



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL
DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN VE MATEMATİKSEL DİL
BECERİLERİNİN MATEMATİĞİN ÜÇ DÜNYASI
KURAMSAL ÇERÇEVESİ AÇISINDAN İNCELENMESİ

ESRA AKARSU YAKAR

İzmir
2019

**DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ**

**ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL
DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN VE MATEMATİKSEL DİL
BECERİLERİNİN MATEMATİĞİN ÜÇ DÜNYASI
KURAMSAL ÇERÇEVESİ AÇISINDAN İNCELENMESİ**

ESRA AKARSU YAKAR

**Danışman
Prof.Dr.Suha YILMAZ**

**İzmir
2019**

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum “Ortaokul Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin ve Matematiksel Dil Becerilerinin Matematiğin Üç Dünyası Kuramsal Çerçevesi Açısından İncelenmesi” adlı çalışmanın içerdiği fikri izinsiz başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında ve bölümlerinin yazımında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve *intihal içermediğini* beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

Esra AKARSU YAKAR
03/05/2019





DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



Tarih: 03/05/2019.

Tez Başlığı:

Ortaokul Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin ve Matematiksel Dil Becerilerinin.....
Matematğin Üç Dünyası Kuramsal Çerçevesi Açısından İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 352..... sayfalık kısmına ilişkin, 02./05./2019 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (Turnitin-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen filtreleme tiplerinden biri (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezin **benzerlik oranı % 4.. dir.**

• <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz

Programı Kullanım Kılavuzunu okudum ☒

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) ☒

Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30) ☐

☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça hariç, ☐ Alıntılar dâhil, ☐ Altı (6) kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça dâhil, ☐ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ☒ EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde. ☒	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Esra AKARSU YAKAR
 Öğrenci No : 2014950004
 Anabilim Dalı : İlköğretim
 Programı : İlköğretim Matematik Öğretmenliği
 Statüsü : Yüksek Lisans ☐ Doktora ☒

ÖĞRENCİ

DANIŞMAN

(Adı Soyadı, İmza, Tarih)

(Unvan, Adı Soyadı, İmza, Tarih)

Esra AKARSU YAKAR
 03/05/2019

Prof. Dr. Süha YILMAZ
 03/05/2019

Açıklamalar

- 1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu () işaretleyerek doldurunuz.
- 2: Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel: +90 (232) 3018026 veya ali.tas@deu.edu.tr) başvurunuz.
- 3: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu formu tezin ciltlenmiş ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.
- 4: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.
- 5: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.

DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

ESRA AKARSU YAKAR Tarafından PROF.DR. SÜHA YILMAZ yönetiminde hazırlanan Ortaokul Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin ve Matematiksel Dil Becerilerinin Matematiğin Üç Dünyası Kuramsal Çerçevesi Açısından İncelenmesi başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından “**Doktora Tezi**” olarak kabul edilmiştir.

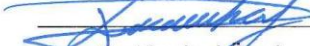
PROF.DR.SÜHA YILMAZ


Danışman

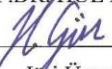
PROF.DR. ELİF TÜRNUKLÜ


Tez Komitesi Üyesi

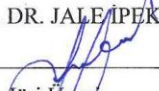
DR. ÖĞR. ÜYESİ BURAK KARABEY


Tez Komitesi Üyesi

PROF.DR. HÜLYA GÜR


Jüri Üyesi

DOÇ. DR. JALE İPEK


Jüri Üyesi

03.05.2019


Prof. Dr. Süha YILMAZ
Enstitü Müdürü V.

03.05.2019

Ulusal Tez Merkezi | Tez Form Yazdır

T.C
YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
ULUSAL TEZ MERKEZİ

TEZ VERİ GİRİŞ FORMU

Referans No	10246083
Yazar Adı / Soyadı	ESRA AKARSU YAKAR
T.C.Kimlik No	49735272368
Telefon	5412843470
E-Posta	es.akarsu@gmail.com
Tezin Dili	Türkçe
Tezin Özgün Adı	Ortaokul Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin ve Matematiksel Dil Becerilerinin Matematiğin Üç Dünyası Kuramsal Çerçevesi Açısından İncelenmesi
Tezin Tercümesi	An Investigation of Mathematical Thinking Processes and Mathematical Language Skills of Secondary School Students Through the Theoretical Framework of 'Three Worlds of Mathematics'
Konu	Eğitim ve Öğretim = Education and Training ; Matematik = Mathematics
Üniversite	Dokuz Eylül Üniversitesi
Enstitü / Hastane	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	İlköğretim Anabilim Dalı
Bilim Dalı	İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı
Tez Türü	Doktora
Yılı	2019
Sayfa	354
Tez Danışmanları	PROF. DR. SÜHA YILMAZ
Dizin Terimleri	
Önerilen Dizin Terimleri	

03.05.2019

İmza:.....

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin başlangıcından doktora eğitimimin sonuna kadar her zaman beni destekleyen, dokuz yıl boyunca her başarımda emeği olan, uzaklığı sorun etmeden istedikten sonra her şeyi başarabileceğime inandıran, bana olan güvenini her zaman hissettiren, akademik anlamda değerli bilgilerini benimle paylaştığı için onur duyduğum değerli büyüğüm, danışmanım, hocam Sayın Prof. Dr. Süha YILMAZ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Matematiksel düşünme üzerine çalışmam konusunda kendisinden aldığım derslerin büyük etkisi olduğunu düşündüğüm, tez çalışmama değerli bilgileriyle katkılar sağlayan hocam Sayın Prof. Dr. Elif TÜRNUKLÜ' ye; tezimin her aşamasını yakından takip eden, bana yol gösteren ve değerli bilgilerini benimle paylaşan hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Burak KARABEY' e; doktora tez jürimde olmayı kabul ederek değerli görüşlerini benimle paylaşan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Hülya GÜR' e ve Sayın Doç. Dr. Jale İPEK' e; teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca beni her zaman destekleyen tüm öğretmenlerime, akademik anlamda gelişimimi tamamlamamda katkıları bulunan tüm lisans ve lisansüstü hocalarıma, tez çalışmama değerli görüşleriyle katkıda bulunan hocam Sayın Doç. Dr. Bahar BARAN' a çok teşekkür ederim. Tez çalışmamın uygulama sürecinde bana çok yardımcı olan başta okul müdürüm Sayın Ahmet GÜRKAŞ' a, bana destek sağlayan tüm okullara ve öğrencilere teşekkürlerimi sunarım. Doktora eğitimimde verdikleri desteklerden dolayı Arş. Gör. Dilek İZGİOL ve Bahar DİNÇER' e çok teşekkür ederim. Ayrıca, doktora eğitimim boyunca beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Dairesi Başkanlığı (BİDEB) ' na teşekkür ederim.

Canım annem Melek AKARSU ve canım babam Şevket AKARSU...Siz her zaman benim en büyük destekçimsiniz. Yol gösterenimsiniz. Sizin kızınız olmaktan her zaman gurur duyacağım. Bana olan tüm desteğiniz için çok teşekkür ederim. Güneşiniz, ışığınız hep sizin için parlayacak. İyi ki varsınız.

Son olarak; manevi gücüm, dayanağım, doktora eğitimim sürecinde desteğini her zaman hissettiğim, bana hep güvenen ve başarılarımı başarısı, mutluluğumu mutluluğu sayan canım eşim Mehmet YAKAR' a bu zorlu yolculukta benim hep yanımda yer aldığı için sonsuz teşekkür ederim.

Şubat, 2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	xxiv
ABSTRACT.....	xxvii
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu.....	1
1.2. Amaç ve Önem	3
1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri.....	5
1.4. Sınırlılıklar	6
1.5. Varsayımlar.....	6
1.6. Tanımlar.....	7
1.7. Kısaltmalar.....	7
BÖLÜM II.....	8
KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	8
2.1. Matematiksel Düşünme	8
2.1.1. Cebirsel Düşünme	11
2.1.2. Geometrik Düşünme	15
2.2. Matematiğin Üç Dünyası	18
2.3. Matematiksel Dil.....	23
BÖLÜM III	27
YÖNTEM.....	27
3.1. Araştırmanın Modeli / Deseni.....	27
3.2. Çalışma Grubu	28
3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları	30
3.3.1. Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi.....	30
3.3.2. Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği.....	38
3.3.3. Yarı-yapılandırılmış görüşme soruları	38
3.4. Uygulama Süreci.....	45
3.5. Verilerin Analizi	48
3.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği	50
3.7. Araştırmacının Rolü	53
BÖLÜM IV	55
BULGULAR.....	55
4.1. 6. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerine Ait Bulgular ..	57

4.1.1. 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili 6. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular	57
4.1.2. 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili 6. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular.....	80
4.1.3. 3. oturumda 6. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular ...	87
4.1.4. Yarı-yapılandırılmış görüşmeler sonucu 6. sınıf öğrencilerinin bireysel değerlendirilmeleri	95
4.1.4.1. Yusuf _(C1G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	95
4.1.4.2. Hale _(C1G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	99
4.1.4.3. Rana _(C1G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi.....	104
4.1.4.4. Özgür _(C2G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	108
4.1.4.5. Zehra _(C2G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi.....	113
4.1.4.6. Serkan _(C2G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi.....	119
4.1.4.7. Meltem _(C3G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	124
4.1.4.8. Sarp _(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi.....	129
4.2. 7. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerine Ait Bulgular	135
4.2.1. 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili 7. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular	135
4.2.2. 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili 7. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular.....	154
4.2.3. 3. oturumda 7. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular .	160
4.2.4. Yarı-yapılandırılmış görüşmeler sonucu 7. sınıf öğrencilerinin bireysel değerlendirilmeleri	168
4.2.4.1. Ekin _(C1G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	169
4.2.4.2. İdil _(C1G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	173
4.2.4.3. Metin _(C1G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	177
4.2.4.4. Elif _(C2G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi.....	181
4.2.4.5. Ali _(C2G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi.....	185
4.2.4.6. Canan _(C3G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi.....	191
4.2.4.7. Ilgın _(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	196
4.3. 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerine Ait Bulgular	203
4.3.1. 1. oturumda cebirsel öğrenme alanı ile ilgili 8. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular.....	203
4.3.2. 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili 8. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular.....	226
4.3.3. 3. oturumda 8. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular .	232

4.3.4. Yarı-yapılandırılmış görüşmeler sonucu 8. sınıf öğrencilerinin bireysel değerlendirilmeleri	240
4.3.4.1. Şener _(C1G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi.....	240
4.3.4.2. Tan _(C1G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi.....	245
4.3.4.3. Sevgi _(C2G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi.....	249
4.3.4.4. Yasin _(C2G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi.....	254
4.3.4.5. Rüzgar _(C3G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	258
4.3.4.6. Belgin _(C3G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	262
4.3.4.7. Cansu _(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	267
4.3.4.8. Asaf _(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi	272
BÖLÜM V	277
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	277
5.1. Tartışma	277
5.2. Sonuç ve Öneriler	288
KAYNAKÇA.....	293
EK 1.	309
EK 2. ETİK KURUL İZNİ.....	311
EK 3. GEOMETRİK DÜŞÜNME DÜZEYLERİ ÖLÇEĞİ KULLANIM İZNİ.	312
EK 4. CEBİRSEL DÜŞÜNME DÜZEY BELİRLEME TESTİ.....	313
EK 5. GEOMETRİK DÜŞÜNME DÜZEYLERİ ÖLÇEĞİ.....	1
EK 6. YARI YAPILANDIRILMIŞ GÖRÜŞME SORULARI.....	1

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1 Bilişsel gelişim döngüleri	21
Tablo 2 Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi ve Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği uygulanan öğrencilere ait betimsel bilgiler	28
Tablo 3 Amaçlı örnekleme yöntemiyle seçilen ve görüşme yapılan öğrencilere ait bilgiler	29
Tablo 4 Madde güçlük indeks değerlerine göre değerlendirme kriterleri.....	32
Tablo 5 Madde ayırtedicilik indeks değerlerine göre değerlendirme kriterleri	32
Tablo 6 Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Taslak Testi' nde yer alan maddelere ait güçlük ve ayırtedicilik indeksleri	33
Tablo 7 Doğrulamalı faktör analizi sonucu taslak testten elde edilen değerler	35
Tablo 8 Modifikasyon önerilerinin uygulanması sonucu taslak testten elde edilen değerler.....	35
Tablo 9 Nihai teste ait madde güçlük ve ayırtedicilik indeksleri.....	36
Tablo 10 Nihai testte yer alan soruların cebirsel düşünme düzeylerine göre dağılımı	37
Tablo 11 Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi ile alt boyutları arasındaki korelasyon matrisi	37
Tablo 12 Yarı yapılandırılmış görüşmelerin zaman çizelgesi.....	46
Tablo 13 Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından matematiksel düşünme süreçlerine dair genel çerçeve.....	48
Tablo 14 Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından matematiksel dil becerilerine dair genel çerçeve.....	49
Tablo 15 1. Oturum 4. soru ile ilgili araştırmacı ve alanında uzman bir matematik öğretmenin değerlendirmeleri	51
Tablo 16 2. Oturum 3. soru ile ilgili araştırmacı ve alanında uzman bir matematik öğretmenin değerlendirmeleri	52
Tablo 17 3. oturum üçgen eşitsizliği ile ilgili soru için araştırmacı ve alanında uzman bir matematik öğretmenin değerlendirmeleri.....	53
Tablo 18 Ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerinin cinsiyet ve sınıf düzeyi açısından değerlendirilmesi.....	55

Tablo 19 “5’i anlatır mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	57
Tablo 20 KİSS açısından 6. sınıf öğrencilerinin “5’i anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar.....	58
Tablo 21 “4+3’ü anlatır mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	59
Tablo 22 KİSS açısından 6. sınıf öğrencilerinin “4+3’ü anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar.....	60
Tablo 23 $28 + \square = 30 + \triangle$ sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	61
Tablo 24 “ $a+3b$ ifadesini anlatır mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	62
Tablo 25 KİSS açısından 6. sınıf öğrencilerinin “ $a+3b$ ’yi anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar.....	64
Tablo 26 “Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	65
Tablo 27 ““İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	67
Tablo 28 ““Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı çift sayıdır.” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	69
Tablo 29 “ “ x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	70
Tablo 30 ““Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle” ifadesi ile “Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp” ifadelerini karşılaştırır mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	72
Tablo 31 ““ $x=3$ için $4x+8$ ifadesi neye eşit olur, $x=3$ için $8+4x$ ifadesi neye eşit olur, $x=3$ için $2(2x+4)$ ifadesi neye eşit olur?” ifadelerini karşılaştırır mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	74
Tablo 32 Örüntü sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	76
Tablo 33 Dikdörtgensel bölgenin alanına yönelik farklı cebirsel ifadeler elde etme sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	78

Tablo 34 “Üçgeni anlatır mısınız?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin cevapları.....	80
Tablo 35 “Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180^0 ’ dir.” ifadesine dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	81
Tablo 36 Üçgen eşitsizliğinin sözel ifadesine yönelik 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	83
Tablo 37 Pisagor Bağıntısı’ nın sözel ifadesine yönelik 6. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	85
Tablo 38 Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini keşfetmeye yönelik 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	87
Tablo 39 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı keşfetmeye yönelik 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	91
Tablo 40 Yusuf _(C1G1) ’un cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	95
Tablo 41 Yusuf _(C1G1) ’un geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	96
Tablo 42 Yusuf _(C1G1) ’un gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	96
Tablo 43 Yusuf _(C1G1) ’un matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri.....	97
Tablo 44 Hale _(C1G2) ’nin cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	99
Tablo 45 Hale _(C1G2) ’nin geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	99
Tablo 46 Hale _(C1G2) ’ nin gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	100
Tablo 47 Hale _(C1G2) ’ nin matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri.....	101
Tablo 48 Rana _(C1G3) ’nın cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	104
Tablo 49 Rana _(C1G3) ’ nın geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	105
Tablo 50 Rana _(C1G3) 'nın gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	106

Tablo 51 Rana _(C1G3) 'nın matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri.....	106
Tablo 52 Özgür _(C2G1) 'ün cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	108
Tablo 53 Özgür _(C2G1) 'ün geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	109
Tablo 54 Özgür _(C2G1) 'ün gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	109
Tablo 55 Özgür _(C2G1) 'ün matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri	110
Tablo 56 Zehra _(C2G2) 'nın cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	113
Tablo 57 Zehra _(C2G2) 'nın geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	113
Tablo 58 Zehra _(C2G2) 'nın gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	114
Tablo 59 Zehra _(C2G2) 'nın matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri	114
Tablo 60 Serkan _(C2G3) 'ın cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	119
Tablo 61 Serkan _(C2G3) 'ın geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	119
Tablo 62 Serkan _(C2G3) 'ın gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	120
Tablo 63 Serkan _(C2G3) 'ın matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri	120
Tablo 64 Meltem _(C3G1) 'in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	124
Tablo 65 Meltem _(C3G1) 'in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	124
Tablo 66 Meltem _(C3G1) 'in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	125

Tablo 67 Meltem _(C3G1) ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri	125
Tablo 68 Sarp _(C3G3) ' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	129
Tablo 69 Sarp _(C3G3) ' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	130
Tablo 70 Sarp _(C3G3) ' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	130
Tablo 71 Sarp _(C3G3) ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri.....	131
Tablo 72 “5’i anlatır mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	135
Tablo 73 KİSS açısından 7. sınıf öğrencilerinin “5’i anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar.....	136
Tablo 74 “4+3’ü anlatır mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	137
Tablo 75 KİSS açısından 7. sınıf öğrencilerinin “4+3’ü anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar.....	138
Tablo 76 $28 + \square = 30 + \triangle$ sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	139
Tablo 77 “a+3b ifadesini anlatır mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	140
Tablo 78 KİSS açısından 7. sınıf öğrencilerinin “a+3b’yi anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar.....	141
Tablo 79 “Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır ifadesini açıklar mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	142
Tablo 80 ““İki tek sayının çarpımı tek sayıdır” ifadesini açıklar mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	144
Tablo 81 “ “Bir tek ve bir çift sayının toplamı çift sayıdır.” ifadesini açıklar mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	145
Tablo 82 “ “x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır” ifadesini açıklar mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	147

Tablo 83 “"Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle" ifadesi ile "Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp" ifadelerini karşılaştırır mısın?" sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	148
Tablo 84 ““ $x=3$ için $4x+8$ ifadesi neye eşit olur?, $x=3$ için $8+4x$ ifadesi neye eşit olur?, $x=3$ için $2(2x+4)$ ifadesi neye eşit olur?” ifadelerini karşılaştırır mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	150
Tablo 85 Örüntü sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	151
Tablo 86 Dikdörtgensel bölgenin alanına yönelik farklı cebirsel ifadeler elde etme sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	153
Tablo 87 “Üçgeni anlatır mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin cevapları..	155
Tablo 88 “Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180^0 dir.” ifadesine dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	155
Tablo 89 Üçgen eşitsizliğinin sözel ifadesine yönelik 7. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	157
Tablo 90 Pisagor Bağıntısı’ nın sözel ifadesine yönelik 7. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	159
Tablo 91 Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini keşfetmeye yönelik 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	161
Tablo 92 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı keşfetmeye yönelik 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	164
Tablo 93 $E_{kin(C1G1)}$ ’ in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	169
Tablo 94 $E_{kin(C1G1)}$ ’ in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	169
Tablo 95 $E_{kin(C1G1)}$ ’ in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	170
Tablo 96 $E_{kin(C1G1)}$ ’ in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri.....	170
Tablo 97 $İ_{dil(C1G2)}$ ’ in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları .	173
Tablo 98 $İ_{dil(C1G2)}$ ’ in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	173

Tablo 99 İdil _(C1G2) ' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	174
Tablo 100 İdil _(C1G2) ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri.....	174
Tablo 101 Metin _(C1G3) ' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	178
Tablo 102 Metin _(C1G3) ' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	178
Tablo 103 Metin _(C1G3) ' nin gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	179
Tablo 104 Metin _(C1G3) ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri	179
Tablo 105 Elif _(C2G1) ' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	181
Tablo 106 Elif _(C2G1) ' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	182
Tablo 107 Elif _(C2G1) ' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	182
Tablo 108 Elif _(C2G1) ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri.....	183
Tablo 109 Ali _(C2G2) ' nin cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	185
Tablo 110 Ali _(C2G2) ' nin geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	186
Tablo 111 Ali _(C2G2) ' nin gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	186
Tablo 112 Ali _(C2G2) ' nin matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri.....	187
Tablo 113 Canan _(C3G1) ' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	191
Tablo 114 Canan _(C3G1) ' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	192

Tablo 115 Canan _(C3G1) ' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı 'nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	192
Tablo 116 Canan _(C3G1) ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri	193
Tablo 117 Ilgın _(C3G3) ' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	196
Tablo 118 Ilgın _(C3G3) ' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	197
Tablo 119 Ilgın _(C3G3) ' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	197
Tablo 120 Ilgın _(C3G3) ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri.....	198
Tablo 121 “5’i anlatır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	204
Tablo 122 KİSS açısından 8. sınıf öğrencilerinin “5’i anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar.....	205
Tablo 123 “4+3’ü anlatır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	206
Tablo 124 KİSS açısından 8. sınıf öğrencilerinin “4+3’ü anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar.....	207
Tablo 125 $28 + \square = 30 + \triangle$ sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	208
Tablo 126 “a+3b ifadesini anlatır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	210
Tablo 127 KİSS açısından 8. sınıf öğrencilerinin “a+3b’yi anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar.....	211
Tablo 128 “Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	212
Tablo 129 “İki tek sayının çarpımı tek sayıdır” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	214
Tablo 130 “Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı çift sayıdır.” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	215

Tablo 131 ““x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır” ifadesini açıklar mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	217
Tablo 132 ““Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle” ifadesi ile “Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp” ifadelerini karşılaştırır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	219
Tablo 133 ““x=3 için $4x+8$ ifadesi neye eşit olur?, x=3 için $8+4x$ ifadesi neye eşit olur?, x=3 için $2(2x+4)$ ifadesi neye eşit olur?” ifadelerini karşılaştırır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	221
Tablo 134 Örüntü sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	222
Tablo 135 Dikdörtgensel bölgenin alanına yönelik farklı cebirsel ifadeler elde etme sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	224
Tablo 136 “Üçgeni anlatır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin cevapları.	226
Tablo 137 “Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.” ifadesine dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	227
Tablo 138 Üçgen eşitsizliğinin sözel ifadesine yönelik 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	229
Tablo 139 Pisagor Bağıntısı’ nın sözel ifadesine yönelik 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları.....	230
Tablo 140 Gerçek yaşam durumu içerisindeki üçgen eşitsizliğini keşfetmeye yönelik 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	233
Tablo 141 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı keşfetmeye yönelik 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları	236
Tablo 142 Şener _(C1G1) ’ in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	241
Tablo 143 Şener _(C1G1) ’ in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	241
Tablo 144 Şener _(C1G1) ’ in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları	242
Tablo 145 Şener _(C1G1) ’ in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri	242

Tablo 146 $Tan_{(C1G3)}$ ' in cebir ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	245
Tablo 147 $Tan_{(C1G3)}$ ' in geometri ile ilgili gűsterdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	245
Tablo 148 $Tan_{(C1G3)}$ ' in gerűek yařam durumu iűerisinde űűgen eřitsizliđi ve Pisagor Bađıntısı ' nı oluřturmada geliřtirdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	246
Tablo 149 $Tan_{(C1G2)}$ ' in matematiđin űű dűnyası boyutları aűısından matematiksel dil becerileri.....	246
Tablo 150 Sevgi $_{(C2G1)}$ ' nin cebir ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	250
Tablo 151 Sevgi $_{(C2G1)}$ ' nin geometri ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	250
Tablo 152 Sevgi $_{(C2G1)}$ ' nin gerűek yařam durumu iűerisinde űűgen eřitsizliđi ve Pisagor Bađıntısı ' nı oluřturmada geliřtirdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	251
Tablo 153 Sevgi $_{(C1G2)}$ ' nin matematiđin űű dűnyası boyutları aűısından matematiksel dil becerileri	251
Tablo 154 Yasin $_{(C2G2)}$ ' in cebir ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	254
Tablo 155 Yasin $_{(C2G2)}$ ' in geometri ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	255
Tablo 156 Yasin $_{(C2G2)}$ ' in gerűek yařam durumu iűerisinde űűgen eřitsizliđi ve Pisagor Bađıntısı' nı oluřturmada geliřtirdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	255
Tablo 157 Yasin $_{(C2G2)}$ ' in matematiđin űű dűnyası boyutları aűısından matematiksel dil becerileri	256
Tablo 158 Rűzgar $_{(C3G1)}$ ' in cebir ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	258
Tablo 159 Rűzgar $_{(C3G1)}$ ' in geometri ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	259
Tablo 160 Rűzgar $_{(C1G2)}$ ' in gerűek yařam durumu iűerisinde űűgen eřitsizliđi ve Pisagor Bađıntısı' nı oluřturmada geliřtirdiđi matematiksel dűřűnme boyutları	259
Tablo 161 Rűzgar $_{(C3G1)}$ ' in matematiđin űű dűnyası boyutları aűısından matematiksel dil becerileri	260

Tablo 162 Belgin _(C3G2) ' in cebir ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřünme boyutları	262
Tablo 163 Belgin _(C3G2) ' in geometri ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřünme boyutları	263
Tablo 164 Belgin _(C1G2) ' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel dűřünme boyutları	264
Tablo 165 Belgin _(C3G2) ' in matematiđin üç dűnyası boyutları aćısından matematiksel dil becerileri	264
Tablo 166 Cansu _(C3G3) ' nun cebir ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřünme boyutları	267
Tablo 167 Cansu _(C3G3) ' nun geometri ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřünme boyutları	267
Tablo 168 Cansu _(C3G3) ' nun gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel dűřünme boyutları	268
Tablo 169 Cansu _(C3G3) ' nun matematiđin üç dűnyası boyutları aćısından matematiksel dil becerileri	269
Tablo 170 Asaf _(C3G3) ' in cebir ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřünme boyutları	272
Tablo 171 Asaf _(C3G3) ' in geometri ile ilgili geliřtirdiđi matematiksel dűřünme boyutları	273
Tablo 172 Asaf _(C1G2) ' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel dűřünme boyutları	273
Tablo 173 Asaf _(C3G3) ' in matematiđin üç dűnyası boyutları aćısından matematiksel dil becerileri.....	274

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Araştırmanın akış şeması	46
Şekil 2 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Yusuf _(C1G1) ' un çizdiği şekil	92
Şekil 3 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Hale _(C1G2) ' nin çizdiği şekil	92
Şekil 4 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Rana _(C1G3) ' nin çizdiği şekil.....	93
Şekil 5 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Özgür _(C2G1) ' ün çizdiği şekil.....	93
Şekil 6 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Zehra _(C2G2) ' nin çizdiği şekil	93
Şekil 7 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Serkan _(C2G3) ' in çizdiği şekil	94
Şekil 8 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Meltem _(C3G1) ' in çizdiği şekil	94
Şekil 9 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Sarp _(C3G3) ' in çizdiği şekil	95
Şekil 10 Yusuf _(C1G1) ' un işlem önceliğine dair yaptığı hata	98
Şekil 11 Hale _(C1G2) ' nin üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını gösterme süreci ...	103
Şekil 12 Hale _(C1G2) ' nin sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğine dair çözüm süreci	103
Şekil 13 Hale _(C1G2) ' nin gerçek yaşam durumu içerisinde oluşturduğu üçgen eşitsizliğine dair sembolik ifadesi	104
Şekil 14 Hale _(C1G2) ' nin yazılı dil kullanımında yaptığı hata	104
Şekil 15 Rana _(C1G3) ' nin sözel ifadede yer alan Pisagor Bağıntısı' nı açıklama süreci	108
Şekil 16 Özgür _(C2G1) ' ün sözel ifade olarak verilen üçgen eşitsizliğini açıklama süreci	112
Şekil 17 Özgür _(C2G1) ' ün dik açıyı ve dik açı karşısındaki kenarı 90 cm ² olarak göstermesi	112
Şekil 18 Zehra _(C2G2) ' nin 5' e dair tasviri	115

Şekil 19 Zehra _(C2G2) ' nın bir cebirsel ifade üzerinde çarpmanın dağılma özelliğini gösterme süreci.....	116
Şekil 20 Zehra _(C2G2) ' nın hatalı yazılı dil kullanımı	117
Şekil 21 Zehra _(C2G2) ' nın üçgen eşitsizliğine dair sembolik gösterimi	118
Şekil 22 Zehra _(C2G2) ' nın dik kenar uzunluklarının karesi ifadesindeki kare kavramına dair tasviri.....	118
Şekil 23 Serkan _(C2G3) ' ın üçgen eşitsizliğine dair sembolik ifadesi.....	123
Şekil 24 Serkan _(C2G3) ' ın gerçek yaşam durumu içerisinde Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecine dair	123
Şekil 25 Meltem _(C3G1) ' in üçgenin iki iç açı ölçüsünü 90° olarak gösterme sürecine dair.....	128
Şekil 26 Meltem _(C3G1) ' in sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğine dair düşünme süreci	128
Şekil 27 Meltem _(C3G1) ' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturma sürecine dair	129
Şekil 28 Sarp _(C3G3) ' ın üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını açıklama sürecine dair.....	133
Şekil 29 Sarp _(C3G3) ' ın sözel ifade içerisinde yer alan üçgen eşitsizliğini açıklama süreci	134
Şekil 30 Sarp _(C3G3) ' ın Pisagor Bağıntısı' na yönelik sembolik gösterimi	135
Şekil 31 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Ekin _(C1G1) ' in çizdiği şekil.....	165
Şekil 32 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair İdil _(C1G2) ' in çizdiği şekil.....	165
Şekil 33 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Metin _(C1G3) ' in çizdiği şekil.....	166
Şekil 34 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Elif _(C2G1) ' in çizdiği şekil	166
Şekil 35 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Ali _(C2G2) ' nin çizdiği şekil	167
Şekil 36 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Canan _(C3G1) ' in çizdiği şekil	167

Şekil 37 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair İlgin _(C3G3) ' in çizdiği şekil.....	168
Şekil 38 Ekin _(C1G1) ' in örüntü sorusunda her bir adımdaki bilye sayısını alfabe-deki harflerin sırasıyla ilişkilendirmesine dair	172
Şekil 39 Ekin _(C1G1) ' in üçgenin iç açılarını ölçerken gerçekleştirdiği hatalı süreç- e dair	172
Şekil 40 İdil _(C1G2) ' in $a+3b$ ifadesini açıklama süreci.....	176
Şekil 41 İdil _(C1G2) ' in üçgenin tüm iç açı ölçülerini 180° olarak düşünmesi	176
Şekil 42 İdil _(C1G2) ' in üçgen eşitsizliğine dair sembolik gösterimi.....	177
Şekil 43 İdil _(C1G2) ' in Pisagor Bağıntısı' nın sözel ifadesine dair sembolik gösterimi	177
Şekil 44 Metin _(C1G3) ' in örüntü kuralını açıklama süreci	180
Şekil 45 Metin _(C1G3) ' in Pisagor Bağıntısı' na yönelik sembolik gösterimi.....	181
Şekil 46 Elif _(C2G1) ' in yazılı dil kullanımında yaptığı hata	184
Şekil 47 Elif _(C2G1) ' in Pisagor Bağıntısı' na yönelik sembolik gösterimi	185
Şekil 48 Ali _(C2G2) ' nin yazılı dil kullanımında yaptığı hata.....	188
Şekil 49 Ali _(C2G2) ' nin gerçek yaşam durumu içerisinde yer alan Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma süreci	191
Şekil 50 Canan _(C3G1) ' in sadeleştirme işlemine dair hatası.....	194
Şekil 51 Canan _(C3G1) ' in üçgen eşitsizliğine dair sembolik gösterimi	195
Şekil 52 Canan _(C3G1) ' in Pisagor Bağıntısı' na yönelik sembolik gösterimi	196
Şekil 57 İlgin _(C3G3) ' in iki cebirsel ifadenin çarpımını gösterme süreci.....	199
Şekil 58 İlgin _(C3G3) ' in üçgen eşitsizliğine dair sembolik gösterimi	201
Şekil 59 İlgin _(C3G3) ' in sözel olarak verilen Pisagor Bağıntısı' na dair sembolik gösterimi.....	202
Şekil 60 İlgin _(C3G3) ' in gerçek yaşam durumu içerisinde Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma süreci	203
Şekil 61 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Şener _(C1G1) ' in çizdiği şekil.....	237
Şekil 62 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Tan _(C1G3) ' in çizdiği şekil.....	238

Şekil 63 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Sevgi _(C2G1) ' nin çizdiği şekil.....	238
Şekil 64 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Yasin _(C2G2) ' in çizdiği şekil.....	238
Şekil 65 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Rüzgar _(C3G1) ' in çizdiği şekil.....	239
Şekil 66 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Belgin _(C3G2) ' in çizdiği şekil	239
Şekil 67 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Cansu _(C3G3) ' nun çizdiği şekil	239
Şekil 68 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Asaf _(C3G3) ' in çizdiği şekil.....	240
Şekil 70 Şener _(C1G1) ' in 5 ve 4+3 kavramlarına dair tasviri	243
Şekil 71 Tan _(C1G3) ' in yazılı dil kullanımına dair hatası	247
Şekil 72 Tan _(C1G3) ' in oluşturduğu eşkenar üçgen.....	248
Şekil 73 Tan _(C1G3) ' in üçgen eşitsizliğine yönelik sembolik gösterimi	249
Şekil 74 Tan _(C1G3) ' in Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma süreci	249
Şekil 75 Sevgi _(C2G1) ' nin iki cebirsel ifadenin çarpımını gösterme süreci	253
Şekil 76 Sevgi _(C2G1) ' nin Pisagor Bağıntısı' na yönelik sembolik gösterimi	254
Şekil 77 Yasin _(C2G2) ' in iki cebirsel ifadenin çarpımını gösterme süreci	258
Şekil 78 Rüzgar _(C3G1) ' in yazılı dil kullanımına dair hatası.....	261
Şekil 79 Rüzgar _(C3G1) ' in iki cebirsel ifadenin çarpımını gösterme süreci	261
Şekil 80 Rüzgar _(C3G1) ' in üçgeni sürekli ikizkenar üçgen olarak göstermesi	261
Şekil 81 Rüzgar _(C3G1) ' in üçgen eşitsizliğini ifade etme süreci	262
Şekil 82 Belgin _(C3G2) ' in bir tek sayı ve bir çift sayının toplamının tek sayı oluşturacağına dair cebirsel açıklaması.....	265
Şekil 83 Belgin _(C3G2) ' in iki cebirsel ifadenin çarpımına dair cebirsel gösterimi.....	266
Şekil 84 Belgin _(C3G2) ' in (n+7) ile 3' ün çarpımını farklı gösteriş biçimleri	266
Şekil 85 Belgin _(C3G2) ' in işlemsel süreçteki hatası	266
Şekil 86 Cansu _(C3G3) ' nun iki cebirsel ifadenin çarpımına dair cebirsel gösterimi ..	270
Şekil 87 Cansu _(C3G3) ' nun örüntü kuralı oluşturma süreci.....	271

Şekil 88 Cansu _(C3G3) ' nun dikdörtgensel bölgenin alanını gösteren farklı cebirsel ifadeler oluşturma süreci	271
Şekil 89 Cansu _(C3G3) ' nun üçgen eşitsizliğine dair sembolik gösterimi	272
Şekil 90 Asaf _(C3G3) ' ın çift sayıya dair sembolik gösterimi.....	275
Şekil 91 Asaf _(C3G3) ' ın gerçek yaşam durumu içerisinde Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma süreci	276



ÖZET

Ortaokul Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin ve Matematiksel Dil Becerilerinin Matematiğin Üç Dünyası Kuramsal Çerçevesi Açısından İncelenmesi

Matematiğin üç dünyası, matematiksel düşünme sürecini üç düşünme dünyası açısından inceleyen bir kuramsal çerçevedir. Matematiksel düşünme, bireylerin bilgiyi anlamlandırma süreçleridir. Dolayısıyla matematiksel düşünme bir süreçtir. Bu süreç içerisinde kavramsal yapılara dair ön bilgiler ortaya çıkmaktadır. Ardından mevcut bilgi yapılarıyla yeni kavramsal yapılar oluşturulmaktadır. Matematiğin üç dünyasına göre düşünme, kavramsal somut dünya boyutu ile başlar. Birey, somut olarak karşılaşılan bir kavramı sembolik olarak düşünmeye başladığında nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna geçiş yapar. Ayrıca bu boyut KİSS (kavramsal işlemsel sembolik süreç) düzeylerini içermektedir. KİSS ise işlemsel süreç ve kavramın sembolik olarak düşünülme sürecini kapsar. Birey kavrama dair bilgi yapılarını oluşturup, ifade edebildiğinde aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirir. İspat süreci ifade edilir. Her düşünme boyutu kendi içinde farklı matematiksel dil becerilerini içerir. Bu matematiksel dil becerileri kavramsal somut dünya boyutunda kavramları somut olarak tasvir etme becerilerine yöneliktir. Sözlü, yazılı ve görsel dili kullanma becerileri bu boyutta yer alır. Sembolik ifade oluşturma becerileri nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer alır. Kavramların tanımlarına dair bireylerin kendi açıklamalarını doğru dil kullanımı ile yapmaları aksiyomatik formal dünya boyutunda yer alır.

Tez çalışmasında ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin ve matematiksel dil becerilerinin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından incelenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri KİSS düzeyleri açısından da incelenmiştir. Farklı cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerine sahip öğrencilerin düşünme boyutlarına ve dil becerilerine dair bilgi sunmak araştırmanın temelini oluşturmaktadır. Ortaokul düzeyi olarak 6., 7. ve 8. sınıf düzeyleri

belirlenmiştir. Tez çalışması Kocaeli ilinde gerçekleştirilmiştir. Tez çalışması üç aşamalıdır. Öncelikle ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri belirlenmiştir. Ardından cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerine göre seçilen öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Uygulama süreci 2017-2018 öğretim döneminde gerçekleştirilmiştir.

Tez çalışması karma desende tasarlanmıştır. Tez çalışmasında ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerini belirlemek amacıyla Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi geliştirilmiştir. Bu test cebirsel düşünmenin ilk üç düzeyine yöneliktir. Test geliştirme sürecinde geçerlik ve güvenirlik çalışmaları yapılmıştır. Tüm analizler sonucunda geliştirilmiş olan 27 soruluk testin güvenirlik katsayısı 0,86 olarak hesaplanmıştır. Öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerini belirlemek amacıyla Akyıldırım (2005) tarafından geliştirilen Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği kullanılmıştır. Bu test geometrik düşünmenin ilk dört düzeyine yöneliktir. Tez çalışmasında geometrik düşünmenin ilk üç düzeyi temel alınmıştır. Bu ölçeğin güvenirlik katsayısı 0,81 olarak hesaplanmıştır. Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi ve Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği küme örnekleme yöntemiyle belirlenen 2808 öğrenciye uygulanmıştır. Ardından amaçlı örnekleme yöntemi ile belirlenen farklı cebirsel ve geometrik düşünme düzeylerine sahip 23 öğrenciye yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu öğrencilerin 8'i 6. sınıf, 7'si 7. sınıf ve 8'i 8. sınıftır. Yarı yapılandırılmış görüşmeler her öğrenciyle ayrı olarak üç ayrı oturumda gerçekleştirilmiştir. Birinci oturumda cebir öğrenme alanına yönelik sorular sorulmuştur. Bu oturumda öğrencilerin KİSS kavramına dair bilgi yapıları ve sembolik ifade oluşturma süreçleri incelenmiştir. İkinci oturumda geometri öğrenme alanına yönelik sorulara yer verilmiştir. Öğrencilerin üçgen kavramına dair bilgi yapıları incelenmiştir. Üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nın sözel ifadeleri öğrencilere sunularak ifadelere açıklamaya yönelik ispat süreci geliştirmeleri istenmiştir. Üçüncü oturumda ise üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı gerçek yaşam durumu içerisinde oluşturmaları beklenmiştir.

Tez çalışmasının uygulama süreci sonucunda ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerinin çoğunlukla birinci düzeylerde yer aldığı görülmüştür. Cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerinin matematiksel düşünme süreci geliştirmede birlikte etkili olduğu belirlenmiştir. Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine dair ortaokul düzeyi açısından farklı bir bakış sunulmuştur. Öğretim programı içerisinde bulundukları sınıf düzeyine ait olmayan kazanımların yer aldığı sorularda 6. sınıf ve 7. sınıf öğrencilerinin aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirebildikleri belirlenmiştir. 6. sınıf öğrencilerinin kavramları oluştururken matematiksel

düşünme süreçlerinin daha özgün olduğu görülmüştür. Bu durum sınıf düzeyi arttıkça derste öğrenilen bilgilerin öğrencilerin ispat süreci geliştirmedeki matematiksel düşünme süreçlerini etkilediği şeklinde yorumlanmıştır. Dolayısıyla kavram oluşturma süreçlerine öğretim programı ve ders tasarımlarında yer verilmesi gerektiği düşünülmektedir. Ortaokul öğrencilerinin matematiksel dil becerilerinin çoğunlukla kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlandığı belirlenmiştir. Cebirsel düşünme düzeyi arttıkça sembolik ifade oluşturma becerisi de artmıştır. Ancak, öğrenciler yazılı dil kullanımında hatalar yapmışlardır. Görsel dil becerileri yetersiz kalmıştır.

Sonuç olarak, tez çalışmasında matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesiyle ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini ve matematiksel dil becerilerini incelemede genel bir çerçeve sunulmuştur. Uygulama sürecinde bu çerçevenin uygulanabilirliği gösterilmiştir. Tanımlanan bu genel çerçevenin araştırmacılara yol göstereceği düşünülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematiğin üç dünyası, matematiksel düşünme, matematiksel dil, KİSS.

