyebilirsen?

ÖA_{4.5}: Hocam şimdi zaten **tam kare demesi 2 sayının çarpımı** demek değil mi? 2 tane aynı sayının çarpımı mesela beşin karesinin, altının karesinin üzeri her zaman çift olacak. Evet, bizde **pozitif bölen sayısını bulurken de biri arttırıyorduk**. Çift sayıya bir eklersek tek sayı eklersek sonuç her zaman tek olacak.

A: Peki pozitif bölen sayısının öyle olduğunu nereden biliyoruz? Her sayı için geçerli olduğunu nasıl bilebiliriz?

ÖA_{4.5}: Yani hocam bunu mesela **biz pozitif bölen sayısının formülünü biliyoruz**. Hani üstünü bir arttırıyoruz diye biliyoruz.

A: Ama bu bu da ispatlanmaya muhtaç bir şey değil midir ya da mesela böyle bir çözüm olsa sen ikna olur musun? Mesela senin yaptığın gibi bir çözüm gelse karşına sen buna ispat der misin?

ÖA_{4.5}: İspat demem, çünkü hani ben burada yani hemen hazır bir bilgi verdim. Hani dedim ki pozitif bölen sayısı böyle buluyoruz dedim. Ama bunu nereden geldiğini bilmiyorum. Hani öğrenci hocam böyle değil de mesela 16 çarpanlarını biliyoruz, zaten hesaplayabiliriz. Tamam yapalım, 16'nın çarpanları. 1-16, 2-8, 4-4. 5 tane bölen var. Mesela 36 içinde 6 üzeri 2 yapacağım. Evet, 3 üzeri 2 çarpı 2 üzeri 2. Hani taban kuvvetlerinden gittim, tabandaki sayılardan. Taban kuvvetlerin de çarpanları oluyor.

A: Nasıl?

ÖA_{4.5}: 36 ya hocam. Altının karesi oldu. Sonra taban kuvvetlerinden altıya aldık. Üçü aldık, ikiyi aldık. Yani buna ayırdık ki, 6 üzeri 2; 3 üzeri 2 çarpı 2 üzeri 2. Bunu da parçaladık. Yani bu kadar üçe aldık, dokuza aldık, ikiyi aldık, dördü aldık, bir de bunların ortak parantezleri falan.

A: Yani biri aldın işte altıyı aldın, ikiyi aldın, üçü aldın oradan dokuzu çektin. Hani tek tek bunları yaptın da hani bütün sayılar için tek tek yapılabilir miyiz? Daha büyük sayılar içinde tek tek yapılabilir miyiz ya da bunu tek tek böyle yapmak yerine bir genellemeye varabilir miyiz?

ÖA_{4.5}: Genellemeye nasıl varabiliriz? Bu kombinasyonda mı faktör yerlerde ne sıralama oluyordu ya?

A: Nasıl mesela bir örnek verebilir misin?

ÖA_{4.5}: Mesela hocam diyor ya hani 2 tane 3 tane aynı kalem ya da 2 tane silgi yan yana sıralanacak. **Tekrarlı permütasyon.**

A: Bunu nasıl tekrarlı permütasyon olarak düşünebiliriz ya da sen nasıl düşündün?

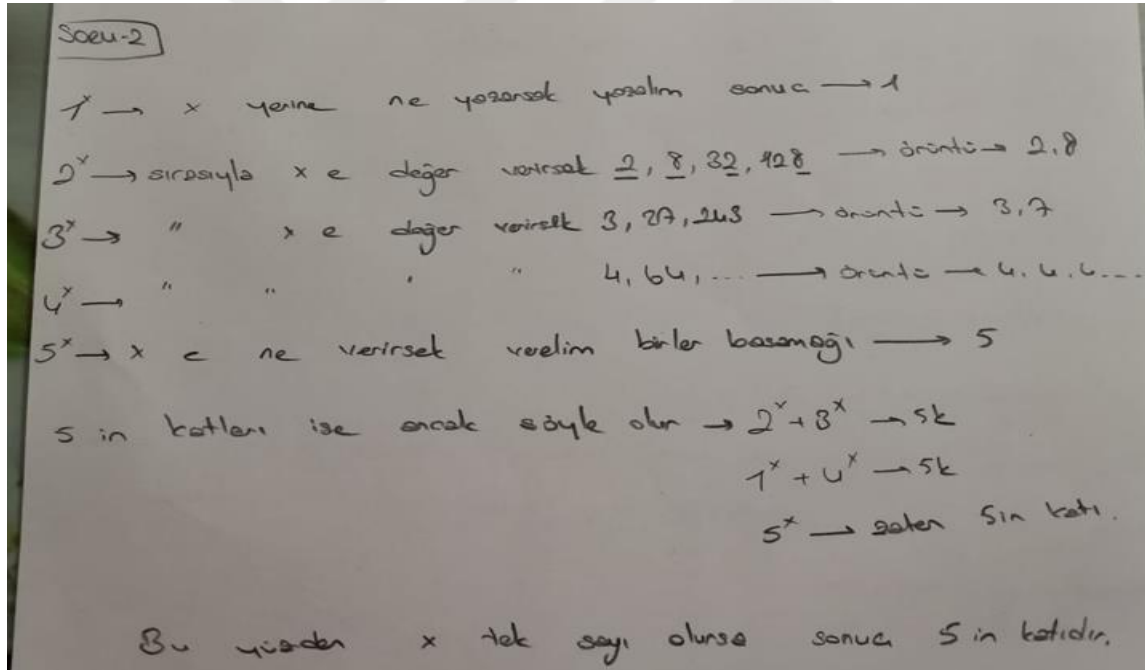
ÖA_{4.5}: Yani **tekrarlı permütasyondan 2 çarpı 2, 3 çarpı 3** diyelim. Tamam bir ve kendisinin olduğunu biliyoruz. Mesela n üzerideki olsa diyeceğiz ki n olacak. N karede bir n olacak, n kare olacak. n kare mesela 16 için bir oldu. Sonra n kareden 16 oldu. Bir de n oldu. Yani taban kuvveti 4. Dördünde kuvvetini yap iki üzeri 2 dedik. Kökünü almamız gerekiyor. Dörtten de 2 gelecek ya hocam. Yani 2 üzeri 0 dan 1 gelecek, 2 üzeri 1 den 2 gelecek, 2 üzeri 3 ten 8 gelecek, 2 üzeri 4 ten 16 gelecek. 2 üzeri 4 olduğundan 2 üzeri 0 dan 2 üzeri 4 e kadar 5 durum vardır gibi düşünerek buradan genelleyebiliriz.

ÖA_{4.5} kodlu öğretmen adayının bu soru için oluşturmuş olduğu argüman ile ilgili açıklamaları dikkate alındığında öğretmen adayının öncelikle pozitif bölen sayısının formülü üzerinden bir düşünme yapısına girdiği görülmektedir. Daha sonra araştırmacı tarafından sorular neticesinde sadece formüle bağlı olarak yapılacak bir argümanı ispat olarak kabul etmeyeceğini beyan etmiştir. Daha sonra öğretmen adayının birkaç örnek (16 ve 26 sayısını düşünerek) üzerinden gittiği gözlemlenmiştir. Araştırmacı tarafından öğretmen adayının bu verdiği örnekler üzerinden nasıl bir genelleme yapabileceği, bütün sayılarda tek tek deneyip deneyemeyeceği sorulması üzerine öğretmen adayının tekrardan daha önce öğrenmiş olduğu bir formülü hatırlamaya çalıştığı görülmüştür. Tekrarlı permütasyon olarak tanımlaması aslında kare bir sayıda çarpan olarak bir tane alınması ile tekrarlı permütasyonda tekrar eden kısım kaç olursa olsun bir defa alınması ile ilişkilendirmesi olarak düşünülmektedir. Son olarak nasıl genelleyebileceğine ilişkin bir örnek (16 sayısı) üzerinden açıklamaya çalışmıştır. Açıklamasında 16 sayısı için kökünü (asal çarpanı) alarak $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ şekline üslü olarak ifade ederek 5 durum olduğunu bununda o sayının çarpanları olduğunu ifade etmiştir. Birkaç örnek verdiği daha sonra daha genel bir ifade ile herhangi tam kare bir sayıyı $a^x.b^y$ şeklinde ifade edebileceğini a^x ifadesinin a^0 'dan a^x 'e kadar $(x+1)$ tane çarpan olduğunu ve tam kare bir sayıda üslü kuvvetin daima çift olacağından $(x+1)$ ifadesinin tek olacağını beyan etmiştir. b^y ifadesi içinde aynı şekilde düşünüldüğünde $(y+1)$ tane çarpan olacağını söylemiştir. Buradan iki tek sayının çarpımının da her zaman tek sayı olacağını belirtmiştir. Burada öğretmen adayının akıl yürütme yaptığı, ilişkilendirmeler ve mantıksal

gerekçelendirmelere dayandırarak birkaç örnek için göstermiş olduğu doğruluğu daha genel ve kapsayıcı matematiksel yapıya dönüştürmüştür.

Tablo 4.9'dan da görüleceği üzere öğretmen adaylarından 16'sı (~%67) ikinci soruya örnek tabanlı bir yaklaşım benimsedikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarından sekizi (~%33) ise algısal bir yaklaşım benimsedikleri saptanmıştır. Öğretmen adaylarının cevaplarından bazı kesitler sunulmuştur.

Öğretmen adaylarının sekizi modüler aritmetik mantığını kullanarak örüntüler oluşturmuş fakat bunların neden doğru olduklarına dair herhangi bir açıklama ve gerekçelendirme yapmadan direkt olarak algısal olarak kabul ettikleri gözlemlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispat algılarının sınırlı olmasından dolayı bu argümanlarını analitik ispat biçimlerinden genelleyici örnek argümanlarına taşıyamadıkları düşünülmektedir. İkinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{2.4}'ün algısal ispat türünde oluşturmuş olduğu argüman Şekil 4.7'de sunulmuştur.



Şekil 4.7. ÖA_{2.4}'ün ikinci soru için oluşturmuş olduğu algısal ispat argümanı

ÖA_{2.4}'ün oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir: "Hocam şimdi beşin katı direkt kısa yoldan bulmamız için zaten birler basamağına bakacağız biz. Oradan 1,3,5,7 deneyim. Hocam burada ıı **birler basamağına baktığımızda bir örüntü var**. 1 için her zaman 1 olur. 2 için 2-8-2-8 olarak gitti. Aynen bir de 3 için deneyim. Hocam bunda da bir örüntü var 3-7-3-7 diye. **4 için sanki full 4 var** hocam ya bir de bir deneyeyim yine de.

Evet, bunda da 4 var. 5 x son zaten beş x in bütün katları 5 onu denemeye gerek yok hocam. Bunları toplarsak tek bir sayıda verdiğimizde iş tamam. Her zaman 5 in katı olur.”

ÖA_{2.4} yapmış olduğu argümanda sorunun çözümünde 5 ile bölünebilme kuralından sayıların birler basamağını dikkate almıştır. 1 ve 5’in kuvvetleri için herhangi bir örüntü oluşturmadan çıkarımda bulunmuştur. Fakat 2, 3 ve 4 rakamlarının tek sayı kuvvetleri için 5 ile bölümlerinden kalanları ifade ederken bir örüntü olduğunu ve örüntünün de daima 2 için 2-8-2-8-.... Şeklinde, 3 için 3-7-3-7-... şeklinde ve 4 için ise 4-4-4-... şeklinde devam ettiğini beyan etmiştir. Bu örüntünün nasıl ve neden bu şekilde devam edeceğini herhangi bir mantıksal gerekçelendirmeye dayandırmamıştır. Bunun nedeninin de örüntünün böyle devam edeceğine sezgisel olarak karar vererek algısal bir düşünme yapısına girdiği düşünülmektedir. Benzer biçimde bir düşünme yapısı ile algısal ispat türünde argüman üreten ÖA_{2.6}’ın yapmış olduğu argüman ise Şekil 4.8’de sunulmuştur.

$$1^x + 4^x + 2^x + 3^x + 5^x$$

$1^x \rightarrow x$ ne olursa olsun sonuç 1’dir

$4^x \rightarrow \begin{array}{l} 4^1 = 4 \\ 4^2 = 16 \\ 4^3 = 64 \\ 4^4 = 256 \\ 4^5 = 1024 \end{array} \rightarrow 4$ ’ün tek kuvvetlerinin birler basamağı her zaman 4 olur

$2^x \rightarrow \begin{array}{l} 2^1 = 2 \\ 2^2 = 4 \\ 2^3 = 8 \\ 2^4 = 16 \\ 2^5 = 32 \end{array} \rightarrow 2$ ’nin tek kuvvetlerinin birler basamağı 2, 8, 2, 8 ... şeklinde ilerler.

$3^x \rightarrow \begin{array}{l} 3^1 = 3 \\ 3^2 = 9 \\ 3^3 = 27 \\ 3^4 = 81 \\ 3^5 = 243 \end{array} \rightarrow 3$ ’ün tek kuvvetlerinin birler basamağı 3, 7, 3, 7 ... şeklinde ilerler.

$1^x + 4^x \rightarrow$ Birler basamağı $4+1=5$ olur.
Yani $1^x + 4^x = 5$ ’in katı olur.

$2^x + 3^x \rightarrow$ birler basamağı 2+3 veya 8+7’den 5 gelir.
Yani $2^x + 3^x = 5$ ’in katı olur.

$5^x \rightarrow$ zaten 5’in katıdır.

5’in katı olan üç ifadenin toplamı yine 5’in katıdır.

$$\frac{1^x + 4^x}{5'in\ k} + \frac{2^x + 3^x}{5'in\ k} + \frac{5^x}{5k}$$

Şekil 4.8. ÖA_{2.6}’nın ikinci soru için oluşturmuş olduğu algısal ispat argümanı

ÖA_{2.6}'nin oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{2.6}: Birle dördü yan yana alayım, bir üzeri x , dört üzeri x ; ikiyle üçü yan yana alıyım. 2 üzeri x , 3 üzeri x toplayacağım. 5 üzeri x zaten beşin katı. Şimdi x 'e bir versem x 'e tek demişti misal bir olsa $1+4+2+3$, 5 var beşin katı olur zaten.

A: Onu ne şekilde düşünebiliriz?

ÖA_{2.6}: Hocam şöyle 2 üzeri 3 artı 3 üzeri 3 geliyor. 2 üzeri üçten zaten 8 gelir, diğerinden de 27 geliyor. Topladığımızda beşin katını veriyor. 2 üzeri 3 sekizin katı, 8 k desek, 3 üzeri 3 yirmi yedinin katı 27 k desek. Hani birazdan x yok etmek için düşünüyorum. Topladığımızda otuz beşin katı geliyor, otuz beşin katıysa zaten beşin katı da olur. Tamam, aynı şekilde herhangi bir tek sayı için denesek de aynısını veriyor. Bu koşul sağlıyorsa 2 ile 3 sağlıyorsa bir ile dörtte sağlar. Zaten benzer mantığı uygulayacağım çünkü. Dörtten gelen her bir sayıya birin kuvvetini eklediğinde o zaten beşin katı olacak. Dördün içinde dördün katları var, birin içinde de birin katları var, bunları toplamamı istiyor. Sonuçta sürekli $5k$ elde edeceğim. 3 ile 2 içinde aynı şekilde 3 ün katı 2 nin katından $5k$ elde edeceğim. 5 üzeri x zaten hepsi beşin katı geliyor. Beşin katı olan 3 ifadeyi toptasam da beşin katını yine elde edebilirim diye düşünüyorum. Yani 1 in kuvvetleri ile 4 ün kuvvetleri; 2 nin kuvvetleri ile 3 ün kuvvetleri ayrı ayrı gruplandırılıp toplandığında örüntüden hep 5 in katı olacağını düşünüyorum.

ÖA_{2.6} kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu argümanda sorunun çözümünde 5 ile bölünebilme kuralından sayıların birler basamağını dikkate aldığı ve 1^x ile 4^x ve 2^x ile 3^x kendi aralarında gruplandırıldığı görülmektedir. Ayrıca 5^x ifadesinin de her zaman 5'in katı olacağı çıkarımında bulunmuştur. Fakat 1, 2, 3 ve 4 rakamlarının tek sayı kuvvetleri için 5 ile bölümlerinden kalanları ifade ederken bir örüntü olduğunu ve örüntünün de daima 1 için 1-1-1-... şeklinde, 2 için 2-8-2-8-.... şeklinde, 3 için 3-7-3-7-... şeklinde ve 4 için ise 4-4-4-... şeklinde devam ettiğini beyan etmiştir. Bu örüntünün nasıl ve neden bu şekilde devam edeceğini herhangi bir mantıksal gerekçelendirmeye dayandırmamıştır. Bunun nedeninin de örüntünün böyle devam edeceğine sezgisel olarak karar vererek (örüntünün devamı da böyle olacak, öyle gözüküyor gibi) algısal bir düşünme yapısına girmesi olduğu düşünülmektedir.

Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{4.6}'nın yapmış olduğu algısal ispat türündeki argüman Şekil 4.9'da verilmiştir.

2. soru

$$1^x + 2^x + 3^x + 4^x + 5^x = 5 \text{ in katı}$$

5'in her katı 5'in katı olur.

$1^x = \frac{x=1}{1}$	$\frac{x=3}{1}$	$\frac{x=5}{1}$	$\frac{x=7}{1}$
$2^x = 2$	8	2	8
$3^x = 3$	7	3	7
$4^x = 4$	4	4	4
Sıra rakamı toplamı	5 in katı	5 in katı	5 in katı

Şekil 4.9. ÖA_{4.6}'nın ikinci soru için oluşturmuş olduğu algısal ispat argümanı

ÖA_{4.6}'nın oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{4.6}: Hocam şöyle bir şey yaptım. Biz zaten beşin katı olduğu için onu almıyorum. Herhangi bir katı her zaman beşin katı olacak. Bir ve 4 için aldım. Birin her katı bir zaten dördün ise her katından biri 4 ve 6 gelecek sonu.

A: Çift kuvvetlerini de mi düşündü?

ÖA_{4.6}: Evet, evet öyle rastgele aldım, işte birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci katları diye.

A: Çiftleri almana gerek yok x tek olacak diyoruz ya tek sayıları düşünmen yeterli.

ÖA_{4.6}: Evet, sırf kuralı bulabilmek için aslında tamam bir dedim. Sonra her 3 tane yani her tek sayıda 4 ve bir denk geliyor birbirine sonu ve 5 oluyor 5 in katı olduğunu söyleyebiliriz. 2 ve 3 için ise evet, o da aynı şekilde 8 ve 7 son olarak denk geliyor. Bu da 15 oluyor, o da beşin katı oluyor. Böyle bir şey buldum.

ÖA_{4.6} kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu argümanın ÖA_{2.6} kodlu öğretmen adayının yaptığına benzer şekilde bir yaklaşım ben benimseyerek 5 ile bölünebilme kuralından oluşan örüntülerden sayıların birler basamağının herhangi bir gerekçelendirme yapmadan sezgileriyle bu şekilde devam edeceğini beyan etmiştir. Yapmış olduğu argümanda mantıksal gerekçelendirmeler yaparak analitik düşünme yapısına girmek yerine algısal bir düşünme yapısı oluşturma yoluna gitmiştir. Bu algısal ispat kategorisine dahil olan bu tür argümanları hem ikinci sınıf hem de dördüncü sınıf seviyesinden öğretmen adayı tarafından yapılıyor olması ispat algılarının sınıf seviyeleri ile doğru orantılı bir şekilde ilerlemediği düşünülmektedir.

Tablo 4.9'dan da görüleceği üzere öğretmen adaylarının yarısından fazlası (~%54) üçüncü soruda örnek tabanlı bir yaklaşım benimsedikleri görülmüştür. Birinci sınıf seviyesindeki öğretmen adaylarının tamamı bu soruda örnek tabanlı bir yaklaşım ile ispatlamaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarından 13'ü (~%54) ise ispat yapma sürecinde formül veya daha önce öğrendiği yöntem üzerinden işlemler yaparak otoriteye bağlı bir yaklaşım benimsemişlerdir. Ayrıca dört (~%17) öğretmen adayı hem örnek tabanlı hemde otoriteye bağlı argümanlar üretmişlerdir. Diğer taraftan Ayrıca öğretmen adaylarından sadece ikisi (~%8) analitik bir düşünme yolu benimseyip genelleyici örnek argümanı oluşturmuştur.

Tablo 4.9'dan da görüleceği üzere sekiz öğretmen adayının üçüncü sorunun ispatını yaparken direkt olarak formülü yazarak ispatlama yoluna giderek o ispatın neden doğru olduğu konusunda herhangi bir düşünme çabasına girmeden daha önce öğrenmiş olduğu bilgiyi direkt olarak uygulama yoluna gitmişlerdir. Otoriteye bağlı ispat türünde argüman üreten birinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{1.1}'in oluşturmuş olduğu argüman Şekil 4.10'da sunulmuştur.

③ Limit halleder. Çünkü
 $n=2 \Rightarrow 1+3 = 4 = 2^2$
 $n=3 \Rightarrow 1+3+5 = 9 = 3^2$
 $n=10 \Rightarrow 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = 100 = 10^2$ gibi değerler sağlar
 ya da $\left(\frac{\text{son terim} - \text{ilk terim}}{\text{aralık miktarı}} + 1 \right) \cdot \left(\frac{\text{son} + \text{ilk}}{2} \right)$ formülünü kullanarak bu eşitliğin her n sayısı ($n \in \mathbb{N}^+$) için sağlandığını görebiliriz

Şekil 4.10. ÖA_{1.1}'in üçüncü soru için oluşturmuş olduğu otoriter ispat argümanı

ÖA_{1.1}'in oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{1.1}: Tek sayıların toplam formülünü biz nasıl buluyorduk? Aslında bunu görmüştük. **Toplam formülünü yani lisedeyken yani soru çözerken duymuştuk.** Hatta arada öyle bir şey aklıma geldi şu an. Yani not almıştık. Tek sayılarda da çift sayılarda da ama şu an yani örnek vereyim yani ben yine başta en kolay en rahatıma gelen öğrencinin yani en rahatına giden örnek vermektir. Verelim yani 3 versem 1-3-5 olur 9 için karesi sağladı 5 i versem 9 oluyor dokuz kadar on altıya dokuz gidersek 25. Tutuyor yani ilk baştaki örneklerde tutuyor.

A: Tamam, mesela daha büyük sayılar için mesela yüze kadar götürsen ya da bine kadar götürsen tek tek mi toplayacaksın?

ÖA_{1.1}: Şey yapıyorduk, terim sayısı vardı. Yani terim sayısı aradaki terim sayısını bulurdum. Artış miktarı vardı, ikişer ikişer artıyor. Evet işte $n + 1 / 2$ o formülden yapardım bakardım. Bu sayı ilk başta bulduğum sayının karesine eşit. Herhangi bir sayıda deneyim? Son terim eksi ilk terim bölü artış miktarı artı bir çarpa terim sayısıydı değil mi? Yanlış hatırlamıyorsam. $N=10$ olsa 10'a kadar dersem kaç terim olur? Yirminin bir eksiği 19, 19 a kadar olan sayılar. $19 - 1$ bölü artış miktarı, $18 / 2 + 1$. 10 tane terim oluyor. 10 tane terimi ortanca terimle çarpıyorduk. Ortanca terimi bulmak için 10 dokuzda biri topluyoruz. 20 ortasında. Gerçi 10 tane terimi olduğu için. 2 tane ağırlığı ortanca dokuzla 11 toplarsak, 20 ortancası 10 olur o zaman. Sayıların toplamı yüz oluyor. Yüz evet, onun karesi tutuyor. Yani demek ki bu yolla da yapabiliyormuş.

A: Peki bu bir ispat mıdır? Senin için geçerli bir ispat mıdır? Yeterli midir?

ÖA_{1.1}: **Formül üzerinde bunu uygulayabildiğim için**, yani gerçekten hani deminkiler de ben örnek veriyorum ama **burada kanıtlanmış bir formül üzerine ekleyerek yaptığım için geçerliliği daha da artar benim için.**

A: Peki o kanıtlanmış formülün kanıtlandığını nereden biliyorum?

ÖA_{1.1}: **Yani tüm matematikçiler tarafından bu denenmiştir. Ben bunun ispatının doğruluğundan emin olduğum için onun üzerine yapılan başka bir ispatı da doğru buldum.**

A: Anladım, yani bu sene tatmin eden bir ispat oldu.

ÖA_{1.1}: Evet örneklerden daha iyi oldu yani.

ÖA_{1.1} kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu argümanda önce örneklerden yola çıktığı ama araştırmacı tarafından daha büyük sayılarda ne yapacağı sorulması üzerine lisede iken görmüş olduğu bir formülü hatırlamaya çalışmıştır. Formülü açıklayıp $n=10$ için hem örnek tabanlı düşünme ile bulduğu sonuç ile formülü uyguladığında bulduğu sonucun aynı olduğunu beyan etmiştir. Bir formül üzerinden bunu göstermesinin yeterli olup olmadığı sorulduğunda “kanıtlanmış bir formül olması”, “tüm matematikçiler tarafından denenmiş bir formül olması” ve “doğruluğundan emin olması” gibi nedenlerden dolayı tamamen otoriteye bağlı bir argüman oluşturma yolunu seçtiği gözlemlenmiştir.

Diğer taraftan benzer biçimde otoriteye bağlı bir argüman üreten dördüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{4.1}'in oluşturmuş olduğu argüman Şekil 4.11'de sunulmuştur.

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 1+3+5+\dots+2n-1 = n^2$$

Terim sayısı bulma

$$\left(\frac{(2n-1)-1}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{(2n-1)+1}{2}\right) = n \cdot n = n^2 \text{ olur}$$

Şekil 4.11. ÖA_{4.1}'in üçüncü soru için oluşturmuş olduğu otoriter ispat argümanı

ÖA_{4.1}'in oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{4.1}: Yani orada bunu kullanırsam hocam son terim - ilk terimi kullanarak hocam oradan acaba bir şey yakalayabilir miyim diye düşündüm. Oradan n kareyi yakalayabiliyoruz hocam terim sayısını kullanarak. Terim sayısı ile ortanca terim çarptım.

A: Tamam, peki terim sayısı ile ortanca terim'in doğru olduğu nereden biliyoruz? Yani böyle bir şey olduğunu nasıl biliyorsun?

ÖA_{4.1}: Bu sefer de şeyin ispatına mı gideceğiz hocam terim sayısı toplamını ispatına mı gideceğiz?

A: Yani bence gitmeli miyiz?

ÖA_{4.1}: *Onun doğruluğu ispatlandığı için*, yani ispatının eğer şey yapmıyorsak, biliyorsak zaten ki biliyoruz, *onu ispatını bence gerek yok hocam zaten onun doğruluğu kanıtlanmış.*

ÖA_{4.1} kodlu öğretmen adayı da ÖA_{1.1} gibi benzer bir mantık ile argümanını oluşturmaya çalıştığı görülmektedir. Öğretmen adayı direkt olarak daha önceden öğrenmiş olduğu bir formül üzerinden argümanını oluşturmuş ve formülün neden doğru olduğu sorulduğunda “formülün doğruluğunun ispatlandığı için”, “formülün doğruluğu kanıtlanmış” gibi açıklamalar ile otoriteye bağlı bir şekilde argüman ürettiği gözlemlenmiştir. ÖA_{1.1} ve ÖA_{4.1} kodlu öğretmen adaylarının otoriteye bağlı argüman üretmeleri ispat algılarının sınırlı olduğunu ve ispat algılarının sınıf seviyesinin ilerlemesi ile gelişmeyeceğini göstermektedir.

