

T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN
İSPAT ALGILARININ GENELLEYİCİ ÖRNEK
BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA AKGÜN

1. DANIŞMAN

DR. ÖĞR. ÜYESİ GÜLSEN KILINÇ

2. DANIŞMAN

DOÇ. DR. MUHAMMED FATİH DOĞAN

ADİYAMAN, 2023

T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN
İSPAT ALGILARININ GENELLEYİCİ ÖRNEK
BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA AKGÜN

1. DANIŞMAN

DR. ÖĞR. ÜYESİ GÜLSEN KILINÇ

2. DANIŞMAN

DOÇ. DR. MUHAMMED FATİH DOĞAN

ADİYAMAN, 2023

ÖZET

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN İSPAT ALGILARININ GENELLEYİCİ ÖRNEK BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

Mustafa AKGÜN

**Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı
Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ocak/2023**

1. Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülsen KILINÇ

2. Danışman: Doç. Dr. Muhammed Fatih DOĞAN

Genel olarak ispat ile ilgili etkinliklerde genelleyici örneklerin kullanılması, ispatı daha açıklayıcı ve daha anlamlı hale getirir. Bu bağlamda, öğrencilerini ispat konusunda desteklemek için öğretmenlerin ispat becerilerinin gelişmiş olması ve ispat sürecini doğru bir şekilde yürütebilmeleri gerekmektedir. Bu çalışmanın amacı, ortaokul matematik öğretmenlerinin ispat süreçlerini, verilen farklı argümanları değerlendirmelerini ve genelleyici örnek üzerine anlayışlarını incelemektir. Durum çalışması yöntemi ile tasarlanan çalışmanın verileri 10 ortaokul matematik öğretmeni ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla toplanmıştır. Verilerin analizinde açık kodlama ve içerik analizi yöntemleri kullanılmıştır. Öğretmenlerin daha çok örnek temelli ispatlar ürettikleri, yaklaşık yarısının örnek vererek ispat yaptığını düşündüğü görülmüştür. Öğretmenlerin argümanları değerlendirirken kullandıkları kriterlerin; mantıklı bulma, genel olma, örnek verme, önceki bilgilerden yararlanma, doğru bulma, cebirsel ifadeler kullanma, açıklayıcı olma, ikna edici olma, kullanışlı olma, somutlaştırılmış olma, karmaşık bulma olduğu tespit edilmiştir. Öğretmenlerin büyük çoğunluğunun sayısal olarak ifade edilen genelleyici örnekleri geçerli bir ispat olarak kabul ettikleri, görsel olarak ifade edilen genelleyici örnekleri ise geçerli bir ispat olarak kabul edenlerin sayısının az olduğu belirlenmiştir. Öğretmenlerin verilen farklı argümanlar arasından genelleyici örnekleri ikna edici ve açıklayıcı olarak buldukları, cebirsel olarak ifade edilen argümanı ise en ikna edici ve en açıklayıcı argüman olarak gördükleri sonucu elde edilmiştir. Öğretmenlerin ispat becerilerinin düşük olduğu, buna karşın geçerli bir ispat için gerekli olan koşulların farkında oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmenler genelleyici örnekleri, örnek temelli argümanlardan ayırt ettikleri, genelliği yeterince temsil ettiğini belirttikleri ve geçerli bir ispat olarak kabul ettikleri sonucu ortaya çıkmıştır.

Anahtar Kelimeler: Genelleyici örnek; İspat; İspat değerlendirme

ABSTRACT

EXAMINATION OF SECONDARY MATHEMATICS TEACHERS' PERCEPTIONS OF PROOF IN A GENERIC EXAMPLE CONTEXT

Mustafa AKGÜN

Department of Mathematics and Science Education

Adıyaman University, Graduate Education İnstitute, January/2023

First Supervisor: Assist. Prof. Dr. Gülsen KILINÇ

Second Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed Fatih DOĞAN

In general, the use of generic examples in activities related to proof makes the proof more explanatory and more meaningful. In this context, in order to support their students' proof skills, teachers should have advanced proof skills and be able to carry out the proof process correctly. The aim of this study is to examine secondary school mathematics teachers' proof processes, their evaluation of different arguments and their understanding of the generic example. The data of the study, which was designed with the case study method, were collected through semi-structured interviews with 10 secondary school teachers. Open coding and content analysis methods were used in the analysis of the data. It was observed that the teachers mostly produced proofs based on examples, and about half of them thought that they made proofs by giving examples. It has been determined that the criteria used by the teachers when evaluating the arguments are logical, general, giving examples, benefiting from previous knowledge, finding correct, using algebraic expressions, being explanatory, persuasive, useful, concretizing, and finding complex. It has been determined that the majority of teachers accept numerically expressed generic examples as valid proof, while the number of those who accept visually expressed generic examples as valid proof is low. It was concluded that the teachers found the generic examples to be convincing and explanatory among the different arguments given, while they saw the algebraically expressed argument as the most convincing and explanatory argument. It has been concluded that the teachers' proof skills are low, but they are aware of the conditions necessary for a valid proof. It was concluded that the teachers distinguished generic examples from example based arguments, stated that they adequately represented the generality and accepted it as a valid proof.

Keywords: Generic Example; Proof; Proof Evaluation

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgilerini esirgemeyen, tecrübeleri ile yol gösteren, çalışmalarımın olgunlaşmasında emek ve destekleri ile her daim yanımda olan çok değerli danışmanlarım Dr. Öğr. Üyesi Gülsen KILINÇ ile Doç. Dr. Muhammed Fatih DOĞAN'a, çok teşekkür ederim. Ayrıca, eğitim ve meslek hayatım boyunca yoğun çalışmalarım sırasında bana sabır gösteren, beni her zaman destekleyen, dualarını benden esirgemeyen, sürekli yanımda olan eşim Hüda KORKMAZ AKGÜN, annem Rahime AKGÜN, babam Abdulkadir AKGÜN ile diğer aile üyelerime ve son olarak çalışmalarına doğrudan veya dolaylı olarak katkı sağlayan, her daim yanımda olduklarını bana hissettiren arkadaşlarım ve tüm öğretmenlerime teşekkür ederim.

Mustafa AKGÜN

Adıyaman, 2023

23/01/2023

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

“Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin İspat Algılarının Genelleyici Örnek Bağlamında İncelenmesi” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Mustafa AKGÜN

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
TABLolar DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
GÖRSELLER DİZİNİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Araştırmanın Problem Durumu	4
1.2. Araştırmanın Amacı.....	4
1.3. Araştırmanın Önemi	5
1.4. Araştırma Sınırlılıkları	6
1.5. Tanımlar.....	6
2. KURAMSAL ÇERÇEVE.....	7
2.1. İspat	7
2.2. Genelleyici Örnek	10
3. İLGİLİ ÇALIŞMALAR.....	14
4. YÖNTEM	32
4.1. Araştırmanın Yöntemi	32
4.2. Çalışma Grubu	32
4.3. Araştırmanın Tasarlanması ve Veri toplama Aracı	33
4.4. Verilerin Toplanması	36
4.5. Araştırmacının Rolü.....	37
4.6. Veri Analizi	37
5. BULGULAR.....	43
5.1. Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin İspat Becerileri	43
5.2. Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Argümanları Değerlendirirken Kullandıkları Kriterler	62
5.2.1. Argümanlar Değerlendirilirken Kullanılan Kriterler.....	63
5.2.2. Verilen Argümanların İkna Edici ve Açıklayıcı Bakımından Değerlendirilmesi	71

5.2.3. Geçerli Bir İspatın Özellikleri	75
6. TARTIŞMA	79
6.1. Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin İspat Becerileri	79
6.2. Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Argümanları Değerlendirirken Kullandıkları Kriterler	81
6.3. Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin İspat Becerileri ve Argümanları Değerlendirirken Kullandıkları Kriterler Arasındaki İlişki.....	86
7. SONUÇ ve ÖNERİLER	88
KAYNAKLAR	92
KİŞİSEL BİLGİLER.....	98
EKLER.....	99
Ek 1. Görüşme Soruları	100
Ek 2. Etik Kurul Belgesi	110

TABLÖLER DİZİNİ

Sayfa

Tablo 4.1. Araştırma grubunu oluşturan öğretmenlere ait bilgiler	33
Tablo 5.1. Ortaokul matematik öğretmenlerinin yaptıkları çözümler	44
Tablo 5.2. Ortaokul matematik öğretmenlerinin verilen argümanları geçerli bulma oranları	62
Tablo 5.3. Ortaokul matematik öğretmenlerinin argümanları değerlendirirken kullandıkları kriterler	64
Tablo 5.4. Ortaokul matematik öğretmenlerinin soru 1 için verilen argümanları en ikna edici olandan en az ikna edici olana doğru sıralamaları	72
Tablo 5.5. Ortaokul matematik öğretmenlerinin soru 2 için verilen argümanları en ikna edici olandan en az ikna edici olana doğru sıralamaları	73
Tablo 5.6. Ortaokul matematik öğretmenlerinin soru 3 için verilen argümanları en ikna edici olandan en az ikna edici olana doğru sıralamaları	73
Tablo 5.7. Ortaokul matematik öğretmenlerinin verilen argümanları en açıklayıcı olandan en az açıklayıcı olana doğru sıralamaları	75
Tablo 5.8. Ortaokul matematik öğretmenlerinin geçerli bir ispatın özellikleri hakkındaki görüşleri	75

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. Verilerin analizi için kullanılan örnek kodlama şeması	39
---	----



GÖRSELLER DİZİNİ

Sayfa

Görsel 2.1. Görsel Olarak İfade Edilen Genelleyici Örnek Temsili	12
Görsel 5.1. Nisa Öğretmen'in Soru 1 İçin Çözümü	45
Görsel 5.2. Ali Öğretmen'in Soru 1 İçin Çözümü	46
Görsel 5.3. Ezgi Öğretmen'in Soru 1 İçin Çözümü	47
Görsel 5.4. Sefa Öğretmen'in Soru 1 İçin Çözümü	48
Görsel 5.5. Mahmut Öğretmen'in Soru 1 İçin Çözümü	49
Görsel 5.6. Emine Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü.....	50
Görsel 5.7. Mehmet Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü	51
Görsel 5.8. Mahmut Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü	52
Görsel 5.9. Ezgi Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü	53
Görsel 5.10. Emir Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü	54
Görsel 5.11. Zeki Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü	55
Görsel 5.12. Emine Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü	56
Görsel 5.13. Mahmut Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü	57
Görsel 5.14. Sefa Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü	58
Görsel 5.15. Ali Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü	59
Görsel 5.16. Ezgi Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü	60
Görsel 5.17. Nisa Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü	61

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı

TDK : Türk Dil Kurumu

NCTM : Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics)

s. : Sayfa

vd. : Ve diğerleri

ark. : Arkadaşları

akt. : Aktaran

1. GİRİŞ

Geleneksel matematik eğitiminde genel olarak öğrencinin pasif olduğu, matematiksel bilgilerin öğretmen tarafından verildiği görülmektedir. Böylece ezbere dayalı öğrenmeye yönlendirilen öğrenciler matematiksel düşünme becerilerini geliştirememekte ve karşılaştığı basit problemler karşısında bile zorluk çekebilmektedirler. Bahsedilen matematik eğitiminin kullanımı azalsa da günümüzde hâlâ kullanıldığı durumlar görülmektedir. Oysa günlük hayatta az ya da çok matematik ve matematiksel düşünme gerektiren birçok olay ve durumla karşılaşmaktadır. Öğrencilerden, akıl yürütme ve matematiksel düşünme becerileri yoluyla problemleri çözmeleri beklenmektedir. Çağdaş anlayışa göre matematik eğitimi, matematik yaparak matematik öğrenmeyi vurgulamaktadır. Dolayısı ile matematik yapma sürecinde, genellemelere nasıl varılır, genellemeler nasıl doğrulanır, nasıl akıl yürütülür gibi birçok önemli beceriyi de öğrencilere kazandırmak mümkündür (Olkun ve Uçar, 2009). Aynı zamanda bu beceriler akıl yürütme, ispat ve gerekçelendirmenin önemini de vurgulamaktadır.

Son yıllarda matematik öğrenimi ve öğretiminde önemli değişiklikler meydana gelmiştir. Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi [National Council of Teachers of Mathematics] (NCTM) matematik eğitiminin nasıl olması gerektiği konusunda Okul Matematiği İçin İlkeler ve Standartlar (Principles and Standards for School Mathematics)'ı 2000 yılında yayınlamıştır. Bu ilke ve standartlara göre, öğrenciler, matematiği anlayarak öğrenmeli, önceki bilgi ve deneyimlerinden faydalanarak yeni bilgiyi aktif bir şekilde inşa etmelidir (NCTM, 2000, s.20). Ayrıca problem çözme, akıl yürütme ve ispat, iletişim, ilişkilendirme ve temsil süreçleri matematik öğrenim ve öğretiminin tamamlayıcı bileşenleri olarak kabul edilmiştir.

NCTM (2000) öğrencilerin anaokulundan 12. sınıfın sonuna kadar akıl yürütme ve ispat standardı için bazı hedefler belirlemiştir. Buna göre öğrenciler (NCTM, 2000, s. 56)

- Akıl yürütme ve ispatı matematiğin temel unsurları olarak kabul eder,

- Matematiksel hipotezler kurabilir ve bunları sorgulayabilir,
- Matematiksel iddiaları ve ispatları geliştirebilir ve değerlendirebilir,
- Çeşitli akıl yürütme ve ispat yöntemlerini seçebilir ve kullanabilirler.

Türkiye de bu gelişmelerden etkilenmiş ve 2005 yılından itibaren matematik öğrenimi ve öğretimi konusunda değişiklikler yaşanmıştır. Milli Eğitim Bakanlığının 2018 yılında yayınladığı Matematik Dersi Öğretim Programının özel amaçlarına bakıldığında, öğrencilerden matematiksel düşünme becerilerini günlük hayat ile ilişkilendirip matematiksel kavramları anlamlandırabilmelerinin, matematiksel düşüncelerini mantıklı bir şekilde açıklamalarının, matematiksel terminolojiyi ve dili doğru kullanabilmelerinin, kendi düşünme ve akıl yürütmelerini ifade edebilmeleri ve başkalarının akıl yürütmelerindeki eksiklikleri görebilmelerinin beklenildiği görülmektedir. Matematik dersi öğretim programının özel amaçlarına baktığımızda direkt olarak ispat kelimesi geçmese de, dolaylı olarak öğrencilerin akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat etkinlikleri ile matematiksel düşüncelerinin geliştirilmesi gerekmektedir.

Matematiksel düşünme ve problem çözme becerilerinin gelişmesinde ispatın rolü büyüktür. İspat matematik yapmanın bir parçası (Harel ve Sowder, 1998) ve matematik öğrenmeye yönelik bir araçtır (Knuth, 2002). Bu nedenle akıl yürütme ve ispat matematiğin önemli bir bileşenidir ve okul öncesi dönemden en ileri düzeye kadar öğrencilere kazandırılması gerekmektedir (NCTM, 2000). İlgili literatür öğrencilerin ispatı anlamak ve ispat yapmak konusunda problem yaşadıklarını (Harel ve Sowder, 1998; Weber, 2010) ortaya koymuştur. Öğrenciler için temel bilgi kaynağı olan öğretmenlerin ispat konusunda öğrencilerine destek olabilmeleri için bu konuda kendilerini iyi hazırlamaları gerekmektedir. Fakat öğretmenlerin de öğrencilerine ispatı anlatırken ve öğrencilerini ispat konusunda desteklerken zorlandıkları (Knuth, 2002), ispatı nasıl öğreteceklerini bilmedikleri ve ispatı tam olarak anlamlandıramadıkları (Beida, 2010) görülmüştür.

Knuth (2002) ortaokuldaki öğretmenlerin çoğunun örnek temelli argümanlarla ikna olduklarını bulmuştur. Öztürk (2017) çalışmasında öğretmenlerin ispatı bir süreç olarak görmediklerini ve ispatı nedenleriyle beraber doğrulamakta problem

yaşadıklarını belirtmiştir. Doğan (2019) da çalışmasında öğretmenlerin geçerli ispat oluştururken zorlandıklarını ifade etmiştir. Birçok öğretmenin ispatın ne olduğunu bilmediği, matematik öğretimi için ne ifade ettiğini anlamadığı görülmektedir. Bunun nedeni olarak öğretmenlerin yeterli ispat bilgisine sahip olmadığı düşünülmektedir (Chazan, 1993; Harel ve Sowder, 2007). Bu nedenle öğretmenlerin, ispatı öğretim ortamına entegre etmekte zorlandıkları söylenebilir.

Akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispatı hem öğrenciler hem de öğretmenler adına daha anlamlı hale getiren genelleyici örnek kavramı, açıklayıcı özelliği nedeniyle literatürde dikkat çekmiştir (Balacheff, 1988; Bills ve Rowland, 1999). Mason ve Pimm (1984) genelleyici örneği, o örneğin belirli bir özelliğine dayanmayan özel bir örnek olarak tanımlamaktadırlar. Genelleyici örneklerin güçlü özelliği, belirli bir sayıyı atayarak ve göstererek, daha genel bir argüman için temel sağlayıp açıklaması ve ikna edici olmasıdır (Doğan, 2020). Genelleyici örnek, bir varsayımın doğruluğunun nedenlerini açıkça belirtmek için kullanılır (Balacheff, 1988). Genelleyici örneklerin önemli bir amacı değişkenler kullanmayarak argümanın soyutlanmasını azaltmak ve ispatı öğrenciler için erişilebilir kılmaktır (Doğan ve Williams-Pierce, 2021). Dolayısıyla akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat konusunda genelleyici örneklerin kullanılmasıyla daha anlamlı ve daha açıklayıcı bir öğrenme ve öğretme ortamı sağlanabilir.

Öğrencilerin ispat ile ilgili uygulamalarda başarılı olabilmeleri için öğretmenlerinin ispat becerilerinin gelişmiş olması ve ispat süreçlerini doğru bir şekilde yürütebilmeleri önemlidir. Öğretmenlerin, öğrencilerini ispat konusunda desteklemek için, neyin ispat oluşturduğunu bilmeleri gerektiği önemli olduğundan, genelleyici örnek içeren öğrenci argümanlarını okuyabilmeleri ve değerlendirebilmeleri gerekmektedir. Bu çalışma ortaokul matematik öğretmenlerinin genelleyici örnek bağlamında ispat algılarını incelemektedir.

1.1. Araştırmanın Problem Durumu

Öğrencilerin ispat ile ilgili becerilerinin geliştirilmesi için öğretmenlerin ispat ile ilgili bilgilerini derinleştirmeleri gerekmektedir (Beida, 2010). Konuyla ilgili literatür öğretmenlerin akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat konularında zorlandıklarını ortaya koymuştur (Knuth, 2002; Doğan, 2019). Aynı zamanda öğretmenlerin, öğrencilerine ispatı nasıl öğretecekleri konusunda da problem yaşadıkları görülmektedir (Beida, 2010).

Öğretmenler genelleşici örnek kullanarak, öğrencilerinin akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat konularında daha anlamlı öğrenmeler gerçekleştirebilmesine yardımcı olabilirler. Bu sebeple bu araştırma ortaokul matematik öğretmenlerinin genelleşici örnek bağlamında ispat algılarını araştırmaktadır. Bu çerçevede aşağıdaki sorulara cevap aranmaktadır:

- 1) Ortaokul matematik öğretmenlerinin genelleşici örnek bağlamında ispat yapma becerileri nasıldır?
- 2) Ortaokul matematik öğretmenlerinin genelleşici örnekler de içeren farklı argümanları değerlendirirken kullandıkları kriterler nelerdir?

1.2. Araştırmanın Amacı

Araştırmanın amacı, ortaokul matematik öğretmenlerinin ispat süreçlerinin, verilen farklı argümanları değerlendirmelerinin ve genelleşici örnek üzerine anlayışlarının incelenmesi olarak belirlenmiştir. Bu amaç doğrultusunda, genelleşici örnekler ile ortaokul matematik öğretmenlerinin ispat süreçleri ayrıntılı olarak araştırılmaya çalışılacaktır. Çıkacak olan araştırma sonuçlarına göre, ortaokul matematik öğretmenlerinin geçerli ispat oluşturabilme ve oluşturulan ispatları değerlendirebilme yetenekleri araştırmanın amacı çerçevesinde tartışılacaktır.

1.3. Araştırmanın Önemi

Öğrenci merkezli öğretimi savunan çağdaş eğitim anlayışları, öğrencilerin matematiği günlük hayat ile ilişkilendirip, akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat ile ilgili etkinliklerde bulunmaları gerektiğine işaret etmektedir. Öğrencilerin akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat konularında başarılı olabilmeleri için öğretmenlerin pedagojik alan bilgisine sahip olması ve öğrencilerini desteklemeleri beklenmektedir. Fakat ispat ile ilgili çalışmalar matematik öğretmeni adaylarının ve matematik öğretmenlerinin ispatın anlamını ve önemini tam olarak kavrayamadıklarını (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006), ispat yapma becerilerinin yetersiz olduğunu (Kempen ve Biehler, 2019; Doğan, 2019) ve verilen farklı ispatları değerlendirirken zorlandıklarını (Knuth, 2002; Ko ve Hagen, 2013) ortaya çıkarmıştır.

Her seviyedeki öğrenciler için ispat fazlasıyla soyut ve zorlandıkları bir konu olmuştur (Chazan, 1993). Bu durumun yaşanmasında ispatı üniversite eğitiminde gördükleri formal ispatlar şeklinde düşünerek hareket eden matematik öğretmenlerinin etkisi fazladır. Özellikle ortaokul seviyesindeki öğrencilere fazlasıyla soyut gelen formal ispatların yerine genelleyici örneklerin kullanılmasıyla daha anlamlı ve daha açıklayıcı öğrenmeler gerçekleştirilebilir.

Genelleyici örneğin ispat ile ilgili etkinliklerde önemli bir araç olduğu düşünülmektedir. Dolayısıyla öğretmenlerin genelleyici örnek ile ilgili algılarını ortaya çıkarmak önemlidir. Yapılan literatür taramasında ulaşılabilen çalışmalar kapsamında bu konuda öğretmenler üzerinde yapılan yeterli çalışmanın olmadığı görülmektedir. Öğretmenlerin genelleyici örnek bağlamında ispat algılarını inceleyen bu çalışmanın literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.4. Araştırma Sınırlılıkları

Araştırmanın sınırlılıkları şu şekildedir:

i. Yaşanan Covid-19 salgını nedeniyle iletişim konusunda sıkıntıların olması ve araştırmanın çok fazla zaman almasından dolayı bu araştırma 2020-2021 eğitim-öğretim yılı Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı okullarda görev yapmakta olan 10 ortaokul matematik öğretmeni ile yapılan görüşmelerle sınırlıdır.

ii. Bu araştırma 10 ortaokul matematik öğretmenin verdiği cevaplar ile sınırlıdır.

iii. Bu araştırma 'Sayılar' konusuna ilişkin genelleyici örnek içeren 3 tane soru ile sınırlıdır. Bu 3 soru belirlenen amaca uygun ve yeterli görüldüğü için seçilmiştir.

1.5. Tanımlar

Bir konunun daha iyi anlaşılabilmesi, o konu ile ilgili tanımların bilinmesi ile mümkündür. Bu bağlamda konunun daha iyi anlaşılabilmesi açısından, çalışmaya ilişkin tanımlar aşağıda verilmiştir.

İspat: İspat bir ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını nedenleriyle birlikte açıklayan ve ikna edici mantıksal argümanlar dizisidir (Hersh, 1993: Stylianou, Balnton ve Knuth, 2010).

Genelleyici örnek: Genelleyici örnek, sonucun koşullardan nasıl çıktığını gösteren çıkarımları, bir örneğe dayanarak genelleyen özel bir örnektir (Yopp, Ely ve Johnson-Leung, 2015).

Argüman: Bir iddianın ortaya atılması ve bu iddianın savunulması ya da çürütülmesi için geliştirilen neden ya da nedenlere argüman denir (Pedemonte, 2008).

2. KURAMSAL ÇERÇEVE

2.1. İspat

Matematik eğitiminde yaşanan gelişmeler, problem çözmenin ve akıl yürütmenin temelinde ispatın rolünün ne kadar önemli olduğunu göstermektedir. Türk Dil Kurumu'nda **ispat** : “Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama, tanıt.” şeklinde; **kanıt** : “1) Bir şeyin doğruluğu, gerçekliği konusunda kanaat verici belge, delil, iz, argüman. 2) Anlaşmazlık konusu olan şeyde, yargıcın kanıtlarını oluşturan şey, delil. 3) Sonurguya ulaşan bir usamlamanın dayandığı gerçek, delil.” şeklinde; **ispat etmek**: “1) kanıtlamak. ... 2) tanıtlamak.” şeklinde; **kanıtlamak** : ” Bir şeyin gerçekliğini kanıtla ortaya koymak, ispat etmek.” şeklinde tanımlanmaktadır. Dolayısı ile bu çalışmada ispat ile kanıt ve ispat etmek ile kanıtlamak eşdeğer görülmüştür.

Matematikte ispatın ne olduğuna yönelik bir tartışma olduğu görülmektedir. En genel anlamda ispat bir ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını nedenleriyle birlikte açıklayan ve ikna edici mantıksal argümanlar dizisidir (Hersh, 1993; Stylianou, Blanton ve Knuth, 2010). Bell (1976) ispatı, bir kişinin kendisini veya başkalarını, önermelerin doğruluğu hakkında ikna ettiği bir toplum etkinliği olarak tanımlamaktadır. Stylianides (2007) ispatın sosyo-kültürel boyutuna vurgu yaparak aşağıdaki tanımları sunmaktadır.

İspat matematiksel bir önermenin doğruluğu veya yanlışlığı hakkında iddialar dizisi olan argümanlardır ve aşağıdaki özellikleri taşır:

1. Sınıf topluluğu tarafından (kabul edilen ifadeler kümesi) daha fazla gerekçeye ihtiyaç duymadan kabul edilen ifadeler içerir,
2. Geçerli ve bilinen, sınıf topluluğu tarafından ulaşılabilen gerekçelendirme biçimlerini (argümantasyon biçimleri) kullanır,
3. Uygun ve bilinen, sınıf topluluğu tarafından ulaşılabilen ifade biçimleriyle (argüman temsil biçimleri) iletilir. (s. 291)

İspat etmek (kanıtlamak) ispat yapma sürecini ifade etmektedir. Bu süreç ne kadar iyi yönetilirse ortaya çıkan ürün de o kadar kaliteli olur. Dolayısıyla ispat da ispatlama sürecinin bilişsel ürünüdür ve süreç sonunda ortaya çıkar (Harel, 2008). Matematiksel ispat sonucu doğrulamak, başkalarını bilgilendirmek ve bu bilgiye ikna etmek, bir sonuç bulmak ve sonuçları tümdengelimsel bir sistem içine yerleştirmek için kullanılmaktadır (Almeida, 2003). Hanna'ya (2000) göre matematiksel ispat, bir ifadenin sadece doğru ya da yanlış olduğunun gösterilmesi değil aynı zamanda neden doğru ya da neden yanlış olduğunun da gösterilmesini amaçlar.

Matematikte ispatın ne olduğuna yönelik tartışmalar neticesinde ispat için farklı tanımlar yapılmıştır. Arsac (2007) matematiksel ispatın ne olduğuna yönelik önerilen tanımları, formal boyut ve informal (sosyal veya kültürel) boyut olmak üzere iki ana grupta toplamıştır. Dede ve Karakuş (2014), matematiksel ispatın formal boyutunu, matematiksel bir bilginin kesin kurallar ile doğrulanması sürecindeki ifade, açıklama vb. içerdiğini, matematiksel ispatın sosyal veya kültürel boyutunun ise yapılan ispatın geçerliliği için kullanılan yöntem, süreç ve işlemleri kapsadığını ifade etmişlerdir. Bu bağlamda, bir matematiksel bilginin doğruluğunun gösterildiği bir içerik, matematikçiler tarafından geçerli olarak tanımlandığı takdirde söz konusu içerik genel anlamda bir matematiksel ispat olarak değerlendirilmektedir (Arsac 2007).

Hanna (1990) matematikçilerin ve matematik eğitimcilerinin aksiyomatik yapılarının ve formal ispatlarının rollerini tekrar değerlendirip, ispatların farklı formal geçerlik düzeylerinde aynı kabul edilebilirliğe sahip olabileceklerini ifade etmiştir. Buradan hareketle kabul edilebilir ispat kavramını ortaya atmıştır. Kabul edilebilir ispatın informal ispatlara örnek olduğu söylenebilir. Hanna (1990) ispatları kabul edilebilir ispat (açıklayan ispat) ve ispat eden ispatlar (formal ispat) şeklinde bir ayrıma tabi tutmuştur. Ayrıca her iki ispat şeklinin de geçerli bir ispat olduğunu belirtmektedir. İspatlayan ispat bir teoremin sadece doğru olduğunu gösterir, fakat açıklayan ispat teoremin neden doğru olduğunu gösterir. Hanna'nın yapmış olduğu bu ayrım aşağıdaki teorem üzerinden sunulmuştur.