ABSTRACT

An Investigation of Mathematical Thinking Processes and Mathematical Language Skills of Secondary School Students Through the Theoretical Framework of ‘Three Worlds of Mathematics’

The three worlds of mathematics are a theoretical framework that examines the process of mathematical thinking in terms of the three worlds of thinking. Mathematical thinking is the process of interpreting knowledge of individuals. Hence mathematical thinking is a process. In this process, preliminary information about conceptual structures is revealed. Then new conceptual structures are formed with the existing information structures. According to the three worlds of mathematics, thinking begins with the conceptual embodied world. When the individual begins to think symbolically about a concept which is encountered in embodiment terms, he / she moves to the proceptual symbolic world dimension. This dimension also includes KISS (procept) processes. KISS processes include procedure, process and procept. When the individual creates and expresses information structures about the concept, he / she realizes the axiomatic formal world thinking process. The process of proof is expressed. Each thinking dimension includes different mathematical language skills within itself. These mathematical language skills focus on the ability to describe concepts in concrete terms in the conceptual embodied world. The skills of using oral, written and visual language are included in this dimension. Symbolic expression creation skills take place in the proceptual symbolic world. The definition of the concepts by individuals using the right language to make their own descriptions are in the axiomatic formal world dimension.

The aim of this study is to examine mathematical thinking processes and mathematical language skills of secondary school students in terms of the theoretical framework of three worlds of mathematics. In addition, mathematical thinking processes of the students were examined in terms of KISS levels. The aim of this study is to provide students with the knowledge of the thinking dimensions and language skills of students with different levels of algebraic thinking and geometric thinking. Levels of 6th, 7th and 8th

grades of secondary school were determined. The thesis study was carried out in Kocaeli. The thesis study has three stages. First of all, algebraic thinking and geometric thinking levels of secondary school students were determined. Then, semi-structured interviews were conducted with the students selected according to the levels of algebraic thinking and geometric thinking. The implementation process was carried out in the 2017-2018 academic year.

The thesis study was designed in a mixed design. Algebraic Thinking Level Determination Test was developed in order to determine the level of algebraic thinking of secondary school students. This test is for the first three levels of algebraic thinking. Validity and reliability studies were conducted during the test development process. The reliability coefficient of the 27-item test which was developed as a result of all analyzes was calculated as 0,86. In order to determine the students' geometric thinking levels, Geometric Thinking Levels Scale developed by Alyeşil (2005) was used. This test is for the first four levels of geometric thinking. The thesis is based on the first three levels of geometric thinking. The reliability coefficient of this scale was calculated as 0,81. Algebraic Thinking Level Determination Test and Geometric Thinking Levels Scale were applied to 2808 students determined by cluster sampling method. Then, semi-structured interviews were conducted with 23 students with different levels of algebraic and geometric thinking, determined by purposeful sampling method. 8 of these students are in the 6th grade, 7 are in the 7th grade and 8 are in the 8th grade. The semi-structured interviews were held in three separate sessions with each student separately. In the first session, questions were asked about algebra. In this session, the knowledge structures and symbolic expression processes of the KİSS concept were examined. In the second session, questions were asked about geometry. The triangular inequality and the Pythagorean Theorem were presented to the students and they were asked to develop a proof process to explain the expressions. In the third session, the triangular inequality and the Pythagorean Theorem were expected to be formed in real life.

As a result of the process of the thesis study, it was observed that the levels of algebraic thinking and geometric thinking of secondary school students were mostly at the first level. Levels of algebraic thinking and geometric thinking were found to be effective in developing a mathematical thinking process. A different view is presented in terms of the secondary school level regarding the theoretical framework of the three worlds of mathematics. It is determined that 6th and 7th grade students can develop thinking process in the axiomatic formal world dimension. The mathematical thinking processes of the 6th grade

students were found to be more original. This situation is interpreted as the increase in the level of the class affects the mathematical thinking processes of students in developing the proof process. Therefore, it is thought that concept creation processes should be included in curriculum and course designs. It was found that mathematical language skills of secondary school students were mostly limited by the conceptual embodied world dimension. As the level of algebraic thinking increases, the ability to create symbolic expression also increases. However, students made mistakes in the use of written language. Visual language skills were insufficient.

In conclusion, in the thesis study, a general framework is presented to examine the mathematical thinking processes and mathematical language skills of secondary school students in the theoretical framework of the three worlds of mathematics. The applicability of this framework has been demonstrated during the implementation process. It is thought that this general framework will guide the researchers.

Keywords: Three worlds of mathematics, mathematical thinking, mathematical language, KISS.

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Matematik eğitiminde, öğrencilerin bilgilerini yeni bilgilerle birleştirmesini sağlayan matematiksel düşünme becerilerini kazandırmak amaçlanmaktadır. Bu amaç için öğrencilerin matematiksel kavramları yorumlama biçimlerini bilmek gerekir (Doğan, Güner, 2012). Matematiksel düşünme, bireyin yorumlama becerilerini geliştiren bir süreçtir (Keith, 2000). Matematiksel düşüncelerin aktarılması ve paylaşılması açısından ise matematiksel dil önemlidir. Dilin birçok işlevi vardır. Kavramlar yoluyla düşünmeyi düzenler (Tuna, 2006). Bilişsel gelişime yönelik araç görevini üstlenir (Vygotsky, 1986). Bu anlamda öğretim programında da öğrencilerin düşüncelerini doğru aktarabilmeleri için matematiksel dilin önemi vurgulanmaktadır (MEB, 2017).

MEB (2017) matematik öğretim programında matematiksel düşünme gelişimi üzerine odaklanılmaktadır. Bir bilgi birey için anlamlı olduğunda doğru öğrenme gerçekleşebilir. Birey günlük yaşamdaki bir durumu matematiksel olarak yorumlama becerisine sahip olmalıdır. Bu becerileri kullanabilmesi de matematiksel düşünme süreçlerini kullanabilmesi ve matematiksel dil becerilerine sahip olması ile mümkündür.

Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesinin temelinde bireylerin bilişsel gelişim süreçleri yer almaktadır. Bu kuramsal çerçeve somut dünya ile sembolik dünyanın etkileşimine odaklanmaktadır. Bireylerin bilişsel gelişim süreçlerinde kavramsallaştırma süreçlerini içerir. Matematiğin üç dünyası, matematiksel düşünmenin üç dünya içerisinde gelişim göstereceğini belirtmektedir. Bunlar kavramsal somut dünya, nesnel süreçsel sembolik dünya ile aksiyomatik formal dünyadır. Matematiğin üç dünyası, fiziksel dünyada karşılaşılan kavramlar yoluyla sembolik dünyaya geçiş ve matematiksel bir kavramın ispat sürecine kadar uzanan gelişim sürecidir. Öğrenciler somuttan soyuta geçişte, matematiksel sembollerinin kullanımında ve kavramsallaştırma süreçlerinde zorluk yaşamaktadırlar. Dolayısıyla öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin ve matematiksel dil becerilerinin incelendiği bu tez çalışmasında öğrencilerin kavramları algılama ve yansıtma biçimlerini incelemek öğrenme süreçlerine farklı bir boyut kazandıracaktır.

İspat süreci, matematiksel düşünme sürecinin son aşamasını oluşturmaktadır. Ortaokul seviyesindeki öğrencilerin tam anlamıyla bir ispat süreci gerçekleştirmesi, bilişsel gelişim aşamaları açısından mümkün değildir. Ancak, ortaokul öğrencileri de matematiksel bir ifadenin oluşum sürecini nedenleri ile açıklayabilir. Ortaokul seviyesinde ispat

aşamasının süreç bağlamında ele alınabileceği düşünülmektedir. Bu anlamda matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesinin son aşaması olan aksiyomatik formal dünyada bulunan ispat sürecinin ifade edilmesi düzeyi ortaokul seviyesinde incelenmiştir.

Matematiksel düşünme ile ilgili literatürde yer alan araştırmalar incelendiğinde APOS, SOLO taksonomisi, RBC teorisi gibi farklı teorik çerçeveler kullanıldığı görülmüştür (Açan, 2015; Açıl, 2015; Bağdat, Saban, 2014; Köse, 2018; Mudrikah, 2016; Türnüklü, Özcan, 2014; Yeşildere, 2006). Matematiksel düşünme süreçlerini matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından inceleyen araştırmaların ise az sayıda olduğu belirlenmiştir (Hannah, Stewart, Thomas, 2015; Jukić, Brückler, 2014; Kashefi, Ismail, Yusof, 2010; Kidron, 2008; Tall, Lima, Healy, 2014; Vandebrouck, 2011). Ayrıca bu araştırmaların da hep lisans düzeyinde katılımcılar ile gerçekleştirildiği görülmüştür. Ortaokul seviyesinde matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesini kullanan bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bu anlamda bu tez çalışması ile ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi ile incelemek istenmiştir.

Araştırmalar ortaokul öğrencilerinin matematiksel dil becerilerinin yeterli düzeyde olmadığını (Akarsu, 2013; Capraro ve Joffrion, 2006; Dur, 2010; Kula Yeşil, 2015; Vlassis, 2008; Yıldız, 2016; Yüzerler, Doğan, 2012) göstermektedir. Bu araştırmalarda öğrencilerin sembolik gösterimde zorlandıkları belirlenmiştir. Literatür incelendiğinde ortaokul öğrencilerinin matematiksel dil becerilerini matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından inceleyen bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bu açıdan matematiksel dil alanında bu kuramsal çerçeve açısından yeni bir bakış açısı oluşturmak istenmektedir.

Farklı geometrik düşünme ve farklı cebirsel düşünme becerilerine sahip ortaokul öğrencilerinin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre matematiksel düşünme süreçlerini ve matematiksel dil becerilerini incelemenin üç düşünme dünyası arasındaki benzerlik ile farklılıkları ortaya çıkarabileceği düşünülmektedir. Ayrıca matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçleri ve matematiksel dil becerilerine yönelik bir sınıflandırma elde etmek amaçlanmaktadır.

Bireyin sahip olduğu bilgi yapılarındaki yanlış öğrenmeler bir sonraki öğrenme süreçlerini etkilemektedir. Anlama gücüyle yaşadığı konuların öğrenilmesi bu açıdan önem kazanmaktadır. Öğrencilerin öğrenme sürecinde yaşadığı zorlukların belirlenmesi ise matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi ile mümkündür. Ayrıca matematiksel dil kullanımında yapılan yanlışlıklar da öğrenme sürecini etkilemektedir. Kavramsal anlayış için aynı zamanda sezgiler önemlidir (Semadeni, 2008). Soyut kavramların oluşumunda sezgiler yoluyla bilgi yapıları oluşur. Bu anlamda bu tez çalışmasında 6., 7. ve 8. öğrencilerinin

matematiksel düşünme süreçleri cebir ve geometri bağlamında incelenmiştir. 5. sınıf öğrencileri öğretim programı çerçevesinde sembolik ifade oluşturma kazanımlarını edinmedikleri için tez çalışması kapsamına alınmamıştır. Tez çalışmasında ayrıca, 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin öğretim programı içerisinde 8. sınıf kazanımları arasında bulunan üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı yapılarına ulaşma süreçleri incelenmiştir. Üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı için üçgene dair var olan bilgi yapılarının önemli olduğu düşünülmektedir. Bu yüzden üçgene dair bilgi yapıları da araştırılmıştır. Öte yandan, 8. sınıf öğrencilerinin de kazanımlar arasında yer alan üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' na dair bilgi yapıları araştırılmıştır.

1.2. Amaç ve Önem

Bireylerin matematiksel düşünme süreçlerine odaklanan bir teori olan matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi somut dünya ile sembolik dünya arasındaki etkileşimi inceler. Öğrenciler bilgiyi kavramsallaştırma süreçlerinde var olan bilgilerini kullanarak matematiksel düşünme gerçekleştirirler. Bu anlamda öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini incelemek hata ve kavram yanılgılarını belirlemek açısından önemlidir. Ayrıca öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini yansıtmaya aracı olan matematiksel dili doğru kullanmaları da gerekir.

Birey için sadece fiziksel dünyadaki gerçekler doğru değildir. Zihninde canlanan dünya da gerçekler barındırır. Duyusal algılar yardımıyla soyut kavramları oluşturur. Var olan bilgi yapıları içerisinde yeni kavramları oluşturur. Böylece bilgi yapılarını yeniden düzenler. Matematiğin üç dünyası da geçmişte var olan bilgi yapılarımız üzerine matematiksel düşünmenin inşa edileceğini savunur. Geometrik kavramlarda olduğu gibi şekilleri duyusal olarak algılarız. Ancak, bir şeklin döndürülmüş halini zihinde canlandırmak ise düşünme süreci gerektirir. Ya da bir şeklin özelliklerinden yola çıkarak sembolik ifadeler oluşturmak somut dünyadan daha fazlasıdır. Yani geometrik kavramların oluşturulmasında somut algı yeterli değildir. Dolayısıyla matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini incelerken cebir ve geometri alanlarını birlikte ele almanın detaylı inceleme imkanı sunacağı düşünülmüştür.

Literatürde matematiksel düşünme temelindeki çalışmaların bireylerin soyutlama becerileri üzerine odaklandığı görülmüştür (Açan, 2015; Açıl, 2015; Bağdat, Saban, 2014; Köse, 2018; Mudrikah, 2016; Törnüklü, Özcan, 2014; Yeşildere, 2006). Bireylerin matematiksel düşünme süreçlerini matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından inceleyen çalışmalar az sayıdadır. Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre düşünme ve dil gelişimi üç aşamada gerçekleşir. Dolayısıyla matematiksel düşünme

aşamaları incelenirken düşünme ve dil gelişimini bir arada incelemenin ilgili literatüre katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

Literatürde matematiğin üç dünyası ile ilgili yer alan araştırmalar incelendiğinde analiz, limit kavramı, cebir, fonksiyonlar, lineer cebir ve bilgisayar sistemlerindeki cebir alanları (Hannah, Stewart, Thomas, 2015; Jukić, Brückler, 2014; Kashefi, Ismail, Yusof, 2010; Kidron, 2008; Tall, Lima, Healy, 2014; Vandebrouck, 2011) gibi konular üzerinde yoğunlaştığı görülmüştür. Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi üç ana alan üzerinde uzmanlaşmıştır. Bu alanlar analiz (Tall,2003), ispat (Tall, 2002) ve vektörlerdir (Watson, Spyrou, Tall, 2002). Araştırmaların çalışma grubunu en üst düşünme seviyesinde ele alınan yüksek öğretim öğrencileri oluşturmuştur. Literatürde yer alan araştırmaların uygulama alanları ve çalışma grupları bu araştırmaya yön veren bir nokta olmuştur. Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesinin sadece cebir alanına değil, geometri alanına da uygun bir kuramsal çerçeve olabileceği düşünülmektedir. Ayrıca ortaokul öğrencilerinin de süreç bağlamında düşünüldüğünde ispat geliştirebileceği varsayılmaktadır. Dolayısıyla kuramsal çerçevenin geometri alanı üzerine uygulanabilirliğini ölçmek ve basit düzeyde de olsa ispat süreçlerini gösterebileceği düşünülen ortaokul öğrencilerinin ulaşabileceği düşünme seviyesini tespit etmek tez çalışmasının özgünlüğü açısından önemlidir.

KİSS, işlemsel süreçle oluşan kavramın sembolik olarak gösterildiği bir süreç olarak tanımlanmaktadır (Gray, Tall, 1994). KİSS düzeyindeki öğrenciler matematik kavramlarını sembolik olarak düşünebilmektedir. O halde ispat sürecinde, KİSS düzeyindeki öğrencilerin daha başarılı olacakları beklenebilir. Öğrencilerin düşünme ve dil becerilerini KİSS açısından incelemenin de matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi temelinde, onların matematiksel düşünme süreçlerini ortaya çıkarma açısından katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca bu tez çalışması ile öğrencilerin matematiksel kavram ve sembollerini doğru kullanma becerilerini geliştirmeye yönelik önerilerde bulunulmuştur.

Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre sembolik ifadenin önemi göz önüne alındığında öğrencilerin cebir alanına dair düşünme süreçlerini incelemek beklenen bir durumdur. Ancak, bu araştırmada aynı zamanda geometri alanında kuramsal çerçevenin uygulanabilirliği ölçülmek istendiği için geometrinin sembolik ifade içeren konularını ele almak gerekliliği ortaya çıkmıştır. Geometri de kendine ait kavram ve sembollere sahiptir. Bu anlamda üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı kazanımları ele alınmıştır. Çünkü hem geometrik anlamda düşünme süreçlerini ortaya çıkarmada hem de bilgi yapısının oluşumu sonucunda sembolik ifade oluşturma sürecine uygun konular olduğu düşünülmüştür. Tez çalışması temelinde cebir ve geometri alanları birlikte incelendiği için farklı cebirsel ve

geometrik düşünme becerilerine sahip öğrencilerin düşünme süreçlerini incelemenin doğru bilgiler sağlayacağı varsayılmıştır. Dolayısıyla araştırmada ortaokul öğrencilerinin cebirsel ve geometrik düşünme becerileri de araştırılmıştır.

Üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı kazanımları öğretim programı içerisinde 8. sınıfta yer almaktadır (MEB, 2017). Dolayısıyla araştırmaya katılan 8. sınıf öğrencilerinin bu bağıntıları oluşturabilmek için geliştirdikleri matematiksel düşünme süreçlerini inceleyebilmek adına gerçek yaşam durumu tasarlanmanın yararlı olacağı düşünülmüştür. Dolayısıyla gerçek yaşam durumu içerisine gizlenmiş bağıntıları oluştururken matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre aksiyomatik formal dünya boyutunda yer alan ispat sürecini göstermeleri beklenen bir durumdur. 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin de aynı şekilde düşünme süreçlerini incelemek karşılaştırma yapma olanağı sağlamıştır. Ayrıca, öğrencilerin matematiksel dil açısından sözel ifadeyi yorumlama biçimlerini incelemek ve sembolik ifade oluşturabilme becerilerini ortaya çıkarmak için bağıntılar sözel olarak verilmiştir. Böylece 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin cebir, geometri ve hem cebir hem geometri öğrenme alanlarına yönelik matematiksel düşünme süreçleri ve matematiksel dil becerileri analiz edilmiştir. Bu durum 6., 7. ve 8. sınıf öğrencileri arasında karşılaştırma yapma olanağı sağlamıştır.

İlgili alanyazın incelendiğinde matematiğin üç dünyası boyutları açısından ortaokul öğrencilerinin matematiksel dil becerilerini inceleyen bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bu tez çalışmasında matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesinin boyutlarına uygun şekilde dil becerilerini sınıflandırmak amaçlanmıştır. Ayrıca, ortaokul öğrencilerinin matematiksel dil becerileri bu çerçeve ile incelenmiştir. Bu durumun araştırmanın özgünlüğüne katkı sağlayacağı düşünülmüştür.

Sonuç olarak, bu tez çalışması ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini ve matematiksel dil becerilerini ortaya çıkarma temelinde tasarlanmıştır. Dolayısıyla tez çalışmasında; 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin ve matematiksel dil becerilerinin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre hangi aşamada olduğunu belirlemek, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri ile matematiksel dil becerileri aralarındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak amaçlanmıştır.

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri

Tez çalışmasının amacı doğrultusunda problem cümlesi şu şekilde belirlenmiştir: “Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçleri ve matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından incelendiğinde hangi düzeydedir?”. Tez çalışmasının problem cümlesinden yola çıkarak oluşturulan alt problem cümleleri ise aşağıdaki gibidir:

1. Ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri hangi düzeydedir?
2. Ortaokul öğrencilerinin cebir öğrenme alanında matematiksel düşünme seviyeleri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre hangi düzeydedir?
3. Ortaokul öğrencilerinin geometri öğrenme alanında matematiksel düşünme seviyeleri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre hangi düzeydedir?
4. Ortaokul öğrencilerinin cebir öğrenme alanında matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre hangi düzeydedir?
5. Ortaokul öğrencilerinin geometri öğrenme alanında matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre hangi düzeydedir?

1.4. Sınırlılıklar

1. Tez çalışmasının uygulama süresi 2017-2018 öğretim yılı ile sınırlıdır.
2. Tez çalışmasında ortaokul öğrencileri olarak 6., 7. ve 8. sınıf öğrencileri belirlenmiştir.
2. Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi ve Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği' nin uygulandığı çalışma grubu Kocaeli ili İzmit ilçesinde bulunan 2808 ortaokul öğrencisidir.
3. Yarı yapılandırılmış görüşmeler Kocaeli ili İzmit ilçesinde bulunan 23 ortaokul öğrenci ile gerçekleştirilmiştir.
4. Yarı yapılandırılmış görüşmeler yapmak için seçilen öğrenciler arasında cebirsel düşünme düzeyi ikinci düzey, geometrik düşünme düzeyi üçüncü düzeyde yer alan 7. ve 8. sınıf öğrencileri; cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey, geometrik düşünme düzeyi ikinci düzeyde yer alan 6. ve 8. sınıf öğrencileri bulunmamaktadır.
5. Tez çalışması; Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi, Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği, üç oturumda gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmelere ait ses kayıtları ve öğrenci cevap kağıtlarından edinilen veriler ile sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

1. 2808 ortaokul öğrencisinin Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi ve Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği' ni samimiyetle cevaplandırırları varsayılmıştır.
2. Araştırmacı yarı-yapılandırılmış görüşme sürecinde yansız davranmıştır.
3. Yarı-yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilen öğrenciler görüşme sürecinde düşüncelerini doğru yansıtmışlardır.
4. Tez çalışmasının uygulama sürecinde sorun yaşanmadığı düşünülmektedir.

1.6. Tanımlar

Matematiğin üç dünyası: Matematiksel bilgi oluşturma sürecinin birbirini takip eden üç boyuttan oluşmasını ifade etmektedir. Matematiksel düşünme süreci kavramları farketme, tasvir etme, sembolik olarak gösterme ve tanımlama evrelerini içermektedir.

Kavramsal somut dünya: Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre matematiksel düşünmenin ilk boyutudur. Kavramları fark etme ve somut olarak tasvir etme sürecini içerir.

Nesnel süreçsel sembolik dünya: Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre matematiksel düşünmenin ikinci boyutudur. Kavramın işlemsel süreç sonucunda oluştuğunu ve kavramı sembolik ifade etme sürecini içerir.

Aksiyomatik formal dünya: Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre matematiksel düşünmenin üçüncü boyutudur. İspat ve kavramı özümseme sürecini içerir.

KİSS: Kavramsal işlemsel sembolik süreç.

Cebirsel düşünme: Soyut ve sembolik düşünme sürecidir.

Geometrik düşünme: Geometrik kavramları zihinde oluşturma sürecidir.

Matematiksel dil: Matematiğin yazım kurallarını ve matematiksel gösterimleri içerir.

1.7. Kısaltmalar

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

C1G1: Birinci düzey cebirsel düşünme ve birinci düzey geometrik düşünme

C1G2: Birinci düzey cebirsel düşünme ve ikinci düzey geometrik düşünme

C1G3: Birinci düzey cebirsel düşünme ve üçüncü düzey geometrik düşünme

C2G1: İkinci düzey cebirsel düşünme ve birinci düzey geometrik düşünme

C2G2: İkinci düzey cebirsel düşünme ve ikinci düzey geometrik düşünme

C2G3: İkinci düzey cebirsel düşünme ve üçüncü düzey geometrik düşünme

C3G1: Üçüncü düzey cebirsel düşünme ve birinci düzey geometrik düşünme

C3G2: Üçüncü düzey cebirsel düşünme ve ikinci düzey geometrik düşünme

C3G3: Üçüncü düzey cebirsel düşünme ve üçüncü düzey geometrik düşünme

BÖLÜM II

KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde matematiksel düşünme, cebirsel düşünme ve geometrik düşünme boyutları ile ele alınmaktadır. Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açıklanmakta, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesinde yararlanılabilecek diğer teoriler ile benzer ve farklı yönleri karşılaştırılmaktadır. Bu kuramsal çerçevenin seçilme nedenleri açıklanmaktadır. Matematiksel dile ilişkin bilgiler sunulmaktadır. Ayrıca, ilgili araştırmalar yer almaktadır.

2.1. Matematiksel Düşünme

Düşünme, bireylerin bilgileri analiz etme, sentezleme ve karşılaştırma yapma yetisidir (Türk Dil Kurumu, 2006). Bireyler düşünme yoluyla kavramlar arasındaki ilişkileri anlayabilir ve karşılaştırma yapabilir. Matematik eğitimi de bireylerin düşünme becerilerini geliştirmeyi amaçlar. Öğrencilerin matematiksel ifadeleri nasıl algıladıkları matematiksel düşünme ile ilgilidir (Doğan, Güner, 2012). Matematiksel düşünme, matematiksel süreçlerin uygulanmasıdır (Henderson, 2002). Bu süreçler; problem çözme esnasında bireyin gösterdiği matematiksel becerilerdir.

Baroody (2003) matematiksel düşünmenin özgün olduğunu vurgulamaktadır. Problemleri çözmek amacıyla geçirilen sorgulama süreci olarak tanımlamaktadır. Birey soyutlama yoluyla bir kavramı anlamak için matematiksel düşünme kullanır (Schoenfeld, 1992). Benzer şekilde Yıldırım (2010) matematiksel düşünmeyi matematiksel değerlendirme süreci olarak tanımlamaktadır. Matematiksel düşünme bir süreçtir. Birey var olan bilgi yapıları içerisinde yeni bilgiyi anlamlandırır.

Bir problemin çözümünde gerçekleştirilen açıklama süreci de matematiksel düşünmedir (Yeşildere, Türnüklü, 2007). Matematiksel düşünme üst düzey düşünme becerilerini içerir. Bunlar; muhakeme, problem çözme ve soyutlama gibi becerilerdir (Tall, 2002).

Matematiksel düşünme bireysel bir süreçtir. Bu yüzden süreç kişiden kişiye farklılık gösterebilir. Bireyler anlamlandırma süreçlerinde farklı düşünme süreçlerini tercih edebilirler. Bu anlamda Burton (1984) matematiksel düşünmeyi aynı zamanda bir düşünme stili olarak açıklamıştır.

Matematiksel düşünme, sadece matematik dersleri içerisinde kullanılan bir düşünme biçimi değildir. Birey, günlük yaşamda karşılaştığı bir durum içerisinde de matematiksel düşünmeyi kullanır. Birey, bir problem çözümünde matematiksel süreçleri kullanır. Ancak,

günlük düşünme ile karıştırılmamalıdır. Matematiksel düşünme, sistematik düşünmedir. Dolayısıyla Alkan ve Bukova Güzel (2005)' e göre bireylerin matematiksel düşünme becerileri geliştirilmelidir.

Matematiksel düşünme kendi içinde de farklılıklar göstermektedir. Aritmetik, cebir, geometri gibi matematiğin kendi dalları arasında farklılık gösterse de süreç bakımından matematiksel düşünme aynıdır. Bu tez çalışmasında da matematiksel düşünme boyutları arasından cebirsel düşünme ve geometrik düşünme boyutları ele alınmıştır.

Bu bölümde ayrıca, matematiksel düşünmeyi temel alan tez konusu ile ilgili bazı çalışmalara değinilmiştir:

Cai (2003) araştırmasında öğrencilerin problem çözme süreci içerisinde matematiksel düşünme becerilerini incelemiştir. Araştırmayı dördüncü, beşinci ve altıncı sınıf öğrencileri ile gerçekleştirmiştir. Sonuç olarak öğrencilerin uygun çözüm stratejilerini kullanabildiklerini belirlemiştir. Matematiksel düşünme süreçleri açısından dördüncü ve beşinci sınıf öğrencileri arasında fark ortaya çıkmıştır.

Mubark (2005), araştırmasında 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirmiştir. Altı boyutta ele aldığı matematiksel düşünme boyutlarından öğrencilerin en çok zorlandığı boyutun ispat boyutu olduğu belirlenmiştir. En rahat kullandıkları boyutun ise mantıksal düşünme olduğu görülmüştür. Öğrenciler sembollerin kullanımı ile ilgili sorulara daha çok yanıt vermişlerdir. İspat ve genelleme boyutlarındaki sorular ise en az yanıtlanan sorular olmuştur.

Yeşildere (2006), araştırmasında öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini RBC+C teorisi temelinde incelemiştir. Ayrıca öğrencilerin bilgiyi oluşturma süreçlerini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmayı farklı matematiksel güce sahip ortaokul öğrencileri ile yürütmüştür. Araştırmada öğrencilerin düşük düzeyde matematiksel güce sahip oldukları belirlenmiştir. Düşük matematiksel güce sahip öğrencilerin de bilgiyi oluşturma süreçlerinde zorlandıkları görülmüştür. Yüksek matematiksel güce sahip öğrencilerin ise bilgiyi oluşturma süreçlerinde daha başarılı oldukları belirlenmiştir.

Bukova Güzel (2008) araştırmasında öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini incelemiştir. Yapılandırmacı öğrenme ortamının matematiksel düşünmeye etkisini araştırmıştır. Analiz 1 dersi yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı ile işlenmiştir. Süreç sonucunda öğretmen adaylarının tahmin etme, genelleme gibi matematiksel düşünme becerilerinin geliştiği belirlenmiştir. Böylece matematiksel düşünme süreçlerinde daha başarılı oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak yapılandırmacı öğrenme ortamı ile

matematiksel düşünme süreçlerine katkı sağlanabilecek öğrenme ortamları oluşturulabileceği savunulmuştur.

Arslan ve Yıldız (2010), araştırmalarında 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini incelemişlerdir. Öğrencilerin süreç içerisinde ortaya çıkan becerilerini araştırmışlardır. Süreç ilerledikçe soruları cevaplandırma başarısının düştüğünü belirlemişlerdir. Öğrencilerin genelleme yapmaları gereken sorularda daha başarılı oldukları görülmüştür. İspat yapmaları gereken sorularda ise zorlanmışlardır.

Jacobs, Lamb ve Philipp (2010) araştırmalarında 131 öğretmen adayı ve öğretmenin çocukların matematiksel düşüncelerini kavrayışlarını incelemişlerdir. Bu anlamda geliştirdikleri iki değerlendirme aracını test etmişlerdir. Araştırma sonucunda eğitimcilerin öğrencilerin matematiksel düşüncelerini kavramakta zorlandıklarını ama bu becerilerinin geliştirilebileceğini göstermişlerdir.

Sezgin Memnun (2011) araştırmasında RBC+C teorisini temel almıştır. Altıncı sınıf öğrencilerinin koordinat sistemi konusundaki matematiksel düşünme süreçlerini incelemiştir. Gerçekçi matematik eğitimi ve yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı ile dersler tasarlanmıştır. Sonuçta her iki öğrenme ortamının da matematiksel düşünmeyi desteklediği belirlenmiştir.

Alkan ve Tataroğlu Taşdan (2011) araştırmalarında matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünmeye dair görüşlerini karşılaştırmışlardır. Araştırma için farklı sınıf düzeylerinden öğretmen adayları seçilmiştir. Araştırmada öğretmen adaylarının matematiksel düşünmenin boyutlarını ifade edebildikleri belirlenmiştir. Öğretmen adayları problem çözme ve matematiksel düşünme arasında bağ kurabilmiştir. Dördüncü sınıf öğrencileri ise bu bağ için daha fazla görüş belirtmişlerdir.

Karakoca (2011) altıncı sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini incelemiştir. Problem çözme sürecinde öğrencilerin akıl yürütme ve esnek düşünme gibi becerileri gösterirken zorlandıkları belirlenmiştir. Matematiksel düşünme becerilerine okul öncesi eğitimin etkisi olduğu belirtilmiştir.

Tuna (2011), çalışmasında 5E öğrenme modelinin matematiksel düşünmeye etkisini araştırmıştır. Araştırmada SOLO taksonomisini temel almıştır. 10. sınıf öğrencilerinin trigonometri konusunda matematiksel düşünme becerileri incelenmiştir. 5E öğrenme modelinin matematiksel düşünmeyi desteklediği belirlenmiştir. Ayrıca bilgilerin kalıcılığını artırdığı sonucuna varılmıştır.

Coşkun (2012) araştırmasında Sorgulayıcı Problem Çözme modelini ele almıştır. Matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini bu model ile incelemiştir. Öğretmen adayları en çok genelleme sürecinde başarılı olmuşlardır. En çok da

sentezleme ve soyutlama süreçlerinde zorlanmışlardır. Sonuçta bu modelin matematiksel düşünmeyi desteklediği belirlenmiştir.

Heng ve Sudarshan (2013) araştırmalarında öğretmenlerin öğrencilerinin matematiksel düşüncelerini anlamak için klinik görüşme tekniğini öğrenme ve kullanma süreçlerini incelemişlerdir. Araştırmanın birinci aşamasında iki öğretmenin, ikinci aşamasında ise 29 ikinci sınıf öğretmen adayı ile çalışılmıştır. Araştırmanın sonucunda öğretmenlerin öğrencilerin matematik bilgisi ve problem çözmek için kullandıkları stratejiler hakkında bilgilerini derinleştirmeleri gerektiği, öğrencilerin kavrayışlarını öğretmen-öğrenci etkileşiminde eleştirel bir yaklaşımla araştırmaları gerektiği belirtilmiştir.

Mudrikah (2016), 209 onbirinci sınıf öğrencisiyle gerçekleştirdiği araştırmasında öğrencilerin APOS teorisi temelinde yansıtıcı soyutlama becerilerini geliştirmek için öğrenme modeli tasarlamıştır. Geliştirilen bu modelde probleme dayalı öğrenmenin öğrencilerin matematiksel düşünme gelişiminde etkili olduğu ve bilgisayar ile teşvik edici bir öğrenme ortamı oluşturulabileceği belirtilmiştir.

Yıldırım ve Yavuzsoy Köse (2018) araştırmalarında sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini incelemişlerdir. Öğrencilerden çokgen problemlerinde genelleme becerisini göstermeleri beklenmiştir. Öğrencilerin yeni karşılaştıkları bir problem durumunda problemi anlamakta zorlandıkları belirlenmiştir. Başarı düzeyi yüksek olan öğrencilerin farklı çözüm yolları geliştirdikleri görülmüştür. Öğrenciler, genelleme sürecinde sembolik ifade oluşturmada zorlanmışlardır. Geometrik yaklaşım kullanan öğrencilerin açıklamalarını daha kolay ifade edebildikleri belirtilmiştir.

2.1.1. Cebirsel Düşünme

Cebirsel düşünme, matematiksel düşünmenin boyutları arasında yer alır. Cebirsel düşünme, sembolik düşünme becerisidir. Birey cebirsel düşünme yoluyla sözel ifadeleri sembolik ifadelere dönüştürebilir. Cebir, muhakeme yapabilme yöntemidir (Vance, 1998). Cebirsel düşünme ise muhakeme yaparken matematiksel ifadelerin çoklu temsiller ve denklemlerle ifade edilmesi, bilgiyi analiz etmek için sembollerin kullanılmasıdır (Herbert, Brown, 1997). Dolayısıyla cebirsel düşünmenin merkezinde sembollerle bilgiyi inşa etmek yer almaktadır. Bu anlamda öğrencilerin başarılı olabilmek için sembolik ifadeleri doğru kullanabilmeleri gerekir (Kieran, 1992).

NCTM (2000)' e göre cebirsel düşünme, gerçek yaşamda karşılaşılan durumları matematiksel modeller ve semboller yardımıyla temsil etme ve analiz etmedir. Çelik (2007) de genellemeleri formüle etme olarak belirtmiştir. Dolayısıyla cebirsel düşünme soyut düşünebilmeyi gerektirir. Altun (2005)' a göre soyut düşünme ile cebirsel düşünme gelişimi

de başlar. Cebirsel düşünme dört düzeyden oluşur. Bu düzeyler ise şu şekildedir (Altun, 2005):

Düzye 1: Bu düzeyde birey aritmetik işlemler yardımıyla bir harfin değerini bulur. Birey çözüm süreçlerini ifade eder. Harflerin yerine gelebilecek değerleri ancak çözüm yoluyla gösterebildiği düzeydir.

Düzye 2: Bu düzeyde sorular biraz daha karmaşıktır. Birinci düzeyde olduğu gibi birey harflerin değerini bulur. Cebirsel ifadelerde yer alan harflere daha alışktır.

Düzye 3: Bu düzeyde birey harfleri bilinmeyenler olarak görmeye başlar. Bilinmeyenler ile işlem yapar. Harfler artık birer nesne olarak zihinde yer almaktadır.

Düzye 4: Bu düzey üçüncü düzeyden daha karmaşıktır. Birey bu düzeyde karmaşık ifadeleri sonuçlandırabilir. Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkileri anlayabilir. Zihninde oluşan bilinmeyen kavramı için yorumlar yapabilir.

Cebirsel düşünme, matematiksel düşünme için gereklidir. Cebirsel düşünme, matematiksel düşünme süreci içerisinde bireyin sembolik olarak akıl yürütmesidir. Bu düşünme süreci matematiksel sembollerin kullanımını bilmeyi gerektirir. Birey, değişken kavramını anlamlandırdığında ve semboller ile işlem yapabilme becerisini kazandığında tam anlamıyla cebirsel düşünme gerçekleştiriyor denilebilir.

Cebir, aynı zamanda bir dildir. Matematiğin sembolik dilidir. Bu dil bireyin değişkenleri, denklemleri, fonksiyonları kullanabilme yeteneğidir. Kendine özgü dil yapısına sahiptir. Cebirsel düşünmede bu dili kullanarak muhakeme yapabilme becerisidir. Birey, bu dil yardımıyla problem çözme sürecinde günlük yaşam durumunu matematiksel sembollere dönüştürebilir. Bu dil yoluyla birey çoklu temsilleri kullanabilir. Dolayısıyla tez çalışmasında cebir hem dil bağlamında hem de düşünme süreci bağlamında ele alınmıştır.

Bu bölümde ayrıca, tez çalışması ile ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalara değinilmiştir:

Dindyal (2003) çalışmasında lise öğrencilerinin geometri problemlerini çözerken ortaya çıkan cebirsel düşünme becerilerini incelemiştir. Öğrenciler ile görüşmeler gerçekleştirmiştir. Yapılan görüşmelerde öğrencilerin değişken kavramını anlamakta zorlandıkları belirlenmiştir. Öğrenciler cebirsel ifadeleri oluşturamamış ve aralarındaki ilişkileri açıklayamamışlardır. Çoklu temsilleri kullanma ve genelleme yapmada zorlanmışlardır. Ayrıca, öğretmenlerin cebirsel düşünmeyi kullanmaları ile öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri arasında bir ilişki olduğu belirtilmiştir.

Çelik (2007) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerini incelemiştir. Kuramsal çerçeve olarak SOLO Taksonomisi' ni kullanmıştır.

Öğretmen adayları ile klinik görüşmeler gerçekleştirmiştir. Sonuçta katılımcıların cebirsel düşünme becerilerinin ilişkilendirilmiş yapı düzeyinin altında olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının çoklu temsilleri kullanmada daha çok zorlandıkları görülmüştür.

Baş, Erbaş ve Çetinkaya (2011) çalışmalarında lise matematik öğretmenlerinin, öğrencilerinin cebir ile ilgili bilgi yapıları hakkında ne kadar bilgi sahibi olduklarını araştırmışlardır. Araştırma konusu olarak örüntüler konusunu seçmişlerdir. Ayrıca, dokuzuncu sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemedeki düşünme süreçlerini incelemişlerdir. Araştırmada öğrencilerin örüntüleri genellemede başarılı oldukları görülmüştür. Genelleme sürecinde örüntünün adımlarında yer alan sayısal verilere odaklandıkları belirlenmiştir. Öğrenciler önce aritmetik düşünme eğilimi göstermiştir. Ayrıca, araştırmada öğretmenlerin öğrencilerinin sahip oldukları cebirsel düşünme becerileri hakkındaki düşünceleri ile öğrencilerin bilgi yapılarının birbirinden farklı olduğu görülmüştür. Öğretmenler, öğrencilerinin cevaplarını ise doğru bir şekilde yorumlayabilmişlerdir.

Bağdat (2013) çalışmasında 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerini incelemiştir. Kuramsal çerçeve olarak SOLO Taksonomisini kullanmıştır. Öğrenciler ile klinik mülakatlar yapılmıştır. Öğrenciler ilişkilendirilmiş yapı seviyesinin altında yer almıştır. Öğrencilerin sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanmada zorlandıkları belirlenmiştir. Matematik notu yüksek olan öğrencilerin cebirsel düşünmede de başarılı oldukları görülmüştür.

Di Paola, Battaglia ve Fazio (2016) araştırmalarında 118 onuncu sınıf öğrencisinin cebirsel düşünme kullanımlarını altı açık uçlu soruyla incelemişlerdir. Bu açık uçlu sorulara verilen cevapları değerlendirmek için hiyerarşik olmayan bir değerlendirme sistemi geliştirmişlerdir. Araştırmanın sonucunda bu değerlendirmenin öğrencilerin cebir kullanarak farklı matematik problemlerini çözme biçimlerini yorumlamaya ve cevapları arasında ortak özellikleri belirleyerek farklı gruplara ayırmaya yardımcı olacağını göstermişlerdir.

Pearn ve Stephens (2016) araştırmalarında kesir kavramının cebirsel düşünme ile ilişkisini araştırmışlardır. Araştırma, 162 tane 5. ve 6. sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. 5. ve 6. sınıf öğrencileri henüz denklemleri görmedikleri halde kesirler ile ilgili işlemlerde cebirsel düşünme geliştirebilmişlerdir. Dolayısıyla cebirsel düşünmeyi öngörmek için kesirler konusunun belirleyici olabileceğini belirtmişlerdir.