Bazı öğretmen adayları ise daha önceden öğrenmiş olduğu ya da bildiği yöntemin adımlarını herhangi bir düşünme çabası içerisine girmeden argüman üretme yolunu seçmiştir. Bu öğretmen adaylarından ÖA_{2.4}'ün üretmiş olduğu otoriteye bağlı argümanı Şekil. 4.12'de sunulmuştur.

$n=1$ için $1=1^2$
 0 zaman $n=k$ için kabul ederseniz
 $1+3+5+7+9+2k-1=k^2$ olur.
 $n=k+1$ için doğru mu?
 $\underbrace{1+3+5+7+\dots+2k-1}_{k^2} + 2k+1 = (k+1)^2$
 $k^2 + 2k+1 = k^2 + 2k+1$
 $1=1$ ✓ → eşitlik sağlandı. Kabulümüz kanıtlandı.

SORU-3

Şekil 4.12. ÖA_{2.4}'ün üçüncü soru için oluşturmuş olduğu otoriteye ispat argümanı

ÖA_{2.4}'ün oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir: “Hocam işte burada tümevarımdan yaparım ben. **Tümevarımı daha önceden bildiğim için şu an direkt aklıma gelmiş olabilir.**”

ÖA_{2.4} kodlu öğretmen adayı bu sorunun çözümünde tümevarım metodu kullandığı görülmektedir. Neden bu yöntemi kullanıldığı ve argümanını açıklaması istendiğinde “daha önceden bu yöntemi bildiği için” uyguladığını belirtmiştir. Burada öğretmen adayı argümanında kullandığı yöntemin neden doğru olduğu, nereden ve nasıl geldiğini bilmeden yaptığı, adımlarını salt bir ezber olarak yaptığı düşünülmektedir. Argümanda kullandığı stratejiyi açıklamak yerine daha önceden ezberlemiş olduğu bir yöntem için aklına geldiğini beyan ettiğinden otoriteye bağlı argüman olarak değerlendirilmiştir.

Benzer şekilde otoriteye bağlı bir argüman üreten ÖA_{2.5}'in argümanı ise Şekil 4.13'te sunulmuştur.

→ Tek sayıların toplamı formülü :

$1+3+5+ \dots + 2n-1 = n^2$ dir . Bunun ispatı için tümevarım ispat yöntemini kullanmak gerekir.

$P(n) = n^2$ diyelim we ;

$n=1$ için doğru mu $P(1)=1$ ✓ (doğru)

$n=k$ için doğru olduğunu varsayalım.

$P(k) = k^2$ doğru diyelim.

$n=k+1$ için doğru mu diye bakalım

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)^2 = 1+3+5+ \dots + (2(k+1)-1) = (k+1)^2 \\ &\Rightarrow \underbrace{1+3+5+ \dots + (2k-1)}_{k^2} + (2k+1) = (k+1)^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ olduğundan eşitliği sağladı.

Buradan da önermemiz doğru çıktı. Ümit haklıydı :)

Şekil 4.13. ÖA_{2.5}'in üçüncü soru için oluşturmuş olduğu otoriteye bağlı ispat argümanı

ÖA_{2.5}'in oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir: “Bunun ispatı şöyle değil mi? Tümevarım yöntemiyle $n=1$ için doğruysa k değerini veriyorum. Onu doğruysa $n=k+1$ doğru kabul edebiliyorum. **Bunu ispatını yapmıştım önceden.** Hocam şöyle yaptım. Önce bir için doğru mu diye kontrol ettim. Evet, doğru çıktı. Ben n eşittir k için ya pardon $p(n) = n$ kare dedim. Formülümüz n kare ya tek sayılar toplamı biri için doğru mu dedim doğru çıktı. Sonra $n = k$ için doğru olduğunu varsayalım dedim. Daha sonra $p(k)$ eşittir k kare doğrudur dedim. Varsaydığımız için daha sonra $n = k+1$ için doğru mu diye bakalım dedim. n gördüğüm yere $k+1$ yazdım. Buradan $p(k+1) = k$ artı birin karesi buradan yerine koyduğumuz zaman sağlıyor. Eşitliğin sağlandığını gösterince ispat tamamlanmış olacak zaten.”

ÖA_{2.5} kodlu öğretmen adayı da ÖA_{2.4} gibi tümevarım metodunu kullanmıştır. Aynı şekilde yapmış olduğu argümanda kullandığı yöntemin nasıl ve nereden geldiğini açıklamakta yetersiz kaldığı “daha önceden bu ispatı yaptığı” için tekrardan bu yöntemi kullanarak argüman üretme yoluna gitmiştir. Tümevarım yönteminin adımlarını tek tek

uygulayarak salt bir ezber olarak uyguladığı için otoriteye bağlı bir argüman olarak değerlendirilmiştir.

Ayrıca tablo 4.9'dan da görüleceği üzere iki öğretmen adayının analitik bir düşünme yapısı ile matematiksel akıl yürütmeler yaparak örneklerden yola çıkıp genelleme yoluna gittiği ve genelleyici örnek argümanı oluşturdukları tespit edilmiştir. Bu argümanlardan birisi olan ÖA_{4.5}'e ait argüman Şekil 4.14'de sunulmuştur.

3. soru: $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100 =$ başta ve sondan 2'li gruplara yaparsak

$101 + 101 \dots$ 50 tane $\frac{101 \cdot 100}{2}$ } 101 grupta olduğu toplam sayı $\frac{100}{2}$ 'de 100 tane sayı var ve biz 2'li grupla diyoruz ki 100'den yarısını alıyoruz. Burada hareketle 1'den n'e kadar olan sayıların toplamını $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ 'den bulabiliriz.

Soruda bize $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 =$ tek sayıların toplamını istemiş. bize verilmeyen ifadeler çift sayıların toplamı $(2 + 4 + 6 + \dots + 2n - 2 \text{ kadar})$

$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n) = \frac{(n-1)n \cdot 2}{2} = n^2 - n$ } çiftlerin toplamı

Tüm ifade ile $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n - 1 = \frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} = 2n^2 - n$ } tüm sayıların toplamı

Tüm sayıların toplamından çift sayıların toplamını çıkarsak tek sayıların toplamını bulabiliriz

$2n^2 - n - (n^2 - n) = 2n^2 - n - n^2 + n = n^2$ Bu durumda Ümit'in söylediği ifade her zaman doğrudur.

Şekil 4.14. ÖA_{4.5}'in üçüncü soru için oluşturmuş olduğu genelleyici örnek argümanı

ÖA_{4.5}'in oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir: “Gauss toplamı olabilir mi burada hocam tam hatırlamıyorum işte kim olduğunu. Yani terim sayısını, terim sayısının yarısı zaten oluyor. Bir ile 100 arası olacak. İkili gruplandırma olacak. Yani terim sayısının yarısı oluyor. Bulduğumuz sonuçlarda 101 ya. Terim sayısının bir fazlası, son terimin bir fazlası. O yüzden $n+1$ bölü iki buradan gelebilir. Hocam şimdi **bizden de istenen de şey ya 1-3-5-7-9-... mesela. Bizim yani bizden istediği şey istemediği şey de çift sayılarının toplamını istemiyor. Çift sayıların toplamından hocam oradaki mesela birden n'e kadar olan sayıları birden n'e kadar değil, çift sayıların toplamını göstereyim hocam size. Mesela 2-4-6-8-10 bundan toplamı nasıl olabilirim. 2 parantezini alırsam hocam. 1-2-**

3-4-5 zaten hocam hani biz bu birden n 'e kadar olan sayıların toplamı biliyoruz ya. n çarpı n artı bir bölü iki yukarıda gösterdik. Bir de başında hocam 2 var. İkiler de sadeleşirse 2 çarpı n çarpı $n+1/2$ dedim. **Tüm sayıların toplamından çift sayıların toplamını çıkarınca tek sayıların toplamını bulmuş olurum.**

ÖA_{4,5} kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu argümanda bir örnek üzerinden akıl yürütme yaptığı ve mantıksal gerekçelendirmelere dayandırarak ilerlediği görülmektedir. Öncelikle öğretmen adayı toplam durumdan istenmeyen durumun çıkarılmasından istenen duruma ulaşacağı fikrini beyan etmiştir. Yani tek sayıların toplamı isteniyorsa ardışık sayıların toplamından ardışık çift sayıların toplamını çıkarır isek istenen ardışık tek sayıların toplamına ulaşılacağını beyan etmiştir. Ardışık sayıların toplamı için genel bir yapı oluşturmuş ve hem ardışık çift sayıları hem de ardışık tek sayıları bu genel yapıdan yola çıkarak genellemeler yaparak işlemlerine devam ettiği görülmüştür. Öğretmen adayının genelleyici örnek kategorisine girecek bir argüman oluşturduğu düşünülmektedir.

Son olarak Tablo 4.9'dan da görüleceği üzere öğretmen adaylarından 15'i (%62,5) dördüncü soruya formal bir ispat yapma yoluna giderek analitik ispat yaklaşımı benimsedikleri görülmüştür. Bu 15 öğretmen adayından 13'ünün (~%87) cebirsel bir çözüm yaparak ispatlama yoluna gittikleri tespit edilmiş olup bunun nedenin sorunun öğretmen adaylarının aşına olduğu cebirsel işlemlerle çözüme oluşturabilecek şekilde bir soru olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Öğretmen adaylarından yedisi (~%29) ise ispat yapma sürecinde örnekler üzerinden argüman oluşturma yoluna giderek deneysel ispat yaklaşımı benimsemişlerdir. Bunların yanında öğretmen adaylarından üçü (%12,5) sembolik ifadelerin manipülasyonları ile ispatlama yoluna gitmişlerdir.

Formal ispat yapan ikinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{2,4}'ün oluşturmuş olduğu argüman Şekil 4.15'te sunulmuştur.

$$\begin{aligned}
& x \geq 1, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{ispat?} \\
& x = k \quad \text{icin} \rightarrow k + \frac{1}{k} \geq 2 \quad \text{— kabul edelim} \\
& k^2 + 1 \geq 2k \\
& x = k+1 \quad \text{icinde} \quad \text{dogru mu?} \\
& k+1 + \frac{1}{k+1} \geq 2 \\
& (k+1)^2 + 1 \geq 2k+2 \\
& k^2 + 2k + 2 \geq 2k + 2 \\
& k^2 \geq 0 \rightarrow \text{Tam kare bir ifadenin stabilitesi en küçük} \\
& \text{sayı "0" dir. Esitlikle bu şart sağlanır. 0 yüzden} \\
& \text{Kabulumuz doğrudur.}
\end{aligned}$$

Şekil 4.15. ÖA_{2.4}'ün dördüncü soru için oluşturmuş olduğu formal ispat argümanı

ÖA_{2.4}'ün oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{2.4}: Bu x için sağlıyorsa bu k içinde sağlar. K için sağlıyorsa k artı bir için de sağlar. Ben yine tümevarıma gittim ama. Şimdi hocam elime şöyle bir ifade geçti, x kare + bir büyük eşit $2x$. X negatif sayılar için hepsini sağlar. Bu ifade kesinlikle sağlar. Ama sıfır için sağlar mı? Şarta baktığımızda bir büyüktür ki onun için de sağlar şimdi. Yani burada deneme sayı değer versek çok mantıksız olur. O yüzden farklı değerler için ben bir düşünceye sahip olurum. Yani x eşittir k derim. K kare + 1 büyük $2k$ mıdır diye sorarım kendimi ya da böyle bir kabul ederim. Sonra eee ilk = $k + 2$ de olur $k + 2$ diyeyim. Adım adım gideceğim. Bir için zaten doğru. $X=k$ için doğru olsun, kabul ettim onu tamam $k+1$ için doğru mudur diye baktım. K kare + $2k + 1$ sonra büyük eşit $2k + 2$. Buradan k kare büyük eşit sıfır çıkar. Hocam bu zaten kesin bir ifade ki, biz sayının bir tam sayının karesi zaten ya sıfırdır ya da sıfırdan büyüktür, pozitifdir yani.

A: Peki bu senin yeterli ve kabul edilebilir mi?

ÖA_{2.4}: O zaman ne olmuş oldu x eşittir $k+1$ içinde doğru olduğunu gösterdik. Aynen ya böyle gösterim olur. Şey, yani ben benim için 2 tane zaten bir kabul sonrası ona göre işlem yaptım. Öbür ifade de farklı ifadesi de doğru çıktığı için kabul ederim. Ben bunu yani doğrudur derim.

ÖA_{2.4} kodlu öğretmen adayının argümanında klasik tümevarım metodunu kullandığı görülmektedir. Öğretmen adayının açıklamaları dikkate alındığında adım adım ne yaptığını açıklamakta ve kullandığı methoda neyi, ne amaçla yaptığının farkında olduğu gözlenmiştir. Bulduğu sonucun bir kabulden yola çıkarak bulduğunu ve $k^2 \geq 0$ ifadesinin her zaman doğru

olmasından dolayı baştaki ifadenin de doğru olduğunu beyan ettiği görülmektedir. Öğretmen adayının tümevarım metodunun adımlarını açıklayarak ve sonuçlarını gerekçelendirmek kaydıyla formal bir ispat içeren argüman ürettiği düşünülmektedir.

Benzer şekilde formal ispat yapan dördüncü sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{4.5}'in oluşturmuş olduğu argüman Şekil 4.16'da sunulmuştur.

4. Soru : $x \geq 1$ $x + \frac{1}{x} \geq 2$

$x \geq 1$ kabul edilirse

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$
$$x^2 + 1 \geq 2x$$
$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \text{ midir?}$$
$$\downarrow$$
$$(x-1)^2 \geq 0$$
$$\sqrt{(x-1)^2} \geq \sqrt{0}$$
$$|x-1| \geq 0$$

$x-1 \geq 0$ (x 1'den büyük değerler için $x \geq 1$)

$x \geq 1$ } verilen koşulu sağladığı için $x \geq 1$ için $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesi her zaman için doğrudur.

Şekil 4.16. ÖA_{4.5}'in dördüncü soru için oluşturmuş olduğu formal ispat argümanı

ÖA_{4.5}'nin oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{4.5}: Hocam her zaman doğru olduğunu düşünüyorum.

A: Nasıl düşünüyorsun bir fikrin var mı yani?

ÖA_{4.5}: x zaten sayı birden büyük olacak tamam birden büyük olacak ve sıfırdan da büyük olacak. Yani birden büyük zaten birden büyük olduğunu biliyoruz. Birden büyük eşit zaten, yani bir ve birden büyük ya. Yani bir olunca zaten eşitlik sağlanıyor. $1 + 1/1$ den sağlanıyor.

A: Peki ondan sonra diğer sayılar için sağlanır mı?

ÖA_{4.5}: Evet, çünkü zaten birden, yani ikiden sonraki sayılar her zaman ikiden büyük olacak ya. 1 ile 2 arasına bakmamız gerekiyor.

A: 1 ile 2 arasında sonsuz sayı var hepsini deneyecek misin?

ÖA_{4.5}: Hayır o zaman şöyle yapalım. Düzenlesek x kare artı 1 büyük eşit $2x$ oldu. x kare eksi $2x$ artı 1 büyük eşit sıfır olur. Bu ifade x eksi birin parantez karesidir. Her iki tarafı kök içine alsak. Çift kuvvet olduğundan mutlak değer olarak dışarı çıkar. Mutlak değer de zaten sonuç

her zaman sıfırdan büyük eşit olur. Bulduğum sonuç her zaman doğru olduğu için yola çıktığım baştaki ifade de her zaman doğru olur.

ÖA_{4.5} kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu argümanda direkt olarak x değerinin 1'den büyük eşit olması durumunda eşitliğin sağlandığını belirtmiştir. 1'den büyük tamsayılarda eşitliğin sağlandığı bariz bir şekilde görülmekte olup araştırmacının sorduğu sorulardan sonra 1 ile 2 arasındaki sayılara da bakması gerektiğini ifade etmiştir. 1 ile 2 arasında sonsuz tane sayı olduğundan ve hepsini tek tek deneyemeceğini anlamıştır. Daha sonra öğretmen adayı cebirsel işlemler yaparak ifadeyi düzenlemiş ve sonuç olarak $(x-1)^2 \geq 0$ ifadesine ulaşmıştır. Ulaşmış olduğu ifade her zaman doğru olduğundan baştaki ifadenin de her zaman sağlanması gerektiğini beyan etmiştir. Öğretmen adayı mantıksal gerekçelendirmelerini cebirsel ifadeler ve işlemlerle destekleyerek formal bir ispat üretme yoluna gittiği görülmektedir.

Tablo 4.9'dan da görüleceği üzere dördüncü soruda üç öğretmen adayının matematiksel ifadelerin, sembollerin anlamı düşünülmeden ve herhangi bir zihinsel düşünme çabasına girilmeden sadece sembolik manipülasyonlar yaparak ispatlama yoluna gittikleri saptanmıştır. Bu iki öğretmen adayından biri olan ÖA_{4.4} kodlu öğretmen adayının argümanı Şekil 4.17'de sunulmuştur.

Soru 4: $a, b \in \mathbb{Z}^+$

$x = \frac{a}{b}$ olsun

$a \geq b$ olsun

$$x + \frac{1}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$\frac{a}{b} \geq 1, 0 < \frac{b}{a} \leq 1$ olduğu aşikardır.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ olacaktır.}$$

Şekil 4.17. ÖA_{4.4}'ün dördüncü soru için oluşturmuş olduğu sembolik ispat argümanı

ÖA_{4.4}'ün oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir: “A ve b pozitif tam sayıların elemanı olsun dedim. x eşittir a bölü b olsun ve a büyük eşit b olsun dedim. Büyük eşit olmak üzere, çünkü sonuçta x büyük eşit bir dedik bu zaten olması gereken şey x artı bir bölü x ifadesi a bölü b artı b bölü a veriyor. Bununla içler dışlar, daha doğrusu kesir toplaması şeklinde yaptığımızda a kare artı b kare bölü ab oluyor. A , b den büyük

olduğundan a bölü b büyük eşit 1 olur. B bölü a ise ters çevirdiğimizden sıfır ile bir arasında olur. Toplarsak a bölü b artı b bölü a ifadesi büyük eşit 2 olur. Buradan hareketle x artı 1 bölü x büyük eşit 2 ifadesi dolayısıyla doğrudur diyebilirim. Sonucun ifadenin doğru olduğunu gösterebilirim. Bu şekilde doğru olduğunu söyleyebilirim.”

ÖA₄₄ kodlu öğretmen adayının yapmış olduğu argümanda a ve b gibi iki farklı bilinmeyen kullanarak x ifadesini a bölü b gibi bir ifadeye dönüştürme yoluna gitmiştir. X büyük eşit bir ifadesine ulaşmak içinde a sayının b den büyük eşit olduğunu belirtmiştir. Burada bazı matematiksel işlemler yaparak bir çıkarımda bulunmuş ve ifadenin her durumda doğru olduğunu açıkladığını düşünmüştür. Fakat öğretmen adayı sadece sembolik manipülasyonlar yapmış olup bu sembollere ve ifadelere ilişkin gerekçelendirmelerini yapmadan sadece işlemsel olarak bazı sonuçlara ulaştığı düşünülmektedir. Öğretmen adayının yüzeysel olarak ve ne yaptığını bilmeden argümanını oluşturduğu düşünülmektedir.

Ayrıca öğretmen adaylarından ÖA_{3,5} dördüncü soruyu iki farklı yolla çözmüş ve bu çözümlerden biri örnek tabanlı düşünmeye dayalı diğer çözüm ise formal bir ispat olduğu görülmektedir. Örnek tabanlı çözümün ortaokul seviyesindeki öğrenciler için uygun olduğunu düşünürken formal ispatın lise seviyesine uygun olduğunu belirtmiştir. Buradan hareketle öğretmen adayının ispat algısının sınırlı olduğu söylenebilir. Çünkü lise seviyesinin altındaki öğretim seviyelerinde örnek tabanlı düşünme olması gerektiğini beyan etmiştir. ÖA_{3,5}'in ilgili soruya ilişkin çözümleri Şekil 4.18 ve Şekil 4.19'da verilmiştir.

Soruda bize x bir doğal sayı demediğini öğrenciye hatırlatırım soruda x yerine $\frac{3}{2}$ verirse işlemi tekrar yaparsa ne olur diye sorduğumda;

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9+4}{6} = \frac{13}{6} = 2,1666 \dots$$

Sayıları bile verse işlem doğru olduğunu söylerim ve Soruyu doğru olduğunu söylerim

8. Sınıf seviyesine uygun olduğunu düşünmekteyim

Şekil 4.18. ÖA_{3,5}'in dördüncü soru için oluşturmuş olduğu örnek tabanlı (1.çözüm)

argümanı

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$x = 1$ çift katlı } barın lise
bölüne g'iyor ama



x sayısı 1 ve 1 den
büyük olduğu her
zaman bu soru doğru
çıkacaktır.

2. İspatı ise lise için uygun olduğunu düşünmekteyim.

Şekil 4.19. ÖA_{3.5}'in dördüncü soru için oluşturmuş olduğu formal ispat (2.çözüm) argümanı

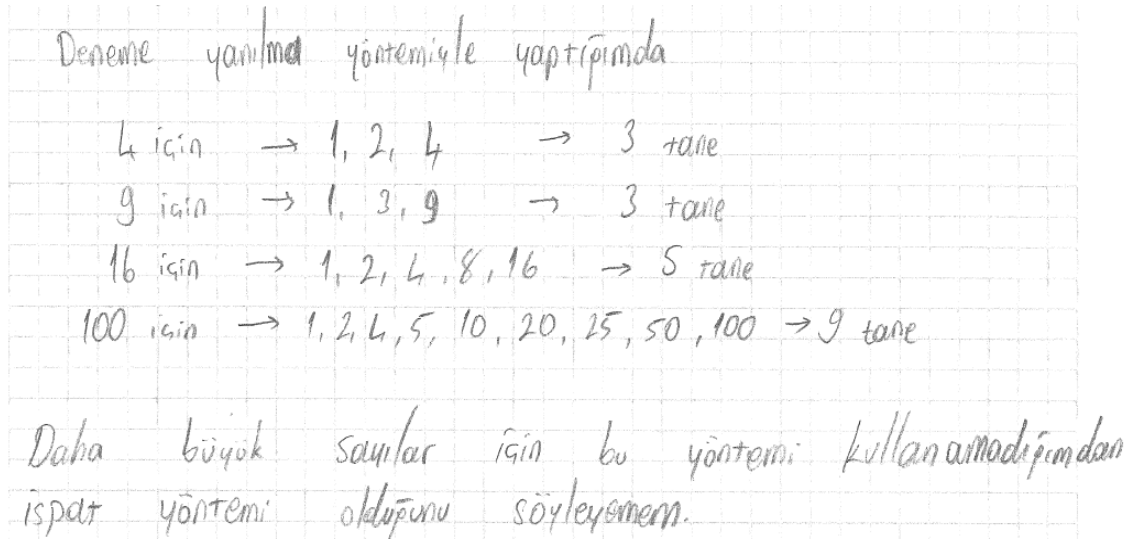
ÖA_{3.5}'in oluşturmuş olduğu argümanlara ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

A: Neden iki farklı argüman için farklı seviyeler için uygun dedin?

ÖA_{3.5}: Yani aslında sekizinci sınıfta da verilebilecek bir ispat yok diye. **Ortaokul öğrencileri için zor olur örnek daha kolay olur diye düşünüyorum.**

ÖA_{3.5} kodlu öğretmen adayının dördüncü soru için neden iki farklı argüman yapıldığının sorulması üzerine sınıf seviyesi ile ilişkilendirerek argümanları ürettiğini beyan etmiştir. Yani örnek tabanlı ispatın ortaokul öğrencilerinin anlaması açısından daha kolay olacağını düşünürken cebirsel bir argümanın ise lise seviyesi için uygun olduğunu ifade etmiştir. Burada öğretmen adayının ispat algısının sınırlı olduğu ve ispatı akademik ilerleme ile ilişkilendirdiği anlaşılmaktadır.

Dikkat çekici başka bir bulgu ise öğretmen adaylarından ÖA_{1.6}'nın birinci ve ikinci soruda oluşturmuş olduğu argümanlarda tespit edilmiştir. Öğretmen adayı iki soruda yapmış olduğu argümanlarda örnek tabanlı bir düşünme yapısı ile ilerlediği ama büyük sayılarda deneyemediği için ispatlayamadığını belirtmiştir. Burada öğretmen adayı her ne kadar örnek tabanlı ispatın geçerli bir ispat olmadığını farkında olsa da ispat algısının sınırlı olmasından dolayı yinede örnek tabanlı ispatlar yapma yolunu seçmiştir. Öğretmen adayının iki soru için yapmış olduğu argümanlara ilişkin görseller Şekil 4.20 ve Şekil 4.21'de sunulmuştur.



Şekil 4.20. ÖA_{1.6}'ın birinci soru için oluşturmuş olduğu örnek tabanlı argümanı

ÖA_{1.6}'nın oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{1.6}: Fatih şimdi pozitif tam kare olan bir doğal sayının. Bunu şey olarak, yani doğruluğunu işte hocam mesela şey yapabilir miyiz? 4-5 örnek verip hepsinde tutarsa bu ispat yöntemine girer mi acaba?

A: Senin öyle bir ispat yöntemin mi var? Bu seni ikna ediyor mu? Yeterli oluyor mu senin için?

ÖA_{1.6}: Ya pozitif tam var ya mesela işte dördü düşündüğümde evet doğal sayın çarpanların sayısı her zaman tek. Evet, dördün mesela çarpanları nelerdir? İşte ikiye bölünür ve bire bölünür, dörde bölünür. Pardon, evet, 3 tane 4,1,2 dörde bölünür, 3 tanedir, 4 için sağlar derim. Mesela 16 yı düşündüğümde yada dokuzu düşündüğüm dokuzu sağlar ve dokuzu düşündüğümde 1 olur 3 olur ve 9 olur o da 3 tane. Ondan sonra 16 yı düşündüğümde de 1,2,4, 8 ve 16. Bu sefer 5 tane doğal pozitif tam sayın doğal sayının olduğunu görüyorum. Bu da tek gösteriyor 25 i düşündüğümde. 1-5-25, bu da 3 tane gösterir. **Bundan sonra aslında daha da beni ikna etmesi için sayı biraz daha büyötmeyi denerim.** 100 ü denesem. Bir olur, 2 olur, 4 olur, 5 olur, 10 olur, 20 olur, 25 olur, 50 olur ve 100 olur hocam 9 tane çıktı ve **daha yüksek sayılarda da bu yöntemin sağladığını görüyorum ve galiba bu beni ikna eder.**

A: Peki mesela daha daha büyük bir sayıda da bunun olabileceğini söyleyebilir miyiz ya da bütün sayılarda bunun olabileceğini sadece bu beş örneğe bakıp söyleyebilir miyiz?