Teorem: İlk n pozitif tam sayının toplamı $S(n)$ olsun. O zaman $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

İspatlayan ispat:

$$n = 1 \text{ için } S(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Dolayısıyla $n = 1$ için teorem doğrudur.

$n = k$ için $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$ doğru olduğunu kabul edelim.

$$n = k + 1 \text{ için } S(k + 1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \dots(1)$$

$$S(k + 1) = S(k) + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \dots(2)$$

(1)ve (2) den ifade k için doğru ise $k + 1$ için de doğrudur. Tümevarım ilkesi ile bu teoremin doğru olduğu kabul edilir.

Aşağıda Gauss tarafından yapılan ispat, açıklayan ispata örnek olarak verilebilir.

Kabul edilebilir ispat:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S(n) = n + n - 1 + n - 2 + \dots + 1$$

$$2S(n) = n + 1 + n + 1 + n + 1 + \dots + n + 1$$

$$\rightarrow S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Yukarıda verilen ispatlayan ispat formal ispat olarak düşünülebilir. Ancak bu öğrenciler için çok açıklayıcı değildir. Gauss tarafından yapılan kabul edilebilir ispat ise öğrenciler için daha açıklayıcı olacaktır. Gauss burada ifadenin doğru olduğunu göstermek için simetrisinin özelliklerini (toplamın iki farklı gösterimi) kullanmıştır. Yani ifadenin neden doğru olduğunu göstermiştir. Ortaokul seviyesindeki öğrencilerden ispatlayan ispat yerine kabul edilebilir ispatlar oluşturmaları

beklenmektedir. Bu noktada genelleyici örnek, bir örnekten yola çıkarak bir ispatın neden doğru olduğunu açıklaması bakımından, ispatı anlamak ve bir ispat oluşturmak için öğretmen ve öğrencilere büyük ölçüde yardımcı olabilir. (Leron ve Zaslavsky, 2013). Çünkü genelleyici örneklerin önemli bir amacı, değişken kullanmayarak argümanın soyutlanmasını azaltmak ve argümanı tüm öğrenciler için erişilebilir kılmaktır (Doğan ve Williams-Pierce, 2021).

2.2. Genelleyici Örnek

İspatı desteklemek için bir araç olarak değerlendirilen (Rowland, 2002; Yopp ve Ely, 2016) genelleyici örnekler, genelliği iyi bir şekilde temsil etmesi ve açıklayıcı olması bakımından ispat ile ilgili etkinliklerde özel bir ilgi görmüştür. Mason ve Pimm (1984) genelleyici örneği, o örneğin belirli bir özelliğine dayanmayan özel bir örnek olarak tanımlamaktadırlar. Genelleyici örnek, sonucun koşullardan nasıl çıktığını gösteren çıkarımları, bir örneğe dayanarak genelleyen özel bir örnektir (Yopp, Ely ve Johnson-Leung, 2015). Genelleyici örneğin, genel muhakeme yapısını ortaya koyan belirli bir örnek olduğu söylenebilir. Burada genelleyici örnek, sadece bir örneğin özelliklerine dayanmamalıdır. Verilen argümanın örneğin genelleyici yapısını ortaya çıkarması önemli görülmektedir.

Genelleyici örnekler ilk olarak, matematiksel akıl yürütme ve argüman türlerini sınıflandırmak için kullanılmıştır (Balacheff, 1988). Buna karşın literatürde genelleyici örneklerin ispat olup olmaması konusunda süregelen bir tartışma söz konusudur. Balacheff (1988) genelleyici örneği saf deneyden ve kritik deneyden daha yüksek ve farklı bir düzeyde sınıflandırır, ancak geçerli ispat olarak sayılan düşünce deneyinden daha düşük bir düzeyde görmektedir. Genelleyici örneği sadece belirli bir temsile bağlı olması ve ispatı açıklayan biçimsel dilden yoksun olmasından dolayı tam ispat olarak kabul etmemektedir. Leron ve Zaslavsky (2013) de benzer şekilde genelleyici örneğin temel zayıflığının, teoremi gerçekten ispatlamaması olduğunu belirtmişlerdir. Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin gerekçelerini genel olarak ifade edemediklerini yansıttığından genelleyici örnekleri tam ispat olarak

görmemektedirler. Aksine Rowland (2002) genelleme niteliğine sahip olduğu ve formal ispatlara öncülük ettiği için genelleyici örnekleri geçerli ispat olarak görmektedir. Stylianides (2009) da matematiksel kapsamlılık seviyelerine dayalı argümanlar sınıflandırmasında genelleyici örnekleri ispat olarak kabul etmektedir. Yopp ve Ely (2016) ise yaptıkları çalışmada genelleyici örnekleri formal ispatlardan daha aşağıda görmelerine karşın geçerli bir ispat olduğunu belirtmişlerdir. Bills ve Rowland (1999) da genelleyici örneklerin yapısal genelleme için uygun olduğunu ifade etmişlerdir.

Genelleyici örneğin genelliği yeterince temsil ettiği ve önermenin tek bir örnek için neden doğru olduğuna dair bir anlayış sağladığı söylenebilir. Dolayısıyla genelleyici örnek, formal ispat seviyesinde olmasa da geçerli bir ispat olarak kabul edilebilir. Genelleyici örnek ve formal ispat aşağıdaki örnek üzerinden sunulmuştur.

Soru:

Ardışık üç sayının toplamı, ortadaki sayının üç katına eşittir. Örneğin; 4, 5 ve 6 ardışık sayılardır ve $4+5+6$, 15'e eşittir, bu da ortadaki sayının (5) üç katına eşittir. Ardışık üç sayının toplamının her zaman ortadaki sayının üç katına eşit olduğunu gösterin (İşler, 2015).

Formal ispat:

Ardışık üç sayı $(x - 1)$, (x) , $(x + 1)$ olarak alınırsa, ardışık üç sayının toplamı için $(x - 1) + (x) + (x + 1) = 3x$ denklemi yazılabilir. Ardışık 3 sayının toplamı ortadaki sayının 3 katı olduğu için varsayımın her zaman doğru olduğu görülmektedir.

Yukarıda verilen formal ispat 12. sınıfa kadar olan öğrenciler için çok fazla anlamlı ve açıklayıcı olmayacaktır. 12. sınıfa kadar olan öğrencilerden formal ispat yapmaları beklenmemektedir. Özellikle ortaokul seviyesindeki öğrencilerin akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat konularında temel sağlamaları önemli olduğu düşünülürse, öğretmenler genelleyici örnek kullanarak, öğrencilerini yapısal genellemelere ulaşmaları için teşvik edebilirler. İşler (2015) çalışmasında yukarıdaki

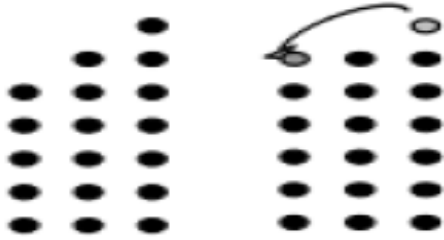
soruyu kullanmış ve devamında hem sayılarla hem de görsel olarak oluşturulan aşağıdaki genelleleyici örnekleri vermiştir.

Sayısal olarak ifade edilen genelleleyici örnek:

Ardışık üç sayı olarak 4,5,6 alınabilir. $4 = (5 - 1)$ ve $6 = (5 + 1)$ olarak yazılabilir. Ardışık üç sayının toplamı $(5 - 1) + 5 + (5 + 1)$ olacaktır. 1 eklemek ve 1 çıkarmak birbirini götüreceğinden üç tane 5 olur. Yani ardışık üç sayının toplamı, ortadaki sayı olan 5'in üç katına eşit olduğu görülmektedir (İşler, 2015).

Görsel olarak ifade edilen genelleleyici örnek:

Ardışık üç sayıyı temsil eden bilyelerden üç sütun yapılabilir. İlk sütun ilk sayıyı, ikinci sütun ikinci sayıyı ve üçüncü sütun üçüncü sayıyı temsil etmektedir. Son sütunda bulunan bilyelerden en üstteki bilye alınıp ilk sütuna taşınabilir. Bu durumda her sütundaki bilye sayısı orta sütundaki bilye sayısı ile aynı olur. Toplam bilye sayısı her zaman orta sütundaki bilye sayısının üç katı olacağından varsayımın her zaman doğru olduğu söylenebilir (İşler, 2015).



Görsel 2.1. Görsel Olarak İfade Edilen Genelleleyici Örnek Temsili

Yukarıda İşler'in (2015) vermiş olduğu genelleleyici örneklerin varsayımın neden doğru olduğunu açıkladığı görülmektedir. 12. sınıfın sonuna kadar öğrencilere kazandırılması gereken akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat kavramları için öğretmenlerin sınıflarında genelleleyici örnekleri kullanmaları, bu konularda öğrencilerin becerilerinin gelişmesine katkı sağlayacaktır. Özellikle ortaokul seviyesindeki öğrenciler için fazlasıyla soyut olan ispat, genelleleyici örnekler ile daha anlamlı ve daha açıklayıcı olacaktır.

Genelleyici örneklerin formal ispatlara göre daha açıklayıcı olduğu (Reid ve Vargas, 2018; Rowland, 1998) ve formal ispatlara geçiş için basamak olarak kullanılabileceği (Leron ve Zaslavsky, 2013) düşünülürse ispat ile ilgili etkinliklerde genelleyici örneklerin kullanılması her yaş grubundaki öğrenciler için yararlı olacağı söylenebilir. Öğrencilerin örneklerden yola çıkarak genellemelere ulaşmaları ve daha erken yaşlarda ispat bilinci oluşturmaları sağlanabilir. Genelleyici örnekler, özellikle ortaokul öğrencileri için gerekçelendirmelerini değişkenler kullanmadan ifade etmelerine olanak tanırken, öğretmenleri de ispat konusunda sadece üniversitede gördükleri ispat algılarıyla hareket etmekten kurtaracaktır. Bu noktada öğretmenlere çok büyük işler düşmektedir. Öğretmenlerin genelleyici örnekler ile ispat sürecini sınıflarında doğru bir şekilde yürütebilmeleri gerekmektedir. Ancak ilgili literatür öğretmenlerin ispat becerilerinin düşük olduğunu, ispatı anlamlandıramadıklarını ve neyin ispat oluşturduğunu bilmediklerini ortaya koymuştur. Bu nedenle öğretmenlerin ispatı nasıl anlatacaklarını ve nasıl öğreteceklerini bilmedikleri, sınıflarına entegre ederken zorlandıkları görölmektedir.

3. İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Matematikte ispatın yeri ve öneminin artmasıyla birlikte, çeşitli yaş gruplarındaki öğrencilerin ispat yaparken düşünsel süreçleri ve gelişimleri matematik eğitimi alanında birçok araştırmanın konusu olmuştur. Ancak ispat yapmak, gerek ilk ve orta öğretim, gerekse yükseköğretim aşamasında olsun, yer aldığı eğitimin her aşamasında, öğrencilerin sıkıntı çektikleri, başarılı olmakta zorlandıkları, başarılı olamayacaklarına inandıkları, korktukları, genellikle sevilmeyen bir süreç olarak yapılan araştırmaların sonucunda ortaya çıkmıştır (Özer ve Arıkan, 2002; Almedia, 2003; Jones, 2000; De Villiers, 1990; Raman, 2003; Akt: Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Ayrıca yapılan araştırmalara bakıldığında, öğretmenlerin de öğrencilerine akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispatlamayı öğretmekte ve bu konuda etkili bir şekilde öğrencilerini teşvik etmekte zorlandıkları belirlenmiştir (Knuth, 2002). Bu bağlamda, amacı ortaokul matematik öğretmenlerinin ispat süreçlerini, verilen farklı argümanları değerlendirmelerini ve genelleyci örnek üzerine anlayışlarını incelemek olan araştırmanın bu bölümünde ilgili alan yazın taranmış ulaşılabilen araştırmalara ve araştırmalarda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerini inceleyen Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere (2006), yaptıkları çalışmada katılımcıların ispat sürecini doğru bir şekilde yürütebilmek için ispat yapmaya yönelik görüşlerinin önem kazandığını söylemişlerdir. Betimsel olarak yapılan çalışmada, Türkiye’de bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliğinde ve ortaöğretim matematik öğretmenliğinde okuyan birinci sınıf ve dördüncü sınıf 337 öğrenci örneklem olarak alınmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarının görüşlerini almak için Almeida’nın (2000) yapmış olduğu ölçek geliştirilerek uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar öğretmen adaylarının büyük kısmının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin olmadığını ya da görüşlerinin yetersiz olduğunu ortaya çıkarmıştır. Öğretmen adayları ile yapılan çalışmada öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı, ispat yapmanın matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmedikleri görülmüştür.

Benzer sonuçlar ortaya koyan Çontay ve Duatepe-Paksu (2019), ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşlerinin yetersiz olduğunu belirtmişlerdir. Yaptıkları çalışmanın amacı ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispatın doğası hakkındaki görüşlerini ortaya çıkarmaktır. Çalışma nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması ile yürütülmüştür. Bir devlet üniversitesinin ortaokul matematik öğretmenliği programında öğrenim gören ve genel not ortalamalarına ilişkin yüksek, orta ve düşük başarı düzeylerinde olan üç ortaokul matematik öğretmeni adayı örneklem olarak alınmıştır. Veri toplamak amacıyla katılımcılara açık uçlu sorulardan oluşan ispatın doğasına ilişkin görüşme formu yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla yöneltilmiştir. Tüm görüşmeler ses ve kamera kaydına alınmıştır. İçerik analizi ile görüşmeler analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşleri “genelleme”, “yöntem”, “doğruluğa ulaşma”, “problem çözme”, “biçime odaklanma” temaları olarak sınıflandırılmıştır. Veri analizinde ortaya çıkan tüm temalar, öğretmen adaylarının ispatın doğasını anlamada problem yaşadıklarını ortaya koyan tepkilerden oluştuğu belirlenmiştir. Elde edilen bulgulara bakıldığında “doğruluğa ulaşma” temasının daha fazla görüldüğü, “problem çözme” ve “biçime odaklanma” temalarının ise daha az görüldüğü belirlenmiştir. İspatın doğasını anlamada yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adayının daha düşük başarı düzeyindeki öğretmen adaylarına göre daha az problem yaşadığı tespit edilmiştir. Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispatın tanımını yapmada, ispatı ispat yapan şeyleri tanımlamada, başarılı bir ispat için gerekli olan şeyleri belirlemede sıkıntı yaşadıkları görülmüştür. Dolayısıyla ispatın doğasını anlamada zorluklar yaşadıkları söylenebilir. Öğretmen adayları ile yapılan görüşmeler incelendiğinde ispatı belirli yol ve yöntemlerle gerçekleştirmeye çalıştıkları, yani ezbere bilgiler ile ispat oluşturmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Ayrıca birkaç durum için geçerli olan örneklerden hareket ettikleri ve ispatı süreç olarak değil de sonuç odaklı bir etkinlik olarak düşündükleri söylenebilir.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tümevarım yöntemiyle ispat becerilerini, matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini ve bunlar arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak amacıyla Güler, Özdemir ve Dikici'nin (2012) yaptıkları çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat becerilerinin

istenen düzeyde olmadığı belirtilmiştir. Türkiye’de bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde okuyan üçüncü ve dördüncü sınıf 151 öğretmen adayı örneklem olarak alınmıştır. Çalışmada nicel ve nitel araştırma yöntemleri birlikte kullanılmıştır. Nicel verileri toplamak için öğretmen adaylarına matematiksel tümevarım bilgi testi ve ispat görüş anketi uygulanmıştır. Matematiksel tümevarım bilgi testi puanlarına göre iyi, orta ve zayıf gruplarından 9 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. İspat görüş anketine verilen yanıtlar bir ile beş arasında puanlanarak analiz edilmiştir. Matematiksel tümevarım bilgi testine verilen yanıtlarda ise doğru yanıtlara iki, kısmen doğru yanıtlara bir, yanlış veya boş yanıtlara sıfır puan verilmiştir. Daha sonra bu iki ölçekten alınan veriler SPSS programı yardımı ile analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarımı bildikleri fakat tümevarım basamağını oluşturarak sonuca ulaşmada sorun yaşadıkları görülmüştür. İspat görüş anketine göre olumlu görüşe sahip olanların oranı en yüksek orana sahip olmasına rağmen kararsız olanların oranı beklenmedik şekilde yüksek çıkmıştır. Bu sonuç ispatlamaya yönelik görüşlerinin tam oluşmadığını, ispat yapmanın matematik eğitimi açısından önemini bilmediklerini ortaya çıkarmıştır. İspata yönelik görüş anketi ile matematiksel tümevarım bilgi testi arasındaki korelasyona baktığımızda aralarında istatistiksel olarak düşük düzeyde, pozitif ve anlamlı bir ilişki olduğu görülmektedir. Görüşmeler sonucunda öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım adımları arasındaki ilişkiyi tam olarak kavrayamadıklarını ve bu ispat yöntemini takip edilmesi gereken bir prosedür olarak algıladıklarını göstermektedir. Öğretmen adaylarının doğrulama basamağının kontrol edilmesine gerek duyulmayacak bir basamak olduğunu düşündükleri sonucuna ulaşılmıştır.

Çalışmasında öğretmenlerin ispat yaparken sıklıkla örneklere başvurduğu görülen Doğan’ın (2019) çalışmasının amacı, öğretmenlerin ispat etkinlikleriyle uğraşırken ispat ile ilgili matematiksel uygulamalarının doğasının incelenmesidir. Çalışmada örnek olay yöntemi kullanılmıştır. Çalışmada, 2014 yılında ABD’de bulunan bir araştırma üniversitesinde “Öğretim İçin Matematiksel Bilgi: Matematiksel Akıl Yürütme, Gerekleştirme ve İspat” başlıklı üniversite temelli bir mesleki gelişim kursunun 14 haftalık dersi gözlemlenmiştir. Çalışmanın örneklemine

derse kayıtlı 12 öğretmen oluşturmıştır. Öğretmenlerin sınıf içindeki çalışmaları, etkinliklere verdiği yazılı cevaplar ve sınıf gözlemleri ile veriler toplanmıştır. Verilerin analizinde sınıf gözlemlerine ilişkin yansımalar oluşturulmuş, sürekli karşılaştırma yöntemi ile temalar belirlenmiştir. Öğretmenlerin örüntü arama, örüntü tanımlama, varsayımlar geliştirme, genellemeler yapma ve argümanlarıyla ilgili açıklamalar ve gerekçeler sunma gibi matematiksel etkinlikler yaptıkları görülmüştür. Öğretmenlerin varsayımlar geliştirdiği, genellemeler yaptığı fakat nadiren matematiksel gerekçelendirme ve ispat ürettikleri tespit edilmiştir. Öğretmenlerin çoğunlukla örneklere dayanan ispatlar ürettikleri, bunun yanında az da olsa tümdengelimsel ispatlar ürettikleri tespit edilmiştir. Bu tümdengelimsel ispatlar genelleseyici örneklere dayanan ispatlar ve cebirsel ispatlar şeklinde ortaya çıkmıştır.

İspatlama ile ilgili etkinlikler sırasında öğrencilerin düşünceleri ve örnekleri kullanmaları üzerine çalışmaların azlığını fark eden, Knuth, Zaslavsky ve Ellis'in (2019) yaptıkları çalışmanın amacı da öğrencilerin matematiksel ispat yeteneklerinin geliştirilmesi üzerinde örneklerin etkisini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda matematik öğrencilerinin ve matematikçilerin varsayım geliştirirken, varsayımları anlamlandırırken ve varsayımların doğruluğunu gerekçelendirmeye çalışırken örneklerle akıl yürütme ve bunları kullanma yollarını incelemişlerdir. Çalışmanın katılımcıları on iki ortaokul öğrencisi, on altı lise öğrencisi, on matematik öğrencisi ve on üç matematik araştırmacısıdır. Katılımcılarla birer saatlik yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmış ve tüm görüşmeler kayıt altına alınmıştır. Katılımcıların, örneklerden yola çıkarak genel ifadelerle ulaşma konusunda problem yaşadıkları görülmüştür. İspatlama ile ilgili etkinlikler sırasında örnekleri verimli bir şekilde kullanma konusunda öğrencilerin öğretimsel rehberlik ve deneyim eksikliğinin, birçok öğrencinin örneklerden öğrenememesinin kapsayıcı nedeni olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca genelleseyici örnek kullanımının bir genelleme veya yapı hakkında bir farkındalığa yol açabileceğini belirtmişlerdir.

Barak (2018) araştırmasında ortaokul matematik öğretmeni adaylarının fonksiyon ve sayılar konusu bağlamında ispat yapma süreçlerini araştırmayı

amaçlamıştır. Çalışma nitel araştırma yöntemi ile yürütülmüştür. Türkiye’deki bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün her sınıf düzeyinden altı öğrenci ve üniversiteye yeni kayıt yaptıran altı öğrenci olacak şekilde toplam 30 öğretmen adayı örneklem olarak alınmıştır. Öğretmen adayları ile görüşmeler gerçekleştirilerek ve günlük tutularak veriler toplanmıştır. Yapılan görüşmelerde öğretmen adaylarından fonksiyonlar ve sayılar konusu ile ilgili verilen ifadeleri ispatlamaları istenmiştir. Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerde, sayılar konusu üzerinden ortaokul matematiğinde ispat yapmaya yönelik bakış açılarını da ortaya koymak amacıyla bazı açık uçlu sorular yöneltilmiştir. Elde edilen veriler, Miles ve Huberman’ın verilerin azaltılması, verilerin gösterimi ve sonuçları ortaya koyma ile doğrulama olmak üzere üç aşamalı olan nitel veri analizi yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlama süreci ispatın formal-retorik ve problem merkezli kısımlarına göre incelenmiş ve ispatlama sürecinde gerekli olan kavram bilgisi, işlemsel bilgi ve ispat yöntemi bilgisini kullanma durumları analiz edilmiştir. Elde edilen bulgulara bakıldığında, verilen altı önermenin ispatının tümünde başarılı olan öğretmen adayının olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde gerekli olan kavramsal bilgilerde eksikliklerin olduğu ve ispata nasıl başlayıp nasıl bitirecekleri konusunda sorun yaşadıkları görülmüştür. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat becerilerinin istenen düzeyde olmadığı sonucu ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının sınıf düzeyi arttıkça ispatın formal-retorik kısmını oluşturmada ve problem merkezli kısmını çözmede daha başarılı oldukları ve ispatlama becerilerinin geliştiği görülmüştür. Öğretmen adaylarının akademik başarıları ile ispatlama süreçleri arasında bir ilişki olmadığı bulunmuştur. Öğretmen adaylarının ortaokul düzeyinde ispat yapma görüşlerinin istenen düzeyde olmadığı görülmüştür. Öğretmen adayları genel olarak ortaokul düzeyinde daha basit düzeyde ispatlar yapılacağını ifade etmiş ancak ortaokul matematiğinde nasıl ispatlar yapılabileceğini açıkça ortaya koyamamış hatta ortaokul öğrencileri için ispatı uygun bulmamışlardır. Öğretmen adaylarının ortaokul düzeyinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri sınıf düzeyi arttıkça gelişim gösterdiği görülmüştür.

Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini incelemeyi amaçlayan Pekşen Sağır (2013) çalışmasında, matematik öğretmen adaylarının ispat ve ispat yapmaya yönelik görüşlerinin nasıl olduğu ile ispat yöntemlerini bilme ve uygulama becerilerinin ne düzeyde olduğunu belirlemeye çalışmıştır. Çalışma 2012-2013 eğitim-öğretim yılında Türkiye’deki bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği bölümünde okuyan 73 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Çalışma karma desene sahip olup, anket, matematiksel soru seti ve yarı yapılandırılmış mülakat tekniği yoluyla veriler toplanmıştır. Elde edilen veriler nicel ve nitel yöntemlerle analiz edilmiştir. Anket verileri nicel olarak, matematiksel soru seti ve yarı yapılandırılmış mülakatlar nitel olarak analiz edilmiştir. İspata ilişkin görüşleri ölçmek için 5’li likert tipi bir ölçek kullanılmıştır. İspat yapma süreçlerini incelemek için ise klasik sınav tarzında soru seti uygulanmıştır. Son olarak yarı yapılandırılmış mülakat ile daha detaylı bilgiler toplanmıştır. Uygulanan ölçek için betimsel istatistik yöntemiyle; soru seti ve mülakat için ise içerik analizi yöntemiyle veriler analiz edilmiştir. Elde edilen bulgulara bakıldığında, matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı görülmektedir. Bu durum matematik öğretmen adaylarının ispat yapmanın matematik öğretimi açısından önemini bilmedikleri ve üzerine düşünmediklerini göstermektedir. Soru seti ve mülakat analizleri sonucunda, matematik öğretmeni adaylarının ispat yaparken doğru yöntemi seçmekte zorlandıkları, ispat sorularını ve nasıl çözmeleri gerektiğini anladıkları, fakat bunu matematiksel olarak gösteremedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Söz konusu sonuç ayrıca ispat sorularını sözel olarak cevaplamaya çalıştıkları fakat sözel olarak ifade edebildikleri ifadeyi formal olarak yazamadıklarını, ispat yöntemlerini ezbere kullanmaya çalıştıklarını göstermektedir. Matematik öğretmen adaylarının kâğıtları ayrıntılı bir şekilde incelendiğinde, uygun olmayan ispat yöntemi seçenlerin doğrudan ispat yöntemine başvurdıkları, bu yöntemi uygularken de formal ispat yapmak yerine ispatlarını örnek vererek tamamladıkları görülmüştür. Diğer bir ifadeyle matematik öğretmen adaylarının varsayımlarını birkaç özel durum üzerinden oluşturdukları, genel ifadelere ulaşmakta sorun yaşadıkları ve gerekçelendirmelerini cebirsel olarak ifade etmekte zorlandıkları tespit edilmiştir.

Ortaokul matematik öğretmenleri ve ortaokul matematik öğretmen adayları ile yaptığı çalışmada ilgili literatür ile benzer sonuçlar ortaya koyan, Öztürk'ün (2017) çalışmasının amacı matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmeni adaylarının geometri ve cebir alanında ispat yapma süreçlerinin bilişsel açıdan derinlemesine incelenmesidir. Çalışma karma araştırma yöntemlerinden açıklayıcı ardışık desen yöntemi ile yürütülmüştür. Örneklem olarak 2015-2016 eğitim öğretim yılında Türkiye'nin bir ilinde görev yapan 25 ortaöğretim matematik öğretmeni, aynı ildeki üniversitenin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 29 son sınıf matematik öğretmen adayı ve 19 birinci sınıf matematik öğretmen adayı olmak üzere toplam 73 kişi alınmıştır. Katılımcılara ispat yapma becerisi teşhis testi uygulanmış, daha sonra bu testin sonuçlarına göre iyi, orta, düşük düzeylerinden 6 matematik öğretmeni ve 12 matematik öğretmen adayı ile sesli düşünme protokolü yapılmıştır. Katılımcılardan sesli düşünme protokolünde 4 farklı etkinlik kartında bulunan ispat yapma görevlerini yerine getirmeleri istenmiş ve gözlem formu ile katılımcıların sergiledikleri beceriler gözlemlenmiştir. Toplanan nicel verilerin analizi için betimsel istatistik ve kestirimsel istatistik, nitel verilerin analizi için ise betimsel istatistik ve içerik analizi kullanılmıştır. Elde edilen bulgulara göre matematik öğretmenlerinin ve son sınıf matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma teşhis testi başarı puanları ortalamalarının birinci sınıf matematik öğretmeni adaylarından anlamlı düzeyde farklı olduğu görülmüştür. Katılımcıların ispat yaparken sergilemiş olduğu bilişsel becerilerden; ispat önermesini okuma, şekil çizme, önermenin altını çizme, doğruluğunu değerlendirme, işlem süreci, strateji belirleme ve sezgisel kestirme yolları kategorileri oluşturulmuştur. Katılımcıların sergilemiş oldukları üst bilişsel beceriler ise; işlemleri kolaylaştırma, sorgulama, farkındalık, planlama, strateji belirleme, kontrol etme, ilişkilendirme ve analogik akıl yürütme kategorileri altında toplanmıştır. Nicel ve nitel veriler ayrıntılı olarak incelendiğinde katılımcıların ispatı bir süreç olarak görmedikleri, ispatı nedenleriyle beraber doğrulamakta problem yaşadıkları, geçerli ispat yaparken zorlandıkları görülmektedir.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmen adaylarının ispat ile ilgili düşüncelerinin sınırlı olduğu ve ispat

becerilerinin düşük olduğu görülmüştür (Doğan, 2019; Weber, 2010). Ayrıca ispata nasıl başlayacakları, genellemelere nasıl ulaşacakları, geçerli bir ispat oluştururken zorlandıkları, ispat oluştururken sıklıkla örneklere başvurdukları tespit edilmiştir (Pekşen Sağır, 2013; Bills ve Rowland, 1999). Fakat örneklerden hareketle genellemelere ulaşmakta zorlandıkları görülmüştür (Kempen ve Biehler, 2019; Doğan ve Williams-Pierce 2021).