Chimoni ve Pitta-Pantazi (2017) araştırmalarında belirlenene dört tür bilişsel sürecin öğrencilerin cebirsel düşünme geliştirmeleri beklenen sorulardaki başarılarına etkisini incelemeyi amaçlamışlardır. Belirlenen bilişsel süreçler uzamsal, deneysel, analitik ve sözel

becerilerdir. Araştırmanın katılımcıları 13 ve 17 yaşlar arasındaki 190 öğrencidir. Araştırma sonucunda dört bilişsel sürecin cebirsel düşünmede kilit rol oynadığı belirlenmiştir. Bu araştırmada farklı cebirsel düşünme biçimlerini psikolojik temelde incelemiştir.

Kaya (2017) çalışmasında yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerini incelemiştir. Cebirsel düşünme düzeylerini negatif ve pozitif beceri eksikliği bağlamında ele almıştır. Araştırmada düzey ilerledikçe başarı yüzdesinin düştüğü görülmüştür. Ayrıca, düzey ilerledikçe negatif ve pozitif beceri eksiklikleri de artmıştır.

Kusumaningsih, Darhim, Herman ve Turmudi (2018) araştırmalarında sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerini gerçekçi yaklaşım içerisinde çoklu temsil stratejileri ile geliştirmeyi amaçlamışlardır. Yarı deneysel desende 72 öğrenci ile gerçekleştirilen araştırmada çoklu temsil stratejileri ile gerçekleştirilen gerçekçi yaklaşımlı eğitimin öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerini geliştirdiği görülmüştür. Ayrıca, çoklu temsillerle gerçekleştirilen öğretimin uzun sürdüğü, bu anlamda geliştirilecek materyallerin etkili olabileceği belirtilmiştir.

Maudy, Suryadi ve Mulyana (2018) araştırmalarında ortaöğretim öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerini belirlemeyi amaçlamışlardır. Önce 220 öğrenciye cebir testi uygulanmış ardından seçilen 10 öğrenci ile klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın sonucunda lise öğrencilerinin 0 ile 4. düzey arasında cebirsel düşünme düzeyi gösterdikleri belirlenmiştir. Her öğrencilerinin farklı bir cebir düşünme tarzı olduğu ve farklı düşünme seviyelerine sahip oldukları belirtilmiştir.

Usta ve Gökkurt Özdemir (2018) çalışmalarında ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerini incelemişlerdir. Bu amaçla 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeyleri karşılaştırılmıştır. Öğrencilerle klinik görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonucunda sekizinci sınıf öğrencileri dördüncü düzeye ulaşabilmişlerdir. Öğrenciler genellikle sembolik ifade oluşturabilmişlerdir. Sonuç olarak sınıf düzeyi arttıkça cebirsel düşünme düzeyinin de arttığı belirlenmiştir.

Asria ve Wahyudin (2019) araştırmalarında öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerini ve matematiksel kavramlarını Matematiksel Zihin Alışkanlıkları anlayışı, Zihinsel Matematik Düşünme yaklaşımını kullanarak analiz etmişlerdir. Üniversitede matematik eğitimi öğrenimi gören 54 öğrenci ile gerçekleştirilen araştırmada Zihinsel Matematik Düşünme yaklaşımının öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerini desteklediği görülmüştür. Cebirsel düşünme ile matematiksel teorik düşünme ve üstbiliş becerileri arasında ilişki olduğu belirtilmiştir.

2.1.2. Geometrik Düşünme

Geometrik düşünme, matematiksel düşünmenin bir diğer boyutudur. Bireylerin şekilleri algılaması ve matematiksel olarak yorumlamaya başlamasıyla ilerleyen bir süreçtir. Kısaca geometrik kavramların zihinde oluşturulma sürecidir. Bireyin şekillere ilişkin algılarıdır. Birey doğduğu andan itibaren etrafındaki şekillere, şekillerin hareketlerine karşı algı oluşturur. Gündoğdu Alaylı (2012)' ya göre geometrik ilişkiler ile matematiksel ilişkilerin yapılandırılması ilişkilidir. Bireyler geometrideki şekillerin özelliklerini analiz ederler. Geometrik ilişkiler ile ilgili muhakeme yaparlar. Geometrik düşünmede fiziksel dünyadan soyut dünyaya geçiş söz konusudur. Ayrıca geometrik düşünme, bireylerin görsel düşünme biçimleri hakkında da bilgi sağlar. Geometride de özgün bir dil kullanımı vardır. Birey geometrik kavramları tanımlarken ve gösterirken bu dili kullanır. Dolayısıyla tez çalışmasında geometri hem dil bağlamında hem de düşünme süreci bağlamında ele alınmıştır.

Literatürde geometrik düşünmenin gelişiminde genellikle Van Hiele yaklaşımının temel alındığı görülmektedir (Alyeşil, 2005; Bobango, 1988; Fidan, 2009; Gündoğdu Alaylı, 2012; Olkun, Toluk, Durmuş, 2002; Özcan, 2012; Usiskin, 1982). Van Hiele yaklaşımına göre geometrik düşünme süreç içerisinde ilerler (Özcan, Türnüklü, 2013). Bu yaklaşım geometrik düşünme sürecini kavramsal anlama süreci içerisinde ele almaktadır. Geometrik düşünme beş düzeyden oluşmaktadır. Bu düzeyler aşağıdaki gibidir (Olkun, Toluk, 2003; Baykul, 2009; Özcan, 2012; Gündoğdu Alaylı, 2015):

Düzye 1: Bu düzeyin diğer adı “Görsel Dönem” dir. Öğrenci bir şekli gördüğünde ismini söyleyebilir. Şekli bütün olarak algılar (Usiskin, 1982). Ölçme yapabilir. Ancak, şekillerin özelliklerini açıklayamaz. Geometrik ilişkileri açıklamakta zorlanır. Bu düzeyde öğrenci tanım yapamaz. Ayrıca, bir şeklin farklı açılardan görünümünü farklı şekiller olarak düşünebilir. Soyut düşünme gerçekleştiremez.

Düzye 2: Bu düzeyin diğer adı “Analitik Dönem” dir. Bu düzeyde öğrenci şekillerin özelliklerini fark etmeye başlar. Şekillerin özelliklerini analiz eder ve karşılaştırır. Geometrik kavramları keşfeder. Ancak, şekil sınıfları arasındaki ilişkileri açıklayamaz.

Düzye 3: Bu düzeyin diğer adı “Yaşantıya Bağlı Çıkarım” dır. Bu düzeyde öğrenci şekiller arası karşılaştırma yapabilir. Şekilleri özelliklerine göre sınıflandırabilir. Geometrik kavramların tanımları anlamlı hale gelir. Geometrik şekilleri karşılaştırırken muhakeme yapmaya başlar.

Düzey 4: Bu düzeyin diğer adı “Çıkarım” dır. Bu düzeyde öğrenci aksiyom ve teoremleri kavrar. Aksiyom ve teoremler yardımıyla geometrik ispatı anlar. Soyut düşünme gerçekleştirebilir. Öğrencinin kendisi de varolan aksiyom ve teoremlerle ispat yapabilir.

Düzey 5: Bu düzeyin diğer adı “En İleri Dönem” dir. Bu düzeyde öğrenci aksiyomatik sistemler arasındaki ilişkileri açıklar. Kendi teoremler ileri sürer ve bunları analiz eder.

Van Hiele yaklaşımında geometrik düşünme düzeyleri birbirini takip eder. Bu anlamda öğrencilerin geometrik düşünme seviyelerinin gelişimi için bulundukları düzeyden başlanması gerekmektedir. Dil gelişimi de Van Hiele yaklaşımındaki sırayı takip eder. Bu açıdan dil kullanımı ile geometrik düşünme arasında bir ilişki vardır. Dil kullanımının düzeye uygun olması gerekir. Araştırmalar ortaokul seviyesinde öğrencilerin genellikle 1. ve 3. düzey arasında geometrik düşünme gerçekleştirdiklerini belirtmektedirler (Breen, 2000; Gündoğdu Alaylı, 2012; Fidan, 2009; Fuys, 1985; Karakarçayıldız, 2016; Mistretta, 2000; NCTM, 2000; Özcan, 2012; Van de Walle, 2004).

Bu bölümde ayrıca geometrik düşünmeyi temel alan çalışmalardan bazılarına değinilmiştir:

Usiskin (1982) çalışmasında öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri ile başarıları arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Araştırmasında Van Hiele modelini temel almıştır. Bu amaçla çoktan seçmeli bir test geliştirmiştir. Çalışmayı onuncu sınıf öğrencileri ile yürütmüştür. Öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin düşük olduğu belirlenmiştir.

Bobango (1988) çalışmasında bilgisayarlı öğretimin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine etkisini araştırmıştır. Araştırma deneysel olarak tasarlamıştır. Van Hiele modeli temel alınmıştır. Sonuçta bilgisayarlı öğretimin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerini arttırdığı belirlenmiştir.

Alyeşil (2005) çalışmasında problem çözme sürecinde kullandığı kavram haritalarının öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine etkisini incelemiştir. Araştırma 7. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirilmiştir. Araştırma deneysel olarak tasarlanmıştır. Sonuçta öğretim yönteminin öğrencilerin geometrik düşünme becerilerini olumlu etkilediği görülmüştür. Yüksek geometrik düşünme düzeyine sahip öğrenciler daha başarılı olmuşlardır.

Fidan (2009) çalışmasında buluş yoluyla öğretimin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinde yarattığı değişikliği incelemiştir. Araştırmayı 5. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirmiştir. Sonuçta öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin birçok değişkenden

etkilendiği belirlenmiştir. Ayrıca, buluş yoluyla öğretim öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine olumlu katkı sağlamıştır.

Gündoğdu Alaylı (2012) çalışmasında öğrencilerin geometrik düşünme süreçlerini incelemiştir. Araştırmada şekil oluşturma ve parçalarına ayırma etkinlikleri tasarlanmıştır. Araştırma 6., 7. ve 8. sınıf öğrencileri ile yürütülmüştür. Sonuçta yapılan etkinliklerin öğrencilerin geometrik düşünme ve görselleştirme becerilerini geliştirdiği görülmüştür. Öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri arttıkça etkinlik içerisinde başarılarının da arttığı belirlenmiştir. Ayrıca yapılan etkinliklerin düşünme düzeylerine ilişkin bilgi sağladığı belirtilmiştir.

Özcan (2012) çalışmasında öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin gelişimini incelemiştir. Ayrıca bu süreçte bilgiyi oluşturma becerilerine odaklanmıştır. Araştırmanın katılımcıları 7. sınıf öğrencileridir. Araştırmada buluş yoluyla öğretim yöntemi esas alınmıştır. Araştırmanın kuramsal çerçevesi RBC teorisi. Keşfetme yöntemi öğrencilerin düşünme düzeylerini olumlu etkilemiştir. Öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri arttıkça bilgiyi oluşturma becerilerinin de arttığı belirlenmiştir.

Suwito, Yuwono, Parta, Irawati ve Oktavianingtyas (2016) araştırmalarında Van Hiele teorisinin ilk üç düzeyinde yer alan ortaokul öğrencilerinin cebirsel temsiller yardımıyla geometri problemlerini çözme süreçlerini incelemişlerdir. 3. düzey geometrik düşünme düzeyinde yer alan öğrencilerin tümdengelim yaklaşımını kullandıkları ve aksiyomatik düşünme geliştirebildikleri belirlenmiştir. Araştırma, ortaokul öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin genellikle 0-2 düzeyinde yer aldığını göstermiştir.

Özüm Bülbül (2016) çalışmasında problem çözme yönteminin geometrik düşünme alışkanlıklarına etkisini araştırmıştır. Araştırmayı matematik öğretmen adayları ile yürütmüştür. Öğretim yöntemiyle katılımcıların geometrik düşünme alışkanlıkları gelişmiştir. Ayrıca öğretmen adayları çözemedikleri problemlerde farklı yöntemler denemişlerdir.

Armah, Cofie ve Okpoti (2018) araştırmalarında Van Hiele temelinde gerçekleştirilen öğretim sürecinin öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerine etkisini araştırmışlardır. 150 öğretmen adayıyla gerçekleştirilen yarı deneysel araştırmada her iki grubun da geometrik düşünme düzeylerinin arttığı ama deney grubundaki öğrencilerinin düzeyinin daha çok arttığı belirlenmiştir. Bu anlamda Van Hiele temelinde yapılan öğretimin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin gelişiminde etkili olduğu ortaya çıkmıştır.

MdYunus, Mohd Ayub ve Hock (2019) araştırmalarında Van Hiele yaklaşımı temelinde geliştirilen üç öğretim stratejisinin ilköğretim çağındaki öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine etkisini incelemeyi amaçlamışlardır. Bu üç öğretim stratejisinden birincisi Van Hiele öğrenme aşamalarını temel alan, ikincisi Google SketchUp yazılımı ile gerçekleştirilen, üçüncüsü ise Van Hiele temelinde gerçekleştirilen geleneksel öğretimdir. 96 öğrenciyle yürütölen deneysel araştırmada üç grupta yer alan öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin olumlu yönde etkilendiğı belirlenmiştir.

2.2. Matematiğın Üç Dünyası

Matematiğın üç dünyası bireylerin kavramsallaştırma ve matematiksel düşünme süreçlerini sınıflandıran bir kuramsal çerçevedir. Bu kuramsal çerçeve Tall (2007) tarafından oluşturulmuştur. Oluşturulma amacı ise Skemp (1976)' in enstrümental anlayış ve ilişkisel anlayış olarak belirttiğı kavramlara ya da Tall ve Vinner (1981)' in kavram imajı ve kavram tanımı olarak belirttiğı kavramlara yeni bir anlayış geliştirmektir. Matematiğın üç dünyası bireylerin somut dünyadan sembolik dünyaya geçişteki düşünme süreçlerini inceler.

Tall (2013)' a göre insanlar zamanla deneyimleri sonucunda bilgi yapıları oluştururlar. Her insanın yaşantısındaki deneyimleri ile ilgili düşüncelerine dayanan birbirinden farklı yönleri vardır. İnsanlar belli bir zihinsel yapı ile doğarlar. Nesneleri görmek ve hareketlerini izlemek gibi deneyimler sonucunda sahip olunan yaşantılar vardır. Sayı kavramını tanımak biyolojik bir eylemdir. Saymayı öğrenmeden sayı kavramını tanırız. Tall (2013) insanların doğduğunda sahip oldukları bu zihinsel yapılara set-before adını vermiştir. Her insan doğduğunda bu zihinsel yeteneğ e sahiptir. Deneyimler üzerine kurulan ve geçmiş deneyimler ile bağlantı kurularak oluşturulan zihinsel yapılara ise met-before adını vermiştir. Aslında insan, düşünme yoluyla karşılaştığı yeni durumla baş etme ve bilgilerini yeniden düzenleme yeteneğ ine sahiptir.

Bireyin matematiksel düşünme oluşturabilmesi için birbiriyle ilişkili sahip olması gereken üç set-before vardır (Tall, 2004). Bunlar “tanıma, tekrarlama ve dil” boyutlarıdır. Bir üçgen şeklini üçgen olarak sınıflandırma tanıma boyutudur. Toplama işleminin toplama eylemi ile gerçekleşeceğini ifade etme ve otomatik olarak sürdürölen eylem tekrar boyutudur. Nesneleri tanımlama ise dil boyutudur. Her boyut matematiksel düşünmenin farklı bir dünyasının temelini oluşturmaktadır. Matematiğın üç dünyası, her insanın doğduğundan itibaren sahip olduğı bu üç boyuta dayanan bir kuramsal çerçevedir. Matematiksel düşünmenin gelişimini geniş bir perspektif ile ele alır.

Matematiğın üç dünyası çerçevesinde tanımlanan süreçler şu şekildedir (Tall, 2007):

1-Kavramsal somut dünya (The conceptual-embodied world): Nesnelerin özellikleri üzerine odaklanır. Gerçek dünyada duyularla algılanan nesneler ile ilgilidir. Önce duyularla algılanan ardından zihinde canlanma sürecinde ortaya çıkan düşünme dünyasıdır. Bireyin kavramlar ile ilgili kendi algıları ve kendi düşünceleri söz konusudur. Gerçek dünyada varolan kavramların zihindeki yansımalarıdır. Örnek olarak “doğru” kavramının “düz” olarak duyuusal deneyimler sonucunda zihinde canlanması ve ifade edilmesidir (Tall, 2004). Bu düşünme dünyasında bireyin görsel-uzamsal imgeleri önemlidir (Jukić, Brückler, 2014).

Bu düşünme dünyasında öğrenciler zihinlerindeki kavramları tasvir edebilirler. Kavramların isimlerini söyleyebilirler. Kavramları sınıflandırabilirler. Dil kullanımı açısından kavramların özelliklerini sözlü olarak açıklayabilirler.

2-Nesnel süreçsel sembolik dünya (The proceptual-symbolic world): Eylem süreci içerisinde kavramı düşünme sürecini içerir. Yani eylemle birlikte kavram oluşumu söz konusudur. Bu düşünme dünyası işlem yapabilmek için hem aritmetikte hem de cebirde gerekli sembollerin dünyasıdır. Somut dünyadan sembolik dünyaya geçiş sürecini içerir. Örnek olarak sayma eylemi ve sayı kavramı başta somuttur. İlerleyen süreçte kesirler, rasyonel sayılar gibi karmaşık hale gelir. Başlangıçta bu kavramlar anlamsızdır. Ancak, tekrarlanan ve öğrenilen işlemler sonucunda zihinsel yapı haline gelirler. Buradaki eylemler tekrarlandıkça rutinleşen eylemlerdir. Sayma eylemi sonucunda oluşan sayı kavramı somut dünyadan hareketle zihinde oluşan bir sembol halini alır. Bu düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünyayı ifade eder.

Bu düşünme dünyasında öğrenciler, tekrarlan eylemler sonucunda sembolleştirme yapabilirler. Eylem sürecini ve oluşan kavramlar arasındaki ilişkileri tanımlayabilirler. Problem çözme sürecinde eyleme yönelik ilk düşünme dünyasından farklı bir dil kullanırlar. Zihin yapılarını soyut olarak ifade etmeye başlarlar.

3-Aksiyomatik formal dünya (The axiomatic- formal world): İspat sürecini içerir. Bu düşünme dünyasında birey kendi tanımlamalarına dayalı olarak zihnindeki matematiksel yapıları ifade eder. Resmi tanımlamalara ve kanıtlara dayalı matematik dünyasıdır. Birey somut yaşantı ve sembolik düşünme süreci sonucunda kendi ispat süreçlerini geliştirir. Yani aksiyomatik formal dünya ilk iki düşünme dünyası üzerine kurulur. Bireylerin var olan yapılar temelinde matematiksel yapıların ispatı sonucunda kendi kavramsal yapılarını oluşturduğu dünyadır. Bu dünyada tanıdık tanımlamalar yer almaz. Özgün olarak bireyin kendi ulaştığı tanımlamalar söz konusudur. Yani burada mantıksal muhakeme süreci vardır.

Bu düşünme dünyasında öğrenciler zihinlerinde yer alan kavramların tanımlarını mantığa uygun hale getirirler. Kavramların özelliklerini matematiksel süreçler sonucunda ispatlayarak ortaya çıkarırlar.

Tall (2008) bu üç düşünme dünyasının tam ve sıralı biçimde gerçekleşeceğini ifade etmektedir. Üç dünya da birbiriyle bağlantılıdır. Bu düşünmenin doğrusal biçimde ilerleyeceği anlamına gelmemektedir. Bu kuramsal çerçeveye göre düşünme dünyaları içerisinde hareket etme esnekliği vardır (Jukić, Brückler, 2014). Her dünyanın gelişimi ise farklılık gösterir. Kavramsal somut dünyada somut olarak algılanan kavramlar daha sonra analiz edilir ve tasvir edilir. Nesnel süreçsel sembolik dünyada daha karmaşık ifadeler algılanmaya başlar. Genelleştirilmiş sembolik düşünme söz konusudur. Ancak aritmetikteki kavramsal yapıdan hareketle sembolik ifadeye geçiş vardır. Aksiyomatik formal dünyada ise var olan bilgi yapılarını analiz etmek yerine, yapının farklı özellikleri ispat edilir (Tall, 2007).

Üç dünyada gerçekleşen gelişmeler neticesinde matematiksel düşünme oluşmaktadır. İspat, her üç dünyada da farklı biçimde yer almaktadır (Tall, Mejia-Ramos, 2006). Çünkü matematiksel ispat, bir kavramın tasvirinden sembolik olarak ifade edilmesine kadar gelişerek ilerleyen bir süreçtir (Tall, 1991).

Matematiksel kavramların sahip olduğu süreç-nesne etkileşimi Gray ve Tall (1994) tarafından procept olarak ele alınmıştır. Procept kelimesi İngilizce process ve concept kelimelerinin birleşiminden oluşmuştur. Bu tez çalışmasında ise procept kelimesi yerine KİSS kullanılması uygun görülmüştür¹. KİSS, kavramsal işlemsel sembolik süreç anlamına gelmekte ve bu kelimelerin baş harflerini taşımaktadır. KİSS, matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre ikinci dünya sürecinde yer almaktadır. Matematikteki bazı gösterimler hem kavramı hem de o kavramın oluşumundaki işlem süreci içermektedir (Gray, Tall, 1994). Bu da KİSS olarak tanımlanmaktadır. KİSS, süreç ve kavramı birlikte ifade eden bir kelimedir. KİSS; aritmetiksel, cebirsel ve sembolik kavram oluşumu bağlamında ele alınmaktadır. KİSS' in üç bileşeni vardır. Bunlar; işlem, kavram ve semboldür.

KİSS, sayı kavramıyla ortaya çıkmıştır. Sayı kavramının oluşmasında sayma merkezi bir rol oynar (Wagner, Walters, 1982; Fuson, Hall, 1983; Gelman, Meck, 1986). Sayı, birbirini takip eden bir süreci içerir. Sayma işlemi sayı kavramını etkiler. “5” sayısı düşünüldüğünde “1,2,3,4,5” şeklinde sayma işlemini ve bu işlem sonucunda oluşan kavramı ifade eden bir sembol olduğu söylenebilir. Benzer şekilde, orantıda KİSS' tir. İki oranı

¹ Procept kelimesinin KİSS olarak kullanılması tez savunması sırasında jüri üyeleri Prof. Dr. Süha Yılmaz, Prof. Dr. Elif Türnüklü, Prof. Dr. Hülya Gür, Doç. Dr. Jale İpek, Dr. Öğr. Üyesi Burak Karabey ve araştırmacı Esra Akarsu Yakar tarafından kararlaştırılmıştır.

karşılaştırma işlemini ve iki oranın eşitliği kavramını göstermektedir. “ $2a+5b$ ” de bir KİSS’ tir. $2a$ ’ ya $5b$ eklenmesi işlemini ve cebirsel kavramı göstermektedir.

Bilişsel yapının oluşum süreçleri farklı kuramsal çerçeveler tarafından farklı boyutlarda açıklanmıştır. Bu kuramsal çerçevelerden Solo taksonomisi, APOS ve KİSS teorilerinin karşılaştırılması (Pegg, Tall, 2005) Tablo 1’ de yer almıştır.

Tablo 1

Bilişsel gelişim döngüleri

Solo Taksonomisi	APOS	KİSS
Yapı Öncesi	Eylem	Basit İşlem
Tek Yönlü Yapı		
Çok Yönlü Yapı		Çoklu İşlem
İlişkilendirilmiş Yapı	Süreç	İşlemsel Süreç
Soyutlanmış Yapı	Nesne	Kavramsal işlemsel sembolik süreç
	Şema	

(Pegg, Tall, 2005)

Solo modeli, öğrencilerin bilişsel bilgilerini değerlendirmek için kullanılır (Biggs, Collis, 1991). Cevaplar karmaşıktıkça seviye yükselmektedir. Ayrıca düzey arttıkça birden fazla durumu düşünerek ilişkilendirme yapma becerisi artmaktadır. APOS teorisinde ise matematiksel bilginin oluşumunda kavramı anlamlandırma süreci sonucunda bilgiler yeniden düzenlenir. KİSS teorisinde ise bireyin kendi yaşam deneyimleri sonucunda elde ettiği temel kavramlar vardır. İşlemler ve süreç sonucunda var olan kavramlar yeni kavram yapıları oluşturur. Bu oluşan kavram da sembolik olarak ifade edilir.

Bir öğrencinin KİSS anlayışı için işlem (process), işlemsel süreç (procedure) ile işlemi ve kavramı sembolik olarak düşünme evrelerini takip etmesi gerekir. KİSS evrelerinin açıklaması aşağıdaki gibidir (Gray, Tall, 1994):

İşlem: Öğrenci bu evrede işlemi öğrenir. Nasıl uygulaması gerektiği konusunda bilgi edinir. Adım adım işlemi takip eder. Bu düzeyde işlem öğrenci için anlamsız olabilir. Sadece uygulama evresidir.

İşlemsel süreç: Öğrenci işlemi birçok kez uygular. Uygulamalar sonucunda edindiği bilgileri yansıtır. Artık işlem öğrenci için anlamlı bir yöntem haline gelir.

Kavramsal işlemsel sembolik süreç: Bir işlemin uygulanma sürecini anlayan öğrenci işlem adımlarını uygulamadan sonuç hakkında tahmin yapabilir. Süreç sonucunda oluşan kavramı ifade eder. Özelliklerini açıklar. Kavramı sembolik olarak gösterir.

KİSS evreleri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre nesnel süreçsel sembolik dünya düzeyinde yer almaktadır. Bu anlamda bu tez çalışmasında ikinci düşünme dünyası içerisinde KİSS evreleri ayrı olarak incelenmiştir.

Bu bölümde ayrıca matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesini temel alan çalışmalardan bazılarına değinilmiştir:

Kidron (2008) çalışmasında limit kavramının oluşum sürecini üç teorik çerçeveyi karşılaştırarak incelemiştir. Araştırmada KİSS, enstrümental yaklaşım ve bağlam içinde soyutlama (abstraction in context) teorileri karşılaştırılmıştır. Araştırmanın katılımcılarını birinci sınıf diferansiyel denklemler dersini alan üniversite öğrencileri oluşturmuştur. KİSS teorisi öğrenme ortamının hazırlanmasında kullanılmıştır. Öğrenci deneyimleri ile bu üç teori ile analiz edilmiştir. Araştırmada üç teorinin iç içe geçmiş olduğu ve birbirlerini tamamladıkları belirtilmiştir.

Kashefi, Ismail ve Yusof (2010) çalışmalarında öğrenme sürecine matematiğin üç dünyası yaklaşımının etkisini incelemişlerdir. Araştırmada Çok Değişkenli Matematik dersi kapsamında rutin olmayan problemlerde iki değişkenli fonksiyonların öğrenim süreci ele alınmıştır. Elektrik Mühendisliği bölümünde öğrenim gören öğrencilerle yapılan görüşmelerde öğrencilerin öğrenme güçlüğü yaşadıkları belirlenmiştir. Bu öğrenme yaklaşımının ise sürece yardımcı olduğu ifade edilmiştir. Öğrencilerin düşünme dünyaları arası geçişlerde zorluk yaşadıkları belirtilmiştir. Ayrıca, öğrenciler bir kavram için iki farklı sembolik anlayış geliştirmişlerdir.

Jukić ve Brückler (2014) çalışmalarında iki matematik öğretmen adayının diferansiyel ve integral kavramlarına ilişkin bilgilerini incelemişlerdir. Teorik çerçeve olarak matematiğin üç dünyasını ele almışlardır. Hem bilgiyi yapılandırma süreçlerini hem de var olan bilgi yapılarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Araştırmada kavramsal-somut dünyada kavramları iyi anlamının, nesnel süreçsel sembolik dünya ile aksiyomatik formal dünyada matematiksel bilginin kalıcılığına etki edeceği belirlenmiştir. Ancak, sembolik dünyadaki akıcılığın somut ve formal dünyaya yardımcı olmadığı belirtilmiştir.

Tall, Lima ve Healy (2014) çalışmalarında öğrencilerin doğrusal denklemlerden ikinci derece denklemlere geçiş sürecindeki düşünme becerilerini incelemişlerdir. Araştırmada matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi temel alınmıştır. Araştırma lise öğrencileri ile gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler denklemleri çözerken zorlanmışlardır. Doğrusal ve ikinci derece denklemlerde sembolik ifade kullanan öğrenci sayısı çok azdır. Ayrıca, sembolik ifadelerde somut temsillerin etkisi görülmüştür.

Hannah, Stewart ve Thomas (2015) çalışmalarında matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre somut, sembolik ve formal düşünme süreçlerinin sırasının farklı uygulamalarını içeren öğretim yöntemleri uygulamış ve etkilerini incelemişlerdir. Amaç, sunum sırasının bir kavramın öğrenilmesini etkileyip etkilemediğini belirlemektir. Araştırmanın uygulaması lineer cebir dersinde ve üniversite birinci sınıf öğrencileri ile gerçekleştirilmiştir. Sonuçta lineer cebirin ilk olarak sembolik ifade edilmesi gerektiği belirtilmiştir. Öğrenci deneyimleri üzerinde farklı uygulamaların etkili olmadığı görülmüştür.

Hannah, Stewart ve Thomas (2016)' ın bir diğer çalışmasının amacı ise lineer cebir dersinde matematiğin üç dünyası ile APOS teorisinin birleşimiyle ortaya çıkan öğrenci düşünme süreçlerini incelemektir. Araştırma lisans öğrencileriyle yürütülmüştür. Öğrenciler lineer cebir kavramı için somut düşünmeyi tercih etmişlerdir. Sembolik ifadede zorlanmışlardır. Öğrenciler kavramları ifade ederken hatalar yapmışlardır. APOS teorisine göre nesne düzeyine ulaşamamışlardır. Ancak, lineer cebir kavramları arasında ilişki kurabilmişlerdir.

Stewart ve Schmidt (2017) matematiğin üç dünyası temelinde bir matematikçi öğrencilerinden birinin düşünme süreçlerini eş zamanlı olarak incelemişlerdir. Ayrıca üç düşünme dünyası ile Piaget' in bilişsel gelişim kuramı içerisinde yer alan uyum sürecini birlikte kullanmışlardır. Araştırmacılar bir teoremi kanıtlamanın pedagojik zorluklarını ortaya çıkarmışlardır. Teorem ispat sürecinde bir matematikçi ve öğrenci arasındaki farklılıkların var olduğu belirtilmiştir.

2.3. Matematiksel Dil

Kavramları öğrenme araçlarından biri de dildir. Matematik de kendine has bir dil yapısına sahiptir. Matematiksel yapıları ifade etmede belli bir kural vardır. Bu kuralı doğru bir şekilde kullanmak önemlidir. Sözel ifadeleri sembolik olarak gösterirken ya da denklemleri çözerken matematiğin dilini kullanırız. Öğrenciler kavramları doğru yansıtamadıkları zaman hata yapmaktadırlar (Otterburn, Nicholson, 1976). Bu durum da kavram yanılgılarına neden olmaktadır. Bu anlamda dil yapılarını doğru kullanmak gerekir.

Owens (2006) matematiksel kavramları öğrenebilmek için önce matematiksel dilin öğelerini bilmek gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca, problem çözme yöntemini açıklamak da matematiksel dilin parçasıdır. Dolayısıyla, matematiksel düşünme araçlarından biri de matematiksel dildir. Kavramsal anlamada dil önemlidir. Öğrenciler kavramsal anlama sürecinde matematiksel düşüncelerini dil ile ifade ederler.

Bir kavramın farklı temsilleri arasında bağlantı kurmak düşünme süreciyle gerçekleşir (Tall, Thomas, 1991). Öğrenci sözlü bir ifadeyi matematiksel ifadeye dönüştürebilir. Bu sırada sözlü, yazılı ve görsel dilin birini ya da hepsini birlikte kullanabilir. Böylece sembolik ifadeye dönüştürme sürecinde farklı dil becerilerini gösterebilir. Zorluk yaşadığı durumlarda ise dil becerileri arasında geçiş yapması düşünme sürecinde esneklik sağlar.

Matematiksel dilin cebirsel ve geometrik kullanım açısından özelleşebileceği söylenebilir. Cebir, belli bir sözdizimi gerektirir. Denklem çözümlerinde dil açısından takip edilen kurallar düzeni vardır. Bu durum geometride de geçerlidir. Geometride üçgen, dörtgen gibi kavramları gösterirken uyulması gereken özellikler vardır. Doğru, doğru parçası ve ışın gibi elemanları karıştırmamak için geometrik dili doğru kullanmak gerekir. Bu tez çalışmasında öğrencilerden oluşturması beklenen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nın sembolik ifadeleri için de matematiksel dilin kuralları gereklidir. Öğrenci, üçgen eşitsizliğini ifade ederken eşitsizlik gösterimini doğru kullanmalıdır. Pisagor Bağıntısı' nın sözel ifadesinde yer alan dik üçgen, dik kenarlar gibi kavramları doğru ifade edebilmelidir. Bir kenar uzunluğunun karesini düşünürken kare şekli ile üslü ifadeyi birbirine karıştırmamalıdır. Bu açıdan matematiksel dilin aritmetik, cebir ve geometri alanlarında özel kullanımları vardır.

Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre matematiksel dil gelişimi matematiksel düşünme gelişimi ile birlikte gerçekleşir. Her düşünme dünyasında farklı dil becerileri görülmektedir. Kavramsal somut dünya boyutunda sözlü, yazılı ve görsel dil becerileri ön plana çıkmaktadır. Bu boyutta öğrenciler kavramların dış görünüşlerini tasvir edebilir. Gösterilen bir şeklin ismini söyleyebilirler. Ayrıca, kavramların özelliklerini açıklayabilirler. Nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda ise öğrenciler kavramları sembolik olarak gösterebilirler. Verilen ifadelere uygun sembolik ifade oluşturabilirler. Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkileri açıklayabilirler. Problem çözme sürecini anlaşılır biçimde ifade edebilirler. Aksiyomatik formal dünya boyutunda ise alışagelmiş tanımlardan çok kendi tanımlamalarını kullanırlar. Kavramları oluştururken kendi cümleleri ile ifade ederler. Bu süreçte matematiksel dilin kurallarını kullanırlar. İspat sürecini açıklarlar.

Bu bölümde ayrıca, matematiksel dil becerileri ile ilgili çalışmalardan bazılarına değinilmiştir:

Capraro ve Joffrion (2006)' ın çalışmaları sözel ve sembolik dil kullanımına yöneliktir. Yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerinin dil kullanımlarını incelemişlerdir.

Öğrencilerden sözel ifadeyi cebirsel olarak ifade etmeleri istenmiştir. Sonuçta, öğrencilerin sembolik dil ile ilgili zorluk yaşadıkları belirlenmiştir.

Vlassis (2008) araştırmasında dil kullanımı ile bilişsel gelişim arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Sekizinci sınıf öğrencilerinin negatif kavramına yönelik dil becerilerini ve kavramsal anlamalarını araştırmıştır. Öğrenciler, negatif değişken içeren ifadelerde zorlanmışlardır. Değişkenin negatifliği ile değerinin negatifliğini ayırt edememişlerdir. Dolayısıyla dil becerilerinin yetersiz olduğu görülmüştür.

Woods (2009) araştırmasında matematiksel dil ve matematik başarısı arasındaki bağlantıyı incelemiştir. Sosyoekonomik düzeyi farklı 16 öğrenci ile gerçekleştirilen araştırmada öğrencilerin matematiksel dil becerisi ve matematik başarılarının benzer olduğu görülmüştür. Araştırmada erken çocukluk eğitiminde matematiksel dil becerilerinin desteklenmesi gerektiği belirtilmiştir.

Dur (2010) çalışmasında ortaokul öğrencilerinin matematiksel dil kullanımlarını incelemiştir. Öğrencilerin dil becerilerini hikaye yazma etkinliği içerisinde araştırmıştır. Ayrıca bazı değişkenler açısından karşılaştırmıştır. Öğrenciler hikaye içerisinde problem çözüm sürecini açıklamada zorlanmışlardır. Matematiksel kavramların özelliklerini açıklamada güçlük yaşamışlardır. Matematiksel kavramlar arasında ilişki kuramamışlardır. Öte yandan, matematiksel dil becerileri ile matematik başarıları arasında ilişki bulunmuştur.

Yüzerler ve Doğan (2012) ortaokul öğrencilerinin matematiksel dil becerilerini araştırmışlardır. Araştırmayı 6. ve 7. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirmişlerdir. Öğrenciler matematiksel düşünme sürecinde matematiksel dili kullanırken zorlanmışlardır. Matematiksel şekillerin gösteriminde ve süslemelerde başarılı olmuşlardır. Ancak, kavramları ifade etmekte güçlük yaşamışlardır.

Akarsu (2013) çalışmasında yedinci sınıf öğrencilerinin matematiksel dil becerilerini incelenmiştir. Konu alanı olarak cebir belirlenmiştir. Ayrıca, cebir alanındaki kavram yanılgıları tespit edilmiştir. Öğrencilerin matematiksel dil becerilerinin yetersiz olduğu görülmüştür. Öğrencilerin sözel ifade ile sembolik ifade dönüşümlerinde zorlandıkları belirlenmiştir.

Spiridonova ve Savvinova (2015) araştırmalarında iki dilli eğitimin matematiksel dil gelişimine ve matematik eğitimine etkisini araştırmışlardır. Üç yıl süren araştırmada iki dille eğitimde öğrencilerin matematiksel dilin bileşenlerini sezgileri yoluyla öğrenmek zorunda kaldıklarını belirtilmiştir. Araştırmada dil gelişimi ile bilişsel gelişimin bağlantılı olduğu görülmüştür. Araştırma sonucunda iki dille eğitimde birbiri arasında geçiş sağlayan matematiksel dil sözlüğü geliştirilmiş ve öğretim modeli sunulmuştur.

Kula Yeşil (2015) araştırmasında 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel dil becerilerini incelemiştir. Konu olarak geometri öğrenme alanında yer alan dörtgenler konusu seçilmiştir. Öğrencilerin dörtgenler ile ilgili dil becerilerinde eksiklikler olduğu belirlenmiştir. Öğrenciler dörtgenleri tanımlayabilmişlerdir. Ancak, dörtgen tanımı ile dörtgen özelliklerini birbirine karıştırmışlardır. Ayrıca, öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin düşük düzeyde olduğu belirlenmiştir.

Yıldız (2016) ortaokul öğrencilerinin kesirlerde kullandıkları matematiksel dil becerilerini araştırmıştır. Araştırmanın katılımcıları 6. ve 7. sınıf öğrencileridir. Matematiksel dil becerileri sözel, sembolik ve görsel dil becerileri açısından incelenmiştir. Öğrencilerin görsel dil becerilerini daha çok kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca, 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel dil becerileri arasında farklılıklar olduğu görülmüştür.

Purpura, Napoli, Wehrspann ve Gold (2017) araştırmalarında erken matematik eğitiminde matematiksel dilin matematiksel bilginin edinimine etkisini araştırmışlardır. Okul öncesi eğitimi alan 64 öğrenci ile gerçekleştirilen deneysel araştırmada matematiksel okuma çalışmaları yapılmıştır. Araştırmanın sonucunda deney grubundaki öğrencilerin matematiksel dil performanslarının ve matematiksel bilgilerinin daha iyi durumunda olduğu görülmüştür. Araştırmada matematiksel dil gelişiminin matematiksel bilgi ediniminde erken çocukluk eğitiminde önemli bir etkisinin olduğu vurgulanmıştır.

Dahm ve De Angelis (2018) 'in araştırmalarının amacı birden fazla dil konuşabilen öğrencilerin bireysel geçmişlerine dayanarak bu çok dilli yapının matematiksel öğrenmelerine olumlu etkisinin olup olmadığını araştırmışlardır. 607 öğrenci ile gerçekleştirilen araştırmada birden fazla dil bilmenin ve anadildeki okuryazarlık becerisinin matematik öğrenimini ve matematiksel dil gelişimini olumlu yönde etkilediği belirtilmiştir. Bu anlamda dil öğrenme ile matematik öğrenme arasında bağlantı kurulmuştur.

Byrd Hornburg, Schmitt ve Purpura (2018) araştırmalarında okul öncesi çocukların matematiksel dil becerileri ile sayı becerilerini karşılaştırmışlardır. 124 okul öncesi eğitimi alan öğrenci ile gerçekleştirilen araştırmada matematiksel dilin sayısal becerilerin gelişimindeki önemine dikkat çekilmiştir. Araştırmanın sonucunda matematiksel dilin sayma, sayıları tanımlama, sayıların karşılaştırılması, problemler gibi birçok sayısal beceri ile ilişkili olduğu görülmüştür.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde tez çalışmasının yöntemi açıklanmıştır. Araştırmanın katılımcılarına dair bilgiler sunulmuştur. Uygulama sürecinde geliştirilen Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi' nin geçerlik ve güvenirlik çalışmalarına yer verilmiştir. Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği açıklanmış, yarı yapılandırılmış görüşme sorularına yer verilmiştir. Görüşme sürecinin planlaması ve uygulama şekli açıklanmıştır.

3.1. Araştırmanın Deseni

Araştırmanın deseni karma desendir. Nitel ve nicel desenler bir arada kullanılmıştır. Tez çalışmasının amacı ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini ve matematiksel dil becerilerini incelemektir. Dolayısıyla araştırma durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Durum çalışması nitel araştırma desenlerinden biridir. Bu araştırma deseninde “nasıl” ve “niçin” soruları önemlidir (Yıldırım, Şimşek, 2008). Araştırmacıya bir olguyu inceleme olanağı sağlar. Bireylerin anlamaya dayalı bilgilerini ölçmede etkilidir (Stake, 2006). Yin (2003) durum çalışmasının birçok yöntemini belirlemiştir. Bu yöntemlerden biri açıklayıcı yöntemdir. Bu yöntemde neden sonuç ilişkisi önemlidir. Farklı değişkenlere göre olgular arasındaki ilişkiyi inceler. Bu ilişkiyi detaylı açıklar. Yani açıklanan durumla ilgili detaylı bilgi sağlar. Bu tez çalışmasında farklı cebirsel düşünme ve farklı geometrik düşünme düzeylerine sahip ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçleri ve matematiksel dil becerileri hakkında detaylı bilgi sağlamak amaçlanmıştır. Ayrıca matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre karşılaştırma yapılmıştır. Dolayısıyla tez çalışması açıklayıcı durum çalışmasıdır.