ÖA_{1.6}: Evet, **küçük sayılarda tek tek kafadan bölebiliyoruz da bunun için daha yüksek sayılarda bir yöntem gelmiyor aklıma** açıkçası. Yani acaba mesela işte varsayarak gitmek

mesela $x-x$ diyip gitmek. Belli bir örüntü de 4 yaptığında işte 3, dokuzda 3, 16 da 5, 25 te 3 yani bir örüntü de göremediğim için aslında. Aynen hep belirli bir şeyde sayıların doğal sayı çarpanlarının sayısı belli bir şekilde artıp azalmıyor. O örüntü şeklinde bir örüntü şeklinde düşünemedim. **Daha yüksek sayılarda yani pek şey gelmiyor aklıma yani.**”

ilk başta deneme yanılma ile yapmaya çalışıyorum.
 $X=1$ için 15 sayılar
 $X=3$ için 225 sayılar
Ama yine aynı sorun karşına çıktı. Daha büyük sayılarda ise yaramıyor. Bu yüzden bunda da ispat yöntemi olarak ele alamıyorum.

Şekil 4.21. ÖA_{1.6}'ın ikinci soru için oluşturmuş olduğu örnek tabanlı argümanı

ÖA_{1.6}'nın oluşturmuş olduğu argümana ilişkin ifadeleri şu şekildedir:

ÖA_{1.6}: Benim genelde aklıma ilk başta böyle değer vermek geliyor. İlk başta işe yarıyor da az önceki gibi sayıları yükselttiğimizde sıkıntı çıkıyor. Mesela bir versem. Bir verdiğimizi tutuyor. 3 versem. 2 sayı için tuttuğu 1 ve 3 için tuttu ama sayılar gittikçe artmaya başladı. 5 için denediğimde daha da sıkıntılı olacak. Aslında içimden bir ses denersem olacaktı gibi de deneyemiyorum.

A: Kaça kadar deneyeceksin?

ÖA_{1.6}: Mesela 5 yaptığımda daha da yükseliyor. Tabii ama. Denemek ilk ikisi için tutuyor ya denemek dışında hani bilmiyorum benim aklıma pek bir şey gelmiyor gibi ya ilk soruda da öyleydi. Yani **deneyerek bir yere varamıyorum**. 3 için olsa, 5 için olsa 7 için daha da zor olur. Yani deneme yöntemiyle gösteremeyeceğim. Bu ispata doğruluğunu veya yanlışlığını deneme yöntemiyle gösteremeyeceğim. İspat yönteminde yani başka nasıl yöntemler var hocam ben pek görmediğim için akıl yürütemiyorum. **Yani sadece örnek vererek çözmek ilk başta aklıma geliyor.**

ÖA_{1.6} kodlu öğretmen adayının birinci ve ikinci soruda oluşturmuş olduğu argümanlar için örnek tabanlı bir düşünme yapısında olduğu fakat aslında sadece örnek vermenin çok büyük sayılarda işe yarayıp yaramayacağını gösterme konusunda sıkıntı çıkaracağını farkında olmasına rağmen yine de “ilk olarak aklına gelen yöntem olması”, “farklı bir ispat

yöntemi görmediği için” gibi nedenlerden dolayı bu eğilimde olduğu anlaşılmaktadır. Burada öğretmen adayında biraz da olsa sadece örneklerle yapılan argümanların ispat olarak yeterli olmayacağına dair farkındalık olmasına rağmen yine de örnek tabanlı düşünmesi ispat algısının kısıtlı olduğunu göstermektedir.

İspat yapma becerilerine ait bulgular genel olarak göz önüne alındığında öğretmen adaylarının birinci ve üçüncü soruda büyük çoğunluğu, ikinci soruda tamamı ve dördüncü soruda yarısına yakını sınırlı ispat algısının göstergesi olan dışsal (otoriter, sembolik) ve deneysel (örnek tabanlı, algısal) ispat şemalarını içeren argümanlar üretirken öğretmen adaylarının birinci soruda üçte birlik kısmı, üçüncü soruda çok az bir kısmı ve dördüncü soruda çoğunluğu analitik (genelleyici örnek, formal) ispat şemasına giren argümanlar ürettikleri tespit edilmiştir. Ayrıca ilk üç soruda her sınıf seviyesinden en az bir öğretmen adayı sınırlı ispat algısının göstergesi olan dışsal (otoriter, sembolik) ve deneysel (örnek tabanlı, algısal) ispat şemalarını içeren argümanlar üretirken dördüncü soruda en az üç sınıf seviyesinden öğretmen adayları sınırlı ispat algısı içeren (otoriter ve örnek tabanlı) argüman üretmişlerdir. Öte yandan birinci ve dördüncü soruda her sınıf seviyesinden en az bir öğretmen adayı analitik ispat şeması (genelleyici örnek, formal) içeren argüman üretirken üçüncü soruda sadece üçüncü ve dördüncü sınıf seviyelerinden birer öğretmen adayı analitik ispat (genelleyici örnek) şemasına ait argüman üretme yoluna gitmişlerdir.

4.3. Öğretmen Adaylarının İspatı Değerlendirme Biçimlerine Dair Bulgular

Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirme biçimlerini saptamak amacıyla 2 (iki) adet matematiksel ispat yapılabilecek soruya ilişkin her soru için 4 (dört) tane argüman sunulmuş ve bu argümanları değerlendirmeleri istenmiştir. Sorulan bu iki soru daha önce öğretmen adaylara ispat yapma becerilerini ölçmek için sorulan “ $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$, ($n \in \mathbb{N}^+$)” ifadesinin her zaman doğru olduğunu gösteriniz.” ve “ $x \geq 1$ olmak üzere $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ” ifadesinin her zaman doğru olduğunu gösteriniz.” sorularından oluşmaktadır. Oluşturulan dört farklı argüman ise Harel and Sowder (1998) tarafından oluşturulmuş ispat şemalarından dışsal, deneysel ve analitik ispat şemalarını içeren argümanlardır. Daha sonra her soru için argümanlar değerlendirildikten sonra 3 (üç) farklı soru sorulmuştur. Bu sorular “Yukarıdaki argümanlardan hangisi sizin yapacağınız argümana en yakındır? Nedenleriyle açıklayınız?”, “Yukarıdaki argümanlardan hangisini öğrenciniz yaparsa sizi daha çok ikna edebilir? Nedenleriyle açıklayınız?” ve “Yukarıdaki argümanlardan hangisinin matematiksel açıdan

daha güçlü olduğunu düşünüyorsunuz? Nedenleriyle açıklayınız?” şeklindedir. Bu sorular öğretmen adaylarının kendi düşünme tarzlarının ve bilişsel eğilimlerinin neler olduğunu, ispatın ikna edici yönünü nasıl algıladıklarının ve öğretmen adaylarının doğruluk, geçerlik ve genellik ölçütlerini nasıl yorumladıklarının ortaya çıkarılabilmesi amacıyla yöneltilmiştir.

Tablo 4.10. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirme biçimlerini ölçme amaçlı sorulan sorular

Soru No	Soru
1	Ümit herhangi bir $n \in \mathbb{N}^+$ için $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 1+3+5+\dots+2n-1 = n^2$ eşitliğinin her zaman doğru olduğunu söylemiştir. Sizce Ümit haklı mıdır? Bu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?
2	Ali $x \geq 1$ olmak üzere $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesinin her zaman doğru olduğunu söylemiştir. Sizce Ali haklı mıdır? Bu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?

Tablo 4.10’da öğretmen adaylarının ispatı değerlendirme biçimlerini ölçmek için yöneltilen sorular yer almaktadır.

“ $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$, ($n \in \mathbb{N}^+$) ifadesinin her zaman doğru olduğunu gösteriniz.” ve “ $x \geq 1$ olmak üzere $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesinin her zaman doğru olduğunu gösteriniz.” ifadelerine ilişkin sunulan argümanların geçerli olup olmama durumlarına dair öğretmen adaylarının cevapları Tablo 4.11’de sunulmuştur.

Tablo 4.11. Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanların geçerliliğinin değerlendirilmesine ilişkin cevaplar

Soru	Argüman	Geçerli	Geçerli Değil
İspatın Değerlendirilmesi 1. Soru	1.Argüman (Tümevarım- Formal)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₁₆ , ÖA ₂₁ ,ÖA ₂₂ ,ÖA ₂₃ ,ÖA ₂₄ ,ÖA ₂₅ ,ÖA ₂₆ , ÖA ₃₁ ,ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₃ ,ÖA ₃₄ ,ÖA ₃₅ ,ÖA ₃₆ , ÖA ₄₁ ,ÖA ₄₂ ,ÖA ₄₃ ,ÖA ₄₄ ,ÖA ₄₅ ,ÖA ₄₆	

Tablo 4.11. (Devam) Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanların geçerliliğinin değerlendirilmesine ilişkin cevaplar

Soru	Argüman	Geçerli	Geçerli Değil
İspatın Değerlendirilmesi 1. Soru	2.Argüman (Görsel- Genelleyici Örnek)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₂₁ , ÖA ₂₂ ,ÖA ₂₃ ,ÖA ₂₄ ,ÖA ₂₅ ,ÖA ₂₆ ,ÖA ₃₁ , ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₃ ,ÖA ₃₄ ,ÖA ₃₅ ,ÖA ₃₆ ,ÖA ₄₁ , ÖA ₄₂ ,ÖA ₄₃ ,ÖA ₄₄ ,ÖA ₄₅ ,ÖA ₄₆	ÖA ₁₆
	3.Argüman (Örnek Tabanlı- Deneyisel)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₂₄ ,ÖA ₃₃ ,ÖA ₄₁ , ÖA ₄₂	ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₁₆ , ÖA ₂₁ ,ÖA ₂₂ ,ÖA ₂₃ , ÖA ₂₅ ,ÖA ₂₆ ,ÖA ₃₁ , ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₄ ,ÖA ₃₅ , ÖA ₃₆ ,ÖA ₄₃ ,ÖA ₄₄ , ÖA ₄₅ ,ÖA ₄₆
	4.Argüman (Eksik Formal- Otoriter)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₁₆ , ÖA ₂₁ ,ÖA ₂₂ ,ÖA ₂₃ ,ÖA ₂₅ ,ÖA ₂₆ ,ÖA ₃₁ , ÖA ₃₃ ,ÖA ₃₅ ,ÖA ₄₁ ,ÖA ₄₂ ,ÖA ₄₆	ÖA ₂₄ ,ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₄ , ÖA ₃₆ ,ÖA ₄₃ ,ÖA ₄₄ , ÖA ₄₅
	1.Argüman (Cebirsel- Formal)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₁₆ ,ÖA ₂₁ , ÖA ₂₂ ,ÖA ₂₃ ,ÖA ₂₄ ,ÖA ₂₅ ,ÖA ₂₆ ,ÖA ₃₁ , ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₃ ,ÖA ₃₄ ,ÖA ₃₅ ,ÖA ₄₁ ,ÖA ₄₂ , ÖA ₄₃ ,ÖA ₄₄ ,ÖA ₄₅ ,ÖA ₄₆	ÖA ₁₃ ,ÖA ₃₆
İspatın Değerlendirilmesi 2.Soru	2.Argüman (Görsel- Genelleyici Örnek)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₁₆ , ÖA ₂₁ ,ÖA ₂₂ ,ÖA ₂₃ ,ÖA ₂₄ ,ÖA ₂₅ ,ÖA ₂₆ , ÖA ₃₁ ,ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₃ ,ÖA ₃₄ ,ÖA ₃₅ ,ÖA ₃₆ , ÖA ₄₁ ,ÖA ₄₂ ,ÖA ₄₃ ,ÖA ₄₄ ,ÖA ₄₅ ,ÖA ₄₆	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₃₃ ,ÖA ₄₁ ,ÖA ₄₂
	3.Argüman (Örnek Tabanlı- Deneyisel)		ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₄ , ÖA ₁₅ , ÖA ₁₆ , ÖA ₂₁ , ÖA ₂₂ , ÖA ₂₃ ,ÖA ₂₄ , ÖA ₂₅ , ÖA ₂₆ ,ÖA ₃₁ , ÖA ₃₂ , ÖA ₃₄ ,ÖA ₃₅ , ÖA ₃₆ , ÖA ₄₃ ,ÖA ₄₄ , ÖA ₄₅ , ÖA ₄₆

Tablo 4.11. (Devamı) Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanların geçerliliğinin değerlendirilmesine ilişkin cevaplar

Soru	Argüman	Geçerli	Geçerli Değil
İspatın Değerlendirilmesi 2.Soru	4.Argüman	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₁₆ ,	ÖA ₂₄ ,ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₄ ,
	(Eksik	ÖA ₂₁ ,ÖA ₂₂ ,ÖA ₂₃ ,ÖA ₂₅ ,ÖA ₂₆ ,ÖA ₃₁ ,	ÖA ₃₅ ,ÖA ₄₃ ,ÖA ₄₅
	Formal	– ÖA ₃₃ ,ÖA ₃₆ ,ÖA ₄₁ ,ÖA ₄₂ ,ÖA ₄₄ ,ÖA ₄₆	
	Otoriter)		

Tablo 4.11’de öğretmen adaylarının ispatı değerlendirme biçimlerini ölçmek amacıyla yöneltilen iki adet sorunun ve her soru için oluşturulan argümanların geçerliliğinin değerlendirilmesine ilişkin bilgiler yer almaktadır. Tablo 4.11’den de görüleceği üzere öğretmen adaylarına birinci matematiksel ifade ile ilgili oluşturulan argümanların geçerli olup olmadığı ya da hangilerinin kendileri için geçerli olduğu sorulduğunda bütün öğretmen adayları tümevarım metodu ile oluşturulan formal bir argüman olan birinci argümanın geçerli olduğu belirtmişlerdir. Genelleyici örnek mantığı ile oluşturulan görsel argüman olan ikinci argümanı geçerli sayan öğretmen adayı sayısı 23 (~%96) iken sadece bir (~%4) öğretmen adayı geçerli olmadığını beyan etmiştir. Bu öğretmen adayına (ÖA_{1,6}) bu görüşünün nedeni sorulduğunda “*bu argüman yani diğeri kadar beni böyle tam tatmin etmedi, çünkü daha çok böyle mesela **denklem olarak görmek** ya en azından bende bilmiyorum daha büyük bir etki gösteriyor şekillerde. Pek de şey yapamadım yani öyle. **Yani denklem olarak görünce sanki somutlaşmış olarak gördüm de.**”* açıklaması yapmış olup denklem olarak oluşturulan argümanları kabul ettiğini beyan etmiş olup yani argümanın biçimine odaklandığı görülmektedir. Örnek tabanlı oluşturulan üçüncü argümanı ise her sınıf seviyesinden en az bir öğretmen adayı olmak üzere toplam yedi (~%29) öğretmen adayının geçerli olarak kabul ettikleri tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarından bazılarının neden geçerli kabul ettiklerine dair açıklamalar sunulmuştur. Örneğin; ÖA_{1,1}: “*Yani ben **hep bunu kullanırdım. Burada doğru çıktıktan sonra onu doğru kabul ederdim. İfade bir şeyin doğruluğu olduğuna göre demek ki öyle yapıyormuş. Yani geçerlidir**”* ve ÖA_{1,3}: “*Deneme sonra da bir sonuca varmış, şöyle bir sonuca varmış. Yerine koyduğumda muhtemelen evet doğru çıkıyor. **Sonsuza kadar denesem yine muhtemelen aynı çıkmayacak. O yüzden bu da geçerli.**”* açıklamalarında kendisi kullandığı yöntem, sürekli bu şekilde devam edeceğinin düşünülmesi gibi gerekçeler sunarak bu argümanı geçerli saymışlardır. İkinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{2,4}: “***Yani yüzden sonra da binden sonra da oluyordur. Bence bu da kabul***

edilebilir.” geçerli sayma nedeni olarak algısal olarak bu şekilde devam edeceğini düşünmesidir. Benzer şekilde **ÖA_{3,3}**: “Geçerlidir. Çünkü verilen değerlerde ortaya çıkan sayıların adedi tekse ortanca ifadenin karesi toplamalarını verir. Sayıların adedi çiftse ortadaki iki sayının aritmetik ortalamasının karesine eşittir. Verilen n değerleri için bunu sağlamaktadır.” geçerli sayma nedenini birkaç örnekten bunun genellendiğini düşünmesi olarak tespit edilmiştir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{4,1}**: “Hocam hep sayılar vermiş. Sonuçta yine örnek üzerinden gidiyor. Örnek üzerinden bir genelleme yapıyor. Yani verdiği örnekler gayet mantıklı örnekler. Kendim de yani bu şekil yapardım diye düşünüyorum.” ve **ÖA_{4,2}**: “Kabul ettim. Fazlası ve sayı sonra **farklı bir sayıda şey oluyorsa doğru ispatlanıyorsa**, yani değer vererek. Yoksa kabul ederim ki öyle çıkıyor.” açıklamaları ile mantıklı örnekler olması, kendi yapacağı yöntem olması gibi nedenlerden dolayı geçerli saymışlardır. Ayrıca verilen cevaplardan bazı öğretmen adaylarının sadece örnek kullanılmasının genelleme olduğu, örneklerin mantıklı olmasının yeterli olduğunu düşünmeleri, verilen örnekler dışında da böyle devam edeceğini düşünerek algısal olarak düşünmeleri, kendi yaptığı strateji olması gibi nedenlerden ötürü ispat algılarının sınırlı olduğu anlaşılmaktadır. Eksik bir formal argüman olarak oluşturulan argüman olan dördüncü argümanı ise 17 (~%71) öğretmen adayı geçerli olarak kabul etmişlerdir. Örnek olarak; “**ÖA_{1,1}**: Hem benim kullandığım yöntemi kullanmış hem de yapılan işlemlerin doğru olması.”, “**ÖA_{1,2}**: Ya bence bu da ispat ya hocam sonuçta **her zaman farklı farklı dediğinizde her zaman n kareyi veriyor**. Ya o sonucu veriyorsa bu şekilde de veriyor. O şekilde verirse bir şeyin 2-3 tane ispatı olabilir bence.”, “**ÖA_{1,3}**: Evet gayet de ispat. Evet bunun için yani öncekiler de şekil kullanmıştı. Bu da **cebirsal ifade**. Bu da açıklayıcı.”, “**ÖA_{1,4}**: Aynen evet, ben bunu ispat olarak alırım aynen. Parçalama olarak **farklı bir bakış açısı** sunduğu için sundu bana şu an.”, “**ÖA_{1,5}**: Bu da çok mantıklıymış o zaman. Hocam bence bu da çok mantıklı. Hani bunda da şeye toplam formülünü ayırmış. Önce sonra şey yapmış n kare, bu da çok mantıklı çünkü bu sağlar yani kaç tane sayıda denesek bunu sağlar. **Formül olarak mesela n de sağlıyorsa o zaman hepsine sağlar**. Bu yüzden bana mantıklı geldi. Bence bu ispat olarak kabul edelim bunu da.”, “**ÖA_{1,6}**: Bu da bu ispat olur hocam. İşte tek tek açıklamış, **denkleme dökmüş** yani **toplam sembolünün ayrılma özelliğinden** dolayı. Yani **tam bir denkleme dökmüş** bana daha çok yani böyle doğru olurmuş hissi veriyor. Yani **cebirsal olması yani böyle beni daha da tatmin ediyor**.” açıklamalarında “kullandığı yöntem olması, işlemlerin doğru olması, cebirsal ifade olması, denklem olması, sembol kullanması” gibi gerekçelerle geçerli saymış olmaları argümanın biçimine

odaklanarak karar verdikleri anlaşılmaktadır. İkinci sınıf öğretmen adaylarından “**ÖA_{2.3}**: Kabul edilebilir çünkü argüman 1 ve 2 de olduğu gibi genele uygulayabileceğimiz bir akış söz konusudur.”, “**ÖA_{2.5}**: Evet, bunu da sayarım. Çünkü işlem yaptığımız zaman çıkıyor. Evet kesinlikle bir de hani *n* kare çıkıyor ya sonuç onun nereden geldiğini de ayrıntılı gösterdiğiniz için mantıklı geliyor.” ve “**ÖA_{2.6}**: Hani daha formüller üzerinden formalize etme üzerinden ilerliyor. Adımlarda da bir yanlışlık yok.” açıklamalarında “mantıklı gelmesi, formülize etmiş olması” gibi ifadelerle benzer şekilde argümanın görünümüne odaklandıkları tespit edilmiştir. Benzer şekilde “**ÖA_{3.1}**: Evet bunu kabul edebilirim. Ya şu verilen toplamsal ispatın. Yani hem toplamsal durumu olarak ele aldığımızda hem de işlemsel olarak sağlandığını gösterdiğimiz için kabul edebilirim.”, “**ÖA_{3.3}**: Doğrudur, kullanılabilir bir argümandır. Yapılan işlemler sonucunda *n* kare ifadesine ulaşılmıştır ve işlemler oldukça açıklayıcı ve mantıklıdır.” ve “**ÖA_{3.5}**: Ayrı ayrı yapmışsınız. Eski bilgileri kullandığınız için bu doğru bence.” açıklamalarında “işlemlerin doğru olması, mantıklı olması, eski bilgileri kullanması” gibi nedenlerden geçerli saydıkları görülmüştür. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından “**ÖA_{4.1}**: Yani bu da bayağı güzel yapmış hocam bence olur yani. Çünkü toplam sembolünün özellikleri kullanarak hocam yine cebirsel şekilde ispatını göstermiş burada. Evet, ben ispat olarak kabul ederim hocam bunu çok güzel bayağı beğendim ve gayet mantıklı.”, “**ÖA_{4.2}**: Bunu kabul ederim, doğru kabul edilebilir hocam ki. Diğerleri değer vererek yapıyor. Bu direkt kesin bir şekilde yani nasıl diyeyim, direkt ispatlamış. Yani matematiksel ifadeleri işte işlemleri kullandığı için ben. Yani desteklemiş. Pek güzel çözmüş.” ve “**ÖA_{4.6}**: Evet aslında. Bu matematiksel dilin çok yüksek olduğu bir ispat.” açıklamalarında “sembol kullanması, cebirsel ifadeler olması” gibi gerekçelerle geçerli saydıkları görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının bazılarının argümanın biçimine odaklanarak yani cebirsel olması, işlemlerin doğru olması, matematiksel ifadelerin kullanılmış olması gibi nedenlerden dolayı geçerli argüman olduğunu söylerken bazıları ise formüllerin kullanılmış olmasından dolayı otoriteye bağlı düşünme yapısına girdikleri görüldüğünden bu öğretmen adaylarının ispat algılarının sınırlı olduğu düşünülmektedir.

Tablo 4.11’den de görüleceği üzere öğretmen adaylarına ikinci matematiksel ifade ile ilgili oluşturulan argümanların geçerli olup olmadığı ya da hangilerinin kendileri için geçerli olduğu sorulduğunda 22 (~%92) öğretmen adayı cebirsel bir çözüm ile oluşturulan formal bir argüman olan birinci argümanın geçerli olduğu belirtirken iki (~%8) öğretmen adayı geçerli saymadıklarını beyan etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının neden geçerli argüman olarak kabul etmediklerine dair açıklamaları incelendiğinde “**ÖA_{1.3}**: Yani bu çözümü herkes

yapar. X eksi birin karesi büyük eşit sıfır olur. Tamam ama verilen ifade her zaman doğrudur diye **ama denememiş etmemiş**. Yani ben bunu söyledim ama kendim inanmadım açıkçası ya da inandıramadım. Bu bence tatmin edici değil. Yani bu zaten denklemin çözümü bu $x-1$ karesi büyük eşit sıfır. Evet. O zaman büyük eşit bir demesini anlamı ne? Hayır, yani hem **kısa olmaz diye düşünüyorum** hem de yani hani tamam, hepsi oluyordu. Belki değerlerin hepsi oluyordur ki bunu ben de söyleyebilirim. Her zaman doğrudur desem yine bana nasıl derler o yüzden ispat değil” ve “ÖA_{3,6}: Yani **sadece işlem yapmış** başka hiçbir şey yok. Yani **biraz da açıklayıcı olması** gerekiyordu bence. Yani doğru sonuca götürmüş ama bize yani burda şu hani x eksi birin karesi büyük eşit sıfır olur ve verilen ifade her zaman doğrudur yerine şöyle demesi gerekiyordu işte **herhangi bir işte x bir k gibi bir sayı olsun**. K sayılar olsun gibi.” ifadelerini kullandıkları ve argümanın kısa olması, sadece işlemlerin olması farklı bilinmeyenlerin kullanılmaması gibi nedenlerden dolayı bu iki öğretmen adayı argümanın biçimine odaklanarak geçerli bir argüman olarak kabul etmedikleri tespit edilmiştir. Ayrıca bütün öğretmen adayları genelleyci örnek mantığı ile oluşturulan görsel argüman olan ikinci argümanı geçerli bir argüman olarak görmüşlerdir. Diğer taraftan örnek tabanlı argümanın geçerli bir argüman olduğunu beyan eden beş (~%21) öğretmen adaylarına örnek olarak “ÖA_{1,1}: Bu tam da benim kastettiğim **maddeler halinde gidiş**. Bir için değer vermiş ha örnekler vermiş ya bu tek tek değerler vermiş. **Benim her zaman yaptığım yöntemi kullanmış**. Büyük sayılar içinde değer vermiş. Yani yine de ben işlem olacağı için üşeneceğim için o büyük sayılarda işlem yapmazdım. Yani yine de benim **her zaman ilk aklıma gelen yöntemi örnek verme olduğu için** ya ben kendimce onu kabul ediyorum. **Bizim anlamamız için en iyi yolu** yani doğru olduğunu kanıtlayan bir şey gördü mü öğrenci he diyor. Bunda doğru bir öbürünü görüyor, bunda da doğru. O zaman **devamında da doğru gibi bir algı oluşuyor**. Yine de ben o yüzden yani ispat saymamız gerekiyor.” ve “ÖA_{1,3}: Şu an bu yazdıklarına bakınca 5 tane yazmış, hepsinde de sağlıyor. Evet. **Büyük rakam, sayılar da vermiş. Evet daha da artıyor. Kesinlikle büyük olacak**. O zaman her zaman doğrudur.” açıklamalarında “maddeler halinde olması, ilk aklıma gelen yöntem olması, devamında da doğru olacağı algısı” gibi ifadelerle argümanın biçimine odaklanılmış veya algısal bir düşünme yapısına girdikleri tespit edilmiştir. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarında ÖA_{3,3} ise “Geçerli bir argümandır. Verilen değerlerde 1 den büyük değerlerde ifadenin doğruluğunu her zaman sağlamaktadır.” açıklamasında algısal olarak ve görünüşe bakarak karar verdiği anlaşılmaktadır. Benzer şekilde dördüncü sınıf öğretmen adaylarından “ÖA_{4,1}: He bu da şey yapıyor. Genelleştirmiş örnek yapıyor. Hocam zaman 1,