Günlük dilde veya matematik öğrencileriyle yüz yüze geldiklerinde genel ve genellik kavramlarını keşfetmeyi amaçlayan Mason ve Pimm (1984), özellikle sayılar yerine sembollerin veya harflerin kullanılmasının belirsizliklere yol açtığını ifade etmişlerdir. Çalışmada açıklığa kavuşturulması gereken dört kavram olduğunu, söz konusu kavramların ise özel, belirli, genelleyici ve genel olduğunu ifade etmişlerdir. Buradaki anlam karışıklığının algı kaynaklı olarak ortaya çıktığını, cebiri kavramak için genellikle bağlantılı değişen algıların, anlam çeşitliliği ile açık bir şekilde gelişmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Çalışmalarında genelleyici örnekler kullanarak ispatlar oluşturmuşlardır. Genelleyici örneklerin, belirli bir sayı cinsinden verilmiş olmasına rağmen, hiçbir yerde bu sayının herhangi bir özelliğine dayanmadığını belirtmişlerdir. Genelleyici örnek ile ispat bağlamında, örnek yoluyla ispat sorununun ortaya çıktığını; fakat genelleyici örneklerin arkasında belirli bir sonucun değişmezliğini garanti eden genellik bulunduğunu belirtmişlerdir. Farklı görme biçimlerinin, farklı bilme biçimlerine yol açtığını ifade etmişlerdir.

İspat için gerekli genel ifadelere ulaşmada örneklerin etkisini inceleyen Bills ve Rowland (1999), matematik eğitimi kursundaki öğrenciler ile sınıf içi etkileşimin yoğun olduğu derslerde genellemelere ulaşmak için çeşitli örnekleri tartışmışlardır. Örneklerden yola çıkarak deneysel ve yapısal genellemelere ulaşılmıştır. Özel bir sonuçtan doğan genellemeler deneysel, yapılardan ve temeldeki anlamlardan doğan genellemeler ise yapısal genellemeler olarak sınıflandırılmıştır. Genelleyici örnekler ile yapısal genellemelerin sağlanabileceğini ve genelleyici örneklerin ispat ile yakından ilişkili olduğunu belirtmişlerdir. Genelleyici örneğin; bir önermenin doğrulayıcı bir örneğini sunmakla başlayıp, bu örneğin neden doğru olduğuna dair argümanlar üretilmesi ve devamında diğer örneklere aktarımının sağlanmasıyla genel

ifadelere ulaşıldığı görülmüştür. Bu yönüyle genelleyici örneğin yapısal genelleme için uygun olduğunu belirtmişlerdir.

Örneklerin kendi başlarına geçerli bir ispat oluşturacağı yanılgısına karşı çıktıklarını belirten Kempen ve Biehler (2016), farklı ispat türlerine ilişkin öğrencilerin algılarını araştırmışlardır. Üniversitede zorunlu okutulan bir ders esnasındaki çalışmalarla öğrenciler genelleyici örnekleri değerlendirmişlerdir. Gönüllü olarak seçilen 12 tane öğrenciden ilk aşamada bir teoremi ispatlamaları istenmiştir. Daha sonra öğrencilerle gerçekleştirilen görüşmeler kamera ile kayıt altına alınmıştır. Görüşme esnasında dört farklı ispatı değerlendirmeleri istenmiştir. Bu ispat türleri sayılarla oluşturulmuş genelleyici örnek, formal ispat, görsel olarak ifade edilen genelleyici örnek ve geometrik değişkenlerle ispattır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda genelleyici örneklere ilişkin üç farklı algı belirlemişlerdir. Birincisi genelleyici örnek kavramını tam olarak anlayan ve neden geçerli olduğuna dair doğrulamayı kabul eden, mantıksal kabul ve psikolojik inanç algısıdır. İkincisi genelleyici örnek kavramını anlayan ve genel doğrulamayı kabul etmeye istekli fakat geçerli bir ispat olma konusunda şüphe duyan, kavramın genel kabulü ve psikolojik belirsizlik algısıdır. Üçüncüsü ise genelleyici örnek kavramını tam olarak anlamayan, ampirik bir doğrulama olarak yorumlayan, kavramın uygunsuz anlaşılması algısıdır. Elde edilen veriler sonucunda birinci algıya sahip bir öğrenci, ikinci algıya sahip dört öğrenci ve üçüncü algıya sahip beş öğrenci bulunmuştur. Genelleyici örnek ve formal ispat kullanımının ispat sürecine ve matematik diline anlamlı bir giriş sağladığını, buna karşın genelleyici örneklerin kendi başlarına genel olmadıklarını belirtmişlerdir. Genelleyici bir örneği geçerli bir genel argüman yapan, genelleyici örnekleri izleyen anlatı muhakemesinin olduğunu belirtmişlerdir.

Genelleyici örneklerin genelliği iyi bir şekilde temsil ettiğini belirten Rowland (1998), çalışmasında genelleyici örneklerin, formal ispatlardan daha düşük düzeyde görülmesinin doğru olmadığını, genelleyici örneklerin açıklama ve ikna etme açısından öğretici amaçlarla ispat konusunda yararlı olabileceğini belirtmiştir. Genelleyici örneğin, yalnızca bir önermenin doğrulayıcı bir örneğini sunmakla kalmadığını, aynı zamanda önermenin o tek örnek için neden doğru olduğuna dair bir

anlayış sağladığını belirtmiştir. Ampirik genellemelerin açıklayıcı güçten yoksun olduğunu, buna karşın başarılı bir şekilde genelliği konuşan genelleyici bir örneğin yapısal genelleme niteliğine sahip olduğunu belirtmiştir. Her düzeydeki matematik öğrenenlere, kendi düşünce yapılarında, açıklamalarında ve argümanlarında genel olanı algılamaları ve değer vermeleri konusunda yardım edilmesi gerektiğini ve genelleyici örneğin amaçlanan genelliği yeterince taşıyor olabileceğini ifade etmiştir. Balacheff'in genelleyici örneği saf deneycilik ve önemli deneylerle birlikte daha aşağı bir kategoride değerlendirdiğini, buna karşın genelleyici örneklerle yapılan ispatları bunlardan çok farklı bir genellik düzenine sahip olduğunu açıklamıştır.

Reid ve Vargas'ın (2018) genelleyici örneğin hangi durumlarda ispat olarak kabul edileceğini tartıştıkları çalışmalarında iki farklı gereksinime ihtiyaç olduğunu vurgulamışlardır. Genelleyici örneğin, hem psikolojik hem de sosyal olarak ikna edici olduğunda ispat olarak kabul edilebileceğini önermişlerdir. Genelleyici örneğin ispat olması için, argümantasyon yapılarının işlevini yerine getirmeli, çıkarımsal yapıya işaret etmeli, ikna edici olmalı ve hayal gücünü canlandırması gerektiğini belirtmişlerdir. Psikolojik olarak ikna edici olan genelleyici örneğin, sosyal olarak ikna edici olandan farklı olduğunu, genelleyici örneğin kullanımı ve anlaşılmasını sağlamak için psikolojik ve sosyal faktörler arasında iç içe bir ilişki olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Genelleyici bir örneğin, sonsuz özel örneklerin üretilmesi için bir model sağladığını ve bunları gerçekten üretme ihtiyacını ortadan kaldırdığını belirtmişlerdir. Genelleyici örnek ile ispatın, hatta bir dizi özel örnek ile arasındaki önemli bir farkın genelleyici örneğin açıklayıcı olabildiğini ifade etmişlerdir. Yazılı çalışmaya iki tür ispatın dahil edilmesi gerektiğini önermişlerdir. Bunlar genellik bilincin ispatı ve akıl yürütmenin matematiksel ispatıdır. Birincisi ispatın psikolojik yönünü, ikincisi ise sosyal yönünü vurguladığını belirtmişlerdir. Bu kriterlerin hem yazarın tümdengelimli akıl yürütmeyi kullanarak ikna edici bulduğunu hem de argümanın sınıf kurallarına uygun olup olmadığını gösterdikleri için psikolojik ve sosyal faktörler arasında bir bağlantı kurduğunu belirtmişlerdir.

Genelleyici örneği tam anlamıyla ispat olarak kabul etmeyen Balacheff (1998) ise çalışmasında, herhangi bir çokgenin köşegen sayısının bulunması problemini

kullanarak, öğrencilerden buldukları sonuçları ispatlamalarını istemiştir. On üç yaşındaki yirmi sekiz öğrenci ikili gruplar şeklinde on dört gruba ayrılmıştır. Öğrencilerin yarısından fazlası doğru çözüme ulaşmış, fakat çözümün klasik formülasyonuna sadece bir çift ulaşmıştır. Çözümlerin doğrulama aşamasına geçildiğinde, öğrencilerin yaptıkları çözümler dört grupta değerlendirilmiştir. Bunlar; saf deneycilik, kritik deney, genelleyici örnek ve düşünce deneyi. Tam anlamıyla ispat olarak düşünce deneyi kabul edilmiş, genelleyici örnek ise saf deney ve kritik deneyden daha üstün görülmüş ve düşünce deneyine geçiş için uygun olduğu belirtilmiştir. Genelleyici örnek sadece belirli bir temsile bağlı ve ispatı açıklayan biçimsel dilden yoksun olduğu için tam ispat olarak kabul edilmemiştir.

Balacheff'in çalışmasına benzer çıkarımlarda bulunan Leron ve Zaslavsky (2013) ise çalışmalarını genelleyici örneğin daha ince yönlerini ortaya çıkaran matematiksel durum çalışmaları üzerine yansımaları olarak düzenlemişlerdir. Matematiksel durum çalışmaları üç farklı genelleyici örnekten oluşmuştur. Birincisi basit ve temel bir sayı teoremi, ikincisi permütasyonlar üzerine bir ayrıştırma teoremi, üçüncüsü de Lagrange'ın temel grup teorisinden oluşmaktadır. Öğrencilerin, ispatın sadece gösterilen değil, herhangi bir örnek üzerinde nasıl gerçekleştirileceğini öğrendiklerini ve ispatın ana fikirlerini örnek düzeyinde öğrendiklerini belirtmişlerdir. Genelleyici örneğin temel zayıflığının, teoremi gerçekten ispatlamaması olduğunu ifade etmişlerdir. Tümdengelimsel ispatın teoremin sonucunun öncüllerinden çıkmasını sağlamak için gerekli olduğunu belirtmişlerdir. Bir örnek üzerinde yapılan ispatın geçerli olmadığını, ancak tam ispatı sunmak için fazlasıyla yol kat ettiklerini belirtmişlerdir. Genelleyici örnekler aracılığıyla öğretmenler öğrencilerin deneysel ispat şemalarının ötesine geçmelerine ve ispat gereksinimlerini arttırmalarına yardımcı olabileceğini belirtmişlerdir. Bir ispat, matematiksel bir nesnenin veya sürecin inşasını içeriyorsa genelleyici örnek ile etkin bir şekilde sunulabileceğini belirtmişlerdir. Genelleyici örneklerin, bir ispatı anlamak ve bir ispat oluşturmak hedeflerine ulaşmada öğretmen ve öğrencilere büyük ölçüde yardımcı olabileceğini ifade etmişlerdir.

Leron ve Zaslavsky çalışmalarında genelleyici örneği tam ispat olarak kabul etmediklerini belirtmiş, Yopp, Ely ve Johnson-Leung (2015) ise bu görüşü ret ederek, genelleyici örneğin geçerli bir ispat olabileceğini ifade etmişlerdir. Çalışmalarının amacı bir örneğin genelleyici örnek olarak kullanılıp kullanılmadığını belirlemek için kriterler sağlamaktır. Leron ve Zaslavsky'nin seçilen örneğin genel durumu iyi temsil edebilir olması görüşlerine katıldıklarını, fakat genelleyici örnekleri ispat olarak kabul etmedikleri görüşünün tersine ispat olarak kabul edilebileceğini belirtmişlerdir. Bunu göstermek için Lagrange Teoremini sınıf çalışmasında kullanmışlardır. Genelleyici örneğin argümanda genel olarak kullanılıp kullanılmadığını değerlendirmişler ve genelleyici örnekten elde edilen argümanın ispat olarak kabul edilip edilmeyeceğine karar vermek için kriterler oluşturmuşlardır. Bu kriterlerin doğrulanması, genellenebilir olması ve mantıksal çıkarımlar yapılabilmesi olduğunu belirtmişlerdir. Öğrencilerin genelleyici örnek argümanlarının uygulanabilirliğini yapıp değerlendirebileceklerini ve belirli durumlarda bu argümanların ispat olarak kabul edebileceklerini ifade etmişlerdir.

İlgili literatür incelendiğinde, genelleyici örneğin geçerli bir ispat olup olmaması hakkında süregelen bir tartışma olduğu görülmektedir. Buna karşın ispat ile ilgili becerilerin geliştirilmesi ve ispatı doğrudan desteklemesi adına yapılan çalışmalarda öneminden bahsedilmiştir. Formal ispata geçişte bir basamak olarak kullanılabileceği (Leron ve Zaslavsk, 2013) ve formal ispata göre daha açıklayıcı olduğu (Reid ve Vargas, 2018) belirtilmiştir. Genelleyici örneğin genelliği yeterince temsil ettiği ve önermenin tek bir örnek için neden doğru olduğuna dair bir anlayış sağladığı söylenebilir. Dolayısıyla genelleyici örnek formal bir ispat seviyesinde olmasa da geçerli birer ispat olarak kabul edilebilir. Genelleyici örnekler hem açıklayıcı hem de genelliği temsil edebildiği için akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat konularında anlamlı öğrenmeler gerçekleştirilmesine katkı sağlayacaktır.

Öğretmenlerin öğrenciler tarafından oluşturulan argümanları doğru bir şekilde değerlendirmeleri, ispat konusunda öğrencilerine destek olmaları adına önemlidir. Fakat öğretmenlerin neyin ispat oluşturduğu, geçerli bir ispat için ne olması gerektiği

ve hangi argümanın geçerli bir ispat olduğu konularında problem yaşadığı görülmektedir. (Knuth, 2002; Martin ve Harel, 1989).

Doğan ve Williams-Pierce'in (2021) çalışmalarının amacı da öğretmenlerin sayı ve cebir alanlarındaki argümanları keşfederken, gerekçelendirirken ve değerlendirirken genelleyici örnek kullanımlarının incelemektir. Bu çalışmada veriler Doğan (2019) çalışması için toplanan verilerin yeniden analiz edilmesiyle elde edilmiş ve çalışma durum çalışması yöntemi ile yürütülmüştür. Çalışmada, 2014 yılında ABD'de bulunan bir araştırma üniversitesinde "Öğretim İçin Matematiksel Bilgi: Matematiksel Akıl Yürütme, Gerekçelendirme ve İspat" başlıklı üniversite temelli bir mesleki gelişim kursunun 14 haftalık dersi gözlemlenmiştir. Çalışmanın örneklemini derse kayıtlı 12 öğretmen oluşturmuştur. Öğretmenlerin ispat oluştururken cebirsel olarak ifade etmeyi pek fazla tercih etmedikleri ve çoğunlukla örnek temelli argümanlar ürettiği görülmüştür. Değerlendirme aşamasında ise öğretmenlerin genelleyici örneklerin cebirsel olarak yazımını aradıkları, daha ikna edici olması için cebirsel olarak ifade edilmesi gerektiğini belirttikleri tespit edilmiştir. Öğretmenlerin görsel olarak oluşturulan argümanları genelleyici örnekten ayırmada zorlandıkları ve genelleyici örneğe benzettikleri görülmüştür. Öğretmenlerin geçerli bir ispat için en güçlü gördükleri argümanın cebirsel olarak ifade edilen argüman olduğu tespit edilmiştir.

Kempen (2018) çalışmasında birinci sınıf öğretmen adaylarından dört farklı tür ispatı ikna edici, doğrulama ve açıklayıcı gücünü değerlendirmelerini istemişlerdir. Bu çalışma, dersin etkisinin araştırıldığı daha kapsamlı olan Kempen ve Biehler (2019) çalışmasının bir parçasıdır. Yazarlar tarafından geliştirilen ve öğretilen "Matematik Kültürüne Giriş" dersinin ilk oturumunda 149 öğretmen adayına dört farklı tür ispatı ikna edici, doğrulama ve açıklayıcı özelliklerini değerlendireceği bir ispat anketi uygulanmıştır. Anket sonuçlarına bakıldığında, geometrik değişkenler kullanılarak oluşturulan ispatlar en az ikna edici ispat olarak görülmüş, formal ispatlar ise en yüksek puanı alarak en çok ikna edici ispat olarak tespit edilmiştir. Doğrulama kategorisinde sayılarla oluşturulmuş genelleyici örneğin en düşük puana sahip olduğu, formal ispatın ise en yüksek puana sahip olduğu görülmüştür.

Açıklayıcı olarak en düşük puana sahip olan ispatın geometrik değişkenlerle yapılan ispat olduğu, formal ispatın ise en yüksek puana sahip olduğu tespit edilmiştir. Görsel olarak ifade edilen genelleyici örneğin, sayılarla oluşturulmuş genelleyici örneğe göre daha ikna edici ve açıklayıcı olduğu görülmüştür. Genelleyici örneklerde, argümanı açıklayan somut örneklerle ek olarak argüman açıkça yazılmasına rağmen, literatürün aksine formal ispatın daha açıklayıcı olarak derecelendirildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Argümanın incelenabilir özelliklerine mümkün olduğunca hitap eden genelleyici örnek için kriterler geliştirmek amacıyla Yopp ve Ely (2016) yaptıkları çalışmada genelleyici örnekleri formal ispatlardan daha aşağıda gördükleri halde, geçerli matematiksel argümanlar olarak kabul ettiklerini belirtmişlerdir. Argümanın genel olup olmadığını belirlemek için sunulan argümanın özelliklerine odaklanmışlardır. Örneğin, argümanda nasıl kullanıldığına veya gösterdiği işlemlere bağlı olarak temsili olup olmadığına karar veren kriterler, örneğin genel olarak kullanılıp kullanılmadığını belirlemede yararlı olduğunu belirtmişlerdir. Çerçeve oluşturmak için ilgili literatürden örnekler ve kendilerinin uyguladıkları örnekler yoluyla veriler toplanmıştır. Genelleyici örnek terimini türetmenin bir amacının, argümanların ne zaman genel olduğunu ve formal olmadan ispata benzer olduğunu açıklamak olduğunu belirtmişlerdir. Genelleyici örnek argümanının, bir örneğe dayanan bir genelleme için, sonucun koşullardan nasıl geldiğini gösteren çıkarımları gösteren belirli bir argüman türü olduğunu ifade etmişlerdir. Bir argümanın açık ve uygun bir şekilde ifade edilmiş bir iddiası varsa geçerli olduğunu, bu iddianın hem kabul edilebilir hem de haklı nedenleri içeren verilerden oluşması gerektiğini belirtmişlerdir. Kabul edilebilir veriler için; örnekler, diyagramlar, önceki sonuçlar ve tanımlar, anlatı açıklamaları ve hikayeler dahil olmak üzere geniş kriterler kullanmışlardır. Argümanlarda kullanılan üç tür örnekten bahsetmişlerdir. Argümanın geri kalanında başvurulmayan ve sadece iddiayı doğrulayan örnekler, argümanın geri kalanında itiraz edilen ancak genelleyici olmayan örnekler ve genelleyici olarak başvuru alan örnekler. Oluşturulan çerçevenin, gözlemcinin argümanda kullanılan nesnelerin tanımlarını bilmesini ve argüman için mantıklı gerekçeler tanımlayabilmesini veya yeniden oluşturabilmesini kapsamaktadır.

Kempen ve Biehler (2019) matematik öğretmen adaylarının verilen ispatların doğrulanmasını ve kabulünü incelemişlerdir. Üniversite düzeyinde zorunlu olarak okutulan “Matematik kültürüne giriş” dersine devam eden 74 öğrenci ile çalışmalar yürütülmüştür. Bu derste dört farklı ispat türü ile öğrenciler akıl yürütme ve ispat ile ilgili çalışmalar yapmaktadırlar. Bu ispat türleri sayılarla oluşturulmuş genelleyici örnek, formal ispat, görsel olarak ifade edilen genelleyici örnek ve geometrik değişkenlerle ispattır. Dersin başında ön test ve dersin sonunda son test uygulanarak deneysel bir çalışma yürütülmüştür. Dersin başında yapılan ön teste göre öğrencilerin neredeyse üçte biri, birkaç örnek ile yapılan ispatı ve yanlış cebirsel işlem içeren ispatı doğru ispat olarak değerlendirmiştir. Son teste bakıldığında ise bu oranın %13,5’e düştüğünü fakat yine de üniversite düzeyinde bulunan öğrenciler için bu oranın yüksek olduğunu belirtmişlerdir. Cebirsel değişkenlerin kullanıldığı ispatın, uygulanan hem ön test hem de son test sonuçlarına göre doğru ispat olarak daha fazla onay aldığı görülmüştür. Bu durumun öğrencilerin üniversiteye girerken ispat kavramını anladıklarına dair bir anlayış sağladığını belirtmişlerdir. İspat kabulü ile ilgili olarak öğrenciler dört tür ispatı doğrulama, açıklama ve geçerlilik gibi farklı yönlerden değerlendirmiştir. Öğrencilerin çoğu genelleyici örnekleri ve geometrik değişkenlerle yapılan ispatları açıklayıcı ve geçerli bir ispat olarak görmemiş, dersin sonunda ise bunlarla ilgili kabulleri artmıştır. Dersin başında öğrencilerin çoğu genelleyici örneklerde ortaya çıkan ve bu örnekleri izleyen anlatı muhakemesinde formüle edilen genel argümanı görememiş, ancak derse katıldıktan sonra genelleyici örnekleri genel argümanları sayesinde ampirik doğrulamalardan ayırt edebilmişlerdir. Formal ispat, hem ön test hem de son testte en ikna edici ve açıklayıcı argüman olarak kabul edilmiştir. Ders ile birlikte öğrencilerin farklı ispat türlerini anladıkları ve ispat konusunda gelişim gösterdikleri görülmüştür. Öğrencilerin dersin sonunda genelleyici örneklerin formal ispatlara göre daha açıklayıcı olarak değerlendirilmesi beklenirken, formal ispatların daha açıklayıcı olarak değerlendikleri görülmüştür.

Matematik öğretmen adaylarıyla yaptığı çalışmasında formal ispatın genelleyici örnekten daha fazla ikna edici olduğunu gören Doğan (2020), matematik öğretmen adaylarının argümanları değerlendirmede genelleyici örnek kavramını ve yanıtlarını gerekçelendirmek için kullanılan kriterleri incelemiştir. Çalışma

Türkiye’de bir devlet üniversitesinde öğrenim gören 71 matematik öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Çalışmanın verileri matematik öğretmen adaylarının, varsayımsal öğrenci argümanlarını değerlendirdikleri yazılı yanıtlar olarak belirlenmiştir. Verilerin analizi sonucunda altı ana kriter ortaya çıkmıştır. Bunlar; açıklayıcı, genel olma, doğruluk, temsil biçimi, tartışma biçimi ve argümanın yapısıdır. Kriterler matematik öğretmen adaylarının öğrencinin argümanlarını nasıl değerlendirdiğini ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Genel olma kriteri en çok kullanılan kriter olarak görülmektedir. Matematik öğretmen adaylarının örnek temelli akıl yürütmenin sınırlılıklarının farkında olduğu, cebirsel gösterimleri içeren tümdengelimsel argümanları genelleyici örneklerden daha ikna edici buldukları görülmüştür. Matematik öğretmen adayları görsel olarak temsil edilen genelleyici örnek argümanını sayısal olarak temsil edilen genelleyici örnek argümanından daha ikna edici bulmuşlardır. Matematik öğretmen adaylarının çoğunluğunun genelleyici örnek argümanını geçerli bir ispat olarak kabul ettikleri görülmüştür. Sonuç olarak matematik öğretmen adaylarının öğrenci argümanlarını değerlendirmede nispeten başarılı olduğu görülmüş, buna karşın genelleyici örnek kavramının yapısını tanımlamakta zorluk çektikleri tespit edilmiştir.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşlerinin yetersiz olduğunu ve ispat sürecinde zorlandıklarını gözlemleyen Uygan, Tanışlı ve Y. Köse’nin (2014) yaptıkları çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatın anlamına ve özelliklerine yönelik inançlarını, ispat yapmada kendi yeterliklerine yönelik inançlarını, ispat sürecindeki muhakeme biçimlerini ve örnek ispatların doğruluğunu nasıl değerlendirdiklerini incelemektir. Çalışmada nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Türkiye’de bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği dördüncü sınıfında öğrenim gören 3 ortaokul matematik öğretmen adayı örneklem olarak alınmıştır. İspata yönelik inançları yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla, ispat yapma süreçleri ve örnek ispatları değerlendirme süreçleri ise klinik görüşmelerle incelenmiştir. Toplanan veriler Miles ve Huberman’ın üç aşamalı nitel veri analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Bu aşamalar verilerin azaltılması, verilerin görsel hale getirilmesi ve sonuca ulaşma ve teyit etmedir. Öğretmen adayları ispatın; bir tür problem çözümü,

problem çözümü için kurallar oluşturma ve bilginin kaynağının araştırılması anlamlarına geldiğini ifade etmişlerdir. İspatın özelliklerine yönelik inançları genellenebilirlik, tımdengelimli, anlaşılabilirlik ve doğruluğun herkesçe kabul edilmesi kategorileri altında toplanmıştır. Üç katılımcı da kendilerini yeterli düzeyde görmediklerini belirtmiştir. Bunların nedenleri ise derste öğretmen tarafından yapılan ispatları ezberlemelerine, üniversiteye gelene kadar formal ispata ilişkin yeterli öğretim almamalarına, matematiksel dili kullanamamalarına, muhakemelerinin ve soyut düşünme becerilerinin düşük olmalarına dayandırılmıştır. Öğretmen adaylarının düşünme biçimlerine yönelik inançları; teoremin kabullerini inceleme, ön bilgileri gözden geçirme ve tümevarım yöntemini düşünme olarak ortaya çıkmıştır. İspat yapma süreçleri incelendiğinde ise katılımcıların teoremdeki hüküm ifadesini teoremin öncülü gibi düşündükleri, bağıntılar arası ilişki kuramadıkları ve ezbere stratejiler kullandıkları görölmüştür. İspatı değerlendirme sürecinde katılımcıların bilgisayar ortamındaki deneysel doğrulamaları matematiksel bir kanıt için yeterli olarak düşünebildikleri ve aksiyomatik yapıyı bozan gerekçeleri değerlendirmekte hata yaptıkları görölmüştür.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmen adaylarının verilen ispatları değerlendirirken zorlandıkları, verilen örnek durumları ayırt etmekte problem yaşadıkları tespit edilmiştir (Doğan, 2020; Kempen ve Biehler, 2019). Buna karşın formal ispatları en ikna edici ispat olarak değerlendirdikleri görölmüştür (Kempen, 2018). Matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken mantıksal çıkarım, genel ifadeler, ikna edici ve açıklayıcı olma gibi yönlerden değerlendirdikleri tespit edilmiştir (Yopp ve Ely, 2016; Uygan, Tanışlı ve Y. Köse, 2014). Genelleyici örnek içeren argümanları formal ispat seviyesinin altında görmelerine rağmen açıklayıcı ve genelliği temsil edebildiğini belirtmişlerdir (Leron ve Zaslavsky, 2013). Bu durumda özellikle ortaokul seviyesindeki öğrenciler için fazlasıyla soyut olan formal ispatların yerine genelleyici örneklerin kullanılmasıyla akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat konusunda daha anlamlı ve daha açıklayıcı öğrenmeler gerçekleştirilebilir.

İlgili literatür incelendiğinde matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının ispat sürecinde zorlandıkları ve genellikle öğretmen adayları ile yürütülen çalışmaların çoğunlukta olduğu görülmektedir. Dolayısıyla ortaokul matematik öğretmenlerinin genelleyici örnek bağlamında ispat algıları araştırılmak istenmektedir.



