



**ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN EŞİTTİR İŞARETİNİN ANLAMINA YÖNELİK
ALGILARI: GELİŞİMSEL BİR ARAŞTIRMA**

Adem TÜRK

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı
Doç. Dr. Mesut ÖZTÜRK**

2023

(Her Hakkı Saklıdır.)

T.C.
BAYBURT ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ PROGRAMI

**ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN EŞİTTİR İŞARETİNİN ANLAMINA YÖNELİK
ALGILARI: GELİŞİMSEL BİR ARAŞTIRMA**

(Middle School Students' Perceptions of The Meaning of The Equal Sign: A Developmental Study)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Adem TÜRK

Danışman: Doç. Dr. Mesut ÖZTÜRK

Bayburt
Mayıs, 2023

KABUL VE ONAY TUTANAĐI

Doç. Dr. Mesut ÖZTÜRK danışmanlığında, 222234013 numaralı Adem TÜRK tarafından hazırlanan “Ortaokul Đrencilerinin eşittir işaretinin anlamına yönelik algıları: Gelişimsel bir araştırma” adlı bu çalışma 26.05.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik ve Fen Bilimleri EĞitimi Anabilim Dalı, Matematik EĞitimi Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Yařar AKKAN

İmza:

Jüri yesi : Doç. Dr. Mesut ÖZTÜRK

İmza:

Jüri yesi : Doç. Dr. Mustafa ALBAYRAK

İmza:

Bu tezin Bayburt Üniversitesi Lisansüstü EĞitim ve Đretim YönetmeliĐi’nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

...../...../.....

Doç. Dr. Murat KUL

Enstitü Müdürü

ETİK VE BİLDİRİM

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretinin anlamına yönelik algıları: Gelişimsel bir araştırma” başlıklı çalışmanın tarafımdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını ve yararlandığım eserleri kaynakçada gösterdiğimi beyan ederim.

26/05/2023

Adem TÜRK

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışma ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretinin anlamına yönelik algılarını incelemeyi amaçlamıştır. Araştırma sürecim boyunca bana her zaman yardımcı olan bilgi ve deneyimleriyle yol göstererek büyük katkıları olan danışmanım Doç. Dr. Mesut ÖZTÜRK'e ve tez sürecinde değerli fikirlerini benimle paylaşarak tezime katkı sağlayan Doç. Dr. Mustafa ALBAYRAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmama katkı sunan klinik mülakatların sağlıklı bir şekilde yapılmasını sağlayan öğrencilerime teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans tez yazım süreci boyunca zaman zaman ihmal ettiğim ama desteğini her zaman yanımda hissettiğim eşim Sevcan TÜRK'e çocuklarım Yusuf Eren, Ahmet Kerem ve Yağız Ali'ye çok teşekkür ederim.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN EŞİTTİR İŞARETİNİN ANLAMINA YÖNELİK ALGILARI: GELİŞİMSEL BİR ARAŞTIRMA

Adem TÜRK

Mayıs 2023, 48 Sayfa

Bu araştırma ortaokul 5-8. sınıf öğrencilerinin eşittir işaretine yönelik algılarını incelemek amacıyla yürütülmüştür. Çalışma gelişimsel araştırma modelinde tasarlanmış olup enlemsel türü kullanılmıştır. Çalışmaya Türkiye'nin doğusunda bulunan bir ildeki bir resmi devlet okulunda öğrenim gören gönüllü sekiz öğrenci katılmıştır. Öğrencilerin ikisi 5., ikisi 6., ikisi 7. ve ikisi 8. sınıfta öğrenim görmektedir. Çalışmanın verileri aritmetik, cebir öncesi, orantısal düşünme, cebir, özdeşlik ve cebir problemi içeren 10 açık uçlu soru yardımıyla klinik mülakatla toplanmıştır. Toplanan verilere betimsel analiz yapılmıştır. Bunun için eşittir işaretine yönelik yapılan önceki araştırmalar incelenerek veri analizi için bir çerçeve oluşturulmuş ve bu çerçeve doğrultusunda veriler analiz edilmiştir. Çalışmada ulaşılan sonuçlar öğrencilerin eşittir işaretine yönelik algılarının ilişkisel, denge/aynı ve işlemsel anlamlarında toplandığına işaret etmiştir. Çalışmanın sonuçlarında öğrencilerin aritmetik, cebir öncesi, orantısal ilişki ve cebir sorularında ilişkisel ve işlemsel düşünme olmasına rağmen özellikle denge/aynı anlamına odaklandığı belirlenmiştir. Özdeşlik sorusunda ise öğrencilerin işlemsel ilişkisel ve denge/aynı anlamına dengeli dağıldığı belirlenmiştir. Cebire yönelik problem sorusunda öğrenci cevapları incelendiğinde öğrencilerin ilişkisel düşünme anlamını hiç kullanmadıkları denge/aynı ve işlemsel anlamlarını kullandığı görülmüştür. Çalışmada ulaşılan en özgün ve önemli sonuç ise, önceki araştırmalarda öğrencilerin eşittir işaretini sonuç yaz olarak gördükleri belirlenmesine rağmen bir izleme araştırması özelliği taşıyan bu araştırmada öğrencilerin eşittir işaretini sonuç yaz anlamında düşünmedikleridir. Son yıllarda yapılan araştırmalar ilk ve ortaokullarda erken cebirsel düşünme etkinlikleri yapılmasının bu durumun nedeni olabileceğine işaret etmektedir. Bu bağlamda araştırmacıların erken cebirsel düşünmeye yönelik araştırmalar yürütmesi ve uygulayıcıların sınıflarında erken cebirsel düşünme etkinlikleri yaptırması önerilebilir.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel düşünme, erken cebir, eşittir işareti, gelişimsel araştırma, eşitlik

ABSTRACT

MASTER THESIS

MIDDLE SCHOOL STUDENTS' PERCEPTIONS OF THE MEANING OF THE EQUAL SIGN: A DEVELOPMENTAL STUDY

Adem TÜRK

June 2023, 48 Pages

This study was carried out to examine the perceptions of grade 5-8 students toward the equal sign. The study was designed in the developmental research model, and the cross-sectional type was used. Eight volunteer students studying at an official public school in a province in eastern Turkey participated in the study. Two students are in the 5th, two are in the 6th, two are in the 7th, and two are in the 8th grade. The study's data were collected by clinical interview with the help of 10 open-ended questions, including arithmetic, pre-algebraic, proportional thinking, algebra, identity, and algebra problem. Descriptive analysis was performed on the collected data. For this, a framework for data analysis was created by examining previous studies on the equal sign, and the data were analyzed in line with this framework. The results obtained in the study indicated that students' perceptions of the equal sign were gathered in relational, balance/same, and arithmetic-specific meanings. The study results showed that although the students had relational and arithmetic-specific thinking in arithmetic, pre-algebraic, proportional relation, and algebra questions, they mainly focused on the meaning of balance/same. In the question of identity, it was determined that the students were distributed evenly to the relational and balance/same meaning specific to arithmetic. When the student's answers to the algebra problem were examined, it was seen that they never used the meaning of relational thinking but used the meanings of balance/same and arithmetic. The most original and essential result reached in the study is that although it was determined in previous studies that students saw the equal sign as write a result, in this study, which has the characteristics of a follow-up research, the students did not think of the equal sign as writing a result. Recent studies indicate that early algebraic thinking activities in primary and secondary schools may be the reason for this situation. In this context, it can be suggested that researchers conduct research on early algebraic thinking and that practitioners have early algebraic thinking activities in their classrooms.

Keywords: Algebraic thinking, early algebra, equal sign, cross-sectional research, equation

İÇİNDEKİLER

ETİK VE BİLDİRİM.....	i
TEŞEKKÜRLER	ii
ÖZ.....	iii
ABSTRACT	iv
İÇİNDEKİLER	v
TABLolar DİZİNİ	vii

BİRİNCİ BÖLÜM

Giriş.....	1
Araştırmanın Konusu ve Problemi.....	1
Araştırmanın Amacı.....	2
Araştırmanın Gerekçesi.....	2
Araştırmanın Önemi.....	3
Araştırmanın Sınırlılıkları	3
Varsayımlar	3

İKİNCİ BÖLÜM

Kuramsal Çerçeve.....	4
Aritmetik	4
Cebir.....	4
Erken Cebir	5
Eşittir İşareti.....	5
Eşittir İşaretine Yönelik Öğrencilerin Algıları.....	6

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Alan Yazın Sentezi	8
--------------------------	---

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

Yöntem	14
Araştırma Modeli	14
Katılımcılar	14

Veri Toplama Araçları	15
Verilerin Analizi	17

BEŞİNCİ BÖLÜM

Bulgular.....	19
Aritmetik Sorularında Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları	19
Cebir Öncesi Sorularında Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları	21
Orantısal ilişki Sorularında Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları	24
Cebir Sorularında Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları	27
Özdeşlik Sorusunda Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları.....	30
Problem Sorusunda Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları	32

ALTINCI BÖLÜM

Sonuç ve Tartışma.....	35
Aritmetik Sorularına Yönelik Tartışma.....	35
Cebir Öncesi Sorularına Yönelik Tartışma	36
Orantısal İlişki Sorularına Yönelik Tartışma	37
Cebir Sorularına Yönelik Tartışma	37
Özdeşlik Sorusuna Yönelik Tartışma.....	38
Problem Sorusuna Yönelik Tartışma	39
Öneriler	39
Kaynakça	41
Özgeçmiş	48

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Eşittir İşaretinin Anlamları ve Açıklamaları	7
Tablo 2. Bölümler Bazında Alanyazınla Mevcut Çalışmanın Karşılaştırılması.....	12
Tablo 3. Araştırmada Sorulan Sorular ve Gerekçeleri.....	16
Tablo 4. Aritmetik Sorularına Yönelik Öğrenci Cevapları.....	19
Tablo 5. Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Aritmetik Sorularına Verdiği Cevaplar.....	21
Tablo 6. Cebir Öncesi Sorularına Yönelik Öğrenci Cevapları	22
Tablo 7. Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Cebir Öncesi Sorularına Verdiği Cevaplar	24
Tablo 8. Orantısal İlişki Sorularına Yönelik Öğrenci Cevapları	25
Tablo 9. Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Orantısal İlişki Sorularına Verdiği Cevaplar.....	27
Tablo 10. Cebir Sorularına Yönelik Öğrenci Cevapları.....	28
Tablo 11. Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Cebir Sorularına Verdiği Cevaplar	30
Tablo 12. Özdeşlik Sorusuna Yönelik Öğrenci Cevapları	30
Tablo 13. Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Özdeşlik Sorusuna Verdiği Cevaplar	32
Tablo 14. Problem Sorusuna Yönelik Öğrenci Cevapları	32
Tablo 15. Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Problem Sorusuna Verdiği Cevaplar.....	34

BİRİNCİ BÖLÜM

Giriş

Araştırmanın Konusu ve Problemi

Ortaokul, öğrencilerin cebir ile ilk kez karşılaştıkları dönemdir. Bu dönemde öğrencilerin daha öncede karşılaştığı eşittir işaretinin basit olduğu düşünülebilir (Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil, & Stephens, 2008). Ancak yapılan araştırmalar öğrencilerin eşittir işaretinin anlamına ilişkin yeterli anlayış geliştiremediğini göstermiştir (Knuth, Stephens, McNeil, & Alibali, 2006). Carpenter, Franke ve Levi (2003) eşittir işaretine ilişkin yeterli anlayış geliştirememenin cebir öğrenmenin önündeki en büyük engellerden biri olduğunu vurgulamışlardır. Öğrencilerin eşittir işaretine yönelik yeterli anlayış geliştirebilmesi aritmetikten cebire geçişin başarısına bağlıdır (Akkan, 2009). Öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte başarılı olabilmesi için cebir öncesi dönem önemlidir (Pillay, Wilss, & Boulton-Lewis, 1998). Powell, Berry ve Barnes (2020) öğrencilerin cebir öncesi dönemde başarılı olduklarının göstergelerinden birinin eşittir işaretini ilişkisel anlamaları olduğunu belirtmişlerdir.

Öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte başarılı olabilmesi için erken yıllarda cebirsel düşünmeye başlaması önemlidir. Erken cebirsel düşünme olarak ifade edilen bu eylemler cebirin erken dönemlere alınması anlamına gelmeyip öğrencilerin cebirsel düşüncelerini geliştirecek aritmetik işlemler yapması anlamına gelmektedir (Kieran, 2022). Kieran (2022) erken cebirsel düşünmenin geliştirilmesi için öğrencilerin eşittir işaretini anlamlarının önemli olduğunu belirtmiştir. Donovan, Stephens, Alapala, Monday, Szkudlarek, ... ve Matthews (2022) eşittir işaretinin anlaşılmasının ilkokulda erken cebirsel düşünme ve ortaokulda denklemlerin öğrenilmesi için önemli olduğunu belirtmişlerdir. Carpenter ve Franke (2001) ise cebirsel düşünmeye geçişte önemli ayırt edici özelliklerden birinin öğrencilerin eşittir işaretinin anlamını işlemsel değil ilişkisel anlamaları olduğunu belirtmişlerdir.

Cebirsel düşünmeyle bağlantılı olarak sayısal eşitlik kavramı ve ardından gelen denklem kavramı, okul matematiğinin merkezi konumundadırlar (Radford, 2022). Bu kavramların anlaşılabilmesi için öğrencilerde erken cebirsel düşünmenin geliştirilmesi özellikle eşittir işaretinin anlaşılabilmesi önemlidir (Lenz, 2022). Bu bağlamda eşittir işaretine yönelik yeterli algılayış geliştirilmesinin cebir öğrenme için önemli olduğu söylenebilir (Knuth vd., 2008). Bu araştırmada eşittir işaretinin özellikle ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünmeye

başlayabilmesi için önemli olduğunu savunan bu araştırmalar doğrultusunda ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretini nasıl algıladıkları problemine yanıt aranmıştır.

Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretine yönelik algılarını gelişimsel açıdan incelemektir. Bu amacı gerçekleştirmek için aşağıdaki araştırma sorularına yanıt aranacaktır.

1. Aritmetik sorularında kullanılan eşittir işaretine yönelik öğrencilerin algıları nasıldır?
2. Cebir öncesi sorularında kullanılan eşittir işaretine yönelik öğrencilerin algıları nasıldır?
3. Orantısal ilişki sorularında kullanılan eşittir işaretine yönelik öğrencilerin algıları nasıldır?
4. Cebir sorularında kullanılan eşittir işaretine yönelik öğrencilerin algıları nasıldır?
5. Özdeşlik sorularında kullanılan eşittir işaretine yönelik öğrencilerin algıları nasıldır?
6. Problem sorusunda kullanılan eşittir işaretine yönelik öğrencilerin algıları nasıldır?

Araştırmanın Gerekçesi

Eşittir işareti, cebir öğretimi ve cebirsel düşünme için önemli bir kavramdır (Akkan, 2009; Kieran, 2022). Bu öneminden dolayı son yarım yüzyıldır eşittir işaretine yönelik yoğun şekilde araştırmalar yapılmaktadır (Kieran, 1981; Lee, & Pang, 2021; Molina & Ambrose, 2006). Buna rağmen öğrencilerin eşittir işaretini nasıl algıladıklarına yönelik yapılan araştırmaların öğrencilerin cebirsel düşünmesi için önemli olduğu vurgulanmaktadır (Kieran, 2022). Çünkü öğrencilerin eşittir işaretini nasıl algıladıkları cebirsel düşünme için bir belirleyici olarak düşünülmektedir (Carpenter, & Franke 2001; Donovan vd., 2022).

Yapılan araştırmalar denklemlerin ve denklem çözmenin anlaşılması için öğrencilerin eşittir işaretini anlamalarının önemli olduğunu vurgulayarak eşittir işaretine yönelik yapılacak araştırmaların gerekli olduğunu ifade etmişlerdir (Kieran, 2022; Radford, 2022). Denklem, eşittir işaretinin her iki tarafında birer tane bulunan iki niceliğin karşılaştırması olarak tanımlanabilir (Lenz, 2022). Lenz (2022) öğrencilerde fonksiyonel düşünmenin geliştirilmesi için eşittir işaretinin anlaşılmasının önemli olduğunu vurgulamıştır. Xolocotzin, Medrano-Moya ve Rojano (2022) eşittir işaretinin aritmetik bilgi ile fonksiyonel düşünme arasında bağ kurmada kritik rol üstlendiğini vurgulamıştır. Ancak yapılan araştırmalarda öğrencilerin eşittir işaretini yanlış algıladıkları ve bu kavrama ait yanlışları olduğuna işaret edilmektedir (Kieran, 1981). Bu durumun nedenlerinden biri eşittir işaretinin ilişkisel anlamının öğrenciler tarafından anlaşılabilmesi olabilir (Pearn, Stephens, & Pierce, 2022). Bu bağlamda ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretini anlamasına yönelik yapılan bu araştırmanın gerekli olduğu düşünülmektedir.

Araştırmanın Önemi

İlkokul ve ortaokul öğrencileriyle yapılan araştırmaların birçoğunda, öğrencilerin eşittir işaretine yükledikleri anlamların ve denklem anlayışlarının belirlenmesine yönelik temalar kullanılmıştır (Radford, 2022). Eşittir işaretinin doğru algılanması ilköğretim öğrencilerinin daha sonra öğrenecekleri cebir dersleri için önemli bir temel teşkil edebilecektir. Yapılan araştırmalar öğretmenlerin, öğrencileri ile birlikte eşit işaretini sık sık kullanmalarına rağmen, eşitlik kavramı ve eşit işareti hakkında öğrencilerin ne algıladıkları üzerine pek düşünmediklerini göstermektedir (Falkner, Levi, & Carpenter, 1999). Birçok öğretmen için $8+4=\square+5$ sorusu önemsiz gibi görülebilir. Fakat birçok öğretmen gibi bu sorunun önemsiz olduğunu düşünen bir altıncı sınıf öğretmenin sınıfında yapılan araştırmada öğrencilerin hepsi kutu yerine 12 gelmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. Eşit işaretinin anlamını öğrencilerin farklı algılaması, araştırmacıları öğrencilerin yanlış anlamalarıyla yüzleştirip onlara yardım etmeye yöneltmiştir. Birçok araştırmacı, öğrencilerin eşit işaretini ilişkisel bir sembol olarak değil “soldan sağa bir eylem belirten” bir sembol olarak gördüklerini bulmuşlardır (Behr, Erlwenger ve Nichols, 1980; Carpenter, & Levi, 2000; Carpenter vd., 2000; Falkner vd., 1999). Bu çalışmada ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretini nasıl algıladıkları araştırılacaktır.

Araştırmanın Sınırlılıkları

Farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin eşittir işaretini algılamalarına yönelik yapılan bu çalışmada elde edilen veriler klinik mülakatlarda yer alan sorulara söylenen cevaplarla sınırlıdır.

Çalışma Türkiye’nin kuzeydoğusundaki bir ilde bir ilköğretim okulunun 5, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencileriyle yapılmıştır. Ayrıca çalışmada veri toplama kaynağı olarak kullanılan klinik mülakatlar toplam 8 öğrenci ile yapılmıştır. Farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin düşüncelerini ayrıntılı analiz edebilmek için böyle bir sınırlamaya ihtiyaç duyulmuştur.