5, 10 ve 100 için. Yani olabilir hocam aynen bu da olur, bu da olabilir genellediğini düşünüyorum burada. Olabilir.” ve “**ÖA_{4.2}**: Direkt değer verip yapmış, başta **benim yaptığım şeyi yapmış aslında**. Ama dediğiniz gibi tüm reel sayıları düşünmek gerekiyor. Bir şey veya 5. Bir ifade içinde ama **yine sağlayacağını bildiğim için kabul edebilirim**.” açıklamalarında birkaç örnek ile genelleme yaptığını düşünmesi, kendi stratejisi olması gibi gerekçelerle argümanı geçerli saymışlardır. Ayrıca sadece birkaç örnek vererek genelleme olacağını düşünmeleri, algısal olarak birkaç örnekten sonra algısal olarak ifadenin her zaman doğru olacağını düşünmeleri, her zaman yaptıkları yöntem olmasından dolayı geçerli olduğunu düşünmeleri gibi nedenlerden dolayı ispat anlayışlarının kısıtlı olduğu anlaşılmaktadır. Öte yandan 18 (%75) öğretmen adayı eksik formal argüman olan dördüncü argümanın geçerli olduğunu beyan etmişlerdir. Örneğin birinci sınıf öğretmen adaylarından; “**ÖA_{1.1}**: Hiç aklıma gelmezdi aslında. Yani benim aklıma gelecek bir yöntem değil bu. Yani görünüşe göre eşitlik sağlanmış. Evet, **işlemler doğru**. Benim böyle bir yöntem kullanacağım sanmıyorum aslında. Yine de **eşitlik işlem doğru sonucuna ulaştığı için** yani ispat kabul edilebilir ama benim aklıma gerçekten böyle bir şey gelmezdi.”, “**ÖA_{1.2}**: Ben bunu kabul ederim. Çünkü baştan demiş ya aritmetik ortalama geometrik ortalamadan şey olur. Büyük olur, evet. Aritmetik ortalama geometrik ortalamadan daha büyük çıkıyor. **Böyle bir büyük eşitlik varsa orada da sağlanması lazım** diye düşünüyorum. Eğer burada da sağlıyorsa demek ki doğrudur”, “**ÖA_{1.3}**: Evet, yani aritmetik ortalama geometrik ortalamadan her zaman daha büyük. Buradan hareketle diyor mantıklı. x artı bir bölü x büyük eşit 2. Doğru, yani **farklı bir bakış açısı** da. Yani açıklamasıyla uyuyor. O yüzden **işlemleri de doğru açıklaması da uyuyor**. Yanlış bir şey yok.”, “**ÖA_{1.4}**: Evet, hocam bunu ispat olarak kabul ederim. **Farklı bir bakış açısından dolayı**. Yani düşünce bakımından da ispat olarak kabul ederim. Düşün farklı düşünce açısından bu kadar.” ve “**ÖA_{1.5}**: O zaman evet olur yani bunu düşünebilsem eğer bu sonuç çıktığı ispatladığı için bu da doğrudur yani bu da bir ispat hani **hata olmadığı için tüm sayıları verdiği için**.” açıklamalarında “işlemlerin doğru olması, farklı bakış açısı gibi gerekçelerle argümanın biçimine odaklanarak geçerli saydıkları tespit edilmiştir. Benzer biçimde ikinci sınıf öğretmen adaylarından “**ÖA_{2.1}**: Bence bu da ispat olarak kabul edildi. Tüm yüzden elde olan harcıyorduk. Ortalama yöntemiyle ortalamadan büyük eşit olduğunu biliyoruz. Zaten bunu uyguladığı için yani **elimizde olan kesin bildiğimiz bir şeyi üzerinden hareketle çıktığı için** ve **doğru bir sonuca ulaştığı için** bence bu da olur ispat sayılır. Daha önce bildiğimiz şeylerle **cebirsel ifadeler doğru kullanarak ulaşmış**.”, “**ÖA_{2.3}**: Bunda alabiliyoruz bence çünkü. Zaten burada bizim bir **matematiksel**

*bilgimizin aslında cebirsel ifadesini oluşturmuş oluyoruz. Yani şunun ispatı gibi oluyor aslında. Yani aritmetik ortalamanın geometrik ortalamadan büyük olduğunu bir uzantısı gibi. Bunu doğru kabul etmemiş miyiz zaten. Yani kabul edip gidiyoruz. Yani kabul edilebilir. Diğer 2 tanesi kadar değil, yani bir ve 2 gibi değil tabi ama bunun da üçe göre biraz daha ciddiye alabiliyorum. Yani örnekle kullanıma göre daha geçerli.” ve “ÖA_{2.5}: Aritmetik ortalama geometrik ortalamadan diyor. Her zaman büyük eşit bunu biliyoruz. Oranın aritmetik ortalamasını aldığınız zaman evet sağladığı değerleri yaptığımız zaman sağlıyor. Yani şey **formül yapmışsınız. Yani matematiksel işlemlerde falan bir sıkıntı yok.** En güzeli ispat olarak kabul edilebilir.” yapmış oldukları açıklamalarda “cebirsel ifade içermesi, matematiksel işlemlerin doğru olmaı, formül içermesi” gibi ifadelerle argümanın görünümüne odaklanarak geçerli saymışlardır. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından “ÖA_{3.1}: Ya öğrenci bunu biliyor ve bunu istenilen verilen işleme sağlandığını göstermiş sadece. Yaptığı mantıklı ama verilen işlemin ispat olarak kabul eder miyim? Yani mantıklı geliyor. Tamam, evet, evet. Sağlamış evet. Ya **işlemin doğruluğunu sağlamış ama aslında ederim yani ederim. Evet. Yani öğrenciye bunu elde etmek için belirli işlemler yapmış. Matematiksel işlemlerin doğruluğu. Doğru, yani doğru yapmış. Ederim ya neden ederim. Bulmuş sonucu ve mantıklı bir işlemlerle bulmuş sonucu.”**, “ÖA_{3.3}: Kullanılabilir mantıklı bir argümandır. Çünkü aksiyoim olarak aritmetik ortalamanın geometrik ortalamadan negatif olmayan reel sayılarda her zaman büyük olduğunu biliyoruz. Bu neticede yapılan işlemler sonucunda verilen eşitsizliğin doğruluğu ispatlanmıştır. **İşlemler ve sonuç doğru, matematiksel sembolleri ifadeleri doğru kullanmış.**” ve “ÖA_{3.6}: Kabul ederdim bunu. Çünkü öncelikle işte aritmetik ortalamanın geometrik ortalamadan her zaman büyük eşit olduğunu söylemiş. Ondan sonra sayıların aritmetik ortalamasıyla geometrik ortalaması arasında ki ilişkiden. Evet, şey ispatlamış yani. **Matematiksel açıdan işlemler açısından bir sıkıntı yok bence.**” açıklamalarında kullandıkları ifadelerden de görüleceği üzere benzer şekilde argümanın biçimine odaklanmışlardır. Buna paralel olarak “ÖA_{4.1}: Bence farklı bir şeyden gitmiş. Yani düşünme. Tarzında biraz değişik. Yani, çünkü gerçekten çok farklı bir düşünce hocam. Yani söylediği **açıklama gayet doğru** aritmetik ortalama sonuçta geometrik ortalama büyük eşit. Yani hocam açıklama gayet mantıklı yani bu. Matematiksel olarak da aritmetik ortamının geometrik ortalama büyük işte olduğu da ispatlamış bir şey. **Bunu onun doğruluğunu da bildiğim için** yani olabilir.”, “ÖA_{4.2}: Yani aritmetik ortalama geometrik ortamdan büyük olduğundan bizim ifadenin de doğru olduğu sonucuna vardı. **Farklı bir yol.** Yani farklı bir yoldan gitmiş. Aklıma gelmezdi benim bu. Sonuç hep sağladığı için kabul*

edebilirim. Tamam, yani *sonucu doğruysa işlemler de doğru*. Yani bu şekilde bu yoldan gitmek yerine farklı yollarda aynı sonuca ulaşıyorsa öğrenci kabul edebilirim”, ve “ÖA_{4.6}: Evet. Yine burada *farklı matematik konularıyla ilgili böyle bağdaştırma yaparak güzel bir sonuca varılmış, belki daha sağlanmış.*” açıklamalarında “işlemlerin doğru olması, farklı yol kullanması, açıklamaların doğru olması” gibi gerekçelerle argümanı geçerli saydıklarını ifade etmişlerdir. Ayrıca işlemlerin doğru olması, sonuca ulaşmış olması, farklı bakış açısı olduğu, denklem/formül olması, matematiksel ve cebirsel ifade içermesi, farklı konularla bağdaştırmış olması gibi nedenlerden dolayı eksik formal bir argüman olarak oluşturulan dördüncü argümanın geçerli olduğunu belirtmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının argümanın biçimine odaklandığı ve ispat algılarının sınırlı olduğu tespit edilmiştir.

Tablo 4.12. Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanlardan en yakın olan argümana ilişkin cevaplar

Soru	Argüman	Öğretmen Adayları
İspatın Değerlendirilmesi	1.Argüman (Tümevarım- Formal)	ÖA _{2.1} ,ÖA _{2.2} ,ÖA _{2.4} ,ÖA _{2.5} ,ÖA _{2.6} ,ÖA _{3.1} ,ÖA _{3.2} , ÖA _{3.6} , ÖA _{4.3} ,ÖA _{4.5} ,ÖA _{4.6}
	2.Argüman (Görsel- Genelleyici Örnek)	ÖA _{1.2} ,ÖA _{1.4} ,ÖA _{3.4}
	3.Argüman (Örnek Tabanlı- Deneyisel)	ÖA _{1.1} ,ÖA _{1.3} ,ÖA _{1.5} ,ÖA _{1.6} ,ÖA _{2.3} ,ÖA _{3.3} ,ÖA _{4.1} , ÖA _{4.2}
	4.Argüman (Eksik Formal- Otoriter)	ÖA _{3.5} ,ÖA _{4.4}
İspatın Değerlendirilmesi	1.Argüman (Cebirsel- Formal)	ÖA _{1.2} ,ÖA _{1.4} ,ÖA _{1.6} ,ÖA _{2.2} ,ÖA _{2.3} ,ÖA _{2.4} ,ÖA _{2.5} , ÖA _{2.6} ,ÖA _{3.1} ,ÖA _{3.2} ,ÖA _{3.3} ,ÖA _{3.5} ,ÖA _{4.1} ,ÖA _{4.2} , ÖA _{4.3} ,ÖA _{4.4} ,ÖA _{4.5} ,ÖA _{4.6}
	2.Argüman (Görsel- Genelleyici)	ÖA _{2.1} ,ÖA _{3.4} ,ÖA _{3.6}

Tablo 4.12. (Devamı) Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanlardan en yakın olan argümana ilişkin cevaplar

Soru	Argüman	Öğretmen Adayları
İspatın Değerlendirilmesi	3.Argüman (Örnek Tabanlı- Deneysel)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₅
	4.Argüman (Eksik Formal- Otoriter)	

Tablo 4.12’de matematiksel ispatların değerlendirilmesi konusunda sunulan birinci ve ikinci ifadelere ilişkin argümanlardan hangi öğretmen adayının hangi argümanın en yakın argüman olarak gördüklerine ilişkin bilgiler yer almaktadır. Tablo 4.12’den de görüleceği üzere öğretmen adaylarının birinci ifadeye ilişkin oluşturulan argümanlardan en yakın olan argüman için 11’i (~%46) tümevarım metodu ile oluşturulan formal bir argüman olan birinci argümanı seçmişlerdir. Örnek olarak “**ÖA_{2.2}**: Birinci argüman. Çünkü şöyle, belki hep hepsiyle ilk defa karşılaşmış olsaydım renkli olanı seçebilirdim. Hem görsele hitap ettiği için hem de bunu aynı şekilde işlemlerle de ifade edebilirdik. Öğrencilere daha fazla duyuya hitap etmiş olurdu. O yüzden bunu seçebilirdim ama bu dediğim gibi önce. Herhalde **yatkınlığım olduğu için ya da önceden gördüğüm için** bunu (birinci argümanı göstererek) tamam daha yakın buldum.” açıklamasında daha önceden gördüğü, yatkın olduğu yöntemden dolayı seçtiğini beyan etmiştir. Benzer şekilde “**ÖA_{3.6}**: Tümevarım kullanmıştım. **Aklıma ilk geldiği için alıştığım için o (birinci argüman) bana daha yakın geldi.**” açıklamasında “aklına gelen ilk yöntem” olmasından dolayı seçmiştir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından “**ÖA_{4.3}**: Hocam ben argüman biri yaparım. Çünkü genelde böyle yapıyoruz hocam. **Aşına olduğum yöntem olduğu için hocam.**”. Burada öğretmen adayları “ilk aklına gelen yöntem, aşına olduğu yöntem” açıklamasında “aşına olduğu yöntem” olmasından dolayı birinci argümanı seçmiştir. Öğretmen adaylarından sekizi (~%33) ise örnek tabanlı oluşturulan argümanı en yakın argüman olarak belirtmişlerdir. Örneğin birinci sınıf öğretmen adaylarından “**ÖA_{1.3}**: Ben kendim yaparsam üçüncüyü yaparım ki **hep onu yapıyorum** ama işte bunu da nerede duracağımı. Şimdi tek tek işte ikiyi beşi onu denedim. Sonra düşünüp bir denklem kurmaya çalışırım. Bu daha mantıklı gibi. Aslında birinci hocaların da isteyeceğidir. Muhtemelen üniversitedeki hocaların böyle istiyorlar. Tek tek

açıklayarak yazmaya birinci daha mantıklı. Ama ben genelde üçüncüyü tercih ederim yani. Yani **kendi stratejim bu** (üçüncü argümanı göstererek) olduğu için aslında.” yaptığı açıklamasında sürekli kullandığı yöntem olmasından dolayı en yakın argüman olarak seçmiştir. İkinci sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{2,3}** ise “İlk olarak aklıma bu gelir hocam. Öğrencilerin genelde de yaptığı üçtür bence.” açıklamasında benzer olarak “ilk aklına gelen şey” olmasından dolayı seçtiğini beyan etmiştir. Benzer biçimde üçüncü sınıf öğretmen adaylarından “**ÖA_{3,3}**: Örnek vermek kolayıma geliyor. İlk başta örnek vererek göstermek mantıklı geliyor. Bu argüman daha yakın bana.” açıklamasında ilk olarak örnek vermenin aklına geldiğini ifade etmiştir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{4,1}** ise “Üç şu an bana en yakın geliyor hocam. Çünkü ben de **genellikle hep bu şekilde yapıyorum** hocam. Üç ve dördü daha çok yakın kullanıyorum hocam bunlardan. Ama bunlardan en yakın üç olur. Stratejik olarak genelde cebir kullanarak ama cebiri kullanamıyorsam da hocam bu şekilde genelleştirilmiş örnek üzerinden gidiyorum. Şu an en yakın üç geldi bana.” açıklamasında kendi kullandığı yöntem olmasından dolayı en yakın argüman olarak seçtiğini beyan etmiştir. Yani öğretmen adaylarının “hep bu yöntemi kullanmaları, ilk akıllarına gelen yöntem olması” gibi nedenlerden dolayı örnek tabanlı argümanı yakın seçtiklerini göstermektedir. Üç (~%13) öğretmen adayı genelleyici örnek mantığı oluşturulan görsel şema olan ikinci argümanı seçerken ikisi (~%8) ise eksik bir formal argüman olarak oluşturulan dördüncü argümanı seçmişlerdir. Genelleyici örnek argümanını seçen öğretmen adaylarının açıklamalarına örnek olarak “**ÖA_{1,2}**: Bence ikincisi en yakın olur. Çünkü o **soyut düşünceyi somuta döküyor** burada. Bu olur bence.” ve “**ÖA_{1,4}**: İki çünkü şimdi mesela hocam matematiği hep işlem olduğunu düşünüyorduk ya. Hani bunu bir **geometri üzerine şekillendirmemiz görsellik açısından** daha böyle bir **somutlaşma açısından** daha iyi oldu. Sayılarla daha çok uğraşmadan. Daha güzel bir örüntü olduğu için.” açıklamalarında soyut düşüncenin somuta dönüşmesi, görsellik katması gibi nedenlerden dolayı ikinci argümanı seçmişlerdir. Üçüncü sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{3,4}** ise “Yapacağım argüman bu (2.argüman) olurdu çünkü daha açıklayıcı, nasıl olduğunu kanıtlayan, modelleştiren argümandır.” açıklamasında modelleştirerek daha çok açıklayan argüman olmasından dolayı bu argümanı en yakın argüman olarak seçmiştir. Öte yandan eksik formal argümanı en yakın argüman olarak seçen öğretmen adaylarından **ÖA_{4,4}** “Argüman dört yakındır. Çünkü **cebirsal ifade kullanmış ve daha önceden doğruluğu bilinen bir formül kullanarak çözmüş**. Kendime en yakın bu olur.” açıklamasında argümanın “cebirsal olması, formül içermesi” gibi faktörlere odaklanarak karar verdiğini göstermiştir.

Tablo 4.12'den de görüleceği üzere öğretmen adaylarının ikinci ifadeye ilişkin oluşturulan argümanlardan en yakın olan argüman için 18'i (%75) birinci argümanı seçerken hiçbir öğretmen adayı eksik bir formal argüman olarak oluşturulan dördüncü argümanı en yakın argüman olarak seçmemiştir. Öte yandan üçü (%12,5) ise örnek tabanlı oluşturulan argümanı en yakın olarak belirtmişlerdir. Örnek olarak **“ÖA_{1.1}: Yani her şey de olduğu gibi ben önce örnek veriyordum, üçteki gibi. Evet bir ve 2 arası örnekler vermiştim. Bir de benim aklıma paydanın büyüklüğü gelmişti. O limitte paydanın büyük olmasını isterken ya oradan aklıma gelmişti. Payda daha hızlı büyüyordu bu bilgi. Ama yine de ben ilk örnekleri verdiğim için üçü diyorum yani ben üçü kullanırım kullandım da zaten. Yani ilk yaptığım strateji örnek verme olduğu için üçüncü argüman. Örnek verme aslında öğrencinin direkt yapması gereken öğretmenin öğretmesi gerekiyor.”**, **“ÖA_{1.3}: Muhtemelen yine 3 diyeceğim ben. Değer vererek daha açıklayıcı oluyor, daha anlaşılıyor, anlaşılır oluyor. Daha doğrusu yani gözle de görülüyor. Ya ikiden sonra 5,10,100. Bir sürekli artıyor. Kesin ikiden büyük olacak buna ikna olunur. Yani oluyorlardır.”** ve **“ÖA_{1.5}: Hocam ben mesela ben dedim ki bir dedim uı biri denediğimizde ikiden büyük evet. Sonra birden sonra 1 bölü 2, 1 bölü dördü denedim. Sonra zaten ikiden sonra. Evet, hepsi büyük olduğu için ben dedim hepsini sağlıyor. Birden sonra hepsini sağladığı için doğrudur dedim. Ben birkaç tane deneyip söylediğim için benimki de üçe daha yakın deneme yanılmayla gittiğim için.”** ifadeleri ile sadece birkaç örnek vererek başka örneklerde de doğru çıkacağını düşünerek her zaman doğru olacağı algısına kapılması, sürekli ilk aklına gelen ve aşına olduğu strateji olması gibi nedenlerden dolayı örnek tabanlı üçüncü argümanı en yakın argüman olarak seçme yoluna gittikleri tespit edilmiştir. Ayrıca üç (%12,5) öğretmen adayı genelleyici örnek mantığı oluşturulan görsel şema olan ikinci argümanı seçmişlerdir. Örnek olarak ikinci sınıf öğretmen adaylarından **“ÖA_{2.1}: İkinci argüman. Yani modelleme yöntemi kullanarak ispatlamış hem öğrencinin görsel olarak unutmamasını sağlıyor. Ben bunu bir kere görsem benim için unutmam. Anlarım ve daha iyi anlamda anlamlandırabilirim. Bu örneği ve bence daha güzel bir ispat olur.”** açıklamasında görsel olmasından dolayı seçtiğini beyan etmiştir. Benzer biçimde üçüncü sınıf öğretmen adaylarından **“ÖA_{3.4}: Yapacağım argüman bu (2.argüman) olurdu çünkü daha açıklayıcı, nasıl olduğunu kanıtlayan, modelleştiren argümandır.”** ve **“ÖA_{3.6}: En yakındır dediğiniz için o zaman sanırım ikinciye seçerdim. Öğrencilerin işlemin yanında hani biraz daha görsel hani uzamsal biraz daha bağlamsal düşünmelerini desteklediği için.”** ifadeleri ile görselliği, modelleştirmeyi, işlem becerisinin

yanında uzamsal düşünmeyi de sağlaması gibi nedenlerden dolayı ikinci argümanı en yakın argüman olarak seçtikleri tespit edilmiştir.

Tablo 4.13. Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanlardan en çok ikna edici olan argümana ilişkin cevaplar

Soru	Argüman	Öğretmen Adayları
İspatın Değerlendirilmesi 1.Soru	1.Argüman (Tümevarım-Formal)	ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₂₁ , ÖA ₂₂ ,ÖA ₃₁ ,ÖA ₄₃
	2.Argüman (Görsel- Genelleyici Örnek)	ÖA ₂₃ ,ÖA ₂₄ ,ÖA ₂₆ ,ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₄ , ÖA ₃₅ ,ÖA ₃₆ ,ÖA ₄₄ , ÖA ₄₅ ,ÖA ₄₆
	3.Argüman (Örnek Tabanlı-Deneysel)	ÖA ₃₃ ,ÖA ₄₁
	4.Argüman (Eksik Formal- Otoriter)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₆ ,ÖA ₂₅ ,ÖA ₄₂
İspatın Değerlendirilmesi 2.Soru	1.Argüman (Cebirsel- Formal)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₂₄ , ÖA ₂₅ ,ÖA ₂₆ ,ÖA ₄₁ , ÖA ₄₂ ,ÖA ₄₄
	2.Argüman (Görsel- Genelleyici Örnek)	ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₆ ,ÖA ₂₁ ,ÖA ₂₂ ,ÖA ₂₃ , ÖA ₃₁ ,ÖA ₃₂ ,ÖA ₃₄ , ÖA ₃₅ ,ÖA ₃₆ ,ÖA ₄₃ ,ÖA ₄₅ ,ÖA ₄₆
	3.Argüman (Örnek Tabanlı-Deneysel)	
	4.Argüman (Eksik Formal- Otoriter)	ÖA ₃₃

Tablo 4.13'te matematiksel ispatların değerlendirilmesi konusunda sunulan birinci ve ikinci ifadelere ilişkin argümanlardan hangi öğretmen adayının hangi argümanın en ikna edici argüman olarak gördüklerine ilişkin bilgiler yer almaktadır. Tablo 4.13'ten de görüleceği üzere öğretmen adaylarının birinci ifadeye ilişkin oluşturulan argümanlardan en

çok ikna edici olan argüman için 10'u (~%42) genelleyici örnek mantığı oluşturulan görsel şema olan ikinci argümanı seçmişlerdir. Örnek olarak “**ÖA_{2.3}**: İkincisi. Çünkü **görsel olarak somutlaştırıldığı için** kavraması daha kolay gelir. Yani şekillerle hani örüntüyü daha kolay görebiliyorum.” ve “**ÖA_{2.4}**: Olayı kalıcılık açısından düşünürsem argüman iki derim. Bunu getirmesi bana alanları öğrendiğini gösterir alan kavramının öğrenmiş olduğunu gösterir ve geometrik kavramlara görselleştirerek bence oturttuğunu düşünürüm ben. O yüzden argüman ikiye getirse beni daha tatmin eder.” açıklamalarında görselliği ön plana çıkararak bu argümanı seçtikleri görülmüştür. Benzer şekilde “**ÖA₃₂**: Gözle görünmesi daha kolay. **Akılda kalıcı, işlemsel değil ve görsel algılamaya yönelik bir ispattır.**” açıklamasında işlemsel değil de görsel olmasından dolayı en ikna edici argüman olarak seçmiştir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{4.4}** ve **ÖA_{4.5}** sırasıyla “Öğrenci bunu (ikinci argümanı göstererek) öğrencinin hani bir **ileri düzey bir ilişkilendirme** veya bir **modelleme yeteneğinin olduğunun** göstergesidir ve bu öğrencinin açıkçası tam biraz pozitif ayrımcılık gibi bir şey oluyor.” ve “İkincisi. Hocam hem **biraz görsel olduğu için** biraz önce beni çekti hem de hani hocam karenin alanından bilmiş zaten karenin alanın da buluyorduk. O yüzden bu daha cazip geldi.” ifadeleri kullanmışlar ve görsel argümanın “ileri düzey ilişkilendirme, görsel olması, modelleştirme yapması” gibi nedenlerden dolayı en ikna edici argüman olarak seçtiklerini belirtmişlerdir. Sekiz (~%46) öğretmen adayı ise tümevarım metodu ile oluşturulan formal bir argüman birinci argümanı en çok ikna edici argüman olduğunu belirtmişlerdir. Tümevarım yönteminin en ikna edici olduğunu belirten bazı öğretmen adaylarının açıklamalarına örnek olarak “**ÖA_{1.2}**: Bir daha çok ikna eder. Çünkü birde farklı farklı şey yapmış. Yani tek aşamada yapmamış bunu n’e bir şey vermiş bir k vermiş, bir k artı bir vermiş hepsinde sağlıyor. Yani n’e ne verirken sağladığı için o benim için daha şey oldu. **Aşamalı yapmış**”, “**ÖA_{1.3}**: Bizden de bunu (birinci argümanı göstererek) istiyorlar. Zaten hocalar ne yaptığınızı tek tek yazın cümle halinde **açıklayıcı olsun**. Kafanızda hiçbir şey yapmayın. Bir de yani. Bunun için bu böyle. Bunun için bu böyle çok daha açıklayıcı. Bence kitaplarda da böyle zaten.”, “**ÖA_{1.4}**: Bir daha çok ikna eder. Yani eşitlikleri birbirine eşitlemesi aynı, aynı eşitliğe devam etmesi n’i k artı biri olarak farklı bir sayı seçmesi dolayı. **Matematiksel işlemlerde** var.” ve “**ÖA_{1.5}**: Hocam ben olsam birincisinde daha ikna olurum, yani **daha açıklayıcı** bir de. Bir de şey, bilmiyorum, yani birincisi daha ikna edici bence. Matematiksel açıdan şey mi böyle **formal şeyleri kullanması**” açıklamalarında “aşamalı olması, açıklayıcı olması, matematiksel işlemler içermesi, formal yapı olması” gibi gerekçelerden dolayı en ikna edici argüman olarak

seçmişlerdir. İkinci sınıf öğretmen adaylarından “ÖA_{2.1}: Bir çünkü hani hem yanlışlığını ortaya çıkaran ifade yok burada ve biz o k için direkt doğru olduğunu kabul ettiğimiz için o k ya istediğimiz sayıya koyabiliriz. Hani sonuçta doğru kabul ediyoruz ve bir fazlasını doğru olduğunu gördüm zaten. Bir daha çok **düşünme stratejime düşünme yapma uyan yöntem olduğu için.**” ve “ÖA_{2.2}: Bu yöntemi bildiğim için, adım adım gitmiş, matematiksel işlemler doğru ve düzenli yapıya sahip diye daha çok ikna eder.” ise en ikna edici argüman olarak seçme nedenlerine “düşünme yapısına uygun, bildiği yöntem, adım adım düzenli olması” gibi gerekçeler sunmuşlardır. ÖA_{3.1} ise “Bir beni daha çok ikna eder. Bir **düzen içerisinde olması aşamalı olarak yapmasından dolayı.**” açıklamasında “düzenli, aşamalı olmasını” baz aldığını beyan etmiştir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarında “ÖA_{4.3}: Bir daha ikna edici. Öğrenciler için de benim için bilinmeyenler, cebirsel ifadeler bilinmeyenler olduğu için.” açıklamasında cebirsel ifadeler, bilinmeyenler içermesi gibi gerekçeler öne sürerek en ikna edici argüman olduğunu beyan etmiştir. Yani birinci argümanın en çok ikna edici olmasının nedenlerini “cebirsel, formal ifadeler içermesi, matematiksel işlemler olması, aşamalı olması ve düşünme yapısına uygun olması” olarak açıklamışlardır. Diğer taraftan dört (~%17) öğretmen adayı eksik bir formal argüman olarak oluşturulan dördüncü argümanı seçerken iki (~%8) öğretmen adayı ise örnek tabanlı oluşturulan üçüncü argümanı seçmişlerdir. Eksik formal argümanı seçen öğretmen adaylarına örnek olarak “ÖA_{1.1}: Dört diyelim. Çünkü dörtte $n+1$ formülü falan ben biraz kullandığımdan dolayı dört bana daha yakın geldi. **İşlem var, teoriler var, matematiksel ifadeler kullanmış** diye. Ya sadece benim aklıma gelen ispat türü de **cebirsel işlemler**. Yani konunun başından beri çoğunlukla o yönde dönüyor.” ve “ÖA_{1.6}: Beni dört daha çok ikna etti hocam. Dediğim gibi tek tek ayrı ayrı özelliğinden işte zaten hepsinin belli bir değeri var. Kural olarak zaten belli değerleri var. Onları yerine yazdığımızda sonuç olarak birbirinden topluyoruz, çıkarıyoruz ve sonuç n kare oluyor. **Cebirsel olması bir de.** Yani cebirsel olması geliyor. Yani ayrı kurallar. Çünkü **kurallar işte kesin kurallar olduğu için değişmeyen kurallar olduğu için ayırıyoruz.** Yerine yazdığımızda sonuç sonucu veriyor. O yüzden n kare olduğunda yani gayet mantıklı geliyor. Ama mesela bir de mantıklı gelmişti” açıklamasında “matematiksel ifadeler, cebirsel işlemler” içermesinden dolayı en ikna edici argüman olduğunu ifade etmişlerdir. İkinci sınıf öğretmen adaylarından ÖA_{2.5} ise “Şimdi akademik olarak bence dördüncüsü. İkna etme yöntemi çok güzel, yani daha iyi. Yani neyin nereden geldiğini görüyorsun.” açıklamasında bu argümanın akademik olarak en ikna edici olduğunu ifade etmiştir. Benzer şekilde ÖA_{4.2} “Dördüncüsü. Çünkü ayırarak yapmış hocam zaten oradan **ayırma özelliği** zaten var

toplamda. *Birden n'e kadar olan serilerin toplamını alarak desteklemiş göstermiş. Yani ben bunu kesin olarak kabul edebilirim.*" açıklamasında argümanın biçimine odaklanarak karar verdiği görülmektedir. Öte yandan örnek tabanlı argümanı en ikna edici bulan öğretmen adaylarının "**ÖA_{3.3}**: Öğrencinin yapacağı argüman bu (argüman üçü göstererek) olsaydı daha çok ikna ederdi çünkü **benim yaptığım strateji ve düşüncelerime daha uygun.**" ve "**ÖA_{4.1}**: En çok şu an üç hocam ben üçe ikna olurdum. Tamam yine **kendi stratejime uygun** diye. Kendi stratejime uygundur" açıklamaları bu şekilde olup öğretmen adaylarının kendi düşünme yapılarına ve stratejilerine uygunluğunu dikkate alarak karar verdikleri tespit edilmiştir.