4. YÖNTEM

Bu bölümde; araştırmanın yöntemine, araştırma grubuna, araştırmanın tasarlanmasına, verilerin toplanmasına, araştırmacının rolüne, veri toplama aracı ile veri analizine yer verilmiştir.

4.1. Araştırmanın Yöntemi

Ortaokul matematik öğretmenlerinin ispat süreçlerinin, verilen farklı argümanları değerlendirmelerinin ve genelleyici örnek üzerine anlayışlarının incelenmesinin amaçlandığı bu çalışmada durum çalışması yöntemi benimsenmiştir. Durum çalışması yönteminde amaç belirli bir duruma ilişkin sonuçlar ortaya koymaktır. Bir duruma ilişkin etkenler (ortam, bireyler, olaylar, vb.) bütüncül bir yaklaşımla araştırılır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine odaklanılır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Yapılan çalışmada durum, ortaokul matematik öğretmenlerinin genelleyici örnek üzerine anlayışları olarak belirlenmiştir.

4.2. Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu, 2020-2021 eğitim öğretim yılında Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde yer alan ve Türkiye'nin farklı illerindeki devlet okullarında görev yapan 10 ortaokul matematik öğretmeni oluşturmaktadır. Öğretmen seçimi için idareci olmayan ve ortaokulda faal olarak görev yapan öğretmenler tercih edilmiştir. Bunun nedeni henüz çok fazla soyut olarak düşünemeyen ortaokul seviyesindeki öğrencilerin dersine giren öğretmenlerde genelleyici örnekler ile ispat konusunda bir farkındalık oluşturmaktır. Öğretmenlerden yedisi erkek, üçü kadın olarak belirlenmiştir. Çalışma hakkında bilgi verilen erkek ve kadın öğretmenler gönüllülük esası ile araştırmaya katılmışlardır. Araştırmada kullanılan isimler katılımcıların kendi isimleri olmayıp araştırmacı tarafından takma isimler oluşturulmuştur.

Tablo 4.1. *Araştırma grubunu oluşturan öğretmenlere ait bilgiler*

Takma İsim	Cinsiyet	Mezuniyet	Mesleki Tecrübe
Ali	Erkek	Lisans	11 yıl
Naci	Erkek	Lisans	8 yıl
Mahmut	Erkek	Lisans	8 yıl
Nisa	Kadın	Lisans	7 yıl
Sefa	Erkek	Lisans	7 yıl
Emine	Kadın	Lisans	6 yıl
Emir	Erkek	Lisans	6 yıl
Mehmet	Erkek	Lisans	6 yıl
Zeki	Erkek	Lisans	5 yıl
Ezgi	Kadın	Lisans	1 yıl

4.3. Araştırmanın Tasarlanması ve Veri toplama Aracı

Bu çalışmanın amacı, ortaokul matematik öğretmenlerinin ispat süreçlerinin, verilen farklı argümanları değerlendirmelerinin ve genelleyci örnek üzerine anlayışlarının incelenmesi olarak belirlenmiştir. Bu amaç doğrultusunda sayılar konusu ile ilgili 3 tane genelleyci örnek içeren soru oluşturulmuştur. Bu üç soru farklı yollardan ispat yapmaya elverişli ve genelleyci örneğe uygun olduğu için seçilmiştir. Sorular, her zaman ve her durumda varsayımların doğruluğunu araştırdığı için, öğretmenlerden verilen soruları ispatlamaları istenmiştir. Daha sonra bu sorulara ait 4 tane farklı argüman oluşturulmuş, öğretmenlerden verilen bu argümanları değerlendirmeleri istenmiştir. Bu argümanlar alanında uzman bir akademisyenden yardım alınarak araştırmacı tarafından oluşturulmuştur.

Veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılmıştır. Stewart ve Cash görüşmeyi önemli bir amaç doğrultusunda soru sorma ve yanıtlama şeklinde önceden belirlenmiş karşılıklı etkileşime dayalı iletişim süreci olarak tanımlamaktadırlar (Akt: Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu çalışmada veriler gönüllü 10 ortaokul matematik öğretmeni ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla elde edilmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmeler ana soruların belli olduğu, fakat

görüşmenin ilerleyen sürecinde yeni soruların da sorulabildiği bir görüşme türüdür (Şen ve Yıldırım, 2019). Bu araştırmadaki yarı yapılandırılmış görüşmeler iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde öğretmenlerden verilen 3 soruyu ispatlamaları, ikinci bölümde ise verilen argümanları değerlendirmeleri istenmiştir. Aşağıda Soru 1 ve bu soru için verilen argümanlar gösterilmiştir.

Soru 1: Mahmut ilk n pozitif tam sayının toplamının $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu ifade etmektedir. Örneğin; ilk 10 pozitif tam sayının toplamı 55'dir; bu da $\frac{10(10+1)}{2}$ 'ye eşittir. Mahmut'un ifade ettiği varsayım her zaman doğru mudur?

Argüman 1 (Basit birkaç örnek) (Geçerli bir ispat değil) :

$$1 + 2 = 3 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{2 \cdot (2+1)}{2} = 3\right)$$

$$1 + 2 + 3 = 6 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{3 \cdot (3+1)}{2} = 6\right)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{4 \cdot (4+1)}{2} = 10\right)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{5 \cdot (5+1)}{2} = 15\right)$$

Yukarıda görüldüğü gibi ilk n pozitif tam sayının toplamı her zaman $\frac{n(n+1)}{2}$ olduğu görülmektedir.

Argüman 2 (Genelleyici örnek) (Geçerli ispat) :

*	*	*	*	*
*	*	*	*	.
*	*	*	.	.
*	*	.	.	.
*	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Yukarıdaki dikdörtgende verilen nokta ve yıldızların toplam sayısı; $5 \cdot 6 = 30$ olduğu görülmektedir. Sadece noktalar göz önünde bulundurulduğunda, birinci sütunda bir, ikinci sütunda iki, üçüncü sütunda üç, dördüncü sütunda dört ve beşinci sütunda ise beş tane noktanın olduğu görülmektedir. Toplam nokta sayısı $\frac{5 \times 6}{2}$ olduğu sonucu çıkarılabilir. Yani:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot (5+1)}{2}$ olduğundan ilk n pozitif tam sayının toplamı her zaman $\frac{n(n+1)}{2}$ olduğu söylenebilir.

Argüman 3 (Genelleyici örnek) (Geçerli ispat) :

$$S(100) = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

$$S(100) = 100 + 99 + 98 + \dots + 1$$

$$2 \times S(100) = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \quad \rightarrow 100 \text{ tane } 101 \text{'in toplamı}$$

$$\rightarrow S(100) = \frac{100(101)}{2}$$

Toplamın iki farklı gösterimi kullanılarak, iki tane aynı ifade (100 tane 101'in toplamı) elde edilmiştir. Dolayısıyla ilk n tane pozitif tam sayının toplamının her zaman $\frac{n(n+1)}{2}$ 'ye eşit olduğu söylenebilir.

Argüman 4 (Formal ispat) (Geçerli ispat) :

$$n = 1 \text{ için } S(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Dolayısıyla $n = 1$ için varsayım doğrudur.

$$n = k \text{ için } S(k) = \frac{k(k+1)}{2} \text{ doğru olduğunu kabul edelim.}$$

$$n = k + 1 \text{ için } S(k + 1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \dots(1)$$

$$S(k + 1) = S(k) + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \dots(2)$$

(1)ve (2) den ifade k için doğru ise $k + 1$ için de doğrudur. Tümevarım ilkesi ile bu varsayımın doğru olduğu kabul edilir.

Görüşme formunda yer alan sorular ve bu sorular için verilen argümanlar EK-1' de detaylı olarak sunulmuştur.

4.4. Verilerin Toplanması

Verilerin toplanması sürecinde 2020-2021 eğitim öğretim yılı Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde görev yapmakta olan 10 ortaokul matematik öğretmeni ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Covid-19 salgını sebebi ile yüz yüze yapılamayan bu görüşmeler, ayrı zamanlarda ve öğretmenlere uygun zaman diliminde Zoom programı üzerinden yapılmıştır. Görüşmelerin uzunluğu 50 dakika ile 70 dakika arası değişmekte ve görüşmelerde veri kaybını önlemek amacıyla ses kaydı alınmıştır. Kayıtlar daha sonra analiz edilmek üzere yazıya dökülmüş ve verilerin analizi sürecine geçilmiştir.

4.5. Araştırmacının Rolü

Zoom programı üzerinden 10 ortaokul matematik öğretmeni ile gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmeler öncesinde araştırmacı, katılımcılara görüşmelerin gizli kalacağını ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirileceğini belirtmiştir. Böylece katılımcıların araştırmacıya ve çalışmaya güvenleri sağlanmaya çalışılmıştır. Görüşmeler sürecinde araştırmacı, öğretmenlerin verdikleri cevaplara bir düzeltme vermemiş ve herhangi bir müdahalede bulunmamıştır. Araştırmacı ortaokul matematik öğretmenlerinin genelleyici örnek üzerine anlayışları hakkında veri toplarken amacına odaklanmış, elde ettiği verileri gerçekliğinden saptırmadan okuyucuya sunmuştur.

4.6. Veri Analizi

Ortaokul matematik öğretmenlerinin genelleyici örnek üzerine anlayışlarının ortaya çıkarılması amacıyla öğretmenlerle yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşmelerin analizi için farklı metotlar bir arada kullanılmıştır. Gömülü teoride veri analiz yöntemlerinden açık kodlama süreci ile verilerin analizine başlanmış, daha sonra da içerik analizi ile elde edilen transkriptler analiz edilmiştir. Charmaz (2006), açık kodlama sürecinde verilerin karşılaştırıldığını ve verileri tanımlayan temel kavramsal kategorilerin belirlendiğini ifade ederek, bu süreci ilk kodlama olarak da isimlendirmiştir. İçerik analizi araştırmada elde edilen verileri açıklayabilecek, durumu tanımlayabilecek kavramlara ve kelimelere ulaşmaya olanak tanır ve içerik analizi ile verilerin altında yatan gizli gerçekleri ortaya çıkaracak kavramlara ulaşılır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Nitel bir araştırma yöntemi olan durum çalışması yöntemi ile yapılan bu çalışmada yarı yapılandırılmış görüşmeler sırasında açık kodlama ile başlangıç kategorileri ve kodları oluşturularak anahtar kelimeler belirlenmiştir. Daha sonra içerik analizi ile önemli kodlar elde edilmiştir. Görüşmelerin tamamlanması ile ses kayıtları bilgisayar ortamında yazıya aktarılmış ve içerik analizi ile detaylı bir şekilde analiz edilmiştir. Bu analizler sonucunda iki ayrı kodlama söz konusu olmuştur. Birinci kodlama sürecinde

öğretmenlerin ispat becerilerinin genelleyici örnek bağlamında ele alınması üzerine gerçekleştirilmiş, ikinci kodlama sürecinde ise öğretmenlerin verilen argümanları değerlendirmeleri üzerine gerçekleştirilmiştir. Görüşme kayıtlarının analizi sonucunda anahtar kelimeler belirlenmiş olup, bu anahtar kelimelerden aynı anlamı ifade edenler bir araya getirilerek kodlar oluşturulmuştur.

Görüşmelerin analizi sonucunda elde edilen kategoriler, kategorilere ait kodlar ve öğretmen görüşlerine bulgular kısmında yer verilmiştir. Örnek kodlama şeması ise Çizelge 4.1.'de sunulmuştur.



Çizelge 4.1. Matematik Öğretmenlerinin Argümanları Değerlendirirken Kullandıkları Kriterler

Kategori	Anahtar Kelimeler	Kod	Örnek Öğretmen Görüşü
Matematik Öğretmenlerinin Argümanları Değerlendirirken Kullandıkları Kriterler	- Mantıklı - Akla yatan - Kural - Formül - Çelişki yok - Mantıklı bir açıklama	Mantıklı Bulma	“Yani burada deneme yanılma değil de mantıklı bir açıklaması var. Birden yüze kadar yüzden bire kadar onların hepsini topladığı zaman sonuç hep zaten aynı çıkıyor...” (Ali) “Evet bunu tam ispat olarak kabul edemiyorum bunun sebebi ise biraz çok mantıklı gelmedi açıklaması o sebeple...” (Mahmut)
	- Genelleme - Sayılar deneyerek genelleme - Şekil ile genelleme yetersiz - Sözel açıklamalar ile genelleme - Büyük sayılar için de geçerli	Genel Olması	“Çünkü genelleyebiliyorum hocam her sayı denediğimde sağlayabiliyor.” (Emine) “Bundan önceki sorularla aynı düşüncedeyim, yani şey bütün sayıları tek tek yazıp deneyemeyeceğimiz için hangi sayıda bir yanlışlık olur veya bir çelişki olur bilemeyeceğiz, onun için hepsini tek tek deneyerek bir genelleme yapamayız bence.” (Ezgi)
	- Deneme yanılma - Aksine Örnek - Birkaç örnek ile ispat olmaz - Örnek ile ispatlanmış	Örnek Verme	“Ya çünkü dediğim gibi ben bu şekilde kendimde örnekler yaparak çarparak elde ettim bu sonuçları örnek yani tabiri caizse şöyle söyleyeyim örneklerle ispatladım.” (Naci)
	- Üniversiteden gördüğü formal ispatlar - İspat Yöntemi - Daha öncesinde ispat edildiğini bildiği kurallardan yararlanma	Önceki Bilgilerden Yararlanma	“Geçerli bir ispat olarak kabul edilebilir bu özellikle bizim üniversitede gördüğümüz tümevarım ilkesiydi bu esas ispat yöntemi zaten bu olması lazım hani alt seviyedeki öğrenciler özellikle ortaokul seviyesindeki öğrenciler bunu anlamakta zorluk yaşar ama üst düzey eğitim görmüş olan özellikle onların ispatlaması gereken yöntemin bu olduğunu düşünüyorum...” (Emir)

• Şekiller ile varsayım doğrulanıyor • Yapılan işlemler doğru • Doğru çıkıyor	Doğru Bulma	<i>“Genel olarak çünkü sayılar denediğimizde hep doğru çıkıyor yani istisna bir durum görülmedi.” (Emine)</i>
• Cebirsel ifadeler • Matematiksel işler • Matematiksel dil • Matematiksel ifadeler	Cebirsel İfadeler Kullanma	<i>“Burada biraz hocam entel dantel şey işler olduğu için matematiksel işler olduğu için tabi ki doğru zaten bu yani otomatikman.” (Sefa)</i>
• Açıklaması ve anlaşılması kolay • Açıklayıcı, Açıklanmış • Örnekler ile açıklanmış • Şekiller ile açıklanmış	Açıklayıcı Olması	<i>“Burada da yine tam açıklayıcı olmadığı için tam olarak ispat olarak kabul edemeyebilir etmeyebiliriz o yüzden o sebeple ispat olarak kabul etmeyebilirim...” (Mahmut)</i>
• İkna edici • Tatmin edici	İkna Edici Olması	<i>“Şöyle baktım da hocam çift sayıda çarpan elde edilir, tam kare sayılar, evet en son tek ve çift sayıların her zaman toplamının tek olduğunu göstermiş, bu zaten net bir şey, buraya bağladığı için de daha ikna edici ve daha net oluyor.” (Ezgi)</i>

• Kullanışlı • Daha fazla kişiye hitap • Sayılar kullanılmalı	Kullanışlı Olması	<i>“Aynen öyle onu düşünüyorum ikincisinde de örnekten fazlası olduğunu düşünüyorum yani böyle daha fazla çocuklara hitap ettiğini daha kullanışlı olduğunu düşünüyorum.” (Sefa)</i>
• Somutlaştırılmış • Şekille somutlaştırılmış	Somitlaştırılmış Olması	<i>“Evet kabul edebiliriz hatta yani bu daha şey somut şekilde yani daha böyle kolay şekilde anlatabileceğimiz şekilde olabilir evet.” (Emine)</i>
• Karmaşık, zor • Şekiller ile büyük sayılar düşünülemez,	Karmaşık Bulma	<i>“Yani açıkçası olmadığını düşünüyorum çünkü biraz yani bir öğretmen olarak bence biraz zor yani zorlayıcı değil de karmaşık olduğunu düşünüyorum yani varsayımın doğru olmadığını düşünüyorum.” (Emine)</i>

Veri analizinin güvenilirliğini sağlamak amacıyla ilk önce görüşmeler araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Daha sonra lisansüstü öğrencilerden görüşmelere ait verileri kodlamaları istenmiştir. Son olarak alanında uzman bir akademisyen ve araştırmacı birlikte kodları değerlendirmiştir. Araştırmacı ve uzmana ait kodlar arasındaki uyum, Miles ve Huberman (1994) tarafından geliştirilen kodlayıcı güvenilirlik formülü ile hesaplanmıştır.
$$\frac{\text{uyumlu kodlar}}{\text{uyumlu kodlar} + \text{uyumsuz kodlar}} \times 100$$
 ile araştırmacının kodlayıcı güvenilirliği %90 olarak hesaplanmıştır. Elde edilen bu oran en az %80 olması gerektiğinden sonuçların araştırmacının güvenilirliği için yeterli düzeyde olduğu tespit edilmiştir. Uzman ve araştırmacı kodlamaların değerlendirme süreci içinde farklı isimle isimlendirilmiş, fakat aynı anlamı taşıyan kodlar için ortak bir isimle kod oluşturulmuştur. Uyumsuz kodlar ise değerlendirmeye tabi tutulmuş olup ya aynı anlamı ifade eden kodlar ile birleştirilmiş ya da yeni bir kod olarak verilmiştir.

5. BULGULAR

Bu bölümde araştırmanın problem cümleleri olan “Ortaokul matematik öğretmenlerinin genelleyici örnek bağlamında ispat yapma becerileri nasıldır? ve “Ortaokul matematik öğretmenlerinin genelleyici örnekler de içeren farklı argümanları değerlendirirken kullandıkları kriterler nelerdir?” sorularına ilişkin görüşmelerden elde edilen verilerin incelenmesi sonucunda ulaşılan bulgulara yer verilmiştir. Yapılan görüşmeler sonucunda ilk olarak ortaokul matematik öğretmenlerinin verilen sorulara ilişkin ispat yapma becerileri üzerine, daha sonra da verilen argümanları değerlendirmesi üzerine elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

5.1. Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin İspat Becerileri

Araştırma sürecinde ilk olarak ortaokul matematik öğretmenlerine sayılarla ilgili genelleyici örnek içeren 3 tane soru yöneltilmiş ve bu soruları çözmeleri istenmiştir. Ortaokul matematik öğretmenlerinin çözümleri incelendiğinde; “*örnek verme, sözel olarak ifade etme, örnekle beraber açıklamalarda bulunma, cebirsel olarak ifade etme, genelleyici örnek kullanma*” eylemlerinde bulundukları gözlemlenmiştir. Ardından çözümlerinin geçerli bir ispat olup olmadığıyla ilgili sorular yöneltilmiştir. Elde edilen bulgular Tablo 5.1.’de sunulmuştur.

Tablo 5.1. Ortaokul matematik öğretmenlerinin yaptıkları çözümler

	Soru 1	Soru 2	Soru 3
Örnek verme	7 (4 ⁺)	2 (2 ⁺)	3 (1 ⁺)
Sözel olarak ifade etme	-	5 (4 ⁺)	1 (1 ⁺)
Örneklerle beraber açıklamalarda bulunma	-	3 (2 ⁺)	3 (3 ⁺)
Cebirsel olarak ifade etme	-	-	2 (2 ⁺)
Genelleyici örnek kullanma	3 (1 ⁺)	-	1 (1 ⁺)

Tablo 5.1. incelendiğinde öğretmenlerin kaçının o eylemde bulunduğu her sorunun altında yazmaktadır. Parantez içinde ise kaç öğretmenin yaptığı çözümün geçerli bir ispat olarak değerlendirildiği belirtilmektedir. Öğretmenlerin hepsi örnek verme eyleminde bulunmuş, birinci soru için %40'ı, ikinci soru için %20'si ve üçüncü soru için %10'u örnek vererek ispat yaptığını savunmuştur. Öğretmenlerin cebirsel olarak ifade etmeyi ve genelleyici örnek kullanmayı pek fazla tercih etmemelerine karşın örnek verme, sözel açıklamalarda bulunma ve örneklerle beraber açıklamalarda bulunmayı daha çok tercih ettikleri görülmüştür. Öğretmenlerin ispat için gerekli olan koşulların neler olduğu, ispata nasıl başlayacakları, ispat için nasıl bir yol izleyecekleri konularında zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Aşağıda sırasıyla üç soruya ait bulgular yer almaktadır.

Soru 1: Mahmut ilk n pozitif tam sayının toplamının $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu ifade etmektedir. Örneğin; ilk 10 pozitif tam sayının toplamı 55'dir, bu da $\frac{10(10+1)}{2}$ 'ye eşittir. Mahmut'un ifade ettiği varsayım her zaman doğru mudur?

Soru 1 için öğretmenlerin 7 tanesinin örnek vererek çözüm yaptıkları görülmüştür. Bunlardan 4 tanesi örnek vererek yaptıkları çözümlerini geçerli bir ispat

olarak kabul etmiştir. Geri kalan 3 öğretmen ise örnek temelli bir yaklaşım sunmalarına karşın çözümlerini geçerli bir ispat olarak görmemişlerdir.

Soru 1

Örnekte de verildiği gibi bir de örnekler veriniz,
ve tek tek yazarak toplarsınız.

Örnek: ilk 5 pozitif tam sayının toplamı

$$1+2+3+4+5=15$$

Formül ile $\frac{5 \cdot (5+1)}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$

İki sonuç da aynı çıktığı için bu varsayım doğrudur.

Geçerli bir ispattır.

Formülü sağladığı için

Görsel 5.1. Nisa Öğretmen'in Soru 1 İçin Çözümü

Nisa Öğretmen Görsel 5.1.' de gösterilen çözümünde, örnek vererek varsayımın doğruluğunu göstermiş ve devamında yaptığı çözümün geçerli bir ispat olacağını şu görüşü ile ifade etmiştir:

"Yani nasıl desem ki neden böyle düşünüyoruz yani kafamıza göre de hani bir şey farklı bir soruda yazabilirdik hani daha açıklayıcı bir şekilde yani tek hem formülle hem de verdiğimiz örnekle yaptığımızda aynı sonuç çıkıyor onun için yani geçerli bir ispattır bence bu da ispatlıyoruz sonuçta."

Nisa Öğretmen tek bir örnek ile varsayımın her zaman doğru olduğunu ifade etmiş ve bu yaptığı çözümü de geçerli bir ispat olarak kabul etmiştir. Nisa Öğretmen'in örnek temelli bir ispat algısına sahip olduğu söylenebilir.

Soru 1

Mahmut'un ifade ettiği varsayım her zaman doğrudur. Bu soruca deneme-yanılma yoluyla vordim. Denekten 1'den 4'e kadar olan sayıları, 1'den 5'e kadar, 1'den 6'ya kadar olan sayıları denedim.

$$1, 2, 3, 4 \rightarrow 10$$

$$1, 2, 3, 4, 5 \rightarrow 15$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \rightarrow 21$$

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

$$\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

Verdiğim değerkb varsayımı kullandığımda sonuçlar uyustugu için doğrudur.

Görsel 5.2. Ali Öğretmen'in Soru 1 İçin Çözümü

Ali Öğretmen de Görsel 5.2.' de gösterilen çözümünü örnek vererek yapmış ve devamında sayı deneyerek çözüm yaptığı için geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şu sözleriyle dile getirmiştir: "... Bu söylemiş olduğum şey ispat niteliği taşımaz çünkü sonuçta hani deneme yanılma yoluyla yapıyorum." Örnek vererek çözüm yapan Ali Öğretmen sayılar denediğini, varsayımın doğru olduğunu düşündüğünü ifade etmiş, fakat çözümünü geçerli bir ispat olarak kabul etmemiştir. Ali Öğretmen, örneklerin sınırlılığının farkında olmasına rağmen varsayımı ispatlamak için örnek tabanlı bir argüman sunmuş ve geçerli bir ispat yapamamıştır.

Soru 1

$$\sum_{n=1}^n n = 1+2+3+4+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{n+1} n = 1+2+3+4+\dots+n+n+1$$
$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + n+1$$

$$\frac{n^2+n}{2} + n+1 = \frac{n^2+2n+2}{2} = \frac{(n+1)^2+1}{2} \dots$$

Formülü yanlışlaya bilerek aykırı bir sayı bulunmadığı için varsayım her zaman doğrudur.

Görsel 5.3. Ezgi Öğretmen'in Soru 1 İçin Çözümü

Örnek vererek çözüm yapan öğretmenlerden Ezgi Öğretmen, sorunun çözümünü önce cebirsel olarak ifade etmeye çalıştığı, fakat tamamlayamadığı görülmüştür. Sonrasında ise örnek sayıları düşünerek, aykırı bir örnek bulunmadığını ve varsayımın doğru olduğunu belirtmiştir. Ezgi Öğretmen'in örnek temelli bir ispat algısı ile hareket ettiği görülmüştür. Ezgi Öğretmen Görsel 5.3.' de verilen çözümünü, aykırı olan bir örnek bulunmadığı için geçerli bir ispat olarak gördüğünü şu sözleriyle ifade etmiştir:

"Evet ispat yarım kaldı da şöyle bir şöyle toparladık, formülü yanlışlayabilecek aykırı bir sayı bulunmadığı için varsayım her zaman doğrudur dedim hocam. İkinci söylediğim bir ispat olur evet. Dayanağım ne? Yani bir çelişki oluşturmadığı için bütün sayıları sağladığı için."

Öğretmenlerden 3 tanesinin genelleyici örnek benzeri bir düşünce ile soruyu çözdüğü tespit edilmiştir. Bunlardan birisinin çözümünü geçerli bir ispat olarak kabul ettiği, diğer 2 öğretmenin ise kabul etmediği görülmüştür.

Soru 1

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \\ + 10 \ 9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \\ \hline 11 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \end{array}$$

10 tane 11 oldu.

Daha sonra bu 10 tane 11, 2 defa '1'den 10'a kadar sayının toplamı olduğu için 2'ye böldük ve böylece 1'den 10'a kadar toplamı bulmuş olduk.

Görsel 5.4. Mahmut Öğretmen'in Soru 1 İçin Çözümü

Görsel 5.4.' de verilen çözümde Mahmut Öğretmen önceden bildiği Gauss teoremi yardımı ile soruyu çözmüş ve geçerli bir ispat olduğunu şu görüşüyle ifade etmiştir: "Bence geçerli bir ispat sayılabilir çünkü mantıksız olan hiç bir tarafı yok yani 2 tane 10'a kadar sayıyı topluyoruz biz bunu alt alta yazdık 11 oluyor sonuçta bunu tekrar 2'ye böldük yani gayet ispat olabilir yani." Mahmut Öğretmen çözümünü mantıklı bularak geçerli bir ispat olduğunu belirtmiştir. Cebirsel olarak ifade edilmeden de ispat olabileceğini, genelliği sağladığını ve mantıklı olduğunu anlattığı tespit edilmiştir.

Soru 1

Önce küçük sayıları kullanarak bu ifadenin (formülün) doğruluğunu kendince test ettim.

Örneğin: $\left. \begin{array}{ll} 1'den & 3'e \\ 1'den & 5'e \\ 1'den & 10'a \text{ vs.} \end{array} \right\}$

Bunları karşılaştırdıca doğru olduğu konusunda vardım.

⇒ Ayrıca bir diğer formül olarak

1 2 3 4 5 $\Rightarrow \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$
↓
ortadaki sayı x rakam sayısı
3 x 5 = 15

Bu şekilde birkaç örnek ile doğru olduğunu gördüm.

Çift sayıda rakam olduğu zaman ise ortadaki rakamların aritmetik ortalaması alınır ve sayı sayısı ile çarpılır.

Görsel 5.5. Sefa Öğretmen'in Soru 1 İçin Çözümü

Genelleyici örneğe benzer bir şekilde çözüm yapan Sefa Öğretmen Görsel 5.5.' de gösterilen çözümünün eksik kaldığı ve bütün sayılar için doğru olduğunu gösteremediği için geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şöyle ifade etmiştir: "Çünkü bir ispatta bu yaptığım ispatta en azından eksik olduğunu düşünüyorum yani tamamen ispatlanması için tüm sayıları kullanmam gerektiğini düşünüyorum." Sefa Öğretmen'in yaptığı genellemenin ve ispatı tamamladığının farkında olmadığı görülmüştür.