Varsayımlar

Araştırmada kullanılan etkinliklerdeki problemlerle ilgili uzman görüşlerinin yerinde ve yeterli olduğu kabul edilmiştir. Öğrencilerle yapılan klinik mülakatlarda sorulan sorulara objektif ve açık cevaplar verdikleri varsayılmıştır. Aynı zamanda seçilen farklı öğrenim düzeylerindeki öğrencilerden oluşan örneklemin evrenin genel özelliklerini temsil ettiği varsayılmıştır.

İKİNCİ BÖLÜM

Kuramsal Çerçeve

Aritmetik

Aritmetik, matematiğin en kapsamlı ve en bilinen dalı olarak bilinir. Günümüzde yapılan birçok tanıma göre (Mason, 1996; URL-1, 2009), aritmetik, bilinmeyenleri bulmak için dört temel işlemi kullanma işlemlerini ifade eder. Başka bir tanıma göre ise aritmetik, sayıları, bu sayılar arasındaki ilişkileri ve işlemleri konu alan matematik biliminin bir dalıdır (URL-1, 2009). Ayrıca matematiğin, sayıları, bu sayıların özelliklerini ve işlemlerini konu alan bir disiplin olduğu da belirtilmektedir (URL-2, 2009). Bu tanımlardan da anlaşılacağı üzere, aritmetik matematikteki teorik bir temelden ziyade günlük yaşamın ihtiyaçlarından doğmuş ve bu ihtiyaçları karşılamak için kullanılan matematiksel hesaplamalar ve işlemleri içeren bir alandır (Özey, 2019).

Dolayısıyla, aritmetik, bilinmeyenleri bilinenlerden çıkarmak için dört temel işlemi kullanma, sayılar arasındaki ilişkileri ve dört işlemi, bu işlemlere dayalı tüm hesaplamaları içeren bir matematik dalıdır (Akkan, 2009).

Cebir

Cebir, sayılarla işlem yapma, karşılaştırma ve sayma gibi aritmetik işlemlerinin soyutlanması ve genişletilmesiyle ortaya çıkan matematiğin önemli bir dalıdır. Cebir, geleneksel anlamda "genelleştirilmiş aritmetik" olarak bilinir ve genellikle sembolik matematiksel ifadelerin incelenmesine odaklanır (Tabach, & Friedlander, 2003). Cebirin ne olduğu sorusu tarih boyunca birçok kez cevaplanmış ve bu konuda birçok tanım yapılmıştır. Cebirin tarihsel gelişiminde, Hârezmi ve Ömer Hayyam'ın cebirle ilgili tanımları ve çalışmaları özellikle önemlidir, Dede'nin (2003) aktardığına göre. Hârezmi'nin yaklaşık 825 (MS) tarihinde yazdığı "Al Kitab Fi Hesab Al Cabr wal Muqabalah" adlı kitap, cebirin bilinen ilk kitabıdır ve cebirle ilgili tanımlar içerir.

Cebir ile ilgili tanımlar, kişilere veya bağlama göre farklı algılamalara yol açabilir. Örneğin, çoğu insan için cebir, harfler ve semboller kullanarak karmaşık denklemleri çözmek veya basit cebirsel ifadeler oluşturmak anlamına gelir (Blanton, 2008). Cebir, matematiği bir dil olarak düşünen insanların zihinlerinde oluşan sembolik bir dizi olarak tanımlanabilir. Ancak sembolik dizi, cebiri tam olarak tanımlamak için yetersiz kalır (Lee, 1996). Matematikçiler

arasında cebir, genellikle genelleştirilmiş aritmetik olarak anlaşılır (Carpenter vd., 2003; Lee, 1996). Genelleştirilmiş aritmetik, temel aritmetik işlemlerinden somut olarak yola çıkarak anlamlı bir genelleme yapmaktır. Lee (1996), matematiği bir kültür olarak ele alındığında cebirin, bu kültürün alt bir kültürü olduğunu kabul eder ve bu yaklaşımın cebirin tanımında esneklik sağladığını vurgular.

Aritmetik ve cebir, sayı kavramının aritmetikteki temel rolüne ve cebirin kökeninin aritmetikten geldiğine işaret eden tanımlarla ele alınır. Bu nedenle, öğrencilerin cebir hakkındaki düşünceleri, aritmetikle ilgili önceki deneyimlerine dayandığı için, iki alan arasında yoğun ve karşılıklı bir ilişki vardır.

Erken Cebir

Erken cebir, aritmetikten cebire geçişin bir sürecidir. Bu süreçte öğrenciler, aritmetik bilgilerini kullanarak informal bir şekilde cebirsel fikirler oluştururlar (Kieran, & Chaloug, 1993). Aritmetik etkinliklerle birlikte yapılan bu süreç, öğrencilerin cebirsel akıl yürütme, sembolleştirme ve aritmetik bilgisini güçlendirme becerilerini geliştirir. Bu nedenle ilkokulda cebirsel düşünceyle tanışmak ve aritmetik bilgilerini güçlendirmek önemlidir. NCTM, aritmetik ve cebir öğretimindeki eksiklikler nedeniyle her öğrencinin okulöncesi eğitiminden itibaren lise öğrenimine kadar cebir öğrenmesi gerektiğini belirtmektedir. Araştırmalar, erken cebir sürecinin cebir öğreniminde önemli bir rol oynadığını ve ön kavramların yapılandırılmasında büyük önem taşıdığını göstermektedir. Ayrıca etkili ve verimli bir matematik öğretimi için aritmetik ile cebir arasındaki bağlantıyı sağlayan erken cebir etkinliklerinin yeterli miktarda öğrencilere yaptırılması çok önemlidir.

Eşittir İşareti

Cebirsel işlemlerde en yoğun şekilde kullanılan sembollerden biri eşit işaretidir. Eşit işareti, ilk olarak 1557 yılında Recorde'un "The Whetstone of Witte" kitabında kullanılmış (Cajori, 1993) ve Leibnitz'in denklem hesaplamaları için bu notasyonu kullanmasıyla birlikte evrensel olarak kabul görmüştür (Stalling, 2000). "Eşit işareti" özellikle aritmetikten cebire geçiş sürecinde öğrencilerin zorluk yaşadıkları bir kavramdır. Çünkü eşittir işareti aritmetik ve cebirde farklı anlamlara ve rollere sahiptir. Eşittir işareti, iki nicelik arasında bir karşılaştırma yapmayı içerir (Lenz, 2022).

Matematiksel eşitlik kavramı cebirsel düşünmenin temeli olarak geniş çapta kabul görmektedir (Donovan vd., 2022; Stephens, Veltri Torres, Sung, Strachota, Murphy-Gardiner, & Knuth, 2021). Eşitlik kavramının anlaşılması için yani iki durum arasında bir eşitlik ilişkisini

sembolik olarak temsil etmek için eşittir işaretinin anlaşılması çok önemlidir (Donovan vd., 2022).

Eşittir İşaretine Yönelik Öğrencilerin Algıları

Eşittir işaretine yönelik son yıllarda birçok araştırma yürütülmüştür. Bu araştırmaların bazıları eşittir işaretinin anlamlarına odaklanırken (Kieran, 1981; Lee & Pang, 2021) bazıları da eşittir işaretinin öğretimine odaklanmıştır (Blanton, Stephens, Knuth, Gardiner, Isler, & Kim, 2015; Molina, & Ambrose, 2006). Eşittir işaretinin anlamına yönelik yapılan araştırmalarda öğrencilerin eşittir işaretine yönelik algıları “işlemsel” ve “ilişkisel” düşünme açısından kategorize edilmiştir (Kieran, 2022). İşlemsel düşünme ve ilişkisel düşünme arasındaki farklılık aritmetik ve cebir arsındaki farklılığa dayanmaktadır (Stephens, Knuth, Blanton, Isler, Gardiner, & Marum, 2013). Knuth ve diğerleri (2008) ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretine yönelik algılarını incelediği araştırmada ilişkisel, işlemsel, diğer ve cevap yok olarak dört kategori olduğunu belirlemiştir.

İşlemsel düşünme, öğrencilerin eşittir işaretini, ifadeleri ve denklemleri karşılaştırmayı içeren ilişkisel bir işaret yerine, hesaplamalı olarak “işlem yap/ sonuç bul” sinyali olarak gördükleri anlamına gelmektedir (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi, & Battey, 2007). İşlemsel düşünen öğrenciler, eksik değer denklemlerini, verilen işlemleri eşittir işaretinin solunda yaparak veya verilen tüm işlemleri yaparak (örneğin, $8 + 4 = _ + 5$ için, boşluğa 12 veya 17 yazarak) çözmeye eğilimindedir (Donovan vd., 2022). Xolocotzin ve diğerleri (2022) aritmetik kavramında öğrencilerin eşittir işaretini ($5+4-1=8$ şeklinde olduğu gibi) solda işlemler zincirinin yürütüldüğü ve sağda sayısal sonucun yazıldığını gösteren bir işlem olarak yorumladığını belirtmişlerdir.

Eşittir işaretinin ilişkisel düşünme anlamı: iki nicelik veya ifadenin “aynılığı” gösteren anlayış olarak ifade edilmiştir (Donovan vd., 2022; Molina, & Ambrose, 2008). Eşittir işaretine yönelik ilişkisel bakış açısına sahip olan öğrenciler, eşittir işaretinin solunda ve sağındaki cebirsel ifadeleri hem yorumlar hem de esnek bir şekilde çalışırlar (Donovan vd., 2022). Knuth, Stephens, McNeil ve Alibali (2006) eşittir işaretinin ne anlama geldiği sorulduğunda ilişkisel bakış açısına sahip öğrencilerin “aynıdır” veya “işaretin solunda ve sağında olan aynı şeyi ifade eder” gibi tanımlar sunduğunu ifade etmişlerdir. Eşittir işaretinin ilişkisel anlamına sahip öğrenciler, yapısal bir ilişkide eşitlenmiş parçaları düşünürler: eşitliğin bir tarafını, diğer tarafı ile aynı olarak görülür (Radford, 2022). Stephens ve diğerleri (2013) eşittir işaretine yönelik ilişkisel düşünmenin ilişkisel-hesaplamalı ve ilişkisel-yapısal olarak iki kategoriye ayrılabilirliğini vurgulamıştır. Rittle-Johnson, Matthews, Taylor, & McEldoon (2011)

öğrencilerin eşittir işaretini ilişkisel anlamalarının işlemel anlamalarından daha güç ve üst düzey bir beceri olduğunu savunmuştur. Xolocotzin ve diğerleri (2022) cebirsel düşünen öğrencilerin eşittir işaretini bir denklik olarak $3(x+2)=3x+6$ yorumladığını belirtmiştir.

Jones (2009) öğrencilerin eşittir işareti hakkındaki düşüncelerinin aynılık ve yer değiştirme (substitution) olarak iki türü olduğunu ifade etmiştir. Aynılık düşüncesi, eşitliğin her iki tarafındaki ifadelerin hesaplanarak sonuçların karşılaştırılması anlamına gelir. Yer değiştirme düşüncesi ifadeleri dönüştürdükleri notasyon açısından forma göre ayırt etme anlamına gelir. Eşittir işaretinin anlamına yönelik yürütülen araştırmalardan yola çıkarak bu araştırmada eşittir işaretinin ilişkisel, denge ve işlemel olmak üzere üç anlamı üzerinde durulmuştur. Eşittir işaretinin anlamları ve açıklamaları Tablo 1’de sunulmuştur.

Tablo 1. *Eşittir İşaretinin Anlamları ve Açıklamaları*

İLİŞKİSEL DÜŞÜNME	DENGE/ AYNI	İŞLEMSEL
Eşittir işaretinin sağında ve solunda bulunan sayılar arasındaki ilişkiyi vurgular. Eşitliğin bir tarafı sabit kaldığında, diğer taraftaki sayılar arasındaki ilişkiyi fark eder.	Eşitliğin bir tarafı ile diğer tarafındaki sayının eşit olacağını vurgular. Eşittir işaretinin sağ ve sol taraflarındaki niceliklerin aynı olduğunu fark eder.	Öğrenciler eşittir işaretini sonuç bul anlamında yorumlayabilirler. Eşittir işaretini soldaki işlemler zinciri olarak ta ifade edebilirler.
Örnek: Öğrenci $a+b=7$ cebirsel ifadesinde a artarken b ’nin azalacağını fark edip ifade edebilir.	Örnek: Öğrenci $a+b=7$ cebirsel ifadesinde a ve b ’nin toplamının eşitliğin sağ tarafındaki 7 ile aynı olması gerektiğini ifade edebilir.	Örnek: Öğrenci $a+b=7$ cebirsel ifadesinde a ve b ’nin yerine değerler vererek $a=5$ ve $b=2$ ’dir gibi ifadeler kullanabilirler.
Öğrenci $5+3 = \square +2$ ifadesinde 2’ nin 3’ten 1 eksik olduğunu fark ederek $\square$ ‘nun 5’ten 1 fazla olduğunu ifade edebilir.	Öğrenci $5+3 = \square +2$ ifadesinde $5+3=8$ olur, o halde $\square+2$ ‘de 8 olması gerekir ekinde iki tarafın eşitliğine yönelik akıl yürütebilir.	Öğrenci $5+3 = \square +2$ ifadesinde $5+3=8$ olur, o halde $\square$ ‘da 8 olması gerekir şeklinde düşünebilir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Alanyazın Sentezi

Alanyazın incelendiğinde cebir öğretimine yönelik yapılan araştırmaların genellikle aritmetikten cebire geçiş süreçlerine odaklandığı (Akkan, & Baki, 2016; Akkan, Baki, & Çakıroğlu, 2012; Gürbüz, & Toprak, 2014), cebirdeki kavramlara odaklanan araştırmaların ise az sayıda olduğu belirlenmiştir (Doğan Temur, & Sancak, 2012). Cebirdeki kavramlara odaklanan araştırmalar ise cebirsel ifade (Şahin, & Masal, 2021), denklem (Gürbüz, & Toprak, 2014; Çakmak Gürel, & Okur, 2017), özdeşlik ve eşitlik (Yaman, Toluk, & Olkun, 2003), kavramlarına odaklandıkları belirlenmiştir. Cebir öğretimi ele alındığında özellikle aritmetikten cebire geçiş için sembollerin önemli olduğu söylenebilir (Usiskin, 1988; Falkner, Levi, & Carpenter, 1999). Sembollere yönelik araştırmalar ise sınırlı sayıda olup daha çok eşittir işareti üzerine odaklanılmıştır (Radford, 2022). Eşittir işareti anlam bakımından aritmetikten cebire geçişte farklılaştığı için bu kavrama yönelik yapılan araştırmaların önemli olduğu söylenebilir. Eşittir işareti ile ilişkili araştırmalarda daha çok nitel araştırmalar ön plana çıkmaktadır. Yapılan araştırmaların incelenmesinde eşittir işaretinin anlamını araştıran çalışma sayısının eşittir işaretinin daha değişik bağlamlarda yapılan araştırmalarına göre çok daha az olduğu görülmektedir. Buna rağmen yapılan çalışmalar birbirini destekler niteliktedir.

Kieran (1981) eşittir işareti üzerine yapmış olduğu bu çalışmada eşitlik kavramına yönelik gerçekleşen hatalı öğrenmelerin sonraki aşamalarda ve denklem çözümünde öğrencilerin hata yapmasına neden olduğu tespit etmiştir. Eşittir işareti “sonuç bul” anlamı yükleyen öğrencilerin bilinmeyen eşittir işaretinin solunda olduğu soruları yanlış ya da hatalı sorular olduğunu ifade etmiş ve bu tür soruları çözmekte zorlandıkları tespit edilmiştir.

Falkner, Levi ve Carpenter (1999) altıncı sınıfta okuyan 145 kişilik öğrenci grubuyla yapmış oldukları araştırmalarında eşittir işaretinin öğrenciler tarafından nasıl algılandığını incelemişlerdir. Öğrencilere yöneltilen cebir öncesi ve aritmetik düzeydeki sorulara verilen yanıtlar incelendiğinde öğrencileri eşittir işareti “işlem yap”, “sonuç bul” anlamı yüklediklerini belirlemişlerdir. Örneğin $8 + 4 = \square + 5$ işleminde $\square$ yerine kaç gelmesi gerekir? Şeklinde sorulan soruya öğrencilerin bir kısmı 8 ile 4’ü toplayarak 12 cevabını vermiş, bazı öğrenciler ise soruda verilen tüm sayıları toplayarak 17 cevabını bulmuştur. Verilen cevaplardan çalışmaya katılan öğrencilerin eşittir işareti ile ilgili algılarının daha çok işlemsel düzeyde olduğu ilişkisel düşünceye sahip olmadıkları tespit edilmiştir.

Yapılan çalışmalardan biri, Yaman, Toluk ve Olkun (2003)'un , 2., 3., 4., 5. ve 6.sınıfta okuyan her bir sınıf seviyesinden ikişer öğrenci ile ortaya koydukları araştırmalarında eşittir işaretinin ilişkisel bir sembol olmadığını, işlemsel bir sembol olarak algıladıklarını ortaya koymuşlardır. Çalışmaya katılan öğrencilerin yarısı, $\square = 4 + 3$ şeklinde bir eşitliğin yazılmasının mümkün olmayacağını, eşittir işaretinin bir yön belirttiğini ifade etmişlerdir. Aynı zamanda $3 + 8 = \square + 5$ ifadesindeki bilinmeyen alacağı değer için 10 öğrenciden 3'ü $3 + 8 + 5 = 16$, 4'ü $3 + 8 = 11$ ve 3 öğrencide işlemin sonucunun bulmak için kutu yerine "11" yazarak yeniden bir soru işareti koyup sonucun 16 olduğunu belirterek soruyu yanlış cevaplamışlardır.

Alibali ve diğerleri (2007) tarafından yapılan bir araştırma, ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretini anlama, eşdeğer denklemleri çözme performansı ve anlayışlarındaki gelişimi incelemeyi amaçlamaktadır. Araştırma kapsamında, öğrenciler 3 yıl boyunca takip edilmiş ve veriler elde edilmiştir. Çalışma sonuçlarına göre, öğrencilerin matematiksel eşitlik anlayışı ortaokul süresince gelişme göstermektedir, ancak birçok öğrencinin sekizinci sınıf sonunda dahi anlayışlarının zayıf olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca, eşittir işaretinin kavramsal olarak anlaşılması, denklem problemlerini çözme performansını artırmaktadır. Bu bulgular doğrultusunda, matematik müfredatının öğretiminde eşittir işaretinin anlamına sürekli olarak önem verilmesi gerekmektedir. Özellikle cebir ve denklem çözme konularından sonra karşılaşılan zorlukların çoğu, eşittir işaretinin işlem yapma zorunluluğu algısına dayanmaktadır. Bu nedenle, süreç içerisinde kavramsal bir anlayışın geliştirilmesi önemlidir.