Tablo 4.13'ten de öğretmen adaylarının ikinci ifadeye ilişkin oluşturulan argümanlardan en çok ikna edici olan argüman için 13'ü (~%54) genelleyci örnek mantığı oluşturulan görsel şema olan ikinci argümanı seçmişlerdir. 10'u (~%42) ise cebirsel bir çözüm ile oluşturulan formal bir argüman birinci argümanı en çok ikna edici argüman olarak seçerken hiçbir öğretmen adayı en çok ikna edici argüman olarak örnek tabanlı oluşturulan üçüncü argümanı seçmemiştir. Öte yandan bi (~%4) öğretmen adayı ise eksik bir formal argüman olarak oluşturulan dördüncü Argümanı en çok ikna edici argüman olarak seçmiştir. Bu öğretmen adayının (ÖA_{3.3}) açıklaması incelendiğinde "*Argüman 4 beni en çok ikna edendir. Çünkü öğrencinin üst düzey düşünebilme ve ilişkilendirebilme becerisini ortaya koyar. Bu beceri yüksektir derim.*" ifadesi ile aslında argümanın biçimine odaklandığı argümanda direkt olarak verilen $AO \geq GO$ ifadesini sorgulamadan matematiksel ifadelerin olması, bu varsayımdan yola çıkarak işlemlerin yapılmasının doğru olduğunu düşündüğünden ispat algısının sınırlı olduğu anlaşılmaktadır.

Tablo 4.14. Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanlardan matematiksel açıdan en güçlü olan argümana ilişkin cevaplar

Soru	Argüman	Öğretmen Adayları
İspatın	1.Argüman	ÖA ₁₁ ,ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₁₆ ,ÖA ₂₁ ,ÖA ₂₂ ,
Değerlendirilmesi	(Tümevarım-Formal)	ÖA ₂₃ ,ÖA ₂₄ ,ÖA ₂₅ ,ÖA ₂₆ ,ÖA ₃₁ ,ÖA ₃₂ ,
1.Soru		ÖA ₄₃

Tablo 4.14. (Devamı) Birinci ve ikinci ifade için oluşturulan argümanlardan matematiksel açıdan en güçlü olan argümana ilişkin cevaplar

Soru	Argüman	Öğretmen Adayları
İspatın Değerlendirilmesi 1.Soru	2.Argüman (Görsel-Genelleyici Örnek)	ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₃₄ ,ÖA ₃₆ ,ÖA ₄₄ ,ÖA ₄₅ , ÖA ₄₆
	3.Argüman (Örnek Tabanlı-Deneysel)	ÖA ₃₃
	4.Argüman (Eksik Formal- Otoriter)	ÖA ₃₅ , ÖA ₄₁ , ÖA ₄₂
	1.Argüman (Cebirsel-Formal)	ÖA ₁₂ ,ÖA ₁₄ ,ÖA ₁₅ ,ÖA ₂₃ ,ÖA ₂₅ ,ÖA ₂₆ , ÖA ₃₂ ,ÖA ₄₁ , ÖA ₄₂
İspatın Değerlendirilmesi 2.Soru	2.Argüman (Görsel-Genelleyici Örnek)	ÖA ₁₁ ,ÖA ₂₁ ,ÖA ₂₂ ,ÖA ₃₁ ,ÖA ₃₃ ,ÖA ₃₄ , ÖA ₃₅ ,ÖA ₄₃ , ÖA ₄₄ ,ÖA ₄₅ ,ÖA ₄₆
	3.Argüman (Örnek Tabanlı-Deneysel)	
	4.Argüman (Eksik Formal- Otoriter)	ÖA ₁₃ ,ÖA ₁₆ ,ÖA ₂₄ ,ÖA ₃₆

Tablo 4.14’te matematiksel ispatların değerlendirilmesi konusunda sunulan birinci ve ikinci ifadelere ilişkin argümanlardan hangi öğretmen adayının hangi argümanın matematiksel açıdan en güçlü argüman olarak gördüklerine ilişkin bilgiler yer almaktadır. Tablo 4.14’ten de görüleceği üzere öğretmen adaylarının birinci ifadeye ilişkin oluşturulan argümanlardan matematiksel açıdan en güçlü olan argüman için 13’ü (~%54) tümevarım metodu ile oluşturulan birinci argümanı seçmişlerdir. Yedisi (~%29) ise genelleyici örnek mantığı oluşturulan görsel şema olan ikinci argümanı matematiksel açıdan en güçlü argüman olarak belirtmişlerdir. Üç (~%13) öğretmen adayı eksik bir formal argüman olarak oluşturulan dördüncü argümanı seçmişlerdir. Bu öğretmen adaylarına örnek olarak “ÖA_{3.5}: Matematiksel açıdan derken öğrencinin **eski bilgilerini soru üzerine uygulayabilmesi** ve bunu sonuç olarak yazabilmesi bence burada matematiksel açıdan bence dördüncü argüman daha şey daha güçlü çünkü burda **geçmiş bir formül bulunmakta**. Öğrenci bunun algılamış, aynı zamanda hani bu formül şey yapmış. Sizin yaptığınıza bakarsanız ayırma yöntemini kullanmış. Burada sonucun ayrılabilirdiğini görmüş. Burada (ikinci argümanı gösteriyor)

daha basit aslında düşünen aslında daha basit ama görsel zekası iyi olan bir öğrenci bunu yapar. Biraz daha böyle **matematiksel ifadeler sembolleri kullanması gibi** şeyler yani burada mesela toplam sembolünü kullanmış ayırmış. Evet sonra n çarpı $n+1/2$ kullanmış. Ondan sonra ikisini birbirleriyle birleştirip bir sonuca ulaşmış. Yani çarpma yapmış, bölme yapmış. Burada (ikinci argümanı gösteriyor) sadece sadece şekil çizmiş yani.” **şeklinde açıklama yaparken dördüncü sınıf öğretmen adaylarından “ÖA_{4.1}: Matematiksel açıdan hocam bence dört daha uygun, çünkü dörtte hocam o toplam sembolünün özellikleri kullanmış. Matematiksel olarak özelliklerini kullanması gayet mantıklı. Hocam matematiksel olarak aynı şekilde cebiride kullanıyor. Orada ya ben genelde hep cebiri kullandığım için hocam orada bir tek cebir ve toplam sembolinin özelliklerini kullanması bana çok şey geldi ya, biraz daha ispat için uygun.” ve “ÖA_{4.2}: Matematiksel olarak daha güçlü olması, matematiksel ifadeleri kullanarak ispatlaması daha güçlü olur hocam yani. Dördüncüsü, direkt bilgileriyle beraber direkt hepsini göstermiş hani. İki daha kanıtlayıcı olmuş gibi geldi şu an diğerlerine göre.”** gibi ifadeler kullanılmış olup öğretmen adaylarının bir formül içermesi, matematiksel ifadeler ve semboller içermesi, cebirsel işlemler olması gibi nedenlerden dolayı argümanın biçimine odaklanarak karar verdikleri görülmüştür. Bu anlayışa sahip öğretmen adaylarının ispat algılarının da sınırlı olduğu düşünülmektedir. Öte yandan sadece bir (~%4) öğretmen adayı örnek tabanlı oluşturulan üçüncü argümanın matematiksel açıdan en güçlü argüman olduğunu beyan etmiştir. Bu öğretmen adayının (ÖA_{3.3}) **“Matematiksel olarak güçlü olmak öğrencinin kolay anlaması, zorlanmadan anlamlandırmasıdır. Bu yüzden argüman üç daha güçlüdür.”** ifadesi ile öğrencilerin ispatı örneklerle zorlanmadan kolay bir şekilde anlayacağını ve bunun matematiksel açıdan güçlülük olduğu beyan ederek ispat algısının sınırlı olduğu görülmektedir. Şöyle ki bu öğretmen adayı örnek tabanlı argümanın geçerli olduğunu ve en yakın olan argüman ile en ikna edici argüman seçimlerinde de üçüncü argümanı seçtiği tespit edilmiştir.

Tablo 4.14’ten de görüleceği üzere öğretmen adaylarının ikinci ifadeye ilişkin oluşturulan argümanlardan matematiksel açıdan en güçlü olan argüman için 11’i (~%45,5) genelleyci örnek mantığı oluşturulan görsel şema olan ikinci argümanı seçmişlerdir. Dokuz (%37,5) öğretmen adayı ise cebirsel bir çözüm ile oluşturulan formal bir argüman birinci argümanı matematiksel açıdan en güçlü argüman olarak seçerken hiçbir öğretmen adayı örnek tabanlı oluşturulan üçüncü argümanı seçmemiştir. Öte yandan dört (~%17) öğretmen adayı ise eksik bir formal argüman olarak oluşturulan dördüncü argümanı seçmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının neden dördüncü argümanı seçtikleri ile ilgili açıklamalarına örnek

olarak “**ÖA_{1.3}**: Yani hem yazdığını açıklaması hem **sembol kullanması** şimdi burada da mesela aritmetik ortalamadan, geometrik ortalamadan bahsetmiş bence dördüncü daha yani matematiksel şeye yakın matematiksel ifade.” ve “**ÖA_{1.6}**: Matematiksel açıdan güçlü olmak işte **kesin kuralları baz alarak** yani kesin maddeleri baz alarak ispatı ona göre çözmek bu. Aslında bu soruda yani bu ispatta matematiksel olarak en güçlü olan argüman dördüncü argüman. Bir de aslında beni tatmin etti de bu da (dördüncü argüman) fazlasıyla tatmin etti de **cebirselle olarak görmek bilmiyorum. O an daha iyi geldi. Yani böyle daha anlaşılır geldi.** Ama mesela işte örneği vermiş, aritmetik ortalama her zaman geometrik ortalamadan büyük eşit ise, yani o zaman ikisinin aritmetik ortalaması işte geometrik ortalamasını yani denkleme döküyoruz. Yani bir **kesin bir şeyden yola çıkarak soruyu çözdüğümde** daha matematiksel olarak daha kuvvetli geliyor.” açıklamalarında “sembol kullanması, cebirsel olması, kesin kurallar içermesi” gibi gerekçeler sunmuşlardır. İkinci sınıf öğretmen adaylarından **ÖA_{2.4}** “Dörtte oldukça **güzel bir düşünce** var. Ama eksiklik de var. O yüzden düşünce olarak ben her ne kadar eksik olsa da 4 derim.” açıklamasında güzel bir düşünce olmasını gerekçe gösterirken **ÖA_{3.6}** ise “Matematiksel açıdan güçlü olması için matematiğe dayandırması lazım ispatını. Yani ilk bakışta dördüncü daha güçlü gibi duruyor. Çünkü alıştık diye mi artık bilmiyorum da ispatta hani ikincide mesela hiç işlem yok gibi. **Düşünme var ama dördüncüde hem bir düşünme var. Aritmetik ortalama geometrik ortalama ilişkisini düşünecek.** Daha sonra bir de bunu **işleme döktüğü için** sanırım dördüncü daha güçlü diye düşünüyorum.” açıklamasında benzer olarak bir düşünme yaptığının olduğunu ve bunu işleme döktüğü için seçtiğini beyan etmiştir. Yani matematiksel semboller ve ifadeler içermesi, cebirsel ifadeler ve işlemler olması, denklem ve formül içermesi gibi nedenlerden dolayı argümanın biçimine odaklanarak karar verdikleri görülmüştür. Bu yüzden bu öğretmen adaylarının ispat algılarının sınırlı olduğu söylenebilir.

Önemli bulgulardan biri de 1., 2., 3. ve 4. sınıf öğretmen adayları arasında ispat algılarına ilişkin belirgin bir farklılık gözlenmemesidir. Özellikle “örnek tabanlı”, “algısal” ve “otoriteye bağlı” argümanlar üretme (Bkz. Tablo 4.15), “eksik formal” argümanı geçerli sayma (Bkz. Tablo 4.16) gibi hatalı veya yetersiz stratejiler, tüm sınıf düzeylerinden öğretmen adayları tarafından kullanılmıştır. Örneğin, ispat yapma becerisinde sorulan ilk soru için örnek tabanlı çözüm yapan 14 adaydan dördü birinci sınıf, ikisi ikinci sınıf, üçü üçüncü sınıf ve beşi dördüncü Sınıf seviyesinden öğretmen adaylarıdır. İspat yapma ikinci sorusu için algısal ispat şeması içeren argüman üreten sekiz öğretmen adayından biri birinci sınıf, üçü ikinci sınıf, ikisi üçüncü sınıf ve ikisi dördüncü sınıf seviyelerinden öğretmen

adaylarını kapsamaktadır. Diğer taraftan ispatın değerlendirilmesi amacıyla oluşturulan argümanlardan birinci soru için oluşturulan örnek tabanlı argümanı geçerli sayan yedi öğretmen adayının üçü birinci sınıf, biri ikinci sınıf, biri üçüncü sınıf ve ikisi dördüncü sınıf öğretmen adaylarından oluşmakta iken ikinci soruda oluşturulan eksik formal argümanı geçerli sayan 18 öğretmen adayından altısı birinci sınıf, beşi ikinci sınıf, üçü üçüncü sınıf ve dördü dördüncü sınıf öğretmen adaylarından oluşmaktadır. Ayrıca en az üç sınıf düzeyinden öğretmen adaylarının “eksik formal” argümanı en çok ikna edici (Bkz Tablo 4.17) ve matematiksel açıdan en güçlü (Bkz. Tablo 4.18) olarak nitelendirdikleri tespit edilmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının matematiksel ispatın doğasına ilişkin algılarının sadece zamanla ya da akademik ilerlemeyle değil, doğrudan ispat odaklı öğretimle şekillenebileceğini ortaya koymaktadır.

Tablo 4.15. *Bütün sınıf seviyelerinde sınırlı ispat algılarını özetleyen ispat yapma becerisi tablosu*

Soru	İspat Şeması	Öğretmen Adayları
İspat Yapma Becerisi 1. Sorusu	Otoriter	ÖA ₁₂ , ÖA ₃₂ , ÖA ₃₃ , ÖA ₄₁
	Tümevarımsal (Örnek Tabanlı)	ÖA ₁₂ , ÖA ₁₃ , ÖA ₁₄ , ÖA ₁₆ , ÖA ₂₃ , ÖA ₂₄ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₃ , ÖA ₃₅ , ÖA ₄₁ , ÖA ₄₂ , ÖA ₄₃ , ÖA ₄₄ , ÖA ₄₆
İspat Yapma Becerisi 2. Sorusu	Tümevarımsal (Örnek Tabanlı)	ÖA ₁₁ , ÖA ₁₃ , ÖA ₁₄ , ÖA ₁₅ , ÖA ₁₆ , ÖA ₂₁ , ÖA ₂₂ , ÖA ₂₃ , ÖA ₃₃ , ÖA ₃₄ , ÖA ₃₅ , ÖA ₃₆ , ÖA ₄₂ , ÖA ₄₃ , ÖA ₄₄ , ÖA ₄₅
	Algısal	ÖA ₁₂ , ÖA ₂₄ , ÖA ₂₅ , ÖA ₂₆ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₂ , ÖA ₄₁ , ÖA ₄₆
İspat Yapma Becerisi 3. Sorusu	Otoriter	ÖA ₁₁ , ÖA ₁₂ , ÖA ₃₅ , ÖA ₃₆ , ÖA ₄₁ , ÖA ₄₃ , ÖA ₄₄
	Tümevarımsal (Örnek Tabanlı)	ÖA ₁₁ , ÖA ₁₂ , ÖA ₁₃ , ÖA ₁₄ , ÖA ₁₅ , ÖA ₁₆ , ÖA ₂₃ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₃ , ÖA ₃₄ , ÖA ₃₅ , ÖA ₄₂ , ÖA ₄₃
İspat Yapma Becerisi 4. Sorusu	Tümevarımsal (Örnek Tabanlı)	ÖA ₁₁ , ÖA ₁₃ , ÖA ₁₅ , ÖA ₂₂ , ÖA ₃₁ , ÖA ₃₄ , ÖA ₃₅

Tablo 4.15’te ispat yapma becerisini ölçmek amacıyla sunulan dört görev için de öğretmen adaylarının bütün sınıf seviyelerinde sınırlı ispat algısına sahip olduğunu gösteren deneysel ve dışsal ispat şeması kategorisine giren argümanlar ürettiklerini gösteren bilgiler içermektedir.

Tablo 4.16. *Bütün sınıf seviyelerinde sınırlı ispat algılarını özetleyen ispat değerlendirme tablosu*

Soru	Argüman Türü	Geçerli Sayan Öğretmen Adayları
İspatın Değerlendirilmesine İlişkin 1. Soru	3.Argüman (Örnek Tabanlı-Deneysel)	ÖA _{1.1} ,ÖA _{1.2} ,ÖA _{1.3} ,ÖA _{2.4} ,ÖA _{3.3} ,ÖA _{4.1} , ÖA _{4.2}
	4.Argüman (Eksik Formal- Otoriter)	ÖA _{1.1} ,ÖA _{1.2} ,ÖA _{1.3} ,ÖA _{1.4} ,ÖA _{1.5} ,ÖA _{1.6} , ÖA _{2.1} ,ÖA _{2.2} ,ÖA _{2.3} ,ÖA _{2.5} ,ÖA _{2.6} ,ÖA _{3.1} , ÖA _{3.3} ,ÖA _{3.5} ,ÖA _{4.1} ,ÖA _{4.2} ,ÖA _{4.6}
İspatın Değerlendirilmesine İlişkin 2. Soru	3.Argüman (Örnek Tabanlı- Deneysel)	ÖA _{1.1} ,ÖA _{1.3} ,ÖA _{3.3} ,ÖA _{4.1} ,ÖA _{4.2}
	4.Argüman (Eksik Formal – Otoriter)	ÖA _{1.1} ,ÖA _{1.2} ,ÖA _{1.3} ,ÖA _{1.4} ,ÖA _{1.5} ,ÖA _{1.6} , ÖA _{2.1} ,ÖA _{2.2} ,ÖA _{2.3} ,ÖA _{2.5} ,ÖA _{2.6} ,ÖA _{3.1} , ÖA _{3.3} ,ÖA _{3.6} ,ÖA _{4.1} ,ÖA _{4.2} ,ÖA _{4.4} ,ÖA _{4.6}

Tablo 4.16’da ispatın değerlendirilme biçimlerini görmek amacıyla her iki ifade için sunulan argümanlardan sınırlı ispat algısına sahip olduklarını gösteren örnek tabanlı ve eksik formal argümanın geçerli olduğunu belirten öğretmen adaylarına ilişkin bilgiler yer almaktadır.

Tablo 4.17. *Birinci ifadede oluşturulan eksik formal argümanı en çok ikna edici bulan öğretmen adayları*

Soru	Argüman Türü	En Çok İkna Edici Bulan Öğretmen Adayları
İspatın Değerlendirilmesine İlişkin 1. Soru	4.Argüman (Eksik Formal – Otoriter)	ÖA _{1.1} ,ÖA _{1.6} ,ÖA _{2.5} ,ÖA _{4.2}

Tablo 4.17’de öğretmen adaylarının ispatı değerlendirme biçimlerini görmek amacıyla sunulan birinci ifade için oluşturulan eksik formal argümanın en çok ikna edici argüman olarak gören öğretmen adaylarına ilişkin bilgiler bulunmaktadır.

Tablo 4.18. İkinci ifadede oluşturulan eksik formal argümanı matematiksel açıdan en güçlü bulan öğretmen adayları

Soru	Argüman Türü	Matematiksel Açıdan En Güçlü Bulan Öğretmen Adayları
İspatın Değerlendirilmesine İlişkin 2. Soru	4.Argüman Formal – Otoriter)	(Eksik $\text{ÖA}_{1.3}, \text{ÖA}_{1.6}, \text{ÖA}_{2.4}, \text{ÖA}_{3.6}$)

Tablo 4.18’de öğretmen adaylarının ispatı değerlendirme biçimlerini görmek amacıyla sunulan ikinci ifade için oluşturulan eksik formal argümanın matematiksel açıdan en güçlü argüman olarak gören öğretmen adaylarına ilişkin bilgiler bulunmaktadır.

İspatın değerlendirilme biçimlerine ait bulgular genel olarak göz önüne alındığında argümanların geçerliliğinin değerlendirilmesi konusunda birinci ifade için tümevarım metodu ile oluşturulmuş birinci argümanı bütün öğretmen adayları geçerli sayarken genelleyici örnek mantığı ile oluşturulan görsel argüman olan ikinci argümanı neredeyse bütün öğretmen adayları geçerli saymışlardır. Ayrıca yaklaşık üçte birlik kısım öğretmen adayı örnek tabanlı argümanı geçerli sayarken öğretmen adaylarının çoğunluğu eksik formal argüman olan dördüncü argümanı geçerli saymışlardır. Her sınıf seviyesinden en az bir öğretmen adayının sınırlı ispat algısı içeren örnek tabanlı üçüncü argüman ve eksik formal argüman olan dördüncü argümanı geçerli saydıkları saptanmıştır. Öte yandan ikinci ifade için cebirsel olarak oluşturulmuş birinci argümanı tamamına yakını geçerli sayarken genelleyici örnek mantığı ile oluşturulmuş görsel argümanı öğretmen adaylarının tamamı geçerli saymışlardır. Ayrıca öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu eksik formal argüman olan argümanı geçerli sayarken örnek tabanlı argümanı ikinci sınıf seviyesinden öğretmenler hariç diğer sınıf seviyelerinden en az bir öğretmen adayı geçerli saymıştır. Her sınıf seviyesinden en az bir öğretmen adayının sınırlı ispat algısı içeren eksik formal argüman olan dördüncü argümanı seçtikleri tespit edilmiştir. En yakın argüman konusundaki bulgular göz önünde bulundurulduğunda ise birinci ifade için öğretmen adaylarının yarısına yakını tümevarım metodu ile oluşturulmuş birinci argümanı seçerken üçte birlik kısmı örnek tabanlı oluşturulan üçüncü argümanı seçme yoluna gitmişlerdir. Birinci argümanı en yakın seçen öğretmen adayları arasında birinci sınıf seviyesinden öğretmen adayları bulunmazken örnek tabanlı argüman için her sınıf seviyesinden en az bir öğretmen adayının bulunduğu tespit edilmiştir. İkinci ifade için ise öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu cebirsel olarak

oluşturulmuş birinci argümanı en yakın argüman olarak tanımlarlarken örnek tabanlı üçüncü argümanı sadece birinci sınıf seviyesinden üç öğretmen adayı en yakın argüman olarak nitelemişlerdir. Öte yandan eksik formal argüman olan dördüncü argümanı hiçbir sınıf seviyesinden öğretmen adayı kendilerine yakın bulmamıştır. En ikna edici argüman konusundaki bulgular dikkate alındığında birinci ifade için öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu tümevarım metodu ile oluşturulan birinci argüman ve genelleyici örnek mantığı ile oluşturulmuş görsel argüman olan ikinci argümanı seçerlerken öğretmen adaylarının dörtte birlik kısmı örnek tabanlı üçüncü argümanı ve eksik formal argüman olan dördüncü argümanın en ikna edici argüman olduğunu belirtmişlerdir. İkinci ifade için ise öğretmen adaylarının neredeyse tamamına yakını cebirsel olarak oluşturulan birinci argüman ve genelleyici örnek mantığı ile oluşturulan ikinci argümanı en çok ikna edici argüman olarak seçerlerken hiçbir öğretmen adayı üçüncü argümanı en çok ikna edici bulmamış ve sadece üçüncü sınıf seviyesinden bir öğretmen adayı eksik formal argüman olan dördüncü argümanı en çok ikna edici argüman olarak seçmiştir. Matematiksel açıdan en güçlü argümana ilişkin bulgular göz önüne alındığında birinci ifade için öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu tümevarım metodu ile oluşturulan birinci argümanı ve genelleyici örnek mantığı ile oluşturulan görsel argüman olan ikinci argümanı seçmişlerdir. Örnek tabanlı argüman olan üçüncü argüman ve eksik formal argüman olan dördüncü argümanı üçüncü ve dördüncü sınıf seviyelerinden toplam dört öğretmen adayı matematiksel açıdan en güçlü argüman olarak belirlemişlerdir. İkinci ifade için ise öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu cebirsel olarak oluşturulan birinci argümanı ve genelleyici örnek mantığı ile oluşturulan görsel argüman olan ikinci argümanı matematiksel açıdan en güçlü argümanlar olduklarını belirtirlerken hiçbir öğretmen adayı örnek tabanlı üçüncü argümanı tercih etmemiştir. Eksik formal argüman olan dördüncü argümanı ise dördüncü sınıf seviyesi hariç diğer üç sınıf seviyesinden toplam dört öğretmen adayı matematiksel açıdan en güçlü argüman olarak nitelendirmişlerdir.