Tez çalışmasında öğrencilerin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerini belirleyebilmek için nicel araştırma deseni kullanılmıştır. Nicel araştırma yöntemi olarak tekil tarama yöntemi seçilmiştir. Bu yöntemde değişkenler tek tek ele alınır. İncelenmek istenen grup özellikleri tek tek açıklanır (Karasar, 2000). Çalışma grubunun cinsiyet özellikleri gibi farklı özellikleri yüzde olarak verilir. Bir nevi betimleme yapılır. İki çeşidi vardır. Bir tanesi izleme, diğeri kesit alma yöntemidir. Bu tez çalışmasında kesit alma yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntem farklı gruplar üzerinden inceleme yapma olanağı verir. Elde edilen verileri genelleme olanağı sağlar. Bu anlamda 6.,7. ve 8. sınıf olarak farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerinin incelenmesinde kesit alma yaklaşımı benimsenmiştir.

3.2. Çalışma Grubu

Bu tez çalışması Kocaeli ilinin İzmit ilçesinde gerçekleştirilmiştir. Araştırma 2017-2018 öğretim yılında yapılmıştır. Araştırmada ortaokul öğrenci grubu olarak 6., 7. ve 8. sınıf öğrencileri belirlenmiştir. Öğretim programı içerisinde cebir ile ilgili sembolik gösterim ilk olarak 6. sınıfta yer aldığı için 5. sınıf öğrencileri araştırmanın çalışma grubuna alınmamıştır. Araştırmada iki aşamalı çalışma grubu seçimi yapılmıştır. Birinci aşamada öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerini ve geometrik düşünme düzeylerini belirlemek için Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi ve Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği uygulanan öğrenciler küme ve rasgele örnekleme metodu ile belirlenmiştir. Küme örnekleme metodu, olasılık temelli örnekleme yöntemlerinden biridir. Bu yöntemin seçilme nedeni araştırma grubunun büyüklüğüdür. Araştırma yapılacak küme olarak İzmit ilçesi belirlenmiştir. Bu örnekleme yönteminin amacı benzer grupların bir arada olmasıdır (Morgan, Morgan, 2008). Çalışma grubuna ait bilgiler Tablo 2’de gösterilmiştir.

Tablo 2

Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi ve Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği uygulanan öğrencilere ait betimsel bilgiler

Sınıf düzeyi	N	%
6. Sınıf	1071	38,1
7. Sınıf	966	34,4
8. Sınıf	771	27,5
Cinsiyet		
Kız	1311	46,7
Erkek	1497	53,3
Toplam	2808	100

Araştırmanın nicel çalışma bölümünde 2808 öğrenciyle uygulama yapılmıştır. Bu öğrencilerin 1071’i 6. sınıf, 996’ı 7. sınıf ve 771’i 8. sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. Ayrıca öğrencilerin 1311’i kız, 1497’si erkek öğrencilerdir.

Araştırmanın durum çalışması katılımcıları, maksimum çeşitlilik yöntemiyle belirlenmiştir. Bu yöntem amaçlı örnekleme stratejisinde yer almaktadır. Amaçlı örneklemede farklılıkların sağlandığı durumları birbiri ile karşılaştırmak söz konusudur (Yıldırım, Şimşek, 2008). Amaçlı örnekleme ile örneklem seçiminde araştırma amacı

önemlidir (Patton, 2014). Bu amaçla öğrencilerin seçiminde dikkat edilen hususlar şu şekilde sıralanmıştır:

- 1) Öğrencilerin geometrik düşünme seviyeleri (G1, G2, G3)
- 2) Öğrencilerin cebirsel düşünme seviyeleri (C1, C2, C3)
- 3) Cinsiyet açısından dengeli bir dağılımın olması
- 4) Öğrencilerin matematik dersi karne notları

Amaçlı örnekleme yöntemiyle seçilen ve görüşme yapılan öğrencilere ait bilgiler Tablo 3’ de gösterilmiştir. Matematik başarı notları için 2017-2018 öğretim yılı birinci dönem karne ortalamaları dikkate alınmıştır. Öğrencilerin not ortalamaları yuvarlanarak sunulmuştur. Öğrencilerin gerçek isimleri gizlenmiş ve takma isimler kullanılmıştır.

Tablo 3

Amaçlı örnekleme yöntemiyle seçilen ve görüşme yapılan öğrencilere ait bilgiler

Ad	Sınıf	Cebirsel Düşünme Düzeyi	Geometrik Düşünme Düzeyi	Not ortalaması
YUSUF	6	C1	G1	47
HALE	6	C1	G2	73
RANA	6	C1	G3	86
ÖZGÜR	6	C2	G1	81
ZEHRRA	6	C2	G2	95
SERKAN	6	C2	G3	91
MELTEM	6	C3	G1	98
SARP	6	C3	G3	100
EKİN	7	C1	G1	52
İDİL	7	C1	G2	35
METİN	7	C1	G3	67
ELİF	7	C2	G1	80
ALİ	7	C2	G2	95
CANAN	7	C3	G1	88
ILGIN	7	C3	G3	100
ŞENER	8	C1	G1	39
TAN	8	C1	G3	55
SEVGİ	8	C2	G1	72
YASİN	8	C2	G2	90
RÜZGAR	8	C3	G1	71
BELGİN	8	C3	G2	98
CANSU	8	C3	G3	95
ASAF	8	C3	G3	100

*Öğrencilerin gerçek isimleri gizlenmiştir.

Görüşme yapılan öğrencilerden 8' i 6. sınıf, 7' si 7. sınıf, 8' i de 8. sınıftır. Toplamda 23 öğrenci seçilmiştir. Görüşme yapılan öğrencilerin hepsi aynı okulda öğrenim görmemektedir ve öğrencilerin öğretmenleri farklıdır. Görüşmeler yapılmadan önce öğrenci velilerine araştırma ile ilgili bilgi verilmiş ve gerekli izinler alınmıştır. Tez çalışmasında öğrencilerin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerine göre bir karşılaştırma yapılmıştır.

3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları

Araştırmada görüşme yapılacak öğrencileri belirlemek için iki ölçek kullanılmıştır. Bunlardan ilki araştırmacı tarafından geliştirilen “Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi” dir. Diğerisi ise Alyeşil (2005) tarafından geliştirilen “Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği” dir. Bu iki test birlikte uygulanmıştır. Veri toplama süreci 1 ay sürmüştür. Bu süreç sonucunda belirlenen 23 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler her öğrenci ile 3 oturumda gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler 2017-2018 öğretim döneminin ikinci döneminde yapılmıştır. Bu sürecin tamamlanması ise 4 ay sürmüştür.

3.3.1. Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi

Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Bu testin amacı öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerini ortaya çıkarmaktır. Bu amaçla Altun (2005) tarafından belirlenen cebirsel düşünme düzeyleri temel alınarak ilk 3 düzeye uygun 30 soruluk bir taslak test hazırlanmıştır. İlgili alanyazın incelendiğinde (Gülpek, 2006; Kaya, 2017; Sünkür, İlhan, Kılıç, 2012; Yenilmez, Teke, 2008) ortaokul düzeyinde öğrencilerin genellikle 3. düzeye kadar düşünme süreci gerçekleştirdikleri, sekizinci sınıf öğrencilerinin de nadir olarak dördüncü düzeye ulaşabildikleri belirlenmiştir. Bu tez çalışmasında 6.,7. ve 8. sınıf öğrencilerinin düşünme süreçleri karşılaştırıldığı için Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi’ nde en yüksek düzey 3. düzey olarak belirlenmiştir. Testteki amaç, öğrencilerin cebirdeki kavramsal bilgilerini ölçmektir. Testte her bir düşünme düzeyine uygun 10 soru hazırlanmıştır. Soruların hazırlanma sürecinde daha önce yapılmış araştırmalar (Akarsu, 2013; Akgün, 2007; Akkan, Çakıroğlu, Güven, 2009; Akkuş, 2004; Altun, 2005; Dede, Peker, 2007; Kocakaya Baysal, 2010; Macgregor ve Stacey, 1996; Soylu, 2008; Uysal Koğ, 2012; Yalvaç, 2010) incelenmiştir.

Hazırlanan taslak testte yer alan soruların uygunluğunun değerlendirilmesi için ülkenin batısında yer alan bir üniversitenin Eğitim Fakültesinde görevli üç öğretim üyesinin ve Milli Eğitim Bakanlığı’ na bağlı ortaokullarda görev yapan iki uzman ortaokul matematik

öğretmenin görüşleri alınmıştır. Ölçeğin değerlendirilme sürecinde Altun (2005) tarafından belirlenen cebirsel düşünme düzeylerinin özellikleri açıklanmıştır. Her bir sorunun düzeye uygunluğu görüşülmüştür. Sorular içerisinde yer alan 25. sorunun yazımından kaynaklanan hata olduğu belirlenmiştir. Ayrıca sorunun cebirsel düşünme düzeylerini ölçmeyeceği düşünülmüştür. Dolayısıyla soru taslak testten çıkarılmıştır. Geri kalan 29 soru için uzman görüşleri her bir soru için ortalama %90 oranında uyum göstermiştir. Test maddelerinin cebirsel düşünme düzeylerini yordadığı sonucuna varılmıştır. Ardından test maddelerinin öğrenciler tarafından anlaşılabilirliğini belirlemek için iki öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Bu öğrencilere sadece sorulardan ne anladıkları sorulmuştur. Sonuçta soruların anlaşılabilirliği açısından bir sorun olmadığı belirlenmiştir.

Testin son hali Kocaeli ilinin Derince ilçesinde yer alan iki ortaokulda öğrenim gören 7. ve 8. sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Bu öğrencilerin 125'i 7. sınıf ve 267' si 8. sınıftır. Toplam 392 öğrenci ile pilot çalışma yapılmıştır. 6. sınıf öğrencileri daha cebirsel ifadeler konusu ile karşılaşmadıkları için pilot çalışmaya alınmamıştır.

Taslak testin uygulandığı öğrencilerden 10' unun verilerinin yetersiz olduğu belirlenmiştir. Pilot çalışmaya 382 öğrencinin verileri dahil edilmiştir. Doğru cevaplar "1", yanlış cevaplar "0" olarak değerlendirilmiştir. Madde analizi için "Excel" programı kullanılmıştır. Her bir maddenin güçlük ve ayırtedicilik indeksleri hesaplanmıştır.

Testte yer alan soruların madde güçlük indeksleri hesaplanmıştır. Buradaki amaç, soruların zorluk düzeyini belirlemektir. Çepni vd. (2008)' ne göre güçlük indeksi "0" ile "1" arasında değişir. "0" a yaklaşırsa sorunun zorluk düzeyi yüksektir. "1" e yaklaşırsa sorunun zorluk düzeyi düşüktür. Bu yüzden soruların güçlük indeksi 0,50 düzeyinde olmalıdır. Çünkü bu değer soruların orta güçlükte olduğunu gösterir. Ayrıca, soruların ayırtedicilik indeksleri hesaplanmıştır. Amaç, alt grup ve üst grup öğrenci cevapları arasındaki ayırtediciliği belirlemektir. Bu indeks "-1" ile "+1" arasında değişir. "0" a yaklaşırsa ayırtedicilik düşüktür. "+1" e yaklaşırsa ayırtedicilik yüksektir. Negatif değer olması, alt grubun soruya çoğunlukla doğru cevap verdiği anlamı taşır. Bu da güvenilirliği düşürmektedir (Baykul, 2000).

Taslak testteki maddeler önce en yüksek puandan en düşük puana doğru sıralanmıştır. Ardından %27' lik üst ve alt gruplar belirlenmiştir. Madde güçlük ve ayırtedicilik indekslerinin hesaplanmasında aşağıdaki formüller kullanılmıştır:

$$P_{jx} = \frac{n_{\bar{u}} + n_a}{2N}$$

$$r_{jx} = \frac{n\bar{u} - na}{N}$$

p_{jx} : madde güçlük indeksini

r_{jx} : madde ayırt edicilik indeksini

$n\bar{u}$: maddeyi üst grupta doğru yanıtlayanların sayısını

na : maddeyi alt grupta doğru yanıtlayanların sayısını

N : alt ya da üst gruptaki öğrenci sayısını ifade etmektedir.

Her bir madde, güçlük indeksi (p_{jx}) ve ayırtedicilik indeksi (r_{jx}) açısından aşağıdaki sınıflandırmalar bağlamında değerlendirilmiştir (Baykul, 2000; Tekin, 2003; Tekindal, 2009; Turgut, 1992).

Tablo 4

Madde güçlük indeks değerlerine göre değerlendirme kriterleri

Madde güçlük indeksi (p_{jx})	Değerler
0,61 veya daha yüksek	Kolay
0,60-0,40 arası	Orta güçlükte
0,39 veya daha düşük	Zor

Tablo 5

Madde ayırtedicilik indeks değerlerine göre değerlendirme kriterleri

Madde ayırtedicilik indeksi (r_{jx})	Değerler
0,40 veya daha yüksek	Çok iyi ayırtedici
0,30-0,39 arası	İyi ayırtedici
0,20-0,29 arası	Düzeltilerek kullanılabilir
0,19 veya daha düşük	Kullanılamaz

En yüksekten en düşüğe doğru sıralanan 382 öğrenciye ait puanlar %27' lik alt ve üst gruba ayrılmıştır. En yüksek puana sahip 103 öğrenci üst grup, sıralamanın sonundaki 103 öğrenci ise alt grup olarak belirlenmiştir.

Yapılan analizler sonucu taslak testteki her bir madde için elde edilen güçlük ve ayırtedicilik indeksleri Tablo 6' daki gibidir.

Tablo 6

Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Taslak Testi' nde yer alan maddelere ait güçlük ve ayırtedicilik indeksleri

Cebirsel Düzeyleri	Düşünme Soru Numarası	p_{jx} madde indeksi	güçlük r_{jx} madde indeksi	ayırtedicilik
Düzey 1	1	0,849515	0,300971	
	2	0,757282	0,446602	
	3	0,728155	0,466019	
	4	0,776699	0,446602	
	5	0,699029	0,524272	
	6	0,699029	0,582524	
	7	0,582524	0,621359	
	8	0,728155	0,466019	
	9	0,742718	0,436893	
	10	0,597087	0,631068	
Düzey 2	11	0,737864	0,504854	
	12	0,402913	0,417476	
	13	0,626214	0,669903	
	14	0,635922	0,572816	
	15	0,485437	0,427184	
	16	0,621359	0,543689	
	17	0,708738	0,427184	
	18	0,553398	0,757282	
	19	0,626214	0,68932	
	20	0,572816	0,776699	
Düzey 3	21	0,631068	0,660194	
	22	0,57767	0,514563	
	23	0,587379	0,572816	
	24	0,446602	0,485437	
	26	0,398058	0,466019	
	27	0,529126	0,495146	
	28	0,209029	0,223301	
	29	0,587379	0,61165	
	30	0,427184	0,349515	

Tablo 6' da görüldüğü gibi taslak testte yer alan maddelerin madde güçlük indekslerinin (p_{jx}) 0,19 ile 0,84 arasında değiştiği belirlenmiştir. Güçlük indeksi 0,20 ve 0,80 arasında olan maddeler seçilmiştir. 0,20' nin altında yer alan maddeler çok zor, 0,80

üzerindeki maddeler ise çok kolay olarak değerlendirilmiştir. Bu durumda güçlük indeksi 0,84 olduğu belirlenen 1. soru testten çıkarılmıştır. Tablo 6' ya göre testteki maddelerin ayırtedicilik indeksleri (r_{jx}) 0,22 ile 0,77 arasındadır. Bu indeksin 0,20' nin altında olduğu maddelerin testten çıkarılması düşünülmüştür. Nitekim, ayırtedicilik indeksi bu değer altında olan bir maddenin olmadığı belirlenmiştir. Ayırtedicilik indeksi 0,22 olan 28. sorunun güçlük indeksinin de 0,20 olması, sorunun öğrencilere zor geldiği şeklinde yorumlanmıştır. Ancak, soru incelenmiş ve cebirsel düşünme düzeyleri açısından 3. düzeye uygun olduğu düşünülmüştür. Bu anlamda sorunun testte yer almasına karar verilmiştir. Taslak testin ortalama güçlük düzeyi 0,59; ortalama ayırtedicilik indeksi ise 0,52 olarak hesaplanmıştır.

Baykul (2000)' a göre 1 ve 0 olarak puanlanan testlerin güvenirlik katsayısı Kuder-Richardson-20 (KR-20) ile hesaplanabilir. Bu yöntemle göre KR-20 güvenirlik katsayısının hesaplanması aşağıdaki gibidir:

$$KR-20 = \frac{K}{K-1} \cdot \left(1 - \frac{\sum S_j^2}{S_x^2} \right)$$

S_x : Test puanlarının varyansı

S_j : j madde puanlarının varyansı

K: Madde sayısı

Taslak testin KR-20 güvenirlik katsayısı 0,87 olarak hesaplanmıştır. Bu anlamda taslak testin güvenirliği yüksek olarak belirlenmiştir.

Taslak testin cebirsel düşünmenin üç düzeyine uygunluğunu belirlemek için doğrulayıcı faktör analizi yapılmıştır. Bu analiz için Lisrel 8.51 programı kullanılmıştır. Amaç, yapı geçerliliğini sağlamaktır. Doğrulayıcı faktör analizi gizil değişkenleri betimler. Ayrıca kuramsal yapı ile araştırma verilerinin uyumuna ilişkin istatistiksel bilgiler sunar (Çokluk, Şekercioğlu, Büyüköztürk, 2016).

Analize 28 madde ile başlanılmıştır. Soru 12, Soru 15, Soru 27 ve Soru 29' un hata varyanslarının yüksek olduğu belirlenmiştir. Ancak Soru 12, Soru 15 ve Soru 29 için manidar t değerleri (0,01 düzeyinde) elde edilmiştir. Bu nedenle bu soruların testte yer almasına karar verilmiştir. Soru 28 manidar t değerini sağlamasına rağmen madde ayırtedicilik indeksi ($r_{jx}=0,22$) ile birlikte değerlendirildiğinde testten çıkarılması yönünde karar verilmiştir.

Taslak testen elde edilen uyum indeksleri ve bu testlere ait kabul edilen değerler (Çokluk, Şekercioğlu, Büyüköztürk, 2016) Tablo 7' deki gibidir.

Tablo 7

Doğrulayıcı faktör analizi sonucu taslak testten elde edilen değerler

Uyum İndeksi	Mükemmel Uyum	İyi Uyum	Cebirsel Düşünme Modeline Ait Elde Edilen Değerler
χ^2/sd	$0 \leq \chi^2/sd \leq 2$	$2 \leq \chi^2/sd \leq 3$	2,4329
RMSEA	$0 \leq RMSEA \leq 0,05$	$0,05 \leq RMSEA \leq 0,08$	0,064
GFI	$0,95 \leq GFI \leq 1$	$0,90 \leq GFI \leq 0,95$	0,860
AGFI	$0,95 \leq GFI \leq 1$	$0,90 \leq GFI \leq 0,95$	0,830
CFI	$0,95 \leq CFI \leq 1$	$0,90 \leq CFI \leq 0,95$	0,790
NFI	$0,95 \leq NFI \leq 1$	$0,90 \leq NFI \leq 0,95$	0,700
NNFI	$0,95 \leq NNFI \leq 1$	$0,90 \leq NNFI \leq 0,95$	0,780
RMR	$0 \leq RMR \leq 0,05$	$0,05 \leq RMR \leq 0,08$	0,014
SRMR	$0 \leq SRMR \leq 0,05$	$0,05 \leq SRMR \leq 0,08$	0,068

Tablo 7'deki değerlerde görüldüğü üzere uyum indeksleri kabul düzeylerini karşılamamıştır. Dolayısıyla modifikasyon önerileri dikkate alınmıştır. Modifikasyon önerileri incelendiğinde Soru 11' in 1. düzeyde yer alması, Soru 21' in 2. düzeyde yer alması, Soru 15' in ise 3. düzeyde yer alması önerilmiştir. Cebirsel düşünme düzeyleri açısından sorular tekrar incelendiğinde bu önerilerin kabul edilebilir olduğuna karar verilmiştir. Doğrulayıcı faktör analizi öneriler doğrultusunda yapılan değişiklikler üzerinden tekrar yapılmıştır. Son durumda elde edilen uyum indeksleri Tablo 8' de verilmiştir.

Tablo 8

Modifikasyon önerilerinin uygulanması sonucu taslak testten elde edilen değerler

Uyum İndeksi	Mükemmel Uyum	İyi Uyum	Cebirsel Düşünme Modeline Ait Elde Edilen Değerler
χ^2/sd	$0 \leq \chi^2/sd \leq 2$	$2 \leq \chi^2/sd \leq 3$	1,7078
RMSEA	$0 \leq RMSEA \leq 0,05$	$0,05 \leq RMSEA \leq 0,08$	0,042
GFI	$0,95 \leq GFI \leq 1$	$0,90 \leq GFI \leq 0,95$	0,910
AGFI	$0,95 \leq GFI \leq 1$	$0,90 \leq GFI \leq 0,95$	0,890
CFI	$0,95 \leq CFI \leq 1$	$0,90 \leq CFI \leq 0,95$	0,910
NFI	$0,95 \leq NFI \leq 1$	$0,90 \leq NFI \leq 0,95$	0,800
NNFI	$0,95 \leq NNFI \leq 1$	$0,90 \leq NNFI \leq 0,95$	0,900
RMR	$0 \leq RMR \leq 0,05$	$0,05 \leq RMR \leq 0,08$	0,012
SRMR	$0 \leq SRMR \leq 0,05$	$0,05 \leq SRMR \leq 0,08$	0,055

Son durumda X^2/sd oranının 1,7078; RMSEA değerinin 0,042 olduğu belirlenmiştir. Bu değerler mükemmel uyumun göstergesidir. GFI değerinin 0,910; CFI değerinin 0,910; NNFI değerinin 0,900 olduğu görülmüştür. Bu durum iyi uyum göstergesidir. AGFI değerinin 0,890; NFI değerinin 0,800 olduğu belirlenmiştir. Bu durum zayıf uyum göstergesidir. RMR değerinin ise 0,012 değer olarak mükemmel uyuma, SRMR değerinin ise 0,055 olması da iyi uyuma karşılık gelmektedir. Sonuç olarak Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi' nin 27 maddelik üç düzey olarak değerlendirilen yapısının, bir model olarak doğrulandığı söylenebilir.

27 maddelik nihai teste ait her bir maddenin madde güçlük ve ayırtedicilik indeksleri Tablo 9' daki gibidir.

Tablo 9

Nihai teste ait madde güçlük ve ayırtedicilik indeksleri

Cebirsel Düşünme Düzeyleri	Soru Numarası		P _{jx} güçlük indeksi	madde r _{jx} ayırtedicilik indeksi
	Taslakta yer aldığı	testte Nihai testte yer aldığı		
Düzey 1	2	1	0,7572	0,4466
	3	2	0,7330	0,4563
	4	3	0,7766	0,4466
	5	4	0,6990	0,5242
	6	5	0,7038	0,5728
	7	6	0,5873	0,6504
	8	7	0,7233	0,4757
	9	8	0,7427	0,4174
	10	9	0,6019	0,6407
	11	10	0,7330	0,5145
Düzey 2	12	11	0,3932	0,4174
	13	12	0,6262	0,6699
	14	13	0,6310	0,5631
	16	14	0,6213	0,5436
	17	15	0,7038	0,4368
	18	16	0,5631	0,7766
	19	17	0,6165	0,6893
	20	18	0,5970	0,7669
	21	19	0,6310	0,6601
Düzey 3	15	20	0,4805	0,3980

22	21	0,5922	0,5242
23	22	0,5873	0,5533
24	23	0,4368	0,5048
26	24	0,4029	0,4757
27	25	0,5242	0,5048
29	26	0,5728	0,6213
30	27	0,4223	0,3592

Nihai testin ortalama güçlük düzeyinin 0,60 olduğu, ortalama ayırtedicilik indeksinin ise 0,54 olduğu belirlenmiştir. KR-20 güvenirlik katsayısı ise 0,86 olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla testin güvenirliğinin yüksek olduğu söylenebilir.

Son durumda nihai testte (Ek 4) yer alan soruların cebirsel düşünme düzeylerine göre dağılımı Tablo 10' daki gibidir.

Tablo 10

Nihai testte yer alan soruların cebirsel düşünme düzeylerine göre dağılımı

Cebirsel Düşünme Düzeyleri	Soru Numaraları	Soru Adedi
Düzye 1	2,3,4,5,6,7,8,9,10,11	10 soru
Düzye 2	12,13,14,16,17,18,19,20,21	9 soru
Düzye 3	15,22,23,24,25,26,28,29	8 soru

Madde analizi ve doğrulayıcı faktör analizi sonucunda son hali verilen Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi' nin boyutlarının kendi aralarındaki puanları ile testin toplam puanı arasındaki ilişki incelenmiştir. Bunun için SPSS 21.0 paket programı yardımıyla Pearson Momentler Çarpımı Korelasyon Katsayısı hesaplanmıştır. Değerler Tablo 11' de gösterilmiştir.

Tablo 11

Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi ile alt boyutları arasındaki korelasyon matrisi

	Düzye1	Düzye2	Düzye3	Cebirsel Düşünme Düzeyleri Belirleme Testi
Düzye1	1,000	0,628	0,261	0,808
Düzye2	0,628	1,000	0,511	0,894
Düzye3	0,261	0,511	1,000	0,704
Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi	0,808	0,894	0,704	1,000

Analiz sonucunda bütün korelasyon değerleri 0,01 anlamlılık düzeyinde ($p=0,00$) istatistiksel olarak anlamlı bulunmuştur. Tablo 11' e göre bütün korelasyon değerleri arasında pozitif yönde ve anlamlı birilişki vardır. Testin bütünü ile alt boyutları arasında yüksek düzeyde bir ilişkinin olduğu belirlenmiştir. Bu durum alt boyutların testi temsil etme gücünün yüksek olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Alt boyutların birbirleri arasındaki ilişkinin testin bütünü ile olan ilişkiden daha az olduğu görülmüştür. Düzey 1 ve Düzey 3 arasındaki ilişkinin ($r=0,261$) en az olması beklenen bir durumdur. Bu durum her iki boyutun birbirinden bağımsız yapılar olduğunun bir göstergesidir. Dolayısıyla testin kapsam geçerliliğinin olduğu söylenebilir.

3.3.2. Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği

Tez çalışmasında yarı-yapılandırılmış görüşme yapılacak öğrencilerin seçilmesinde araştırmanın amaçları doğrultusunda belirlenen bir diğer kriter geometrik düşünme düzeylerini belirlemektir. Literatür incelendiğinde Alyeşil (2005) tarafından geliştirilen “Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği” nin kullanılması uygun görülmüştür. Bu ölçek Van Hiele teorisi temelinde hazırlanmıştır. Ölçeğin hazırlanma sürecinde Van Hiele Geometri Testi’ nden yararlanılmıştır. Van Hiele Testi’ nde 25 soru yer almaktadır. Geometrik düşünmenin beş düzeyini ölçmektedir. Alyeşil (2005) tarafından hazırlanan ölçek ise 20 sorudan oluşmaktadır. Ölçekte geometrik düşünme düzeylerinin dört düzeyinin her birine ait 5 soru bulunmaktadır. Ölçek maddeleri uzman görüşleri doğrultusunda incelenmiştir. Ölçeğin alfa-güvenirlik katsayısı 0,81 olarak bulunmuştur.

Literatür incelendiğinde ortaokul düzeyinde öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin genellikle ilk 3 düzey arasında yer aldığı görülmüştür (Breen, 2000; Gündoğdu Alaylı, 2012; Fidan, 2009; Fuys, 1985; Karakarçayıldız, 2016; Mistretta, 2000; NCTM, 2000; Özcan, 2012; Van de Walle, 2004). Bu tez çalışmasında da yarı-yapılandırılmış görüşme yapılan öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine göre belirlenmesinde ilk 3 düzey temel alınmıştır. Geometrik düşünme Düzeyleri Ölçeği Ek 5’ de, ölçeğin kullanılabilmesi için gerekli izin ise Ek 3’ de sunulmuştur.

3.3.3. Yarı yapılandırılmış görüşme soruları

Bu tez çalışmasında ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini ve matematiksel dil becerilerini incelemek amaçlandığı için yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılması uygun görülmüştür. Yarı yapılandırılmış görüşme, nitel araştırma için uygun bir tekniktir. Bu görüşme türü araştırmacıya detaylı inceleme olanağı sağlar. Bu teknikte önce sorular hazırlanır. Görüşme esnasında katılımcıya bu sorular yöneltilir. Ancak, bu süreçte

katılımcının cevaplarını netleştirmek amacıyla başka sorular da yöneltilebilir. Bu durum araştırmacıya esneklik sağlar (Türnüklü, 2000). Dolayısıyla, tez çalışmasında yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapılmasının bulgular açısından önemli bilgiler sağlayacağı düşünülmüştür.

Tez çalışmasında öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri cebir ve geometri bağlamında incelenmiştir. Ortaokul matematik öğretim programı (MEB, 2017) temelinde cebir ve geometriye yönelik çalışma konusu olarak;

- Cebirsel İfadeler ve Denklemler
- Üçgenin Kenarları Arasındaki Bağlılıklar

Üçgen Eşitsizliği

Üçgende Kenar ve Açılar Arasındaki Bağlılıklar

- Pisagor Bağlılıkları konuları ele alınmıştır.

Araştırmacı tarafından yarı yapılandırılmış görüşmeler 3 oturum halinde gerçekleştirilmiştir. 1. oturumda cebirsel ifadeler konusuna yönelik sorulara, 2. oturumda geometri öğrenme alanında yer alan üçgen konusuna yönelik sorulara, 3. oturumda ise üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağlılıkları' nı içeren gerçek yaşam durumlarına yer verilmiştir. Hazırlanan yarı yapılandırılmış görüşme soruları, açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. Soruların hazırlanma sürecinde öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini ortaya çıkaracak şekilde olmasına dikkat edilmiştir.

Cebir öğrenme alanına yönelik soruların hazırlanmasında ilgili literatürden yararlanılmıştır (Aylar, 2014; Hunter, 1995; Tall,2008). Bu bölümde öğrencilere 12 soru yöneltilmiştir. Öğrencilere yöneltilen cebir öğrenme alanına yönelik sorulardan 1., 2., 3. ve 4. sorular kavramsal somut dünya ile nesnel süreçsel sembolik dünya boyutlarına yöneliktir. Ayrıca 1., 2. ve 4. sorular öğrencilerin KİSS kavramına sahip olup olmadıklarını belirlemek amacı ile sorulmuştur. Diğer sorular ise bütün düzeylere (kavramsal somut dünya, nesnel süreçsel sembolik dünya ve aksiyomatik formal dünya) yönelik becerileri ortaya çıkarmak amacıyla hazırlanmıştır.

Görüşme sürecinin ikinci oturumunda öğrencilere geometri öğrenme alanına yönelik 4 soru sorulmuştur. Bu sorulardan 1. soru öğrencilerin üçgen kavramına dair kavrayışlarını ortaya çıkarmak amacıyla yöneltilmiştir. 2. soru kavramsal somut dünya ve aksiyomatik formal dünya boyutlarına ölçmeye yöneliktir. Bu soruda sembolik ifade süreci ölçülmemektedir. Diğer sorular ise matematiğin üç dünyasının bütün boyutlarını ölçmeye yöneliktir.

Üçüncü oturumda öğrencilere üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı araştırmacı tarafından hazırlanan birer gerçek yaşam durumu içerisinde öğrencilere yöneltilmiştir. Buradaki amaç matematiğin üç dünyasının her seviyesine ait becerilerin açığa çıkmasıdır. Öğrencilerin cetvel, açıölçer ve gönye yardımıyla soruları cevaplandırmaları beklenmiştir.

Yarı yapılandırılmış görüşme sorularının kapsam geçerliliği önce alanında uzman üç öğretim üyesi ve uzman iki matematik öğretmeni ile değerlendirilmiştir. Tüm sorular için uzman görüşleri ortak uyum göstermiştir. Soruların pilot çalışması ise Kocaeli ilinin Derince ilçesine bağlı bir devlet ortaokulunda gerçekleştirilmiştir. Uygulamaya 8. sınıfta öğrenim gören 20 öğrenci katılmıştır. Pilot uygulamanın amacı, gerçek uygulamanın yansımaları görmektir. Soruların öğrenciler tarafından anlaşılabilirliği araştırılmıştır. Ayrıca, soruların öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini ve matematiksel dil becerilerini ortaya çıkarıp çıkarmadığı araştırılmıştır. Öğrenciler her bir oturum için ayrı ayrı 40 dk'lık sürelerde soruları çözmüşlerdir.

1. oturuma dair pilot çalışma verileri aşağıdaki gibidir:

“1. Soru: 5’i anlatır mısın?”

Bu sorunun amacı matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre öğrencilerin kavramsal somut dünya ile nesnel süreçsel sembolik dünya boyutlarına ilişkin düşünme süreçlerini ortaya çıkarmaktır. Ayrıca öğrencilerin KİSS kavramına sahip olup olmadıklarını belirlemek amacı ile sorulmuştur. 5’i beş adet nesne olarak ya da sayma işlemi sonunda oluşan bir sayı olarak tasvir eden öğrenciler olmuştur. Sorunun amaca uygun olduğu belirlenmiştir.

“2. Soru: 4+3’ü anlatır mısın?”

Kavramsal somut dünya ile nesnel süreçsel sembolik dünya boyutlarına ilişkin düşünme süreçlerini ortaya çıkarmak amacıyla sorulan bu soruda öğrencilerin KİSS kavramına ilişkin algıları da değerlendirilmek istenmiştir. Öğrenciler soruyu örnekler vererek cevaplandırmışlardır. 4 elma ile 3 elma toplanırsa 7 elmanın oluşacağını belirttikleri örnekler vermişlerdir. Böylece ifadenin hem bir süreç hem de bir kavram belirttiği sonucuna ulaşabilmişlerdir. Bu anlamda sorunun amaca uygun olduğu düşünülmektedir.

“3. Soru: $28 + \square = 30 + \triangle$

dörtgen ve üçgen kutunun yerine gelebilecek sayılara üçer örnek verir misin?

Dörtgen ve üçgen yerine gelebilecek sayılar arasında bir ilişki var mıdır?

Bu ilişkiyi cebirsel olarak açıkla mısın?”

Bu sorunun amacı kavramsal somut dünya ile nesnel süreçsel sembolik dünya boyutlarına ilişkin öğrencilerin düşünme süreçlerini incelemektir. Eşitlik kavramına ilişkin

öğrenci algılarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Pilot çalışmada öğrenciler sayısal olarak doğru örnekler verdikleri halde, dörtgen ve üçgen yerine gelebilecek sayılar arasındaki ilişkiyi sembolik olarak açıklamakta zorlanmışlardır. Sonuç olarak, sorunun amaca uygun olduğu düşünülmüştür.

“4. Soru: $a+3b$ ifadesini anlatır mısın?”

Bu sorunun amacı, öğrencilerin kavramsal somut dünya ile nesnel süreçsel sembolik dünya boyutlarına ilişkin düşünme süreçlerini ortaya çıkarmaktır. Ayrıca öğrencilerin KİSS kavramına ilişkin algılarını ortaya çıkarmaktır. Öğrencilerin bir kısmı nesneler ile toplama işlemini belirtmişlerdir (kavramsal-somut dünya seviyesine uygun). Bir kısmı da harflerin bilinmeyenleri temsil ettiğini ve farklı bilinmeyenler olduğu için toplama işleminin gerçekleşmeyeceğini, bu nedenle bu şekilde ifade edildiğini (KİSS kavramı, nesnel-süreçsel sembolik dünya seviyesine uygun) belirtmişlerdir. Amacına uygun bir soru olduğu görülmüştür.

“5. Soru: ‘Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

“6. Soru: ‘İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

“7. Soru: ‘Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı çift sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

“8. Soru: ‘ x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

5., 6., 7. ve 8. sorular matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından bütün boyutlara yönelik düşünme süreçlerini ortaya çıkarmak amacıyla hazırlanmıştır. Öğrencilerin büyük bir kısmı soruları sayılarla deneyerek cevaplandırmaya çalışmışlardır. Cebirsel olarak açıklamakta zorlanmışlardır. 8. Soruda x ’ i çift sayı olarak düşünmelerinin istenmesinin nedeni ortaokul düzeyinde çift sayıya uygun cebirsel ifadeyi daha kolay elde edebilecekleri yönündeki düşüncedir. Bu soruların da amaca uygun olduğu düşünülmüştür.

“9. Soru: ‘Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle’ ifadesi ile ‘Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp’ ifadelerini karşılaştır mısın?

Cebirsel olarak karşılaştır mısın?”

“10. Soru: ‘ $x=3$ için $4x+8$ ifadesi neye eşit olur?’

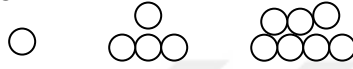
‘ $x=3$ için $8+4x$ ifadesi neye eşit olur?’

‘ $x=3$ için $2(2x+4)$ ifadesi neye eşit olur?’

Bu ifadeleri birbirleriyle karşılaştırır mısın?

Aralarındaki ilişkiyi cebirsel olarak açıklar mısın?”

Bu iki soru matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesinin üç düzeyine yöneliktir. Öğrenciler bu soruları cevaplandırırken sayılarla örnek vermeyi tercih etmişlerdir. İfadeleri sayısal olarak karşılaştırmışlardır. Cebirsel olarak karşılaştırmakta zorlanmışlardır. Soruların amaca uygun olduğu görülmüştür.

“11. Soru: 

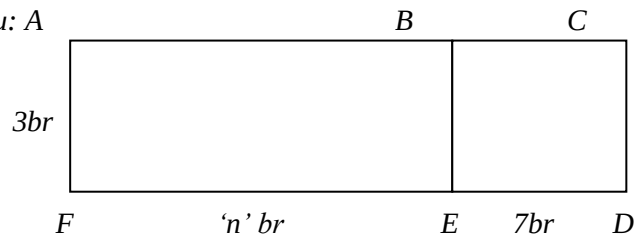
Bu örüntünün 6. adımında kaç bilye vardır?

Kaçıncı adımda 25 bilye vardır?

Bu örüntünün kuralını cebirsel olarak gösterir misin?”

Tez çalışmasında örüntülere ilişkin öğrenci algıları ölçülmek istenmiştir. Kuramsal çerçeveye göre üç düzeyi ölçmeye yönelik oluşturulan bu soruda öğrenciler örüntü kuralını açıklamakta zorlanmıştır. Öğrencilerin bir kısmı nesne miktarlarını hesaplayarak adım sayısındaki bilye sayılarını hesaplamaya çalışmış (kavramsal-somut dünya), bir kısmı ise cebirsel ifadeye önce ulaşarak çözüm yapmışlardır (nesnel-süreçsel sembolik dünya). Sorunun araştırma amacına uygun olduğu düşünülmüştür.

“12. Soru: A



AFDC dikdörtgensel bölgenin alanını “ $n+7$ ” ile 3’ ün çarpımı olarak düşünebiliriz.

Peki sence bu dikdörtgensel bölgenin alanı için düşünebileceğimiz diğer ifadeler nelerdir?”

Matematiğin üç dünyasına göre üç düzeye uygun olarak yöneltilen bu soruda bazı öğrenciler farklı cebirsel ifadelere ulaşıırken, bazı öğrenciler ise sadece verilen sözel ifadeyi sembolik ifadeye dönüştürmüşlerdir. Dolayısıyla sorunun amaca uygun olduğu belirlenmiştir.

Pilot çalışma verileri değerlendirildiğinde geometri öğrenme alanına yönelik 2. oturuma ait değerlendirmeler şu şekildedir:

“1. Soru: Üçgeni anlatır mısın? Tanımlar mısın?”

Bu soru ile öğrencilerin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre kavramsal-somut dünya basamağında tanımlamalar yapma, nesneleri tasvir etme becerileri incelenmek istenmiştir. Ayrıca matematiksel dil becerilerini incelemeye yönelik bir sorudur. Pilot çalışma sonucunda öğrencilerin “3 köşeli, 3 kenarlı, iç açılarının ölçüleri toplamı 180° , 3 doğru parçasının birleşimi” gibi ifadeler kullanarak tanımladıkları görülmüştür. Ayrıca iki öğrencinin çizim yaparak tasvir ettiği belirlenmiştir. Bu anlamda bu sorunun amaca uygun olduğu düşünülmüştür.

“2. Soru: ‘Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° ’ dir.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?”

Bu soru ile öğrencilerin aksiyomatik-formal dünya basamağında yer alan ispat sürecini ifade etmeleri beklenmiştir. Bu soruda sembolik ifade süreci ölçülmektedir. Öğrencilerin kavramsal somut dünya basamağında yer alan ifadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi becerisini ortaya çıkaran cevaplar verdikleri görülmüştür. Sorunun amaca uygun olduğu düşünülmüştür.

“3. Soru: ‘Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farkının mutlak değerinden ise büyüktür.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?

İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

Kuramsal çerçeveye göre üç düzeyi ortaya çıkarmaya yönelik sorulan bu soruda öğrenciler ispat sürecini göstermekte zorlanmıştır. Ancak düşünme süreçleri kuramsal çerçeveye uygun şekilde gelişmiştir. Dolayısıyla sorunun amaca uygun olduğu görülmüştür.

“4. Soru: ‘Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, üçüncü kenar uzunluğunun karesine eşittir.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?

İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

Aksiyomatik formal düzeyine ulaşarak ispat sürecini göstermeleri beklenen bu soruda öğrenciler sürece uygun düşünme süreci geliştirse de ifadeyi açıklamakta zorlanmışlardır. Öğrenciler bu soruda Pisagor Bağıntısı’ na yönelik bilgilerini kullanmış, ayrıca 3-4-5 özel üçgeni ile ispatını yapmaya çalışmışlardır. Sorunun amaca uygun olduğu düşünülmüştür.