Knuth vd. (2008) ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretini nasıl anladıklarına yönelik araştırma yürütmüştür. Araştırmada öğrencilerin anlamalarına göre eşittir işaretini ilişkisel, işlemsel, diğer ve cevap yok kategorilerine ayırmıştır. İlişkisel düşünen öğrencilerin 6-8. sınıf düzeyinde "Bu işaret eşitliğin sol ve sağ tarafında aynı şey olduğunu gösterir." Şeklinde cevaplar verdiklerini göstermiştir. Araştırmacılar işlemsel düşünen öğrencilerin sayı ekleme veya cevap bulma anlamında gördüklerini belirlemiştir. Araştırmacılar diğer kategorisinde yer alan öğrencilerin eşittir işaretini eşitliği gösterir şeklinde basit açıklamalarla tanımladıklarını vurgulamışlardır. Ayrıca araştırmacılar öğrencilerin çoğunun işlemsel anlama düzeyinde olduklarını savunmuşlardır.

Köse ve Tanışlı (2011) yapmış oldukları çalışmada Türkiye'de okutulan ilköğretim matematik ders ve öğrenci çalışma kitaplarında eşittir işaretinin nasıl kullanıldığı ve öğrencilerin ilişkisel düşüncelerinin desteklendiği etkinliklere ne kadar yer verildiğini belirlemeyi amaçlamışlardır. Nitel araştırma yöntemlerinden doküman inceleme yöntemi ile elde edilen veriler içerik analizi metodu ile analiz edilmiştir. Elde edilen veriler neticesinde kullanılan ders ve çalışma kitaplarında yazılmış olan etkinliklerin çoğunlukla eşittir işaretinin

“sonuç bul” veya “işlem yap” anlamları üzerine yoğunlaştığı tespit edilmiştir. Eşittir işaretinin ilişkisel anlamını geliştirebilecek yeterli etkinliklerin verilmediği sonucuna ulaşılmıştır.

Kızıltoprak (2014), ortaokul beşinci sınıf öğrencilerinin ilişkisel düşüncelerinin gelişimini incelemeyi amaçladığı çalışmanın örneklemini beşinci sınıfta okuyan 6 öğrenci oluşturmaktadır. Öncelikle ön görüşme yapılan öğrencilere daha sonra 8 oturumdan oluşan bir öğretim süreci gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen öğretimlerde öğrencilere içerisinde dört işlem bulunan etkinlikler yapılmıştır. Yapılan etkinlikler neticesinde öğrencilerin sonuç bulma odaklı düşünmek yerine toplama ve çıkarma işlemlerinde verilenler arasında toplamsal ilişkilere, çarpma ve bölme işlemlerinde ise sayılar arasındaki çarpımsal ilişkilere daha çok odaklandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca ilişkisel düşünme yoluyla aritmetik öğrenimi kapsamında 6. sınıfta öğrenilen işlem özelliklerinin 5. sınıfta öğrenilebileceği tespit edilmiştir. Yapılan araştırmada elde edilen bulgular neticesinde öğrencilerin eşittir işaretine “sonuç bul” anlamının yanında sayılar arasında ilişki kurmaya yarayan matematiksel bir sembol olarak algıladıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Blanton vd. (2018) çalışmasında anasınıfında okuyan öğrencilerin eşitlik kavramını anlamalarının incelenmesi ile çok önemli bulgular elde edilmiştir. Yapılan bu çalışmanın amacı anasınıfında okuyan öğrencilerin eşitlik kavramına ilişkin ön düşüncelerinin ne olduğunu belirleyebilmektir. Çalışmada özellikle resmi matematik müfredatında var olan eşittir işareti ile henüz karşılaşmamış öğrencilerin eşittir işareti hakkındaki sahip oldukları düşünceleri incelenmiştir. Eşittir işareti hakkında ilişkisel düşüncelerini geliştirebilmek için 8 hafta süren bir eğitim uygulanmış ve bulgular nitel yöntemlerle elde edilmiştir. Yapılan eğitimden önce ve eğitim süresi boyunca öğrencilerin işlemsel düşüncede ısrarcı oldukları gözlemlenmiştir. Bu ısrarcı yaklaşım eğitim süresi boyunca yaşayacağı matematiksel uygulama ve etkinliklerin çok daha özenli tasarlanması gerektiğini vurgulamaktadır. Yapılacak olan sekiz haftalık eğitim süreci sonunda bu çalışmalar öğrencilerin formal olarak eşittir işaretini öğrendikleri zaman ilişkisel bir anlayışa sahip olacakları düşünülmektedir.

Bulut, Aygün ve İpek (2018) tarafından yapılan bir başka çalışmada 3.,4. ve 5. sınıf öğrencilerinden oluşan 245 kişiye 17 sorudan oluşan test uygulanmıştır. Bu çalışmada öğrencilerin eşittir işaretini ilişkisel ve işlemsel olarak anlamlandırdıklarını analiz etmişlerdir. Çalışmaya katılan öğrencilerden 3. sınıfta okuyan bir öğrenci hariç ilişkisel bir algı oluşturamadıkları, işlemsel algı oranının %90 üzerinde olduğu sonucunu elde etmişlerdir. Tüm katılımcılar birlikte düşünüldüğünde, çoğu öğrencinin eşittir işaretine işlemsel anlamını temsil eden ‘eder’ anlamını yükledikleri, ilişkisel anlamını temsil eden ‘denge’ anlamını kullanmadıkları belirlenmiştir.

Yıldız ve Atay (2019) yaptıkları bu çalışmalarında öğrencilerin eşittir işaretini nasıl algıladıklarını belirlemek için çalışmaya katılan 15 öğrenciye 6 açık uçlu soru sormuş. Yıldız ve Atay (2019) aritmetik ve cebir öncesi düzeyde hazırladığı soruları şu şekildedir:

1. “=” sembolü neyi ifade etmektedir? (Anlamı nedir?) Örnek veriniz.
2. $3 + 5 = \square$ ifadesinde $\square$ yerine hangi sayı gelmelidir? Açıklayınız.
3. $\square = 3 + 5$ ifadesinde $\square$ yerine hangi sayı gelmelidir? Açıklayınız.
4. $8 + 4 = \square + 5$ ifadesinde $\square$ yerine hangi sayı gelmelidir? Açıklayınız.
5. $8 = 8$ ifadesinin doğru veya yanlış olduğunu belirtiniz. Sebebini açıklayınız.
6. $6 = 2 + 4$ eşitliğini sözel olarak ifade ediniz.

Fyfe, Matthews ve Amsel (2020) tarafından yapılan bir araştırmada, üniversite öğrencilerinin eşitlik kavramıyla ilgili anlayışları ve cebir derslerindeki başarıları arasındaki ilişki incelenmiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre, birçok öğrenci eşitlik kavramını kavramsal olarak anlamaktadır, ancak bazıları sadece işlemsel bilgi sunmaktadır. Bu da, yetişkin öğrencilerin bile eşitlik kavramında çocuklarıinkiyle benzer bir anlayışa sahip olduğunu göstermektedir. Ayrıca, eşittir işaretinin doğru yorumlanması ile cebir performansı arasında bir ilişki olduğu ortaya çıkmıştır. Eşittir işaretini ilişkisel bir şekilde yorumlayabilen öğrenciler, cebir problemlerinde daha başarılı olurken, sadece işlemsel bir yorum yapabilen öğrenciler ise daha az başarılı olmuştur. Bu bulgular, eşittir işaretinin yanlış yorumlanmasının ilkökul döneminden çok daha ileri yaşlara kadar devam edebileceğini ve üniversite öğrencileri arasında geniş matematiksel düşünme becerilerinin önemli bir göstergesi olabileceğini göstermektedir.

Sorulan sorulara verilen cevaplardan elde edilen bulguları incelediğimizde, öğrencilerin eşittir işaretine “sayıların eşitliği”, “çözüm-sonuç” anlamları yüklediği, Çok az sayıda öğrencinin eşittir işaretini ilişkisel düşünerek açıkladığı gözlemlenmiştir.

Türkiye’de matematik öğretim programında eşit işaretine yönelik kazanımlar bulunmaktadır. Örneğin ikinci sınıfta yer alan kazanım, M.2.1.3.5. “Eşit işaretinin matematiksel ifadeler arasındaki ‘eşitlik’ anlamını fark eder. Eşit işaretinin her zaman işlem sonucu anlamı taşımadığı, eşitliğin iki tarafındaki matematiksel ifadelerin denge durumunu da (eşitliğini) gösterdiği vurgulanır. Örneğin $5 + 6 = 10 + 1$; $15 - 3 = 18 - 6$; $8 + 7 = 20 - 5$; $18 = 16 + 2$ ” (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018, s. 33) eşit işaretinin önemini vurgular.

Yapılan bu araştırmalardan aritmetikten cebire geçiş sürecindeki en önemli evrenin ortaokul dönemi olduğu söylenebilir (Öztürk, 2021). Çünkü cebir öğrenme alanına yönelik kazanımlar ortaokul öğretim programında yer almaktadır ve öğrencilerin cebirsel ifade

kullandıkları ilk dönemde ortaokul dönemidir. Bu bağlamda 5-8. sınıf düzeyinde eşittir işaretini anlamaya yönelik yapılacak gelişimsel araştırmaların cebir öğretimi araştırmalarına katkı yapması beklenmektedir.

Yukarıda açıklanan alanyazın doğrultusunda yapılan çalışmaların özelliklerinden yararlanarak mevcut çalışmanın alanyazınla karşılaştırılması Tablo 1’de sunulmuştur.

Tablo 2. *Bölümler Bazında Alanyazınla Mevcut Çalışmanın Karşılaştırılması*

Bölüm	Alanyazın	Mevcut çalışma
Konu seçimi	Alanyazındaki araştırmalar incelendiğinde son yıllarda erken cebir üzerine araştırmaların yoğunlaştığı görülmektedir. Erken cebir araştırmalarında eşittir işaretine yönelik uluslararası alanyazında birçok araştırma yapılmasına rağmen Türk öğrencilerin eşittir işaretine yönelik algıları inceleyen araştırmalar alan yazında yer almamaktadır	Bu araştırma Türk ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretine yönelik algılarını incelemeye yönelik yapılmış olması bakımından alanyazından farklılaşmaktadır. Ayrıca çalışma eşittir işaretini incelemeye yönelik yaklaşık çeyrek yüzyıl öncesindeki araştırmalar için de bir izleme araştırması olma özelliğine sahiptir.
Araştırma Modeli	Alanyazın incelendiğinde öğrencilerin eşittir işaretine yönelik anlamalarını inceleyen araştırmalarda durum çalışması modelinin tercih edildiği söylenebilir. Bu durum sınıf düzeylerine göre öğrencilerin karşılaştırılmasına yeterince imkan vermemektedir.	Bu çalışmada gelişimsel araştırma modelinin bir türü olan enlemsel model kullanılmıştır. Bu bağlamda ortaokul 5-8. sınıf öğrencilerinin eşittir işaretine yönelik algıları karşılaştırmalı olarak incelenecektir. Çalışma bu yönüyle alanyazına yenilik kazandırmaktadır.
Katılımcılar	Yapılan araştırmalarda çoğunlukla okul öncesi, ilkokul ve 6. sınıfa kadar olan ortaokul öğrencilerinin eşittir işareti üzerine yönelik algıları incelenmiştir.	Bu çalışmada 5-8.sınıflarda okuyan ikişer öğrenci tipik durumu temsil edecek şekilde seçildiğinden öğrencilerin eşittir işareti algılarının zaman içerisindeki değişimini belirleyebilmek hedeflenmiştir.

Veri Araçları	Toplama	Alanyazında daha çok aritmetik ve cebir öncesi düzeyde sorular hazırlanarak öğrencilerin yazılı sorulara verdiği cevaplardan eşittir işareti üzerine algıları belirlenmeye çalışılmıştır.	Bu çalışmada aritmetik, cebir öncesi, cebir, orantısal ilişki, özdeşlik ve problem şeklinde hazırlanan soruların yanı sıra her bir öğrenci ile klinik mülakatlar yapılarak veriler elde edilmiştir.
Verilerin Analizi		Alan yazında nitel verilerin analizinde içerik analizi yapılarak kodlar elde edilmiştir. Öğrencilerin sorulara verdiği cevaplar bu kodlara uygunluğuna göre dağıtılmaya çalışılmıştır.	Bu çalışmada öğrencilerin verdiği cevaplara göre eşittir işaretine yönelik algıları “işlemsel”, “denge/aynı” ve “ilişkisel düşünme” olmak üzere üç alt kategoriye ayrılmıştır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

Yöntem

Araştırma Modeli

Bu çalışmada gelişimsel araştırma modeli kullanılmıştır. Gelişimsel araştırmalar öğrencilerdeki uzun süreli değişimleri göstermeye yönelik yapılan araştırmalardır. Bir konu ya da kavramın hangi yaş düzeyinde ne kadar öğrenilebileceğini ortaya koymada gelişimsel araştırma modelleri sıklıkla kullanılır (McMillan, & Schumacher, 2014). Gelişimsel araştırmaların boylamsal ve enlemsel olarak iki türü vardır. Boylamsal araştırmalar uzun bir dönem çalışma yapmayı gerektirdiğinden yüksek miktarda maddi kaynak gerektirmektedir ve araştırmanın sonlandırılması için uzun zamana gereksinim duyulur. Bu güçlükleri aşmak için enlemsel araştırmalar tercih edilebilir (McMillan, & Schumacher, 2014). Bu şekilde yapılan çalışmalarda aynı konunun bir örneklem üzerinde uzun yıllar çalışarak gelişim farklılıklarının araştırılması yerine, farklı sınıf seviyelerinde eşdeğer örneklemeler belirleyerek çalışma çok daha kısa bir zamanda tamamlanabilir (Çepni, 2007). Bu çalışmada farklı sınıf düzeyindeki öğrencilerin eşittir işaretine yönelik algıları incelendiğinden gelişimsel araştırmanın enlemsel türü kullanılmıştır.

Katılımcılar

Yapılan çalışmada katılımcıları belirlemeden önce ilgili kurum ve kuruluşlardan gerekli tüm resmi izinler alınmıştır. Nitel araştırma yöntemlerinde birincil amaç genelleme yapmak olmadığından, çalışılacak konunun tüm ayrıntılarını detaylı bir şekilde gözlemlemek hedeflendiğinden amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Bu hedef doğrultusunda 2022-2023 eğitim öğretim yılı bahar döneminde Doğu Karadeniz Bölümü'nde bulunan bir ildeki bir devlet okulunun 5-8. sınıflarında eğitim gören sekiz öğrenci araştırmanın çalışma grubunu oluşturmuştur. Çalışmaya katılan öğrencilerin ikisi kız altısı erkek öğrencidir. Çalışmaya katılan öğrenciler belirlenen okuldaki matematik öğretmenlerinin görüşleri ve karne notları dikkate alınarak sınıfı temsil edecek tipik özelliğe sahip öğrenciler belirlenmiştir. Bu özelliği sağlayan her sınıf düzeyinden iki öğrenci çalışmaya dâhil edilmiştir. Çalışmaya katılan öğrencilerin tipik durumu temsil edecek şekilde seçilmesinin nedeni sınıf düzeyinde karşılaştırmalar yapılacağından başarılı ve başarısız öğrencilerin sınıf düzeyini temsil etmeyebileceği düşünülmektedir.

Veri Toplama Araçları

Çalışmanın verileri klinik mülakatlar yoluyla toplanmıştır. Bunun için öğrencilere cebir soruları içeren bir form verilmiş ve bu formdaki soruları sesli düşünerek çözmeleri istenmiştir. Öğrencilerin sesli düşünme sürecinde verdiği cevaplar ve söylediği ifadeler dikkate alınarak, klinik mülakatlar kullanılmıştır. Klinik mülakatlar, öğrencilerin düşünce dünyalarına girebilmek, soru çözümünde kullanılan metotların her birini keşfedebilmek, bilişsel becerilerini değerlendirebilmek ve esnek soru sorma şansı tanıdığı için eğitim araştırmalarında kullanımı önemlidir (Güven, & Karataş, 2003). Bu araştırmada ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretine yönelik algılarının incelenmesi amaçlandığından klinik mülakatlar kullanılmıştır.

Çalışmada kullanılan sorular aritmetik, cebir öncesi, orantısal ilişki, cebir, özdeşlik ve problem olarak sıralanmıştır. Bunun için ilk olarak araştırmacı tarafından her bir soru sınıfıyla ilgili iki soru hazırlanmıştır. Ardından çalışmanın amaçları belirtilerek sorular üç uzmana (üçü de öğretim üyesi) sunulmuştur. Uzmanlardan biri soruların kavram-işlem-uygulama esasına dayalı olarak sunulması gerektiğini ifade etmiştir. Bu doğrultuda soruların sıralamasında değişiklik yapılmıştır. Ayrıca problem sorularından birinde öğrencilerin eşittir işaretinin anlamına odaklanmak yerine çözüm stratejisine odaklanacağını ifade etmiştir. Bu doğrultuda ilgili problem testten çıkarılmıştır. Ayrıca denge anlamı için terazi sorusu kullanılmasını önermiştir. Ancak bu araştırmada denge için terazi sorusu kullanılması öğrencilerin eşittir işaretine yönelik algılarında onları eşittir işaretinin denge anlamına yönelteceği düşünüldüğünden bu soru eklenmemiştir. Diğer uzman ise özdeşlik sorusunun öğrenciler için zor olduğunu ve her iki sorununda doğrudan aynı amaca yönelik olduğunu söyleyerek çıkarılmasını önermiştir. Bu doğrultuda özdeşlik sorularından biri çıkarılmıştır. Soruların son hali bir uzmanın (öğretim üyesi) daha görüşü alınarak netleştirilmiştir. Tablo 2’de araştırmada kullanılan sorular ve gerekçeleri açıklanmıştır.

Çalışmada kullanılacak klinik mülakat soruları için Newman (1983) ve Booth’un (1984) klinik mülakatlarda kullanılmasını önerdiği sorular uyarlanarak belirlenmiştir. Bu sorular; “Lütfen soruyu bana okuyun.”, “Soru ne anlama geliyor?”, “Soruyu cevaplamak için ne yapmamız gerekir?”, “Soruyu cevaplayarak ne düşündüğünü sesli olarak ifade et.” ve “Son cevabını kâğıda yaz.” şeklindedir. Bunlar dışında öğrenci cevapları dikkate alınarak anlık sorular sorulmuştur.