Soru 2: Burak ardışık üç tam sayının çarpımının her zaman 6'ya tam bölünebildiğini söylemektedir. Örneğin; 9, 10, 11 ardışık üç tam sayıdır ve çarpımları 990'dır, bu da 6'ya tam bölünebilmektedir. Sizce Burak'ın ifade ettiği varsayım her zaman doğru mudur?

- Ardışık dört tam sayının çarpımı 24 ile tam bölünebilir mi?
- Ardışık beş tam sayının çarpımı 120 ile tam bölünebilir mi?

Bulduğunuz sonuçlardan nasıl bir varsayım geliştirebilirsiniz?

Soru 2 için Öğretmenlerin 2 tanesinin örnek vererek çözüm yaptıkları görülmüş, her iki öğretmen de çözümlerini geçerli bir ispat olarak kabul etmiştir.

Soru 2

$n=12$ için

$$12 \cdot 13 \cdot 14 = 20184$$

$$20184 \div 6 \rightarrow 2 \text{ ve } 3'ün \text{ katı}$$

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} \text{ her örnek için sağladığından ifade doğrudur.}$$

Ardışık dört tane sayının çarpımı 24'tür.
24 ile tam bölünür.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \rightarrow 24'ün \text{ katı}$$

Ardışık beş tam sayının çarpımı 120 ile tam bölünür.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \rightarrow 120'nin \text{ katı, bölünür.}$$

Görsel 5.6. Emine Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü

Görsel 5.6.' da verilen çözümde Emine Öğretmen cebirsel olarak ifade etmeye çalışsa da bundan vazgeçip sadece örneklerle yetinmiştir. Emine Öğretmen'in örnek temelli bir ispat düşüncesi ile hareket ettiği görülmüştür. Yaptığı çözümü de genelleyebildiğini düşünerek geçerli bir ispat olduğunu şöyle ifade etmiştir:

"Yani olur bence. Genelleme yapabiliyoruz hocam çünkü dediğiniz gibi 1,2,3,4 desek 3'e kadar 6 ya tam bölünebiliyor. Ardışık aynı şekilde 4 tam sayıda en küçük sayıları denersek $1,2,3 \times 4$ 24'ede bölünüyor 5 desek ilk 5 sayı aynı şekilde mesela ben bunu hani zıt bir şey düşünürsem ya başka bir sayı versem diyelim 3, 4, 5 ve 6 verdim diyelim ilk 4 sayı aynı şekilde 24'e bölünüyor. Bunun gelen bir ardışık sayıda 7 bu şekilde bakalım 120'ye bölünüyor mu? Evet 120'ye de bölünüyor. O zaman genelleyebiliyorum böyle bir varsayım oluşturabiliyorum o zaman."

Öğretmenlerden 5 tanesinin çözümlerini sözel olarak ifade ettiği tespit edilmiştir. Bu öğretmenlerden dördü yaptıkları çözümü geçerli bir ispat olarak kabul ederken, biri çözümünü geçerli bir ispat olarak kabul etmemektedir.

Soru 2
Burak'ın söylediği varsayım her zaman doğrudur. Çünkü
ardışık üç tam sayının içerisinde daima 3 ve 2 bölüneni
olduğu için bölünen sayıda daima 6 ile tam bölünür.
Rakamlık sayımda 2'li ve 3'lü sayılar olduğu için
ardışık üç tam sayının içerisinde daima 2 ve 3 çarpanını
bulundurur. Ve 6 ile tam bölünür.
Rakamlık sayımda dolayı ardışık dört tam sayının
içerisinde 2, 3 ve 4 çarpanı olduğu için verilen ifade
daima doğrudur.
Aynı sebepten dolayı ardışık 5 tam sayının
çarpanında 120 ile tam bölünebilir.

Görsel 5.7. Mehmet Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü

Mehmet Öğretmen'in herhangi bir örnek kullanmadan ve cebirsel olarak ifade etmeden yaptığı çözüm Görsel 5.7.' de verilmiştir. Mehmet Öğretmen'in yaptığı çözümü için sözel açıklamalarda bulunmakla yetindiği görülmüş ve bir genellemeye ulaştığı için çözümünü geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şu sözleriyle dile getirmiştir: “Çünkü bir genellemeye ulaştık, genelleme verilen bütün örnekleri de kapsadığı için bir ispat diyebiliriz.”

Soru 2

Ardeşik 3 sayının aralarında 1' ten çift sayı
elliyandan sayımları 2' ye bölünebilir. Ardeşik 3 sayının
1 tenesi kesin 3' ten katı elliyandan sayımları 3' e de
tam bölünebilir.
Bu soruyla da ardeşik 3 sayının sayımları 6 ile de
tam bölünebilir.

Görsel 5.8. Mahmut Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü

Mahmut Öğretmen de aynı şekilde herhangi bir örnek kullanmadan ve cebirsel olarak ifade etmeden bir çözüm yapmış ve bu çözüm Görsel 5.8.' de verilmiştir. Mahmut öğretmen yaptığı çözümü herhangi bir kural yazmadığı için geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şöyle ifade etmiştir: “Evet tam ispat olarak sayamıyoruz çünkü hani 1. soruda ki gibi şey yapamıyoruz bir kural koyamıyoruz yani oraya hani böyle $\frac{n(n+1)}{2}$ gibi bir kural koyamıyoruz ondan dolayı öyle diyorum yani.” Mahmut Öğretmen'in sözel olarak ifade ettiği çözümünü ispat için yeterli bulmadığını ifade ettiği gözlemlenmiştir. Mahmut öğretmenin ispat için gerekli olan koşulları düşünerek hareket ettiği görülmüş, fakat varsayımların doğruluğunu ispatlamakta zorlandığı tespit edilmiştir.

Soru 2

$$1, 2, 3$$

$$2, 3, 4$$

$$3, 4, 5$$

$$4, 5, 6$$

⋮

$$n, (n+1), (n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$$

3 ardışık sayı çarpıldığında en az bir tane çift sayı ve 3'ün katı bir sayı geliyor. Bir sayının 6 ile bölünebilmesi için 3'ün katı bir çift sayı olması gerekir. Buna göre ardışık 3 tam sayının çarpımı her zaman 6'ya tam bölünür.

Ardışık dört tam sayı çarpıldığında 2, 3 ve 4'ün katı sayılar çarpılmış olur. Çarpım her zaman 24 ile tam bölünür.

Görsel 5.9. Ezgi Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü

Çözümünü sözel olarak ifade eden öğretmenlerden Ezgi Öğretmen'in, sorunun başında çözümünü cebirsel olarak ifade etmeye çalıştığı, fakat tamamlayamadığı görülmüştür. Daha sonra çözümünü sözel olarak ifade etmiştir. Görsel 5.9.'da gösterilen Ezgi öğretmenin çözümünü mantıksal olarak doğru bulduğu için geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şöyle ifade etmiştir:

"Aslında şöyle hocam çok basit ve göz yani şey olarak çarpanları baktığımız zaman üçer üçer gider ve mantıksal olarak doğru olduğunu düşünüyorum şu an, bütün sayıları deneyemedim tabiki de ama mantıksal olarak düşününce ben bunu bir ispat olarak kabul edebilirim evet."

Soru 2 için öğretmenlerden 3 tanesinin örnekle beraber açıklamalarda bulunarak çözüm yaptıkları tespit edilmiş, bu öğretmenlerden ikisi çözümlerini geçerli bir ispat olarak kabul ederken birisi çözümünü geçerli bir ispat olarak kabul etmemiştir.

Soru 2

Ardeşik üç sayının çarpımı 6 ile bölünür mü?
Bu ifadenin doğru olması için 6'nın çarpanlarına bakmak gerekir. 2 ve 3 çarpanlarına da bölünürse sorun yoktur. Yani bölünebilir. Bunu da şöyle izah edelim: Ardeşik üç tam sayıdan en az biri çift sayıdır. Dolayısıyla 2 ile tam bölünür. Bu ardeşik üç sayıdan en az biri yine 3'ün katı olduğundan 3 ile de tam bölünür. O halde 2 ve 3 ile tam bölünebilen bir sayı 6 ile de tam bölünür.

→ Ardeşik dört tam sayının çarpımı 24 ile tam bölünebilir. Çünkü ardeşik üç tam sayı düşündüğümüzde 6 ile tam bölünür. Sonrasında 4 ardeşik de 24 ile tam bölünür. Bir sonraki adımda 5 ardeşik tam sayı $24 \cdot 5 = 120$ ile tam bölünür. Bir sonraki adımda 6 ardeşik tam sayı $120 \cdot 6 = 720$ ile tam bölünebilir. İspat olarak kullanılabileceğini düşünüyorum.

Görsel 5.10. Emir Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü

Emir Öğretmen'in örnek vererek ve açıklamalarda bulunarak yaptığı çözüm Görsel 5.10.'da gösterilmiştir. Emir Öğretmen yaptığı çözümün öğrenciler için pratik olduğunu düşünerek geçerli bir ispat olduğunu şu sözleriyle dile getirmiştir: "Niye ispat olabilir çünkü özellikle ortaokul son kademedeki 8. sınıf öğrencileri için pratik

olabileceğini düşündüğüm bir ispat olabilir.” Emir Öğretmen’in örneklerden hareket ederek bazı açıklamalarda bulunduğu görülmüştür.

Soru 2

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} = x$$

↓
Tam sayı

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{24}{24} = 1 \checkmark$$

$$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = \frac{5 \cdot 6^1 \cdot 7 \cdot 8^2}{24 \cdot 4} = 70 \checkmark$$

$$\frac{9 \cdot 10^5 \cdot 11 \cdot 12^1}{24 \cdot 2} = 9 \cdot 5 \cdot 11 \checkmark$$

Her ardışık 4 sayıda 2 çarpanından mutlaka 2 tane gelir, ve her 4 ardışık sayıda 3 çarpanı da gelir. Bu yüzden ardışık 4 tam sayının çarpımı 24'e tam bölünür.

Yukarıdaki 24 ile bölünmeden de faydalanırsak

$120 = 24 \cdot 5$ bize 5 çarpanı da lazım. O yüzden ardışık 5 tan sayıya bakarsak mutlaka 5 çarpanı da geldiği için ardışık 5 tam sayının çarpımı 120'ye tam bölünür.

Görsel 5.11. Zeki Öğretmen'in Soru 2 İçin Çözümü

Zeki Öğretmen'in de örnekle beraber açıklamalarda bulunarak yaptığı çözüm Görsel 5.11.'de gösterilmiştir. Zeki öğretmen yaptığı çözümü herhangi bir ispat

yöntemi kullanmadığı için geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şöyle ifade etmiştir: “Yani geçerli ispat yani ispat yöntemleri düşünürsek değil yöntemleri kullanmamız lazım yine.” Zeki Öğretmen örneklerden hareket ederek bazı açıklamalarda bulunmuş ve yaptığı çözümü ispat için yeterli olmadığını belirterek geçerli bir ispat olarak kabul etmemiştir.

Soru 3:

Zeynep, tam kare sayıların tek sayıda pozitif tam sayı çarpanı olduğunu ifade etmektedir. Örneğin; 36 sayısı için: (1.36), (2.18), (3.12), (4.9), (6.6) olmak üzere 9 tane pozitif tam sayı çarpanı olduğu görülmektedir. Zeynep’in ifade ettiği varsayım her zaman doğru mudur?

Soru 3 için öğretmenlerden 3 tanesinin örnek vererek çözüm yaptıkları tespit edilmiş, bu öğretmenlerden birisi yaptığı çözümü geçerli bir ispat olarak kabul ederken diğer iki öğretmen yaptıkları çözümleri geçerli bir ispat olarak kabul etmemiştir.

Soru 3

$$1 \Rightarrow 1^2 \rightarrow 2+1 \Rightarrow 3 \text{ tane pozitif çarpanı}$$

$$2 \Rightarrow 2^2 = 4 \rightarrow 2+1 = 3 \text{ tane pozitif çarpanı}$$

$$3 \Rightarrow 3^2 = 9 \rightarrow 2+1 = 3 \text{ tane pozitif çarpanı}$$

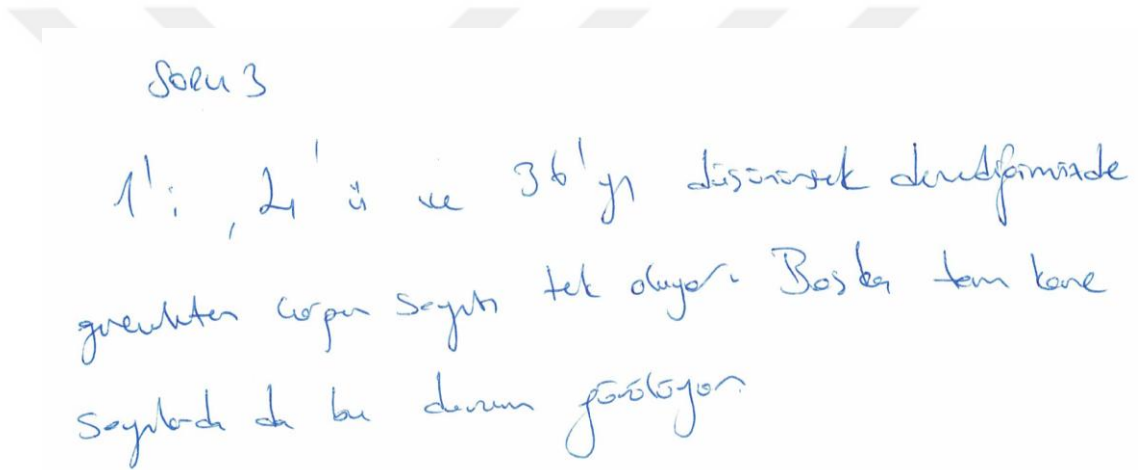
$$4 \Rightarrow 4^2 = 16 = 2^4 \rightarrow 4+1 = 5 \text{ tane pozitif}$$

$$5 \Rightarrow 5^2 = 25 \rightarrow 3 \text{ tane}$$

Zeynep'in ifade ettiği varsayımı doğrudur.

Görsel 5.12. Emine Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü

Önceden bildiği pozitif çarpan sayısı formülü yardımıyla örnek vererek çözüm yapan Emine Öğretmen'in çözümü Görsel 5.12.'de verilmiştir. Emine Öğretmen yaptığı çözümü örnek sayıların hepsi için sağladığını ifade ederek geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şu sözleriyle açıklamıştır: *“Yani geçerli bir ispat olabilir. Olur, yani, yani aynı şekilde diğer sayıları da denersek 7'nin karesi mesela 49 bunun da 3 tane pozitif yine aynı şekilde şey tek sayıda pozitif çarpanı olduğunu görüyorum.”* Emine öğretmen örneklerle yetinerek varsayımın doğru olduğunu ispatladığını düşünmüştür. Burada Emine Öğretmen'in örnek temelli bir ispat algısına sahip olduğu söylenebilir.



Görsel 5.13. Mahmut Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü

Mahmut Öğretmen'in örnek vererek yaptığı çözüm Görsel 5.13.'de verilmiştir. Mahmut Öğretmen yaptığı çözümü cebirsel olarak ifade etmediği için geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şöyle açıklamıştır:

“Aslında burada da direk cebirsel ifade olarak belirtmiyoruz bunu da ama o şekilde düşündüğümüzde ispat nasıl yani ispatı gösterme adına cebirsel olarak ifade edemediğimizden direk ispatı budur diyemiyoruz. Çünkü biz bunu sayılarla deneyerek yaptığımız için aslında ispat olarak direk söyleyemeyebiliriz...”

Mahmut Öğretmen'in örneklerden hareket ederek bir çözüm yaptığı ve çözümünü ispat için gerekli koşulları sağlamadığını düşünerek geçerli bir ispat

olarak kabul etmediği tespit edilmiştir. Örneklerin sınırlılıklarının farkında olduğu görülmüştür.

Soru 3 için Öğretmenlerden birisi çözümünü sözel olarak ifade ederek geçerli bir ispat olarak kabul etmiştir.

Soru 3

Her zaman doğru olduğunu düşünüyorum.
Çünkü çiftlerden birisi aynı sayılardan oluşuyor. ve 1 çarpandır. Diğerleri ise farklı 2'li çiftlerden oluşuyor. İkili kaç tane olursa olsun 2 ile çarpıldığında çifttir. Ayrıca 1 ayrı çarpanı eklersek tek olduğunu görürüz.
Çift sayı ile tek sayının toplamı tek sayıdır.

Görsel 5.14. Sefa Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü

Sefa Öğretmen Görsel 5.14.'de verilen çözümünü geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şu sözleriyle dile getirmiştir: “Bence geçerli bir ispat. ...Ben buradan yola çıkarak benim bulduğum bu çiftlerde otomatikman zaten tek sayı oluyor bu zaten $2n+1$ ispat edilmiş bir şey.” Sefa Öğretmen'in burada örnek veya cebirsel ifadeler kullanmadan çözümünü sözel olarak ifade etmekle yetinmiştir.

Öğretmenlerden 3 tanesinin çözümünü örnekle beraber açıklamalarda bulunarak yaptığı tespit edilmiş, her üç öğretmenin de yaptıkları çözümlerini geçerli bir ispat olarak kabul ettikleri görülmüştür.

Soru 3

İlk olarak deneme yanılma yoluyla tam kare sayılardan 4, 16, 64 denedim.

$4 \rightarrow 1, 2, 4 \rightarrow 3$ tane

$16 \rightarrow 1, 2, 4, 8, 16 \rightarrow 5$ tane

$64 \rightarrow 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \rightarrow 7$ tane

Daha sonra daha önceden bildiğimiz pozitif çarpan bulma yönteminden yaptığımda yine aynı sonucu vardım.

Montiken düşündüğümde eğer sayı tam kare ise üs çift sayı olur, 1 arttırdığımda tek olur.

Sayı tabanı 1'den fazla ise üsleri 1 arttırdığımda tek oluyor. Kaç taban olursa olsun görüldüğünde sonuç yine tek olacaktır.

Görsel 5.15. Ali Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü

Örnekle beraber açıklamalarda bulunarak çözüm yapan Ali Öğretmen'in çözümü Görsel 5.15.'de verilmiştir. Ali Öğretmen örneklerden hareket ederek açıklamaya çalıştığı çözümünü ispat için gerekli koşulları göz önünde bulundurmada geçerli bir ispat olarak kabul etmiştir. Ali öğretmen daha önceden bildiği pozitif çarpan sayısı formülü kullanarak çözüm yaptığını ve geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şöyle ifade etmiştir:

"Yani benim için olur. Neden olur! Yani deneme yanılmadan dolayı ispat olduğunu düşünmüyorum. Ama o pozitif çarpan bulma formülü diye bize yıllarca anlatılan şey eğer gerçekten formül ise yani daha öncesinde ispat edilmiş bir şey ise o zaman ben şöyle derim zaten ispat edilmiş bir yöntemi kullanarak ben bunun sonucuna vardım. Doğal olarak ispat edilmiş bir

şeyden yola çıkarak onu başka ifadelerde kullandığımda sonuç doğruya götürüyorsa beni doğal olarak ispat edilmiş demektir.”

Öğretmenlerden 2 tanesinin soru 3 için çözümünü cebirsel olarak ifade ettiği tespit edilmiştir. Her iki öğretmen de çözümlerini geçerli bir ispat olarak kabul etmiştir.

Soru 3

$x^{2n} \cdot y^{2m} \cdot z^{2k} \dots$ sayısı tam kare bir sayıdır.

x, y, z asaldır.

Pozitif tam sayı çarpanı: $\underbrace{(2n+1)}_{\text{Tek}}, \underbrace{(2m+1)}_{\text{Tek}}, \underbrace{(2k+1)}_{\text{Tek}} \dots$

Sonuç her zaman tek sayı olacaktır.

Görsel 5.16. Ezgi Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü

Çözümünü daha önceden bildiği pozitif çarpan sayısı formülü yardımıyla cebirsel olarak ifade eden Ezgi Öğretmen'in çözümü Görsel 5.16.'de verilmiştir. Ezgi Öğretmen çözümü için genellenebilir olduğunu düşünerek geçerli bir ispat olduğunu şu sözleriyle açıklamıştır: “...Neden böyle düşünüyorum, tam kare sayıların yani her zaman üsler tek olacağı için tek sayıların çarpımından da tek sayıda çarpan gelecek, yani bunu genellayebiliriz. Yani bu ispattır evet.” Ezgi Öğretmen pozitif çarpan sayısı formülünden yola çıkarak cebirsel olarak ifade ettiği çözümünü geçerli bir ispat olarak kabul etmiştir. Ezgi Öğretmen cebirsel olarak ifade edildiği zaman daha genel ifadelerle ulaşıldığını düşündüğünü ifade etmiştir.

Soru 3 için öğretmenlerden sadece birisinin genelleiyici örneğe yakın bir şekilde hareket ederek çözüm yaptığı tespit edilmiş ve çözümünü geçerli bir ispat olarak kabul ettiği görülmüştür.

Soru 3

Örnek 1: 4 için düşünelim.

(1.4) (2.2) 1, 2, 4 $\rightarrow$ 3 tane

Örnek 2: 9 için düşünelim.

(1.9) (3.3) 1, 3, 9 $\rightarrow$ 3 tane

Örnek 1'de 2 sayısını bir defa aldığımız için ve
Örnek 2'de de 3 sayısını bir defa aldığımız için pozitif
tam sayı parçalarının sayısı tek sayı olur.

Bütün tam kare sayılar için geçerli bir ispattır.
Çünkü bütün tam kare sayıların $(x.x)$ gibi tekrarlı
bir çarpanı vardır. ve biz bir tanesini aldığımız için
hepsinin pozitif çarpan sayısı tek olur.

Görsel 5.17. Nisa Öğretmen'in Soru 3 İçin Çözümü

Nisa Öğretmen genelleseyici örnek kullanarak çözüm yapmış ve geçerli bir ispat olarak kabul etmiştir. Çözümünü mantıklı bulduğunu ve genel olduğunu düşündüğünü ifade ettiği görülmüştür. Nisa Öğretmen'in Görsel 5.17.'de verilen çözümünün genel olduğunu düşünerek geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şöyle ifade etmiştir: "Evet olur. Yani mesela 225'in bile 15×15 olduğunu biliyor yani 15'in karesi olduğunu biliyoruz onun için zaten hepsinde yani 2 tane tekrarlı sayı var ve biz bunlardan bir tanesini aldığımız için hepsine de pozitif çarpan sayısı tek olur."

5.2. Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Argümanları Değerlendirirken Kullandıkları Kriterler

Ortaokul matematik öğretmenleri ile gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmelerin ikinci bölümünde, ilk bölümde sorulan sorulara ilişkin verilen farklı argümanları değerlendirmeleri istenmiştir. Öncelikle hangi argümanların geçerli bir ispat olup olmadığı sorulmuş, neden geçerli bir ispat olup olmadığını açıklamaları istenmiştir. Öğretmenlerin, argümanların geçerli bir ispat olup olmadığı hakkında karar verirken kullandıkları kriterler incelendiğinde *mantıklı bulma, genel olma, örnek verme, önceki bilgilerden yararlanma, doğru bulma, cebirsel ifadeler kullanma, açıklayıcı olma, ikna edici olma, kullanışlı olma, somutlaştırılmış olma, karmaşık bulma* kodları elde edilmiştir. Daha sonra bu argümanları en ikna edici olandan en az ikna edici olana doğru ve en açıklayıcı olandan en az açıklayıcı olana doğru sıralamaları istenmiştir. Son olarak öğretmenlere geçerli bir ispatın hangi özelliklere sahip olması gerektiği ve cebirsel olarak ifade edilmesinin zorunlu olup olmadığı sorulmuştur.

Tablo 5. 2. Ortaokul matematik öğretmenlerinin verilen argümanları geçerli bulma oranları

	Soru 1		Soru 2		Soru 3	
	Geçerli ispat	Geçersiz ispat	Geçerli ispat	Geçersiz ispat	Geçerli ispat	Geçersiz ispat
Argüman 1	3 (30%)	7 (70%)	3 (30%)	7 (70%)	4 (40%)	6 (60%)
Argüman 2	5 (50%)	5 (50%)	3 (30%)	7 (70%)	5 (50%)	5 (50%)
Argüman 3	8 (80%)	2 (20%)	8 (80%)	2 (20%)	9 (90%)	1 (10%)
Argüman 4	10 (100%)	0 (0%)	10 (100%)	0 (0%)	9 (90%)	1 (10%)

Tablo 5.2. incelendiğinde birkaç örnek ile oluşturulmuş argüman 1'i geçerli bir ispat olarak kabul eden öğretmenlerin sayısının en az olduğu, cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'ü geçerli bir ispat olarak kabul eden öğretmenlerin sayısının en fazla olduğu tespit edilmiştir. Öğretmenlerin %30'u soru 1 için, %30'u soru 2 için ve

%40'ı soru 3 için birkaç örnek ile oluşturulmuş argüman 1'i geçerli bir ispat olarak gördüğü elde edilmiştir. Cebirsel ifadeler ile oluşturulan argüman 4'ü ise %100'ü soru 1 için, %100'ü soru 2 için ve %90'ı soru 3 için geçerli bir ispat olarak gördüğü tespit edilmiştir. Soru 3 için argüman 4'ü karmaşık bulup, anlamadığı için geçerli bir ispat olarak kabul etmeyen Emine öğretmen nedenini şöyle açıklamıştır:

“Yani açıkçası olmadığını düşünüyorum çünkü biraz yani bir öğretmen olarak bence biraz zor yani zorlayıcı değil de karmaşık olduğunu düşünüyorum yani varsayımın doğru olmadığını düşünüyorum.”

Öğretmenlerin genelleyici örnek ile oluşturulmuş argüman 3'ü geçerli bir ispat olarak kabul etme yüzdesinin cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'e oldukça yakın olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin genelleyici örnek olan argüman 3'ü tanımadıkları, örnekten fazlası olduğunu, açıklamalar ile desteklendiğini, genelliği yeterince temsil ettiği için geçerli bir ispat olarak gördüklerini ifade ettikleri tespit edilmiştir. Öğretmenlerin görsel olarak ifade edilen argüman 2'yi anlamakta zorlandıkları, geçerli bir ispat olarak görme konusunda kararsızlık yaşadıkları ve geçerli bir ispat olarak kabul etme yüzdesinin düşük olduğu görülmüştür.

5.2.1. Argümanlar Değerlendirilirken Kullanılan Kriterler

Yarı yapılandırılmış görüşmelerin ikinci bölümünde ortaokul matematik öğretmenlerinin argümanları değerlendirirken kullandıkları kriterlere ait elde edilen bulgular Tablo 5.3.'de sunulmuştur.

Tablo 5.3. Ortaokul matematik öğretmenlerinin argümanları değerlendirirken kullandıkları kriterler

Kodlar	Öğretmenlerin Sayısı
Mantıklı Bulma	10
Genel Olma	10
Örnek Verme	8
Önceki Bilgilerden Yararlanma	8
Doğru Bulma	8
Cebirsel İfadeler Kullanma	7
Açıklayıcı Olma	6
İkna Edici Olma	4
Kullanışlı Olma	3
Somutlaştırılmış Olma	3
Karmaşık Bulma	3

Tablo 5.3. incelendiğinde ortaokul matematik öğretmenlerinin verilen argümanları değerlendirirken kullandıkları kriterlerin: “mantıklı bulma, genel olma, örnek verme, önceki bilgilerden yararlanma, doğru bulma, cebirsel ifadeler kullanma, açıklayıcı olma, ikna edici olma, kullanışlı olma, somutlaştırılmış olma, karmaşık bulma” olduğu tespit edilmiştir.

Öğretmenlerin hepsinin verilen argümanları değerlendirirken “mantıklı bulma” kriterini göz önünde bulundurdıkları tespit edilmiştir. Öğretmenler mantıklı bulma kriterini daha çok verilen argümanları geçerli bir ispat olarak kabul ederken kullanmalarına karşın geçerli bir ispat olarak kabul etmediklerini belirtirken de göz önünde bulundurdıkları görülmüştür. Nisa Öğretmen verilen bir argümanı mantıklı bulduğu için geçerli bir ispat olarak gördüğünü şu sözleriyle dile getirmiştir: “Bu da gerçekten hani mantık olarak düşündüğümüzde çok güzel bir şekilde ispatlamışlar...” Benzer şekilde Ali Öğretmen verilen bir argümanı mantıklı bir açıklaması olduğu için geçerli bir ispat olarak gördüğünü şöyle ifade etmiştir:

“Yani burada deneme yanılma değil de mantıklı bir açıklaması var. Birden yüze kadar yüzden bire kadar onların hepsini topladığı zaman sonuç hep zaten aynı çıkıyor...”