Pilot çalışma verileri değerlendirildiğin de 3. oturuma ait değerlendirmeler ise şu şekildedir:

“İlk Bölüm-Üçgen Eşitsizliği

Bir gün öğretmeni Efe’ ye proje ödevi verir. Proje ödevine göre Efe’ nin üçgen şeklinde bir bahçe tasarlaması gerekmektedir. Efe’ ye öğretmeni bahçenin bir kenarının uzunluğunun 9 cm, diğer kenarının uzunluğunun ise 5 cm olması gerektiğini belirtir.

Kavramsal-somut dünya becerilerine yönelik;

Üçgeni nasıl çizmesi gerektiğini düşünen Efe sence nasıl bir yol izler?

Sence Efe üçüncü kenarı 4 cm olarak seçebilir mi? Açıklar mısın?

Sence Efe üçüncü kenarı 14 cm olarak seçebilir mi? Açıklar mısın?

Nesnel-süreçsel sembolik dünya ve aksiyomatik formal dünya becerilerine yönelik;

Bu durumda Efe’ nin çizmesi gereken üçgen için nasıl bir bağıntı oluşturursun?

Bunu genellemek istersek nasıl açıklarsın?

Cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?”

Öğrenciler burada cetvel ve gönye yardımıyla üçgenin üçüncü kenarının uzunluğuna yönelik fikir yürütmüşlerdir. Ardından 4 cm ve 14 cm olup olamayacağını denemiş ve bu iki değer arasındaki sayıları tekrar incelemişlerdir. Ardından bu sorunun üçgen eşitsizliği sorusu olduğunu belirterek üçgen eşitsizliğini yazmışlardır. Bu anlamda bu sorunun amaca uygun şekilde hazırlandığı düşünülmüştür.

“İkinci Bölüm-Pisagor Bağıntısı

Efe’nin bir diğer proje ödevinde öğretmeni ondan bir ev modeli tasarlamasını istemiştir. Efe tasarlayacağı evin çok farklı bir modelde olmasını ve dikkat çekmesini istemektedir. Efe günlerce düşünür ve 4 odalı bir ev tasarlamaya karar verir. Evin özellikleri şu şekildedir:

-Evin üç odası kare olacaktır.

-Kare şeklinde odalardan ikisinin birer duvarı birbirine dik olacaktır.

-Bu üç oda birbirleri ile birer köşelerinden ikişer ikişer çakışacaktır.

-Dördüncü odanın duvarları bu üç odanın birer duvarı ile ortak olacak ve aralarında kalacak şekilde tasarlamaktadır.

Kavramsal-somut dünya becerilerine yönelik;

Evi nasıl çizmesi gerektiğini düşünen Efe sence nasıl bir yol izler?

Üç odanın arasında kalan oda hangi geometrik şekle benzemektedir?

Efe kare şeklinde bir odanın bir kenarını 4 cm olarak, diğer kare şeklindeki odanın bir kenarını 3 cm olarak seçerse, üçüncü kare şeklinde olan odanın bir kenarı kaç cm olabilir?

Arada kalan dördüncü odanın kenar uzunlukları hakkında ne söyleyebilirsin?

Evin alanı için ne söyleyebilirsin?

Eğer Efe kare şeklindeki odalardan birinin bir kenar uzunluğunu 6 cm, diğerinin bir kenar uzunluğunu 8 cm olarak seçseydi üçüncü odanın bir kenarı ve arada kalanın odanın kenar uzunlukları hakkında ne söyleyebilirsin?

Nesnel-süreçsel sembolik dünya ve aksiyomatik-formal dünya becerilerine yönelik;

Bu durumu genellemek istersek nasıl bir bağıntı oluşturursun?

Cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?"

Öğrencilerin büyük bir çoğunluğu arada kalan bölümün dik üçgen şeklinde olacağını düşünememiş; arada kalan bölümün kare ya da dikdörtgen olabileceğini belirtmişlerdir. Sadece 2 öğrenci üçgen olacağını ve bu üçgenin de dik üçgen olması gerektiğini belirtmiştir. Buradan yola çıkarak da Pisagor Bağıntısı' na ulaşmışlardır. Bu anlamda sorunun amaca uygun olduğu görülmüştür.

Sonuçta, yarı yapılandırılmış görüşme sorularının araştırmanın amacına uygun olduğu belirlenmiştir. Görüşme soruları Ek 6' da yer almaktadır.

3.4. Uygulama Süreci

Araştırmanın amaçları doğrultusunda ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçleri ve matematiksel dil becerileri incelendiği için yarı yapılandırılmış görüşme yapılan öğrencilerin belirlenmesinde önce tarama çalışması yapılmıştır. Tarama çalışmasında öğrencilere Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi ve Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği uygulanmıştır. Bu ölçeklerin değerlendirilmesi sonucunda cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerine göre seçilen öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler, üç oturum halinde gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın akış şeması Şekil 1' deki gibidir.

Şekil 1. Araştırmanın akış şeması

Tez çalışmasının uygulama sürecinde ilk Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi ile Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği' nin uygulaması yapılmıştır. Bu uygulama Kocaeli ili İzmit ilçesine bağlı 12 ortaokulda öğrenim gören 2808 öğrenciyle gerçekleştirilmiştir. Gerekli izin Ek 2' de gösterilmiştir. Ardından veriler ışığında yarı yapılandırılmış görüşmelerin yapılacağı öğrenciler belirlenmiştir. Öğrencilere ve velilere tez çalışması ile ilgili bilgiler verilmiştir. Veli izni alınabilen öğrencilerle yapılacak görüşmeler planlanmıştır. Her öğrenciyle üç oturumda görüşme yapılmıştır. 1. oturum görüşmelerin yaklaşık süresi 45 dk, 2. oturum görüşmelerin yaklaşık süresi 30 dk, 3. oturum görüşmelerin yaklaşık süresi ise 30 dk sürmüştür. Yapılan görüşmelerin planlaması Tablo 12' deki gibidir.

Tablo 12

Yarı yapılandırılmış görüşmelerin zaman çizelgesi

Yarı yapılandırılmış görüşme öğrenciler	1. oturum	2. oturum	3. oturum
	Tarih	Tarih	Tarih
YUSUF _(C1G1)	19.04.2018	24.04.2018	07.05.2018
HALE _(C1G2)	26.04.2018	30.04.2018	14.05.2018
RANA _(C1G3)	03.05.2018	08.05.2018	21.05.2018

		16:15		16:00		16:00
ÖZGÜR _(C2G1)	10.05.2018	15:30-16:15	15.05.2018	15:30-16:00	28.05.2018	15:30-16:00
ZEHRİ _(C2G2)	17.05.2018	15:30-16:15	22.05.2018	15:30-16:00	25.05.2018	15:30-16:00
SERKAN _(C2G3)	24.05.2018	15:30-16:15	01.06.2018	11:00-11:30	05.06.2018	15:30-16:00
MELTEM _(C3G1)	29.05.2018	15:30-16:15	01.06.2018	15:15-15:45	06.06.2018	15:30-16:00
SARP _(C3G3)	31.05.2018	15:30-16:15	04.06.2018	15:30-16:00	07.06.2018	15:30-16:00
EKİN _(C1G1)	30.03.2018	09:00-09:45	06.04.2018	13:00-13:30	10.04.2018	16:00-16:30
İDİL _(C1G2)	06.04.2018	09:00-09:45	13.04.2018	13:00-13:30	20.04.2018	16:00-16:30
METİN _(C1G3)	13.04.2018	09:00-09:45	20.04.2018	13:00-13:30	27.04.2018	16:00-16:30
ELİF _(C2G1)	20.04.2018	09:00-09:45	27.04.2018	13:00-13:30	04.05.2018	16:00-16:30
ALİ _(C2G2)	27.04.2018	09:00-09:45	04.05.2018	13:00-13:30	11.05.2018	16:00-16:30
CANAN _(C3G1)	04.05.2018	09:00-09:45	11.05.2018	13:00-13:30	18.05.2018	16:00-16:30
ILGIN _(C3G3)	11.05.2018	09:00-09:45	18.05.2018	13:00-13:30	01.06.2018	16:00-16:30
ŞENER _(C1G1)	30.03.2018	11:00-11:45	06.04.2018	14:45-15:15	11.04.2018	16:00-16:30
TAN _(C1G3)	06.04.2018	11:00-11:45	13.04.2018	14:45-15:15	18.04.2018	16:00-16:30
SEVGİ _(C2G1)	13.04.2018	11:00-11:45	20.04.2018	14:45-15:15	25.04.2018	16:00-16:30
YASİN _(C2G2)	20.04.2018	11:00-11:45	27.04.2018	14:45-15:15	02.05.2018	16:00-16:30
RÜZGAR _(C3G1)	27.04.2018	11:00-11:45	04.05.2018	14:45-15:15	09.05.2018	16:00-16:30
BELGİN _(C3G2)	04.05.2018	11:00-11:45	11.05.2018	14:45-15:15	16.05.2018	16:00-16:30
CANSU _(C3G3)	11.05.2018	11:00-11:45	18.05.2018	14:45-15:15	23.05.2018	16:00-16:30
ASAF _(C3G3)	18.05.2018	11:00-11:45	25.05.2018	14:45-15:15	30.05.2018	16:00-16:30

Görüşmelerin sınıf düzeylerinde mümkün olduğunca aynı saatlerde yapılmasına önem verilmiştir. Ayrıca görüşmeler okulların öğretmen odalarında gerçekleştirilmiştir. Öğretim programı içerisinde cebirsel ifadelerle yönelik kazanımların sırasına göre 6. sınıf

öğrencileri bu konuları gördükten sonra onlarla görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır. Ancak, okul yöneticileri tarafından video kaydına izin verilmemiştir.

3.5. Verilerin Analizi

Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi ve Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği'nin analizinde SPSS 20.0 analiz programı kullanılmıştır. Her iki testte de öğrenci cevapları doğruysa 1, yanlışsa 0 olarak puanlanmıştır. Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi için öğrencilerin yer aldıkları düzeylerin belirlenmesinde her düzeye ait soruların %80' ini cevaplandırmaları kriteri belirlenmiştir. Bu durumda Düzey 1 için 8 doğru, Düzey 2 için 7 doğru, Düzey 3 için 6 doğru yapılması gerekmektedir. Alyeşil (2005) öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin belirlenmesinde, her bir düzeyde en az dört sorunun doğru cevaplanması gerektiğini belirtmiştir. Verilerin analizinde bu kriterler dikkate alınmıştır. Öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri ve geometrik düşünme düzeyleri betimsel olarak öğrencilerin sınıf düzeyleri ve cinsiyetleri açısından analiz edilmiştir. Dolayısıyla analiz sürecinde frekans ve yüzde hesaplamaları yapılmıştır.

Öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler, betimsel analiz yöntemiyle incelenmiştir. Betimsel analiz yöntemi önceden belirlenen temalar ışığında verileri inceleme yöntemidir. Bu yöntemde önce kuramsal çerçeve temelinde analiz için genel bir çerçeve oluşturulur. Bu çerçeveye göre veriler düzenlenir. Neden-sonuç ilişkisi incelenir. Analiz sonuçları yorumlanır. Betimsel analizde, verilerden alıntılar yapılabilir. Böylece katılımcıların görüşlerini doğrudan aktarma imkanı sunar (Yıldırım, Şimşek, 2006).

Bu tez çalışmasında yarı yapılandırılmış görüşme sorularına ait cevapların değerlendirilmesinde araştırmacı tarafından kuramsal çerçeve temelinde matematiğin üç dünyası düzeylerine dair sınıflandırmalar yapılmıştır. Bu sınıflandırmaların oluşturulmasında pilot çalışma verileri de etkili olmuştur. Bu sınıflandırmalar için uzman görüşü alınmış ve kuramsal çerçeveye uygun olduğuna karar verilmiştir. Sonuçta matematiğin üç dünyasına göre belirlenen düşünme süreçleri Tablo 13' deki gibidir.

Tablo 13

Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından matematiksel düşünme süreçlerine dair genel çerçeve

Matematiğin üç dünyası Beceriler

boyutları	
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemlerin genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi

Matematiğin üç dünyası boyutlarına dair düşünme süreçleri için genel çerçeve belirlenirken literatüre (Tall, 2007) bağlı kalınmıştır. Eğer öğrenciler her bir boyutta yer alan en az bir süreci gösteriyorsa düşünme süreçleri o boyutta değerlendirilmiştir. Araştırmada bir soruda ölçülmeyen boyut var ise o boyut o soru için sınıflandırmaya alınmamıştır.

Ayrıca tez çalışmasında öğrencilerin matematiksel dil becerileri kuramsal çerçeve temelinde incelenmiştir. Matematiğin üç dünyası boyutlarına dair matematiksel dil becerileri için belirlenen genel çerçeve Tablo 14' deki gibidir.

Tablo 14

Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından matematiksel dil becerilerine dair genel çerçeve

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin , kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi Nesnelerin , kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi Nesnelerin , kavramların görsel olarak tasvir edilmesi
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsel ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması

Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre dil becerileri için genel çerçeve belirlenirken literatüre (Tall, 2007) bağlı kalınmıştır. Eğer öğrenciler her bir boyutta yer alan en az bir süreci en az iki soruda göstermişse dil becerileri o boyutta değerlendirilmiştir. En az iki sorunun dikkate alınmasının nedeni farklı sorularda aynı dil becerisini gösterip göstermediğinin değerlendirilmek istenmesidir. Sözlü dil becerileri, açıklamalarını sözlü

olarak doğru bir matematiksel dil kullanımı ile aktarıp aktaramadığı açısından değerlendirilmiştir. Yazılı dil becerileri, işlemsel süreci gösterirken ve açıklamalarını yazılı olarak ifade ederken doğru dil becerileri göstermesine dikkat edilerek değerlendirilmiştir. Görsel dil becerileri özellikle geometrik şekilleri gösterirken geometrik dile uygun bir dil kullanıp kullanmaması açısından değerlendirilmiştir. Örnek olarak, bir üçgen çizdiğinde köşelerini büyük harfle isimlendirmesine dikkat edilmiştir. Nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer alan sembolik dil becerileri cebirsel dil kullanımı açısından doğru dil becerilerini gösterip göstermemelerine göre değerlendirilmiştir. Aksiyomatik formal dünya boyutuna ait dil becerileri ise üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı gibi keşfederek oluşturmaları beklenen kavramsal yapıları ifade etme biçimleri dikkate alınarak değerlendirilmiştir.

Yarı yapılandırılmış görüşmelere ait ses kayıtları araştırmacı tarafından bilgisayara aktarılmıştır. Tüm görüşmelerin toplam süresi yaklaşık 41 saattir. Bu sürece ait dökümanlar 253 sayfadan oluşmuştur. Öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerine dair dökümanlar her öğrenci için ayrı ayrı incelenmiştir. Doküman incelemesi sırasında öğrencinin düşünme sürecinde her bir soruda her gösterdiği matematiğin üç dünyası düzeyi işaretlenmiş ve böylece ulaştığı boyut belirlenmiştir. Ancak, her sınıf düzeyinde yer alan aynı cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyine sahip öğrenciler değerlendirilirken kodlamada başa dönülmüştür. Her bir sınıf değerlendirilirken diğer sınıf düzeylerine dönülerek bir değerlendirme yapılmış ve kodlamanın güvenilirliği sağlanmaya çalışılmıştır. Aynı şekilde öğrencilerin her bir soru için her gösterdiği matematiksel dil becerisi işaretlenerek dil becerileri ortaya çıkarılmıştır.

3.6. Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği

Tez çalışmasında Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi' nin geçerlik ve güvenilirlik çalışmaları Veri Toplama Araçları bölümünde açıklanmıştır. Test geliştirme sürecinde madde güçlük ve ayırtedicilik indeksleri dikkate alınmış, KR-20 güvenilirlik katsayısı hesaplanmıştır. Ayrıca testin cebirsel düşünme düzeyleri açısından uygun bir test olup olmadığını belirlemek için doğrulayıcı faktör analizi yapılmıştır. Sonuçta 27 maddelik testin ortalama güçlük düzeyi 0,60; ortalama ayırtedicilik indeksi 0,54 olarak belirlenmiştir. KR-20 güvenilirlik katsayısı ise 0,86 olarak hesaplanmıştır. Araştırmanın 2808 ortaokul öğrencisi ile gerçekleştirilen uygulama sürecinde Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi' nin alfa güvenilirlik katsayısı 0,84 olarak belirlenmiştir. Alyeşil (2005) tarafından geliştirilen Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği' nin alfa güvenilirlik katsayısı 0,81 olarak

belirtilmiştir. Bu tez çalışmasında ise ölçeğin alfa güvenirlik katsayısı 0,78 olarak hesaplanmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşme sürecinin geçerlik ve güvenirliğini sağlama sürecinde çeşitleme yöntemi (Creswell, 2013) kullanılmıştır. Görüşme, doküman incelemesi ve gözlem süreci çeşitleme yöntemini oluşturmuştur. Görüşme sürecinde öğrencilerin çözüm kağıtları geçerliliği artıran bir faktör olmuştur. Görüşme sürecine ait ses kayıtlarının dokümanları ile öğrenci cevap kağıtları birlikte değerlendirilerek analiz edilmiştir. Görüşme sürecinde öğrenci cevapları ile ilgili doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

Miles ve Huberman (1994)' a göre nitel verilerin analizinde birden fazla araştırmacının değerlendirme süreci karşılaştırılmalıdır. Bu karşılaştırma için analizler arasındaki uyum yüzdesi hesaplanmalıdır. Bu uyum yüzdesinin de %70' in üzerinde olması gerekir. Bu yüzdenin hesaplanmasında aşağıdaki formül kullanılmaktadır (Miles, Huberman, 1994):

$$\Delta = C \div (C + \partial) \times 100$$

$$\Delta = \text{Güvenirlik katsayısı}$$

$$C = \text{Üzerinde görüş birliği sağlanan konu/terim sayısı}$$

$$\partial = \text{Üzerinde görüş birliği bulunmayan konu/terim sayısı}$$

Bu anlamda araştırmacı ile alanında uzman bir matematik öğretmeni birlikte çalışmıştır. 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinden birer öğrencinin cebir öğrenme alanında yöneltilen 4. soru, geometri öğrenme alanında yöneltilen 3. soru ve üçgen eşitsizliği ile ilgili gerçek yaşam durumuna dair cevaplarını incelemişlerdir. Seçilen öğrencilerin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri 2. düzeydir. Her iki araştırmacı birbirinden bağımsız değerlendirme yapmışlardır. 1. oturum 4. soru ile ilgili değerlendirmeler Tablo 15' de gösterilmiştir.

Tablo 15

1. Oturum 4. soru ile ilgili araştırmacı ve alanında uzman bir matematik öğretmenin değerlendirmeleri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Araştırmacının değerlendirmesi			Alanında uzman matematik öğretmenin değerlendirme		
		Zehra	Ali	Yasin	Zehra	Ali	Yasin
		(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)
Kavramsal	İfadedeki verilerin özelliklerine	X		X	X		X

somut dünya	odaklanma						
	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X	X		X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi	X	X	X	X	X	X

Her iki araştırmacının değerlendirmelerinin 1. oturum 4. soru ile ilgili uyum yüzdesi %87,5 olarak bulunmuştur. 2. oturum 3. soru ile ilgili değerlendirmeler Tablo 16' da gösterilmiştir.

Tablo 16

2. Oturum 3. soru ile ilgili araştırmacı ve alanında uzman bir matematik öğretmenin değerlendirmeleri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Araştırmacının değerlendirmesi			Alanında uzman matematik öğretmenin değerlendirmesi		
		Zehra	Ali	Yasin	Zehra	Ali	Yasin
		(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X		X		X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadeler, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması			X			X
Aksiomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi			X			X

2.oturum 3. soru ile ilgili her iki araştırmacının değerlendirmelerinin uyum yüzdesi %75 olarak bulunmuştur. 3. oturum üçgen eşitsizliği ile ilgili soru için değerlendirmeler Tablo 17' de gösterilmiştir.

Tablo 17

3. oturum üçgen eşitsizliği ile ilgili soru için araştırmacı ve alanında uzman bir matematik öğretmenin değerlendirmeleri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Araştırmacının değerlendirmesi			Alanında uzman matematik öğretmenin değerlendirmesi		
		Zehra	Ali	Yasin	Zehra	Ali	Yasin
		(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)	(C2G2)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X		X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadeler, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması						
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi						

3. oturum üçgen eşitsizliği ile ilgili her iki araştırmacının değerlendirmelerinin uyum yüzdesi %83 olarak bulunmuştur.

Sonuç olarak üç oturumda yer alan üç sorunun değerlendirilmeleri sonucunda uyum yüzdelerinin %70' in üzerinde olduğu belirlenmiştir. Bu durum değerlendirmeler için uzman görüşleri arasında görüş birliğinin yüksek olduğu olduğu şeklinde yorumlanmıştır.

3.7. Araştırmacının Rolü

Tez çalışmasının amacı ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini ve matematiksel dil becerilerini matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre incelemek olduğu için yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılması uygun görülmüştür. Görüşme yapılan öğrenciler belirlenirken öncelikle araştırmacı tarafından 2808 öğrencinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri belirlenmiştir. Farklı cebirsel ve geometrik düşünme düzeylerine sahip öğrenciler belirlenmiş ve bu öğrencilerle görüşme yapabilmek için veli izin belgeleri düzenlenmiştir. Öğrenciler, veliler ve okul idarecileri ile ön görüşme yapılarak araştırmanın amacı ve uygulama süreci açıklanmıştır. Video ve ses kayıt cihazı ile görüşmelerin kayıt altına alınacağı açıklanmış; ancak okul idarecileri tarafından video kaydı

için izin alınamamıştır. Ayrıca görüşme süreci gönüllülük temelinde gerçekleştirilmiştir. Tez alışması sürecinde verilerin toplanması ve görüşmelerin yapılması araştırmacı tarafından yapılmıştır. Görüşmeler okulların öğretmenler odasında gerçekleştirilmiştir. Gözlem ve ses kaydı araştırmacı tarafından yapılmıştır. Öğrencilerin isimleri gizlenmiş ve takma isimler kullanılmıştır. Bu anlamda öğrencilere söz verilmiş ve görüşme sürecinde rahat bir tutum sergilemeleri sağlanmıştır.



BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu bölümde araştırma sürecinde edinilen verilerin analizlerine dair bilgilere yer verilmiştir. Öncelikle 2808 ortaokul öğrencisinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerine dair veriler sunulmuştur. Öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri dört düzeyde, geometrik düşünme düzeyleri ise beş düzeyde değerlendirilmiştir. Hiçbir cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyine atanamayan öğrenciler sıfırıncı düzey olarak değerlendirilmiştir. Tez çalışmasında en fazla üçüncü düzey geometrik düşünme düzeyine sahip öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşme yapılmasına rağmen, Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği'nde dördüncü düzeye ait sorular da yer aldığı için ortaokul öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin belirlenmesinde dördüncü düzey de ele alınmıştır.

Ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerinin cinsiyet ve sınıf düzeyi açısından değerlendirilmesi Tablo 18'de gösterilmiştir.

Tablo 18

Ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerinin cinsiyet ve sınıf düzeyi açısından değerlendirilmesi

		Geometrik Düşünme Düzeyleri									
Cinsiyet	Cebirsel Düşünme Düzeyleri	0.düzye		1.düzye		2.düzye		3. düzye		4.düzye	
		N	%	N	%	n	%	N	%	N	%
Kız	0. düzey	77	5,9	80	6,1	2	0,2	0	0	0	0
	1. düzey	41	3,1	435	33,2	77	5,9	49	3,7	0	0
	2. düzey	7	0,5	158	12,1	47	3,6	35	2,7	2	0,2
	3. düzey	3	0,2	124	9,5	58	4,4	112	8,5	4	0,3
Erkek	0. düzey	178	11,9	143	9,6	7	0,5	0	0	0	0
	1. düzey	94	6,3	485	32,4	65	4,3	21	1,4	0	0
	2. düzey	12	0,8	138	9,2	62	4,1	35	2,3	2	0,1
	3. düzey	5	0,3	120	8,0	59	3,9	66	4,4	5	0,3
Sınıf düzeyi											
6. sınıf	0. düzey	103	9,6	98	9,1	1	0,1	0	0	0	0
	1. düzey	95	8,9	379	35,4	67	6,3	32	3,0	0	0

7. sınıf	2. düzey	11	1,0	118	11,0	27	2,5	29	2,7	0	0
	3. düzey	2	0,2	57	5,3	28	2,6	24	2,2	0	0
	0. düzey	100	10,4	79	8,2	5	0,5	0	0	0	0
	1. düzey	15	1,6	356	36,9	52	5,4	22	2,3	0	0
	2. düzey	6	0,6	98	10,1	51	5,3	13	1,3	1	0,1
8. sınıf	3. düzey	5	0,5	73	7,6	30	3,1	58	6,0	2	0,2
	0. düzey	52	6,7	46	6,0	3	0,4	0	0	0	0
	1. düzey	25	3,2	185	24,0	23	3,0	16	2,1	0	0
	2. düzey	2	0,3	80	10,4	31	4,0	28	3,6	3	0,4
	3. düzey	1	0,1	114	14,8	59	7,7	96	12,5	7	0,9
Toplam	0. düzey	255	9,1	223	7,9	9	0,3	0	0	0	0
	1. düzey	135	4,8	920	32,8	142	5,1	70	2,5	0	0
	2. düzey	19	0,7	296	10,5	109	3,9	70	2,5	4	0,1
	3. düzey	8	0,3	244	8,7	117	4,1	178	6,3	9	0,3

Bu tez çalışmasında 2808 öğrencinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri cinsiyet ve sınıf düzeyi açısından incelenmiştir. Cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri birinci düzey olan kız öğrencilerin (%33,2) çoğunlukta olduğu belirlenmiştir. Aynı şekilde cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri birinci düzey olan erkek öğrencilerin (%32,4) çoğunlukta olduğu belirlenmiştir. Sınıf düzeyleri açısından da benzer sonuçlar elde edilmiştir. Cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri birinci düzey olan 6. sınıf (% 35,4), 7. sınıf (%36,9) ve 8. sınıf (%24,0) öğrencilerinin çoğunlukta olduğu belirlenmiştir. Toplamda tez çalışmasına katılan öğrencilerin en çok birinci düzey cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyine (%32,8) sahip olduğu görülmüştür.

Bu bölümün devamında farklı cebirsel ve geometrik düşünme düzeylerine sahip öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelere dair edinilen verilere yer verilmiştir. Görüşme süreci 6., 7. ve 8. sınıf öğrencileri açısından ayrı bölümlerde incelenmiştir. Ayrıca her sınıf düzeyinde her bir görüşme oturumu ayrı ayrı incelenmiştir. Devamında her öğrencinin matematiksel düşünme süreci ve matematiksel dil becerilerinin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre değerlendirmesi ayrı olarak sunulmuştur. Öğrenci cevaplarından doğrudan alıntılar yapılmıştır.

4.1. 6. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerine Ait Bulgular

Bu bölümde görüşme yapılan 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerine ve matematiksel dil becerilerine ait bulgular sunulmuştur. Öğrencilerle yapılan görüşmelere ait bulgular her bir oturum için ayrı bölümlerde verilmiştir. Ayrıca görüşme yapılan öğrenciler hakkında bireysel değerlendirmeler ayrı olarak belirtilmiştir.

4.1.1. 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili 6. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular

Bu bölümde 1. oturumda 6. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere ait bulgular sunulmuştur. Görülme yapılan öğrenciler; Yusuf_(C1G1), Hale_(C1G2), Rana_(C1G3), Özgür_(C2G1), Zehra_(C2G2), Serkan_(C2G3), Meltem_(C3G1) ve Sarp_(C3G3) tır. Veriler analiz edilirken her bir soruda öğrencilerin düşünme süreçleri, matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine dair belirlenen süreçlere göre sınıflandırılmıştır. Ayrıca bazı sorular için öğrenci cevapları KİSS düzeyleri açısından değerlendirilmiştir. Bu anlamda öğrencilerin verdikleri cevaplar birden fazla boyut içerisinde yer almıştır. Bunun nedeni yapılan görüşmeler esnasında düşünme süreçleri açısından öğrencilerin birden fazla cevaba ulaşmalarından kaynaklanmıştır.

“1. Soru: 5’i anlatır mısın?”

sorusuna yönelik bulgular Tablo 19’ daki gibidir.

Tablo 19

“5’i anlatır mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi		X	X	X	X	X	X	X

Yusuf_(C1G1) 5' in tam sayı olduğunu söylemiştir. 5 rakamını yazarak göstermiş; ancak içerdiği işlemsel süreci belirtmediği için düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Hale_(C1G2), 4' ün ardışığı olarak 5' in rakamların beşincisi olduğunu söylemiştir. 1,2,3,4,5 şeklinde sayma işlemi sonucunda 5' in elde edildiğini belirterek nesnel

süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Rana_(C1G3) 5'i anlatırken bir sayı olduğunu belirttikten sonra 1' den 5' e kadar saydığımızda elde ettiğimiz sayı olduğunu söylemiştir. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Özgür_(C2G1) bir sayı olduğunu söylediği 5' in toplama ya da çıkarma işlemleri ile elde edilebileceğini söylemiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Zehra_(C2G2) önce 5' i bir ağaca benzetmiştir. 5 deyince aklına bir ağacın 5 dalının geldiğini söylemiştir. 15 gibi sayıların gösteriminde 5' in kullanıldığını, aynı zamanda 3 ile 2 ' yi toplayarak ya da 7' den 2' yi çıkartarak 5' in elde edilebileceğini belirtmiştir. Nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Serkan_(C2G3), 4 sayısından sonra geldiğini belirttiği 5' in sayma yoluyla elde edilebileceğini söylemiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Meltem_(C3G1) 5' in bir doğal sayı ve tek sayı olduğunu söylemiştir. 5' in sayma yoluyla elde edilebileceğini söyleyerek düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Sarp_(C3G3) 2 ile 3' ün toplamının sonucunda 5 sayısının oluşacağını söylemiştir. 5' in tek sayı ve asal sayı olduğunu belirterek nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.

Öğrencilerin verdikleri cevaplar KİSS açısından değerlendirildiğinde elde edilen bulgular Tablo 20' deki gibidir.

Tablo 20

KİSS açısından 6. sınıf öğrencilerinin “5'i anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar

KİSS düzeyleri	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
İşlem	1,2,3,4,5 diye sayarak elde etme		X	X			X	X	
	4+1, 3+2				X	X			X
İşlemsel süreç	4' den sonraki sayı, 6'dan önceki sayı vb.		X				X		
Kavramsal işlemsel sembolik süreç	İşlemsel süreç sonunda 5 elde edileceğini belirtme		X	X	X	X	X	X	X

Yusuf_(C1G1), düşünme sürecinde nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna ulaşamamış, dolayısıyla KİSS düzeylerini gösterememiştir. Hale_(C1G2) ve Serkan_(C2G3), 5' in sayma işlemi sonucunda elde edileceğini ve 4' den sonra gelen sayı olduğunu belirttikleri

için işlemsel süreci ve kavramı sembolik olarak düşünebilmişlerdir. Rana_(C1G3) ve Meltem_(C3G1) sayma işlemi sonucunda 5' i elde edebileceklerini belirtmişlerdir. Böylece işlem ve işlem sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak düşünmüşlerdir. Özgür_(C2G1), Zehra_(C2G2) ve Sarp_(C3G3) toplama ya da çıkarma gibi işlemler sonucunda 5' in oluşabileceğini belirtmişler, işlem ve işlem sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak ifade etmişlerdir.

Öğrencilere yöneltilen

“2. Soru: $4+3$ ’ü anlatır mısın?”

sorusuna yönelik elde edilen bulgular Tablo 21’ deki gibidir.

Tablo 21

“ $4+3$ ’ü anlatır mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadeedeki verilerin özelliklerine odaklanma								
	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X

Yusuf_(C1G1) ve Hale_(C1G2) $4+3$ gösteriminin toplama işlemini gösterdiğini ve sonucunun 7 olduğunu belirtmişlerdir. Düşünme süreçleri nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Rana_(C1G3) iki sayının toplamının gösterildiğini belirttiği bu ifade için toplama işlemi sonucunda 7 sayısının oluştuğunu söylemiştir. Bu açıdan düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Özgür_(C2G1) 4 ile 3’ ün toplamı sonucunda 7 elde edileceğini söylemiştir. Aynı zamanda bu ifadeyi günlük yaşamdan örnek vererek açıklayan Özgür_(C2G1), nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Zehra_(C2G2) da benzer şekilde günlük yaşamdan örnek vererek 4 ile 3’ ün toplamının 7 sayısını oluşturacağını söylemiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Serkan_(C2G3) toplama işleminin anlatıldığı bu ifadede 4’ ün

üzerine 3 eklendiğinde 7 sayısının oluştuğunu belirtmiş, günlük yaşamdan örnek vermiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Meltem_(C3G1) bu ifadenin 4 sayısının üzerine 3 eklemek anlamına geldiğini söylemiştir. Sonucunda 7 oluşacağını belirtmiş, nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Sarp_(C3G3) 4 ile 3' ün toplamı sonucunda yeni bir sayı oluştuğunu belirtmiştir. Bu sayının 7 olduğunu, 7' nin de tek sayı olduğunu söylemiştir. Böylece nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.

Öğrencilerin verdikleri cevaplar KİSS açısından değerlendirildiğinde elde edilen bulgular Tablo 22' deki gibidir.

Tablo 22

KİSS açısından 6. sınıf öğrencilerinin “4+3’ü anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar

KİSS düzeyleri	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
İşlem	4 den sonra 5,6,7 diye sayma								
İşlemsel süreç	4' ün üzerine 3 ekleme						X	X	
	4 ile 3 sayılarının toplamı	X	X	X	X	X	X		X
Kavramsal işlemsel sembolik süreç	Toplama işlemi sonucunda 7 oluşturduğunu belirtme	X	X	X	X	X	X	X	X

Görüşmeler neticesinde Yusuf_(C1G1), Hale_(C1G2), Rana_(C1G3), Özgür_(C2G1), Zehra_(C2G2) ve Sarp_(C3G3) 4+3 ifadesinin 4 ile 3 sayılarının toplamını gösterdiğini ve sonucunda 7 oluştuğunu söyleyerek işlemsel süreci ve süreç sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak düşünmüşlerdir. Serkan_(C2G3) da ifadede 4 ile 3' ün toplamı ve 4' ün üzerine 3 ekleme işlemsel süreçlerinin anlatıldığını belirterek işlem ve kavramı sembolik olarak düşünmüştür. Meltem_(C3G1) ise 4' ün üzerine 3 eklenmesi işlemsel sürecinin anlatıldığını belirttiği ifadenin 7 sayısını gösterdiğini söylemiştir. Böylece işlemsel süreci ve süreç sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak düşünmüştür.

Yapılan görüşmelerde 6. sınıf öğrencilerine

“3. Soru: $28 + \square = 30 + \triangle$

dörtgen ve üçgen kutunun yerine gelebilecek sayılara üçer örnek verir misin?

Dörtgen ve üçgen yerine gelebilecek sayılar arasında bir ilişki var mıdır?

Bu ilişkiyi cebirsel olarak açıklar mısın?"

şeklinde sorular yöneltilmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplar doğrultusunda elde edilen bulgular Tablo 23' deki gibidir.

Tablo 23

$28 + \square = 30 + \triangle$ sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma		X	X	X			X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması							X	
	Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması							X	

Yusuf_(C1G1) bu ifadede eşitliğin bozulmaması için dörtgen yerine +2, üçgen yerine de -2 gelmesi gerektiğini söylemiştir. Yerlerine başka sayıların gelemeyeceğini ifade etmiş, düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Hale_(C1G2) eşitliğin bozulmaması için dörtgen ve üçgen yerine gelmesi gereken sayıları soruda verilen sayılar üzerinden düşünmüştür. Eğer dörtgen yerine 30 sayısı, üçgen yerine de 28 sayısı gelirse eşitliğin bozulmayacağını belirtmiştir. Farklı sayı örnekleri düşünmesi istendiğinde doğru örnekler vermiş; fakat, hepsini işlemsel süreç yoluyla eşitliği sağlayarak bulmuştur. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Rana_(C1G3) ilk olarak üçgen ve dörtgen yerine gelmesi gereken sayıların aynı olup olamayacağını sorgulamıştır. Ardından ifadede bilinmeyenler yerine gelebilecek sayılara örnek vermiş ve aynı olmayacaklarına karar vermiştir. Ancak, üçgen ve dörtgen yerine gelmesi gereken sayılar arasındaki ilişkiyi açıklayamamış ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Özgür_(C2G1) önce ifadenin bu haliyle eşit olmadığını söylemiştir. Eşit

olması için dörtgen ve üçgen yerine gelebilecek sayılara doğru örnekler vermiştir. Dörtgen ve üçgen yerine gelmesi gereken sayılar arasındaki ilişkiyi aralarında 2 basamak, 2 sayı var şeklinde açıklamıştır; ancak, cebirsel olarak açıklayamamıştır. Dörtgen yerine a gelirse, üçgen yerine de c gelmesi gerektiğini söylemiştir. Bunun nedeni de a 'nın 2 fazlasının c olacağını düşünmesinden kaynaklanmıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Zehra_(C2G2) dörtgen ve üçgen yerine gelmesi gereken sayılara doğru örnekler vermiştir. Bu sayılar arasındaki ilişki sorulduğunda, işlemsel süreci göstermiştir. 28 ile topladığı sayılar sonucu elde ettiği sayıları 30 ile topladığı sayılar sonucu da elde etmiştir. Aralarındaki ilişkiyi cebirsel olarak açıklayamamıştır. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Serkan_(C2G3) dörtgen ve üçgen yerine gelmesi gereken sayılara doğru örnekler vermiş ama aralarındaki ilişkiyi açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Meltem_(C3G1) dörtgen ve üçgen yerine gelmesi gereken sayıların aynı olup olmayacağını düşünmüş, farklı şekiller oldukları için farklı sayılar olması gerektiğine karar vermiştir. Doğru sayı örnekleri ile eşitliği gösteren Meltem_(C3G1), aralarındaki ilişkiyi üçgen yerine gelmesi gereken sayıların dörtgen yerine gelmesi gereken sayıların 2 fazlası olduğunu belirterek açıklamıştır. Aralarındaki ilişkiyi cebirsel olarak açıklamaya çalışırken dörtgen yerine x gelirse, üçgen yerine $2x$ geleceğini söylemiştir. Ardından yaptığı hatayı fark ederek üçgen yerine gelmesi gereken sayının dörtgen yerine gelmesi gereken sayının 2 fazlası olması gerektiği için $x+2$ olacağını belirtmiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Sarp_(C3G3) da dörtgen ve üçgen yerine aynı sayılar gelemeyeceğini belirterek, eşitliğin sağlanması için doğru sayı örnekleri vermiştir. Aralarındaki ilişkiyi, üçgen yerine gelmesi gereken sayının dörtgen yerine gelecek sayının 2 fazlası olacağı şeklinde açıklamıştır. Cebirsel olarak açıklarken aralarında 2 fark olacağı için dörtgen yerine s gelirse üçgen yerine u gelmesi gerektiği şeklinde belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Öğrencilere yöneltilen bir diğer soru olan

“4. Soru: $a+3b$ ifadesini anlatır mısın?”

sorusuna yönelik elde edilen bulgular Tablo 24'de gösterilmiştir.

Tablo 24

“ $a+3b$ ifadesini anlatır mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma	X	X	X	X	X		X	X
	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X	X	X	X	X		X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi		X	X	X	X	X		X

Yusuf_(C1G1) $a+3b$ ifadesindeki a ve b harflerinin sayılar yerine kullanıldığını belirtmiştir. Bir sayının 3 fazlası gibi bir ifadeye karşılık geldiğini söylemiş; ancak, ifadeyi açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Hale_(C1G2) soruda yer alan gösterimin cebirsel ifade olduğunu belirtmiştir. Burada bir bilinmeyen sayıyla başka bir bilinmeyen sayının üç katının toplandığını ifade etmiştir. a ve b' nin farklı bilinmeyenler olduğunu, aynı olsalardı aynı harflerin kullanılması gerektiğini açıklamıştır. Aynı zamanda günlük yaşamdan örnek vermiştir. Dolayısıyla düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Rana_(C1G3) $a+3b'$ nin cebirsel ifadelerle bir örnek olduğunu söylemiştir. a ve b' nin bilinmeyenler olduğunu söyleyerek $3b'$ de 3 ile b' nin çarpım durumunda olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Özgür_(C2G1) a ve b' nin bilinmeyenler olduğunu ve $3b'$ de ise b' nin 3 katının alındığını belirtmiştir. $a+3b$ ifadesinde a ile $3b$ farklı bilinmeyenler olduğu için toplanamayacağını söylemiştir. Günlük yaşamdan bir örnekle de ifadeyi açıklayan Özgür_(C2G1)'ün düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Zehra_(C2G2) önce ifadenin cebirsel ifade olduğunu söylemiştir. Bir sayının üç katının bir miktar fazlasının anlatıldığını söylediği ifadede a ile $3b'$ nin farklı bilinmeyenler oldukları için toplanamayacaklarını söylemiştir. Günlük yaşamdan da örnek vererek nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Serkan_(C2G3) ifadenin cebirsel ifade olduğunu söylemiştir. Ancak, ifadede anlatılmak isteneni açıklamakta zorlanmıştır. Cebirsel ifadede yer alan a ve b harflerinin farklı değişkenleri gösterdiğini söylemiştir. Ardından bir sayının 3 katıyla başka bir sayının toplandığını belirterek nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Meltem_(C3G1) a ve b' nin değişkenler olduğunu belirttiği $a+3b$ ifadesi için günlük yaşamdan

bir örnek vermek istemiş; ancak, doğru bir örnek verememiştir. Sözel olarak doğru bir şekilde açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Sarp_(C3G3) a ve b' nin değişken olduğunu söylemiştir. b' nin 3 katının alındığını ve a ile toplandığını ifade etmiştir. a ve b' nin farklı değişkenler olduğunu söyleyen Sarp_(C3G3), bu ifadenin sonucunun yine kendisi olacağını belirtmiştir. Nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Öğrencilerin verdikleri cevaplar KİSS açısından değerlendirildiğinde elde edilen bulgular Tablo 25' deki gibidir.