Tablo 3. *Araştırmada Sorulan Sorular ve Gerekçeleri*

Soru	Gerekçesi
Birinci Soru $5+2=2+5$ ifadesi doğru mudur? Neden? Buradaki eşittir sizin için ne ifade ediyor?	Bu soru, öğrencilerin eşittir işaretinin her iki tarafın, denkliliğini ifade edip etmediğinin görülmesine imkan veren aritmetik bir sorudur. Ayrıca öğrencinin soruyu çözerken kullanacağı stratejiler (düşünme ve deneme, deneme ve uyarılma, deneme ve yanılma, tahmin etme, ilişki arama, mantıksal çıkarımlarda bulunma) öğrencilerin seviyesinin görülmesine fırsat verecektir.
İkinci Soru $7+3=9+1$ ifadesi doğru mudur? Neden? Buradaki eşittir sizin için ne ifade ediyor?	Bu soru, öğrencilerin eşittir işaretinin her iki tarafın, denkliliğini ifade edip etmediğinin görülmesine imkan veren aritmetik bir sorudur. Ayrıca öğrencinin soruyu çözerken kullanacağı stratejiler (düşünme ve deneme, deneme ve uyarılma, deneme ve yanılma, tahmin etme, ilişki arama, mantıksal çıkarımlarda bulunma) öğrencilerin seviyesinin görülmesine fırsat verecektir.
Üçüncü Soru $9+6=\square+7$ ifadesinde $\square$ yerine ne yazılmalıdır? Açıklayınız. Buradaki eşittir sizin için ne ifade ediyor?	Bu soru, farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin bilgi birikimlerinin aritmetikten cebire geçiş dönemi olan cebir öncesi (Lodholz, 1990) dönemdeki düşüncelerini görülmesi açısından önemli bir fırsat sunan cebir öncesi sorusudur. Ayrıca öğrencinin soruyu çözerken kullanacağı stratejiler (düşünme ve deneme, deneme ve uyarılma, deneme ve yanılma, tahmin etme, ilişki arama, mantıksal çıkarımlarda bulunma) öğrencilerin seviyesinin görülmesine fırsat verecektir.
Dördüncü Soru $\frac{8}{\square} = \frac{24}{6}$ ifadesinde $\square$ yerine ne yazılması gerekir? Neden?	Bu soru, farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin bilgi birikimlerinin aritmetikten cebire geçiş dönemi olan cebir öncesi (Lodholz, 1990) dönemdeki düşüncelerinin görülmesi açısından önemli bir fırsat sunan cebir öncesi sorusudur. Eşittir işaretinin orantı içerisinde ne anlam ifade ettiğini görebilmek açısından araştırmamıza fayda sağlayacaktır. Ayrıca öğrencinin soruyu çözerken kullanacağı stratejiler (düşünme ve deneme, deneme ve uyarılma, deneme ve yanılma, tahmin etme, ilişki arama, mantıksal çıkarımlarda bulunma) öğrencilerin seviyesinin görülmesine fırsat verecektir.
Beşinci Soru $4\alpha=42$ ifadesinde α yerine kaç yazılması gerekir? Neden?	Bu soru, sayısal hesaplamalar yaparken eşittir işaretinin anlamını ortaya çıkarmanın yanında eşittir işaretinin solunda bilinmeyen olduğu durumlarda yapılacak çözüm stratejilerini görmeyi amaçlayan orantısal ilişki sorusudur. Soruda verilen “4a” ifadesi ile bu ifadeye denk olan “4.a” ifadeleri arasında anlam bakımından fark olup olmadığını görebilmek açısından önemli bir katkı sağlayacaktır.
Altıncı Soru $\frac{a}{6}=3$ ifadesinin doğru olabilmesi için a yerine kaç yazılması gerekir? Neden?	Bu soru, sayısal hesaplamalar yaparken eşittir işaretinin anlamını ortaya çıkarmanın yanında eşittir işaretinin solunda bilinmeyen olduğu durumlarda yapılacak çözüm stratejilerini görmeyi amaçlayan orantısal ilişki sorusudur. Aynı zamanda bu soru orantıda bilinmeyen olduğu durumlarda eşittir işaretinin nasıl bir anlam yüklediğini görebilmek açısından araştırmaya katkı sağlayacaktır.
Yedinci Soru $a+b=8$ bu işlemde eşittir işareti ne anlam ifade eder?	İçerisinde birden fazla bilinmeyen bulunan bu soru, bilinmeyenlerin alacağı farklı değerler için eşitliğin nasıl sağlanacağını görülmesine katkı sağlayacak bir cebir sorusudur. Öğrencinin soruyu çözerken kullanacağı stratejiler (düşünme ve

	deneme, deneme ve uyarlama, deneme ve yanılma, tahmin etme, ilişki arama, mantıksal çıkarımlarda bulunma) öğrencilerin seviyesinin görülmesine fırsat verecektir.
Sekizinci Soru a=b ifadesinden ne anlıyorsunuz? Açıklayınız.	Bu soru, eşittir işaretinin farklı anlamları olan “aynı, denge, denk” kavramlarını nasıl algılayacağını görmeyi amaçlayan cebir sorusudur. Öğrencinin soruyu çözerken kullanacağı stratejiler (düşünme ve deneme, deneme ve uyarlama, deneme ve yanılma, tahmin etme, ilişki arama, mantıksal çıkarımlarda bulunma) öğrencilerin seviyesinin görülmesine fırsat verecektir.
Dokuzuncu Soru $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ifadeleri eşit midir? Açıklayınız.	Bu soru, özdeşlik kavramı ile eşittir işareti arasındaki ilişkinin nasıl anlamlandırıldığını görmeyi amaçlayan bir özdeşlik sorusudur. Eşittir işaretinin solundaki ifadenin gerekli işlemler yapıldığında eşittir işaretinin sağındaki ifade ile aynı olacağını gören öğrencinin kullandığı işlem başmakları onun hangi seviyeden soruya baktığının görülmesi açısından araştırmaya ışık tutacaktır.
Onuncu Soru Cebimdeki paranın 7 lirasını harcayınca 9 liram kaldı, sözel ifadesinin matematik dilindeki karşılığı nedir? Yazınız ve açıklayınız. Eşittir işareti burada ne anlama geliyor?	Bu soru, üzerinde çalışma yapılan öğrencilerin soru çözüm stratejilerindeki gelişim ve değişimini araştırmaya fırsat tanıyan problem sorusudur. Aynı zamanda değişik çözüm stratejilerinin üretilebileceği sözel bir ifadeyi matematik dilinde nasıl yazıldığını görebilmeyi amaçlayan bir soru çeşididir.

Verilerin Analizi

Verilerin analizinde betimsel analiz yapılmıştır. Bunun için alanyazında eşittir işaretinin anlamlarına yönelik önceki araştırmalar incelenmiştir (Madej, 2022; Matthews vd., 2012; Pang, & Kim, 2018). Matthews vd. (2012) her bir sorunun doğru cevabı için 1, yanlış cevabı için 0'ı kullanmışlardır. Örneğin bir öğrencinin ilişkisel bilgisini test eden bir soruda verdiği yanıtın doğru sayılabilmesi için çözümü ilişkisel vermesi gerekir, aksi halde diğer cevaplar yanlış kabul edilecektir. Aynı zamanda Pang ve Kim (2018), öğrencilerin vermiş oldukları cevaplara baktıklarında cevapları sadece doğru yanlış diye ayırt etmemiş, soruya verilen cevaba göre üç alt kategoriye ayrılmış: “ilişkisel düşünme”, “işlemsel açıklama” ve “eksik veya yanlış açıklama” şeklinde. Madej (2022), çalışmasında her bir sorunun doğru veya yanlış cevabına göre üç alt kategoriye ayırmıştır. Bu kategorileri açıklarken “ilişkisel düşünme” yi “a”, “işlemsel açıklama” yı “b” ve “eksik veya yanlış açıklama” yı ise “c” harflerini kullanarak yapmıştır. Örneğin, cevabını doğru verdiği bir soruyu “ilişkisel düşünme” ile açıklayan bir öğrencinin kodu “1a” olacak şekilde düzenlemiştir. Bu çalışmanın veri analizinde benzer bir kodlama metodu kullanılmıştır. Knuth vd. (2008) ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretine yönelik algılarını incelediği araştırmada eşittir işaretinin ilişkisel, işlemsel, diğer ve cevap yok olarak dört kategoride toplandığını belirlemiştir. Carpenter vd. (2005) ilişkisel düşünmeyi

sayılar ve aralarındaki ilişkinin özel bir yolu olarak açıklamış ve anlamayı kolaylaştıracağını ifade etmiştir.

Eşittir işaretinin ilişkisel düşünme anlamında denge ve sayılar arasındaki ilişkiyi fark etme üzerinde durulmuştur. Knuth vd. (2008) eşittir işaretini ilişkisel düşünen öğrencilerin iki nicelik arasındaki denklik ilişkisine odaklandığını belirlemiştir. Bu nedenle sorularda verilen eşitliğin doğru olup olmadığını işlem yapmadan, sayılar arasındaki ilişkiden yardım alarak cevap veren öğrencilerin yanıtları “İlişkisel düşünme” olarak kodlanmıştır. Örneğin; $7+3=9+1$ ifadesi doğru mudur? Açıklayınız, şeklinde sorulan bir soruya ilişkisel düşünen bir öğrencinin verdiği yanıt şu şekilde olmuştur: Bu işlemde sayının biri iki artırmış [7’den 9’a çıkmış], diğeri iki azalmış [3’den 1’e inmiş]. Bu nedenle eşitlik korunmuştur.

Verilen soruya işlem yaparak eşitliğin her iki tarafının eşit olduğunu görmeye çalışan öğrencilerin yanıtları bu çalışmada “denge/aynı” olarak kodlanmıştır. Örneğin: $9+6= \square +7$ ifadesinde $\square$ yerine kaç yazılması gerekir? Açıklayınız sorusuna denge/aynı düşüncesi ile cevap veren bir öğrenci şu şekilde açıklama yapmıştır: “Şimdi $9+6$, 15 ediyor yani bir sayı ile 7’nin toplamı da 15 etmesi gerekiyor. Dolayısıyla 15 ten yediyi çıkarıp sekiz sayısını bulabiliriz”.

Son olarak sorulan soruya belli belirsiz, hedefi olmadan işlemler yaparak cevap vermeye çalışan öğrencilerin cevaplarını ise “işlemsel” olarak kategorilendirilmiştir. Örneğin: $4a=42$ ifadesinde a yerine kaç gelmesi gerekir? Sorusuna işlemsel düşünen bir öğrenci şu cevabı vermiştir: “Burada 4a eşittir 42, yani oradaki a bir rakam olarak anlıyorum ve hangi rakam getirilebilir onu düşünüyorum. Şimdi oraya 1 getirsek 41 ile 42 eşit olmaz ama ikiyi getirsek 42 ile 42 eşit olur ve bu sefer eşit olduğu için a yerine iki gelir”. Önceki araştırmalarda bu kategori için işlemsel düşünme kategorisi kullanılmıştır.

Yapılan bu çalışmada öğrencilere yöneltilen 10 soruluk sınav ile birlikte klinik mülakat sorularına verilen öğrenci yanıtları “ilişkisel düşünme”, “denge/aynı” ve “işlemsel” şekilde 3 kategoriye ayrılarak tablolar halinde gösterilmiştir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

Bulgular

Araştırmada ulaşılan bulgular, ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretine yönelik algılarının ilişkisel, denge ve işlemsel olarak üç kategoride toplamak mümkündür. Öğrencilerin verdiği cevaplar aritmetik, cebir öncesi, orantısal, cebir, özdeşlik ve cebir problemleri başlıkları altında ayrı ayrı ele alınmıştır.

Aritmetik Sorularında Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları

Aritmetik sorularında öğrenciler, eşittir işaretinin ilişkisel düşünme, denge/aynı ve işlemsel anlamlarına yönelik algıya sahip oldukları gözlemlenmiştir. Öğrencilerin eşittir işaretine yönelik algılarının belirlenmesinde klinik mülakatlar yapılarak elde edilen cevaplar Tablo 4’te sunulmuştur.

Tablo 4. Aritmetik Sorularına Yönelik Öğrenci Cevapları

Algı	Öğrenci	Soru No	Öğrenci ifadesi
İlişkisel düşünme	Ö8 ₁	S1	[5+2=2+5 için] ...eşitlik doğrudur. Çünkü toplama işleminde yerler değişse de aynı sonuç çıkar...
	Ö7 ₁	S1	[5+2=2+5 için] ...bence doğrudur, çünkü toplama işleminin değişme özelliği vardır.
		S2	[7+3=9+1 için] ...[Farklı bir yol kullanabilir miydik? Sorusu üzerine verilen cevap]...Yediye iki eklerdik dokuz, üçten de 2 çıkarırdık 1 olurdu. Yani sayı ekleyip çıkararak da eşitliği gösterebiliriz.
	Ö6 ₁	S1	[5+2=2+5 için] ...bunlar doğrudur çünkü toplamada iki sayı yer değiştirdiğinde yine bir şey değişmez.
	Ö5 ₁	S1	[5+2=2+5 için] ... eşitlik doğrudur. Çünkü toplama işleminde toplanan sayıların yerlerinin değişmesi herhangi bir değişiklik ifade etmiyor... Yani ikisinin de sonuçlarının eşit olduğu anlamına geliyor.
		S2	[7+3=9+1 için] ...burada her iki tarafın da arasında iki fark var...
	Ö8 ₂	S2	[7+3=9+1 için] ...bu işlemde sayının biri iki artırmış [7’den 9’a çıkmış], diğeri iki azalmış [3’den 1’e inmiş]. Bu nedenle eşitlik korunmuş.
	Ö5 ₂	S1	[5+2=2+5 için] ...toplama işleminde sayıların yerlerinin değişmesi sonucu değiştirmez.
	Ö8 ₁	S1	[5+2=2+5 için] ...iki taraftaki toplam sayı da aynıdır.
		S2	[7+3=9+1 için] ...ifadesi doğrudur, çünkü 7+3 de 10 dur, 9+1 de 10 dur...
Denge			

İşlemsel	Ö7 ₁	S1	[5+2=2+5 için] ... Aynı 2 sayı farklı şekilde yerlere gelerek toplanırsa sonuç yine aynı çıkar... Burada ki eşittir işareti benim için bunların toplamlarının sonucunun aynı olduğu anlamına geliyor.
		S2	[7+3=9+1 için] ... Terazinin bir kefesine 7 kg ve 3 kg koyarız, diğer kefeye ise 9 kg ve 1 kg koyarız terazi dengede durur... Terazinin bir kefesine 7 kg ve 3 kg koyarız, diğer kefeye ise 9 kg ve 1 kg koyarız terazi dengede durur.
	Ö6 ₁	S1	[5+2=2+5 için] ... ikisinin sonucu da aynıdır...
		S2	[7+3=9+1 için] ... Hocam buradaki ifadeler doğrudur, çünkü yedi ile üçü toplarsam on eder, dokuz ile biri toplarsam 10 eder. Buradaki eşittir işaretinin anlamı da ikisinin toplamı eşittir, ikisi aynı yani... [Başka bir yoldan yapılabilir miydi? Sorusu üzerine]... Toplamlarına bakardım, sonra onları karşılaştırdım. Cevap eşit ise doğrudur, eşit değilse yanlıştır.
	Ö5 ₁	S1	[5+2=2+5 için] ... burada ki eşittir işaretinin anlamı her iki tarafın da sonuçlarının eşit olduğu anlamına geliyor...
		S2	[7+3=9+1 için] ... doğrudur, çünkü iki tarafın toplamı da 10 sayısına eşit oluyor.
	Ö8 ₂	S1	[5+2=2+5 için] ... Bu ifade doğrudur. Çünkü 5 ile 2'yi topladığımız da 7 eder, eşittir işaretinin karşısı da yedi olduğu için 7=7 olur.
		S2	[7+3=9+1 için] ... Bu ifade doğrudur. Çünkü 7 ile 3 ün toplamı 10, 9 ile 1 i toplarsak o da 10 yani sonuçları eşit olduğu için doğrudur.
	Ö7 ₂	S1	[5+2=2+5 için] ... Buradaki sayıların toplamı eşittir çünkü... eşittir işareti matematiksel olarak sayıların birbirine eşit olup olmadığını bize gösteriyor.
		S2	[7+3=9+1 için] ... Çünkü, buradaki sayıların toplamı yine aynı olduğu için bu iki ifade eşittir.
	Ö6 ₂	S1	[5+2=2+5 için] ... yani hocam 5+2, 2+5 ile aynı olduğu için, sonuç değişmediği için eşittir işaretini koymuşlar.
		S2	[7+3=9+1 için] ... Yani 7+3 ün sonucu da 10, 9+1 in sonucu da 10 yani sonuçlar eşit olduğu için buraya eşittir işaretini koymuşlar... yani ikisinin de sonucu aynı...
İşlemsel	Ö5 ₂	S1	[5+2=2+5 için] ... Beş artı iki yedi eder ve iki artı beşte yedi eder birbirine eşittir...
		S2	[7+3=9+1 için] ... 7 + 3 on ediyor 9 + 1 de 10 ediyor. On ile on da birbirine eşit oluyor.
	Ö6 ₁	S1	[5+2=2+5 için] ... Yani 7 + 3 buradakiler bazı kişiler bunların nasıl diyeyim, bunların eşitlik ifadesi olduğu, yani sonuç değil de, eşitlik ifadesi olarak düşünebilir.
	Ö5 ₁	S2	[7+3=9+1 için] ... [Başka bir yoldan yapılabilir miydi? Sorusu üzerine] ... Bu soruyu farklı bir yoldan yaparsak, yani 10'dan 3'ü çıkarıp, 10'dan 1'i çıkarıp bulabilirdik.
	Ö5 ₂	S2	[7+3=9+1 için] ... [Başka bir yoldan yapılabilir miydi? Sorusu üzerine]... Dört işlemi deneyerek eşit olup olmadıklarını bulabiliriz, yani önce çarpmayı deneriz, bölmeyi deneyebilir, olmazsa toplamayı yaparız. Yani deneyerek eşit olup olmadıklarını bulmaya çalışırdık.

Tablo 4 incelendiğinde öğrencilerin aritmetik sorularında ilişkisel, denge/aynı ve işlemsel anlamlarına odaklandıkları görülmektedir. İlişkisel anlama yönelik görüş belirten öğrenciler, sayılar arasında ilişki aradığı söylenebilir. Başka bir ifadeyle eşitlikte bir tarafındaki sayı ile diğer tarafındaki sayının nasıl değiştiğine odaklanmışlardır. Denge anlamına yönelik görüş belirten öğrenciler eşitliğin her iki tarafındaki işlemi yaparak sonucunu bulmuş ve buldukları sonuçları karşılaştırarak soruya cevap vermeye çalışmışlardır. Bununla birlikte öğrencilerin özellikle denge/aynı anlamında yoğunlaştığı görülmüştür. Denge anlamını düşünen öğrenciler daha çok sonuç bulup, sonuçları karşılaştırma odaklı cevaplar vermişlerdir. Eşittir işaretinin ilişkisel anlamını düşünen öğrenciler ise toplama işleminin değişme özelliğini kullanarak cevaplar vermişlerdir. Sınıf düzeylerine göre öğrencilerin aritmetik sorularındaki eşittir işaretine yönelik algılarının karşılaştırılması Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5. *Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Aritmetik Sorularına Verdiği Cevaplar*

		5. Sınıf		6. Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf	
		Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2
İlişkisel Düşünme	Soru 1	X	X	X		X		X	X
	Soru 2	X				X			
Denge/ Aynı	Soru 1	X	X	X	X	X	X	X	X
	Soru 2	X	X	X	X	X	X	X	X
İşlemsel	Soru 1			X					
	Soru 2	X	X						

Tablo 5 incelendiğinde aritmetik sorularına her sınıf seviyesinden bir öğrencinin ilişkisel düşünerek cevap verdiği belirlenmiştir. 5. ve 8. sınıf düzeylerindeki her iki öğrenci de ilişkisel düşünme anlamında cevap verebilmiştir. Araştırmaya katılan öğrencilerin tümü aritmetik sorularında eşittir işaretinin denge/aynı anlamını kullanmıştır. Eşittir işaretine işlemsel anlamına yönelik cevap veren öğrenciler sadece 5. ve 6. sınıf öğrencileridir. 5. Sınıftaki her iki öğrenci de eşittir işaretinin işlemsel anlamını kullanmış, 6. Sınıfta ise sadece bir öğrenci işlemsel anlamı kullanmıştır. Sınıf düzeyi yükseldiğinde ise eşittir işaretinin işlemsel anlamı kullanılmamıştır. Bu durum öğrencilerin sınıf seviyesi ilerledikçe eşittir işaretini işlemsel düşünmeden denge/aynı ve ilişkisel düşünmeye taşıdığı şeklinde yorumlanabilir.