5. TARTIŞMA

Bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının ispat algılarını (ispata dair görüşler, ispat yapma becerileri, ispatı değerlendirmeleri) incelemek amaçlanmıştır. Çalışmada ayrıca matematik öğretmen adaylarının sınıf seviyeleri arasındaki farklılıklar ve benzerliklerin de ortaya konulması hedeflenmiştir. Çalışmanın bu bölümünde elde edilen bulgulardan hareketle alanyazındaki çalışmalarla destekleyecek şekilde derinlemesine tartışması yapılmıştır. Bu bölümde önemli bulgular üzerine tartışmalar yapılmıştır.

5.1. İspatın Doğasına İlişkin Görüşlere Yönelik Tartışma

Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşlerine bulgular dikkate alındığında ispat kavramına ilişkin öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı (%46) “mantığını anlama” olarak tanımlarken üçte birlik kısmı “doğrulama” ve “kanıtlama” olarak tanımlamışlardır. Bu durum öğretmen adaylarının ispatı sadece matematiksel olarak bir doğrulama aracı olarak değil aynı zamanda anlamsal yapılandırmaya da hizmet eden bir süreç olarak algılandığını göstermektedir. Dolayısıyla bu bulgular, Stylianides (2007) ve Uğurel ve Morali (2010)’nın yaptıkları çalışmada belirttikleri öğretmen adaylarının ispatı yalnızca sonuçların doğrulanması değil aynı zamanda anlam oluşturma aracı olarak da algılamaya başladıklarını fakat bu anlayışın henüz yeterli derecede derinleşmediği görüşü ile paralellik göstermektedir. Öte yandan Aydoğdu İskenderoğlu ve Baki (2011), öğretmen adaylarının genellikle ispatı doğrulama bağlamında ele aldıklarını fakat bir kısmının anlamayı da ön plana koyduğunu ortaya koyduğu çalışmanın aksine bu çalışmada önemli bir oranda öğretmen adayları ispatın anlamsal sürecine vurgu yapmışlardır.

İspatın önemine ilişkin görüşlere ilişkin bulgular incelendiğinde bütün öğretmen adaylarının ispatın önemli olduğu vurgusunda bulunduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının %38’i ispatın “matematiğin mantığını anlamaya fırsat sunması”, %29’u “ezberden uzaklaştırması”, %29’u ise “öğrenmeyi kalıcı hale getirmesi” gibi işlevlerinden dolayı önemli olduklarını ifade etmiştir. Bu ifadeler, öğretmen adayların ispatın hem kavramsal hem de pedagojik fonksiyonlarına ilişkin farkındalık geliştirmeye başladıklarını göstermektedir. İspatın öğrenmeyi kalıcı hale getirdiği, ezberden uzaklaştırdığı ve matematiksel anlamayı desteklediği yönündeki bu görüşler, öğretmen adayların üst seviye kavramsal farkındalığa sahip olduklarını göstermektedir. Fakat bu farkındalık çoğu zaman davranışa dönüşmemektedir. İspat yapma sürecinde örnekleme ve sezgilere dayalı olarak

doğrulama yönünde eğilim göstermeleri, öğretmen adaylarının hâlâ deneysel ispat şemalarının etkisinde olduklarını ve dönüşümsel ispat şemalarına geçmekte zorlandıklarını göstermektedir. Bu sebeple öğretmen eğitiminde yalnızca ispatın işlevi hakkında konuşturmak değil, aynı zamanda bu işlevleri davranış olarak da pratiklerle bütünleştirmenin gerekliliği vurgulanmıştır. (Hanna, 2000; Knuth, 2002; Moore, 1994; Selden ve Selden, 2003; Stylianides, 2007).

İspatın matematikteki yerine ilişkin görüşlere ilişkin bulgular incelendiğinde bütün öğretmen adaylarının ispatın ortaokul matematik eğitiminde yeterince yer almadığını vurgulamışlardır. Bu eksikliğin büyük çoğunluğunun (%67) öğretmen adayları tarafından öğretmenlerin ispata ilişkin farkındalıklarının yeterli olmamasından kaynaklandığını ifade etmişlerdir. Bu bulgu alanyazındaki birçok çalışma Ball vd. (2002); Çontay, (2024); Doğan ve Williams-Pierce, (2019); Knuth, (2002a); Kaplan, Demir ve Şahin, (2023); Stylianaou, Blanton ve Rotou, (2015); Uğurel ve Moralı (2010) ile örtüşmektedir. Şöyle ki Ball vd. (2002) ve Knuth (2002a), öğretim programlarının çoğunda ispatın “yer almasına rağmen” sistematik bir şekilde öğretilmediğini ve öğretmenlerin ispatı öğrencilerin kavrama seviyelerine göre uyarlayamadıklarını belirtmiştir. Doğan ve Williams-Pierce (2019), ise öğretmen bilgisinin ispat öğretiminin kaliteli olmasında direkt etki ettiğini vurgulamışlardır. Benzer şekilde Stylianaou, Blanton ve Rotou (2015), öğretmenlerin pedagojik bilgi eksikliklerinin ispatın öğrenme ortamlarında uygulamalarını kısıtladığını ortaya koymuşlardır. Buna paralel olarak Çontay (2024) ve Kaplan, Demir ve Şahin (2023) ise Türkiye özelinde öğretim programlarında ispat öğretimini teşvik etse dahi uygulama sürecinde öğretmenlerin donanım yönünden eksikliği nedeniyle bunun gerçekleşmediğini belirtmişlerdir. Uğurel ve Moralı (2010) ise ispatın öğretim süreçlerinde kullanılması ile ilgili olarak öğretmen adaylarının büyük ölçüde bilinçsiz olduklarını belirlemiştir. Ayrıca MEB (2024) öğretim programında ispat vurgusu fazlasıyla doğrudan ve dolaylı olarak yapılmakta fakat uygulanabilirliği öğretmen yetiştirme programlarına bağlı kalmaktadır.

İspatın amacına ilişkin görüşlere ilişkin bulgular incelendiğinde “bilginin kaynağını bulma (%50)”, “matematiğin anlaşılması (%42)”, “kalıcılığı artırma (%29)” ve “matematiğe karşı olan ilgiyi artırma (%29)” ifadelerinin olması çok boyutlu ispat anlayışının olduğunu göstermektedir. Bu bulgular alanyazında birçok önemli kuramsal çalışma ile örtüştüğü tespit edilmiştir. Şöyle ki Hanna (2000), ispatın üç önemli amacından bahsetmektedir: epistemolojik (bilginin kaynağı kurma), pedagojik (öğrenmenin yapılandırılması) ve psikolojik (öğrencinin ilgisini ve güvenini artırma). Öğretmen

adaylarının verdikleri cevaplar bu üç amaca doğrudan ilişkilidir. Ayrıca Stylianides (2007) öğrencilerin ispatı sadece doğrulamak değil neden-sonuç ilişkisi kurma aracı olarak görmelerinin kavramsal anlama sürecini desteklediği görüşü “matematiğin anlaşılması” bulgusu ile örtüşmektedir. Matematiğe karşı olan ilgiyi artırma bulgusu ise Uğurel vd. (2020) ve Yackel ve Hanna (2003) çalışmalarında ispatın öğrencilerin ilgisini artırma bağlamında önemli olduğu ve onların içsel meraklarını tetikleyerek öğrenme motivasyonlarını arttırabileceğini ortaya koyan çalışmalar ile uyumludur. Bu bağlamda, adayların “bilginin kaynağı”, “anlam”, “kalıcılık” ve “ilgi” gibi çok yönlü cevaplar vermeleri, onların ispatın işlevlerini sadece yüzeysel değil aynı zamanda derinlemesine algılamaya başladığını göstermektedir.

İspatın rolüne ilişkin görüşlere ilişkin bulgular incelendiğinde ispatın “öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerini ortaya çıkarma (%54)”, “matematiksel düşünmeyi geliştirme (%33)” ve “kavramsal öğrenmeyi destekleme (%25)” gibi bulgular ortaya çıkmıştır. İspatın öğretmenlik mesleği açısından pedagojik bir işlev taşıdığına ilişkin farkındalık çok değerli bir gelişme olarak görülmektedir. Alanyazında bu durumu destekleyen birçok çalışma bulunmaktadır. Şöyle ki Stylianides ve Ball (2008), öğretmenlerin sadece ispat yapabilmeleri değil, aynı zamanda ispatı öğrencilere öğretme yöntemlerini geliştirmeleri gerektiğini vurgularken; Ball vd. (2008), matematik öğretmenlerinin “pedagojik içerik bilgisi” ile ispatın rolünü kavramaları gerektiğini ve bu bilginin öğretim sürecinde merkezi bir yere sahip olduğunu savunmaktadır. Aydoğdu İskenderoğlu ve Baki (2011) ise, Türkiye’deki öğretmen adaylarının ispatın öğretimsel rolüne ilişkin farkındalık geliştirdiğini fakat bu farkındalığın uygulama stratejilerine yeteri kadar yansımadığını belirtmiştir. Öte yandan Knuth (2002a), öğretmenlerin ispatı sadece doğruluk için değil, aynı zamanda kavramsal yapılandırma ve matematiksel düşünme becerilerinin gelişimi için kullanmaları gerektiğini belirtmektedir. Weber (2001) ise, öğretmenlerin ispatı kavramsal açıklamalar üretmek için kullanabildiklerinde, öğrencilerin daha derin anlayış geliştirdiğini ifade eder. Öğretmen adaylarının bu işlevsel farkındalığı, onların gelecekte ispatı öğretimsel bir araç olarak kullanma potansiyeline sahip olduklarını göstermektedir.

İspatın verilmesi gereken sınıf düzeyine ilişkin görüşlere ilişkin bulgular incelendiğinde öğretmen adaylarının erken yaşlar (%17) ve ilkökul (%39) dedikleri tespit edilmiştir. Bu bulguyu destekleyen çalışmalardan bazıları ise, NCTM (2000) ve Sytlianides (2007), ispatın tüm eğitim kademelerine yayılmasının gerekliliğini ve erken yaşlarda temellerinin atılmasının düşünme becerilerinin gelişimine büyük katkılar sunduğunu

belirtmişlerdir. Soyut matematiğe geçişte diyen öğretmen adaylarının (%21) görüşleri, Kaya ve Keşan (2023)'ün adayların ifade ettiği soyut düşünmeye geçişte ispatın yerine odaklandıklarını fakat erken yaşlarda ispat deneyimlerinin kavramsal olarak temeller oluşturduğu görüşü ile paralellik göstermektedir. Öte yandan Uygan, Tanışlı ve Köse (2014), öğretmen adaylarının ispatı daha çok lise düzeyinde uygun gördüğü ve ilkökul-ortaokul uygulamalarına uzak olduklarını gösteren çalışmasının aksine bu çalışmada yaklaşık üçte birlik bir kesimin ispatın anlamlandırılması adına ortaokul düzeyinde verilmesi gerektiğini ifade etmiştir.

Kabul edilebilir ve geçerli bir ispatın özelliklerine ilişkin görüşlere ilişkin bulgular incelendiğinde önemli bir kısmının vurguladığı “maddeler halinde/düzenli yazılması (%29)”, “sonucun/işlemlerin doğru olması (%17)”, “matematiksel kurallara/kavramlara uygun olması (%17)” ve “tecrübeli uzman kişilerin onaylamış olması (%17)” özellikler öğretmen adaylarının ispatların biçimine odaklanma eğilimlerinin olduğunu göstermektedir. Bu bulgular alanyazında yer alan çalışmalar ile benzer sonuçlar vermektedir. Şöyle ki Selden ve Selden (2003), öğrencilerin bir argümanın geçerli olup olmadığını değerlendirirken biçime ve düzenlemeye fazlaca odaklandıklarını, mantıksal gerekçelendirmeleri göz ardı ettiklerini belirtmişlerdir. Buna paralel olarak Healy ve Hoyles (2000) de öğrencilerin biçimsel düzene göre ispatları değerlendirdiklerini bu durumun öğretmen adaylarında da görüldüğünü tespit etmiştir.

5.2. İspat Yapma Becerilerine Yönelik Tartışma

Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispat yapma becerisi sorularında öğretmen adaylarının sırasıyla %58, %67, %54 ve %29 oranında örnek temelli bir yaklaşım benimsediği ve alanyazında da bu bulguyu destekleyici birçok çalışma bulunmaktadır. Öğretmen adaylarının bu yaklaşıma başvurması ispatı örnek tabanlı bir doğrulama aracı olarak gördüklerini, örneklerden hareketle ispat üretme eğiliminde olduklarını göstermektedir. (Doruk, 2014; Ellis vd. 2012; Fried ve Amit, 2006; Harel ve Sowder, 1998; Knuth, 2000a; Moore, 1994; Raman, 2003; Selden ve Selden, 2003; Stylianides, 2007; Weber, 2001). Aynı şekilde otoriteye bağlı bir yaklaşım benimseyen öğretmen adaylarının dışsal şemaların kullanması, öğretmen adaylarının ispatı anlamaya ve anlamlandırmaya değil, sadece ispatın doğrulanmasına yönelik bir araç olarak gördüklerini göstermektedir (Healy ve Hoyles, 2000; Weber ve Mejia-Ramos, 2011). Bu durum öğretmen adaylarının ispat şemaları arasında geçişi yapabilmeleri için pedagojik desteğe, örneklerin ispatta nasıl

ve ne amaçla kullanılabileceğinin farkındalığına ulaştırılması ve kavramsal düşünme ile analitik düşüncelerine geçiş yapabilecek öğrenme ortamlarına ihtiyaçlarının olduğunu göstermektedir. Diğer bir bulgu olarak öğretmen adaylarının Üçte birlik gibi önemli bir kısmı (%33) “her zaman böyle devam eder” diyerek genellikle birkaç örnek kullanıp bir örüntü ortaya koymuş ve bu örüntünün tüm sayılar için geçerli olduğunu varsayarak algısal şemaya yönelmişlerdir. Bu bulgu Raman’ın (2003) yaptığı çalışma ile paralellik göstermektedir. Bu durum, Raman (2003)’ın “algısal ikna” kavramıyla da açıklanabilir. Öğrenciler, belirli bir örüntünün genellenebilirliğini yeterince sorgulamadan “her zaman böyle olur” algısıyla ispat yapmaktadır. Harel ve Sowder (1998), algısal ispatların kişisel tecrübe ve sezgiye dayalı olduğunu ve geçerlilikten çok alışkanlığa dayandığını ifade etmiş ve algısal ispatları deneysel şemanın bir alt türü olarak tanımlamıştır. Balacheff (1988) ise, bu ispatların “görsel geçerlilik illüzyonu” taşıdığını, fakat mantıksal bir yapı olarak yetersiz kaldığını belirtmiştir. Bu bulgu öğretmen adaylarının örnek ve örüntü ile ispatı doğrulama şeklinde kullandığını; fakat bu argümanları genelleme yapma ya da kavramsal yapıya dönüşüm aracına dönüştüremediğini göstermektedir. Bu durum, örnek ve örüntü kullanımının dönüşümsel şemaya geçişte sürecinde çok önemli olduğunu fakat pedagojik destek olmadan yetersiz kalacağını göstermektedir. Bu nedenle öğretmen adaylarına yalnızca örüntüyü fark ettirmek değil, örüntüyü analitik bir düşünme yapısı içerisinde ifade etmeyi ve gerekçelendirmeyi de öğretmek gerektiği vurgulanmaktadır (Harel ve Sowder, 1998; Stylianides, 2007; Bills vd. 2006; Ellis vd. 2012; Raman, 2003). İspat yapma birinci ve üçüncü sorularında sırayla öğretmen adaylarının %17’si ve %54’ü otoriteye bağlı argümanlar oluşturma eğiliminde oldukları tespit edilmiştir. Bu öğretmen adayları ispatı yaparken kendi akıl yürütmeleri yaparak matematiksel bir sonucun neden doğru olduğunu açıklamaktan ziyade daha önce öğrenmiş oldukları bir formüle dayandırarak ispatlama yoluna gitmişlerdir. Bu bulgu Harel ve Sowder’ın (1998) tanımladığı dışsal ispat şeması ile örtüşmektedir. Bu bulgu alanyazında birçok çalışma ile paralellik göstermektedir. Şöyle ki Martin ve Harel (1989), öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde genellikle “söylenene itaat etme” ve “önceki tecrübelerine güven”e dayanan argümanlar ürettiklerini ifade etmişlerdir. Bu durumun matematiği ezbere dayanan, kuralcı ve otoriteye göre değişmez bir bilgi kümesi olarak algılamının sonucu olduğunu belirtmişlerdir. Knuth’da (2002a) ortaöğretim seviyesinde öğretmen adaylarının ispatı, öğretmen veya ders kitabı tarafından onaylanmış olduğu taktirde geçerli sayma anlayışında olduklarını göstermiştir. Benzer biçimde İskenderoğlu (2010), dışsal ispat şemalarının özellikle düşük ispat

becerisine sahip ve sorgulayıcı düşünme becerisi gelişmemiş öğrencilerde baskın olduğunu, bu da öğretmen adaylarının ispatı öğrenmekten ziyade öğrenilmiş doğruları ispatlama şeklinde içselleştirdiğini vurgulamıştır. Bununla birlikte Uğurel ve Morali'nin (2010), öğretmen adaylarının ispatın doğasını anlamlandırmakta zorlandıklarını ve sıklıkla “önceden görmüş/öğrenmiş olma” temelli kabul etme davranışları sergilediklerini belirten çalışmasıyla da örtüşmektedir. Çok az bir yüzde de olsa (%8) birkaç öğretmen adayı ispat yapma becerisi dördüncü sorusunda yapmış oldukları argüman ile matematiksel ifade ve sembollerin manipülasyonları yaparak argümanları oluşturma yoluna gitmişlerdir. Bu bulgu, Healy ve Hoyles'in (2000) ispatın sembolik biçimine duyulan güveni vurgulayan çalışmalarıyla benzerlik göstermektedir. Onlara göre, öğretmen adayları özellikle cebirsel yapıya sahip matematiksel ifadelerde sembollerini matematiksel gerekçelendirmelerde kullanmak yerine doğrulama göstergesi olarak kullanma ve görme eğiliminde olduklarını ifade etmişlerdir. Benzer şekilde Kaplan vd. (2023) öğretmen adaylarının cebirsel ispatlarda biçimsel doğrulamayı içerik ile birleştirme ve bütünleştirme konusunda zorlandıklarını belirtmişlerdir. Knuth (2002a) ise sembolik manipülasyonların anlamdan bağımsız bir şekilde öğretmen adaylarında öğrenilmiş bir davranış olduğunu belirtmiştir.

Bunların yanında öğretmen adayları birinci ve üçüncü soruda ise sırasıyla %33 ve %8'lik kısmı örneklerden yola çıkarak genelleyici bir yapı oluşturma eğiliminde oldukları görülmüştür. Genelleyici örnek argümanı oluşturan adayların varlığı belirli örneklerin ötesine geçerek matematiksel bir yapının genellenebileceğine dair analitik bir düşünme içine girmesi önemli bir pedagojik gelişimin göstergesi olduğu düşünülmektedir. Bu yaklaşım örnek kullanımının sadece ispatı doğrulama amacıyla değil aynı zamanda örüntülerin keşfedilmesi, yapısal ilişkilerin kurulması ve genelleme yapma gibi dönüşümsel ispat şemalarına doğru geçiş yapıldığının göstergesidir. Bu bulgu alanyazında Stylianides'in (2007) “dönüşümsel şema, öğrencilerin örneklerden yola çıkarak genelleyici ve yapısal ifadeler oluşturduğu, açıklama yönünün baskın olduğu bir ispat biçimidir.” tanımıyla benzerlik göstermektedir. Benzer şekilde Doruk ve Cihan (2024) öğretmen adayları ile yaptıkları çalışmada genelleyici örneklerden yola çıkarak yapısal bağlantılar kurma eğiliminde olduklarında ispat yapma sürecine ilişkin bütüncül bir anlayış geliştirdiklerini tespit etmişlerdir. Stylianides et al. (2023) ise dönüşümsel şema içeren argümanların ispatın pedagojik tarafı ile de ilişkilendirilebileceğini ve özellikle açıklamaya odaklanan öğretim süreçlerinde etkili olduğunu göstermişlerdir. Cihan (2024), dönüşümsel ispatların ortaokul seviyesindeki öğrenciler tarafından bile öğretmen öncülüğünde inşa edilebildiğini ve bu

ispatların matematiksel soyutlamaların yapılmasına geçişte önemli bir basamak olduğunu ortaya koymuşlardır. Almeida (2000) da bu tür matematiksel yapıların öğrencilerin matematiksel keşifler yapabilmesine imkan sağladığını, örnekten genellemeye giden yolda ispatı “anlam inşası” olarak kullanılması anlayışı geliştirdiğini belirtmiştir. Çalışmanın bu bulgusunda öğretmen adayları herhangi bir öğretimsel müdahale ya da yönlendirilmiş bir görev tasarımı ile değil söz konusu bu eğilim kendi stratejik tercihleriyle ortaya çıkarmışlardır. Yani öğretmen adayları yönlendirilmeden matematiksel genellemelere dayalı yapılar kurmuş, örüntüleri kendiliğinden fark etmiş ve bunları matematiksel gerekçelendirmelere dayandırma çabasına girmişlerdir. Bu bağlamda bu öğretmen adayları sadece biçimsel kalıplara değil aynı zamanda kavramsal açıklamaya dayanan gerekçelendirmeler yapma becerisine sahip oldukları ve uygun öğretim ortam ve süreçlerinde bu potansiyellerini geliştirebileceklerini göstermektedir. Öte yandan öğretmen adayları ispat yapma dördüncü sorusunda %58’lik gibi ciddi bir oran ile matematiksel ifadelerin doğruluğunu, cebirsel kurallar kullanma, eşitsizliklerin özelliklerini kullanma, genelleştirilmiş terimler oluşturma ve cebirsel dönüşümler yapmak yoluyla açıklama yoluna giderek aksiyomatik ispat şeması yapma eğiliminde oldukları tespit edilmiştir. Bu bulgu Harel ve Sowder’ın (1998) tanımladığı aksiyomatik ispat şeması ile doğrudan örtüşmektedir. Stylianides (2007), aksiyomatik ispatların öğrencilerin kavramsal anlam kurabilme seviyelerinin bir göstergesi olduğunu ifade etmiştir. Bu çalışmada dördüncü soruda öğretmen adaylarının yarısından fazlasında yapısal şemaya yönelme eğilimleri gözlenmiş olması, öğretmen adaylarının ispatın mantığını yapılandırma ve inşa etme çabasında olduklarını göstermektedir. Schoenfeld (1994) ise aksiyomatik ispatı sadece doğru yapılardan oluşan bir zincir değil de aynı zamanda öğrencinin kendi yapılandığı “ispat sisteminin yapı taşı” olarak tanımlaması özellikle bazı öğretmen adaylarının sembolizmin ötesine geçerek kavramsal yapılar inşa etmeye yönelmiş olmaları Schoenfeld’in yaklaşımıyla tutarlılık göstermektedir. Benzer şekilde Stylianides ve Ball (2008) öğretmenlerin sadece ispat yapmalarının yeterli olmadığını, ispatı öğretebilmesi için açıklayıcı, genelleşici ve pedagojik gerekçelere dayanan aksiyomatik düşünme yapısına sahip olmaları gerektiğini vurgulamışlardır. Yapısal ispatı kullanan öğretmen adaylarının da ispat sürecini öğretici olabilecek bir dille açıklamaları bu pedagojik anlayışa sahip olabileceklerine işaret etmektedir. Bu çalışmada bazı öğretmen adaylarının matematiksel yapıyı açıklama, öğretme ve gerekçelendirme amaçlarıyla kullanmaları Schoenfeld (1994) ve Stylianides vd. (2023) tarafından savunulan “didaktik ispat anlayışı” ile örtüşükleri

düşünülmektedir. Bu çalışmada dördüncü soruda yaklaşık %60 oranında aksiyomatik ispat yapma eğiliminde olan öğretmen adayı bulunması alanyazında bazı çalışmalarla farklılık göstermektedir. Önceki çalışmalarda (Knuth, 2002b; Uğurel ve Moralı, 2010) aksiyomatik ispatlara öğretmen adaylarında çok az rastlandığını, ispat eğitiminin yüzeysel seviyede kaldığı ve biçimsel yapının çoğunlukla örnek tabanlı veya otoriteye bağlı karışıklarını vurgularken bu soruda aksiyomatik ispat yapan öğretmen adayı oranının önemli bir yüzdeye sahip olduğu düşünülmektedir.

5.3. İspatın Değerlendirilmesine Yönelik Tartışma

Çalışmanın üçüncü bölümü olan ispatın değerlendirilmesi kısmında yer alan iki soru için oluşturulan argümanların geçerli olup olmadığına dair bulgular dikkate alındığında her iki soruda da %100 ve %92 gibi çok yüksek bir yüzdede öğretmen adayları tarafından aksiyomatik şemaya dayanan argümanların geçerli olduğu tespit edilmiştir. Bu argümanlar cebirsel dönüşümler içermesi, formal mantıksal tutarlılık zincirinin olması ve tanımsal genellemelere sahip olmalarından dolayı oldukça güvenilir bulunmuştur. Bu bulgu, Harel ve Sowder'ın (1998) tanımladığı aksiyomatik ispat şemasının özellikleriyle örtüşmektedir. Bu şemanın, ispatın en üst seviyesi olduğunu ve öğrencinin kavramsal olarak matematiksel yapıları anlamlandırabildiklerini belirtmişlerdir. Aksiyomatik argümanların en yüksek geçerlik yüzdesine sahip olması, öğretmen adaylarının yapı, tanım, genelleme ve mantıksal tutarlılığa önem verdiklerini göstermektedir (Harel ve Sowder, 1998; Schoenfeld, 1994; Stylianides, 2007). Fakat içeriksel açıklamalardan yoksun formların bazı öğretmen adayları (%8) tarafından geçersiz sayılması biçim-içerik ayrımına ilişkin duyarlılığın gelişmekte olduğunu düşündürmektedir (Stylianides ve Ball, 2008; Weber, 2010). Çalışmadaki bu %8'lik kısmı oluşturan öğretmen adaylarının bu argümanı geçersiz saymasına ilişkin “kısa olması, sadece işlemler olması” gibi açıklamaları Schoenfeld'in (1994) yaptığı çalışma ile paralellik göstermektedir. Şöyle ki Schoenfeld (1994) yapısal ispatların öğrenmenin temel bileşeni olduğunu fakat yapılan işlemlerle anlam arasındaki ilişki kurulmadığında ispatın sadece algoritmik bir çözüm olarak kalabileceğini ifade etmiştir. Genel olarak aksiyomatik argümana ilişkin kabul oranının yüksek olması öğretmen adaylarının matematiksel geçerliği mantıksal yapı, tutarlılık ve matematiksel genellemelerle ilişkilendirmeye başladığını göstermektedir. Fakat hala biçimsel yapıya odaklanan az da olsa öğretmen adaylarının olması biçim-içerik arasındaki ayrımın eşliğinde olduklarını göstermektedir.