Tablo 25

KİSS açısından 6. sınıf öğrencilerinin “ $a+3b$ 'yi anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar

KİSS düzeyleri	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
İşlem	Elma ile 3 tane muzun toplamı, bir içecek ile 3 tane çikolatanın toplamı vb.		X		X	X			X
İşlemsel süreç	a ile 3 tane b nin toplamı		X	X		X			X
Kavramsal işlemsel sembolik süreç	Bir bilinmeyen sayı ile başka bir bilinmeyen sayının üç katının toplamı		X		X		X		X
	Cebirsel ifade		X	X		X	X		

Yusuf_(C1G1) ve Meltem_(C3G1) nesnel süreçsel sembolik boyutunda düşünme süreci geliştiremedikleri için düşünme süreçleri KİSS düzeyleri açısından değerlendirilememiştir. Hale_(C1G2) $a+3b$ ifadesine günlük yaşamdan örnek vermiş, ifadenin işlemsel sürecini açıklamıştır. Cebirsel ifade olduğunu belirttiği ifadenin bir bilinmeyen sayı ile başka bir bilinmeyen sayının üç katının toplamı olduğunu açıklamıştır. İşlem, işlemsel süreç ve süreç sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak düşünmüştür. Rana_(C1G3) $a+3b$ ifadesinde işlemsel süreci açıklamış, sonucunda cebirsel bir ifadenin oluştuğunu belirtmiştir. İşlem ve kavramı sembolik olarak düşünmüştür. Özgür_(C2G1), günlük yaşamdan örnek vererek açıkladığı ifadede işlem ve işlem sonucu oluşan kavramı sembolik olarak düşünebilmiştir. Zehra_(C2G2) günlük yaşamdan örnek vererek a ile 3 tane b' nin toplandığını belirttiği ifadenin cebirsel bir

ifade olduğunu söylemiştir. İşlem, işlemsel süreç ve süreç sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak düşünmüştür. Serkan_(C2G3), ifadede bir sayının üç katı ile başka bir sayının toplamının anlatıldığını ve ifadenin cebirsel ifade olduğunu belirterek işlem ve kavramı sembolik düşünme becerisini göstermiştir. Sarp_(C3G3) günlük yaşamdan örnek vererek açıkladığı a ile 3 tane b' nin toplamının iki bilinmeyen sayının toplamını gösterdiğini ifade edebilmiştir. İşlem, işlemsel süreç ve süreç sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak düşünebilmiştir.

Tez çalışmasında öğrencilere

“5. Soru: ‘Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

soruları yöneltilmiş ve bulgular Tablo 26' da sunulmuştur.

Tablo 26

“Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X	X			X	X	
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X		X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadeler, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması								
Aksiomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi								

Yusuf_(C1G1) önce ardışık sayılar kavramına odaklanmıştır. Ardışık iki sayının birbirinin aynısı sayılar olacağına karar vermiştir. 2' nin ardışığının 2 olacağını belirtmiş, toplamlarının sonucu olan 4 sayısının tek sayı olduğunu söylemiştir. Ancak, 12' nin

ardışığının 12 olduğunu ve toplamı olan 24 sayısının da çift sayı olduğunu söyleyerek sorudaki ifadenin yanlış olabileceğine karar vermiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Hale_(C1G2) ardışık sayılar kavramını peş peşe gelen sayılar olarak açıklamıştır. 1' in ardışığı 2 sayısı olduğu için toplamlarının 3 sayısı olduğunu, bu sayının da tek bir sayı olduğunu söylemiştir. Fakat soruda yer alan ifadenin her zaman doğru olmayabileceğini ifade etmiştir. Çünkü görüşme sürecinde bir basamaklı sayıları tek sayı, iki basamaklı sayıları çift sayı olarak nitelendirdiği görülmüştür. Dolayısıyla 10 ile 11' in toplamının çift sayı olacağını belirtmiştir. Cebirsel olarak açıklaması istendiğinde $a=1$ ve $b=2$ olacak şekilde harfleri sırasıyla düşündüğünde toplamlarının 3 sayısına karşılık gelen c sayısını göstereceğini söylemiştir. Bu sayının da tek sayı olduğunu söyleyen Hale_(C1G2)' nin düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Rana_(C1G3) ardışık sayılar kavramını açıklayamadığı için soruda yer alan ifadeyi de açıklayamamıştır. Ardışık iki sayıyı düşünebilseydi toplamlarını da gösterebileceğini ifaden Rana_(C1G3)' nin düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Özgür_(C2G1) 8' in ardışığının 8 olacağını söylemiş, toplamı olan 16 sayısının çift sayı olacağını göstermiştir. Dolayısıyla sorudaki ifadenin yanlış olduğunu belirterek kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Zehra_(C2G2) da benzer şekilde önce ardışık sayılara örnek vermek istemiştir. 2' nin ardışığının 2, 5' in ardışığının 5 olacağını söyleyerek toplamlarının hep çift sayı olacağını belirtmiştir. Cebirsel olarak düşündüğünde x' in ardışığının x olacağını, toplamlarının da $2x$ olacağını söylemiştir. $2x$ ifadesinde de x' in 2 ile çarpımının çift sayı göstereceğini belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Serkan_(C2G3) önce ardışık sayılar kavramını peş peşe gelen gelen sayılar olarak ifade etmiştir. Ardışık sayılara doğru örnekler vermiş ve toplamlarının tek sayı oluşturacağını göstermiştir. Ancak, ifadeyi sembolik olarak gösterememiştir. a' nin ardışığının b olacağını söylemiş, bu durumu da alfabede a' dan sonra b gelmesi olarak açıklamıştır. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Meltem_(C3G1) ardışık sayılar kavramına odaklanmıştır. Ardışık sayıların birbirini takip eden ya da 2,4,6... gibi sırasıyla devam eden sayılar olacağını söyleyerek ardışık iki sayının toplamını göstermiştir. 3' ün ardışığının 4 olduğunu, toplamlarının da 7 olacağını söylemiştir. Bu sayının da tek sayı olduğunu belirtmiştir. Başka sayı örnekleri de vererek bu ifadenin hep doğru olacağını açıklayan Meltem_(C3G1), cebirsel olarak düşünürken hata yapmıştır. f' nin ardışığının $2f$, toplamlarının da $3f$ olacağını söylemiş ve bu ifadenin de tek sayı göstereceğini belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Sarp_(C3G3) ardışık sayılara doğru örnekler vererek toplamlarının tek sayı olacağını göstermiştir. Cebirsel olarak düşündüğünde a' nin ardışığının

b olacağını söylemiştir. Bunun nedeni de alfabede a' dan sonra b harfinin gelmesi olarak açıklamıştır. Toplamlarının tek ya da çift sayı oluşturup oluşturmadığına dair bir yorum yapılamayacağını söylemiş, buna karar verebilmek için a ve b' den birinin tek sayı birinin de çift sayı göstermesi gerektiğini belirtmiştir. Bunun da bilinmeyeceğini söylemiş, düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Tez çalışmasında 6. sınıf öğrencilerine,

“6. Soru: ‘İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

soruları yöneltmiş ve bulgular Tablo 27' de gösterilmiştir.

Tablo 27

““İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X							
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması								
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi								

Yusuf_(C1G1) tek sayı ve çift sayı kavramlarını doğru ifade edememiştir. Bir basamaklı sayıları tek sayı, iki basamaklı sayıları da çift sayı olarak düşünmüştür. Dolayısıyla iki tek sayının çarpımını örneklerle göstermek istemiş; ancak, hata yapmıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Hale_(C1G2) soruda yer alan ifadenin bazen doğru bazen yanlış olabileceğini belirtmiştir. 7 ile 7' nin çarpımının sonucu olan 49 sayısını

çift sayı olarak, 1 ile 3 sayılarının çarpımı olan 3 sayısını tek sayı olarak ifade etmiştir. Tek sayı ve çift sayı kavramlarına dair yanlışlığı bulunan Hale_(C1G2) 'nin düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Rana_(C1G3) önce ifadenin yanlış olduğunu söylemiştir. Ardından düşündüğünde doğru olduğunu söyleyerek sayılarla örnek vermiştir. Ardından birçok sayı örneği ile ifadenin her zaman doğru olduğunu söylemiş, cebirsel olarak da açıklayabileceğini belirtmiştir. Ancak, tek sayıyı cebirsel olarak ifade edememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Özgür_(C2G1) ifadeyi sayılarla örnek vererek açıklamak istemiş; fakat, hata yapmıştır. 3'ün tek sayı olduğunu belirterek 3 ile 3'ün çarpımının 6 olacağını, bu sayının da çift sayı olduğunu söylemiştir. Dolayısıyla bu ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Zehra_(C2G2) iki tek sayının çarpımına doğru sayı örnekleri vererek, sonuçlarının hep tek sayı olacağını göstermiştir. Cebirsel olarak açıklaması istendiğinde tek sayılardan birini x , diğerini y ile gösterdiğinde çarpımlarının $x.y$ olacağını söylemiştir. Bu ifadenin de tek sayıyı göstereceğini belirtmiştir. Ancak, x, y ve $x.y$ 'nin neden tek sayıyı temsil ettiğini açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Serkan_(C2G3) iki tek sayının çarpımının tek sayı oluşturduğunu doğru sayı örnekleri vererek açıklamıştır. Ancak, cebirsel olarak gösterememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Meltem_(C3G1) de tek sayılara örnek vererek çarpımlarının tek sayı oluşturduğunu göstermiştir. Cebirsel olarak düşünürken tek sayıyı a olarak düşünmüş; ancak, a 'nın neden tek sayıyı temsil ettiğini açıklayamamıştır. Tek sayı göstermesi için $a+3$ 'ü düşünmek istemiş ama bu ifadenin de tek sayıyı gösterip göstermeyeceğinin bilinmeyeceğini söylemiştir. İfadenin doğruluğunu cebirsel olarak açıklayamamış, düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Sarp_(C3G3) iki tek sayının çarpımına doğru sayı örnekleri vermiş, işlem sonucunun da tek sayı olacağını göstermiştir. Ancak cebirsel olarak tek sayıyı göstermeyeceğini belirtmiş, bu yüzden bir açıklama yapamamıştır. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

6. sınıf öğrencilerine

“7. Soru: ‘Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı çift sayıdır.’ ifadesini açıklar mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

soruları yöneltilmiş ve bulgular Tablo 28' de gösterilmiştir.

Tablo 28

“Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı çift sayıdır.” ifadesini açıklar mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma								
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadeler, deklemlere, eşitsizliklere ulaşılması								
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi								

Yusuf_(C1G1) bu soruda da tek sayı ve çift sayı kavramlarına dair yanlışlığını göstermiştir. Bir basamaklı sayıyla iki basamaklı bir sayıyı toplayarak toplamalarının sonucunun iki basamaklı bir sayı oluşturduğunu göstermiş, bu sayının da çift sayı olduğunu söylemiştir. Sorudaki ifadenin doğru olduğunu belirtmiş, kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Hale_(C1G2) soruda yer alan ifadeyi sayılarla deneyerek göstermek istemiş; ancak, tek sayı ve çift sayı kavramlarına dair yanlışlığına sahip olduğu için hatalı açıklamalar yapmıştır. Tek ve çift sayıların toplamının çift sayı oluşturabileceğini belirtmiş, düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Rana_(C1G3) tek ve çift sayılara örnek vererek toplamalarının tek sayı oluşturacağını söylemiş, bu yüzden ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Cebirsel olarak ifadenin yanlış olduğunu göstermesi istendiğinde ise “Gösteremem” şeklinde cevap vermiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Özgür_(C2G1) tek sayı ve çift sayı örnekleri vererek toplamalarının tek sayı oluşturacağını göstermiştir. Ancak ifadenin yanlış olduğunu cebirsel olarak açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Zehra_(C2G2) da tek ve çift sayıların toplamının çift sayı değil de tek sayı oluşturacağını doğru sayı örnekleriyle göstermiştir. Cebirsel olarak harflerin tek sayı ya da

çift sayı olup olmadıklarını gösteremeyeceğini; ancak, sözel ifade ile tek sayı ya da çift sayı olduğu belirtildiğinde söyleyebileceğini belirtmiştir. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Serkan_(C2G3) tek ve çift sayılara örnekler vererek toplamalarının tek sayı oluşturduğunu göstermiştir. İfadenin yanlış olduğunu sayı örnekleriyle açıklamış; ancak, cebirsel olarak açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Meltem_(C3G1) doğru sayı örnekleri ile tek ve çift sayıların toplamının tek sayı oluşturacağını göstermiştir. Cebirsel olarak açıklaması istendiğinde; 2 çift sayı olduğu için 2b ifadesinin çift sayıyı temsil edeceğini, 3 tek sayı olduğu için de 3b' nin de tek sayıyı temsil edeceğini söylemiştir. Toplamalarının 5b olacağını, bu gösterimin de tek sayıyı temsil edeceğini belirtmiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Sarp_(C3G3) da diğer öğrenciler gibi önce doğru sayı örnekleri ile sorudaki ifadenin yanlış olduğunu göstermiştir. Ancak, harflerin tek sayıyı ya da çift sayıyı gösterip göstermediğini bilemeyeceği için bu ifadenin yanlış olduğunu açıklayamayacağını belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Tez çalışmasında 6. sınıf öğrencilerine,

“8. Soru: ‘ x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

soruları yöneltmiş ve bulgular Tablo 29' da gösterilmiştir.

Tablo 29

“ “ x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X	X					
	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi		X		X				
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel	İşlemleri								

süreçsel	genelleştirme
sembolik	süreci sonucunda
dünya	cebirsel ifadelerle, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması
Aksiyomatik	İspat sürecinin
formal	ifade edilmesi
dünya	

Yusuf_(C1G1) x yerine gelmesi gereken çift sayıya 44 sayısını örnek vermiştir. Daha önceki sorularda da çift sayıyı iki basamaklı sayı olarak düşünmüş, 44 çift sayı olmasına rağmen bu soru için de aynı yanılgıyı gösterdiği belirlenmiştir. Ardından 44 ile 5 sayılarını toplamış, elde ettiği 49 sayısını da 2 ile çarpmıştır. İşlem önceliğine dikkat etmeyen Yusuf_(C1G1) sonuçta elde ettiği 98 sayısının da çift sayı olduğunu söylemiştir. Sorudaki ifadenin yanlış olduğunu belirterek, kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Hale_(C1G2) soruda yer alan ifadede bulunan $2x$ teriminde 2 ile x ' in çarpım durumunda olduğunu ya da bir sayıyı temsil ettiğini söylemiştir. İki durumu farklı değerlendirmek gerektiğini belirterek önce x yerine çift bir sayı olan 10 sayısını düşünmüştür. $2x$ ifadesi çarpım durumundaysa ifadeden elde ettiği 25 sayısının çift sayı olduğunu belirtmiştir. Bir sayıyı gösterdiğini düşündüğünde ise $2x$ ifadesinin 210 sayısını temsil ettiğini söylemiş, elde ettiği 215 sayısının da tek sayı ya da çift sayı olmadığını belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Rana_(C1G3) ifadede x çift sayı dediği için x yerine çift sayı gelmesi gerektiğini söyleyerek farklı sayılar ile ifadenin doğru olduğunu göstermiştir. Ancak cebirsel olarak ifadeyi açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Özgür_(C2G1) sorudaki ifadede bir sayının 2 ile çarpılıp 5 ile toplandığının anlatıldığını söylemiştir. Ardından çift sayı örneği düşünerek ifadenin sonuçta tek sayıyı belirttiğini göstermiştir. 5 sayısı tek sayı olduğu için $2x$ ile toplamının hep tek sayıyı göstereceğini belirtmiş; ancak, $2x'$ in her zaman çift sayıyı göstereceğini açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Zehra_(C2G2) x yerine gelebilecek çift sayılar için örnekler vermiş ve ifadenin doğru olduğunu işlemsel süreç sonucunda göstermiştir. Ancak, ifadenin doğru olduğunu cebirsel olarak açıklayamamıştır. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Serkan_(C2G3) x' i çift sayı olarak düşünmüş ama $2x+5$ ifadesinde gösterirken hata yapmıştır. x' i 4 olarak düşündüğünde $2x'$ in 24 iki basamaklı oluşturacağını, x' i 6 olarak düşündüğünde $2x'$ in 26 iki basamaklı sayısını oluşturacağını belirtmiştir. Verdiği örneklerle $2x+5$ in tek sayıyı göstereceğini belirtse de hatalı düşünmüştür. İlerleyen süreçte yaptığı hatayı farketmiş ve $2x$ ifadesinde 2 ile x' in çarpım durumunda olduğunu

söylemiştir. Ancak, soruda yer alan ifadenin doğru olduğunu cebirsel olarak açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Meltem_(C3G1) de benzer şekilde x için çift sayı örnekleri vererek, ifadenin tek sayıyı gösterdiğini belirtmiştir. Cebirsel olarak açıklanması istendiğinde x ' in çift sayı olabileceği bir cebirsel ifade düşünmeye çalışmış; ancak, gösterememiştir. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Sarp_(C3G3) x için çift sayı örnekleri düşünerek, $2x+5$ ' in tek sayıyı göstereceğini işlemsel süreç sonucunda göstermiştir. x ' in çift sayı olacağı bir cebirsel ifade düşünürken " $x+2=4$ olduğunda x kesin çifttir." şeklinde bir açıklamada bulunmuştur. Ancak, x ' in bu işlem sonucunda her zaman 2 sayısını göstereceğini söylemiş ve 2'den başka sayılar da olabileceğini belirtmiştir. Sorudaki ifadenin doğru olduğunu cebirsel olarak açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

6. sınıf öğrencilerine,

"9. Soru: 'Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle' ifadesi ile 'Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp' ifadelerini karşılaştırır mısın?

Cebirsel olarak karşılaştırır mısın?"

soruları yöneltmiş ve bulgular Tablo 30' da gösterilmiştir.

Tablo 30

"'Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle' ifadesi ile 'Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp' ifadelerini karşılaştırır mısın?' sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X	X	X				
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması		X		X	X	X	X	

	Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi	X

Yusuf_(C1G1) soruda yer alan iki sözel ifade de toplama ve çarpma işlemleri yer aldığı için iki ifadenin aynı olduğunu söylemiştir. Ardından bir sayı düşünerek iki ifadeyi işlemsel süreç sonucunda karşılaştırmış ve aynı olduklarını göstermiştir. Sonuçlarının aynı, cebirsel gösterimlerinin ise farklı olduğunu söyleyen Yusuf_(C1G1) kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Hale_(C1G2) ifadelerin birinde 2 ile toplama, diğerinde 8 ile toplama işlemi yer aldığı için iki ifadenin farklı ifadeler olduğunu söylemiştir. Sayı değeri düşünerek iki ifadeyi düşündüğünde işlemsel süreç sonucunda iki ifadenin eşit olduğunu göstermiştir. İki ifade için de uygun cebirsel ifade yazabilmiştir. Ancak, cebirsel olarak eşitliklerini göstermek için bilinmeyen değerin bilinmesi gerektiğini söylemiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Rana_(C1G3) önce ifadelerde yer alan sözel bilgilerin farklı olduğunu söyleyerek bu iki ifadenin farklı olduğunu belirtmiştir. Ardından sözel ifadelere uygun cebirsel ifadeler yazmak istemiş; fakat, başarılı olamamıştır. İfadeleri sayılarla denediğinde ise ikinci ifadede bir sayının 2 ile toplamının parantez içinde yer alması gerektiğini düşünmediği için iki ifadede farklı sonuçlar elde etmiştir. Bu anlamda bu ifadelerin farklı olduklarını söyleyerek kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Özgür_(C2G1) sözel ifadelerde yer alan önce 4 ile çarpılıp sonra 8 eklenmesi ile önce 2 eklenip sonra 4 ile çarpılması ifadelerinin işlemsel süreçlerinin birbirinden farklı olduğunu söylemiştir. İkinci ifadede parantezli işlemin olmasının bu farklılığı oluşturduğunu belirtmiştir. Ancak, bir sayı örneği ile iki ifadenin işlemsel sürecini sayısal olarak gösterdiğinde değerlerinin birbirine eşit olduğunu söylemiştir. Her iki sözel ifade için cebirsel ifadeleri doğru bir şekilde gösteren Özgür_(C2G1), iki ifadenin eşitliğini cebirsel olarak açıklayamamıştır. Dolayısıyla düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Zehra_(C2G2) soruda yer alan iki sözel ifadenin birbirine eşit olduğunu sayısal olarak göstermiştir. Ardından her iki ifadeye uygun cebirsel ifadeleri yazmıştır. Bu eşitliği cebirsel olarak açıklarken ikinci ifadede yer alan parantezli gösterimde çarpmanın dağılma özelliğini kullanmış ve ilk ifadeye eşit olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla iki ifadenin eşitliğini cebirsel olarak da açıklayabilmiş, düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Serkan_(C2G3), ifadelerin aynı olduğunu bir sayı değeri düşünerek işlemsel süreç sonucunda göstermiştir. Her iki ifade için

uygun cebirsel ifadeyi göstermiş; fakat, aralarındaki ilişkiyi cebirsel olarak gösterememiştir. Nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Meltem_(C3G1) birden fazla sayı örneği ile iki ifadenin içerdiği işlemsel süreci sayısal olarak göstermiş ve iki ifadenin birbirine eşit olduğunu belirtmiştir. Her iki ifade için de uygun cebirsel ifadeyi yazabilen Meltem_(C3G1), birbirlerine eşit olduğunu cebirsel olarak açıklayamamıştır. Dolayısıyla düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Sarp_(C3G3) da ifadelerin eşitliğini önce sayısal olarak göstermiştir. Bir sayı örneği ile işlemsel süreçlerinin sonucunda iki ifadeden eşit sonuçlar elde edildiğini belirtmiştir. İki ifade için doğru cebirsel ifadeler yazmıştır. Her iki ifadede değişkenin aynı olduğunu ve her ikisinde de 4 ile çarpıldığını belirtmiş; fakat, eşitliklerini cebirsel olarak açıklayamamıştır. Nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Tez çalışmasında 6. sınıf öğrencilerine yöneltilen diğer soru,

“10. Soru: ‘ $x=3$ için $4x+8$ ifadesi neye eşit olur?’

‘ $x=3$ için $8+4x$ ifadesi neye eşit olur?’

‘ $x=3$ için $2(2x+4)$ ifadesi neye eşit olur?’

Bu ifadeleri birbirleriyle karşılaştırır mısın?

Aralarındaki ilişkiyi cebirsel olarak açıklar mısın?”

şeklinde. Bu soruya ait bulgular Tablo 31'deki gibidir.

Tablo 31

““ $x=3$ için $4x+8$ ifadesi neye eşit olur, $x=3$ için $8+4x$ ifadesi neye eşit olur, $x=3$ için $2(2x+4)$ ifadesi neye eşit olur?” ifadelerini karşılaştırır mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X		X	X				
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi		X	X		X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması					X		X	

Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi	X	X

Yusuf_(C1G1) ilk iki ifadenin birbirine eşit, üçüncü ifadenin ise farklı olduğunu söylemiştir. Farklı olmasının nedeni olarak parantezli işlem içermesini belirtmiştir. Yusuf_(C1G1) ifadeler için sayısal olarak işlemsel süreci gösterememiş, cebirsel olarak da bir açıklama yapamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Hale_(C1G2), x' i 3 olarak düşündüğünde üç ifadenin değerinin birbirine eşit olduğunu söylemiştir. x' in değeri bilinmeseydi üç ifadenin karşılaştırılmayacağını belirtmiş, düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Rana_(C3G3) üç ifadede de x' i 3 olarak düşünerek değerlerinin bulunabileceğini belirtmiştir. Üç ifade için de birbirine eşit sonuçlar elde eden Rana_(C1G3), ilk iki ifadenin cebirsel olarak birbirinin aynısı olduğunu söylemiştir. Ancak, üçüncü ifadenin farklı olduğunu ifade etmiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Özgür_(C2G1) cebirsel gösterimlere odaklanarak, birinci ifade ve üçüncü ifadenin aynı, ikinci ifadenin farklı olduğunu söylemiştir. Birinci ifadede önce çarpma sonra toplama işlemi yapıldığını, üçüncü ifade de önce parantez içinde yer alan çarpma işlemi sonra toplama işlemi yapıldığını belirtmiştir. Bu yüzden bu iki ifadenin birbirine eşit olduğunu söylemiştir. İkinci ifadede ise önce toplama sonra çarpma işlemi yapıldığını belirterek, bu ifadenin diğer ifadelerden farklı olduğunu söylemiştir. Bu soru için sözlü açıklama yapmayı tercih eden Özgür_(C2G1) kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Zehra_(C2G2) üç ifadenin birbirine eşit olduğunu x' i 3 olarak düşünerek göstermiştir. İşlemsel süreç sonucunda üç ifadenin değerlerinin birbirine eşit olduğunu göstermiş, cebirsel olarak da eşitliklerini açıklamıştır. İlk ifadede toplama işleminin değişme özelliğinin yer aldığını, üçüncü ifadede ise çarpma işleminin dağılma özelliğinden yararlanıldığında ilk iki ifadeye eşit bir cebirsel ifadenin oluştuğunu göstermiştir. Aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Serkan_(C2G3) üç ifadenin birbirine eşit olduğunu x' i 3 olarak düşünerek işlemsel süreç sonucunda göstermiştir. İlk iki ifadenin cebirsel olarak birbirine eşit olduğunu sadece yerleri farklı diyerek açıklamış, üçüncü ifadenin eşitliğini açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Meltem_(C3G1) x' i 3 olarak düşündüğünde sayısal olarak üç ifadenin değerinin birbirine eşit olduğunu göstermiştir. Önce ilk iki ifadenin toplama işleminin değişme özelliğinden aynı ifadeler olduğunu, üçüncü ifadenin ise gösteriminin farklı olduğunu söylemiştir. Ardından çarpma işleminin parantez içine dağılma özelliğini göstererek üçüncü ifadenin de diğer ifadelere eşit olduğunu belirtmiştir. Düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Sarp_(C3G3) sayısal olarak üç

ifadede yer alan cebirsel ifadelerin değerlerinin eşit olduğunu göstermiştir. İlk iki ifadenin aynı ifadeler olduğunu, üçüncü ifadenin ise gösteriminin ve sayılarının farklı olduğunu söylemiştir. Cebirsel olarak üç ifadenin eşitliğini açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Tez çalışmasında 6. sınıf öğrencilerine yöneltilen bir diğer soru,

“11 . Soru:   

Bu örüntünün 6. adımında kaç bilye vardır?

Kaçıncı adımda 25 bilye vardır?

Bu örüntünün kuralını cebirsel olarak gösterir misin?”

şeklinde. Bulgular Tablo 32’ deki gibidir.

Tablo 32

Örüntü sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X	X	X	X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X		X		X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması		X			X		X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi		X			X		X	X

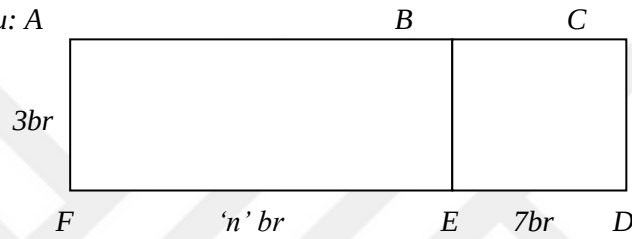
Yusuf_(C1G1) örüntünün her bir adımında 4 bilye arttığını söylemiştir. Bu şekilde her bir adımdaki bilye sayısını düşündüğünde 6. adımında 19 bilye olacağı cevabını vermiştir. 6. adımında 19 bilye varsa 25 bilyenin 7. adımında olacağını söylemiştir. Örüntünün kuralını önce $4n+6$ olarak, daha sonra her adımda 4 bilye arttığını söyleyerek $6n+4$ olması gerektiğini belirtmiştir. Kuralda yer alan n harfinin ne anlama geldiğini açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Hale_(C1G2) örüntünün her bir adımında

bilye sayısının 3 arttığını belirterek örüntü kuralını oluşturmak istemiştir. Birinci adımı düşündüğünde 3 ile 1' i çarpıp, 1 elde etmek için 2 çıkaran Hale_(C1G2) örüntünün kuralını $3n-2$ olarak göstermiştir. Örüntü kuralından 6. adımında 16 bilye olacağını belirtmiş; fakat, 25 bilyenin kaçınıcı adımda yer aldığını sırasıyla diğer adımlardaki bilye sayılarını göstererek bulmuştur. Düşünme sürecinin aksiyomatik formal dünya boyutunda yer almasına karar verilmiştir. Rana_(C1G3) örüntünün her adımında 3 bilye artarak devam ettiğini söylemiştir. Örüntünün 6. adımındaki bilye sayısını bulmak için 3 ile 6' yı çarpmak gerektiğini, 25 bilyenin kaçınıcı adımda olduğunu bulmak için de 25' i 3' e bölmek gerektiğini ifade etmiştir. 25' in 3' e tam bölünemeyeceğini düşünerek bu defa tek tek tüm adımlardaki bilye sayılarını göstermiş ve istenen adımı bulmuştur. Ayrıca örüntünün kuralını cebirsel olarak $2n+1$ olarak ifade etmiştir. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Özgür_(C2G1) her adımda bilye sayısının 3 arttığını belirterek, 6. adımda 6 ile 3' ü çarptığında 18 bilye olması gerektiğini söylemiştir. 25 sayısı tek sayı olduğu için 25 bilyenin kaçınıcı adımda yer aldığının bulunamayacağını bildirmiş; örüntünün kuralını da $n.+3$ şeklinde belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Zehra_(C2G2) örüntüde önce bilye sayısının her bir adımda kaçır kaçır arttığına odaklanarak örüntünün kuralını $3n-2$ olarak ifade etmiştir. 1. adım için 3 ile 1 çarpıp 2 çıkartması gerektiğini düşünerek örüntü kuralını bulmuştur. Örüntü kuralından yola çıkarak 6. adımında 16 bilye olması gerektiğini, 25 bilyenin ise 9. adımda yer alacağını belirtmiştir. 25 bilyenin 9. adımda yer almasını ise, 6. adımında 16 bilye varsa 7.,8. ve 9. adımlarında kaç bilye olması gerektiğini düşünerek bulduğunu söylemiştir. Aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirmiştir. Serkan_(C2G3) önce örüntü kuralını düşünmüş; ancak, kuralı her bir adımda üçer üçer artıyor şeklinde açıklamıştır. 6. adımdaki bilye sayısını 3 ile 6' yı çarparak cevaplandırmış ve 18 olarak belirtmiştir. 25 bilyenin ise 6. adımdan itibaren üçer saydığında 8. adımda yer aldığını söylemiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Meltem_(C3G1) her bir adımda bilye sayısının üç arttığını söyleyerek örüntü kuralını $3n-2$ olarak bulmuştur. Örüntünün 6. adımında 16 bilye olduğunu belirtmiştir. Ardından 25 bilyenin kaçınıcı adımda yer aldığını bulurken denklem çözüm sürecini ifade etmiştir. Önce 25 ile 2' yi toplamış, ardından elde ettiği 27 değerini 3' e bölerek 9. adımda yer aldığını bulmuştur. Örüntü kuralını sözel olarak da ifade eden Meltem_(C3G1) aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Sarp_(C3G3) önce örüntünün her bir adımında yer alan bilye sayısını düşünmüştür. Ardından örüntü kuralı için her bir adımda 3 bilye arttığını söylemiş, örüntü kuralını adım sayısının üç katının bir fazlasının alınarak bulunabileceğini belirtmiştir. 6. adımında 19 bilye olduğunu söylediği

örüntüde 25 bilyenin de 25 den 1 çıkarıp 3 ile böldüğünde 6. adımında yer aldığını bulduğunu söylemiştir. Sarp_(C3G3) hata yaptığını farkederek örüntü kuralını tekrar düşünmüştür. Örüntü kuralını bu defa 1. adımdaki bilye sayısını düşünerek $3n-2$ olarak bulmuştur. Buradan yola çıkarak 6. adımında 16 bilye olması gerektiğini belirtmiştir. 25 bilyenin kaçınıcı adımda olacağını düşünürken 25' den 2 çıkartıp elde ettiği 23 sayısını 3' e bölmeye denemiş; ancak, kalansız bölünmeyeceği için 25 bilyenin kaçınıcı adımda yer alacağını söyleyememiştir. Tüm bu süreç sonucunda düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Tez çalışmasının bu oturumunda öğrencilere son olarak,

“12. Soru: A



AFDC dikdörtgensel bölgenin alanını “ $n+7$ ” ile 3’ ün çarpımı olarak düşünebiliriz. Peki sence bu dikdörtgensel bölgenin alanı için düşünebileceğimiz diğer ifadeler nelerdir?” sorusu yöneltilmiştir. Soruya ait bulgular Tablo 33’ deki gibidir.

Tablo 33

Dikdörtgensel bölgenin alanına yönelik farklı cebirsel ifadeler elde etme sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X	X		X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi			X	X	X			X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması								X
Aksiyomatik	İspat sürecinin								

Yusuf_(C1G1) dikdörtgensel bölgenin alanını veren ifade için önce $n+3$ ifadesini düşünmüş, dikdörtgenin bütününe dikkate almadığını söyleyerek bu defa $7n+3$ olabileceğini belirtmiştir. Dikdörtgensel bölgenin alanını veren ifadelerin birbirine eşit olması gerektiğini belirttiği halde, soruda verilen ifadeyle kendi bulduğu ifade arasında bir ilişki kuramamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Hale_(C1G2) soruda verilen ifadeden yola çıkarak $n+3$ ile $7'$ nin çarpımının $n+7$ ile $3'$ ün çarpımına eşit olacağını söylemiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Rana_(C1G3) dikdörtgensel bölgenin alanını bulmak için birbirine eşit kenar uzunluklarını göstermeyi denemiş ve alanın 7 ile $3'$ ün çarpımından 21 olacağını belirtmiştir. İfadede yer alan $n+7$ ile $3'$ ün çarpımı ile arasında bir bağlantı kuramamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Özgür_(C2G1) dikdörtgensel bölgenin alanını bulmak için yükseklik ve yüzeyin çarpılması gerektiğini belirtmiştir. Yüzey olarak belirttiği kavram ise yüksekliğin ait olduğu kenardır. Dikdörtgensel bölgenin alanının 7 ile $3'$ ü çarparak bulunabileceğini söylemiştir. Soruda verilen ifadeyle karşılaştırması istendiğinde soruda verilen ifadede n ile $7'$ nin toplamının yüzeyi vereceğini, 3 ile çarpımının da alanı vereceğini belirtmiştir. Ancak, dikdörtgensel bölgenin alanını bulmak için n değerinin sayısal değerinin bilinmesi gerektiğini söylemiştir. Dikdörtgensel bölgenin alanına dair açıklama yapmakta zorlanan Özgür_(C2G1)' ün düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Zehra_(C2G2) soruda verilen ifadeden farklı bir ifade olarak $n+3$ ile $7'$ nin çarpımını gösterebileceğini söylemiştir. $n+3.7$ cebirsel ifadesini düşünmesinin nedeni olarak ifadede yer alan sayıların yerlerini değiştirdiğini belirtmiştir. Soruda verilen ifade ile kendi oluşturduğu ifadenin birbirine eşit olmadığını n değişkeni için sayısal bir değer düşündüğünde göstermiştir. Dikdörtgensel bölgenin alanını bulmak için kısa kenar uzunluğu ile uzun kenar uzunluğunu çarpmak gerektiğini söylemiş; farklı bir ifade olarak yine soruda verilen ifadede verilerin yerlerini değiştirip $7+n.3$ cevabını vermiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Serkan_(C2G3) önce birbirine eşit uzunluktaki kenarları göstermiş ve bu kenar uzunluklarının değerlerini belirtmiştir. Ancak, dikdörtgensel bölgenin alanı için farklı ifadeler elde edememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Meltem_(C3G1) önce BCDE dörtgeninin kare olduğunu söylemiş, ardından kare olup olmadığının bilinmeyeceğini ifade etmiştir. Dikdörtgensel bölgenin alanı için verilen sayıları çarpıp bilinmeyi eklemeyi düşündüğünü söyleyerek $3.7+ n$ ifadesini göstermiştir. Bu ifade ile soruda yer alan ifadenin aynı olduğunu belirtmiştir. Soruda yer alan ifadeyi de $n+7.3$ olarak gösteren Meltem_(C3G1) kendi bulduğu ifade ile sadece

yerlerinin değiştiğini söylemiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. $Sarp_{(C3G3)}$ da BCDE dörtgenini kare olarak düşünerek alanını bulmak için 7 ile 4 ü çarpması gerektiğini söylemiştir. Ardından n ile 3' ü çarparak hepsini toplaması gerektiğini belirtmiştir. Bulduğu $7.4+n.3$ ifadesini soruda verilen ifade ile karşılaştırması istendiğinde farklı ifadeler olduğunu farketmiş, BCDE dörtgenin alanını bulmak isterken çevresini bulduğunu söylemiştir. BCDE dörtgeninin alanını 7 ile 3' ü çarparak bulabileceğini söyleyerek tekrar düşünmüştür. Yeni bulduğu ifade olan $7.3+n.3$ ifadesinin soruda verilen ifade ile eşit olduğunu ise n yerine sayı değerleri düşünerek işlemsel süreç sonucunda göstermiştir. Cebirsel olarak dikdörtgensel bölgenin alanını açıklamakta zorlanan ve sayısal olarak düşünen $Sarp_{(C3G3)}$ ' ın düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

4.1.2. 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili 6. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular

Bu bölümde görüşmelerin 2. oturumunda yöneltilen geometri öğrenme alanına yönelik sorulara 6. sınıf öğrencilerinin verdikleri cevaplara dair bulgular sunulmuştur. Öğrenci düşünme süreçleri her bir soru için matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine dair belirlenen boyutlara göre sınıflandırılmıştır. Öğrencilerin verdikleri cevaplar birden fazla sürece uygun şekilde ise birden fazla boyut içinde değerlendirilmiştir.

Öğrencilere ilk olarak

“1. Soru: Üçgeni anlatır mısın? Tanımlar mısın?”

sorusu yöneltilmiştir. Soruya ait bulgular Tablo 34' deki gibidir.

Tablo 34

“Üçgeni anlatır mısın?” sorusuna dair 6. sınıf öğrencilerinin cevapları

Cevaplar	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Üç kenarı var	X	X		X	X	X	X	X
Üç köşesi var	X	X	X	X			X	
Üç iç açısı var							X	
Kapalı şekil					X			
İç açılarının ölçüleri toplamı 180°								X
Üç doğru parçasının birbiriyle birleştirilmesiyle oluşan şekil				X				

Yusuf_(C1G1) ve Hale_(C1G2) üçgeni sadece üç kenarı ve üç köşesi olan bir geometrik şekil şeklinde tanımlamışlardır. Rana_(C1G3) üçgenin üç köşesi olduğunu söylemiş ve açılara göre üçgen çeşitlerini ifade etmiştir. Özgür_(C2G1) üç kenarı ve üç köşesi olduğunu belirttiği üçgenin kenarlarının birleşik olması gerektiğini (üç doğru parçasının birbiriyle birleştirilmesi olarak değerlendirilmiştir) söylemiştir. Zehra_(C2G2) üç kenarı olan bir geometrik şekil olarak tanımladığı üçgenin kapalı şekil olması gerektiğini vurgulamıştır. Serkan_(C2G3) üçgenin sadece üç kenarı olduğunu söylemiştir. Meltem_(C3G1) üçgeni üç köşesi, üç kenarı ve üç iç açısı olan bir geometrik şekil olarak tasvir etmiştir. Sarp_(C3G3) üçgeni tanımlarken üç kenarı olduğunu söylemiş ve üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu belirtmiştir.

6. sınıf öğrencilerine,

“2. Soru: ‘Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° ’ dir.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?”

soruları yöneltilmiştir. Bulgular Tablo 35’ deki şekildedir.