Cebir Öncesi Sorularında Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları

Cebir öncesi sorularında öğrenciler, eşittir işaretinin ilişkisel düşünme, denge/aynı ve işlemsel anlamlarına yönelik algıya sahiptirler. Öğrencilerin eşittir işaretine yönelik algılarının belirlenmesinde klinik mülakatlar yapılarak elde edilen cevaplar Tablo 6'da sunulmuştur.

Tablo 6. Cebir Öncesi Sorularına Yönelik Öğrenci Cevapları

Algı	Öğrenci	Soru No	Öğrenci ifadesi
İlişkisel	Ö7 ₁	S3	[9+6= □ +7 için] ... 7 altıdan bir fazla o zaman kare de 9'dan bir eksik olur.
	Ö5 ₁	S4	[$\frac{8}{\square}=\frac{24}{6}$ sorusu için] ... Şimdi bu ifadelerin eşit olabilmesi için bu kesirlerin denk olması gerekiyor...
	Ö8 ₂	S3	[9+6= □ +7 için] ... Farklı bir yoldan söyleyecek olursak diğer soruda olduğu gibi, burada 6'yı bir artırmışız, 9'u da 1 azaltırız ve kareyi buluruz.
	Ö7 ₂	S3	[9+6= □ +7 için] ... Yedi, altının bir fazlası, sekizde dokuzun bir eksiği olabilir.
Denge, Aynı	Ö8 ₁	S3	[9+6= □ +7 için] ... 9 artı 6, 15'tir 15'i eşitlemek için terazi gibi düşünersek dengelemek için 7 ye ne eklersek 15 olarak düşünüp 8 diyoruz...oradaki eşittir bize kefelerin aynı olduğunu gösteriyordu...
		S4	[$\frac{8}{\square}=\frac{24}{6}$ sorusu için] ... Ben bunu katı durumundan yapıyorum. 8 in 3 katı 24 ise 6, 3 katı olan bir şey olduğu için 6'yı 3'e böldüğümüzde kutucuğa 2 geliyor...8, 24'ün 3 katı olduğu için burada da 3 katı olması lazım... katı durumundan 3 katı var, 3x dersek 3x eşittir 6 deriz çünkü paydalardan 3x eşittir 6, üçü de karşıya attığımızda 6 bölü üçten x eşittir 2 olur.
	Ö7 ₁	S3	[9+6= □ +7 için] ... Öncelikle 9 ile 6'yı toplarsak 15 eder, yedi ile neyi toplarsak yani kare yerine sekiz yazılmalıdır. Çünkü 8 ile 7'yı toplarsak 15 eder... Terazinin bir kefesine 9 ve 6 koyardık diğerine de 7, sonra deneyebildik. Yediye ne eklersek 9 ve altının toplamı kadar bir sayı çıkar. Burada da 8 cevabını bulurduk.
		S4	[$\frac{8}{\square}=\frac{24}{6}$ sorusu için] ... Öncelikle bu genişletilmiş hali olabilir. İki olabilirdi sekiz bölü iki olursa iki ile üçü çarparsak altı sekiz ile üçü çarparsak 24 olur. O zaman kare yerine iki yazılması gerekir. Çünkü 24/6, 8/2'nin genişletilmiş hali... İki taraf ta büyümüş yani pay ve paydayı 3 ile çarpılmış.
	Ö6 ₁	S3	[9+6= □ +7 için]... 9 + 6 eşittir 15 eder 7 çıkarttık 8 oldu. Yani kare yerine 8 yazılmalıdır.
		S4	[$\frac{8}{\square}=\frac{24}{6}$ sorusu için]... Sadeleştirelim hocam 24 ü 8 e böldük 3, 6'yı 2 ye böldük.... İkisinin de 4 tam etmesi lazım yani oraya 2 gelir hocam. Çünkü 8 i 2 ye böldük mü 4 tam eder, 24 ü 6 ya böldük mü 4 tam eder...[Sekizi neden ikiye böldün? Sorusu üzerine verilen cevap] Çünkü sekizi neye bölersek 4 tam eder onu bulmak için...24 ü sekize böldüğümüz zaman 3 tam eder. Bu yoldan da yaparız. Altıyı neye bölersek 3 tam eder, altıya üçe böldük 2 yani buraya da 2 gelecek.
	Ö5 ₁	S3	[9+6= □ +7 için]... Şimdi 9+6, 15 ediyor yani bir sayı ile 7'nin toplamı da 15 etmesi gerekiyor. Dolayısıyla 15 ten yediyi çıkarıp sekiz sayısını bulabiliriz...[Neden 7 çıkardın? Sorusu üzerine] Çünkü sonuçların eşit olması gerekiyor. Dokuz ve altının toplamının sonuçları eşit, bu nedenle 15 ten çıkarmamız gerekiyor.
		S4	[$\frac{8}{\square}=\frac{24}{6}$ sorusu için]... 24 ü 8 e böldüğümüzde 3 ediyor. Dolayısıyla 3 katı olması gerekiyor kesrin. Buradan da 6 sayısı 2'nin 3 katı olduğu için kare yerine 2 yazılması gerekiyor... Evet sonuçları denk.

İşlemsel	Ö8 ₂	S3	[9+6= □ +7 için]... Kare yerine burada 8 yazılmalıdır...
		S4	[$\frac{8}{\square} = \frac{24}{6}$ sorusu için]... İki yazılması gerekir. Çünkü 24 ü 6 ya böldüğümüzde 4 çıkar, aynı şekilde 8 i de 2 ye bölersek 4 çıkar.
	Ö7 ₂	S3	[9+6= □ +7 için]... kare 8 olur, çünkü 9+6, 15 eder karşısında da 7+ kare var yani 15-7 eşittir 8 eder... öbür tarafın toplamı ile 7+ karenin birbirine eşit olması gerekiyor. O yüzden 15-7 yapıyoruz, böylece kareyi buluyoruz.
		S4	[$\frac{8}{\square} = \frac{24}{6}$ sorusu için]... İlk önce 24 ü altıya böleriz 4 olur, sekizi de kaç bölersek dört eder, ikiye bölersek dört eder. O yüzden kare de 2 olur.
	Ö6 ₂	S3	[9+6= □ +7 için]... Dokuz artı altı eşittir önce onun sonucunu bulacağız, ve yedi ile neyi toplarsak bu sonuca eşit olur düşüneceğiz. Şimdi dokuz ile altıyı topladığımızda 15 ediyor yedi ile neyi toplarsak 15 eder buraya da 8 gelecek. Yani kare 8 olmalı.
		S4	[$\frac{8}{\square} = \frac{24}{6}$ sorusu için]... Kesir olarak bakarsak burada böleceğiz. Şimdi bu taraf 4 oldu diğer tarafı da 2 ile bölersek sonucu 4 oluyor... Bu kesirler eşitmiş.
	Ö5 ₂	S3	[9+6= □ +7 için]... Dokuz artı altı 15 ediyor...[O zaman kare 15 midir? Sorusu üzerine]... Hayır kare 15 değildir. 7 ile kaç toplarsak 15 edeceğini normal burada soruyor. Yani 8 ifadesi buraya yazılabilir, çünkü 8 + 7 ifadesi 15 ediyor, 9 + 6 da 15 ediyor birbirine eşit...[Terazi modeli ile nasıl yaparız sorusu üzerine]... Mesela 9 ile 6 yı toplam 15 bu ağırlığı herhangi bir kefeye koyarım. Diğer kefeye de 7 ağırlığını koyarım, aralarında bir eşitsizlik olur. Sonra yedi ile kaç toplarsam 15 olur diye düşünürüm sekizi toplamamız gerekir. Bulduğumuz sekizi de bu kefeye koyarsak keferler eşit olur.
		S4	[$\frac{8}{\square} = \frac{24}{6}$ sorusu için]... Mesela 24 ile 6'yı sadeleştirerek bu sonuca varabiliriz. Mesela 24 ile neyi sadeleştirirsek sekiz yapar, paydayı da aynı sayı ile sadeleştirceğimiz için kareyi de bulmuş oluruz. Şurada göstereyim, 24 ü 3 ile sadeleştirirsek sekiz yapar, aynı şekilde 6'yı da 3 ile sadeleştirirsek kare 2 olarak bulunur... Yani birbirine eşit diyor. Mesela 6 ikinin bir katı. Yani kesirlerde sekiz bölü iki eşittir yirmi dört bölü altıdır. Yani sekiz bölü ikiyi genişletsek te yirmi dört bölü altıyı elde ederiz. Aynı şekilde yirmi dört bölü altıyı sadeleştirdiğimizde sekiz bölü ikiyi bulabiliriz.
	Ö6 ₂	S3	[9+6= □ +7 için]...Mesela kütlesi 9 olan bir cisim ile kütlesi 6 olan bir cismi terazinin bir koluna koyardık. Diğer koluna da kütlesi yedi olan bir cisim koyup sonra cisimleri sıra ile yedinin yanına koyarak denemeye başladık. Terazi dengeye geldiği zaman kutunun kaç olduğunu bulmuş olurduk.

Tablo 6 incelendiğinde cebir öncesi sorularında öğrencilerin özellikle denge/aynı anlamına yoğunlaştığı görülmektedir. Denge anlamını düşünen öğrenciler daha çok eşittir işaretinin sağ ve sol taraflarının sonuçlarının aynı olduğunu denklem çözme stratejilerini kullanarak cevaplar vermişlerdir. Eşittir işaretinin ilişkisel düşünme anlamını düşünen öğrenciler ise eşittir işaretinin her iki tarafındaki sayıların artış veya azalışına odaklanarak sorulara cevap vermişlerdir. Sınıf düzeylerine göre öğrencilerin aritmetik sorularındaki eşittir işaretine yönelik algılarının karşılaştırılması Tablo 7’de sunulmuştur.

Tablo 7. *Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Cebir Öncesi Sorularına Verdiği Cevaplar*

		5. Sınıf		6. Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf	
		Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2
İlişkisel Düşünme	Soru 3					X	X		X
	Soru 4	X							
Denge/ Aynı	Soru 3	X	X	X	X	X	X	X	X
	Soru 4	X	X	X	X	X	X	X	X
İşlemsel	Soru 3				X				
	Soru 4								

Tablo 7 incelendiğinde cebir öncesi sorularına 6. Sınıf seviyesindeki iki öğrenci hariç geriye kalan tüm sınıf seviyelerinden birer öğrenci ilişkisel düşünerek cevap vermişlerdir. Cebir öncesi sorularında eşittir işaretinin denge/aynı anlamını tüm öğrencilerin kullandığı, işlemsel anlamını ise 6. Sınıf seviyesindeki bir öğrenci hariç hiçbir öğrencinin kullanmadığı tespit edilmiştir. 8. Sınıftaki bir öğrencinin ilişkisel cevap vermediği buna rağmen 7. sınıftaki iki öğrencinin de cebir öncesi sorularına ilişkisel düşünerek cevaplar verebildiği görülmüştür. 5. sınıf öğrencilerinden biri ilişkisel düşünebilirken aynı seviyedeki diğer öğrenci eşittir işaretinin denge/ aynı anlamına odaklandığı tespit edilmiştir. Bu durumda cebir öncesi sorularında öğrencilerin eşittir işaretinin denge/ aynı anlamına yoğunlaşmasını denklem çözüm metotlarını kullanarak bir an önce soruyu çözmeye çalışması olarak yorumlanabilir.

Orantısal ilişki Sorularında Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları

Orantısal ilişki sorularında öğrenciler, eşittir işaretinin ilişkisel düşünme, denge/aynı ve işlemsel anlamlarına yönelik algıya sahiptirler. Öğrencilerin eşittir işaretine yönelik algılarının belirlenmesinde klinik mülakatlar yapılarak elde edilen cevaplar Tablo 8’te sunulmuştur.

Tablo 8. Orantısal İlişki Sorularına Yönelik Öğrenci Cevapları

Algı	Öğren ci	Soru No	Öğrenci ifadesi
İlişkisel düşünme	Ö8 ₁	S5	[4a=42 sorusu için]...Ama 4 a oradaki bir basamak olarak verilmemiş ki bize. Basamak olarak verseydi bize bir açıklama yapması gerekiyordu. Çünkü bir şey lazım. Bize birler basamağında şu sayı olduğuna göre demesi lazım. Yoksa biz bunu çarpım durumunda alırız. 4 çarpı a...
	Ö5 ₁	S5	[4a=42 sorusu için]...Yani burada a'nın bir sayı olduğu a'nın 4 ile çarptığımızda 42 olduğunu ifade ediyor... Yani a ya bir doğal sayı dersek onun 4 katı da dört tanesine eşit olur o yüzden 4a olarak ifade edilebilir.
	Ö8 ₁	S5	[4a=42 sorusu için]...Burada denklem kurmuş bize dördü karşıya attığımızda eee bölü durumunda geçer çarpım durumunda olduğu için dördü karşıya attığımızda da.42 / 4 yani 21 / 2 olur...[Niye a yerine 2 yazmadın? Sorusu üzerine]... Çarpım durumundaki 4 karşıya bölü durumunda yani kesir şeklinde geçtiği için 42 bölü dörtte 10,5 olur... Orada bir 4 katı durumu var. O katta birbirine eşitlemesini sağlıyor, dengede tutuyor.
Denge, Aym		S6	[$\frac{a}{6}=3$ sorusu için]...Az önceki dördüncü soruda yaptığımız gibi sadeleştirme genişletme durumundan yapabileceğimizi düşündüm. Altının altına biri koyduğumuzda altının altıya bölümü bir olur. O yüzden 6 katı üçünde payları eşit olacağı için üçünde 6 katını alırsak ayı buluruz a bu yüzden 18 olur... bölüm durumundaki altıyı karşı atıp çarpım durumunda yapıp a eşittir 18 olur.
	Ö7 ₁	S5	[4a=42 sorusu için]...[a yerine 2 yazabilir miyiz? Sorusu üzerine]...Hocam 4 ile 2'yi çarparsanız 42 etmez.
		S6	[$\frac{a}{6}=3$ sorusu için]...18 yazılması gerekir çünkü 18 i 6 ya bölersek 3 eder...veya altı ile üçü çarpardık 18 bulurduk...
	Ö6 ₁	S6	[$\frac{a}{6}=3$ sorusu için]...Şimdi hocam a yerine yazılması gereken şey yani bir şeyi altıya böldüğümüz zaman 3 edecek. Yani böyle de 6 ile 3 ü çarpacağız 6, 12, 18, a 18 oldu mu 18 ide 6 ya bölersek 3 ediyor. Yani buraya 18 yazılmalı a yerine... üçün altında gizli bir vardır. Altıyla çarptık 6, üçü de altıyla çarptık. 18 eder... Şimdi buradaki üçün altında gizli bir olur. Paydaları eşitleyeceğiz gizli bir olduğu için. Biri altıya eşitleriz...
	Ö5 ₁	S6	[$\frac{a}{6}=3$ sorusu için]...Şimdi bu birleşik kesir olması gerekiyor ki bölündüğünde sonuç üç çıkabilsin. O yüzden altının üç katı olması gerekiyor yani 18 olması gerekiyor. Zaten 18 i de 6 ya böldüğümüz zaman 3 tam sayısı çıksın. Yani tam sayılı kesre çeviriyoruz zaten bu da tam sayı çıkıyor...3 bölü bir olarak yazabiliriz. Yani doğal sayıları kesre çevirirken paydasını bir olarak gördüğümüz için...

İşlemsel	Ö8 ₂	S5	[4a=42 sorusu için]...Burada a yerine 10,5 yazılması gerekir. Çünkü 4 ile 10,5 sayısını çarptığımızda 42 eder...[a yerine 2 yazabilir miyiz?]... Hayır, çünkü burada 4a demek bir sayıdan 4 tane olunca 42 oluyormuş diyor.
		S6	[$\frac{a}{6}=3$ sorusu için]...Burada a yerine 18 yazılmalıdır. Çünkü 6 ile 3 ü çarparsak a sayısını buluruz zaten. Aynı şekilde 18 sayısını da 6 ya bölersek 3 çıkar...Burada eşittir işaretinin sağının ve solunun sonuçları aynı anlamı var.
	Ö7 ₂	S6	[$\frac{a}{6}=3$ sorusu için]...Burada eee hangi sayıyı altıya bölersek üç eder diye düşünürsek 18 i altıya bölersek üç eder. Farklı bir yolla da, kesirlerde 3 tam edebilmesi için üst tarafın alt tarafın üç katı olması gerekir. Böyle de yapabiliriz altı çarpı üç on sekiz eder.
	Ö6 ₂	S6	[$\frac{a}{6}=3$ sorusu için]...Şimdi burada bir birleşik kesir olmalı ki bunu böldüğümüz zaman tam sayılı kesre çevirdiğimiz zaman sonucu üç olsun. Yani buraya 18 gelirse tam sayılı kesre çevirdiğimizde tamı 3 olur.
	Ö5 ₂	S6	[$\frac{a}{6}=3$ sorusu için]...Burada üç ifadesi tama eşittir. Yani üç yerine üç bölü bir de yazılabilir. Burada üç bölü biri de genişleterek a'yı bulabiliriz... Yani a bölü altıyı sadeleştirerek te 3 ü genişleterek te bulabiliriz çünkü bunların ikisi de aynı.
	Ö7 ₁	S5	[4a=42 sorusu için]...Öncelikle 42, 4 ün katı değil yani mesela 4 ile 10 u çarparsak 40 eder ama 42 etmez. Burada a'yı yalnız da bırakabilirdik. Mesela 4 ü 42'nin yanına atardık eksi olarak 38 çıkardı...[Yani a yerine 38 yazabilir miyiz?]...Yani 4 ile a toplanırsa a, 38 olur.
		S6	[$\frac{a}{6}=3$ sorusu için]...[Neden çarpma işlemi yaptın? sorusu üzerine]...Çünkü bölmenin zıttı çarpma olduğu için çarpma işlemi yaptım.
	Ö6 ₁	S5	[4a=42 sorusu için]...Burada 4a eşittir 42, yani oradaki a bir rakam olarak anlıyorum ve hangi rakam getirilebilir onu düşünüyorum. Şimdi oraya 1 getirsek 41 ile 42 olmaz ama ikiyi getirsek 42 ile 42 eşit olur ve bu sefer eşit olduğu için a yerine iki gelir.
	Ö5 ₁	S5	[4a=42 sorusu için]...[Eşittir işareti burada ne anlama geliyor? Sorusu üzerine]...Yani 4a sayısının 42 ile eşit olduğu anlamına geliyor. Diğer yoldan bakarsak a yerine 2 yazarsak burası 8 oluyor ve 42 sayısı 8 e eşit olmuyor.
	Ö6 ₂	S6	[4a=42 sorusu için]...Bunların ikisi birbirine eşit olmalı o yüzden buraya 2 gelmeli yine. Yani a, 2 olur... Burada eşitlik var ikisinin de eşit olması gerekiyor. Bu yüzden sadece iki gelebilir.
	Ö5 ₂	S5	[4a=42 sorusu için]...Birbirine eşit olduğu için iki yazılır, yani a eşittir iki olur...[Sadece a sayısı 2 olursa mı bu ifadeler eşit olur?]... Bir olsa küçük olur, üç olsa büyük olur. Muhtemelen iki yazılması gerekir.