Dönüşümsel ispat içeren görsel argümanlara neredeyse tam geçerlik verilmesi (%96 ve %100) öğretmen adaylarının ispatı sadece doğrulama değil aynı zamanda açıklama ve öğretimin bir aracı olarak gördüklerini yansıtmaktadır. Bu eğilim, ispatın pedagojik işlevine dair farkındalığın arttığını göstermektedir (Cihan, 2024; Miyakawa ve Herbst, 2007; Stylianides vd. 2023). Çalışmada görsel argümanın geçerli sayılmasının yüksek seviyede olmasını birçok çalışma ile desteklendiği görülmektedir. Recio ve Godino (2001), görsel modellemenin öğrenme sürecinde “ikna edici bir araç” olarak işlev gördüğünü fakat genelleme potansiyelinin de fark ettirilmesi gerektiğini belirtmiştir. Benzer şekilde Doruk ve Cihan (2024), modellemenin kavramsal olarak soyutlamayı kolaylaştırdığını ve öğretici bir dilin gelişimini desteklediğini vurgulamıştır. Miyakawa ve Herbst’in (2007) de çalışmalarında savundukları uzamsal akıl yürütmenin ispatın önemli bir parçası olduğunu, özellikle görsel modellerin sezgisel anlayışı desteklediği görüşü ile örtüştüğü görülmektedir. Öte yandan sadece bir öğretmen adayının (%4) görsel argümanı geçersiz sayması Healy ve Hoyles’ın (2000), bazı bireylerin görsel temsilleri matematiksel semboller içermediği için yetersiz görebilecekleri görüşü ile örtüşmektedir. Bu çalışmadaki bu öğretmen adayı görsel argümanı “denklem içermediği” için geçersiz sayması bu eğilimin bir iz düşümü olduğu düşünülmektedir.

Örnek tabanlı argümanların büyük çoğunluğunun (%71 ve %79) geçersiz sayılması, öğretmen adaylarının matematiksel genellemeler yapma ve yapı kurmanın ispat için zorunlu bir şart olduğunu fark etmeye başladıklarını göstermektedir. Bu bulgu örneğe dayanan doğrulamayı yeterli gören algının artık sorgulanmaya başlandığını, öğretmen adaylarının sadece “çalışan örnekler” üzerinden yapılamayacağını farkına vardıklarını göstermektedir. Bu bulgu Fischbein (1982), Stylianides (2007), Stylianides vd. (2023) ve Stylianides ve Ball’ın (2008) yaptıkları çalışmalar ile paralellik göstermektedir. Fischbein (1982), öğrencilerin örneklere psikolojik olarak güvendikleri, fakat bu güvenin matematiksel genellemeler yapma için yeterli olmadığını belirtmiştir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının sadece birkaç örnekte sağlanmış argümanları büyük ölçüde geçersiz saymaları ispatın sadece psikolojik olarak güvenli liman olarak görülmesinden öteye geçmesi gerektiği yönündeki anlayış ile örtüştüğü görülmektedir. Stylianides (2007) örneklerin öğretim sürecinde değerli olmasına karşın ispatın yapısal gerekçelendirme ve matematiksel genellemelere dayanması gerektiğini vurgulamıştır. Bu bağlamda örnek tabanlı argümanların yetersiz görülmesi beklenen bir sonuçtur. Benzer şekilde Stylianides et al. (2023) örneklerin matematiksel genelleme haline geldiğinde güçlü pedagojik araçlar

olabileceğini; aksi durumda argümanın geçersiz olma riskinin yüksek olduğu vurgulanmıştır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının önemli çoğunluğu örnekleri sadece ispatın destekleyici ögesi olarak görmeye başladıklarını temel gerekçelendirme ögesi olarak kabul etmedikleri tespit edilmiştir. Diğer taraftan örnek tabanlı ispatı geçerli sayan (%29 ve %21) öğretmen adaylarında bireysel seviyede sezgisel güven ve bilişsel yatkınlık etkisinin sürdüğü düşünülmektedir (Dolev ve Even, 2015; Selden ve Selden, 2003). Bu bulgular alanyazındaki çalışmalar tarafından da desteklenmektedir. Şöyle ki Alcock ve Weber (2008), öğrencilerin örneği güvenilir bir ispat olarak gördüklerini fakat yeterli matematiksel bir eğitim olmadan bu örneklerin genelleştirilip genelleştirilemeyeceğini sorgulamadıklarını vurgulamıştır. Benzer şekilde Uğurel ve Moralı (2010), öğretmen adaylarının örneğe dayalı varsayımlarını açıklayıcı değil de sezgisel olarak algıladıklarını ve genelleme ihtiyacı hissetmediklerini belirtmişlerdir. Bu yüzden Stylianides (2007) ve Stylianides ve Ball (2008), yaptıkları çalışmalarda örneklerin sadece ispat olmadığını, örnek kullanımında pedagojik ve ispat amaçları arasındaki farkı gözetmeleri gerektiğini belirtmişlerdir.

Matematiksel semboller ve denklemler içeren ama gerekçelendirme sunmayan argümanlar her iki soruda da yüksek oranda (%71 ve %75) geçerli sayılmıştır. Bu durum öğretmen adaylarının “sembolik ve biçimsel görünüme” güven duyduklarını ve biçimsel olarak doğru olmayı içsel gerekçelendirmelere tercih edebildiklerini göstermektedir. Şöyle ki öğretmen adaylarının “denklem/formül içermesi, matematiksel/cebirsal ifadeler olması, sembol içermesi, farklı konularla ilişkilendirmesi” gibi açıklamaları da biçimi ne kadar odaklandıklarını göstermektedir. Bu yönelim, Healy ve Hoyles (2000), Knuth (2000) ve Yitmez ve Yılmaz (2024) tarafından da ortaya konulmuştur. Öğretmen adayları matematiksel semboller ve cebirsel ifadeleri matematiksel olarak geçerliliğin bir göstergesi olarak algılamakta içerik olarak bütünlüğünün eksikliği görülmektedir. Eksik formal ispatlara duyulan güven, matematiksel sembolere ve cebirsel gösterimlere karşı olan yüksek inanç ile ilgilidir. Fakat açıklama içermeyen sembollerin bazı öğretmen adayları (%29 ve %25) tarafından geçersiz görülmesi, sadece biçimsel görünümün ispatın kabul edilmesi için yeterli olmadığını benimseyen bireylerinde varlığını göstermektedir (Healy ve Hoyles, 2000; Knuth, 2002c; Schoenfeld, 1994). Buna benzer olarak bu çalışmada her iki soruda da öğretmen adaylarının yaklaşık dörtte birinin “açıklama eksikliği, ispatı eksik olan ifade olması” nedeniyle bu tür argümanları geçerli olarak saymamaları, ispatın biçimsel yapısına olan güvenin her kişide aynı seviyede olmadığını; açıklama ve içeriğin bütünlüğünün daha fazla dikkate değer olduğunun düşünülmeğe başlandığını göstermesi Schoenfeld’in (1994)

yapmış olduğu çalışmadaki biçimsel yüzey ve içeriksel derinlik ayrımını gözeten anlayışla örtüştüğü görülmektedir.

Çalışmanın üçüncü bölümü olan ispatın değerlendirilmesi kısmında yer alan iki soru için oluşturulan argümanlardan “en yakın argüman”, “en ikna edici argüman” ve “matematiksel açıdan en güçlü argüman” seçimlerine ilişkin bulgular dikkate alındığında öğretmen adaylarının argüman tercihlerinde “en yakın” seçimi çoğunlukla çözüm türüne, bilişsel yatkınlığa ve geçmiş öğrenme deneyimlerine dayalıdır. Birinci soruda %46 oranında aksiyomatik argümanın en yakın bulunması, öğretmen adaylarının tümevarım metoduna aşinalığını gösterir. Çünkü öğretmen adaylarının “bu klasik tümevarım yöntemi, bilindik yöntem” gibi ifadeleri bunu göstermektedir. İkinci soruda bu oran %75'e çıkarak aksiyomatik ispat içeren argümanların çoğunluk tarafından kabul gördüğünü göstermektedir. Bu eğilim, öğretmen adaylarının özellikle işlem temelli, kurallı, düzenli ve sistematik argümanlara kendilerini yakın hissettiklerini ortaya koymaktadır. Bu durum Knuth (2002c) ve Uğurel ve Moralı (2010)'nın biçimsel görünümlü yapılara ilişkin olumlu tutumların etkili olduğunu gösterdiği bulgularla örtüşmektedir. Bununla birlikte, örnek tabanlı argümanın da birinci soruda %33 oranında en yakın argüman olarak tercih edilmesi dikkat çekici bir bulgudur. Bu durum, bazı öğretmen adaylarının sezgisel olarak ve deneme yoluyla oluşturulan argümanlara yatkın olduklarını göstermektedir. Dolev ve Even (2015)'in "yakınlık etkisi" dediği bu eğilim, bireylerin kendi yapmış oldukları yöntemlere benzer argümanları doğru bulma eğilimi ile açıklanmaktadır. Bu seçim, pedagojik olarak ispata örneklerle başlama eğiliminin hâlâ sürdüğünü ortaya koymaktadır. Ancak ikinci soruda örnek tabanlı argümanın yakın bulma oranının %21'e düşmesi, bu tür sezgisel yaklaşımların daha soyut ve cebirsel içerikli problemlerde etkisini yitirdiğini göstermektedir. Bu durum, örnek kullanımının görev bağlamına göre farklı şekillerde algılandığını ve biçimsel problemlerde yetersiz bulunduğunu göstermektedir (Stylianides, 2007). Öte yandan görsel argümanların daha az tercih edilmesi (%13 ve %12,5), öğretmen adaylarının görsel temsiller içeren argümanları güçlü bulmasına rağmen ispat yapma sürecinde çözüm stratejisi olarak tam olarak içselleştirmediklerini düşündürmektedir (Cihan, 2024).

“En çok ikna edici argüman” için birinci ve ikinci sorularda sırasıyla öğretmen adaylarının önemli bir kısmı (%42 ve %54) görsel ispat içeren argümanları ikna edici bulmuşlardır. Bu bulgu alanyazında birçok çalışma ile paralellik göstermektedir. Bu eğilim görsel temsillerin sezgisel olarak güçlü, açık ve anlamlı bulunmasıyla ilgili olduğu düşünülmektedir. Stylianides vd. (2023) ve Yitmez ve Yılmaz (2024) öğretmen adaylarının

görsel argümanları daha kolay anlamlandırdığını ve bu görsel temsillerin pedagojik olarak değerinin yüksek olduğunu belirtmesi çalışmada yer alan öğretmen adaylarının “görsel olması daha anlamlı, modelleştirme iyi, işlemsel beceri yanında uzamsal düşünme içermesi” gibi açıklamaları ile paralellik göstermektedir. Buna benzer olarak, Recio ve Godino, (2001) öğretmen adaylarının ikna ediciliği sadece matematiksel doğrulama aracı olarak değil, açıklama ve görsel destek üzerinden tanımlamaya başladıklarını ifade etmiştir. Aksiyomatik argümanların da önemli oranda (%33 ve %42) ikna edici bulunması, biçimsel gerekçelendirme ve mantıksal yapı ile oluşturulan argümanların hâlen güçlü bir etki taşıdığını göstermektedir. Stylianides ve Ball (2008)’e göre bu tür yaklaşımlar sadece doğrulamak için değil, ispatın öğretilebilirliği açısından da etkileyici olabilecektir. Eksik formal ispatların birkaç öğretmen adayı (%17 ve %4) olsa bile ikna edici bulunması, matematiksel sembollerin güven verdiği durumları ve biçimsel yapıya olan inancı yansıtmaktadır (Healy ve Hoyles, 2000). Ancak örnek tabanlı ispatların en ikna edici argüman olarak ilk soruda sadece %8’lik kısım tarafından ve ikinci soruda hiç tercih edilmemesi, genelleme içermeyen açıklamaların artık ikna gücünden uzaklaştığını, epistemolojik bir gelişim yaşandığını ve ispatta sistematik gerekçelendirmeler arandığını göstermektedir (Bills vd. 2006; Selden ve Selden, 2003; Weber, 2010).

Matematiksel açıdan en güçlü argüman için öğretmen adaylarının birinci ve ikinci soruda sırasıyla %54 ve %37,5 oranında aksiyomatik argümanların mantıksal yapı, kurallara dayanan gerekçelendirmeler ve sistematik formal yapılara verilen değer önemli seviyede olduğunu göstermektedir. Özellikle ikinci soruda görsel argümanın (%45,5) aksiyomatik argümana (%37,5) üstün gelmesi, pedagojik açıklamaların sadece öğretimsel değil aynı zamanda matematiksel ikna gücü yönünden de etkili görüldüğünü göstermektedir. Bu bulgu, Doruk ve Cihan (2024)’ün pedagojik ve matematiksel açıklık birleşiminin öğretmen adayları tarafından güçlü görüldüğünü gösteren bulgularıyla örtüşmektedir. Matematiksel açıdan en güçlü argüman olarak eksik formal argümanı sırasıyla %13 ve %17 oranında seçen öğretmen adayları “formül/denklem içermesi, matematiksel semboller ve ifadeler içermesi, cebirsel işlemler içermesi” gibi ifadeleri yine bazı öğretmen adaylarının argümanın biçimine odaklandıklarını göstermektedir. Alanyazında eksik formal argümanlara verilen destek, biçimsel görünümün sembolik güven oluşturduğunu göstermektedir (Healy ve Hoyles, 2000; Knuth, 2002c; Yitmez ve Yılmaz, 2024) sonucuyla paralellik göstermektedir. Ancak öğretmen adaylarının çoğunlukla bu argümanların “açıklama içermemesi, ispatı yapılmamış ifade içermesi” gibi nedenlerle ikinci plana itmesi içerik olarak gerekçelendirmelerin

önemünün artması (Schoenfeld, 1994)'in çalışması ile örtüşmektedir. Her iki soruda da örnek tabanlı argümanların öğretmen adayları tarafından en düşük seviyede (%4 ve %0) tercih edilmesi, öğretmen adaylarının artık örnekle doğrulamanın matematiksel güç taşımadığını fark ettiklerini ortaya koymaktadır. Bu bulgu Bills vd. (2006) ve Stylianides'in (2007) önemini vurguladığı ve uyarılarda bulunduğu pedagojik yanılgılarında çözülmekte olduğunu göstermektedir. Bu bulgular aynı zamanda örnek tabanlı argümanların bu seviyede neredeyse tamamen geri planda kalması, adayların sezgisel ve örnekle doğrulanan açıklamaların matematiksel olarak yetersiz olduğunu fark ettiklerini ortaya koymaktadır (Fischbein, 1982; Selden ve Selden, 2003).

5.4. Sınıf Seviyeleri Arasında Anlamlı Bir Farklılık Bulunmaması

Önemli bulgulardan biri de 1., 2., 3. ve 4. sınıf öğretmen adayları arasında ispat algılarına ilişkin belirgin bir farklılık gözlenmemesidir. Tüm sınıf seviyelerinden öğretmen adayları tarafından “örnek tabanlı”, “algısal” ve “otoriteye bağlı” argümanlar üretme (Bkz. Tablo 4.15), “eksik formal” argümanı geçerli sayma (Bkz. Tablo 4.16) gibi hatalı veya yetersiz stratejiler kullanılmıştır. Aydoğdu İskenderoğlu ve Baki (2011) ile Kaplan, Demir ve Şahin (2023) de bulguya benzer şekilde, öğretmen adaylarının sınıf seviyesi ilerledikçe ispat becerisinde gelişim göstermediklerini tespit etmişlerdir. Bu, üniversite seviyesinde de ispat eğitiminin yapısal olarak yeteri kadar yerleşmemiş olduğunun bir göstergesidir. Harel ve Sowder (1998) ise öğrencilerin ispat şemalarının tecrübe ile gelişmediğini, yapılandırılmış öğretimsel müdahaleler olmadan aynı yanlış ispat şemaların tekrarlandığını belirtmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının matematiksel ispatın doğasına dair anlayışlarının sadece zamanla ya da akademik ilerlemeyle değil, aynı zamanda direkt olarak ispat odaklı öğretimle şekillendiğini ortaya çıkarmaktadır. Aynı şekilde öğretmen adaylarının üniversite eğitimleri süresince ispat ile ilgili anlamlı ve sistematik bir gelişim göstermediğini ortaya koymaktadır.

Bulgular, örnek tabanlı argüman üreterek ispat yapma stratejilerinin dört sınıf seviyesindeki öğretmen adayları tarafından da yoğun bir şekilde tercih edildiğini göstermektedir. Bu durum ispatın matematiksel genellemeler yapma ve gerekçelendirmelere dayandırabilme yönü yerine kişisel olarak örnekler ve sezgilere dayalı olarak doğrulamalar yapmak ile ilişkilendirildiğini göstermektedir. Steele (2006) ve Stylianides (2007), öğrencilerin örnekleri ispatla karıştırmalarının yaygın olduğunu ve bu durumun daha üst sınıf seviyelerinde dahi değişmeden devam ettiğini belirtmiştir. Buna paralel olarak Cihan

(2024), ortaokul öğrencileriyle yaptığı çalışmada, bu eğilimin öğretmen adaylarında da benzer şekilde sürdüğünü ve sınıf düzeyi farkı olmaksızın tekrar ettiğini gözlemlemiştir. Balacheff (1988) ve Stylianides vd. (2023) ise bu durumun, öğretmen adaylarının bilişsel seviyelerinin değil, ispat ile ilgili epistemolojik yönlendirmeden mahrum bırakılmalarının bir sonucu olarak açıklanabileceğini belirtmişlerdir.

Oluşturulan argümanların geçerliliğin değerlendirilmesi sorularında “eksik formal” argümanları geçerli bulan (her iki soruda sırasıyla %71 ve %75 oranında) seçen öğretmen adaylarının dört sınıf seviyesinde de yer aldığı ya da bu argümanı “en ikna edici” ve “en güçlü argüman” olarak seçen öğretmen adaylarının en az üç farklı sınıf seviyesinde olduğu görülmektedir. Bu tercihlerin gerekçesi ise genellikle “cebirsel işlem içermesi”, “formül/denklem bulunması”, “matematiksel ifade ve sembol olması” gibi görünüme dayalı yüzeysel ölçütlerdir. Selden ve Selden (2003) yaptığı çalışmada öğrencilerin bir ispatı değerlendirmede biçimsel kriterlere (denklem, düzen, sembol) yoğun bir şekilde odaklandıklarını ve bu durumun üniversite seviyesinde de devam ettiğini belirtmiştir. Healy ve Hoyles (2000) ise benzer biçimde, öğrencilerin içeriğe değil de görünüme bakarak “geçerli ispat” yargısına vardıklarını göstermektedir. Bu sonuç, sınıf seviyesi ilerledikçe değerlendirme kriterlerinin daha derinlikli hale geldiği varsayımının çürütecek bir bulgu olduğu düşünülmektedir. Öğretmen adaylarının ispatların değerlendirilmesi düzeyinde de görünüme dayalı geçerlilik kriterleri kullandıkları anlaşılmaktadır.

Beklenen durum, sınıf seviyesi yükseldikçe öğretmen adaylarının daha çok analitik (aksiyomatik-dönüşümsel) ispatlar üretmesi, ispatı yalnızca doğrulama değil, matematiksel gerekçelendirmelere dayandırması ve genellemeler yapma olarak kavraması, oluşturulan argümanları değerlendirirken de biçime değil içeriğe, açıklamaya ve gerekçelendirmeye bakmasıdır. Fakat bulgular, bu dönüşümün gerçekleşmediğini göstermektedir. Bu ise epistemolojik gelişmenin sadece “zaman” veya “akademik ilerleme” ile değil aynı zamanda eleştirel pedagojik müdahaleler ile sağlanabileceğini ortaya koymaktadır (Doğan ve Williams-Pierce, 2019; Dolev ve Even, 2015; Stylianides ve Ball, 2008; Uğurel ve Moralı, 2010). Bu durum, öğretmen yetiştirme sürecinde ispatın sadece salt bir disiplin bilgisi olarak değil de düşünme şekli ve öğretim becerisi olarak ele alınmasının zorunluluğunu vurgulamaktadır.

Ayrıca bulgular, üniversite eğitiminin birinci sınıftan dördüncü sınıfına kadar olan süreçte ispatla ilgili görüşlerin, ispat yapma biçimlerinin ve ispatı değerlendirme stratejilerinin niteliksel olarak birbirine benziyor olması, öğretim programında bilgi ve

becerilerin giderek derinleşen ve genişleyen bir şekilde sunulması yerine, aynı düzeyde bilgi derinleştirilmeden veya bir üst seviyeye çıkarılmadan tekrar yapıldığını düşündürmektedir. Stylianou, Blanton ve Rotou (2015), öğretmen yetiştirme programlarının ispat konusunu belirli bir aşamada işleyip sonra terk ettiğini ve yeterince sarmallık sağlamadığını vurgulamıştır. Kaplan, Demir ve Şahin (2023) de öğretmen adaylarının sadece belirli derslerde ispatla karşılaştıklarını, bu sebeple sınıf seviyesi ilerlese de yeni öğrenme kazanımları elde edemediklerini ifade etmişlerdir. Bu durum, öğretim programlarının tasarımının sadece içerik odaklı değil; gelişimsel kavrayış ve üst düzey bilişsel bir yapı kazandırma boyutundan da yeniden ele alınmasını zorunlu kılmaktadır.

5.5. Kuramsal Bilgi ile Uygulama Arasındaki Boşluk

Başka bir bulgu olan öğretmen adaylarından ÖA₃₅'in özellikle ispat yapma becerisi dördüncü sorusunda yapmış olduğu iki farklı argüman için yapmış olduğu açıklamalar dikkat çekicidir. Bu yüzden öğretmen adayının çalışmada öğretmen adayı ile yapılan mülakatın üç bölümü ile ilgili cevapları incelenmiştir. İspata ilişkin görüşleri kısmındaki açıklamalarında ispatın temel amaçlarına ve doğasına ilişkin farkındalığa sahip olduğu görülmektedir. İspatı “mantığını anlama”, “kanıtlama”, “inandırıcılık” gibi epistemolojik öğelerle tanımlaması, öğretmen adayının ispatın sadece sonuçların doğrulanması değil aynı zamanda matematiksel düşünmenin ayrılmaz bir parçası olduğuna dair bir anlayış geliştirdiğini göstermektedir. Bu anlayış, Hanna ve De Villiers (2012) ile Stylianides (2007)'in ispatın epistemik fonksiyonuna ilişkin vurgularıyla uyumludur. Özellikle “bilginin kaynağını bulma” ve “matematikte bağlantı kurma” gibi fonksiyonlara vurgu yapılması, ispatın açıklayıcı ve keşfedici doğasının (Balacheff, 1988; Thurston, 1994) öğretmen adayı tarafından kavrandığını göstermektedir. İspatın yeterince yer bulmadığına ilişkin eleştirilerde ise öğretmen farkındalığı ve müfredat eksikliğine dikkat çekilmiş, bu da MEB (2018, 2024) ile Stylianides ve Ball (2008) öğretim programlarında da çoğunlukla vurgulanan yapısal problemlere işaret etmektedir. Özellikle “erken yaşlarda ispat” önerisi, Bieda (2010) ve Harel ve Sowder'ın (1998) ilköğretimde argümantasyon becerilerinin geliştirilmesinin gerekliliği görüşüyle örtüşmektedir. Öğretmen adayının ispat yapma sürecindeki argümanları, genellikle örnek tabanlı olup Harel ve Sowder'ın (1998) "deneysel ispat şeması"na karşılık gelmektedir. Dört sorudan üçünde örnek tabanlı argüman üretmeyi tercih etmiş ve bu, öğretmen adayının matematiksel ifadelerin doğruluğunu matematiksel genellemeler yapmak yoluyla değil, özel durumlar üzerinden kurma yönünde eğilim

göstermektedir (Almeida, 2000; Healy ve Hoyles, 2000). Ayrıca örneklerin “ortaokul seviyesi için uygun” ve cebirsel argümanı ise “lise seviyesi için uygun” olarak kategorize etmesi, ispatın zorluklarının öğrencinin öğrenim düzeyine göre ayırt edilmesi gerektiği düşüncesini taşıdığını gösterir ki bu, Weber ve Mejia-Ramos’un (2011) öğrencilerin ispat tercihlerini algısal yük bağlamında değerlendirdiklerini gösteren çalışmalarıyla paralellik göstermektedir. Bir soruda ise hem otoriteye dayalı hem de örnek tabanlı ispatın birlikte yapmış olması, öğretmen adayının farklı şemaları harmanlayabildiğini fakat henüz analitik düzeyde bütüncül bir düşünme yapısına ulaşamadığını göstermektedir. Bu durum Harel ve Sowder (1998) tarafından tanımlanan "gelişimsel geçiş" dönemiyle açıklanabilmektedir. Öğretmen adayı, kendisine sunulan farklı argümanları değerlendirirken, çoğunlukla analitik-aksiyomatik ve analitik-dönüşümsel argümanları geçerli bulmuş, örnek tabanlı argümanları ise geçersiz olarak nitelendirmiştir. Bu yaklaşım, öğretmen adayının matematiksel genellemeler yapma gücü olan yapıları tanıyabildiğini (Stylianides vd. 2023) fakat kendi ispatlarında hâlâ örnek kullanımına dayandığını göstermesi bakımından anlamlıdır. Özellikle dikkat çeken bir durum, eksik formal bir argümanı hem geçerli hem de matematiksel açıdan en güçlü olarak değerlendirmesidir. Bu durum, Harel ve Sowder (2007)’ın " tanımaya dayalı (biçimsel) ispat şeması" (recognition proof scheme) ile açıklanabilir; aday, yüzeysel olarak formal görünen bir yapıyı, mantıksal geçerliliğini tam olarak anlamadan güçlü bulmuş olabilir (Bell, 1976; Selden ve Selden, 2003). Buna rağmen görsel argümanları ikna edici bulması, öğrencilerin sembolik değil görsel açıklamaları daha kolay içselleştirdiğini gösteren Dolev ve Even (2015) ile uyumludur.

Bu öğretmen adayının ispata dair görüşleri, becerileri ve değerlendirmeleri arasındaki ilişkiler incelendiğinde; öğretmen adayı ispatın doğasına dair gelişmiş bir anlayışa sahip olmasına rağmen bu anlayışın uygulamaya geçişinde formal matematiksel yapılarla destekleyecek becerilere henüz tam olarak ulaşamamıştır (Knuth, 2002a). İspat görüşlerinde aksiyomatik ve açıklayıcı argümanları tanımasına rağmen, kendi çözüm ve değerlendirmelerinde örnek tabanlı argümanları hem üretmekte hem de bazen geçersiz sayma yoluna giderek çelişkiye düşmektedir (Recio ve Godino, 2001; Stylianides, 2007). Görsel argümanları ikna edici bulması, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının görsel destekli uzamsal düşünmeye olan eğilimiyle bağlantılıdır (Miyakawa ve Herbst, 2007; Raman, 2003). Eksik formal bir argümanı “en güçlü” bulması ise yüzeysel ve biçimsel bir yapının öğretmen adayının değerlendirme ölçütlerinde hâlâ etkili olduğunu ve yapısal geçerliği tam olarak ayırt edemediğini düşündürmektedir (Balacheff, 1988; Bieda, 2010).