Öğretmenlerin mantıklı bulma kriterini az da olsa geçerli bir ispat olarak kabul etmediklerinde de kullandıkları görülmüştür. Örneğin Mahmut Öğretmen verilen bir argümanı mantıklı bulmadığı için geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şu sözleriyle dile getirmiştir: *“Evet bunu tam ispat olarak kabul edemiyorum bunu sebebi ise biraz çok mantıklı gelmedi açıklaması o sebeple...”*

Öğretmenlerin hepsinin kullandığı bir diğer kriterin *“genel olma”* kriteri olduğu tespit edilmiştir. Öğretmenler verilen argümanları geçerli bir ispat kabul ederken de kabul etmediklerinde de genelliği dikkate aldıkları elde edilen bulgularda tespit edilmiştir. Mehmet Öğretmen verilen bir argümanı doğru bir genelleme barındırdığı için geçerli bir ispat olarak gördüğünü şöyle ifade etmiştir:

“Çünkü burada 2 tane farklı ifadeyi tümevarım yöntemi kullanılarak bunları genellemiş bu genelleme de doğru cebirsel ifadeler üzerinden sadece bir örnek verilerek yapılmamış bu da doğru gayet iyi bir şekilde görülebilir evet...”

Genellenebildiği için verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak kabul eden Emine Öğretmen şu sözleriyle görüşünü dile getirmiştir: *“Çünkü genelleyebiliyorum hocam her sayı denediğimde sağlayabiliyor.”*

Öğretmenlerin genel olmadığından verilen argümanları geçerli bir ispat olarak kabul etmedikleri elde edilen bulgularda görülmüştür. Ezgi Öğretmen bu durumu şöyle açıklamıştır:

“Bundan önceki sorularla aynı düşüncedeyim, yani şey bütün sayıları tek tek yazıp deneyemeyeceğimiz için hangi sayıda bir yanlışlık olur veya bir çelişki olur bilemeyeceğiz, onun için hepsini tek tek deneyerek bir genelleme yapamayız bence.”

Argümanları değerlendirirken Öğretmenlerden 8 tanesinin “*örnek verme*” kriterini kullandıkları tespit edilmiştir. Örnek verme kriterinin daha çok geçerli bir ispat olarak kabul edilmeyen durumlarda karşımıza çıkmakta olduğu görülmüş, buna karşın örnek verme kriterini kullanarak geçerli bir ispat kabul edilen durumların sayısının da oldukça fazla olduğu tespit edilmiştir. Örnek vererek ispat yapıldığını belirten Naci öğretmen verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak gördüğünü şu sözleriyle açıklamıştır:

“Ya çünkü dediğim gibi ben bu şekilde kendimde örnekler yaparak çarparak elde ettim bu sonuçları örnek yani tabiri caizse şöyle söyleyeyim örneklerle ispatladım.”

Benzer şekilde Naci öğretmen geçerli bir ispat için daha fazla örnek ile çözüm yapılması gerektiğini şöyle ifade etmiştir: “... Dediğimiz gibi buradaki zaman kısıtlı olduğu için biz birkaç örnek verdik ama birkaç örnek değil daha çok örnekle çözüp ispatlanması gerekiyor.”

Verilen örnekleri yeterli bulup aykırı bir örnek olmadığını düşündüğü için verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak kabul eden Emine Öğretmen görüşünü şöyle ifade etmiştir: “Evet kabul edebiliriz çünkü verilen sayıların sağladığını görüyoruz. Örnekler yani buna ayırıyeten aykırı bir örnek görmediğim için her zaman doğru bir örnek.”

Verilen argümanları değerlendirirken örnek verme kriterini kullanarak geçerli bir ispat olarak kabul etmediklerini belirten öğretmenlerin bulunduğu elde edilen bulgularda görülmüştür. Örneğin; Zeki Öğretmen birkaç örnek verildiği için verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şu sözleriyle dile getirmiştir: “Yani tek bir birkaç örnek vermiş herhalde sadece örneklerden faydalanarak hani bu örneklerden faydalanarak geçerli bir ispat diyemeyiz...” Benzer şekilde sadece örnekler üzerinden gidildiği için aksine bir örneğin düşünülebileceğini ve genelleme olmadığı için verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak kabul etmeyen Mehmet Öğretmen görüşünü şu sözleriyle açıklamıştır:

“Burada sadece yine örnekler üzerinden gidilmiş bir genelleme ulaşmamış ve aksine bir örnek düşünülebilir burada bu yüzden herhangi bir ispat yöntemi olarak alınamaz.”

Öğretmenlerin 8 tanesinin argümanları değerlendirirken “*önceki bilgilerden yararlanma*” kriterini kullandıkları elde edilen bulgularda tespit edilmiştir. Öğretmenler önceki bilgilerden yararlanma kriterini, verilen argümanları hem geçerli bir ispat olarak kabul ederken hem de geçerli bir ispat olarak kabul etmediklerinde kullandıkları görülmüştür. Üniversite yıllarında gördüğü ispat yöntemlerinden biri olduğu için verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak gördüğünü Emir öğretmen şöyle dile getirmiştir:

“Geçerli bir ispat olarak kabul edilebilir bu özellikle bizim üniversitede gördüğümüz tümevarım ilkesiydi bu esas ispat yöntemi zaten bu olması lazım hani alt seviyedeki öğrenciler özellikle ortaokul seviyesindeki öğrenciler bunu anlamakta zorluk yaşar ama üst düzey eğitim görmüş olan özellikle onların ispatlaması gereken yöntemin bu olduğunu düşünüyorum...”

Benzer şekilde Ali Öğretmen üniversite yıllarında yapmış oldukları ispatları düşünerek verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şu sözleriyle açıklamıştır:

“Nedenim zaten yapmış olduğu işlemler matematik ilkelerine çok rahat oturan işlemler ondan dolayı ben kendim matematik öğretmeni olarak öğrendiğim yani üniversitede görmüş olduğum bilgilerime dayanarak biz de zaten bu şekilde ispatları çok yaptık. Ondan dolayı ben bunun ispat olduğunu düşünüyorum hocam.”

Verilen bir argümanı değerlendirirken genellenebilir olduğunu fakat üniversite yıllarında görmüş oldukları bir ispat yöntemi olmadığı için verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini belirten Zeki Öğretmen görüşünü şu sözleriyle dile getirmiştir: *“Yani bunlarda genellenebilir aslında ama eksiklik var yani tam olarak bir ispat yöntemi değil.”*

Argümanları değerlendirirken yine 8 öğretmenin kullandığı bir diğer kriter ise “doğru bulma” kriteridir. Öğretmenlerin doğru bulma kriterini, çoğunlukla argümanları geçerli bir ispat olarak kabul ederken kullandıkları, nadiren de olsa geçerli bir ispat olarak kabul etmediklerinde de kullandıkları tespit edilmiştir. Emine Öğretmen sayılar denendiğinde sürekli doğru çıktığını belirterek verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak gördüğünü şöyle dile getirmiştir: “*Genel olarak çünkü sayılar denediğimizde hep doğru çıkıyor yani istisna bir durum görülmedi.*” Benzer şekilde küçük sayılar için de büyük sayılar için de doğru olduğunu belirterek verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak kabul eden Nisa Öğretmen görüşünü şöyle ifade etmiştir: “*Evet çünkü bunun daha küçük halini diğer sayılar diğer örneklerde denediğimizde ya da daha büyük halini yine doğrular yani.*”

Bütün sayılar için doğru olduğunun gösterilmesi gerektiğini belirterek verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak kabul etmeyen Zeki Öğretmen görüşünü şöyle dile getirmiştir: “*... Çünkü hani bütün tam sayılarda doğruluğunu göstermemiz gerekir o yüzden geçerli bir ispat değil.*”

Öğretmenlerden 7 tanesinin argümanları değerlendirirken kullandığı “cebirsel ifadeler kullanma” kriteri, öğretmenlerin verilen argümanları geçerli bir ispat olarak kabul ettiklerinde de kabul etmediklerinde de dikkate aldıkları elde edilen bulgularda tespit edilmiştir. Sefa Öğretmen verilen bir argümanı matematiksel işler barındırdığı için geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şu sözleriyle dile getirmiştir: “*Burada biraz hocam entel dantel şey işler olduğu için matematiksel işler olduğu için tabi ki doğru zaten bu yani otomatikman.*” Ezgi Öğretmen de cebirsel ifadeler olduğunda bir çelişki söz konusu olmadan bütün sayılar için doğru olacağını ifade ederek verilen bir argümanı geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şöyle açıklamıştır:

“*Çünkü hocam burada da şey oluyor ya yani bir çelişkiye yer yok aslında burada, sadece cebirsel olarak değil de yani bir kesinlikle bir denklem kurulduğu zaman ve iki taraf birbirine eşitse zaten burada hangi sayı gelirse gelsin doğru olacaktır. Onun için bir yanlışlamaya yer yok, bütün sayılar için doğru oluyor.*”

İçerisinde cebirsel ifadeler olmayan bir argümanı geçerli bir ispat olarak kabul etmeyen Zeki Öğretmen görüşünü şöyle dile getirmiştir: *“Yok bunda da bir geçerlilik yok o zaman bir örnek verilmiş desteklenmiş hani sözel olarak da desteklenmiş ama tam olarak bir matematiksel dil daha doğrusu yeterli değil.”*

Öğretmenlerden 6 tanesinin verilen argümanları değerlendirirken “açıklayıcı olma” kriterini kullandıkları elde edilen bulgularda tespit edilmiştir. Öğretmenlerden açıklayıcı olma kriterini daha çok verilen argümanları geçerli bir ispat olarak kabul ettiklerinde kullandıkları, az da olsa geçerli bir ispat olarak kabul etmediklerinde de dikkate aldıkları görülmüştür. Nisa Öğretmen verilen bir argümanı örnekler üzerinden açıklanmış olduğu için geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şöyle ifade etmiştir: *“Örnekler üzerinden açıklayıcı yani açıklamış yani bütün örneklerde de aynısı olduğu için kabul edebiliriz.”* Benzer şekilde Mehmet Öğretmen verilen bir argümanı tamamen açıklanmış olduğunu belirterek geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şu sözleriyle dile getirmiştir: *“Çünkü tamamen açıklanmış aksine bir örnek verilemeyecek şekilde de açıklama yapmış sonrada tümevarım yoluyla ispatlanmış.”*

Öğretmenlerin açıklayıcı olma kriterini az da olsa verilen argümanları geçerli bir ispat olarak kabul etmediklerinde de kullandıkları tespit edilmiştir. Örneğin; Mahmut Öğretmen verilen bir argümanı açıklayıcı olmadığı için geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şöyle ifade etmiştir: *“Burada da yine tam açıklayıcı olmadığı için tam olarak ispat olarak kabul edemeyebilir etmeyebiliriz o yüzden o sebeple ispat olarak kabul etmeyebilirim...”*

Argümanları değerlendirirken Öğretmenlerden 4 tanesinin “ikna edici olma” kriterini kullandıkları elde edilen bulgularda tespit edilmiştir. İkna edici olma kriterinin geçerli bir ispat olarak kabul edilen durumlarda daha çok kullanıldığı, az da olsa geçerli bir ispat olarak kabul edilmeyen durumlarda da kullanıldığı görülmüştür. Mahmut Öğretmen verilen bir argümanı ikna edici olduğundan dolayı geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şöyle ifade etmiştir: *“Evet bunu ispat olarak kabul ediyorum sebebi de gayet ikna edici hemen bakınca anlaşılabilir o sebeple bunu ispat olarak kabul ediyorum.”* Benzer şekilde Ezgi Öğretmen de verilen bir argümanı

ikna edici olduğunu belirterek geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şu sözleriyle dile getirmiştir:

“Şöyle baktım da hocam çift sayıda çarpan elde edilir, tam kare sayılar, evet en son tek ve çift sayıların her zaman toplamının tek olduğunu göstermiş, bu zaten net bir şey, buraya bağladığı için de daha ikna edici ve daha net oluyor.”

Ali Öğretmen verilen bir argümanın karşıtı tatmin edemeyeceğini belirterek geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şöyle ifade etmiştir:

“Edemeyiz hocam. Yine diğer sorularda olduğu gibi yani deneme yoluyla sayıları deneyerek bulunmuş yani matematiksel hiçbir, hiçbir demeyeyim de hani karşıtı tatmin edecek matematiksel ifadeler kullanmadığı için ben ispat olduğunu düşünmüyorum.”

Öğretmenlerden 3 tanesinin verilen argümanları değerlendirirken “kullanışlı olma” kriterini kullandıkları belirlenmiştir. Öğretmenlerin kullanışlı olma kriterini verilen argümanları değerlendirirken, geçerli bir ispat olarak kabul ettiklerinde de kabul etmediklerinde de kullandıkları görülmüştür. Sefa Öğretmen verilen bir argümanı daha fazla çocuğa hitap ettiğini, kullanışlı olduğunu belirterek geçerli bir ispat olarak kabul ettiğini şu sözleriyle dile getirmiştir: “Aynen öyle onu düşünüyorum ikincisinde de örnekten fazlası olduğunu düşünüyorum yani böyle daha fazla çocuklara hitap ettiğini daha kullanışlı olduğunu düşünüyorum.” Emir Öğretmen ise verilen bir argümanı kullanışlı bulmadığı için geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şöyle ifade etmiştir:

“Kullanışlı değil hocam bunu ben ispat olarak kullanamam büyük rakamlarda büyük sayılarda genelleyemem gel de bütün hepsini dikdörtgenlerin çarpımı şeklinde yap 2 kenar çarpımı şeklinde yani çok zahmetli bir iş olur amaç ispatta amaç nedir matematikte amaç nedir basite indirgemektir sen işi karmaşık bir hale getireceksen hiç anlamı yok.”

Argümanları değerlendirirken 3 tane Öğretmenin kullandığı bir diğer kriter “somutlaştırılmış olma” kriteridir. Öğretmenlerin somutlaştırılmış olma kriterini, verilen argümanları değerlendirirken geçerli bir ispat olarak kabul ettiklerinde kullandıkları görülmüştür. Emine Öğretmen verilen bir argümanın somut olduğunu, daha kolay anlatılabileceğini belirterek geçerli bir ispat olduğunu şu sözleriyle dile getirmiştir: *“Evet kabul edebiliriz hatta yani bu daha şey somut şekilde yani daha böyle kolay şekilde anlatabileceğimiz şekilde olabilir evet.”* Benzer şekilde Ezgi Öğretmen de verilen bir argümanı değerlendirirken somut bir ispat olduğunu düşünerek geçerli bir ispat olduğunu şöyle açıklamıştır: *“Bunda ne var farklı olarak tam şey yapamadım kuramadım cümleyi ama, yani hocam bu biraz daha somut bir ispat olmuş yani sayı denmekten ziyade net bir şey olmuş, nasıl açıklayabilirim bilemiyorum şu an.”*

Öğretmenlerin argümanları değerlendirirken yine 3 tanesinin kullandığı bir diğer kriter “karmaşık bulma” kriteridir. Karmaşık bulma kriterinin verilen argümanları geçerli bir ispat olarak kabul etmediklerinde kullandıkları tespit edilmiştir. Mahmut Öğretmen verilen bir argümanı karşı tarafın anlayamayacağını belirterek geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şöyle ifade etmiştir: *“Açıkçası birisine anlatırken tam karşıdaki anlayabilecek kapasitede düzeyde birisi değilse anlayamayacağından dolayı tam ispat değil diyorum.”* Emine Öğretmen de verilen bir argümanı karmaşık bulduğu için geçerli bir ispat olarak kabul etmediğini şu sözleriyle dile getirmiştir: *“Yani açıkçası olmadığını düşünüyorum çünkü biraz yani bir öğretmen olarak bence biraz zor yani zorlayıcı değil de karmaşık olduğunu düşünüyorum yani varsayımın doğru olmadığını düşünüyorum.”*

5.2.2. Verilen Argümanların İkna Edici ve Açıklayıcı Bakımından Değerlendirilmesi

Ortaokul matematik öğretmenlerinden, verilen argümanları en ikna edici (en güçlü) ispattan en az ikna edici olana doğru bir sıralama yapmaları istenmiş, elde edilen bulgular Tablo 5.6., Tablo 5.7. ve Tablo 5.8.’de sunulmuştur. En ikna edici

argümana 4 puan, en az ikna edici argümana 1 puan verilerek her bir argümanın ortalama puanları parantez içinde gösterilmiştir.

Tablo 5. 4. Ortaokul matematik öğretmenlerinin soru 1 için verilen argümanları en ikna edici olandan en az ikna edici olana doğru sıralamaları

	En ikna edici	En az ikna edici
Argüman 1 (1,3)	1	4
Argüman 2 (1,4)	0	1
Argüman 3 (2,5)	2	0
Argüman 4 (3)	7	2

Soru 1 için 3 tane Öğretmenin verilen argümanları en ikna edici olandan en az ikna edici olana doğru sıralama yapmayıp, sadece en ikna edici olarak gördüğü argümanı belirtmekle yetindiği görülmüştür. Tablo 5.4. incelendiğinde Öğretmenlerin 4 üzerinden ortalama 3 puan ile argüman 4'ü en ikna edici olarak gördüğü ortalama 1,3 puan ile argüman 1'i ise en az ikna edici olarak gördüğü tespit edilmiştir. 4 üzerinden ortalama 2,5 puan ile argüman 3'ün argüman 4 e oldukça yakın olduğu, ortalama 1,4 puan ile argüman 2'nin düşük ve argüman 1 'e oldukça yakın olduğu elde edilmiştir. Argüman 4'ü 7 tane Öğretmen en ikna edici olarak görürken 2 tane öğretmenin ise en az ikna edici olarak gördüğü belirlenmiştir. 4 tane öğretmen argüman 1'i en az ikna edici olarak görürken 1 tane öğretmenin ise en ikna edici olarak gördüğü tespit edilmiştir. Argüman 3'ü 2 tane öğretmen en ikna edici olarak görürken hiçbir öğretmenin en az ikna edici olarak görmediği elde edilmiştir. Argüman 2'yi öğretmenlerden hiçbirinin en ikna edici olarak görmediği, 1 tane öğretmenin ise en az ikna edici olarak gördüğü tespit edilmiştir.

Tablo 5. 5. Ortaokul matematik öğretmenlerinin soru 2 için verilen argümanları en ikna edici olandan en az ikna edici olana doğru sıralamaları

	En ikna edici	En az ikna edici
Argüman 1 (1,3)	0	6
Argüman 2 (1,7)	0	1
Argüman 3 (2,8)	2	0
Argüman 4 (3,6)	8	1

Soru 2 için 1 tane öğretmen sıralama yapmayıp sadece en ikna edici olarak gördüğü argümanı belirtmekle yetinmiştir. Tablo 5.5. incelendiğinde öğretmenlerin 4 üzerinden ortalama 3,6 puan ile argüman 4'ü en ikna edici olarak gördükleri ortalama 1,3 puan ile argüman 1'i en az ikna edici olarak gördükleri elde edilen bulgulara tespit edilmiştir. 4 üzerinden ortalama 2,8 puan ile argüman 3'ün argüman 4'e yakın olduğu, 1,7 puan ile argüman 2'nin düşük ve argüman 1'e yakın olduğu belirlenmiştir. 8 tane öğretmenin argüman 4'ü en ikna edici olarak gördüğü, 1 tane öğretmenin ise en az ikna edici olarak gördüğü elde edilmiştir. Öğretmenlerden 6 tanesinin argüman 1'i en az ikna edici olarak gördüğü ve hiçbirinin en ikna edici olarak görmediği tespit edilmiştir. Öğretmenlerden 2 tanesinin argüman 3'ü en ikna edici olarak gördüğü, hiçbirinin ise en az ikna edici olarak görmediği elde edilen bulgulara tespit edilmiştir. Öğretmenlerden hiçbirinin argüman 2'yi en ikna edici olarak görmediği, fakat 1 tanesinin en az ikna edici olarak gördüğü tespit edilmiştir.

Tablo 5. 6. Ortaokul matematik öğretmenlerinin soru 3 için verilen argümanları en ikna edici olandan en az ikna edici olana doğru sıralamaları

	En ikna edici	En az ikna edici
Argüman 1 (1,3)	1	6
Argüman 2 (1,9)	1	1
Argüman 3 (2,5)	1	0
Argüman 4 (3)	6	1

Soru 3 için öğretmenlerden 1 tanesi verilen argümanları en ikna edici olandan en az ikna edici olana doğru olan sıralama sorusu için kararsız kalıp cevap vermek istememiş, 1 tane öğretmen ise sıralama yapmayıp, sadece en ikna edici olarak gördüğü argümanı belirtmekle yetinmiştir. Tablo 5.6. incelendiğinde 4 üzerinden ortalama 3 puan ile matematik öğretmenlerinin argüman 4'ü en ikna edici olarak gördüğü; 4 üzerinden ortalama 1,3 puan ile argüman 1'i en az ikna edici olarak gördüğü elde edilen bulgulara tespit edilmiştir. 4 üzerinden ortalama 2,5 puan ile argüman 3'ün argüman 4'e yakın olduğu, 1,9 puan ile argüman 2'nin düşük ve argüman 1'e yakın olduğu tespit edilmiştir. 6 tane öğretmenin argüman 4'ü en ikna edici olarak gördüğü, 1 tane öğretmenin ise en az ikna edici olarak gördüğü tespit edilmiştir. Öğretmenlerden 6 tanesinin argüman 1'i en az ikna edici olarak gördükleri, 1 tanesinin ise en ikna edici olarak gördüğü elde edilmiştir. Öğretmenlerden 1 tanesi argüman 3'ü en ikna edici olarak, hiçbiri en az ikna edici olarak görmemiştir. Argüman 2'yi 1 tane öğretmen en ikna edici olarak, 1 öğretmen ise en az ikna edici olarak görmüştür.

Ortaokul matematik öğretmenlerinden verilen argümanları en açıklayıcı olandan en az açıklayıcı olana doğru bir sıralama yapmaları istenmiş, elde edilen bulgular Tablo 5.7.'de sunulmuştur. Tablo 5.7. incelendiğinde Emine Öğretmen'in soru 3 için cevap vermek istemediği, bazı öğretmenlerin ise sıralama yapmak yerine en açıklayıcı gördüğü argümanı belirtmekle yetindiği görülmektedir. Öğretmenlerin soru 1 için argüman 3'ü, soru 2 ve soru 3 için ise argüman 4'ü daha açıklayıcı buldukları tespit edilmiştir. Öğretmenlerinin cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'ü genel olarak daha açıklayıcı gördükleri, buna karşın genelleseyici örnek içeren argüman 3'ü de açıklayıcı buldukları tespit edilmiştir.

Tablo 5. 7. Ortaokul matematik öğretmenlerinin verilen argümanları en açıklayıcı olandan en az açıklayıcı olana doğru sıralamaları

Katılımcıların Takma İsimleri	Soru 1	Soru 2	Soru 3
Ali	Argüman 1-3-4-2	Argüman 3-1-4-2	Argüman 2-3-4-1
Emine	Argüman 3	Argüman 2-3	-
Emir	Argüman 3	Argüman 4	Argüman 4-3-2-1
Ezgi	Argüman 3	Argüman 4	Argüman 2
Mahmut	Argüman 3	Argüman 3	Argüman 3
Mehmet	Argüman 4-3-2-1	Argüman 4-3-2-1	Argüman 4-3-2-1
Nisa	Argüman 1-2-3-4	Argüman 2-3-4-1	Argüman 4-2-3-1
Naci	Argüman 1-3-2-4	Argüman 3-1-2-4	Argüman 3-2-1-4
Sefa	Argüman 4-3-2-1	Argüman 4-3-2-1	Argüman 4-3-2-1
Zeki	Argüman 4-2-3-1	Argüman 4-3-2-1	Argüman 4-3-2-1

5.2.3. Geçerli Bir İspatın Özellikleri

Ortaokul matematik öğretmenlerine geçerli bir ispat hangi özelliklere sahip olmalıdır sorusu yöneltilmiş ve elde edilen bulgular Tablo 5.8.'da sunulmuştur.

Tablo 5.8. Ortaokul matematik öğretmenlerinin geçerli bir ispatın özellikleri hakkındaki görüşleri (f)

Kategori	Kodlar	f
Matematik öğretmenlerinin geçerli bir ispatın özellikleri hakkındaki görüşleri	Genel olması	5
	Cebirsel olarak ifade edilmesi	3
	Açıklayıcı-Anlaşılır olması	3
	İkna edici olması	3
	Aksine örnek bulunmaması	2
	Mantıklı olması	2
	İspat yöntemlerinin kullanılması	2

Tablo 5.8. incelendiğinde ortaokul matematik öğretmenlerinin geçerli bir ispatın özellikleri hakkındaki görüşleri doğrultusunda; “*genel olması, cebirsel olarak ifade edilmesi, açıklayıcı-anlaşılır olması, ikna edici olması, aksine örnek bulunmaması, mantıklı olması, ispat yöntemlerinin kullanılması*” kodları tespit edilmiştir.

Öğretmenlerden 5 tanesi bir ispatın geçerli olması için “*genel olması*” gerektiğini ifade etmişlerdir. Emir Öğretmen geçerli bir ispatın örnek üzerinden gidilerek değil de genel olması gerektiğini şu sözleriyle dile getirmiştir: “*Kesinlikle genelleyici olmalı sayı üzerinden gidilmemeli örnekleyerek gidilmemeli.*” Naci Öğretmen de bütün sayılar için genel olarak araştırılması gerektiğini şöyle ifade etmiştir: “*Evet bütün sayıları denememiz gerekiyor herhangi bir farklılık farklı bir şeyin elde çıkmaması gerekiyor genel olarak araştırılması gerekiyor.*”

Öğretmenlerden 3 tanesi geçerli bir ispat için “*cebirsel olarak ifade edilmesi*” gerektiğini belirtmişlerdir. Zeki Öğretmen tüm ihtimallerde geçerli olması için cebirsel olarak ifade edilmesi gerektiğini şöyle ifade etmiştir: “*Cebirsel ifade kullanılmalı yani tüm ihtimallerde geçerli olduğu görülebilmeli.*” Benzer şekilde Sefa Öğretmen de geçerli bir ispat için matematiksel dilin olması gerektiğini şu sözleriyle ifade etmiştir: “*Matematiksel dil bir kez kesinlikle kullanılmalı.*”

Öğretmenlerin 3 tanesi geçerli bir ispat için “*açıklayıcı-anlaşılır olması*” özelliğine sahip olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Örneğin Mahmut Öğretmen geçerli bir ispatın, karşıdaki insan için anlaşılır olması gerektiğini şu sözleriyle dile getirmiştir: “*Yani karşıya anlatırken karşıdaki kişiye anlatırken veya kişi onu okuduğunda kendisi incelediğinde ha bu böyleymiş diyebilmeli yani anlaşılır olmalı.*” Sefa Öğretmen de geçerli bir ispatın yeterince açıklanmış olması gerektiğini şu sözleriyle ifade etmiştir: “*Yani böyle yeterince açıklanmış olması lazım.*”

Öğretmenlerden 3 tanesinin geçerli bir ispat için “*ikna edici olması*” gerektiğini belirttikleri elde edilen bulgulara tespit edilmiştir. Nisa Öğretmen geçerli bir ispat için ikna edici olması gerektiğini şöyle ifade etmiştir: “*... İkna edici olmalı bence en geçerli bir ispat olması için.*” Ali Öğretmen de benzer şekilde geçerli bir

ispatın karşı tarafı tatmin etmesi gerektiğini şu sözleriyle dile getirmiştir: “*Yani bence geçerli bir ispat, ispat açıklanacak kitlenin tatmin olmasına bağlıdır.*”

Öğretmenlerden 2 tanesi geçerli bir ispatın “aksine örnek bulunmaması” özelliğine sahip olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Mehmet Öğretmen geçerli bir ispat için aksine bir örnek bulundurmayacağını belirterek şöyle ifade etmiştir: “... *Genelleme yapıldıktan sonra aksine bir örnek verilemeyecek şekilde bir genelleme yapılmışsa bu ispat olarak alınabilir.*” Benzer şekilde Emine Öğretmen de geçerli bir ispat için aksine bir örnek olmaması gerektiğini şu sözleriyle dile getirmiştir: “*Geçerli bir ispat bence aykırı bir örnek bulunmamalı yani her verilen örneğe doğru cevap verilmeli yani mesela bir aykırı durum görünmemesi gerekir...*”

Öğretmenlerden 2 tanesinin geçerli bir ispat için belirttiği bir diğer özellik “mantıklı olması” özelliğidir. Ezgi Öğretmen geçerli bir ispat için mantıksal olarak net olması gerektiğini şu sözleriyle dile getirmiştir: “... *Mantıksal olarak daha net olmalı bence.*” Benzer açıklamalarda bulunan Nisa öğretmen de görüşünü şöyle ifade etmiştir: “*Mantıken yani tam net olmalı...*”

Öğretmenlerden yine 2 tanesinin geçerli bir ispat için “ispat yöntemlerinin kullanılması” gerektiğini belirttikleri elde edilen bulgulara tespit edilmiştir. Örneğin Zeki Öğretmen geçerli bir ispat için ispat yöntemlerinin kullanılması gerektiğini şöyle ifade etmiştir: “*Yani geçerli bir ispatta ispat yöntemleri bir kere kullanılması gerekiyor.*” Mehmet Öğretmen de benzer şekilde geçerli bir ispat için ispat yöntemlerinden birinin kullanılması gerektiğini şu sözleriyle dile getirmiştir: “*Yani ispat yöntemlerinden herhangi biri kullanılabilir...*”

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde son olarak ortaokul matematik öğretmenlerine geçerli bir ispatın cebirsel olarak ifade edilmesinin zorunlu olup olmadığı sorulmuştur. Öğretmenlerin %70’i geçerli bir ispat için cebirsel olarak ifade edilmesinin zorunlu olmadığını, %30’u ise cebirsel olarak ifade edilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Aslında görüşmelerin başında ispat için cebirsel olarak ifade edilmesini önemli gören öğretmen sayısı daha fazla iken, görüşme süresince farklı

durumlar ile karşılaşan öğretmenler, fikirlerini değiştirip cebirsel olarak ifade edilmesinin zorunlu olmadığını belirttikleri tespit edilmiştir.