Tablo 8 incelendiğinde orantısal ilişki sorularında ilişkişel düşünme cevapların çok azaldığı, öğrencilerin daha çok eşittir işaretinin denge/ aynı ve işlemsel anlamlarına yoğunlaştığı görülmüştür. İşlemsel cevaplarda cebirsel işlem başmağına geçemeyen öğrenciler 4a cebirsel ifadesini iki basamaklı sayı olarak kabul etmişlerdir. Denge/aynı anlamını kullanan öğrenciler hesaba dayalı işlemler yaparak eşittir işaretinin her iki tarafının dengede olduğunu söylemişlerdir. Sınıf düzeylerine göre öğrencilerin aritmetik sorularındaki eşittir işaretine yönelik algılarının karşılaştırılması Tablo 9’de sunulmuştur.

Tablo 9. *Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Orantısal İlişki Sorularına Verdiği Cevaplar*

		5. Sınıf		6. Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf	
		Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2
İlişkişel Düşünme	Soru 5	X						X	
	Soru 6								
Denge/ Aynı	Soru 5					X		X	X
	Soru 6	X	X	X	X	X	X	X	X
İşlemsel	Soru 5	X	X	X		X			
	Soru 6				X	X			

Tablo 9 incelendiğinde orantısal ilişki sorularında sadece 5. Soruya [4a=42 sorusu için] 8. Sınıf ve 5. Sınıf seviyesinden birer öğrenci ilişkişel düşünerek cevap vermiştir. Aynı zamanda çalışmaya katılan 5. sınıf, 6. sınıftaki tüm öğrenciler ile 7. sınıftan ise bir öğrenci 5.soruya [4a=42 sorusu için] cevap verirken eşittir işaretinin işlemsel anlamını kullanmıştır. Eşittir işaretinin denge/aynı anlamı 6. soru [$\frac{a}{6}=3$ sorusu için] için tüm öğrenciler tarafından kullanılırken, işlemsel anlamı 7. sınıf ve 6. sınıf seviyelerindeki birer öğrenci tarafından kullanılmıştır.

Cebir Sorularında Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları

Cebir sorularında öğrenciler eşittir işaretinin ilişkişel düşünme, denge/aynı ve işlemsel anlamlarına yönelik algıya sahiptirler. Öğrencilerin eşittir işaretine yönelik algılarının belirlenmesinde klinik mülakatlar yapılarak elde edilen cevaplar Tablo 10’da sunulmuştur.

Tablo 10. Cebir Sorularına Yönelik Öğrenci Cevapları

Algı	Öğrenci	Soru No	Öğrenci ifadesi
İlişkisel	Ö8 ₁	S8	[$a = b$ ifadesi için]...Burada a 'yı karşıya atarsak b bölü a , 1 eşit olur. Bu da a ile b 'nin eşit olduğunu gösterir.
	Ö7 ₁	S8	[$a = b$ ifadesi için]...Demek ki a ve b aynı da olabilir. Farklı harfler aynı sayıya eşit olabilir. [Bir önceki soru da hatalı düşündüğünü ifade ediyor.]
	Ö8 ₁	S7	[$a + b = 8$ sorusu için]...Bilmediğimiz 2 sayının toplamı 8 e eşitmiş. Bu sayılar her şey olabilir, -8 ile 16 da olabilir ya da 108 ile -100 de olabilir. Bu ikisinin toplamı sekize eşittir.
		S8	[$a = b$ ifadesi için]...Mesela az önce verdiğim örnek gibi 2 üssü 4 eşittir 4 üssü 2 ne demek yani bir sayı milyonlarca şekilde farklı yazılabilir. Bu eşitlik o sayıların farklı yazılımının göstergesidir.
Denge, Aynı	Ö7 ₁	S7	[$a + b = 8$ sorusu için]...Burada eşittir işareti a ile b 'nin toplamının sekiz olabileceğini ifade ediyor. Tabi burada a ile b birçok değer olabilir, 5 ile 3 gibi, 6 ile 2 gibi. Ama burada eşittir ne olursa olsun a ile b 'nin toplamının sekize eşit olacağını ifade ediyor.
		S8	[$a = b$ ifadesi için]...İkisi de eşit, birbirinin aynısı... Terazî modeli gibi düşünersek bir kefesi a olsa diğeri de b olsa ikisi de eşit terazî dengede olur.
	Ö6 ₁	S7	[$a + b = 8$ sorusu için]...Yani a ile b rakamlarının farklı rakam ya da aynı rakamlarının toplamının 8 olduğunu ifade ediyor. Yani eğer buraya 5 ile 3 gelirse 8 e eşit oluyor. Yani oradaki eşittir de bunların toplamının, a ile b 'nin toplamının 8 ettiğini ifade ediyor.
		S8	[$a = b$ ifadesi için]...Yani a bir ise b de bir olacak, karşılıklı iki sayı aynı olacak, a , b ikisi de aynı değeri alacak başka bir değer alamaz.
	Ö5 ₁	S7	[$a + b = 8$ sorusu için]...Eşittir a ve b doğal sayılarının toplamının sekize eşit olduğunu ifade eder.
		S8	[$a = b$ ifadesi için]...Burada a ve b sayılarının birbirine eşit olduğunu anlıyoruz ama yukarıda ki soru ile ilişkilendirsek a ve b sayılarının da aynı olabileceğini düşünebiliriz. [Bir önceki soruda a ve b farklı harfler olduğu için aynı değerleri alamayacağını düşünen öğrenci bu soruda aynı değer alabileceğini kendi keşfederek hatasını düzelttiği görülmüştür.]
	Ö8 ₂	S7	[$a + b = 8$ sorusu için]...Eşittir, a ve b doğal sayılarının toplamının sekize eşit olduğunu ifade eder... Burada sonuç 8 olsun da sayılar ne olursa olsun. Mesela a ya 13 desek b sayısı -5 olur.
		S8	[$a = b$ ifadesi için]...Yani a ile b 'nin ikisi de 12 olabilir, ikisi de 15 olabilir. Yani a ile b ye istediğimiz verebiliriz ama aynı olmak şartı ile.
	Ö7 ₂	S7	[$a + b = 8$ sorusu için]...Burada iki bilinmeyenin toplamının sekiz olduğunu söylüyor. A ile b 'yi bilemeyiz. Çünkü değişebilir, 1+7 olabilir, 2+6 olabilir, 3+5 olabilir.
		S8	[$a = b$ ifadesi için]...Bu iki sayının da eşit olduğunu anlıyorum. Mesela ikisi de bir olabilir, ikisi de iki olabilir. Burada da birden fazla cevabı var sorunun.
	Ö6 ₂	S7	[$a + b = 8$ sorusu için]...Yani bu iki sayının toplamı sekize eşit olacakmış. Mesela buraya 4 ile 4 gelebilir, 6 ile 2 gelebilir, 5 ile 3 gelebilir. Yani buraya çok sayı gelebilir.

İşlemsel	S8	[a= b ifadesi için]...Şimdi burada eşittir işareti a ile b'nin aynı olduğu anlamı var. Ya da bunlar başka kesir de olabilirler. Ama asıl anlamı aynı olmasıdır. Bu iki sayı 8 de olabilir, 10 da olabilir yani iki taraf ta aynı olmalı.
	Ö5 ₂ S7	[a+ b=8 sorusu için]...Burada a ve b yerine çok sayı gelebilir. Mesela 7 ile 1, 6 ile 2, 5 ile 3 gelebilir. Yani toplamaları sekiz eder.
	S8	[a= b ifadesi için]...Mesela buraya milyonlarca sayı gelebilir eşit olan. Yani örnek vereyim 1=1 olur, 2=2 olur...
	Ö7 ₁ S7	[a+ b=8 sorusu için]...[Burada eşittir işareti nasıl bir anlam ifade ediyor?]...İkisi de farklı, biri a iken biri b. Belki 4 ile 4 ün olmayacağını söylüyordur...[Yani a ile b aynı olamaz mı?]... Olmaz çünkü a+ b, a+ a olsaydı cevabımız kesinlikle 4+4 olabilirdi.
	Ö6 ₁ S7	[a+ b=8 sorusu için]...[Burada a yerine 20 yazsak b hangi değeri alırdı?]...B herhangi bir değer olabilir ama aynı olmaz sonuç değişir, çünkü ortada artı var. Ortada çıkarma işlemi olsaydı a sayısı 20 değerini alabilirdi... Toplama olunca sayılar sekizi geçemez. A ile b sayıları ya 8 olacak ya da sekizden küçük olacak.
	Ö5 ₁ S7	[a+ b=8 sorusu için]...Bunlar 6 ve 2 olabilir, a ve b şeklinde ayırdığı için 4 ve 4 şeklinde yazılamaz çünkü 4 ve 4 şeklinde yazılsaydı a+ a veya b+ b şeklinde yazardı. O yüzden sayılar dörtten farklı sayılar olabilir...[Peki a sayısı 10 olabilir mi?]... 10 olursa çıkarma işlemi yapmamız gerekir. O yüzden bu işlem için olamaz.
	Ö6 ₂ S7	[a+ b=8 sorusu için]... [Burada a yerine 20 yazsak b hangi değeri alırdı?]... Bulamayız. Yani çünkü bunların ikisinin toplamı sekize eşit olmalı, yani ne büyük olacak ne de küçük olacak tam sekize eşit olmalı.
	Ö5 ₂ S7	[a+ b=8 sorusu için]...[Burada a, 10 olsaydı b kaç olurdu?]... O zaman burada çıkarma işlemi olması gerekirdi... Toplamının sekiz olması için sekizden büyük sayı kullanılamaz. Sekiz ile sıfır da olabilir ama sekizden büyük sayılar kullanılamaz.

Tablo 10 incelendiğinde cebir sorularında ilişkisel düşünme cevapların çok azaldığı, öğrencilerin daha çok eşittir işaretinin denge/ aynı ve işlemsel anlamlarına yoğunlaştığı görülmüştür. Denge/aynı anlamını düşünen öğrenciler eşittir işaretinin her iki tarafının da eşit olacağını düşünerek karşılaştırma odaklı cevaplar vermişlerdir. Denge/aynı anlamının yanında işlemsel düşünen öğrenciler daha çok farklı harflerin farklı sayıları temsil edeceğini düşünerek a ve b harfleri yerine farklı sayı değerleri geleceği yönünde cevaplar vermişlerdir. Sınıf düzeylerine göre öğrencilerin aritmetik sorularındaki eşittir işaretine yönelik algılarının karşılaştırılması Tablo 11'de sunulmuştur.

Tablo 11. Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Cebir Sorularına Verdiği Cevaplar

		5. Sınıf		6. Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf	
		Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2
İlişkisel Düşünme	Soru 7								
	Soru 8					X		X	
Denge/ Aynı	Soru 7	X	X	X	X	X	X	X	X
	Soru 8	X	X	X	X	X	X	X	X
İşlemsel	Soru 7	X	X	X	X	X			
	Soru 8								

Tablo 11 incelendiğinde cebir sorularından 8. soruya [$a = b$ ifadesi için] 8.sınıf ve 7.sınıf seviyelerinden birer öğrenci ilişkisel düşünerek cevap vermiş, çalışmaya katılan tüm öğrenciler her iki soruya da denge/aynı anlamlarını kullanarak cevap verdiği tespit edilmiştir. 7. Soruya [$a + b = 8$ sorusu için] verilen cevaplar incelendiğinde 5. sınıf ve 6. sınıf seviyelerindeki ikişer öğrenci ve 7. sınıf seviyesindeki bir öğrencinin eşittir işaretinin işlemsel anlamını kullandığı görülmüştür.

Özdeşlik Sorusunda Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları

Özdeşlik sorusunda öğrenciler eşittir işaretinin ilişkisel düşünme, denge/aynı ve işlemsel anlamlarına yönelik algıya sahiptirler. Öğrencilerin eşittir işaretine yönelik algılarının belirlenmesinde klinik mülakatlar yapılarak elde edilen cevaplar Tablo 12’de sunulmuştur.

Tablo 12. Özdeşlik Sorusuna Yönelik Öğrenci Cevapları

Algı	Öğrenci	Soru No	Öğrenci ifadesi
İlişkisel düşünme	Ö81	S9	$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ ifadeleri eşit midir? Sorusu için]...Evet eşittir, çünkü bu bir özdeşliktir.
	Ö82	S9	$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ ifadeleri eşit midir? Sorusu için]... Eşittir çünkü sağ taraftakiler soldaki ifadenin açılımı oluyor... Şimdi x in karesini alacağız x kare x ile y’yi çarpıp iki katını alacağız $2xy$ artı y’nin karesi y kare birbirine eşit oldular...[Nasıl yaptın?]... Çünkü iki sayının toplamının karesi özdeşliğini biz böyle öğrendik.
Denge, Aynı	Ö81	S9	$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ ifadeleri eşit midir? Sorusu için]... 1 + 2’nin karesi 1 + 2 yapardık 3 için karesi de dokuzdur. Bu işlemi yapsaydık da 9 çıkardı. Mesela birin karesi bir, bir ile ikiyi çarpıp iki katını aldık dört, ikinin karesi de dört topladık 9 çıkar.
	Ö71	S9	$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ ifadeleri eşit midir? Sorusu için]... Bir değer verilerek bulunabilir. Mesela x, 2 olsun y de 3 olsun. Toplarsak beş, karesi 25 olur. Diğer tarafta ise x in karesi 4, y’nin karesi 9, x ve y’nin çarpımının iki katı 12 toplarsak 25 eder $25 = 25$ olduğundan eşittir.

İşlemsel	Ö62	S9	$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ ifadeleri eşit midir? Sorusu için]...[Burada eşittir işaretinin sağ ve solu yer değiştirseydi bir farklılık olur muydu?]. Hayır bir fark olmazdı. Çünkü eşittir işaretinin sağ ile solu aynıdır.
	Ö52	S9	$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ ifadeleri eşit midir? Sorusu için]...Önce x artı y'nin toplamının karesini bulacağız. Karesi demek sonucu kendisi ile iki defa çarpmak demek. Yani x artı y 10 ederse karesi on çarpı ondan 100 edebilir. Diğer tarafa ancak sayı verilerek bu soru çözülebilir.
	Ö61	S9	$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ ifadeleri eşit midir? Sorusu için]...Şimdi hocam bunları toplayıp karesini almak başka ikisinin karelerini toplamak başka, yani ikisi de farklı değerler çıkar. Mesela bu beş olsa bu on olsa onun karesi 100 eder beşin karesi 25 eder topladık 125 olur, ama on ile beşi toplarsak 15, 15 in karesi de 225 eder.
	Ö51	S9	$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ ifadeleri eşit midir? Sorusu için]... Bunlara herhangi bir sayı verebilirsek, mesela x e 1 ve y ye 2 verebiliriz. O zaman buranın toplamı (eşittir işaretinin solunu göstererek) 1 artı 4 ten beş oluyor. Burada ise (eşittir işaretinin sağını göstererek) birin karesi yine bir oluyor, 2xy yani ikisinin çarpımının iki katı 4 oluyor artı bura da 2'nin karesi 4 oluyor toplarsak 9 oluyor. Diğer tarafı beş bulmuştuk 5, 9 a eşit olmadığı için eşit olamaz.
	Ö72	S9	$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ ifadeleri eşit midir? Sorusu için]... Eşit değil ama burada farklı sayılar denk gelirse eşit olabilir... x ve y demiş eşit olsa x ve x derdi. Birine farklı bir sembol kullanmış birine farklı. Eşit olsaydı aynı kullanırdı.
	Ö62	S9	$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ ifadeleri eşit midir? Sorusu için]...X ve y sayıların yerine kullanılmış. Mesela burada x ve y yerine değerler verelim. X yerine 2 y yerine de 3 verelim...Bunlar sanırım dağılma özelliği.
	Ö52	S9	$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ ifadeleri eşit midir? Sorusu için]... Eşit olabilir, olmayabilir de. Değer vererek anlayabiliriz.

Tablo 12 incelendiğinde özdeşlik sorusunda ilişkisel düşünme cevapların çok azaldığı, öğrencilerin daha çok eşittir işaretinin denge/ aynı ve işlemsel anlamlarına yoğunlaştığı görülmüştür. Denge/aynı anlamını düşünen öğrenciler eşittir işaretinin her iki tarafının da sonuçlarının aynı olup olmadığını görebilmek için bilinmeyenler yerine değer vererek çıkan sonuçları karşılaştırarak cevap vermişlerdir. Bunun yanında işlemsel düşünen öğrenciler ise cebirsel işlemleri eksik ya da hatalı yaparak cevap vermişlerdir. Aynı zamanda özdeşlik sorusu klinik mülakatlar sırasında öğrencilerin üzerinde en az yorum yaptıkları, düşüncelerini çok sınırlı ifade ettikleri tespit edilmiştir. Sınıf düzeylerine göre öğrencilerin aritmetik sorularındaki eşittir işaretine yönelik algılarının karşılaştırılması Tablo 13'te sunulmuştur.

Tablo 13. Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Özdeşlik Sorusuna Verdiği Cevaplar

		5. Sınıf		6. Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf	
		Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2
İlişkisel Düşünme	Soru 9							X	X
Denge/ Aynı	Soru 9		X		X	X		X	
İşlemsel	Soru 9	X	X	X	X		X		

Tablo 13 incelendiğinde özdeşlik sorusunda 8. Sınıftaki öğrencilerin ilişkisel düşünerek cevap verdikleri ancak geriye kalan öğrencilerden 7. sınıf seviyesindeki bir öğrenci hariç hepsinin cevap verirken eşittir işaretinin işlemsel anlamını kullandıkları belirlenmiş olmakla beraber her sınıf seviyesinden birer öğrencinin de özdeşlik sorusuna cevap verirken eşittir işaretinin denge/aynı anlamını kullandığı tespit edilmiştir.