Tablo 35

“Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° ’ dir.” ifadesine dair 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi								X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda matematiksel düşünmenin bu boyutu ölçülmemektedir.								
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi		X						

Yusuf_(C1G1) geniş açının 180° olduğunu söyleyerek üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu belirtmiştir. Dik açı 90° olduğu için üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 90° de olabileceğini söylemiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya

boyutunda yer almıştır. Hale_(C1G2) üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının üçgenlerin iç açılarının ölçülerinin ölçülerek bulunmasıyla hesaplanmış olabileceğini söylemiştir. Ardından bir üçgen çizmiş ve iç açılarının ölçülerini ölçmüştür. 45°, 65° ve 70° olarak bulduğu iç açı ölçülerini topladığında 180° sonucunu elde etmiştir. Böylece üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu göstererek aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirmiştir. Rana_(C1G3) üçgenin üç köşesi varsa 3 ile kalansız bölünebilen bir sayı olan 180°'nin de üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını göstermiş olabileceğini ifade etmiştir. Ancak, neden 180° olduğunu açıklayamamış ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Özgür_(C2G1) ifadenin doğru olduğunu; ancak, nedenini hiç düşünmediğini ve açıklayamayacağını belirtmiştir. Bir üçgen üzerinde ifadeyi açıklamayı denemiş ama başarılı olamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut ifade boyutunda değerlendirilmiştir. Zehra_(C2G2) ölçerek üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olarak bulunabileceğini söylemiştir. Bir üçgen çizerek iç açılarının ölçülerini ölçmek istemiş; fakat, başarılı olamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Serkan_(C2G3) bir üçgen çizerek iki kenarının dik, bir kenarının düz yani yatay olduğunu söylemiştir. Dik olanların geniş açı olduğu, yatay olanların 180° olduğu şeklinde bir açıklama yapmıştır. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Meltem_(C3G1) bir üçgende iki kenar uzunluğunu 90° olarak düşünmüş, buradan bir düşünme süreci geliştirmeye çalışmıştır. Bir dik üçgenin iki dik kenarı olduğunu belirtmiş, bu dik kenar uzunluklarını da 90° olarak düşündüğünde toplamlarının 180° olacağını söylemiştir. Açı kavramıyla kenar kavramlarını birbirine karıştırmıştır. Ancak, üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını açıklayamamıştır. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Sarp_(C3G3) birçok üçgen çizerek üçgenin iç açılarının ölçüleri belirlendiğinde, üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olarak bulunmuş olabileceğini söylemiştir. Ardından dik açılı bir üçgen çizerek iç açılarının ölçülerine 90°, 30° ve 20° değerlerini vermiştir. Topamlarının 140° olduğunu belirleyince yanlış düşündüğünü ifade etmiştir. Ardından bir kare düşünmüştür. Karenin bütün iç açılarının ölçülerinin 90° olacağını ve toplamlarının da 360° olacağını söylemiştir. Ardından kareyi karşılıklı iki köşesinden iki eş parçaya ayırdığında birbirine eş iki üçgenin oluşacağını söylemiştir. Dolayısıyla karenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° ise bir üçgenin de iç açılarının ölçüleri toplamının da 180° olacağını belirtmiştir. Ancak açıklamalarını yaparken ve şekil üzerinde gösterirken 360°'yi karenin alanı, 180°'yi de üçgenlerin alanları olarak düşünmüştür. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

6. sınıf öğrencilerine yöneltilen diğer soru,

“3. Soru: ‘Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farkının mutlak değerinden ise büyüktür.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?

İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?”

şeklindedir. Bulgulara ilişkin bilgiler Tablo 36' daki gibidir.

Tablo 36

Üçgen eşitsizliğinin sözel ifadesine yönelik 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri geliştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması		X				X	X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi							X	X

Yusuf_(C1G1) bir ikizkenar üçgen çizerek kenar uzunluklarına kendi değerler vermiştir. Bu sayı değerleri üzerinden ifadeyi açıklamış; ancak, ifadenin doğruluğuna ilişkin bir açıklama yapamamıştır. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Hale_(C1G2) önce üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını düşünerek düşünme süreci geliştirmeye çalışmış, ardından ifadede yer alan verilere odaklanarak ifadeyi açıklamıştır. Bir üçgen üzerinde kenar uzunluklarına kendi değerler verdiğinde ifadeyi açıklayabilmiş, ifadeye uygun eşitsizliği sembolik olarak gösterebilmiştir. Ancak, üçgen

eşitsizliğine yönelik ispat süreci geliştirememiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Rana_(C1G3) sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğini önce sözlü olarak açıklamış, ardından bir üçgen çizerek kenar uzunluklarına sayısal değerler vermiştir. Üçüncü kenarın iki kenarın farkının mutlak değerinden küçük olduğunu ise sayısal olarak gösterememiştir. İfadeye uygun sembolik ifadeyi gösterememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Özgür_(C2G1) bir üçgen çizerek iki kenar uzunluğuna 3 br ve 4 br değerlerini vermiştir. Ardından bu iki kenar uzunluğunun toplamı olan 7 değerini üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° ' den çıkartmak gerektiğini ifade etmiştir. Bulduğu 173 değeri, iki kenar uzunluğunun toplamından büyük olduğu için soruda yer alan ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Zehra_(C2G2) önce sözel ifadeyi sözlü olarak açıklamaya çalışmıştır. Ardından bir üçgen çizerek kenar uzunluklarına kendi değerler vermiştir. Üçüncü kenar uzunluğunun iki kenar uzunluğunun toplamı ile kendisinin farkından büyük olması gerektiğini ifade etmiştir. Cebirsel olarak da aynı şekilde düşünen Zehra_(C2G2) bir üçgende kenar uzunlukları a, b ve c olarak temsil edildiğinde üçüncü kenar uzunluğunun iki kenar uzunluğunun toplamından küçük olmasını $a+b-c$ şeklinde göstermiştir. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Serkan_(C2G3), önce ifadeyi sözel olarak açıklamıştır. Ardından bir üçgen çizerek kenar uzunluklarına kendi değerler vermiştir. Bir kenar uzunluğu 2 br, diğer kenar uzunluğu 3 br olduğunda üçüncü kenar uzunluğunun ikisinin toplamı olan 5br' den küçük olacağını ve farkı olan 1 br' den büyük olacağını söylemiştir. İfadeye uygun cebirsel gösterimi de ifade eden Serkan_(C2G3) sözel ifadeye dair ispat sürecini düşünememiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Meltem_(C3G1) ifadede anlatılmak isteneni açıklamaya çalışarak, eşkenar üçgenin düşünülebileceğini belirtmiştir. Bir eşkenar üçgenin bütün kenar uzunluklarının birbirine eşit olacağını belirtmiş ve çizdiği bir eşkenar üçgen üzerinden soruda yer alan ifadeyi sayı değerleri ile açıklamıştır. Ayrıca üçgen eşitsizliğini sembolik olarak gösterebilmiştir. Düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Sarp_(C3G3) da benzer şekilde önce ifadede ne anlatıldığını sözlü olarak açıklamıştır. Ardından bir eşkenar üçgen düşünmüş ve kenar uzunluklarına kendi değerler vermiştir. Bütün kenar uzunlukları birbirine eşit olacağı için ifadeyi doğru bir şekilde açıklamıştır. Ardından bir başka eşkenar üçgen çizerek kenar uzunluklarına harfli değerler vermiş ve üçgen eşitsizliğini sembolik olarak da açıklamıştır. Aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirmiştir.

6. sınıf öğrencilerine bir diğer soruda Pisagor Bağıntısı' nın sözel ifadesi yöneltilmiştir. Onlara,

“4. Soru: ‘Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, üçüncü kenar uzunluğunun karesine eşittir.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?

İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?”

soruları sorulmuştur. Bulgular Tablo 37' de gösterilmiştir.

Tablo 37

Pisagor Bağıntısı' nın sözel ifadesine yönelik 6. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki veriler üzerinde odaklanma	X	X	X	X	X	X	X	X
	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X			X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi		X	X				X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması			X					
Aksiomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi								

Yusuf_(C1G1) soruda yer alan ifadeyi açıklamak isterken önce bir dik üçgen çizmiş, ardından dik kenar uzunluklarının kareleri ifadesine odaklanmıştır. Burada yer alan kare kavramını geometrik şekil olan kare olarak düşünen Yusuf_(C1G1) kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Hale_(C1G2) kenar uzunluklarının karesi

ifadesinde bahsedilen kare kavramının üs olan 2' yi belirttiğini söylemiştir. Bir dik üçgen çizerek dik kenar uzunluklarına kendi değerler vermiş ve ifadeyi açıklamaya çalışmıştır. Dik kenar uzunluklarının karelerinin, üsleri 2 olduğu için toplanamayacağını belirtmiştir. İfadeyi cebirsel olarak gösterememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Rana_(C1G3) bir dik üçgen çizerek dik açısını ve dik kenarlarını göstermiştir. Ardından dik kenar uzunluklarına kendi sayısal değerler vererek ifadeyi açıklamaya çalışmıştır. Ancak üçüncü kenarın karesi için elde ettiği sayı tam kare bir sayı olmadığı için hangi sayının karesi olduğunu açıklayamamıştır. İfadeyi açıklamakta zorlanan Rana_(C1G3) Pisagor Bağıntısı' na ilişkin sembolik ifadeyi oluşturabilmiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Özgür_(C2G1) önce ifadede yer alan kare sözcüğüne odaklanmıştır. Buradaki kare kavramının cm^2 de olduğu gibi üs olarak ifade edildiğini belirtmiştir. Kenar uzunluklarının karelerinin toplanamayacağını söylemiştir. İfadeyi açıklarken üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğu için üçüncü kenar uzunluğunun karesini bulurken diğer kenar uzunlukları toplamının $180'$ den çıkarılabileceğini belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Zehra_(C2G2) önce ifadeyi sözlü olarak açıklamaya çalışmıştır. Ardından bir dik üçgen çizmiş; ancak, dik kenar uzunluklarının kareleri toplamı derken kare sözcüğüyle ne anlatılmak istendiğini anlamakta zorlanmıştır. Buradaki kare kavramını geometrik şekil olan kare olarak düşünerek kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Serkan_(C2G3) dik üçgeni göstermek istemiş ama zorlanmıştır. Önce bir dar açılı üçgen çizmiş, ardından dik üçgeni doğru bir şekilde gösterebilmiştir. Soruda yer alan dik kenar uzunluklarının kareleri ifadesindeki kare kavramını geometrik şekil kare olarak düşünmüştür. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Meltem_(C3G1) de ifadede yer alan dik kenar uzunluklarının kareleri ifadesinde yer alan kare kavramını geometrik şekil olan kare olarak düşünmüş, ardından üs olarak ifade edildiğinin farkına varmıştır. İkizkenar dik üçgen üzerinden iki dik kenar uzunluğuna sayı değerleri vermiş ve ifadeyi açıklamaya çalışmıştır. İfadenin doğru olduğunu belirtmiş; ancak, neden doğru olduğuna ilişkin bir açıklama yapamamıştır. Pisagor Bağıntısı' nı sembolik olarak da ifade edemeyen Meltem_(C3G1)' in düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Sarp_(C3G3) ifadede yer alan kare kavramıyla üs kavramının anlatıldığını söylemiştir. Ardından bir dik üçgen çizerek kenar uzunluklarına sayı değerleri vermiştir. Soruda yer alan ifadeyi gösterirken üç kenar uzunluğunun karelerini toplayarak elde ettiği sonucu nasıl yorumlaması gerektiğini düşünmüş; fakat bir açıklama yapamamıştır. İfadeyi sembolik olarak ifade etmesi istendiğinde bir dik üçgenin tüm kenar uzunluklarının kareleri toplamını, çarpımlarının

karesine eşitlemiştir. Bağintıyı açıklamakta ve sembolik olarak göstermekte zorlanan Sarp_(C3G3)' in düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.

4.1.3. 3. oturumda 6. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular

Bu bölümde yapılan görüşmelerin 3. oturumunda 6. sınıf öğrencilerinin cevaplarına ilişkin bulgular açıklanmıştır. Öğrencilerin üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı gerçek yaşam durumu içerisinde oluşturmaları beklenmiştir. Öğrenci düşünme süreçleri her bir soru için matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine dair belirlenen boyutlara göre sınıflandırılmıştır. Öğrencilerin verdikleri cevaplar birden fazla sürece uygun şekilde ise birden fazla boyut içinde değerlendirilmiştir. Ayrıca bu bölümde öğrencilerin geliştirdikleri matematiksel düşünme süreçleri her bir öğrenci için ayrı ayrı sunulmuştur.

Öğrencilere ilk olarak yöneltilen üçgen eşitsizliğini keşfetmeye yönelik gerçek yaşam durumu ve sorulan sorular aşağıdaki gibidir.

“Bir gün öğretmeni Efe’ ye proje ödevi verir. Proje ödevine göre Efe’ nin üçgen şeklinde bir bahçe tasarlaması gerekmektedir. Efe’ ye öğretmeni bahçenin bir kenarının uzunluğunun 9 cm, diğer kenarının uzunluğunun ise 5 cm olması gerektiğini belirtir.

Üçgeni nasıl çizmesi gerektiğini düşünen Efe sence nasıl bir yol izler?

Sence Efe üçüncü kenarı 4 cm olarak seçebilir mi? Açıklayınız.

Sence Efe üçüncü kenarı 14 cm olarak seçebilir mi? Açıklayınız.

Bu durumda Efe’ nin çizmesi gereken üçgen için nasıl bir bağıntı oluştursunuz?

Bunu genellemek istersek nasıl açıklarsın?

Cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?”

Yapılan görüşmelerde öğrencilere araştırmacı tarafından cetvel sunulmuş ve 1cm ile 20 cm arasında değişen uzunluklardaki çubukları kullanabilecekleri belirtilmiştir. Bu soruda 6. sınıf öğrencilerinin düşünme süreçlerinin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre değerlendirilmesi Tablo 38' deki gibidir.

Tablo 38

Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini keşfetmeye yönelik 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir	X	X		X	X		X	X

	edilmesi						
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X		X	X	X	X
			X				
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemlerin genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadeler, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması	X				X	
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi	X				X	

Yusuf_(C1G1) üçgenin iki kenar uzunluğunun birbirine eşit olması gerektiğini söylemiştir. Üçgenin bir kenar uzunluğu 5 cm, diğer kenar uzunluğu da 9 cm ise üçüncü kenar uzunluğunun 9 cm olabileceğini belirtmiştir. Ayrıca, üçüncü kenar uzunluğunun 5 cm de olabileceğini söylemiştir. 4 cm ve 14 cm uzunluklarının da olabileceğini ifade etmiş ve üçgen eşitsizliğine yönelik bir düşünme süreci geliştirememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Hale_(C1G2) ifadeyi okuduğunda 5 cm ve 9 cm uzunluklarında iki kenarın üçüncü bir kenar ile birleştirilip üçgen oluşturulduğunda üçüncü kenar uzunluğunun bulunabileceğini söylemiştir. Önce üçüncü kenar uzunluğunun 5 cm ve 9 cm olabileceğini belirtmiş, 14 cm olup olmayacağı sorulduğunda bu uzunluklar ile üçgen oluşturmayı denemiştir. Sırasıyla 13 cm, 4 cm, 5cm, 7 cm ve 10 cm uzunluklarını denediğinde üçgenin üçüncü kenar uzunluğunun iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farkından büyük olması gerektiğini ifade etmiştir. Üçgen eşitsizliğini sembolik olarak da ifade Hale_(C1G2) 'nin düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Rana_(C1G3) iki kenar uzunluğu 9 cm ve 5cm olan üçgenin üçüncü kenar uzunluğunun bu iki sayı değerinin toplamı olan 14 cm olabileceğini söylemiştir. Cetvel ve verilen uzunluklar yardımıyla bu üçgeni çizmeye çalışmış ve üçgen oluşmadığını görmüştür. Ardından 13 cm olabileceğini söyleyerek tekrar denemiş ve bu defa üçgen oluştuğunu belirtmiştir. Başka bir örnek vermesi istendiğinde üçüncü kenar uzunluğunun 4 cm olabileceğini söylemiş ve denediğinde olmadığını görmüştür. Ardından 5cm uzunluğunu denemiş ve üçgen oluştuğunu belirterek üçüncü kenar uzunluğunun diğer iki kenar uzunluğundan küçük olmaması gerektiğini söylemiştir. Üçüncü kenar uzunluğunun 5 cm ile 13 cm arasında olabileceğini belirttiği halde, üçgen eşitsizliğine dair bir açıklamada

bulunamamış ve sembolik olarak ifade edememiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Özgür_(C2G1) üçüncü kenar uzunluğu için iki kenar uzunluğunun toplamını 180' den çıkarmayı düşünmüştür. Elde edilecek değerin çok büyük olacağını düşünerek, bu defa üçgenin ikizkenar üçgen olabileceğini ifade etmiştir. Bu anlamda üçüncü kenar uzunluğunun 5 cm ya da 9 cm olabileceğini belirtmiştir. 4 cm ve 14 cm olup olmayacağı sorulduğunda ise olamayacaklarını söylemiştir. Mutlaka iki kenar uzunluğunun birbirine eşit olması gerektiğini belirterek kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Zehra_(C2G2) ikizkenar üçgen olarak düşünüldüğünde üçüncü kenar uzunluğunun 9 cm olabileceğini söylemiştir. 4 cm ve 14 cm olup olmayacağı sorulduğunda üçgen ikizkenar üçgen değilse bu değerlerin de olabileceğini belirtmiştir. Göstermesi istendiğinde ise 4 cm ve 14 cm uzunluklarının olamayacağını söylemiştir. Bunun nedeni olarak da 4 cm' nin kısa bir uzunluk, 14 cm' nin de uzun bir uzunluk olduğunu ifade etmiştir. Başka değerler düşünmesi istendiğinde her defasında deneyerek üçüncü kenar uzunluğunun bulunabileceğini belirtmiş, üçgen eşitsizliğini oluşturmaya yönelik düşünme süreci geliştirememiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.

Serkan_(C2G3) soruyu okuduğunda üçgenin üçüncü kenar uzunluğunun 9 ile 5' in farkı olan 4 cm olabileceğini söylemiştir. Araştırmacı tarafından bu uzunluğu deneyerek bir üçgen oluşturması istendiğinde 4 cm' nin olmadığını görmüştür. 5 cm, 14 cm, 13 cm uzunlukları sorulduğunda bütün uzunluk değerlerinin olabileceğini belirterek üçüncü kenar uzunluğunun değerini bulmanın zor olduğunu söylemiştir. Üçgen eşitsizliğini oluşturmaya yönelik düşünme süreci gerçekleştirememiştir. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.

Meltem_(C3G1) önce bir üçgen çizerek iki kenar uzunluğunu 5 cm ve 9 cm olarak göstermiştir. Bu iki kenar uzunluğunu toplayarak üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğu için 180' den çıkartmış ve üçüncü kenar uzunluğunu 166 cm olarak ifade etmiştir. Ardından açı ölçüsü ile kenar uzunluğu kavramlarını karıştırdığını farkederek üçüncü kenar uzunluğunun her sayı değeri olabileceğini söylemiştir. Cetvel yardımıyla iki kenar uzunluğu 5 cm ve 9 cm olan bir üçgen çizmiş ve üçüncü kenar uzunluğunu 6,5 cm olarak ölçmüştür. 4 cm ve 14 cm uzunlukları sorulduğunda deneyerek ölçümler yapmış ve olamayacaklarını söylemiştir. Düşünme sürecinde 5 cm, 7cm ve 13 cm uzunluklarını denemek isteyen Meltem_(C3G1) bu uzunlukların üçgenin üçüncü kenar uzunluğu olabileceğini belirtmiştir. Düşünme süreci sonucunda üçüncü kenar uzunluğunun iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farkından büyük olması gerektiğini farkedenden Meltem_(C3G1) üçgen eşitsizliğine ulaşmış,

sözel olarak ifade etmiştir. Ayrıca eşitsizliği sembolik olarak gösterebilmiştir. Aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir.

Sarp_(C3G3) bir üçgenin iki kenar uzunluğu 5 cm ve 9 cm ise üçüncü kenar uzunluğunun 13 cm olabileceğini söylemiştir. Bunun nedeni olarak 5 ile 9 arasında 4 fark olduğu için 9 ile de 13' ün arasında 4 fark olması gerektiğini şeklinde açıklamıştır. Aynı şekilde üçüncü kenar uzunluğunun 9 cm de olabileceğini söyleyen Sarp_(C3G3)' a 14 cm olup olamayacağı sorulduğunda olmaması gerektiğini söylemiştir. Cevabından emin olmadığı için denemesi istendiğinde olmadığını görmüştür. Benzer şekilde 4 cm uzunluğu da sorulmuş ve bu uzunluğun da olmadığını göstermiştir. 3cm, 5cm, 10 cm ve 13 cm uzunluklarını deneyen Sarp_(C3G3) düşünme sürecinde üçüncü kenar uzunluğunun 4 cm ve 14 cm uzunlukları arasındaki değerleri alması gerektiğini belirtmiştir. Ancak, üçgen eşitsizliğini ifade edememiş ve sembolik olarak gösterememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Bu bölümde öğrencilere ikinci olarak yöneltilen gerçek yaşam durumu Pisagor Bağıntısı' nı keşfetmelerine yönelik olarak hazırlanmış ve sırasıyla aşağıdaki sorular sorulmuştur.

“Efe'nin bir diğer proje ödevinde öğretmenini ondan bir ev modeli tasarlamasını istemiştir. Efe tasarlayacağı evin çok farklı bir modelde olmasını ve dikkat çekmesini istemektedir. Efe günlerce düşünür ve 4 odalı bir ev tasarlamaya karar verir. Evin özellikleri şu şekildedir:

-Evin üç odası kare olacaktır.

-Kare şeklinde odalardan ikisinin birer duvarı birbirine dik olacaktır.

-Bu üç oda birbirleri ile birer köşelerinden ikişer ikişer çıkışacaktır.

-Dördüncü odanın duvarları bu üç odanın birer duvarı ile ortak olacak ve aralarında kalacak şekilde tasarlamaktadır.

Evi nasıl çizmesi gerektiğini düşünen Efe sence nasıl bir yol izler?

Üç odanın arasında kalan oda hangi geometrik şekle benzemektedir?

Efe kare şeklinde bir odanın bir kenarını 4 cm olarak, diğer kare şeklindeki odanın bir kenarını 3 cm olarak seçerse, üçüncü kare şeklinde olan odanın bir kenarı kaç cm olabilir?

Arada kalan dördüncü odanın kenar uzunlukları hakkında ne söyleyebilirsin?

Evin alanı için ne söyleyebilirsin?

Eğer Efe kare şeklindeki odalardan birinin bir kenar uzunluğunu 6 cm, diğerinin bir kenar uzunluğunu 8 cm olarak seçseydi üçüncü odanın bir kenarı ve arada kalanın odanın kenar uzunlukları hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Bu durumu genellemek istersek nasıl bir bağıntı oluşturursun?

Cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?"

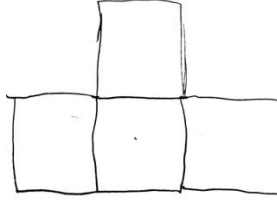
Yapılan görüşmelerde öğrencilere araştırmacı tarafından cetvel sunulmuş çeşitli uzunluklardaki çubukları kullanabilecekleri belirtilmiştir. Bu soruda 6. sınıf öğrencilerinin cevaplarının matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre değerlendirilmesi Tablo 39'daki gibidir.

Tablo 39

Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı keşfetmeye yönelik 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

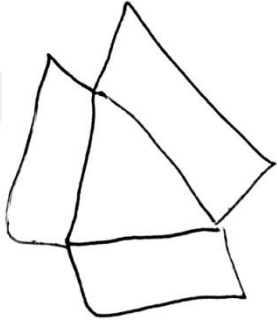
Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Yusuf (C1G1)	Hale (C1G2)	Rana (C1G3)	Özgür (C2G1)	Zehra (C2G2)	Serkan (C2G3)	Meltem (C3G1)	Sarp (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma	X	X	X	X	X	X	X	X
	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi		X	X	X	X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi						X	X	
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemlerin genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması								
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi								

Yusuf_(C1G1) soruda istenen her bir adımı anlamaya yönelik açıklamalar yapmış; ancak, başarılı olamamıştır. Sorudaki verilere odaklanarak kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.



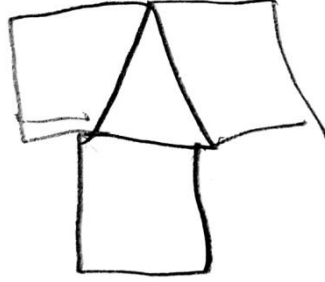
Şekil 2. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Yusuf_(C1G1)' un çizdiği şekil

Hale_(C1G2) evin şeklinin nasıl olacağını düşünürken sorudan istenen her bir veriyi değerlendirmiş ve uygun şekli çizmeye yönelik düşünme süreci geliştirmiştir. Arada kalan dördüncü odanın dik açılı üçgen olacağını belirtmiştir. Ancak, çizdiği şekilde dik üçgeni doğru bir şekilde gösterememiştir. Hale_(C1G2), çizdiği şekilden yola çıkarak Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmaya yönelik düşünme süreci geliştirememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.



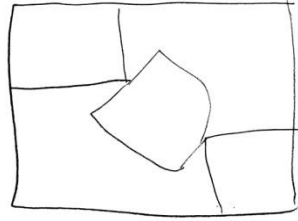
Şekil 3. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Hale_(C1G2)' nin çizdiği şekil

Rana_(C1G3) önce gerçek yaşam durumu içerisinde istenen verilere odaklanmış ve onları açıklamaya çalışmıştır. Ardından verilere uygun şekil çizmeye çalışarak arada kalan bölümün üçgen olabileceğini söylemiştir. Ancak, uygun şekli doğru bir şekilde çizememiştir. Çizdiği şekilde arada kalan bölüm üçgen olsa da diğer şekilleri kare olarak gösterememiştir. Dolayısıyla Pisagor Bağıntısı' na yönelik düşünme süreci geliştirememiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.



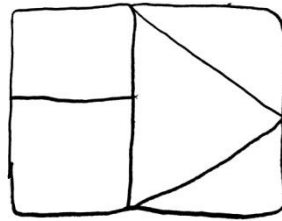
Şekil 4. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Rana_(C1G3)' nın çizdiği şekil

Özgür_(C2G1) soruda yer alan her bir adımı tek tek düşünerek farklı farklı şekiller çizmiş; hem soruyu anlamaya hem de açıklamaya yönelik düşünme süreci geliştirmiştir. Arada kalan dördüncü odanın kare ya da dikdörtgen olabileceğini söylemiştir. Uygun şekli düşünememiş, düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.



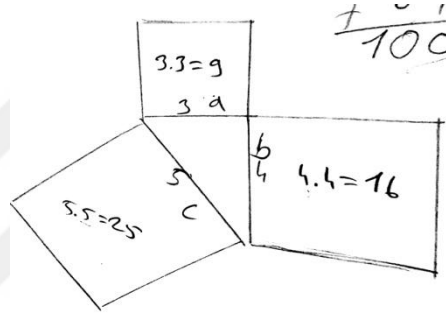
Şekil 5. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Özgür_(C2G1)' ün çizdiği şekil

Zehra_(C2G2) soruyu ilk okuduğunda arada kalan dördüncü odanın kare olamayacağını söylemiştir. Soruda verilenleri açıklamaya çalışarak her bir adımı ayrı ayrı değerlendirmiştir. Dördüncü odanın önce yarım daire şeklinde olabileceğini düşünmüş, ardından üç oda köşelerinden ikişer ikişer çıkışacağı için üçgen olması gerektiğine karar vermiştir. Ancak, Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmaya yönelik düşünme süreci geliştirememiştir. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.



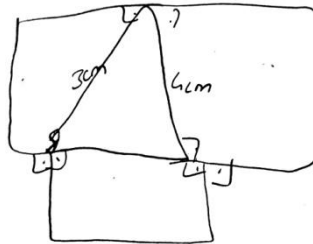
Şekil 6. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Zehra_(C2G2)' nın çizdiği şekil

Serkan_(C2G3) soruda istenen her bir adımı düşünerek ulaşılması beklenen şekli doğru bir şekilde çizmiştir. Arada kalan bölgenin dik üçgen olacağını göstermiştir. Birbirine dik olan karelerden birinin bir kenar uzunluğu 3 cm, diğerinin bir kenar uzunluğu 4 cm olduğunda üçüncü karenin bir kenar uzunluğunun 5 cm olduğunu cetvelle şekli tekrar çizerek ve ölçerek göstermiştir. Evin alanı sorulduğunda önce karelerin alanlarını doğru bir şekilde hesaplamıştır. Araştırmacının yönlendirmesiyle karelerin alanları arasındaki ilişkiyi doğru bir şekilde ifade etmiştir. Ancak dik üçgenin kenar uzunlukları ile karelerin alanları arasında ilişki kuramamıştır. Pisagor Bağıntısı' nı oluşturamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.



Şekil 7. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Serkan_(C2G3)' ın çizdiği şekil

Meltem_(C3G1) soruda istenen her bir adımı tek tek değerlendirerek doğru şekli çizmiş ve arada kalan dördüncü odanın dik üçgen şeklinde olacağına karar vermiştir. Birbirine dik olan kare şeklindeki odalardan birinin bir kenar uzunluğu 3 cm, diğerinin bir kenar uzunluğu 4 cm ise üçüncü karenin bir kenar uzunluğu sorulduğunda bir önceki soruda oluşturduğu üçgen eşitsizliği bilgisini kullanmıştır. Arada kalan dördüncü oda üçgen şeklinde olduğu için üçgenin iki kenar uzunluğu 3 cm ve 4 cm ise üçüncü kenar uzunluğunun iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farkından büyük olacağını belirtmiştir. Ancak, Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmaya yönelik düşünme süreci geliştirememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.



Şekil 8 Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Meltem_(C3G1)' in çizdiği şekil

sembolik dünya

Aksiyomatik dünya	formal	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.

Yusuf_(C1G1)' un cebir öğrenme alanı ile ilgili matematiksel düşünme boyutları değerlendirildiğinde 2. soru dışındaki tüm sorularda sadece kavramsal-somut dünya boyutunda cevaplar verdiği görülmüştür. 2. soruda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmesinin nedeni işlemsel süreç sonucunda oluşan somut kavramı sembolik olarak düşünmesidir. Ancak, cebir içeren sorularda sembolik düşünme gerçekleştirememiştir.

Yusuf_(C1G1) ile yapılan görüşmeler sonucunda 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili ikinci, üçüncü ve dördüncü sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 41' de gösterilmiştir.

Tablo 41

Yusuf_(C1G1)' un geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiyomatik formal dünya			

Yusuf_(C1G1) geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara sadece kavramsal-somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Sözel olarak verilen ifadelerden sembolik dünyaya doğru bir düşünme süreci gerçekleştirememiştir.

Yusuf_(C1G1)' un 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorularda geliştirdiği matematiksel düşünme süreçlerinin değerlendirilmesi Tablo 42' deki gibidir.

Tablo 42

Yusuf_(C1G1)' un gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2

Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiomatik formal dünya		

Yusuf_(C1G1) gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturamamıştır. Sorularda verilen ifadeleri anlamak ve açıklamakta zorlanmıştır. Sorularda verilenlere uygun şekiller çizememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Yusuf_(C1G1)' un matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 43' deki gibidir.

Tablo 43

Yusuf_(C1G1) 'un matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	(4+3 için) 4 adımla 3 adımın toplamı 7 adım olur. Toplama işlmini anlatıyor.
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi		
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi(cebirsal ifadelerin, denklemlerin,eşitsizliklerin oluşturulması)		
Aksiomatik formal dünya	Ulaşılması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		

Yusuf_(C1G1) ' un soruları cevaplandırırken sözlü dili kullanmayı tercih ettiği görülmüştür. Yazılı dili işlemsel süreci ifade ederken kullanmıştır. Ancak, doğru ifadelerde bulunamamıştır. Görsel dili doğru biçimde kullanamamıştır. Sembolik ifade oluşturmakta zorlanmıştır. Matematiksel dil kullanımı açısından hatalar yapmıştır. Bu yüzden matematiksel dil becerileri kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Yusuf_(C1G1) ile yapılan görüşmelerin genel değerlendirilmesi şu şekildedir:

Yusuf_(C1G1) bir sayının ardışığını o sayının tekrarı olarak düşünmüştür. Yani 2' nin ardışığının 2 olduğunu belirtmiştir. Bir basamaklı sayıları tek sayı, iki basamaklı sayıları çift sayı olarak göstermiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

("Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır." ifadesini açıklarken)

Yusuf_(C1G1): *Ardışık iki sayıdan oluşuyor yani art arda.*

Araştırmacı: *Örnek verir misin?*

Yusuf_(C1G1): *2 ve 2 .*

Araştırmacı: *"Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır." ifadesi için ne söyleyebilirsin?*

Yusuf_(C1G1): *2 ve 2 diye. Toplamları 4 tek sayı.*

Araştırmacı: *Her zaman doğru mudur?*

Yusuf_(C1G1): *Diyelim 12 diğeri de 12 toplamı 24 olur. Çift sayı.*

Araştırmacı: *Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklar mısın?*

Yusuf_(C1G1): *Mesela buraya harf yazacağım. h artı h sonucu h yapar. h tek.*

Araştırmacı: *Çift olduğu bir örnek verebilir misin?*

Yusuf_(C1G1): *Hmm... ff olursa çift.*

Yusuf_(C1G1) cebirsel gösterimde de eğer harfi tek olarak gösterirse tek sayıyı temsil edeceğini, çift gösterirse çift sayıyı temsil edeceğini belirtmiştir. Üç basamaklı sayıların tek sayı ya da çift sayı olamayacağını söylemiştir. Yusuf_(C1G1), yazılı dil kullanımında işlemsel süreci gösterirken işlem önceliğini dikkate almamıştır.

$$\begin{array}{r} 2x + 5 = 49 \times 2 \\ 44 \end{array}$$

Şekil 10. Yusuf_(C1G1)' un işlem önceliğine dair yaptığı hata

Yusuf_(C1G1), $2x+5$ ifadesinde x ' e 44 değerini verdiğinde önce 44 ile 5' i toplamış, ardından 2 ile çarpmıştır. Benzer yanlışları diğer sorularda da göstermiştir. Örüntü sorusunda ise örüntünün her bir adımında üç bilye arttığı halde dört bilye arttığını söylemiş ve kuralı doğru ifade edememiştir. 180° nin geniş açı olduğunu belirtmiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olması nedeniyle üçgenlerin de geniş açılı üçgenler olduğunu söylemiştir. 90° dik açı olduğu için dik açılı üçgenlerin de iç açılarının ölçüleri toplamının 90° olabileceğini ifade etmiştir. Sözel olarak verilen ifadede üçgen eşitsizliğini gösterememiş, gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturamamıştır. Bir üçgende iki kenar uzunluğunun eşit olması gerektiğini söylemiştir. Benzer şekilde sözel olarak verilen ifadede Pisagor Bağıntısı' nı açıklayamamış, gerçek yaşam durumu içerisinde

oluşturamamıştır. Ayrıca, Pisagor Bağıntısı' nın sözel ifadesinde geçen kenar uzunluklarının karesi ifadesindeki kare kavramını geometrik şekil olan kare olarak düşünmüştür.

4.1.4.2. Hale_(C1G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Hale_(C1G2) cebirsel düşünme düzeyi 1. düzey, geometrik düşünme düzeyi ise 2. düzey olarak belirlenen ve matematik dersi not ortalaması 73 olan 6. sınıf öğrencisidir. Bu bölümde Hale_(C1G2) ile yapılan görüşmeler her bir oturum ayrı ayrı değerlendirilmiş ve sunulmuştur.

Hale_(C1G2)' nin 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 44' de gösterilmiştir.

Tablo 44

Hale_(C1G2) 'nin cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X		X					X		X	
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.										X	

1. oturumda Hale_(C1G2) sorular için genellikle kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. 1., 2., 4. ve 9. sorularda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda, 11. soruda ise aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. 1. ve 2. sorular işlemsel süreç sonucunda sayının oluşumunu sembolik olarak düşünme becerisini ölçen sorular olduğu için bu soruda bu beceriyi kolaylıkla gösterebilmiştir. Ancak, sözel ifadeleri cebirsel gösterimle ifade etmesi istenen sorular için sembolik düşünme gerçekleştirmekte zorlanmıştır. Örüntü sorusunun kuralını sembolik olarak düşünmüş ve nasıl oluşturduğunu açıkladığı için aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Hale_(C1G2) ile yapılan görüşmeler neticesinde 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 45' deki gibidir.

Tablo 45

Hale_(C1G2) 'nin geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		X
Aksiomatik formal dünya	X		

Hale_(C1G2) ikinci oturumda üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklayabilmiştir. Bu soruda aksiomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmişir. Sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğini sembolik olarak gösterebilmiş, düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Ancak, sözel olarak verilen Pisagor Bağıntısı' nı sembolik olarak gösterememiştir. Dolayısıyla bu soruda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda sınırlı kalmıştır.

Hale_(C1G2)' nin 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluştururken geliştirdiği düşünme süreçlerinin değerlendirilmesi Tablo 46' daki gibidir.

Tablo 46

Hale_(C1G2)' nin gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	
Aksiomatik formal dünya	X	

Üçüncü oturumda Hale_(C1G2) üçgen eşitsizliğini oluşturabilmiş ve sembolik olarak ifade edebilmiştir. Düşünme süreci aksiomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Sözel olarak verilen ifadede açıklamakta zorlandığı Pisagor Bağıntısı' nı gerçek yaşam durumu içerisinde de oluşturamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Hale_(C1G2)' nin matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 47' deki gibidir.

Tablo 47

Hale_(C1G2)'nin matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi	X	5 tane bir şeyi anlatırken mesela 1,2,3,4,5 diye sayıyoruz.
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsel ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)	X	(Bir sayının 4 katının 8 fazlası ve aynı sayının 2 fazlasının 4 katı ifadeleri için) $x \cdot 4 + 8$ $(x + 2) \cdot 4$
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmaması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		

Hale_(C1G2) soruları cevaplandırırken genellikle sözlü dili kullanmayı tercih etmiştir. İşlemsel süreci gösterirken yazılı dili kullanmıştır. Ancak, yazılı dil kullanımında hatalar yapmıştır. Üçgeni tanımlarken ya da Pisagor Bağıntısı ile ilgili gerçek yaşam durumu içerisinde istenen şekli oluştururken uygun şekilleri çizmiş ama uygun görsel dili kullanamamıştır. Sözel olarak verilen ifadelere uygun sembolik ifade oluşturabilmiş; ancak sembolik dil kullanımında bazı sorularda zorlanmıştır. Matematiksel dil becerileri nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Hale_(C1G2) ile yapılan görüşmelerde dikkat çeken bulgulardan bazıları şu şekildedir:

Hale_(C1G2) bir basamaklı sayıların tek sayıyı, iki basamaklı sayıların da çift sayıyı gösterdiğini belirtmiştir. Üç basamaklı sayıların ise tek sayı ya da çift sayı olamayacağını söylemiştir. Görüşmeden bir kesit aşağıdaki gibidir:

("İki tek sayının çarpımı tek sayıdır." ifadesini açıklarken)

Hale_(C1G2): Bence bu ifade doğru değil. Çünkü 7 ile 7'yi çarpınca 49 eder ikili olduğu için tek sayı olmaz.

Araştırmacı: 49 çift sayı mıdır?

Hale_(C1G2): Çift sayı. Ama 1 ile 1' i çarparsan tek sayı olabilir. 2 ile 2' yi çarpınca da 4 olur. Bu da tek sayıdır.

Araştırmacı: 2 tek sayı mıdır?

Hale_(C1G2): Evet.

Araştırmacı: Peki 100 nasıl bir sayıdır?

Hale_(C1G2): Bu sayı çift olabilir. Ama çift sayı ikiliydi. Bu sayı üçlü. O zaman çift sayı olmaz. Tek de olmaz.

Hale_(C1G2) diğer sorularda da çift sayı ve tek sayıyı aynı şekilde ifade etmiştir. Dil kullanımı açısından iki basamaklı sayıları ikili, üç basamaklı sayıları üçlü olarak ifade etmiştir. Hale_(C1G2) 1 sayısını a ile, 2 sayısını da b harfi ile temsil etmiştir. İki sayının toplamı olan 3 sayısını da c harfi ile temsil etmiştir. Sayıların sırasıyla harflerin alfabadeki sırasıyla temsil edilebileceğini söylemiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir:

("Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır." ifadesini açıklarken)

Hale_(C1G2): a ve b ardışık olabilir. Çünkü a' nın peşinden gelir.

Araştırmacı: Toplamlarını nasıl gösterirsin?

Hale_(C1G2): Bilemeyiz aslında ama aklıma bir şey geliyor. 1 ile 2' nin toplamı 3 ya. a ile b' nin toplamı da c olabilir. a birinci rakam, b ikinci rakam. Üçüncü rakam da c. O zaman bunun cevabı c olabilir.

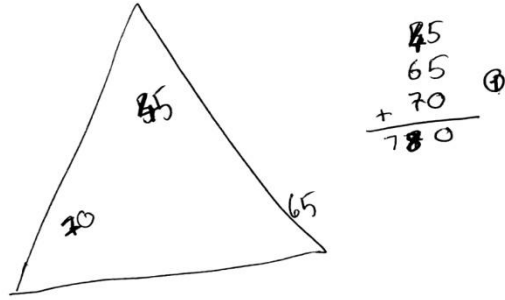
Araştırmacı: c, 3 sayısını gösteriyorsa 5 sayısını ne gösterir?

Hale_(C1G2): d harfi. Şu anda saydım da emin değilim.

Araştırmacı: Peki 50' yi nasıl gösterirsin?

Hale_(C1G2): 50' yi gösteremem. Çünkü sayılar şey harfler bitiyor ya sayılar sonsuz. Harfler bitiyor.

Hale_(C1G2), görüldüğü üzere sayılar ile alfabadeki harflerin sırası arasında bir ilişki kurmuştur. Ancak, dil kullanımı açısından harfleri rakam olarak söylemiştir. İlerleyen süreçte Hale_(C1G2) $2x+5$ ifadesini iki türlü düşünmüştür. $2x$ teriminde 2 ile x' in çarpım durumunda olduğunu belirttiği gibi x' in değeri 10 ise 210 sayısı ile gösterebileceğini de söylemiştir. Hale_(C1G2), "Bir sayı" ile başlayan sözel ifadelerle uygun cebirsel ifade yazabilmiştir. Cebirsel ifadelerin gösteriminde parantezli gösterimlere dikkat etmiştir. Örüntü kuralını oluşturabilmiştir. Hale_(C1G2) bir üçgen çizerek iç açı ölçülerini ölçebilmiştir. Ardından açı ölçülerini toplayarak üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklayabilmiştir Ancak, 180° nin geniş açı olduğunu söyleyerek hata yapmıştır.