6. TARTIŞMA

Bu bölümde, ortaokul matematik öğretmenlerinin ispat süreçleri, verilen farklı argümanları değerlendirmeleri ve genelleiyici örnek üzerine anlayışlarının incelenmesi amacıyla, araştırmadan elde edilen bulgulara ait genel sonuçlar sunulmuş ve bulgulara ait tartışmalara, ilgili literatür çerçevesinde yer verilmiştir.

6.1. Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin İspat Becerileri

Yarı yapılandırılmış görüşmelerin ilk bölümünde ortaokul matematik öğretmenlerine genelleiyici örnek içeren 3 adet soru yöneltilmiş, öğretmenlerin çözümleri incelendiğinde *örnek verme, sözel olarak ifade etme, örnekle beraber açıklamalarda bulunma, cebirsel olarak ifade etme, genelleiyici örnek kullanma* eylemlerinde bulundukları görülmüştür.

Öğretmenlerin çözümleri incelendiğinde daha çok örneklerden hareketle çözüm yapmaya çalıştıkları sonucu ortaya çıkmıştır. Örnekler bazen varsayımların doğruluğunu test etmek için, bazen de varsayımları ispatlamak için kullanılmıştır. Öğretmenlerin %40'ının örnek vererek ispat yaptığını düşündükleri görülmüştür. Bu durum öğretmenlerin ispat algılarının sınırlı olduğunu, örnek temelli bir ispat düşüncesi ile hareket ettiklerini ortaya koymuştur. İlgili literatür incelendiğinde elde edilen bulgulara benzer bulgular olduğu görülmektedir. Örneğin, Knuth, Zaslavsky ve Ellis'in (2019) yaptıkları çalışmada katılımcıların örneklerden yola çıkarak genel ifadelere ulaşma konusunda problem yaşadıklarını belirtmişlerdir. Benzer şekilde Doğan (2019) yaptığı çalışmada öğretmenlerin çoğunlukla örneklere dayanan ispatlar ürettiklerini tespit etmiştir. Aynı şekilde Bills ve Rowland (1999) da yaptıkları çalışmada katılımcıların örneklerden yola çıkarak ampirik (örnek temelli) genellemelere ulaşmaya çalıştıklarını belirtmişlerdir.

Öğretmenlerin çözümleri incelendiğinde varsayımları ispatlamak için sözel olarak ifade etmeyi sıklıkla kullandıkları görülmüştür. Öğretmenlerin genel ifadelere ulaşmada zorluk yaşadıkları, görüşlerini ifade ederken ve çözümlerini nasıl

anlatacakları konusunda zorlandıkları tespit edilmiştir. Öğretmenlerin %50'sinin sözel olarak ifade ettikleri çözümlerini geçerli bir ispat olarak kabul ettiği görülmüştür. Bu durum öğretmenlerin geçerli bir ispat oluşturmakta zorlandıklarını ve ispat ile ilgili düşüncelerinin sınırlı olduğunu ortaya koymuştur. Pekşen Sağır (2013) aynı şekilde çalışmasında matematik öğretmen adaylarının ispat sorularını sözel olarak cevaplamaya çalıştıklarını tespit etmiştir. Bu bulgu ortaokul matematik öğretmenlerinin genelleyici örnekler kullanılarak ispat becerilerinin ölçüldüğü bu araştırmada, beklenmedik bir bulgu olarak ortaya çıkmıştır. Örnek ve formal ispat ilişkisi üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmen adaylarının çoğunlukla örnek sayılar veya cebirsel ifadeler kullandıkları görülmektedir. Örneğin, Kempen ve Biehler (2016), matematik öğretmen adaylarının verilen soruyu ispatlamak için cebirsel ifadeler kullanarak formal ispat yapmaya çalıştıklarını belirtmişlerdir. Benzer şekilde ispat için gerekli genel ifadelere ulaşmada örneklerin etkisini inceleyen Bills ve Rowland (1999), öğrencilerin örneklerden yola çıkarak ispat üretmeye çalıştıklarını tespit etmişlerdir. Doğan (2019) da çalışmasında öğretmenlerin örneklere dayalı ispatlar, genelleyici örnek kullanarak yapılan ispatlar ve cebirsel ifadeler kullanarak yapılan ispatlar oluşturduklarını belirtmiştir.

Öğretmenlerin çözümleri incelendiğinde genelleyici örnek kullanmayı ve cebirsel olarak ifade etmeyi pek fazla tercih etmedikleri görülmüştür. Öğretmenlerden dört tanesi genelleyici örnek kullanarak çözüm yapmış, bunlardan ikisinin çözümlerini geçerli bir ispat olarak kabul ettiği görülürken diğer iki öğretmenin ise kabul etmediği tespit edilmiştir. Araştırmaya katılan öğretmenlerin tamamı ispat denilince cebirsel olarak ifade etmeyi düşündükleri, fakat ispata nasıl başlayacakları, hangi aşamaları izleyerek ispata tamamlayacakları, genel ifadeler ulaşmada zorlandıkları görülmüştür. Öğretmenlerin çoğunluğunun örnek temelli çözümlerinin farkında oldukları ve farklı bir çözüm yapamadıkları için bunu tercih ettikleri tespit edilmiştir. Öğretmenlerden hiçbirinin çözümlerini görsel olarak ifade etmedikleri, ispat denilince daha çok cebirsel olarak ifade etmeyi düşündükleri görülmüştür. Öğretmenlerin bir soruda doğru bir akıl yürütme ve gerekçelendirmede bulunurken bir başka soruda örnek temelli bir çözüm yaptıkları ve bu çözümünü de

geçerli bir ispat olarak gördükleri tespit edilmiştir. Sonuç olarak öğretmenlerin varsayımları ispatlarken zorlandıkları ve ispat becerilerinin düşük olduğu görülmüştür. İlgili literatür incelendiğinde de bu araştırmadaki bulgulara benzer olarak, argümanlar oluşturulurken cebir kullanımının çok az olduğu görülmektedir. Örneğin, Knuth, Choppin ve Beida (2009), katılımcılardan çok azının ispat sürecinde cebir kullandığını belirtmiştir. Doğan (2019) çalışmasında öğretmenlerin çok azının cebirsel olarak ispat yapmaya çalıştıklarını tespit etmiştir. Benzer olarak, Pekşen Sağır (2013) araştırmasında matematik öğretmen adaylarının çözümlerini cebirsel olarak ifade edemediklerini belirtmiştir. Healy ve Hoyles (2000) çalışmalarında katılımcıların çok azının oluşturdukları argümanları cebirsel olarak ifade ettiklerini belirtmişlerdir.

6.2. Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Argümanları Değerlendirirken Kullandıkları Kriterler

Ortaokul matematik öğretmenlerine yarı yapılandırılmış görüşmelerin ikinci bölümünde, ilk bölümde sorulan sorulara ilişkin farklı argümanlar gösterilmiş ve bu argümanları değerlendirmeleri istenmiştir. Öncelikle verilen argümanlardan hangilerinin geçerli bir ispat olup olmadığı sorulmuş, geçerli bir ispat olup olmadığını nedenleriyle açıklamaları istenmiştir. Öğretmenlerin görüşleri doğrultusunda bu nedenlerin *mantıklı bulma*, *genel olma*, *örnek verme*, *önceki bilgilerden yararlanma*, *doğru bulma*, *cebirsel ifadeler kullanma*, *açıklayıcı olma*, *ikna edici olma*, *kullanışlı olma*, *somutlaştırılmış olma*, *karmaşık bulma* olduğu belirlenmiştir.

Verilen 4 farklı argüman arasından örnek temelli oluşturulan argüman 1'i geçerli bir ispat olarak kabul eden öğretmenlerin sayısının en az olduğu, cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'ü geçerli bir ispat olarak gören öğretmenlerin sayısının en fazla olduğu görülmüştür. Sadece soru 3 için verilen argüman 4'ü öğretmenlerden birisinin karmaşık bulup anlamadığı için geçerli bir ispat olarak görmediği tespit edilmiştir. İspat denilince öğretmenlerin cebirsel olarak yazımı düşündüklerini, bazı öğretmenlerin ise ispattan bahsedilebilmesi için argümanın cebirsel olarak ifade

edilmesi gerektiğini belirttikleri görülmüştür. Bu durum öğretmenlerin ispat ile üniversite yıllarında karşılaşmış olduğu ve üniversitede ispatın aksiyomatik yapısına odaklanıldığı için ortaya çıktığı söylenebilir. Daha sonra, sorulara ilişkin farklı argümanları görünce fikir değiştiren matematik öğretmenlerinin argümanların cebirsel olarak ifade edilmesinin şart olmadığını belirttikleri tespit edilmiştir. Görüşmenin son bölümünde ise öğretmenlerin %30'unun geçerli bir ispat için argümanın cebirsel olarak ifade edilmesi gerektiğini belirtmişlerdir.

Örnek temelli oluşturulan argüman 1'i geçerli bir ispat olarak gören öğretmen sayısının en az olması ve cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'ü geçerli bir ispat olarak gören öğretmen sayısının en fazla olması, öğretmenlerin verilen argümanları değerlendirirken kısmen başarılı oldukları sonucunu ortaya çıkarmıştır. Fakat öğretmenlerin %40 gibi yüksek bir oranda örnek temelli oluşturulan argüman 1'i geçerli bir ispat olarak gördükleri de elde edilen bulgulara görülmüştür. Bu çalışma ile benzer sonuçlar elde eden Kempen ve Biehler (2019) yaptıkları çalışmada cebirsel olarak ifade edilen ispatın en yüksek oranda geçerli ispat sayıldığını, fakat birkaç örnek ile yapılan ispatın ve yanlış cebirsel işlem içeren ispatın oranının matematik öğretmen adayları için yüksek olduğunu belirtmişlerdir. Ko ve Hagen (2013) de öğretmen adaylarının cebirsel olarak ifade edilen argümanları geçerli bir ispat olarak görmelerinin oranının yüksek, örnek temelli argümanları geçerli bir ispat olarak görmelerinin oranının ise düşük olduğunu belirtmişlerdir.

Öğretmenlerin görsel olarak ifade edilmiş genelleyici örnek olan argüman 2'yi verilen 3 soruda da geçerli bir ispat olarak kabul etme oranının %50'yi geçmediği görülmüştür. Bu durumun nedenleri araştırıldığında, öğretmenlerin görüşleri doğrultusunda, daha önce görsel olarak ifade edilen argümanlarla karşılaşmadıkları, sayı ve cebirsel ifade olmadan sadece görsel olarak ifade edilmesinin ispat için yeterli olmadığı, görsel olarak ifade edilen argümanın genel olduğunu düşünmedikleri, anlamakta zorlandıkları ve geçerli bir ispat olup olmadığı hakkında kararsızlık yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğretmenlerin sayılar ile oluşturulmuş genelleyici örnek olan argüman 3'ü geçerli bir ispat olarak kabul etme oranının cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'e oldukça yakın olduğu tespit edilmiştir. Bu durum öğretmenlerin genelleyici örnekleri, örnek temelli argümanlardan ayırdığını

ve geçerli bir ispat için yeterli olduğunu düşündüklerini ortaya çıkarmıştır. Öğretmenlerin çoğunluğunun genelleyici örnekleri geçerli bir ispat olarak kabul ettikleri görülmüştür. İlgili literatür incelendiğinde de benzer bulguların elde edildiği görülmektedir. Örneğin, Lovin, Cavey ve Whitenack (2004) yaptıkları çalışmada katılımcılardan genelleyici örnekleri geçerli bir ispat olarak görenlerin daha çok olduğunu tespit etmişlerdir. Ko ve Hagen (2013) aynı şekilde katılımcıların genelleyici örneği geçerli bir ispat olarak düşündüklerini belirtmişlerdir. Bu çalışmadaki bulgulardan farklı bulgular elde eden İşler (2015) ise yaptığı çalışmasında öğretmenlerin görsel olarak ifade edilen argümanları genel olarak kabul edebileceklerini, fakat sayısal olarak ifade edilen genelleyici örnekleri kabul etmediklerini tespit etmiştir. Bu farklılığın nedeni İşler'in görsel olarak ifade edilen argümanların sunuşunun farklı olmasından kaynaklanmaktadır.

Araştırmaya katılan öğretmenlerin tamamı verilen argümanları değerlendirirken mantıklı bulma ve genel olma kriterlerini dikkate aldıkları görülmüştür. Öğretmenlerin görüşleri doğrultusunda argümanın geçerli bir ispat olabilmesi için her durumda ve her sayı için ispatlaması gerektiğini ortaya çıkarmıştır. Bu durum çalışma adına umut verici bir sonuçtur. Bu sonuç matematik öğretmenlerinin argümanın geçerli bir ispat için genel olması gerektiğinin farkında olduğunu göstermiştir. Yine aynı şekilde öğretmenlerin çoğunluğunun dikkate aldığı kriterlere baktığımızda örnek verme, önceki bilgilerden yararlanma, doğru bulma, cebirsel ifadeler kullanma ve açıklayıcı olma olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin çok azının ikna edici olma kriterini dikkate alarak değerlendirme yaptıkları tespit edilmiştir. Öğretmenlerin geçerli bir ispat için argümanın ikna edici olması gerektiğini göz ardı ettikleri görülmüştür. İlgili literatür incelendiğinde benzer bulguların elde edildiği görülmektedir. Örneğin, Kempen ve Biehler (2019) yaptıkları çalışmada matematik öğretmen adaylarının verilen ispat çeşitlerini doğrulama, açıklama ve geçerlilik gibi farklı yönlerden değerlendirdiklerini belirtmişlerdir. Doğan (2020) da yaptığı çalışmasında matematik öğretmen adaylarının argümanları değerlendirirken açıklayıcı, genel olma, doğruluk, temsil biçimi, tartışma biçimi ve argümanın yapısını dikkate aldıklarını tespit etmiştir. Benzer şekilde Yopp ve Ely (2016) yaptıkları çalışmada argümanları değerlendirirken geçerli ispat olabilmeleri

için argümanın genel olması, kabul edilebilir olması (ikna edici) ve haklı nedenler içermesi (mantıklı) gerektiğini belirtmişlerdir.

Öğretmenlerden en ikna edici ispattan (en güçlü ispat) en az ikna edici olana doğru bir sıralama yapmaları istenmiş, soru 1, soru 2 ve soru 3 için de en ikna edici olarak argüman 4'ü gördükleri, en az ikna edici olarak argüman 1'i gördükleri tespit edilmiştir. Bu durumun nedeni ispatın doğasıyla ve öğretmenlerin üniversite yıllarında gördükleri ispat ile ilgili dersler olduğu düşünülmektedir. Argüman 1'in en az ikna edici olarak görülmesi öğretmenlerin birkaç örnek ile ispat olamayacağının farkında olması adına olumlu bir sonuçtur. Kempen ve Biehler (2019) yaptıkları çalışmada matematik öğretmen adaylarının cebrisel olarak ifade edilen formal ispatı en ikna edici olarak gördüklerini tespit etmiştir. Doğan (2020) yaptığı çalışmasında matematik öğretmen adaylarının cebirsel gösterim içeren formal ispatları daha ikna edici olarak gördüklerini belirtmiştir. Araştırmamızda elde edilen sonuçlar yapılan çalışmalarla benzerlik göstermektedir. Araştırmaya katılan öğretmenlerin hiçbiri sayılarla ifade edilen genelleyici örnek olan argüman 3 'ü en az ikna edici olarak görmemiştir. Bu sonuç genelleyici örneğin ispat ile ilgili çalışmalara katkı sağlayacağını desteklemektedir. Sayılarla oluşturulan genelleyici örnek olan argüman 3'ün ikna edici olarak görülme puanı cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'e oldukça yakın olması ne kadar olumlu bir sonuç olsa da, görsel olarak oluşturulan genelleyici örnek olan argüman 2'nin puanının düşük olması da o kadar olumsuz bir sonuç olarak görülmüştür. Bu durum, matematik öğretmenlerinin görsel olarak oluşturulan ispatlar ile daha önce hiç karşılaşmadıklarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Kempen (2018) yaptığı çalışmada matematik öğretmen adaylarının geometrik değişkenlerle yani görsel olarak oluşturulan argümanları en az ikna edici olarak gördüklerini belirtmiştir. Araştırmamızda elde edilen sonuç ile Kempen'in (2018) yaptığı çalışma benzerlik göstermektedir. Doğan (2020) yaptığı çalışmasında matematik öğretmen adaylarının görsel olarak ifade edilen genelleyici örnekleri, sayısal olarak ifade edilen genelleyici örneklerden daha ikna edici olarak gördüklerini tespit etmiştir. Bu farklılığın nedeni Doğan'ın görsel argümanları sunuşunun farklı olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Öğretmenlerden verilen argümanları en açıklayıcı olandan en az açıklayıcı olana doğru bir sıralama yapmaları istenmiş, soru 1 için sayılarla oluşturulan genelleyici örnek olan argüman 3'ün en açıklayıcı olarak görüldüğü, soru 2 ve soru 3 için ise en açıklayıcı gördükleri cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'ün olduğu tespit edilmiştir. Araştırmamız için bu beklenen bir sonuç değildir. Reid ve Vargas'ın (2018) da belirttikleri gibi, genelleyici örnek ve formal ispat arasındaki önemli bir farkın genelleyici örneğin açıklayıcı olabileceği görüşüne benzer bir bulgu ortaya çıkmamıştır. Bu sonucun ispatın aksiyomatik yapısı ile ilgili olduğu düşünülmektedir. Öğretmenlerin en açıklayıcı olarak gördükleri argüman 4 olmasına rağmen, genelleyici örneklerden oluşan argüman 3 ve argüman 2'nin de açıklayıcı olarak görülmesi genelleyici örneğin ispat ile ilgili etkinliklerle beraber düşünülmesi adına olumlu bir sonuç olduğu düşünülmektedir. Kempen (2018) matematik öğretmen adaylarının cebirsel olarak ifade edilen formal ispatın daha açıklayıcı olarak görüldüğünü tespit etmiştir. Rowland'ın (1998) genelleyici örneklerin açıklayıcı olduğu yönüne dikkat çektiği görülmüştür. Leron ve Zaslavsky de (2013) genelleyici örneklerin açıklayıcı olduğunu ve ispat konusunda öğretmen ve öğrencilere kolaylıklar sağlayabileceğini belirtmişlerdir.

Öğretmenlere geçerli bir ispat hangi özelliklere sahip olmalıdır sorusu yöneltilmiş, verdikleri cevaplardan; genel olması, cebirsel olarak ifade edilmesi, açıklayıcı-anlaşılır olması, ikna edici olması, aksine örnek bulunmaması, mantıklı olması, ispat yöntemlerinin kullanılması özellikleri tespit edilmiştir. Öğretmenlerin belirttikleri özellikleri incelediğimizde ispat adına olumlu bir gelişme olduğu görülmektedir. Öğretmenlerin geçerli bir ispat için gerekli olan koşulların farkında olduğu görülmüştür. İlgili literatür incelendiğinde benzer bulguların olduğu görülmektedir. Örneğin, Uygan, Tanışlı ve Y. Köse'nin (2014) matematik öğretmen adayları ile yaptığı çalışmalarında ispatın özelliklerine yönelik inançları genellenebilirlik, tümdengelimli, anlaşılabilirlik ve doğruluğun herkesçe kabul edilmesi olarak belirtmişlerdir.

6.3. Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin İspat Becerileri ve Argümanları Değerlendirirken Kullandıkları Kriterler Arasındaki İlişki

Yarı yapılandırılmış görüşmelerin birinci bölümünde ortaokul matematik öğretmenlerinin verilen sorulara ilişkin çözüm sürecinde ispat yaparken daha çok örnek temelli düşünceler ile çözüm yaptıkları görülmüştür. Görüşmelerin ikinci bölümünde ise verilen argümanlar arasından örnek temelli oluşturulan argüman 1'i geçerli bir ispat olarak gören öğretmen sayısının en az olduğu tespit edilmiştir. Bu durum öğretmenlerin aslında örneklerin sınırlılığının farkında olduğu, fakat geçerli bir ispat oluşturmakta zorlandıklarını ortaya koymuştur. Öğretmenlerin verilen argümanları değerlendirirken genelleyici örnek olan argüman 3'ün geçerli bir ispat olarak kabul edilme oranının cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'e oldukça yakın çıktığı görülmüştür. Bu durum öğretmenlerin ilk bölümde örnek temelli çözüm yapmalarına karşın, genelleyici örneklerin genelliği temsil ettiğini ve diğer örneklerden farklı olduğu sonucunu ortaya çıkarmıştır.

Araştırmaya katılan öğretmenlerin tamamının verilen argümanları değerlendirirken genel olma kriterini kullandığı görülmektedir. Öğretmenlerin basit birkaç örnek ile oluşturulan argüman 1'i genel olmadığı için geçerli bir ispat olarak kabul etmedikleri görülmüş, buna karşın genel olduğu için genelleyici örnek olan argüman 3'ü geçerli bir ispat olarak kabul ettikleri tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmenlerin örnek verme kriterini kullandıkları durumlar incelendiğinde, argüman 1'in basit birkaç örnek ile oluşturulduğu için geçerli bir ispat olarak kabul edilme oranının az olduğu, genelleyici örnek olan argüman 3'ün örnek vermekten fazlası olduğunu ifade ettikleri görülmüştür.

Öğretmenlerin görüşmelerin birinci bölümünde daha çok örnek temelli çözümler ürettikleri ve yaklaşık yarısının (%40) örnek temelli çözümlerini geçerli bir ispat olarak gördükleri tespit edilmiştir. Örneklerden genellemelere ulaşamayan öğretmenlerin görüşmelerin ikinci bölümünde örnek temelli argümanı ve genelleyici örneği doğru bir şekilde değerlendirerek, genelleyici örneği diğer örneklerden ayırdıkları ve genelliği temsil ettiğini belirttikleri görülmüştür. Genelleyici örnekleri geçerli bir ispat olarak gören öğretmenlerin oranının yüksek ve cebirsel olarak ifade

edilen argümana oldukça yakın çıktığı tespit edilmiştir. Fakat görüşmelerin ikinci bölümünde de örnek temelli oluşturulan argüman 1'i öğretmenlerin %40'ının geçerli bir ispat olarak kabul ettikleri görülmüştür. Bu durum örnek temelli düşünce ile hareket eden öğretmenlerin sayısının az olmadığı sonucunu ortaya koymuştur.

İlgili literatür incelendiğinde, katılımcıların argümanlar üretirken geçerli bir ispat oluşturmakta zorlandıkları görülmektedir (Doğan, 2019; Healy ve Hoyles, 2000; Knuth, Choppin ve Beida, 2009). Yine ilgili literatür incelendiğinde genel olarak katılımcıların örnek temelli argümanların sınırlılıklarının farkında olduğu görülmektedir (Kempen ve Biehler, 2019; Ko ve Hagen, 2013; Doğan, 2020). Bu çalışma, öğretmenlerin görüşmelerin ilk bölümünde daha çok örnek temelli argümanlar üretmelerine karşın görüşmelerin ikinci bölümünde genelleyici örneklerin geçerli bir ispat olarak kabul edilme oranının yüksek ve cebirsel olarak ifade edilen argümana çok yakın olması ile diğer çalışmalardan ayrılmaktadır.

7. SONUÇ ve ÖNERİLER

Öğrencilerin akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat ile ilgili konularda başarılı olmaları için öğretmenlerinin bu konularda yeterli seviyede olmaları ve öğrencilerine yardımcı olmaları gerekmektedir. Bu çalışmada da ortaokul matematik öğretmenlerinin ispat süreçleri, verilen farklı argümanları değerlendirmeleri ve genelleiyici örnek üzerine anlayışları incelenmiştir.

Öğretmenlerin verilen soruları ispatlamakta zorlandıkları, ispata nasıl başlayacakları, hangi aşamaları takip ederek ispatı tamamlayacakları, genel ifadelere nasıl ulaşacakları, gerekçelendirmelerini nasıl ifade edecekleri konularında problem yaşadıkları sonucu ortaya çıkmıştır. Öğretmenlerin argümanlar üretirken cebirsel olarak yazımı düşündükleri, fakat bu konuda başarılı olamadıkları görülmüştür. Öğretmenlerin çözümleri incelendiğinde daha çok örnek temelli argümanlar ürettikleri ve %40'ının oluşturduğu örnek temelli argümanlarını geçerli bir ispat olarak gördükleri sonucuna ulaşılmıştır. Bu noktada genelleiyici örnek, bir örnekten yola çıkarak bir ispatın neden doğru olduğunu açıklaması bakımından, ispatı anlamak ve bir ispat oluşturmak için öğretmen ve öğrencilere yardımcı olacağı düşünülmektedir.

Öğretmenlerin verilen argümanları değerlendirirken nispeten başarılı oldukları sonucu ortaya çıkmıştır. Cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'ü geçerli bir ispat olarak gören öğretmenlerin sayısının en fazla olduğu, örnek temelli argüman 1'i ise geçerli bir ispat olarak gören matematik öğretmenlerinin sayısının en az olduğu sonucu ortaya çıkmıştır. Bu durumun öğretmenlerin üniversite yıllarındaki ispat ile ilgili algılarından dolayı ortaya çıktığı görülmüştür. Fakat öğretmenlerin %40 gibi yüksek bir oranının örnek temelli argüman 1'i geçerli bir ispat olarak görmeleri, akıl yürütme, ispat ve gerekçelendirme konularında yetersiz olduklarını ortaya çıkarmıştır. Öğretmenlerin sayısal olarak ifade edilen genelleiyici örnekleri, örnek temelli argümanlardan ayırdığı, geçerli bir ispat olarak görme oranının cebirsel olarak ifade edilen argümana yakın çıktığı sonucu elde edilmiştir. Bu sonuç ispat etkinliklerinin sadece cebirsel olarak düşünülmemesi gerektiğini destekler

niteliktedir. Araştırmanın başında ispat için cebirsel olarak ifade edilmesi gerektiğini belirten öğretmenlerin, genelleyici örnek ile oluşturulan argümanları görünce fikir değiştirerek ispat için doğru bir gerekçelendirme ve genelleme olmasını düşündürmeye yönlendirmiştir. Öğretmenlerin görsel olarak ifade edilen genelleyici örnek olan argüman 2'yi tanımakta ve anlamakta zorlandıkları ve geçerli bir ispat olarak düşünenlerin sayısının az olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu duruma öğretmenlerin, daha önce hiç görsel olarak ifade edilen bir ispat ile karşılaşmadıkları, üniversite yıllarındaki ispat ile ilgili algılarının neden olduğu görülmüştür.

Ortaokul matematik öğretmenlerinin verilen argümanları değerlendirirken kullandıkları kriterlerin; *mantıklı bulma, genel olma, örnek verme, önceki bilgilerden yararlanma, doğru bulma, cebirsel ifadeler kullanma, açıklayıcı olma, ikna edici olma, kullanışlı olma, somutlaştırılmış olma, karmaşık bulma* olduğu görülmüştür. Mantıklı bulma ve genel olma kriterlerini araştırmaya katılan bütün öğretmenlerin kullanması araştırma adına umut verici bir sonuçtur. İkna edici olması kriterini ise az sayıda matematik öğretmeni kullanmış, bu da olumsuz bir sonuç olarak ortaya çıkmıştır. Öğretmenlerin geçerli bir ispat için gerekli olan koşulları bilerek, öğrencilerini akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat ile ilgili etkinliklerde desteklemesinin önemli olduğu düşünülmektedir.