Problem Sorusunda Öğrencilerin Eşittir İşaretini Algılamaları

Problem sorusunda öğrenciler eşittir işaretinin ilişkisel düşünme, denge/aynı ve işlemsel anlamlarına yönelik algıya sahiptirler. Öğrencilerin eşittir işaretine yönelik algılarının belirlenmesinde klinik mülakatlar yapılarak elde edilen cevaplar Tablo 14’te sunulmuştur.

Tablo 14. Problem Sorusuna Yönelik Öğrenci Cevapları

Algı	Öğr enci	Sor u No	Öğrenci ifadesi
Denge, Aynı	Ö8 ₁	S10	Bu sözel ifade de cebimdeki parayı bilmiyorum bilmediğim için bir harf vereceğim x veya y fark etmez. X liradan 7 TL harcayınca 9 kalıyormuş. Bu da matematiksel olarak $x-7=9$ olur...x’i yalnız bırakarak, şu anda bu dokuzdu ama bunu karşıya attığımızda eksi yediydi buraya artı 7 olarak geçtiği için x’ imiz 16 olur. Yani 16 eşittir 16 olur.
	Ö7 ₁	S10	Matematik dilinde yazarsak eğer cebimdeki paraya a dersek $a-7=9$ olur...Burada cebimdeki paranın yedi lirasını harcayınca 9 liram kaldı, yani 7 ile 9’u toplayınca cebimdeki parayı bulurum. O zaman 16 lirası varmış, yedi lirasını harcayınca 9 kalır. Bunun matematiksel ifadesi 7 ile 9 un toplamını soruyor. [Neden çıkarma işlemi yaptın?].... Çünkü çıkarmanın tersi toplama işlemi. Mesela a dan neyi çıkarırsak 9 kalır bunu bulmak için toplarız.
	Ö6 ₁	S10	Kalan ile harcadığını topluyoruz ve ilk baştaki parasını buluyoruz... Matematik dilindeki karşılığı $9 + 7$ eşittir 16 olur.
	Ö5 ₁	S10	Dokuz lirayı cepte olarak düşünürsek yedi lirayı da bunun üstüne ekliyoruz 16 liramız oluyor. Zaten 16 liradan 7 lirayı çıkarınca da 9 liram kalır. Yani bunu $9+7=16$ şeklinde yapabiliriz.

İşlemsel	Ö8 ₂	S10	Yani burada matematiksel karşılığı $x-7=9$ olur... Cebimde kalan para ile harcadığımız parayı toplayarak buluruz...[Terazi modeli kullanarak anlatabilir misin?...]Terazinin bir koluna $x-7$ koyarız diğer tarafa da 9 u koyarız. Her iki tarafı da yedi ile toplamalıyız. Burayı yedi ile toplarsak bu tarafta sadece x kalır diğer tarafı yedi ile toplarsak 16 olur. Dolayısı ile x sayısı 16 ya eşit olur.
	Ö7 ₂	S10	Burada cebimdeki paranın yedi lirasını harcayınca 9 lirası kalıyor diyor. Onun için bu ikisini toplarız yani cebinde $9+7$ eşittir 16 lirası varmış.
	Ö6 ₂	S10	Şimdi cebimde 7 liradan büyük bir para varmış 7 lirayı harcayınca 9 lirası kalmış. Önce harcamadan önceki parasını bulalım 9 ile 7'yi toplarsak 16 lirası varmış, 16'nın 7 lirasını harcarsa 9 lirası kalır... En başta cebimizdeki parayı bilmiyoruz. O parayı önce bir harf vermemiz gerekiyor. Bu harf y olsun y den harcadığımız parayı çıkarırsak 9 liramız kalmış yani $y-7=9$ olur.
	Ö7 ₁	S10	[a $-7=9$ denklemini kullanarak] Burada a dan yedi çıktıktan sonra dokuz kalmış. Yani 7 ile 9'u toplayınca, tam tersini çıkarmanın tersini toplama yaptıktan sonra da a'yı buluruz... Zaten 7 ile 9 un toplamı a ya eşit olduğu için asıl yediği buraya koyarsak dengede olurlar. Zaten a dan 7 çıktığı zaman 9 kalıyor, 7 ile 9 un toplamı da a olacağı için
	Ö6 ₁	S10	[Terazi modeli kullanarak anlatabilir misin?...]Şöyle bir terazimiz var. (Terazi modeli çiziyor). Şimdi buraya en baştaki parayı attık,16 liraya attık ve 9 TL attık. Şimdi buraya.16 TL ağır bastı şimdi biz de bunu eşitlemek için buraya bir para birimi atmamız lazım. Dokuz ka kaç eklersek 16 eder. On altıdan dokuzu çıkartıyoruz 7 eder yani buraya bir yük daha koysak bunlar eşit olur... Burada teraziyi dengeye getirene kadar dokuz ekleriz.
	Ö5 ₁	S10	[Terazi modeli kullanarak anlatabilir misin?].. Mesela terazide bir kefeye 9 ve 7'yi koyup diğer kefeye de onun ağırlığını ölçebileceğimiz sayılar koyabiliriz. Yani 15 koysak terazi dengede olmaz deneyerek bulabiliriz eşit olduğunu gördüğümüzde cevabı bulmuş oluruz.
	Ö5 ₂	S10	Şimdi cebimdeki para 14 olsa 14 ten yedi lirayı çıkarsam olmaz... Cebimdeki para 16 olsa 16'dan 7 çıkarsam 9 liram kalır... Terazi modeli ile düşünersek, Bir tarafına 9 kg'lık bir kütle koysam diğer tarafında da deneyerek bulabiliriz bence. Yani Kare eksi yedi eşittir dokuz yazarsak kare 16 olur.

Tablo 14 incelendiğinde problem sorusunda öğrenciler eşittir işaretinin denge/aynı ve işlemsel anlamlarını kullanarak cevap verdikleri görülmüştür. Sözel temsil olarak ifade edilen bu soruda öğrencilerin sayılar arasında bir ilişki göremediği tespit edilmiştir. Denge/aynı anlamını düşünen öğrenciler denklem çözüm metotlarında yardım alarak bilinmeyeni yalnız bırakarak cevaplar vermişlerdir. İşlemsel düşünen öğrenciler ise bilinmeyenin değerini bulabilmek için deneme yanılma yöntemlerini kullanarak bilinmeyene farklı değerler verip eşitliğin sağlanıp sağlanmadığını görmeye çalışarak cevaplar vermişlerdir. Sınıf düzeylerine göre öğrencilerin aritmetik sorularındaki eşittir işaretine yönelik algılarının karşılaştırılması Tablo 15'te sunulmuştur.

Tablo 15. *Sınıf Düzeylerine Göre Öğrencilerin Problem Sorusuna Verdiği Cevaplar*

		5. Sınıf		6. Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf	
		Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2	Ö1	Ö2
İlişkisel Düşünme	Soru 10								
Denge/ Aynı	Soru 10	X		X	X	X	X	X	X
İşlemsel	Soru 10	X	X	X		X			

Tablo 15 incelendiğinde problem sorusuna öğrencilerden hiçbirinin ilişkisel düşünerek cevap veremediği, 5. Sınıf seviyesindeki bir öğrenci hariç diğer öğrencilerin eşittir işaretinin denge/aynı anlamını kullanarak cevap verdiği tespit edilmiştir. Aynı zamanda problem sorusunda 5. Sınıf seviyesindeki iki öğrenci ile 6. Sınıf ve 7. Sınıf seviyelerinden birer öğrenci eşittir işaretinin işlemsel anlamını kullanarak sorulan sorulara cevap vermişlerdir.

ALTINCI BÖLÜM

Sonuç ve Tartışma

Ortaokul öğrencilerinin eşittir işaretine yönelik algılarının incelendiği bu araştırmada ulaşılan sonuçlar genel olarak alanyazını desteklemekle birlikte, alanyazına bazı önemli yeniliklerde ilave etmiştir. Araştırmada öğrencilerin eşittir işaretini ilişkisel, denge ve işlemsel anlamlarında düşünmeleri alanyazını desteklemiştir. Ancak önceki araştırmalarda öğrencilerin eşittir işaretini sonuç bul anlamında düşündükleri rapor edilmişken bu araştırmada öğrencilerin eşittir işaretini sonuç bul anlamında düşünmedikleri tespit edilmiştir. Çalışmada ulaşılan bir başka özgün sonuç da tespit edilen kategorilere özgüdür. Önceki araştırmalarda eşittir işaretinin anlamları ilişkisel ve işlemsel kategorilerinde toplanırken bu araştırmada ilişkisel, denge ve işlemsel kategorilerinde ele alınmıştır. Önceki araştırmalarda ilişkisel anlama olarak ifade edilen kategori bu araştırmanın bulgularında ilişkisel ve denge olarak iki ayrı kategoriye ayrılmıştır. Çalışmada ulaşılan sonuçlar 5-8. sınıf düzeyindeki öğrencilerin eşittir işaretini ilişkisel ve denge anlamında kullanabildiklerini göstermiştir.

Aritmetik Sorularına Yönelik Tartışma

Aritmetik sorularda öğrencilerin “ilişkisel düşünme”, “denge” ve “işlemsel” anlamlarını kullandıkları belirlenmiştir. Matthews, vd. (2012) eşittir işaretinin anlamlarını incelediği araştırmada öğrencilerin eşittir işaretini “karşılıklı ilişkisel”, “temel ilişkisel”, “esnek işlemsel” ve “katı işlemsel” olarak algıladıklarını ortaya koymuştur. Araştırmacılar özellikle “ilişkisel” ve “işlemsel” anlama üzerinde durmuşlardır. Bu araştırma sonucunda eşittir işaretinin ilişkisel ve işlemsel anlamına yönelik bulgular Matthews vd.’nin (2012) bulguları ile örtüşmektedir. Van Amerom (2002) öğrencilerin aritmetik düzeyde eşittir işaretini sonuç bul olarak algıladıklarını ortaya koymuştur. Fyfe vd. (2020) öğrencilerin aritmetik sorularında eşittir işaretini işlemsel algıladıklarını belirlemiştir. Akkan’da (2009) eşittir işaretinin anlamlarında özellikle aritmetik düzeyde “sonuç bul” düşüncesinin olduğunu ifade etmiştir. Bu araştırmada ise öğrencilerin eşittir işaretine yönelik “sonuç bul” anlamını düşünmedikleri belirlenmiştir. Bir anlamda izleme araştırması olarak da görülebilecek bu araştırmada öğrencilerin eşittir işaretini “sonuç bul” olarak algılamamasının sebebi, değişen öğretim programları ve cebir öğretiminde teknolojinin sıklıkla kullanılması olabilir. Çünkü değişen dünyada teknoloji ile birlikte öğrencilerin bilgiye erişimleri önemli artış göstermiştir. Örneğin Carpenter, Franke ve Levi (2003) sanal manipülatiflerin kullanımının öğrencilerin eşittir işaretine yönelik anlamalarını geliştirdiğini

ortaya koymuştur. Bajwa ve Perry (2021) de bilgisayarda denge anlamını kullanmaya yönelik yapılan aktivitelerin eşittir işaretinin anlaşılmasını geliştirdiğini tespit etmiştir.

Pang ve Kim (2018) eşittir işaretinin anlamlarını inceledikleri araştırmada öğrencilerin eşittir işaretinin hesaplamalı ve ilişkisel düşünme anlamlarına odaklandıklarını belirlemişlerdir. Hesaplamalı düşünme, bu araştırmadaki denge ve işlemsel anlamlarını içermektedir. Bu araştırmada hesaplamalı düşünme, işlemsel ile öğrencilerin işlem yapma anlamını düşündükleri, denge anlamında ise sayısal olarak eşitliğin her iki tarafının aynı olmasını düşündükleri ifade eden iki ayrı kategoriye ayrılmıştır. Bu bağlamda araştırmada öğrencilerin “ilişkisel düşünme”, “denge” ve “işlemsel” anlamlarını kullanmalarının alanyazınla örtüştüğü söylenebilir.

Cebir Öncesi Sorularına Yönelik Tartışma

Cebir öncesi sorularında da aritmetik sorularında olduğu öğrencilerin “ilişkisel düşünme”, “denge” ve “işlemsel” anlamlarını kullandıkları belirlenmiştir. Yaman, Toluk ve Olkun (2003) yaptıkları çalışmada cebir öncesi sorularında öğrencilerin eşittir işaretini “cevap yaz” ve “sonuç bul” anlamında algıladıklarını belirlemiştir. Aynı zamanda Yıldız ve Atay (2019) çalışmalarında araştırmaya katılan öğrencilerin çoğunun eşit işaretini eşitliğin iki tarafındaki sayısal ilişkileri ifade eden bir ilişkisel sembol olarak değil, sonuca götüren bir işlem sembolü olarak gördükleri belirlenmiştir. Bu araştırma sonucunda elde edilen bulgular öğrencilerin eşittir işaretinin “cevap yaz” anlamını kullanmadıklarını, daha çok denge anlamına odaklanarak her iki tarafın sonuçlarının eşit olduğunu görmeye çalıştıklarına işaret etmiştir. Aynı zamanda Yaman vd. (2003) çalışmalarında öğrencilerin eşittir işaretini soldan sağa doğru eylem yapan bir işaret olarak algıladıklarını belirlemiştir. Ayrıca öğrencilerin sayılar ve işlemleri eşittir işaretinin solunda, sonucun ise eşittir işaretinin sağında olması gerektiği düşündüklerini saptamıştır. Bu araştırmada ise öğrenciler tarafından işlemin eşittir işaretinin hangi tarafında olduğunun bir önemi olmadığı görülmüştür. Ulaşılan sonuçlar arasındaki farklılık uygulanan öğretim programında kaynaklı olabilir. Çünkü Yaman vd.’nin (2003) çalışması 2005 programı öncesinde yapılmıştır. Program değişimi ve aradan geçen 20 yıllık sürede öğrencilerin eşittir işaretine bakışının değişmesi beklenen bir olgudur.

Fyfe vd. (2020) cebir öncesi sorularında öğrencilerin eşittir işaretini sadece işlemsel olarak algıladıklarını belirlemiştir. Fyfe vd.’nin (2020) güncel çalışması ile bu araştırmanın sonuçlarının çelişmesinin nedeni ise araştırma desenlerinden kaynaklı olabilir. Fyfe vd. (2020) nicel araştırma yürütmüş olup öğrencilerin sadece yaptıkları işlemlere bakmıştır. Öğrencilerle hangi düzeyde olduklarına ilişkin herhangi bir görüşme gerçekleştirilmemiştir.

Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil ve Stephens (2007) cebir öncesi sorularında öğrencilerin çöz ve karşılaştır şeklinde kodlanan çözüm stratejisi uyguladıklarını belirlemiştir. Bu araştırmada cebir öncesi sorularında denge anlamını kullanan öğrenciler eşitliği her iki tarafında çözüm yaparak karşılaştırma yapmıştır. Bu bağlamda denge anlamına yönelik ulaşılan sonucun alan yazını desteklediği söylenebilir.

Orantısal İlişki Sorularına Yönelik Tartışma

Orantısal ilişki görmeyi gerektiren sorularda öğrencilerin “ilişkisel düşünme”, “denge” ve “işlemsel” anlamlarını kullandıkları belirlenmiştir. Oransal ilişki sorularında 5. Sınıf seviyesindeki öğrenciler $4a=42$ ifadesindeki “4a” işleminin çarpma olduğunu görebilirken, 6. sınıftaki öğrencilerin bu sorudaki cebirsel yapıyı keşfedemedikleri görülmüştür. Sınıf seviyesinin bariz bir farklılık oluşturmadığı bu soruda öğrencilerin verdiği cevaplar arasında keskin farklılıklar olduğu görülmüştür. 6. sınıf düzeyindeki öğrencilerden bazıları “a”nın 2 olacağını düşünmüştür. İşlemsel kategorisinde ele alınan bu ifadeyi kullanan öğrencilerin aritmetik düşündükleri söylenebilir. Örneğin Çakmak-Gürel ve Okur (2018) öğrencilere “ $2xy=240$ ” ifadesini vererek x ve y’nin alabileceği değerleri sormuştur. Öğrencilerden bazıları “ $2xy$ ” ifadesinin üç basamaklı bir sayı olduğunu düşünerek x yerine 4, y yerine 0 rakamlarını atamıştır. Öğrencilerde kavram yanılgısı olarak belirlenen bu durumun aritmetik düşünmeden kaynaklandığı söylenebilir. Araştırmada 7. ve 8. sınıf seviyesindeki öğrencilerin bu soruya doğru cevap verdiği görülmüştür.

Orantısal ilişki belirten diğer soruda öğrencilerin verdiği cevaplarda daha çok bileşik kesirden yardım alarak eşitliğin her iki tarafının dengede olduğunu düşünüp bilinmeyi bulmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Bununla beraber denklem çözme metotlarını kullanarak “bölüm durumundaki sayı eşittir işaretinin karşısına çarpım durumunda geçer” mantığı ile bilinmeyi bulmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu durum öğrencilerin oransal durumlardaki çarpımsal ilişkiler ile cebirsel durumlardaki (özellikle denge-terazi düşüncesi) toplamsal durumları ayırt edebildiklerini göstermektedir. Alanyazındaki birçok çalışmada öğrencilerin çarpımsal ve toplamsal ilişkileri ayırt edebildiğini göstermiştir (Arıcan, 2019; Ayan, & Isıksal-Bostan, 2018; Öztürk, Demir, & Akkan, 2021).

Cebir Sorularına Yönelik Tartışma

Cebir sorularında öğrencilerin “ilişkisel düşünme”, “denge” ve “işlemsel” anlamlarını kullandıkları belirlenmiştir. Fyfe vd. (2020) öğrencilere cebir soruları sorarak eşittir işaretine yönelik düşüncelerini şöyle ifade etmiştir: “Bir denklemin iki tarafı da aynıdır”, “Sol tarafta ne varsa, sağ tarafta da aynı olacaktır”, “Bir sorunun cevabı”, “Bir taraftaki ifade, diğer taraftaki

ifadeyle aynı.” “Her iki taraf da aynı değere sahiptir”. Verilen cevaplar bu çalışmadaki öğrenci cevapları ile benzerlik göstermektedir. Madej (2022) çalışmasında öğrencilerin eşittir işaretine “aynı” ve “cevabını yaz” anlamlarını verdiklerini, aynı zamanda bir kısım öğrencinin de belirsiz bir şekilde iki anlamı da olabileceğini belirtmiştir. Aynı zamanda eşittir işaretini tanımlayabilmenin, eşittir işaretinin ilişkisel özelliğini kullanabilmekle aynı şey olmadığını ifade etmiştir. Molina ve Ambrose (2008) eşittir işaretinin sağındaki işlemin bazı öğrenciler için bir farklılık belirtmediğini, aynı zamanda “cevap için teşvik” görevi gördüğü algısı oluşmuştur. Bu yönü ile bu çalışma sözü geçen çalışmaların sonuçları ile tutarlılık göstermektedir.