6. SONUÇ

Bu çalışma lisans öğreniminin farklı sınıf seviyelerinden (1., 2., 3. ve 4. sınıf) öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini, ispat yapma becerilerini ve ispatı değerlendirme biçimlerini bir bütün olarak incelemeyi amaçlamıştır. Bulguların bütüncül analizi, öğretmen adaylarının ispat kavramını çok yönlü bir şekilde algıladıklarını fakat bu anlayışın ispat üretmeye ve ispatı değerlendirme süreçlerine tutarlı bir şekilde yansımadığını ortaya koymuştur. Öğretmen adaylarının çoğu, ispatı sadece doğrulama olarak değil aynı zamanda kavramsal olarak anlam kurma, bilginin kaynağını bulma ve matematiksel kalıcılığı sağlama aracı olarak tanımlamışlar ve ispatın matematiksel düşünmenin ana unsurlarından biri olduğunun farkında olduklarını belirtmişlerdir. Bu görüşler, Harel ve Sowder'ın (1998) analitik ispat şeması ile örtüşmektedir. Ancak bu epistemolojik farkındalık, sınıf seviyelerine göre açık bir şekilde değişim göstermemiştir. Hem birinci sınıf hem de dördüncü sınıf seviyesindeki öğretmen adaylarında benzer tanımlayıcı derinlikler gözlemlenmiş, bu durum ispat algısının sadece sınıf seviyesine göre değil aynı zamanda kişisel öğrenme geçmişi ve öğretimsel bağlamlara da bağlı olduğunu göstermiştir (Ball vd. 2008; Stylianides, 2007). İspatın görüşleri kısmında analitik ispat anlayışı geliştiren birçok öğretmen adayı, uygulama sırasında örnek tabanlı argümanlar üretmiş veya eksik formal argümanları yeterli bulmuştur. Bu durum, görüş ve beceri arasında önemli derecede bir kopukluk olduğunu göstermektedir. Hatta bu kopukluk sınıf düzeylerine göre sistematik bir farklılık da göstermemektedir. Örneğin, hem birinci sınıf hem dördüncü sınıf adaylarının örnekle doğrulama yaparlarken diğer taraftan ikinci sınıf ve üçüncü sınıf öğretmen adaylarının da yapısal olarak zayıf ispatlar ürettikleri gözlemlenmiştir. Bu durum, ispatın öğretiminde yalnızca tanımsal bilgiye değil, uygulamalı ve yansıtıcı tecrübelerle de ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir (Moore, 1994; Weber ve Mejía-Ramos, 2011). Öğretmen adayları geçerli ispatları tanımada çoğu zaman başarılı olmuşlar fakat örnekle doğrulama içeren ya da eksik formal yapılar içeren argümanları da “en ikna edici”, “en yakın” veya “matematiksel açıdan en güçlü” olarak değerlendirmiştir. Bu durum, geçerlilik, ikna edicilik ve matematiksel güç gibi değerlendirme ölçütlerinin tam anlamıyla ayrıştırılmadığını göstermektedir. Özellikle bazı üçüncü ve dördüncü sınıf adaylarının da örnek tabanlı argümanlara geçerlilik vurgulamaları ispatın biçimsel yapısının ve genelleme gücünün yeterince içselleştirilmediğini düşündürmektedir (Buchbinder ve Zaslavsky, 2019; Lynch ve Lockwood, 2019). Belirgin bir sonuç, sınıf düzeylerinin (birinci sınıftan dördüncü sınıfa kadar) ispat görüşleri, ispat yapabilme becerisi ve ispatı değerlendirme biçimleri

üzerinde beklenen ilerlemeyi göstermemiş olmasıdır. Örnek olarak bazı birinci sınıf öğretmen adayları dönüşümsel tanımlar yapabilirken; bazı dördüncü sınıf öğretmen adayları örneklerle doğrulama yapmış ve eksik formal argümanları geçerli saymıştır. Bu durum, alanyazında tartışılan doğrusal gelişim modelini (yani sınıf arttıkça ispat algısının artacağı görüşünü) sorgulatmakta ve gelişimin sarmal, bağlamsal ve bireysel etkileşimlere açık bir yapı izlediğini göstermektedir (Kinnear, Iannone ve Davies, 2024; Stylianides ve Ball, 2008; Weber ve Mejía-Ramos, 2011). Öğretmen adayları ispat öğretiminin önündeki engelleri genellikle sistemsal ve pedagojik yetersizliklerle açıklamışlar ama öneri sunma konusunda oldukça sınırlı ve yüzeysel ifadeler kullanmışlardır. Bu durum öğretmen adaylarının ispatın ne olduğu ve nasıl yapılması gerektiğine dair genel bir farkındalık geliştirmiş olsa bile öğretimsel aktarıma ilişkin bilgi seviyelerinin zayıf kaldığını göstermektedir. Bu yüzden öğretmen eğitimi programlarında ispat öğretimine daha bütüncül, görev temelli ve örnek çeşitliliğine dayalı yaklaşımlar entegre edilmesi gerektiğini ortaya koymaktadır (Bills vd. 2006; Kinnear, Iannone ve Davies, 2024; Zaslavsky, 2014).

Her ne kadar ispatın uygulamasında ve değerlendirmesinde bazı sınırlılıklar gözlenmiş olsa da öğretmen adaylarının matematiksel ispata dair bazı güçlü yönleri de dikkat çekicidir. Öğretmen adayları ispatın yalnızca doğrulama değil aynı zamanda ispatın anlamlandırılması, kavramların gerekçelendirmelerinin ortaya konulması ve bilginin temellendirilmesi işlevlerine ilişkin yüksek farkındalık sergilemişlerdir. Bu durum, analitik şemaya yönelik potansiyeli ortaya koymaktadır (Harel ve Sowder, 1998). Öğretmen adayları ispata karşı genel tutumlarının olumlu ve ilgilerinin yüksek olduğu, ispatı matematiğin ana unsuru olarak gören bilinçli bir yaklaşıma sahiptirler (Zaslavsky, 2014). Değerlendirme süreçlerinde farklı kriterler arasında ayırım yapma çabası öğretmen adaylarının ispatı çok yönlü düşünmeye başladıklarını göstermektedir. Bu çabalar her ne kadar hatalar içermiş olsa da öğrenme açısından çok önemlidir (Raman, 2003). Az sayıda da olsa, bazı öğretmen adayları aksiyomatik ya da dönüşümsel şema kullanarak gelişmiş ispat argümanları sunmuş ve şemalar arası geçiş yapabilecek potansiyele sahip olduklarını göstermişlerdir (Ellis vd. 2012). Öğretmen adaylarının çoğu, ispatın yalnızca bireysel bilgi değil aynı zamanda öğrencinin gelişimini destekleyici pedagojik bir araç olduğunu ifade ederek eğitimdeki rolünü çok boyutlu değerlendirmişlerdir (Ball ve Bass, 2003).

7. ÖNERİLER

Öğretmen adaylarının ispat şemalarının, ispata dair görüşlerinin ve ispatı değerlendirme biçimlerinin zaman içinde nasıl değiştiği yani birinci sınıftan dördüncü sınıfa kadar izlenerek şemalar arası geçişleri süreç içinde takip edilmesi önerilir. Bu sayede gelişimin doğrusal mı yoksa dalgalı mı olduğu daha sağlıklı biçimde ortaya konulabilecektir.

Sınıf düzeylerinin etkisi, sadece yaş ile değil; kurumsal kültür, öğretim programının yapısı, uygulama derslerinin niteliği gibi faktörlerle değişebilir. Bu yüzden örneklem çeşitlendirilerek kültürel ve bağlamsal farklılıklar araştırılabilir.

Özellikle dönüşümsel ispat şemasına geçişi destekleyen matematiksel görev tasarımları ve öğretim yöntemlerinin etkileri deneysel veya eylem araştırmaları ile test edilebilir.

Öğretmen adaylarının geçerli-geçersiz argüman ayrımını hangi kriterlere dayandığı, biçimsel yanılısamadan nasıl etkilendiği, “key idea” farkındalıkları gibi boyutlar özellikle odak grup görüşmeleriyle veya bilişsel görev analizleriyle araştırılması önerilmektedir.

Dinamik geometri yazılımları (GeoGebra, Cabri gibi), bilgisayar cebiri sistemleri veya etkileşimli ispat platformlarıyla (ProofCheck vb.) yapılan ispat etkinliklerinin öğretmen adayların şematik gelişimine katkısı deneysel olarak ölçülebilir.

KAYNAKLAR

Almeida, D. (2000). Why prove this theorem? *Mathematics Teaching*, (171), 32–36.

Altıntaş, E., & İlgün, Ş. (2020). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerinin belirlenmesi: Kars örnekleme. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 28(3), 1573–1582. <https://doi.org/10.24106/kefdergi.706125>

Altıparmak, K., & Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25–37.

Aydoğdu İskenderoğlu, T., & Baki, A. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerinin nicel analizi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 11(4), 2285–2290.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–235). Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (2023). *Epistemology and psychology of proof in mathematics education*. Springer.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). National Council of Teachers of Mathematics.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 72–85). National Council of Teachers of Mathematics.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1–2), 23–40.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351–382. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.4.0351>

Bieda, K. N., & Lepak, J. (2014). Supporting the justification of claims with mathematical evidence in middle school mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19(5), 300–306.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2019). Engaging with complexity in proving tasks: The role of example-generation tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 54, Article 100683.

Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2014). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (18. baskı). Pegem Akademi.

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis*. Sage.

Charmaz, K. (2014). *Constructing grounded theory* (2nd ed.). Sage.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359–387. <https://doi.org/10.1007/BF01273371>

Cihan, F. (2024). Matematiksel İspat Yöntemlerine İlişkin YoutubeTM Videolarının ve Video Yorumlarının Analizi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(2), 437-460. <https://doi.org/10.17679/inuefd.1378938>

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), 41–53.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common core state standards for mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers.

Creswell, J. W. (2020). *Nitel araştırma yöntemleri: Beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni* (M. Bütün & S. B. Demir, Çev.). Siyasal Kitabevi.

Çontay, E. G. (2024). Matematik Öğretmeni Adaylarının Tümdengelimsel Akıl Yürütme Yoluyla İspat Anlayışları. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 62, 362-404. <https://doi.org/10.9779/pauefd.1359924>

Dawson, C. (2006). *A practical guide to research methods: A user-friendly manual for mastering research techniques and projects* (2nd ed.). How To Books.

Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematik öğretmen adaylarının ispatın doğasına yönelik inançları. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 14(1), 267–289.

Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711–733.

Doğan, M. F. (2015). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *International Online Journal of Educational Sciences*, 7(1), 126–143.

Doğan, M. F. (2019). The nature of middle school in-service teachers' engagements in proving-related activities. *Çukurova University Faculty of Education Journal*, 48(1), 100–130.

Doğan, M. F., & Williams-Pierce, C. (2019). The role of teacher knowledge in students' understanding of proof. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(5), 1071–1092.

Dolev, B., & Even, R. (2015). Justifications and explanations in middle school mathematics classrooms: Students' and teachers' perspectives. *ZDM–Mathematics Education*, 47, 891–903.

Doruk, M. (2014). Matematik öğretmen adaylarının ispat sürecine yönelik farkındalıkları. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 11(25), 213–227.

Doruk, M., & Cihan, F. (2024). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebir ve Geometri Alanlarındaki İspat Özellikleri. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20(3), 546-564. <https://doi.org/10.17860/mersinefd.1519869>

Doruk, M., & Güler, G. (2014). Öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapma süreçleri üzerine bir araştırma. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 8(1), 41–67.

Edwards, B. S. (1999). A case study of students' conceptions of proof. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(1), 53–78.

Edwards, L. D. (1999). Notions of mathematics and mathematics learning in mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 25–40.

Ellis, A. B., Lockwood, E., Williams, C., Doğan, M. F., & Knuth, E. (2012). Middle school students' use of examples in conjecturing and proving. In *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 599–606). PME-NA.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9–18.

Fried, M. N., & Amit, M. (2006). Some reflections on mathematics education from the vantage point of classic problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 185–202.

Güler, G., & Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571–590.

Güven, B., Çelik, D., & Karataş, İ. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 635–648.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*. Springer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234–283). American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Information Age Publishing.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428. <https://doi.org/10.2307/749651>

Hemmi, K., Lepik, M. V., & Viholainen, A. (2013). Analysing proof-related competences in Estonian, Finnish and Swedish mathematics curricula: Towards a framework of developmental proof. *Journal of Curriculum Studies*, 45(3), 354–378. <https://doi.org/10.1080/00220272.2012.754055>

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389–399.

Hofer, B. K., & Pintrich, P. R. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. *Review of Educational Research*, 67(1), 88–140. <https://doi.org/10.3102/00346543067001088>

İskenderoğlu, T. (2010). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat sürecindeki davranışlarının değerlendirilmesi. *Uluslararası İnsan Bilimleri Dergisi*, 7(1), 1016–1035.

Kaplan, A., Demir, S., & Şahin, A. (2023). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapabilme yeterlikleri. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(1), 156–178.

Kaya, D., & Keşan, C. (2023). Matematik öğretmen adaylarının ispat türlerine yönelik farkındalıkları. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 21(2), 376–395.

Kinnear, P., Iannone, P., & Davies, D. (2024). Student strategies for generating mathematical examples in written vs. e-assessment formats. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

Knuth, E. J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379–405. <https://doi.org/10.2307/4149959>

Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. In F. L. Lin (Ed.), *Proceedings of the international conference on mathematics: Understanding proving and proving to understand* (pp. 169–174). National Taiwan Normal University.

Knuth, E. J. (2002c). Middle school students' understanding of proof. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 7(9), 524–532.

Knuth, E. J., & Sutherland, J. (2004). Student understanding of generality. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 169–176). Bergen University College.

Lynch, J., & Lockwood, E. (2019). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5(2), 166–189.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41–51.

Mason, J. (1985). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Sage.

Millî Eğitim Bakanlığı. (2013). *Ortaokul matematik dersi (5–8. sınıflar) öğretim programı*. MEB Yayınları.

Millî Eğitim Bakanlığı. (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1–8. sınıflar)*. MEB Yayınları.

Millî Eğitim Bakanlığı. (2024). *Türkiye yüzyılı maarif modeli matematik dersi öğretim programı (1–8. sınıflar)*. <https://mufredat.meb.gov.tr>

Miyakawa, T., & Herbst, P. (2007). Proving and understanding in geometry: Insights from a teaching experiment. *ZDM–Mathematics Education*, 39(3), 383–398.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249–266.

Moralı, S., Uğurel, I., & Boz, N. (2006). Lisans öğrencilerinin ispat hakkındaki inançları ve görüşleri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 26(1), 29–41.

Morris, A. K. (2002a). Mathematical reasoning: Adults and children. *Mathematics Education Research Journal*, 14(2), 49–67.

Morris, A. K. (2002b). Mathematical reasoning: Adults' ability to make the inductive–deductive distinction. *Cognition and Instruction*, 20(1), 79–118.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3rd ed.). Sage Publications.

Polya, G. (1981). *Matematiksel keşif: Problem çözme yoluyla öğrenme* (Cilt 1; A. G. Aksoy, Çev.). TÜBİTAK Yayınları.

Porteus, K. (1990). What do children really believe? *Educational Studies in Mathematics*, 21, 589–598.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 319–325.

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 83–99.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53–70). Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (2009). Bridging the cultures of teaching and research: A gap that can be bridged. In J. Cai (Ed.), *Mathematics education research: What is it and why does it matter?* (pp. 189–195). National Council of Teachers of Mathematics.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4–36. <https://doi.org/10.2307/30034698>

Solow, D. (2005). *How to read and do proofs: An introduction to mathematical thought processes* (4th ed.). Wiley.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher*, 91(8), 670–675.

Steele, M. D. (2006). Sixth-grade students' proof schemes for a conjecture in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(4), 361–372.

Stewart, C. J., & Cash, W. B. (2014). *Interviewing: Principles and practices* (14th ed.). McGraw-Hill.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd ed.). Sage.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(4), 307–332.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314–352. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.40.3.0314>

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2023). Teaching and learning mathematical reasoning and proving: The role of example-based reasoning. *ZDM–Mathematics Education*, 55, 655–667.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). The classroom dynamic: Teacher knowledge and student reasoning from the perspective of analytic frameworks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 38, 281–299.

Şen, S., & Yıldırım, İ. (2019). *Eğitimde araştırma yöntemleri*. Nobel Akademi Yayıncılık.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161–177.

Uğurel, I., & Moralı, S. (2010). Matematik öğretmen adaylarının ispat hakkındaki düşüncelerinin kavramsal değişim süreci. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 4(2), 105–139.

Uğurel, I., Kertil, M., & Moralı, S. (2020). Matematiksel ispatın doğasına ilişkin öğretmen adaylarının düşünceleri. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15(1), 205–228.

Uygan, C., Tanışlı, D., & Köse, N. Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapabilme yeterlilikleri üzerine bir inceleme. *Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 7(3), 63–82.

Ülker, E. (2018). *Ortaokulda ispata giriş: Gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı* (Tez No. 494227) [Yüksek lisans tezi, Anadolu Üniversitesi]. YÖK Ulusal Tez Merkezi.

Vallejo-Vargas, F. (2025). The role of examples in proving and disproving: extending an existing framework. *Educational Studies in Mathematics*, 119, 101-116.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227–236). National Council of Teachers of Mathematics.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2018). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (4th ed.). Sage.

Yitmez, B. G., & Yılmaz, S. (2024). Matematik Öğretmeni Adaylarının Ortaklaşa Argümantasyon Sürecindeki Argümanlarının ve İspat Şemalarının İncelenmesi. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, 13(1), 102-119. <https://doi.org/10.30703/cije.1302410>

Zaslavsky, O. (2014). Thinking with and through examples. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, 46(1), 143–154.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119.

Weber, K., & Alcock, L. (2008). Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic approaches. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection:*

Research and teaching in undergraduate mathematics (pp. 323–338). Mathematical Association of America.

Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: Further evidence from a survey study. *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 329–344.



EKLER

EK-1: I. Bölüm (İspata ilişkin görüşler) : Bu kısımda size ait bazı bilgilere ve okul matematiğinde yer alan ispat kavramına ilişkin sorulara yanıt vermeniz istenecektir.

Ad-Soyad:

Sınıf Düzeyi:

Daha önce ispat ile ilgili herhangi bir ders aldınız mı (ortaokul, lise, üniversite)?
Aldıysanız bu dersleri yazınız.

1-) İspat kavramı size ilk olarak ne çağrıştırmaktadır? İspat sizin için ne anlam ifade etmektedir? Açıklayınız.

2-) İspatın okul matematiğinde;

- Önemi hakkında neler söyleyebilirsiniz?
- Yeri hakkında neler söyleyebilirsiniz?
- Hangi amaçlarla kullanıldığını düşünüyorsunuz?
- Rolünün ne olduğunu düşünüyorsunuz?

3-) Öğrenenlerin okul matematiğinde ispatı daha iyi anlamlandırabilmesi ve konumlandırabilmesi adına hangi sınıf seviyelerinde karşılaşmaları gerektiğini düşünüyorsunuz? Nedenleriyle açıklayınız.

4-) Bir ispat sizin için hangi durumlarda geçerli ve kabul edilebilirdir? Hangi özellikleri barındırmalıdır? Bir ispatın doğru olup olmadığına nasıl karar verirsiniz? (Bir şeyin geçerli bir ispat olup olmadığını nereden biliyorsunuz? Bir ispatın kabul edilip edilmediğine nasıl karar verirsiniz? (kendi ispatınız veya başka bir ispat için)

EK-2: II. Bölüm (İspat yapma becerisi) : Bu kısımda aşağıda verilen matematiksel görevlere ilişkin kendinize ait matematiksel argümanları oluşturmanız istenecektir.

1-) Fatih tam kare olan bir doğal sayının doğal sayı çarpanlarının sayısının her zaman tek olduğunu iddia etmektedir. Sizce Fatih haklı mıdır? Bu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?

2-) Emine “ $1^x + 2^x + 3^x + 4^x + 5^x$, x **pozitif** tek olduğunda her zaman 5'in katıdır.” demiştir. Sizce Emine haklı mıdır? Bu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?

3-) Ümit herhangi bir $n \in \mathbb{N}^+$ için $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 1+3+5+\dots+2n-1 = n^2$ eşitliğinin her zaman doğru olduğunu söylemiştir. Sizce Ümit haklı mıdır? Bu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?

4-) Ali $x \geq 1$ olmak üzere $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesinin her zaman doğru olduğunu söylemiştir. Sizce Ali haklı mıdır? Bu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını nasıl gösterirsiniz?

EK-3: III. Bölüm (İspatın değerlendirilmesi): Burada size aşağıda verilen iki farklı matematiksel önermeye ilişkin bazı argümanlar verilmiş olup bunları değerlendirmeniz istenecektir.

1-) $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2, (n \in \mathbb{N}^+)$

Argüman 1: $P(n)=1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

$n=1$ için doğrudur. Çünkü $P(1)=1^2=1$

$n=k$ için doğru olsun. Yani $P(k)= 1+3+5+\dots+(2k-1)= k^2$ olsun.

$n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

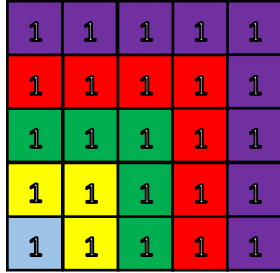
$$P(k+1)=1+3+5+\dots+(2(k+1)-1)= (k+1)^2 \dots\dots\dots (?)$$

$$\Rightarrow \underbrace{1+3+5+\dots+(2k-1)}_{k^2} + (2k+1) = (k+1)^2 \dots\dots\dots (?)$$

$$\Rightarrow k^2+2k+1=(k+1)^2 \dots\dots\dots(\text{eşitlik sağlandı})$$

O halde $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $P(n)$ önermesi doğrudur. İspat tamamlanmış olur.

Argüman 2:



Şekildeki gibi içten dışa doğru 1, 3, 5, 7, 9... şeklinde birim karelerden oluşan bir kare çizildiğinde; $n = 1$ için 1 tane (mavi), $n = 2$ için 3 tane (sarı), $n=3$ için 5 tane (yeşil), $n = 4$ için 7 tane (kırmızı) ve $n = 5$ için 9 tane (mor) birim kare birbiri etrafına çizilerek büyük bir kare elde edilebilir. Buradan da $n = 5$ olduğu için kenar uzunluğu 5 olur ve karenin alanı 5^2 olur. Burada n terim sayısı olmak üzere $1+3+5+\dots+(2k-1)$ toplamında n tane terim vardır ve toplamı n^2 'ye eşit olur.

Argüman 3:

$n=2$ için $1+3=4=2^2$

$n=5$ için $1+3+5+7+9=25=5^2$

$n=10$ için $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100=10^2$

$n=13$ için $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25=169=13^2$

O halde $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ doğrudur.

EK-3 (Devam): III. Bölüm (İspatın değerlendirilmesi):

Argüman 4:

$\sum_{k=1}^n (2k - 1)$ toplamını ayrı ayrı düşündüğümüzde $\sum_{k=1}^n 2k - \sum_{k=1}^n 1$ şeklinde yazılabilir. Buradan hareketle $2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1$ olur. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ve $\sum_{k=1}^n 1 = 1.n = n$ olduğunu biliyoruz. O halde;

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2 \text{ olur.}$$

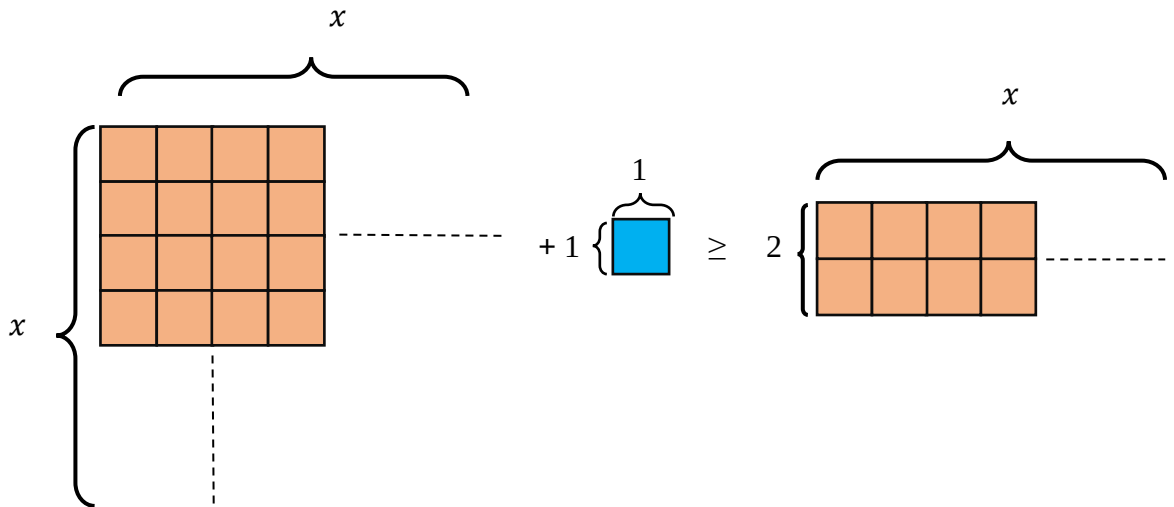
- Yukarıdaki argümanlardan hangisi sizin yapacağınız argümana en yakındır? Nedenleriyle açıklayınız?
- Yukarıdaki argümanlardan hangisini öğrenciniz yaparsa sizi daha çok ikna edebilir? Nedenleriyle açıklayınız?
- Yukarıdaki argümanlardan hangisinin matematiksel açıdan daha güçlü olduğunu düşünüyorsunuz? Nedenleriyle açıklayınız?

2-) $x \geq 1$ olmak üzere $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesinin her zaman doğru olduğunu gösteriniz.

Argüman 1:

$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)^2 \geq 0$ olur ve verilen ifade her zaman doğrudur.

Argüman 2: $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$



Yukarıdaki görselde x arttıkça eşitsizliğin sol tarafında alanı x^2 olan kare hem sağa hem de aşağı doğru genişlerken eşitsizliğin sağ tarafında alanı $2x$ olan dikdörtgen sadece sağa

EK-3 (Devam): III. Bölüm (İspatın değerlendirilmesi):

doğru genişlemektedir. Buradan hareketle eşitsizliğin sol tarafı her zaman sağ tarafından büyük eşit olacaktır (x 'in 1 olması durumunda eşitlik sağlanmaktadır).

Argüman 3:

$$x=1 \text{ için } 1 + \frac{1}{1} \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2$$

$$x=5 \text{ için } 5 + \frac{1}{5} \geq 2 \Rightarrow 5,2 \geq 2$$

$$x=10 \text{ için } 10 + \frac{1}{10} \geq 2 \Rightarrow 10,1 \geq 2$$

$$x=100 \text{ için } 100 + \frac{1}{100} \geq 2 \Rightarrow 100,01 \geq 2$$

$$x=100000 \text{ için } 100000 + \frac{1}{100000} \geq 2 \Rightarrow 100000,00001 \geq 2$$

O halde $x \geq 1$ olmak üzere $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesinin her zaman doğrudur.

Argüman 4: Negatif olmayan reel sayılarda aritmetik ortalamanın geometrik ortalamadan her zaman büyük eşit olduğunu biliyoruz. Yani $A.O \geq G.O$ 'dır. Buradan hareketle;

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{1} \Rightarrow \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ sağlanmış olur.}$$

- Yukarıdaki argümanlardan hangisi sizin yapacağınız argümana en yakındır? Nedenleriyle açıklayınız?
- Yukarıdaki argümanlardan hangisini öğrenciniz yaparsa sizi daha çok ikna edebilir? Nedenleriyle açıklayınız?
- Yukarıdaki argümanlardan hangisinin matematiksel açıdan daha güçlü olduğunu düşünüyorsunuz? Nedenleriyle açıklayınız?