Öğretmenlerin verilen argümanlar arasından cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'ü en ikna edici olarak gördükleri, örnek temelli argüman 1'i ise en az ikna edici olarak gördükleri sonucu ortaya çıkmıştır. Bu durum beklenen bir sonuç olarak karşımıza çıkmaktadır. Öğretmenlerin sayısal olarak ifade edilen genelleyici örnek olan argüman 3'ü ikna edici olarak buldukları, oran olarak da cebirsel ifade edilen argüman 4'e oldukça yakın çıkması araştırma adına umut verici bir sonuçtur. Genelleyici örneklerin açıklayıcı gücü ve örnekten yola çıkarak örnekten bağımsız genelliği aktarabildiği düşünüldüğünde, her yaş grubundaki öğrencilere genelleyici örnek ile akıl yürütme, ispat ve gerekçelendirme konularında destek sağlanabileceği düşünülmektedir. Görsel olarak ifade edilen genelleyici örnek olan argüman 2'nin geçerli bir ispat olarak gören öğretmen sayısının oranının düşük çıktığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmenlerin cebirsel olarak ifade edilen argüman 4'ü en açıklayıcı

olarak gördükleri sonucu elde edilmiştir. Bu sonuç araştırma adına beklenen bir sonuç değildir. Bu duruma öğretmenlerin ispat ile ilgili algılarının neden olduğu söylenebilir. Buna karşın öğretmenlerin genelleyici örnekleri de açıklayıcı olarak gördükleri, oran olarak da cebirsel ifade edilen argüman 4'e yakın olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Ortaokul matematik öğretmenlerinin geçerli bir ispat için belirttikleri özellikler incelendiğinde, geçerli bir ispat için gerekli olan koşulların farkında oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmenler genelleyici örnekleri diğer örneklerden ayırt etmiş, mantıklı ve genellenebilir olduğunu belirterek geçerli bir ispat olduğunu düşündüklerini ifade etmişlerdir. Görüşmenin ikinci bölümünde verilen argümanlar değerlendirilirken kısmen başarılı sonuçlar elde edilmiş, genelleyici örneklerin ikna edici ve açıklayıcı olarak değerlendirildiği sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmenlerin yaklaşık yarısının (%40) örnek temelli bir argümanı geçerli bir ispat olarak kabul etmesi, örnek temelli bir düşünceye sahip olan öğretmenlerin sayısının az olmadığı sonucunu ortaya çıkarmıştır. Öğretmenlerin görüşmelerin ilk bölümünde daha çok örnek temelli çözümler ürettikleri, verilen soruları ispatlamakta problem yaşadıkları, genellemelere ulaşamadıkları, yani ispat becerilerinin düşük olduğu sonucu ortaya çıkmıştır. Buna karşın görüşmelerin ikinci bölümünde öğretmenlerin argümanları değerlendirirken, örneklerin sınırlılığının farkında olduğu, genelliği aradıklarını ve başarılı sonuçların elde edildiği görülmüştür. Görüşmelerin ilk bölümünde örneklerden hareketle genellemelere ulaşamayan öğretmenlerin, görüşmelerin ikinci bölümünde genelleyici örnekleri doğru bir şekilde değerlendirdikleri ve genelliği temsil ettiğini belirttikleri sonucu ortaya çıkmıştır. Genelleyici örneklerin sınıflarda daha çok kullanılmasıyla, her yaş grubundaki öğrenciler ve özellikle ortaokul seviyesindeki öğrenciler için akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat konularında başarılı sonuçlar alınacağı söylenebilir. Akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat konularında öğrencilerini desteklemek için öğretmenlerin bu konularda geliştirilmesi gerektiği söylenebilir.

Bu çalışmada genelleyici örneklerin ispat ile ilgili etkinliklerde etkisini araştırmak için ortaokul matematik öğretmenlerinin görüşleri alınmıştır. Elde edilen

sonuçlara bağlı olarak sonraki çalışmalar için araştırmacılara aşağıdaki oneriler sunulmuştur:

- Ortaokul ğrencilerinin örneklerden hareketle genellemelere nasıl ulaşılacağı konusunda bir araştırma yapılabilir.
- Öğretmenlerin ğrencilerin oluşturduğu farklı argümanları değerlendireceği bir araştırma yapılabilir.
- Öğretmenlerin ispat oluştururken hangi amaçlarla ve ne sıklıkla örneklerle başvurduğunu inceleyen bir araştırma yapılabilir.
- Ortaokul ve lise matematik ğretmenlerinin görsel olarak ifade edilen ispatları keşfedecekleri, tartışacakları ve değerlendirecekleri bir araştırma yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.
- Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof: History and epistemology. In P. Boero (Ed.), (pp. 27-42). *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Sense Publishers. Rotterdam, The Netherlands.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.
- Barak, B. (2018). *Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinin İncelenmesi* (Doktora Tezi). Yök.tez.
- Bieda, K. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351–382.
- Bell, A. W. (1976). “A Study of Pupils’ Proof-Explanations in Mathematical Situations”. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23 – 40.
- Bills, L., & Rowland, T. (1999). Examples, generalisation and proof. *Research in Mathematics Education*, 1(1), 103–116.
- Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis*. Sage.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students’ justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359-387.

- Çontay, E. G. ve Duatepe-Paksu, A. (2019). Ortaokul Matematik Öğretmeni Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşleri. *Sınırsız Eğitim ve Araştırma Dergisi*, 4 (1), 64-89. DOI: 10.29250/sead.485430
- Dede, Y. (2015). Matematikte İspat: Önemi, Çeşitleri ve Tarihsel Gelişimi (ss.15-34). İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Eds.) Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar. Ankara: Pegem Akademi.
- Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(2), 47-71.
- De Villiers M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.
- Doğan, M.F. (2020). Pre-service teachers' criteria for evaluating mathematical arguments that include generic examples. *International Journal of Contemporary Educational Research*, 7(1), 267-279. DOI: <https://doi.org/10.33200/ijcer.721136>
- Doğan, M. F. (2019). Ortaokul Öğretmenlerinin İspatla İlişkili Etkinliklere Katılımlarının Doğasının İncelenmesi, *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 48(1), 100-130.
- Doğan, M. F., Williams-Pierce, C. (2021). The role of generic examples in teachers' proving activities. *Educational Studies in Mathematics*, 106, 133-150
- Güler, G., Özdemir, E., & Dikici, R (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5- 23.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.
- Harel, G. (2014). Deductive reasoning in mathematics education. İçinde S.Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (143-147). London: Springer.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: Focus on proving. *ZDM-International Journal of Mathematics Education*, 40(3), 487-500. doi: <https://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0104-1>

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on learning and teaching proof, In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics* (2nd Ed.). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, III* (pp. 234-283). Washington DC: Mathematical Association of America.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399. doi: <https://dx.doi.org/10.1007/BF01273372>

Isler, I. (2015). *An Investigation of Elementary Teachers' Proving Eyes and Ears*. Unpublished Doctoral dissertation. The University of Wisconsin-Madison, USA.

Kempen, L., Biehler, R., (2019). Pre-Service Teachers' Benefits from an Inquiry-Based Transition-to-Proof Course with a Focus on Generic Proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5, 27-55

Kempen, L. and Biehler, R., (2016). Pre-service teachers' perceptions of generic proofs in elementary number theory. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.135-141. hal-01281024

Kempen, L., (2018). How do pre-service teachers rate the conviction, verification and explanatory power of different kinds of proofs? Springer International Publishing, 2018. A. J. Stylianides and G. Harel (eds.) *Advances in mathematics Education Research on Proof and Proving ICME-13 Monographs*.

Knuth, E. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, 95 (7), 486-491.

Knuth, E., Zaslavsky, O. and Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *Journal of Mathematical Behavior* 53, 256–262

Ko, Y. Y., & Hagen, C. J. (2013). Conviction and validity: Middle school mathematics teachers' proof evaluations. In M. Martinez, & A. Castro Superfine (Eds.). *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 801-804). Chicago, IL.

Leron, U., & Zaslavsky, O. (2013). Generic proving: Reflections on scope and method. *For the Learning of Mathematics*, 33(3), 24–30.

Lovin, L. A., Cavey, L. O., Whitenack, J. W. (2004) Evidence and justification: Prospective K–8 teachers' proof-making and proof-evaluating. In D. E. McDougall and J. A. Ross (Eds.). *the Proceedings of the Twenty-Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 1201–1208). Toronto, Canada.

Martin, W.G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal of Research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 227-289.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2018). Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar). Ankara.

Moralı, S., Uğurel, I., Tüknüklü, E. & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14, 1, 147–160.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

- Olkun, S. ve Toluk-Uçar, Z. (2009). *İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi (4. Baskı)*. Ankara: Maya Akademi
- Öztürk, M. (2017). *Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinin Bilişsel Açıdan İncelenmesi* (Doktora Tezi). Yök.tez.
- Pedemonte, B., *Argumentation and algebraic proof*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 40, 385-400, 2008.
- Pekşen Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi), Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Reid, D., & Vallejo Vargas, E. (2018). When is a generic argument a proof? In A. J. Stylianides, & G. Harel (Eds.). *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 239–251). Cham: Springer International Publishing.
- Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. In S. R. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 157–183). Westport, CT: Ablex Publishing.
- Rowland, T. (1998). Conviction Explanation and generic examples. Institute of Education, University of London
- Sowder, L., ve Harel, G. (1998). Types of students' justifications, *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 289–321.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., Knuth, E. J. (Eds.). (2010). *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. Routledge & National Council of Teachers of Mathematics.
- Şen, S. ve Yıldırım, İ. (2019). *Eğitimde Araştırma Yöntemleri*. Ankara. Nobel Yayıncılık

Turğut, M., Yenilmez, K. & Uygan, C. (2013). Ortaokul ve Lise Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 6(13), 227-252.

Uygan, C., Tanışlı, D., ve Köse, N.Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 5(2), 137-157.

Van De Walle, J., Karp, K. S., and Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics; Teaching Developmentally* (7th Ed.). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Weber, K. (2010). Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 306-336.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2018). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara. Seçkin Yayıncılık

Yopp, D. A., & Ely, R. (2016). When does an argument use a generic example? *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 37-53.

Yopp, D. A., Ely, R. and Johnson-Leung, J. (2015). Generic Example Proving Criteria For All. *For the Learning of Mathematics*, 35(3), 8-13



EKLER

Ek 1. Görüşme Soruları

Soru 1:

Mahmut ilk n pozitif tam sayının toplamının $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu ifade etmektedir. Örneğin; ilk 10 pozitif tam sayının toplamı 55'dir, bu da $\frac{10(10+1)}{2}$ 'ye eşittir. Mahmut'un ifade ettiği varsayım her zaman doğru mudur?

Soru 2:

Burak ardışık üç tam sayının çarpımının her zaman 6'ya tam bölünebildiğini söylemektedir. Örneğin; 9, 10, 11 ardışık üç tam sayıdır ve çarpımları 990'dır, bu da 6'ya tam bölünebilmektedir. Sizce Burak'ın ifade ettiği varsayım her zaman doğru mudur?

- Ardışık dört tam sayının çarpımı 24 ile tam bölünebilir mi?
- Ardışık beş tam sayının çarpımı 120 ile tam bölünebilir mi?

Bulduğunuz sonuçlardan nasıl bir varsayım geliştirebilirsiniz?

Soru 3:

Zeynep, tam kare sayıların tek sayıda pozitif tam sayı çarpanı olduğunu ifade etmektedir. Örneğin; 36 sayısı için: (1.36), (2.18), (3.12), (4.9), (6.6) olmak üzere 9 tane pozitif tam sayı çarpanı olduğu görülmektedir. Zeynep'in ifade ettiği varsayım her zaman doğru mudur?

Soru 1:

Mahmut ilk n pozitif tam sayının toplamının $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu ifade etmektedir. Örneğin; ilk 10 pozitif tam sayının toplamı 55'dir, bu da $\frac{10(10+1)}{2}$ 'ye eşittir. Mahmut'un ifade ettiği varsayım her zaman doğru mudur?

Argüman 1:

$$1 + 2 = 3 \rightarrow \left(\frac{2 \cdot (2+1)}{2} = 3\right)$$

$$1 + 2 + 3 = 6 \rightarrow \left(\frac{3 \cdot (3+1)}{2} = 6\right)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \rightarrow \left(\frac{4 \cdot (4+1)}{2} = 10\right)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \rightarrow \left(\frac{5 \cdot (5+1)}{2} = 15\right)$$

Yukarıda görüldüğü gibi ilk n pozitif tam sayının toplamı her zaman $\frac{n(n+1)}{2}$ olduğu görülmektedir.

Argüman 2:

*	*	*	*	*
*	*	*	*	.
*	*	*	.	.
*	*	.	.	.
*	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Yukarıdaki dikdörtgende verilen nokta ve yıldızların toplam sayısının; $5 \cdot 6 = 30$ olduğu görülmektedir. Sadece noktalar göz önünde bulundurulduğunda, birinci sütunda bir, ikinci sütunda iki, üçüncü sütunda üç, dördüncü sütunda dört ve beşinci

sütunda ise beş tane noktanın olduğu görülmektedir. Toplam nokta sayısının $\frac{5 \times 6}{2}$ olduğu sonucu çıkarılabilir. Yani:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot (5+1)}{2}$ olduğundan ilk n pozitif tam sayının toplamı her zaman $\frac{n(n+1)}{2}$ olduğu söylenebilir.

Argüman 3:

$$S(100) = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

$$S(100) = 100 + 99 + 98 + \dots + 1$$

$$2 \times S(100) = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \quad \rightarrow 100 \text{ tane } 101\text{'in toplamı}$$

$$\rightarrow S(100) = \frac{100(101)}{2}$$

Toplamın iki farklı gösterimi kullanılarak, iki tane aynı ifade (100 tane 101'in toplamı) elde edilmiştir.

Dolayısıyla ilk n pozitif tam sayının toplamının her zaman $\frac{n(n+1)}{2}$ 'ye eşit olduğu söylenebilir.

Argüman 4:

$$n = 1 \text{ için } S(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Dolayısıyla $n = 1$ için varsayım doğrudur.

$$n = k \text{ için } S(k) = \frac{k(k+1)}{2} \text{ doğru olduğunu kabul edelim.}$$

$$n = k + 1 \text{ için } S(k + 1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \dots(1)$$

$$S(k + 1) = S(k) + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \dots(2)$$

(1)ve (2) den ifade k için doğru ise $k + 1$ için de doğrudur. Tümevarım ilkesi ile bu varsayımın doğru olduğu kabul edilir.

Soru 2:

Burak ardışık üç tam sayının çarpımının her zaman 6'ya tam bölünebildiğini söylemektedir. Örneğin; 9, 10, 11 ardışık üç tam sayıdır ve çarpımları 990'dır, bu da 6'ya tam bölünebilmektedir. Sizce Burak'ın ifade ettiği varsayım her zaman doğru mudur?

- Ardışık dört tam sayı 24 ile tam bölünebilir mi?
- Ardışık beş tam sayı 120 ile tam bölünebilir mi?

Bulduğunuz sonuçlardan nasıl bir varsayım geliştirebilirsiniz?

Argüman 1:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ ve } 6 = 6 \cdot 1$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ ve } 24 = 6 \cdot 4$$

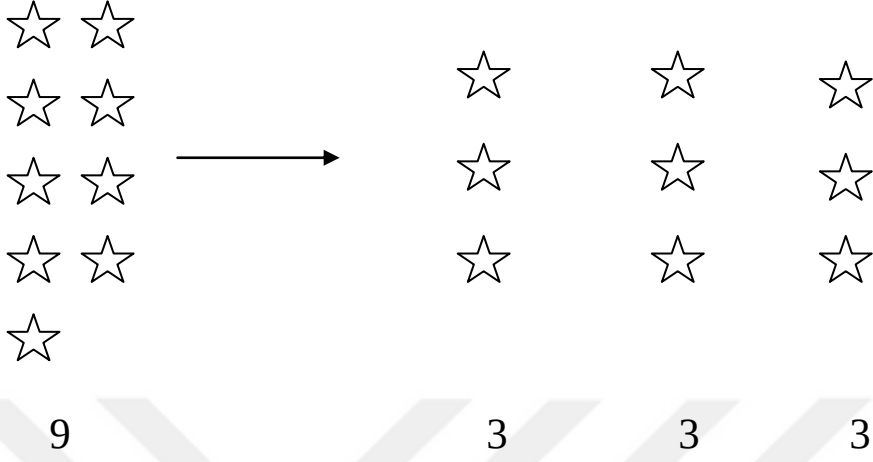
$$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ ve } 60 = 6 \cdot 10$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \text{ ve } 120 = 6 \cdot 20$$

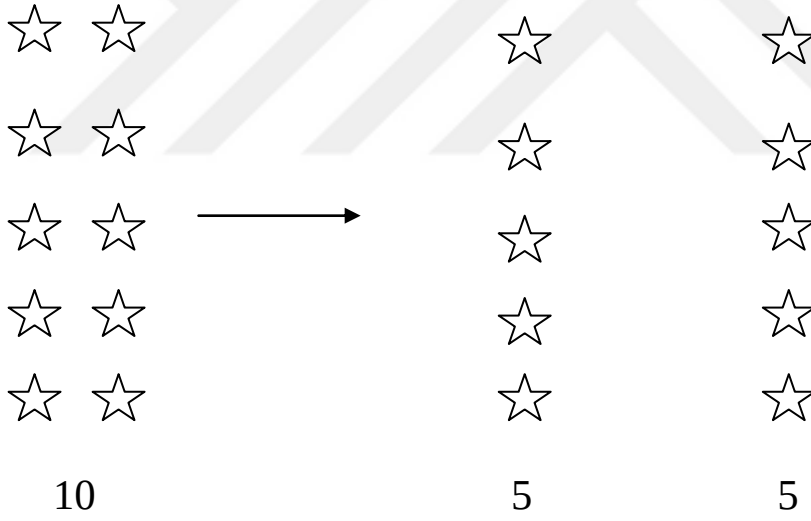
$$13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730 \text{ ve } 2730 = 6 \cdot 455$$

Ardışık üç tam sayının çarpımının 6'ya tam bölünebildiği varsayımı her zaman doğrudur.

Argüman 2:



Üçerli gruplandırılabilir.



İkişerli gruplandırılabilir.

$9 \cdot 10 \cdot 11$ çarpımının sonucu altışarlı gruplandırılabilir. Dolayısıyla ardışık üç tam sayının çarpımının 6'ya tam bölünebildiği varsayımı her zaman doğrudur.

Argüman 3:

9, 10 ve 11 için düşünelim. $9 \cdot 10 \cdot 11 = 990 = 6 \cdot 165$

$9 \rightarrow 3$ 'ün katı

$10 \rightarrow 2$ 'nin katı

3 ve 2 ile tam bölünebilen sayılar 6'ya da tam olarak bölünebilir.

$n, (n + 1), (n + 2)$ ardışık üç tam sayı olsun. Bu sayılardan en az biri çift ve 2 ile tam olarak bölünebilen bir sayıdır ve bir tanesi de 3'ün katı olduğundan 3 ile tam bölünebilen bir sayıdır. Dolayısıyla bu ardışık üç tam sayının çarpımı 6 ile tam olarak bölünebilir. Bundan dolayı bu varsayım her zaman doğrudur.

Argüman 4:

$n = 1$ için $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Dolayısıyla $n = 1$ için varsayım doğrudur.

$n = k$ için $k \cdot (k + 1) \cdot (k + 2) = k^3 + 3k^2 + 2k$ ifadesinin 6'ya tam bölünebildiğini kabul edelim.

$n = k + 1$ için $(k + 1) \cdot (k + 2) \cdot (k + 3) = k^3 + 6k^2 + 11k + 6$

$$k^3 + 6k^2 + 11k + 6 = (k^3 + 3k^2 + 2k) + (3k^2 + 9k + 6)$$

$(k^3 + 3k^2 + 2k)$ ifadesinin 6'ya tam bölündüğünü yukarıda kabul etmiştik.

$(3k^2 + 9k + 6)$ ifadesinin 6'ya tam bölünebildiğini gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

$$(3k^2 + 9k + 6) = 3 \cdot (k^2 + 3k + 2) = 3 \cdot (k + 1) \cdot (k + 2)$$

$(k + 1)$ çift ise $(k + 1) = 2a$ ve $3 \cdot 2a = 6a$ olur ve ifade 6'ya tam bölünür.

$(k + 1)$ tek ise bu durumda $(k + 2)$ çift olur. $(k + 2) = 2b$ ve $3 \cdot 2b = 6b$ bulunur ve ifade 6'ya tam bölünür.

Dolayısıyla tümevarım yolu ile bu varsayımın her zaman doğru olduğu söylenebilir.

Soru 3:

Zeynep, tam kare sayıların tek sayıda pozitif tam sayı çarpanı olduğunu ifade etmektedir. Örneğin; 36 sayısı için: (1.36), (2.18), (3.12), (4.9), (6.6) olmak üzere 9 tane pozitif tam sayı çarpanı olduğu görülmektedir. Zeynep'in ifade ettiği varsayım her zaman doğru mudur?

Argüman 1:

4 için $\rightarrow 1, 2, 4 \rightarrow 3$ tane

9 için $\rightarrow 1, 3, 9 \rightarrow 3$ tane

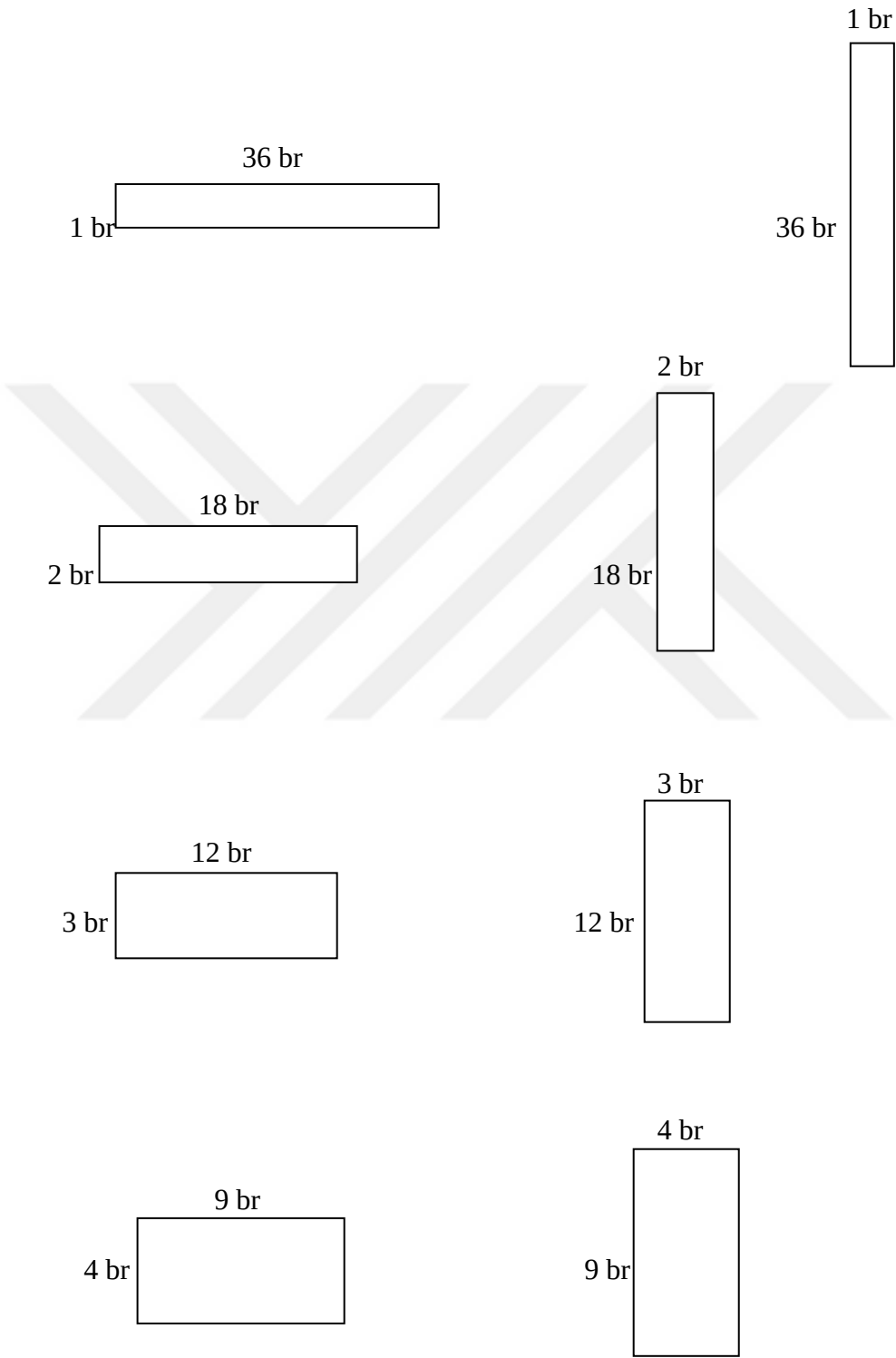
16 için $\rightarrow 1, 2, 4, 8, 16 \rightarrow 5$ tane

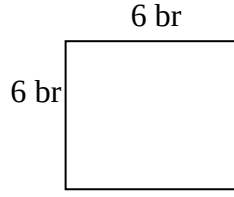
25 için $\rightarrow 1, 5, 25 \rightarrow 3$ tane

36 için $\rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 \rightarrow 9$ tane

Yukarıda da görüldüğü gibi tam kare sayıların tek sayıda pozitif tam sayı çarpanı olduğu varsayımı her zaman doğrudur.

Argüman 2:





Alanı $36 br^2$ ve kenar uzunlukları pozitif tam sayı olan dikdörtgenler (ve kare) düşünülürse $1 \times 36 = 36$ ve $36 \times 1 = 36$ olan iki farklı dikdörtgen çizilebilir. Aynı şekilde $2 \times 18 = 36$ ve $18 \times 2 = 36$, $3 \times 12 = 36$ ve $12 \times 3 = 36$, $4 \times 9 = 36$ ve $9 \times 4 = 36$ olan ikişer tane dikdörtgen daha çizilebilir. $6 \times 6 = 36$ olduğunda ise sadece 1 tane kare çizilebilir. Alanı tam kare olan sayılardan kenar uzunlukları pozitif tam sayı olan kareler elde edilebilir. Dolayısı ile tek sayıda çarpan olduğu görülmektedir. Tam kare sayıların tek sayıda pozitif tam sayı çarpanı olduğu varsayımı her zaman doğrudur.

Argüman 3:

$$1 \times 36 = 36, 36 \times 1 = 36,$$

$$2 \times 18 = 36, 18 \times 2 = 36$$

$$3 \times 12 = 36, 12 \times 3 = 36$$

$$4 \times 9 = 36, 9 \times 4 = 36$$

$$6 \times 6 = 36$$

Her sayı, iki sayının çarpımı şeklinde yazılabilir ve çarpma işleminin değişme özelliği olduğundan çift sayıda çarpan elde edilir. Fakat tam kare sayılarda $n^2 = n \times n$ ($36 = 6 \times 6$) gibi aynı sayı olduğundan burada tek sayıda çarpan vardır. Tek ve çift sayıların toplamı da her zaman tektir. Dolayısıyla tam kare sayıların tek sayıda pozitif tam sayı çarpanı olduğu varsayımı her zaman doğrudur.

Argüman 4:

$$x = y \cdot z$$

$$x = z \cdot y$$

$$x' \text{ in } \text{çarpanları} \rightarrow y \text{ ve } z$$

Her sayı iki sayının çarpımı şeklinde yazılabilir ve çarpma işleminin değişme özelliği olduğundan çift sayıda çarpan elde edilir.

Tam kare sayılarda ($x^2 = x \cdot x$) çarpanları aynı sayı olan ikili olduğundan burada tek sayıda çarpan olduğu görülmektedir.

$$x^2 = m \cdot n$$

$$x^2 = n \cdot m$$

$$x^2 = x \cdot x$$

$$\text{Tek} + \text{Çift} = \text{Tek}$$

Tek ve çift sayıların toplamı her zaman tektir. Dolayısıyla tam kare sayıların tek sayıda pozitif tam sayı çarpanı vardır. Zeynep'in söylediği varsayım her zaman doğrudur.

1. Sorulara verilen cevaplardan hangisi veya hangileri birer geçerli ispattır? Neden?
2. Sizce geçerli bir ispat hangi özelliklere sahip olmalıdır?
3. Sizce ispatlar sadece cebirsel etkinlikler ile mi oluşturulur?