Kızıltoprak (2014) araştırmaya katılan öğrencilerin ilişkisel düşünme becerilerinin gelişim süreçlerini görmeyi amaçladığı bu çalışmada, 5. Sınıfa devam eden 6 öğrenci yapmış olduğu klinik görüşmelerde cebir sorularına öğrencilerin vermiş olduğu ilişkisel düşünme yanıtlarını iki alt kategoriye ayırarak düzenlemiştir. Bu iki alt kategori ise “ilişkiyi açıklama” ve “ilişkisel düşünme öncesi” olarak belirlenmiştir. Aynı zamanda ilişkisel düşünme becerisini hiçbir şekilde gösteremeyen öğrenci yanıtlarını ise “sonuç odaklı işlem süreci” şeklinde kodlamıştır. Yapılan çalışmada kullanılan “ilişkiyi açıklama” bizim çalışmamızdaki “ilişkisel düşünme”, aynı zamanda “ilişkisel düşünme öncesi” ve “sonuç odaklı işlem süreci” kodlarını da bizim çalışmamızdaki “denge/aynı” düşüncesi ile birbirini desteklediği tespit edilmiştir.

Özdeşlik Sorusuna Yönelik Tartışma

Özdeşlik sorularında öğrencilerin “ilişkisel düşünme”, “denge” ve “işlemsel anlamlarını kullandıkları belirlenmiştir. Bulut, Aygün ve İpek (2018) İlk ve ortaokul öğrencilerinin eşit işaretinin işlemsel ve ilişkisel anlamlarını ve denklem çözümlerinde eşit işaretine yönelik anlamalarını ortaya çıkarmak amacıyla çalışma yürütmüştür. Çalışmanın sonucunda öğrencilerden çoğunun eşit işaretini ilişki ifade eden bir sembol olarak değil, sınırlı bir bakış açısıyla yalnızca bir işlem sembolü olarak gördükleri ortaya konmuştur. Bu sonuç özdeşlik içeren soruya öğrencilerin vermiş oldukları cevaplarla tutarlılık göstermektedir.

Cebirsel düşünmenin geliştirilmesinde özellikle son dönemde vurgu yapılan erken cebir kavramı öğrencilerin bilinmeyenleri kullanmadan cebirsel eşitlikleri fark edebilmesini ön plana çıkarmaktadır. Örneğin $103 \times 13 = (100 \times 13) + (3 \times 13)$ ifadesi aritmetik işlemlerle yürütülen bir erken cebir aktivitesidir. Bu araştırmaya katılan öğrencilerde aritmetik örneklerle beraber eşitliğin doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Özellikle alt sınıf düzeyindeki öğrencilerin bu işlemleri yapması erken cebirsel düşünmeye başladıkları şeklinde yorumlanabilir. Öğrenciler bu işlemleri yapıp eşitliğin doğruluğunu kontrol ettiğinde denge anlamında düşündüklerine

karar verilmiştir. Ancak eşitliğin doğruluğunu gösteremeyen aritmetik işlemlerle çalışan öğrencilerin işlemsel düşünceye sahip oldukları çıkarılmıştır. Örneğin Chimoni, Pitta-Pantazi ve Christou (2018) 4-7. sınıf öğrencilerinin erken cebirsel düşüncelerini incelemek amacıyla yürüttükleri araştırmada öğrencilerin daha çok sezgilerine dayalı erken cebir görevlerini gerçekleştirebildiğini belirlemiştir. Erdem, Öztürk ve Akkan (2019) özdeşlik konusundaki kavram yanılgılarını inceledikleri araştırmada öğrencilerin daha çok aritmetik işlemler yaparak özdeşliklerin doğruluğunu incelediklerini belirlemiştir. Bu bağlamda ulaşılan sonucun alanyazını desteklediği söylenebilir.

Problem Sorusuna Yönelik Tartışma

Problem içeren sorularda öğrencilerin “denge” ve “işlemsel anlamlarını kullandıkları” belirlenmiştir. Bulut vd., (2018) yapmış oldukları çalışmalarında sözel temsil olarak ifade ettikleri sorulara öğrencilerin verdiği cevaplarda başlangıcı bilinmeyen sorulardan ziyade sonucu bilinmeyen sorulara öğrencilerin daha kolayca cevap verdikleri gözlenmiştir. Bu çalışmada öğrencilerin problem içeren sorulara verdikleri cevaplar benzer sonuç ortaya çıkarmıştır.

Terazi modelinin istendiği sözel problemde öğrencilerin daha çok denge anlamını kurması beklenmektedir. Ancak araştırmada ulaşılan sonuç öğrencilerin denge anlamıyla birlikte işlemsel anlamlarını da kullandıklarıdır. Öğrenciler problemi anladıktan sonra bazı öğrenciler problemi sayısal eşitliklerle göstermeye çalışmıştır. Aritmetik işlemlerle yapılan bu eşitlikler öğrencilerin erken cebirsel düşünmesiyle açıklanabilir (Donovan vd., 2022). Çünkü öğrenciler erken cebirsel düşünmede aritmetik işlemlerle başlayan bir genelleme süreci yaşamaktadırlar (Carraher, & Schliemann, 2007; Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008). Örneğin Carraher ve Schliemann (2007) yaptıkları araştırmada öğrencilerin cebirsel genellemelere ulaşırken aritmetik düşünceden faydalandıkları ve bu düşünceyi genelleştirdiklerini belirlemiştir. Bu bağlamda işlemsel bulgusunun alanyazını desteklediği söylenebilir.

Öneriler

Bu araştırmada ulaşılan sonuçlar öğrencilerin eşittir işaretini algılamada “sonuç bul” anlamını düşünmediklerini ortaya koymuştur. Eşittir işaretinin “sonuç bul” anlamı ile düşünülmesi öğrencilerin aritmetikten cebire geçişini güçleştirdiği önceki alanyazında ortaya konulmuştur. Öğrencilerin aritmetik düzeyde bile eşittir işaretini denge anlamı ile anlamaya başlamaları onların aritmetikten cebire geçişlerinin kolaylaştığını işaret edebilir. Cebirsel eşitliklerin aritmetik gösterimlerle ifade edilmesi günümüzde erken cebirsel düşünmenin

(genelleştirilmiş aritmetik) geliştirilmesinde ön plana çıkarılmaktadır (Chimoni *vd.* 2018). Bu bağlamda uygulayıcıların sınıflarında erken cebirsel düşünme etkinlikleri yapması önerilebilir. Bu etkinlikler öğrencilerin cebire geçişine ve cebirsel düşüncelerini geliştirmelerine destek olabilir (Li, Ding, Capraro, & Capraro, 2008). Aynı zamanda eşittir işaretinin öneminin vurgulanması, genel olarak öğrencilerin cebir bilgi düzeylerini geliştirmek için yeterli olmayabilir. Öğrencilerin cebir problemi çözme süreci de eşittir işaretinin anlaşılmasına katkı sağlayabilir (Donovan *vd.*, 2022). Bunun için matematik problemlerini çözerken eşittir işaretinin nasıl kullanılabileceğine ilişkin olarak ne anlama geldiğine de odaklanılmalıdır.



KAYNAKÇA

- Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and learning*, 9(3), 221-247.
- Akkan, Y. (2009). İlköğretim öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi. Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Akkan, Y., & Baki, A. (2016). Doğal sayı sistemindeki özellikleri genelleme yoluyla görünür kılma bağlamında ortaokul öğrencilerinin cebire geçişlerinin incelenmesi.
- Akkan, Y., Baki, A., & Çakıroğlu, Ü. (2012). 5-8. sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin problem çözme bağlamında incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*.
- Arıcan, M. (2019). Preservice mathematics teachers' understanding of and abilities to differentiate proportional relationships from nonproportional relationships. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(7), 1423-1443.
- Ayan, R., & Bostan, M. I. (2018). Middle school students' reasoning in nonlinear proportional problems in geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(3), 503-518
- Bajwa, N., & Perry, M. (2021). Features of a pan balance that may support students' developing understanding of mathematical equivalence. *Mathematical Thinking and Learning*, 21(1), 1-27. <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1700587>
- Behr, M., Erlwanger, S. ve Nichols, E.(1980). How Children View the Equal Sign. *Mathematics Teaching*, 92,13-15.
- Blanton, M., Otálora, Y., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. B., Gibbins, A. and Kim, Y. (2018). Exploring kindergarten students' early understandings of the equal sign. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(3), 167-201.
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46, 39-87.
- Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Nfer Nelson.
- Bulut, D. B., Aygün, B., & İpek, A. S. (2018). Meaning of the primary and secondary school students towards equal sign. *Turkish Journal of Teacher Education*, 7(1), 1-16.
- Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations* (Vol. 1). Courier Corporation.
- Carpenter, T.P. ve Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.

- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research in mathematics education* (pp. 669–705). Greenwich: Information Age Publishing.
- Carpenter, T. P., & Franke M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, Vol. 1, pp. 155–162). Program Committee of ICMI-12 Study.
- Carpenter, T. P., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth NH: Heinemann.
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, 98, 57-76.
- Çepni, S. (2007). Arastırma ve proje çalışmalarına giriş, Celepler Matbaacılık, Genişletilmiş 3. Baskı, Trabzon.
- Dede, Y. (2003). *ARCS motivasyon modeli ve öge gösterim teorisi'ne (Component Display Theory) dayalı yaklaşımın öğrencilerin değişken kavramını öğrenme düzeylerine ve motivasyonlarına etkisi*.Yayımlanmamış doktora tezi, Gazi Ün. Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Doğan-Temur, Ö., & Sancak, G. (2012). Dördüncü sınıf öğrencilerinin eşit işaretini nasıl algıladıklarının incelenmesi. *Milli Eğitim Dergisi*, 194, 240-252.
- Donovan, A. M., Stephens, A., Alapala, B., Monday, A., Szkudlarek, E., Alibali, M. W., & Matthews, P. G. (2022). Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign. *ZDM- Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01405-y>
- Erdem, A., Öztürk, M., & Akkan, Y. (2019). Ortaokul 8 sınıf öğrencilerinin özdeşlik konusundaki kavram yanlışları. Presented at the XII. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresi, Rize.
- Falkner, K.P., Levi, L. & Carpenter, T.P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6 (4), 232-6
- Fyfe, E. R., Matthews, P. G., & Amsel, E. (2020). College developmental math students' knowledge of the equal sign. *Educational Studies in Mathematics*, 104, 65-85.
- Gürbüz, R., ve Toprak, Z. (2014). Designation, Implementation and Evaluation of Activities to Ensure Transition from Arithmetic to Algebra. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science & Mathematics Education*, 8(1).
- Gürel, Z. Ç., & Okur, M. (2018). 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin eşitlik ve denklem konusundaki kavram yanlışları. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, 6(4), 479-507.
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 258–288.
- Karataş, İ., & Güven, B. (2003). Problem çözme davranışlarının değerlendirilmesinde kullanılan yöntemler: Klinik mülakatın potansiyeli. *İlköğretim Online*, 2(2).
- Kızıltoprak, A. (2014). Ortaokul 5. sınıf öğrencilerinde ilişkisel düşünmenin gelişimi: bir öğretim deneyi (Doctoral dissertation, Anadolu University (Turkey)).
- Kieran C. (1981) Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM–Mathematics Education*, 54(6), 1131-1150.
- Kieran, C. ve Chaloug, L. (1993). Prealgebra: The transitions from arithmetic to algebra. In D.T. Owens (Eds.). *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*, (pp 179-198). New York: Macmillan.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics teaching in the Middle School*, 13(9), 514-519.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.
- Lee, L., 1996. An initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities. In N. Bednarz, C. Kieran and Lee, L. (eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 87–106.
- Lee, J., & Pang, J. (2021). Students’ opposing conceptions of equations with two equal signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(3), 209–224.
- Lenz, D. (2022). The role of variables in relational thinking: An interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM Mathematics Education*, 54(6), 1181–1197. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01419-6>
- Li, X., Ding, M., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2008). Sources of differences in children’s understandings of mathematical equality: Comparative analysis of teacher guides and student texts in China and the United States. *Cognition and Instruction*, 26, 195–217.
- Lodholz, R. D. (1990). The transition from arithmetic to algebra. In E.L. Edwards (Ed.), *Algebra for everyone*, (pp. 24-33). Reston, VA: NCTM.
- Madej, L. (2022). Primary school students’ knowledge of the equal sign—the Swedish case. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(2), 321-343.
- Mason, J., 1996. Expressing Generality and Roots of Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.). *Approaches to Algebra*, 65-111. London: Kluwer Academic Publishers.
- Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children’s understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 316–350.
- McMillan, J.W. & Schumacher, S. (2014). *Research in education: Evidence-based inquiry* (Seventh Edition). Boston: Pearson
- Molina, M., & Ambrose, R. C. (2006). Fostering relational thinking while negotiating the meaning of the equals sign. *Teaching Children Mathematics*, 13(2), 111–117.
- Molina, M., & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61-80.
- Newman, A. (1983). *The Newman language of mathematics kit*. Harcourt Brace Jovanovich.
- Özey, K. (2019). *Cebir öğrenme alanında yapılan lisansüstü tezlerin incelenmesi: 2010-2018 yılları arası Türkiye örneği* (Doctoral dissertation, Bursa Uludag University (Turkey)).
- Öztürk, M., Demir, U., & Akkan, Y. (2021). Investigation of proportional reasoning problem solving processes of seventh grade students: A mixed method research. *International*

- Pang, J., & Kim, J. (2018). Characteristics of Korean students' early algebraic thinking: A generalized arithmetic perspective. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12- year-olds*, ICME-13 Monographs (pp. 141–165). Cham: Springer.
- Pearn, C., Stephens, M. & Pierce, R. (2022). Algebraic reasoning in years 5 and 6: classifying its emergence and progression using reverse fraction tasks. *ZDM Mathematics Education*, 54(6), 1257–1271. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01426-7>
- Pillay, H., Wilss, L., & Boulton-Lewis, G. (1998). Sequential development of algebra knowledge: A cognitive analysis. *Mathematics Education Research Journal*, 10, 87–102.
- Powell, S.R., Berry, K.A. & Barnes, M.A. (2020). The role of pre-algebraic reasoning within a word-problem intervention for third-grade students with mathematics difficulty. *ZDM Mathematics Education*, 52(1), 151–163. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01093-1>
- Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM Mathematics Education*, 54(6), 1151–1167. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x>
- Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct modeling approach. *Journal of Educational Psychology*, 103(1), 85–104.
- Stallings, L. (2000). A brief history of algebraic notation. *School Science and Mathematics*, 100(5), 230-235.
- Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M., Isler, I., Gardiner, A. M., & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 173–182.
- Stephens, A., Torres, R. V., Sung, Y., Strachota, S., Gardiner, A. M., Blanton, M., ... & Knuth, E. (2021). From “you have to have three numbers and a plus sign” to “it’s the exact same thing”: k–1 students learn to think relationally about equations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 62, 100871.
- Şahin, H., & Masal, M. (2021). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeler ve birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler konularına ait kavram imajlarının incelenmesi. *Journal of Individual Differences in Education*, 3(2), 74-96.
- Tabach, M. & Friedlander, A. (2003). “The role of context in learning beginning algebra”. *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italia.
- URL-1, <http://www.uludagsozluk.com>. Aritmetik. 24 Nisan 2023
- URL-2, <http://tr.wikipedia.org/wiki/Aritmetik>. Aritmetik. 24 Nisan 2023
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12*, 8, 19.
- Xolocotzin, U., Medrano-Moya, A. M., & Rojano, T. (2022). Starting points: understanding children’s pre-instructional intuitions about function tables. *ZDM–Mathematics Education*, 54(6), 1363-1376.

- Van Amerom, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra* (Doctoral dissertation).
- Yaman, H., Toluk, Z., & Olkun, S. (2003). İlköğretim öğrencileri eşit işaretini nasıl algılamaktadırlar? . *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*.
- Yavuzsoy-Köse, N. & Tanışlı, D. (2011). İlköğretim matematik ders kitaplarında eşit işareti ve ilişkisel düşünme. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(2), 251-277.
- Yıldız, P., & Atay, A. (2019). Ortaokul Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Eşit İşaretine İlişkin Anlamaları. *Ahi Evran Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 5(2), 426-438.



Ek 1- Araştırma İzni

Evrak Tarihi ve Sayısı: 06.02.2023-117907



T.C.
BAYBURT VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-13616634-605.01-69896772
Konu : Araştırma İzin Talebi
(Adem TÜRK)

03.02.2023

BAYBURT ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE
(Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğü)

İlgi :30.01.2023 tarihli ve E-83542712-302.14.01-116437 sayılı yazınız

İlgi yazınızla talep etmiş olduğunuz araştırma izni için müdürlüğümüz tarafından gerekli olur verilmiş olup; verilen makam oluru yazınız ekinde gönderilmiştir.
İlgiliye tebliğini arz ederim.

Rahmi GÜNEY
İl Millî Eğitim Müdürü

Ek:Makam Oluru (1 sayfa)

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Genç Osman Mahallesi Turgut Özal Bulvarı No:113 Kat-1 69000 Bayburt
Telefon No : 0 (458) 280 69 56
E-Posta: ortaogretim69@meh.gov.tr
Kep Adresi : meh@hs01.kep.tr

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meh-ebys>
Bilgi için: Mehmet AKBAŞ
Unvan
Faks:458280

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meh.gov.tr> adresinden e9e7-9c29-3c36-8018-5a60 kodu ile teyit edilebilir.



Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Evrak Tarih ve Sayısı: 08.03.2023-122607



T.C.
BAYBURT ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
ETİK KURULU
KARARI



Karar Tarihi
07.03.2023

Karar Sayısı
45

Oturum Sayısı
3

Üniversitemiz Etik Kurulu tarafından, Bayburt Üniversitesi Rektörlüğü Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğü'nün 09.02.2023 tarihli ve E-83542712-050.99-118588 sayılı yazısı gereği, Bayburt Üniversitesi Rektörlüğü Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Eğitimi Bilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 222234013 numaralı öğrenci Adem TÜRK'ün yürüttüğü "Ortaokul Öğrencilerinin Eşittir İşaretinin Anlamına Yönelik Algıları: Gelişim Bir Araştırma" başlıklı araştırma önerisi üniversitemiz etik kurulu tarafından incelenmiş olup, araştırma önerisinin etik ilkelere uygun olduğuna toplantıya katılan üyelerin oy birliğiyle karar verilmiştir.

Prof.Dr. Ali Savaş BÜLBÜL
Başkan
BELGENİN ASLI ELEKTRONİK İMZALIDIR

Mevcut Elektronik İmzalar

Prof.Dr. ALİ SAVAŞ BÜLBÜL (Etik Kurulu - Başkan) 08.03.2023 14:08



Tel.:

Faks:

E-Posta:

Elektronik ađ:

Bu belge, 5070 sayılı Elektronik İmza Kanununun 5. Maddesi gereğince güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

ÖZGEÇMİŞ

..... ilinin ilçesine bağlı Köyünde yılında dünyaya geldi. 2007 yılında Atatürk Üniversitesinde lisans eğitimini tamamladı 2022 yılında Bayburt Üniversitesi'nde Matematik Eğitimi alanında yüksek lisans eğitimine başladı. 2007 yılında Bayburt'ta öğretmen olarak göreve başladı.