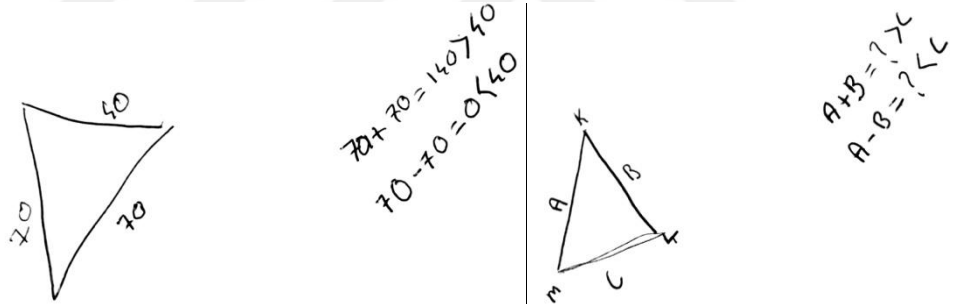


Şekil 11. Hale_(C1G2)'nin üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını gösterme süreci

Hale_(C1G2) sözel olarak ifade edilen üçgen eşitsizliğinde anlatılmak isteneni açıklayabilmiş ama ispat sürecini gösterememiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir:

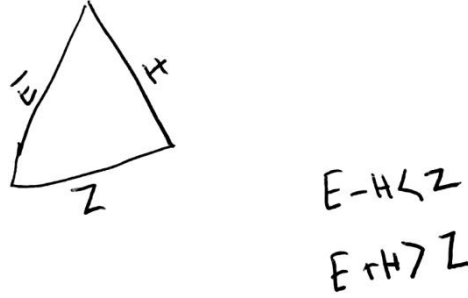
(Sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğini açıklarken)

Hale_(C1G2): Mesela burası 70 burası da 70 oluyor. Burası da 40. Bunların toplamı 180 oluyor. Yani bu şekilde eşkenar üçgen demek istiyor olabilir. Toplamından küçük o zaman şöyle olabilir. 70 ile 70'in toplamı 140. 40' da 140' dan küçük o şekilde. 70 ile 70'in farkı 0. 40' da 0' dan büyük.



Şekil 12. Hale_(C1G2)'nin sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğine dair çözüm süreci

Hale_(C1G2) üçgen eşitsizliğini açıklarken iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olması ile kenar uzunluklarının toplamını ilişkilendirmiştir. Ayrıca ikizkenar üçgeni, eşkenar üçgen olarak ifade etmiştir. Sözel ifadeye uygun sembolik ifadeyi yazabilmiş, üçgen eşitsizliğini sembolik olarak ifade edebilmiştir. Ancak, dil kullanımı açısından hata yapmıştır. Hale_(C1G2) eşitsizliği sembolik olarak gösterirken önce eşittir yapıp sonra soru işareti yazmıştır. Bunun nedenini sözlü olarak A ile B' nin toplamının eşit olduğu değer bilinmemesinden kaynaklandığı şeklinde belirtmiştir. Hale_(C1G2), gerçek yaşam durumu içerisinde de farklı kenar uzunluklarını deneyerek üçgen eşitsizliğini oluşturabilmiş ve sembolik olarak ifade etmiştir.



Şekil 13. Hale_(C1G2)'nin gerçek yaşam durumu içerisinde oluşturduğu üçgen eşitsizliğine dair sembolik ifadesi

Hale_(C1G2), sözel olarak verilen ifadeden Pisagor Bağıntısı' nı açıklamakta zorlanmış ve gerçek yaşam durumu içerisinde de oluşturamamıştır. Hale_(C1G2) matematiksel dil kullanımı açısından bazı hatalar yapmıştır. Düşünme süreçleri açısından 2 soruda aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaşsa da dil kullanımı açısından aksiyomatik formal dünya boyutunda beceri gösterememiştir. Özellikle yazılı dil gösterimlerinde işlemsel süreci gösterirken bazı hatalar yapmıştır.

$$10 + 2 = 12 \cdot 4 = 48$$

$$10 \times 4 = 40 + 8 = 48$$

Şekil 14. Hale_(C1G2)'nin yazılı dil kullanımında yaptığı hata

Hale_(C1G2), işlemsel süreci gösterirken her bir işlem adımını birbirine eşitleyerek devam etmiştir. Dolayısıyla yazılı dil becerilerinde eksiklikler olduğu düşünülmüştür.

4.1.4.3. Rana_(C1G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Rana_(C1G3) cebirsel düşünme düzeyi 1. düzey, geometrik düşünme düzeyi ise 3. düzey olarak belirlenen ve matematik dersi not ortalaması 86 olan 6. sınıf öğrencisidir. Bu bölümde Rana_(C1G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi her bir oturum için ayrı ayrı yapılmıştır.

Rana_(C1G3)'nin 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 48' de gösterilmiştir.

Tablo 48

Rana_(C1G3)'nin cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X		X								
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.											

$Rana_{(C1G3)}$ ' nın cebir öğrenme alanı ile ilgili sorularda genellikle kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirdiği belirlenmiştir. 5, 4+3 ve $a+3b$ ' yi açıkladığı sorularda ise düşünme boyutu nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru gelişme göstermiştir. Ancak, diğer sorularda sembolik düşünme geliştirememiştir.

$Rana_{(C1G3)}$ ' nın 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 49' da gösterilmiştir.

Tablo 49

$Rana_{(C1G3)}$ ' nın geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiyomatik formal dünya			X

$Rana_{(C1G3)}$ geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını ve sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğini açıklayamamıştır. Ayrıca üçgen eşitsizliğini sembolik olarak ifade edememiştir. Düşünme boyutu kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Sözel olarak verilen Pisagor Bağıntısı' nı açıklayamamış; ancak ifadeye uygun sembolik ifade oluşturabilmiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

$Rana_{(C1G3)}$ ' nın 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmaya yönelik geliştirdiği matematiksel düşünme süreçlerinin değerlendirilmesi Tablo 50' de gösterilmiştir.

Tablo 50

Rana_(C1G3)' nın gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiyomatik formal dünya		

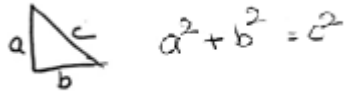
Rana_(C1G3) sözel olarak verilen ifadelerde açıklamakta zorlandığı üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı gerçek yaşam durumu içerisinde de açıklamakta zorlanmıştır. Sözel olarak verilen ifadede Pisagor bağıntısını sembolik olarak ifade ettiği halde gerçek yaşam durumu içerisinde ifade edememiştir. Düşünme süreci iki soruda da kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Yapılan görüşmeler sonucunda Rana_(C1G3)' nın matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 51' deki gibidir.

Tablo 51

Rana_(C1G3)' nın matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların olarak edilmesi	X	“3 tek bir sayıdır. 5 de tek bir sayıdır. Onların çarpımı 15 ediyor. O da çift sayı değildir.”
	Nesnelerin, kavramların olarak edilmesi		
	Nesnelerin, kavramların olarak edilmesi		
Nesnel süreçsel sembolik	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin,	X	(Pisagor Bağıntısı için)

dünya	denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)	
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması	

Rana_(C1G3)' nın soruları cevaplandırırken genellikle sözlü dili kullanmayı tercih ettiği belirlenmiştir. Sorularda çözüm yaparken yazılı dili kullanan Rana_(C1G3), dil kullanımı açısından hatalar yapmıştır. Görsel dili kullanmada zorluk yaşamıştır. Sorularda istenen geometrik şekilleri gösterse de geometrik dilin kurallarına uymamıştır. Sözel ifadelere uygun sembolik ifade oluşturmakta zorlansa da sembolik dil kullanımı açısından başarılı olmuştur. Ancak, aksiyomatik formal dünya boyutuna uygun dil becerisi gösterememiştir. Bu anlamda matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Rana_(C1G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Rana_(C1G3)' nın sembolik ifade oluşturmada zorlandığı belirlenmiştir. Ardışık sayılar için hiçbir açıklamada bulunamamıştır. Tek ve çift sayıları cebirsel olarak ifade edememiştir. Sayı ile rakam kavramlarını birbirine karıştırdığı belirlenmiştir. Sayıların 0 ile 9 arasında olduğunu belirtmiştir. İşlem önceliğini doğru bir şekilde ifade edebilmiş; ancak, sorularda verilen ifadeleri cebirsel olarak gösterirken parantezi dikkate almadığı için uygulamada hatalar yapmıştır. Üçgeni belirtirken çeşitlerini dar üçgen, geniş üçgen olarak ifade etmiştir. Matematiksel dil kullanımı açısından hatalar yapmıştır. Bir üçgenin kenar uzunluklarını üçgen üzerinde gösterirken uzunluk birimlerini göstermemiştir. Sözel olarak verilen ifadede üçgen eşitsizliğini açıklayamamıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde ise doğru bir düşünme süreci geliştirdiği halde üçgen eşitsizliğine ulaşamamıştır. Benzer şekilde gerçek yaşam durumu içerisinde Pisagor Bağıntısı' nı oluşturamamış; ancak, sözel olarak verilen ifadede sembolik olarak gösterebilmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir:

(“Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, üçüncü kenarın uzunluğunun karesine eşittir.” ifadesini açıklarken)

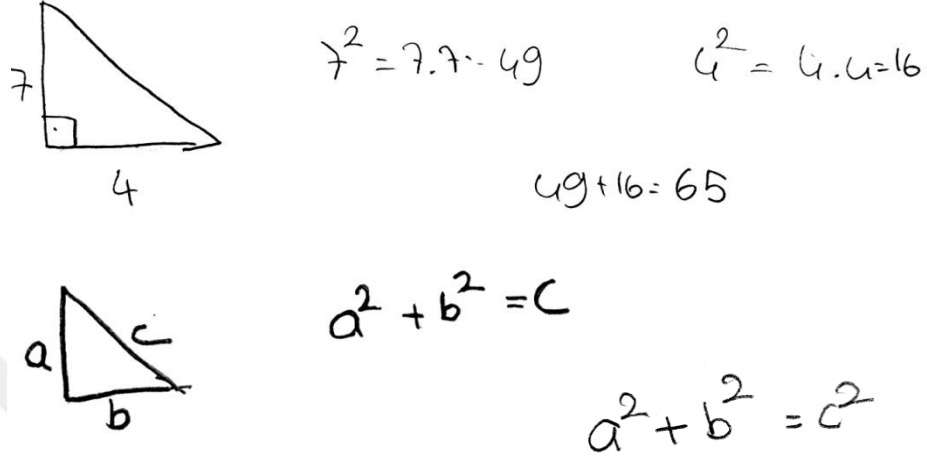
Rana_(C1G3): *Dik üçgen çizdiğimizde bu kenar dik oluyor. Dik kenarları burası ile burası. Şimdi burası 7 olsun Burası da 4. 7 üzeri karenin şeyi 7 çarpı 7 den 49 diyor. 4 üssü kare de 4 çarpı 4 den 16 ediyor. 49 ile de 16 yı topladığımızda 65 ediyor. O da 4 ile 7' nin karesi.*

Araştırmacı: Cebirsel olarak gösterebilir misin?

Rana_(C1G3): a karesi diyebiliriz a karesi artı b' nin karesi eşittir c' ye.

Araştırmacı: c' ye mi eşittir?

Rana_(C1G3): Karesine eşit olmalı. c' nin karesi.



Şekil 15. Rana_(C1G3)' nın sözel ifadede yer alan Pisagor Bağıntısı' nı açıklama süreci

Rana_(C1G3) dik üçgende dik kenar uzunluklarını 4 cm ve 7 cm olarak belirlemiştir. Karelerinin toplamının 65 olduğunu söylemiş ve 65' i de 4 ve 7' nin karesi olarak belirtmiştir. Bu durum 65' in tam kare olmaması ve 6. sınıf öğrencisinin kareköklü ifadeleri daha önce öğretim programı içerisinde görmemiş olmasından kaynaklandığı şeklinde yorumlanmıştır. İfadeyi açıklamakta zorlanan Rana_(C1G3), ifadeye uygun sembolik ifadeyi oluşturabilmiştir.

4.1.4.4. Özgür_(C2G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Cebirsel düşünme düzeyi ikinci düzey, geometrik düşünme düzeyi birinci düzey olarak belirlenen Özgür_(C2G1)' ün matematik dersi not ortalaması 81' dir. Bu bölümde Özgür_(C2G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi her bir oturum için ayrı ayrı yapılmış ve sunulmuştur.

Özgür_(C2G1)' ün 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 52' de gösterilmiştir.

Tablo 52

Özgür_(C2G1)' ün cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Boyutları	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X		X					X			
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.											

Özgür_(C2G1) cebir öğrenme alanı ile ilgili sorularda genellikle kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. 1,2,4. ve 9. sorularda sembolik düşünme geliştirebilmiş, nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Cebirsel ifade kavramına dair bilgi yapıları mevcut olan Özgür_(C2G1) sözel ifadeleri sembolik ifadelere dönüştürürken zorlanmıştır.

Özgür_(C2G1)' ün 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 53' de gösterilmiştir.

Tablo 53

Özgür_(C2G1)' ün geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiyomatik formal dünya			

Özgür_(C2G1) geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci göstermiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklayamamış, sözel olarak verilen ifadelerde anlatılan üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı ifade edememiştir.

Özgür_(C2G1)' ün gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluştururken geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları Tablo 54' deki gibidir.

Tablo 54

Özgür_(C2G1)' ün gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları

	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiomatik formal dünya		

Sözel olarak verilen ifadelerde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı açıklayamayan Özgür_(C2G1) gerçek yaşam durumu içerisinde de oluşturamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Özgür_(C2G1)' ün matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 55' deki gibidir.

Tablo 55

Özgür_(C2G1)' ün matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin , kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	<i>(a+3b ifadesi için) “Bilinmeyenler vardır. Bu bilinmeyenleri toplamamız lazım. a ve b değişkendir. a ve b aynı olamaz. b ile 3 çarpılmış. Bir kitap ile farklı bir kitaptan 3 tanenin toplamı.”</i>
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi		
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)		
Aksiomatik formal dünya	Ulaşılmaması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		

Özgür_(C2G1) açıklamalarında genellikle sözlü ifade kullanmayı tercih etmiştir. Açıklamalarını sözlü olarak yapmış ve sözlü dil becerisini diğer dil becerilerine göre daha

doğru kullandığı belirlenmiştir. Yazılı dili sadece işlemsel süreci gösterirken kullanmıştır. Ancak, dil kullanımında birçok hata yapmıştır. Örnek olarak, 3 ile 3' ün çarpımının 6 oluşturacağını söylemiştir. Sorularda işlem önceliğine dikkat etmemiştir. Geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda görsel dil becerilerini kullanmak istemiş; fakat, dik açığı 90 cm^2 şeklinde gösterdiği benzer dil hataları yapmıştır. Özgür_(C2G1) ifadelere uygun sembolik ifadeler oluşturmakta zorlanmıştır. Sadece bir soruda sözel ifadeye uygun sembolik ifade oluşturabilmiştir. Dolayısıyla matematiksel dil becerileri kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Özgür_(C2G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Özgür_(C2G1) sorulara dair açıklamalarında sembolik ifade kullanmak yerine ifadeleri sayısal verilerle açıklamaya çalışmıştır. Cebirsel ifadeye yönelik doğru bilgi yapılarına sahiptir. Ancak, bu bilgi yapılarını kullanamadığı belirlenmiştir. İki bilinmeyen sayı arasında 2 fark varsa bu iki sayı arasındaki ilişkiyi sembolik olarak düşünme sürecinde doğru şekilde ifade edememiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir:

($28 + \square = 30 + \triangle$ ifadesinde dörtgen ve üçgen arasındaki ilişkiyi açıklarken)

Özgür_(C2G1): Hepsinin aralarında 2 basamak var yani 2 rakam 2 sayı var.

Araştırmacı: Aralarındaki ilişkiyi cebirsel olarak açıklar mısın?

Özgür_(C2G1): Bu x olsaydı üçgen yerine de x yok burası a iken burası c olmalıydı.

Araştırmacı: a ile c arasında 2 fark mı var?

Özgür_(C2G1): Evet b,c.

Araştırmacı: Peki 5 fark olsaydı nasıl düşünürdün?

Özgür_(C2G1): O zaman d olurdu.

Özgür_(C2G1), iki bilinmeyen sayı arasındaki 2 farkı 2 basamak, 2 rakam şeklinde belirterek dil kullanımı açısından hata yapmıştır. Ardından, harflerin alfabedeki sıraları arasındaki farkı sayılar arasındaki farkla ilişkilendirmiştir. Özgür_(C2G1) ardışık sayı kavramını da yanlış ifade etmiştir. Ardışık sayıları, birbirinin aynısı olan sayılar olarak düşünmüştür. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir:

("Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır." ifadesini açıklarken)

Özgür_(C2G1): Hayır bu doğru değil. Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır diyor. Her zaman olmaz. Mesela 8 ile 8' i toplarsak 16 olur. O da tek sayı olmaz.

Araştırmacı: 8' in ardışığı nedir?

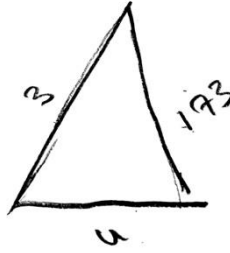
Özgür_(C2G1): 8' in ardışığı 8' dir. Toplamları çift sayı olduğu için yanlış.

Özgür_(C2G1) sembolik ifade oluşturmakta da zorlanmıştır. Sözel ifadeyi cebirsel olarak gösterebilmek için sembolik gösterimde yer alan değişkeni temsil eden harfin sayısal

değerinin bilinmesi gerektiğini savunmuştur. Bir dikdörtgensel bölgenin alanını bulma yolunu yüzey ve yüksekliğin çarpımı şeklinde ifade etmiştir. Kenar uzunluğunu yüzey olarak belirtmiştir. Özgür_(C2G1) sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğini açıklamaları beklenen soruda üçgenin kenar uzunluklarının toplamını 180 br olarak düşünmüştür. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını kenar uzunlukları toplamı olarak düşünmüştür. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir:

(“Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farkının mutlak değerinden ise büyüktür.” ifadesini açıklarken)

Özgür_(C2G1): Çizdim burası geniş olacak burası da dik. Şimdi yani bu kenarın uzunluğu diğer iki kenarın toplamından küçüktür demek istiyor. Mesela burası 3 olsa burası 4 olsa burası kaç olabilir? Topamları 7 olur. Burası onlardan büyük olur. Çünkü iç açıları toplamı 180’ dir. 180’ den 7’ yi çıkartırım 173 oluyor. Toplamından küçük diyor ama bizim yaptığımızda büyük çıkıyor. 173 büyük. Bu ifade yanlış.



Şekil 16. Özgür_(C2G1)’ ün sözel ifade olarak verilen üçgen eşitsizliğini açıklama süreci

Aynı düşünceyi Pisagor Bağıntısı ile ilgili soruda da göstermiştir. Sözel olarak verilen ifadeden Pisagor Bağıntısı' na ulaşması beklenen soruda da dik kenar uzunluklarının karelerinin toplanamayacağını belirtmiştir. Kenar uzunluğunun karesini cm^2 olarak düşünmüştür. Öte yandan, cm^2 lerin de toplanamayacağını söylemiştir. Ayrıca, dik açıyı da 90 cm^2 olarak belirtmiştir. Üçgeni de doğru bir şekilde çizememiştir. Görsel dil kullanımı açısından hata yapmıştır.



Şekil 17. Özgür_(C2G1)’ ün dik açıyı ve dik açı karşısındaki kenarı 90 cm^2 olarak göstermesi

Özgür_(C2G1), sözel olarak verilen ifadeler aracılığıyla açıklamakta zorlandığı üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı gerçek yaşam durumu içerisinde de açıklayamamıştır. Üçgen eşitsizliğine dair düşünme sürecinde yine üçgenin iki kenar uzunluğunun toplamını 180' den çıkarması gerektiğini söylemiştir. Bu anlamda Özgür_(C2G1)' ün kavramları birbirine karıştırdığı söylenebilir.

4.1.4.5. Zehra_(C2G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri ikinci düzey olarak belirlenen Zehra_(C2G2)' nın matematik dersi not ortalaması 95' dir. Bu bölümde Zehra_(C2G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi her bir oturum için ayrı ayrı yapılmıştır.

Zehra_(C2G2)' nın 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 56' da gösterilmiştir.

Tablo 56

Zehra_(C2G2)' nın cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X		X					X	X	X	
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.								X	X	X	

Zehra_(C2G2) cebir öğrenme alanı ile ilgili soruların yarısında kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. 1., 2. ve 4. sorularda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda; 9., 10. ve 11. sorularda en üst düşünme boyutu olan aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalan sorular, sözel ifadeler için sembolik ifade oluşturması beklenen sorulardır.

Zehra_(C2G2)' nın 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 57' deki gibidir.

Tablo 57

Zehra_(C2G2)' nın geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiomatik formal dünya			

Zehra_(C2G2) geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklayamamış; sözel olarak verilen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağintısı' nı ifade edemmiştir.

Zehra_(C2G2)' nın 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağintısı' nı oluşturma ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 58' de gösterilmiştir.

Tablo 58

Zehra_(C2G2)' nın gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağintısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiomatik formal dünya		

Zehra_(C2G2) gerçek yaşam durumu içerisinde verilen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağintısı' nı oluşturamamıştır. Sembolik olarak düşünme süreci geliştirememiştir.

Yapılan görüşmeler sonucunda Zehra_(C2G2)' nın matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 59' daki gibidir.

Tablo 59

Zehra_(C2G2)' nın matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

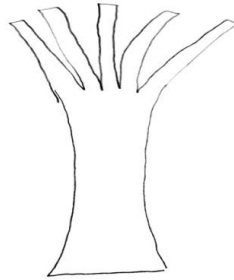
Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal	Nesnelerin, kavramların sözlü	X	(“İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.” ifadesi için) Evet doğru.

somut dünya	olarak tasvir edilmesi			<i>Mesela örnek verirse 5 ve 5' in çarpımı 25 bu tek bir sayı ya da 5 ile 3 ün çarpımı 15 çıkar. Bu da tek bir sayıdır.</i>
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi			
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi			
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)	X		(Bir sayının 4 katının 8 fazlası ve aynı sayının 2 fazlasının 4 katı ifadeleri için) $4x + 8$ $(2 + x)4$
Aksiomatik formal dünya	Ulaşılmaması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması			

Zehra_(C2G2) sorularda açıklamalarını yaparken sözlü dili kullanmayı tercih etmiştir. Yazılı dil ve görsel dil kullanımında hatalar yapmıştır. Sözel ifadelere uygun sembolik ifade oluşturmakta zorlansa da, cebirsal olarak düşünebildiği sorular için sembolik ifade oluşturma becerisini de göstermiştir. Matematiksel düşünme süreci bazı sorularda aksiyomatik formal dünya boyutunda yer alsa da matematiksel dil becerileri aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaşamamıştır. Matematiksel dil becerileri nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Zehra_(C2G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Zehra_(C2G2) 5 sayısını anlatırken diğer 6. sınıf öğrencilerinden farklı olarak şekil üzerinden anlatmıştır. 5' i bir ağacın 5 dalı ile tasvir etmiştir.



Şekil 18. Zehra_(C2G2)'nin 5' e dair tasviri

Zehra_(C2G2) sorularda verilen ifadeleri açıklarken cebirsel düşünme sürecinden önce sayılarla işlemsel süreci göstermeye odaklanmıştır. Cebirsel ifadeye ilişkin doğru bilgi yapılarına sahiptir. Bir cebirsel ifadeye uygun günlük yaşamdan örnekler verebilmiştir. Ancak, bir sayı ve bu sayının tekrarının ardışık sayılar kavramına örnek olabileceğini ifade etmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir:

("Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır." ifadesini açıklarken)

Zehra_(C2G2): Bence doğru değil. Çünkü mesela 2 ile 2' nin toplamı 4' tür. 5 ile 5' in toplamı 10.

Araştırmacı: Ardışık iki sayıyı açıklar mısın?

Zehra_(C2G2): Ardışık iki sayı yani ardışık aynı. Mesela 3 ve 3 toplamı 6. Tek sayı değil.

Araştırmacı: Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?

Zehra_(C2G2): Evet. Mesela $2x$ ardışığı çift. Yani ardışık iki sayı $2x$. Bu da 2 tane x anlamında.

Zehra_(C2G2) bir sayının ardışığının kendisi olduğunu söylemiştir. Cebirsel olarak düşündüğünde de x ' in ardışığının x olduğunu ve toplamlarını temsil eden $2x$ ' in çift sayı olduğunu belirtmiştir. $2x$ ' in çift sayı olacağını belirttiği halde diğer sorularda tek sayı ve çift sayıyı gösterecek cebirsel ifade düşünememiştir. Derslerde verilen örneklerle benzer şekilde "Bir sayı" ile başlayan ifadelerle uygun cebirsel ifadeler yazabilmiştir. Cebirsel ifade yazarken matematiksel dilin kurallarına dikkat etmiştir. Parantezli işlemlerde çarpma işleminin dağılma özelliğini cebirsel ifadeler için uygulayabilmiştir.

$$2(2x + 4) \rightarrow 2x + 2x + 4x$$

$$8 + 4x$$

Şekil 19. Zehra_(C2G2)' nın bir cebirsel ifade üzerinde çarpmanın dağılma özelliğini gösterme süreci

Zehra_(C2G2) bir örüntünün kuralının nasıl bulunacağını açıklamış ve örüntü sorusunda kuralı doğru bir şekilde oluşturabilmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Örüntü sorusu için)

Zehra_(C2G2): İlk önce kaçır kaçır arttığına bakarım. Sonra kaçır kaçır arttığını bulduktan sonra ilk önce bu örüntünün kuralını bulurum tabi mesela burada $3n-2$. Çünkü

üçer üçer artmış ve 3 ile 1' i çarparsak 3. İlk baştaki örüntü 1 olduğu için 1 elde etmek için 2 çıkartırım.

Araştırmacı: 6. adımında kaç bilye vardır?

Zehra_(C2G2): Yani n' yi 6 olarak düşünürsek 6 çarpı 3' den 18. 2 çıkarırsak 16.

Araştırmacı: Kaçınca adımda 25 bilye vardır?

Zehra_(C2G2): Denerim. 9. adımında.

Araştırmacı: Neden 8 ve 9 denedin?

Zehra_(C2G2): Çünkü 6. adımında eğer 16 bilye varsa 8 ve 9' da ya da 7' de bunlar yani 25 tane olabilir. Yani 6. adımında 16 varsa 8. adımında 25 olabilir diye düşündüm. 7 yakın olduğu için 8. adımı düşündüm. 8 olmayınca 9. adımı düşündüm ve çıktı.

Zehra_(C2G2) örüntü kuralından yola çıkarak 6. adımında kaç bilye olduğunu bulmuştur. Ancak, 25 bilyenin kaçınca adımda yer aldığını deneyerek bulmuştur. Bu durumun nedeni olarak denklem çözme becerisine yönelik kazanımların öğretim programı içerisinde 7. sınıfta yer almasından kaynaklandığı düşünülmüştür. Zehra_(C2G2)' nın daha görmediği bilgiyi uygulayamadığı şeklinde yorumlanmıştır. 25 bilyenin kaçınca adımda yer aldığını gösterdiği işlemsel süreçte ise dil kullanımı açısından hata yapmıştır. Çözümü eşitlikleri yan yana yazarak devam ettirmiştir.

$$3 \cdot 8 = 24 - 2 = 22$$

$$3 \cdot 9 = 27 - 2 = 25$$

Şekil 20. Zehra_(C2G2)' nın hatalı yazılı dil kullanımı

Zehra_(C2G2) üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklarken bir üçgenin iç açı ölçüleri ölçülürse bulunabileceğini söylemiştir. Ancak, bir üçgenin iç açılarının ölçülerini ölçmemiştir. Sözel olarak verilen ifadede yer alan üçgen eşitsizliğini açıklayamamıştır. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Sözel olarak ifade edilen üçgen eşitsizliğini açıklarken)

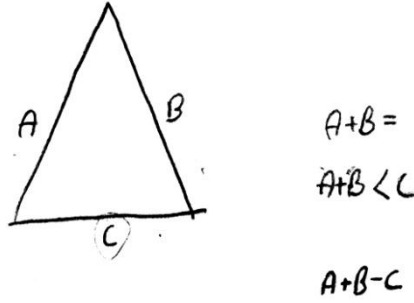
Zehra_(C2G2): Bu kenarı 30 olsa bu kenarı 40 olsa 180 çıkmayacak ama olsun. Bu iki kenarın toplamından küçük bir şey. Burası da 50 olsa. Bu iki kenarın toplamı 70 çıkar. Bu iki kenarın toplamından küçük. Yani 70' den 50' yi çıkartırsak 20. Farkından ise büyük.

Araştırmacı: Son söylediğini bir daha açıklar mısın?

Zehra_(C2G2): 70' den farkından küçük oluyor. Yani 50' den küçük.

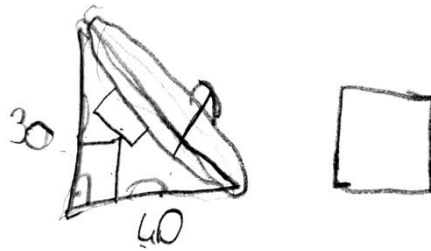
Araştırmacı: İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

Zehra_(C2G2): Üçgenin burası a burası b burası c olsun. c kenarını ele alırsak a artı b eşittir c' den büyük. c' den küçük şöyle gösteririm. Bu iki kenarın toplamından küçük olması gerekiyor diğer kenarı. Yani şöyle gösteririm a artı b küçüktür c' den. Bu iki kenarın toplamı bu iki kenarın toplamından küçük olacaktı. Farkından büyüktür için de farkının a artı b eksi c olarak gösteririm.



Şekil 21. Zehra_(C2G2)' nın üçgen eşitsizliğine dair sembolik gösterimi

Zehra_(C2G2) üçgen eşitsizliğinin sembolik gösteriminde üçgenin iki kenar uzunluğunun toplamı üçüncü kenar uzunluğundan küçük olacak şekilde göstermiştir. Ayrıca iki kenar uzunluğunun toplamından da üçüncü kenar uzunluğunu çıkartılması gerektiğini söylemiştir. Sembolik gösterim açısından hata yapmıştır. Üçgen eşitsizliğinin sözel ifadesini anlayamamıştır. Sözel olarak verilen Pisagor Bağıntısı' nda ise yer alan dik kenar uzunluklarının kareleri ifadesindeki kare kavramını geometrik şekil olan kare olarak düşünmüş ve buradan bir düşünme süreci geliştirmeye çalışmıştır. Ayrıca düşüncesine uygun şekil çizmeye çalışmıştır.



Şekil 22. Zehra_(C2G2)' nın dik kenar uzunluklarının karesi ifadesindeki kare kavramına dair tasviri

Sözel olarak verilen ifadelerde açıklayamadığı üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı gerçek yaşam durumu içerisinde de oluşturamamış ve uygun düşünme süreci gerçekleştirememiştir.

4.1.4.6. Serkan_(C2G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Cebirsel düşünme düzeyi ikinci düzey, geometrik düşünme düzeyi ise ikinci düzey olarak belirlenen Serkan_(C2G3)' in matematik dersi not ortalaması 91' dir. Bu bölümde Serkan_(C2G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi her bir oturum için ayrı ayrı yapılmış ve sunulmuştur.

Serkan_(C2G3)' in 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 60' da gösterilmiştir.

Tablo 60

Serkan_(C2G3)' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X		X					X			
Aksiomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.											

Serkan_(C2G3) 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorularda genellikle kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. 1., 2., 4. ve 9. sorularda düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Serkan_(C2G3) sözel ifadeleri sembolik ifadelere dönüştürmekte zorlanmıştır.

Serkan_(C2G3)' in 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 61' de gösterilmiştir.

Tablo 61

Serkan_(C2G3)' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiomatik formal dünya			

2. oturumda yer alan geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda Serkan_(C2G3) sadece üçgen eşitsizliğine dair sembolik ifade oluşturabilmiş ve düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını ve sözel olarak verilen ifadede yer alan Pisagor Bağıntısı' nı açıklaması istenen sorularda ise düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.

Serkan_(C2G3)' ın 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 62' de gösterilmiştir.

Tablo 62

Serkan_(C2G3)' ın gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiomatik formal dünya		

Serkan_(C2G3) gerçek yaşam durumu içerisinde oluşturmaya beklenen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Serkan_(C2G3)' ın matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 63' deki gibidir.

Tablo 63

Serkan_(C2G3)' ın matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	(5' i anlatırken) “Sayıdır. Mesela 1,2,3,4,5 diye sayarız. 4' den sonra 6' dan önce gelen sayı.”
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		

	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi		
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)	X	(Bir sayının 4 katının 8 fazlası ve aynı sayının 2 fazlasının 4 katı ifadeleri için) $a+8$ $(a+2)4$
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmayı istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		

Serkan_(C2G3) soruları cevaplandırırken genellikle sözlü dili kullanmayı tercih etmiştir. İşlemsel süreci gösterirken yazılı dili kullanmış; ancak, birçok hata yapmıştır. Görsel dil becerileri de yetersiz kalmıştır. Sözel ifadelere uygun cebirsel ifade oluşturabilse de, bazı sorularda bu beceriyi göstermekte zorlanmıştır. Matematiksel dil becerisi nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Serkan_(C2G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Serkan_(C2G3) ardışık sayılar kavramını doğru açıkladığı halde cebirsel olarak açıklayamamıştır. a ile temsil edilen bir sayının ardışığını b olarak göstermiştir. Bunun nedenini ise alfabede a ’ dan sonra b gelmesi olarak açıklamıştır. z ile temsil edilen bir sayının ardışığı sorulduğunda ise olmadığını belirtmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(“Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.” ifadesini açıklarken)

Serkan_(C2G3): Bir sayı a . Ardışığı b .

Araştırmacı: Neden?

Serkan_(C2G3): a ’ dan sonra b geliyor.

Araştırmacı: b ’ nin ardışığı nedir?

Serkan_(C2G3): c .

Araştırmacı: z ’ nin ardışığı nedir?

Serkan_(C2G3): Yok. O zaman a ’ nın ardışığı a .

Araştırmacı: Toplamlarını nasıl gösterirsin?

Serkan_(C2G3): a yapar.

Araştırmacı: Tek sayıyı mı çift sayıyı mı temsil eder?

Serkan_(C2G3): Tek sayı.

Araştırmacı: Neden?

Serkan_(C2G3): *Tektir. Yani tek olduğunu söylersem tektir.*

Serkan_(C2G3) a ile temsil edilen bir sayının ardışığının a olacağını, toplamlarının da yine a olacağını belirtmiştir. a' nın tek sayıyı temsil ettiğinin ise ancak sözel olarak ifade edildiğinde anlaşılabilirliğini söylemiştir. Serkan_(C2G3), $2x+5$ ifadesinde yer alan $2x$ terimini iki basamaklı bir sayı olarak düşünmüştür. Ancak, ilerleyen süreçte yaptığı hatayı farkederek $2x$ ifadesinin 2 ile x' in çarpımını gösterdiğini ifade etmiştir. "Bir sayı" ile başlayan sözel ifadeler için uygun cebirsel ifadeleri yazabilmiş, parantezli işlemi gösterebilmiştir.

Serkan_(C2G3), üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını açıklarken görsel dil becerilerinde yaşadığı birçok sorun ortaya çıkmıştır. Aynı zamanda kavramlara dair yanlış bilgileri de açığa çıkmıştır. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını açıklarken)

Serkan_(C2G3): *Çünkü buraları geniş açı. Buraları böyle düz yani dik olduğu için burası yatay 180 dir.*

Araştırmacı: *Bu şekilde mi açıklarsın?*

Serkan_(C2G3): *Ben kenarlara bağladım yataya.*

Serkan_(C2G3), üçgenin kenarlarını düz ve dik üçgen çizmediği halde dik olarak betimlemiştir. Yatay olarak betimlediği kenar üçgenin tabanıdır. Bu kenarın 180 olduğunu söylemiştir. Açı ile kenar kavramlarını birbirine karıştırmış, 180° nin geniş açı olduğunu söylemiştir. Dolayısıyla dil kullanımı açısından hataları ve yanlış bilgi yapıları olduğu düşünülmüştür.

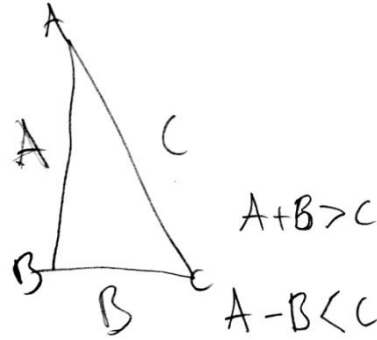
Serkan_(C2G3) sözel olarak verilen ifadede yer alan üçgen eşitsizliğini gösterebilmiş; ancak, eşitsizliğin nasıl oluştuğunu açıklayamamıştır. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Sözel olarak verilen ifadede yer alan üçgen eşitsizliğini açıklarken)

Serkan_(C2G3): *Toplamından küçük olacak. Bu iki kenarın toplamı büyük olacak. Sayı olarak burası 3 olsun. Burası 2 olsun. Üçüncü kenar uzunluğu için topluyoruz bunları. 5 ediyor. O zaman 5' den küçük olması lazım. 4 olabilir. Farkından büyük olması da bunların toplamından büyük olması. Hmm çıkarmak. 1. 1' den büyük olmalı. 2,3,4 olmalı. Çünkü 5' den küçük.*

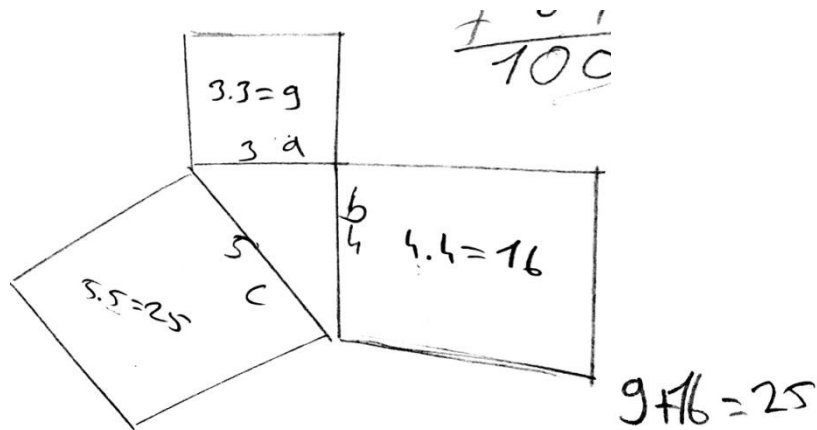
Araştırmacı: *İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?*

Serkan_(C2G3): *Bu a. Bu b. a artı b büyüktür c' den. Küçük olduğunu farkının da a ile b' nin farkı. Eksi yapmam lazım. a eksi b küçüktür c' den.*



Şekil 23. Serkan_(C2G3)' in üçgen eşitsizliğine dair sembolik ifadesi

Serkan_(C2G3) açıklamaları esnasında dil kullanımı açısından hatalar yapmıştır. Kenar uzunlukları toplamını kenarların toplamı şeklinde ifade etmiştir. Serkan_(C2G3)' in eşitsizliğe dair sembolik ifadeyi oluşturabildiği; ancak, iki kenar uzunluğunun farkını mutlak değer içerisinde göstermesi gerekirken mutlak değeri göstermemesi dil kullanımı açısından hata yaptığı şeklinde yorumlanmıştır. Kenar uzunluklarını gösterirken birim kullanmamıştır. Sözel olarak verilen ifadede açıklayamadığı üçgen eşitsizliğini gerçek yaşam durumu içerisinde de oluşturamamıştır. Serkan_(C2G3) Pisagor Bağıntısı' nda geçen dik kenar uzunluklarının kareleri ifadesindeki kare kavramını geometrik şekil olan kare olarak düşünmüştür. Sözel olarak verilen ifadede yer alan Pisagor Bağıntısı' nı açıklayamamıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde sorulan Pisagor Bağıntısı için istenen şekli çizebilmiş, karelerin alanlarını hesaplamıştır. Ancak dik üçgenle karelerin alanları arasında bir bağ kuramamıştır. Pisagor Bağıntısı' nı oluşturamamış ve sembolik olarak ifade edememiştir.



Şekil 24. Serkan_(C2G3)' in gerçek yaşam durumu içerisinde Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecine dair

4.1.4.7. Meltem_(C3G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey, geometrik düşünme düzeyi ise birinci düzey olarak belirlenen Meltem_(C3G1)' in matematik dersi not ortalaması 98' dir. Bu bölümde Meltem_(C3G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi her bir oturum için ayrı ayrı yapılmış ve sunulmuştur.

Meltem_(C3G1)' in 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 64' de gösterilmiştir.

Tablo 64

Meltem_(C3G1)' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X	X						X	X	X	
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.									X	X	

Meltem_(C3G1) cebir öğrenme alanı ile ilgili soruların yarısında kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. 1., 2., 3. ve 9. sorularda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda; 10. ve 11. sorularda aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. İşlemsel süreci belirten sözel ifadeler için uygun cebirsel ifade yazabilmiştir.

Meltem_(C3G1)' in 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 65' de gösterilmiştir.

Tablo 65

Meltem_(C3G1)' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiyomatik formal dünya		X	

Meltem_(C3G1) üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu ve sözel ifadede yer alan Pisagor Bağıntısı' nı açıklayamamış, düşünme süreci bu sorularda kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Sözel olarak verilen ifadede yer alan üçgen eşitsizliğini uygun şekilde açıklamış ve sembolik olarak gösterebilmiştir. Dolayısıyla düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Meltem_(C3G1)' in 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 66' da gösterilmiştir.

Tablo 66

Meltem_(C3G1)' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	
Aksiyomatik formal dünya	X	

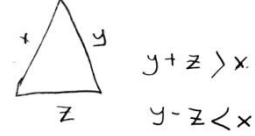
Meltem_(C3G1) gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturabilmiş ve sembolik olarak ifade edebilmiştir. Pisagor Bağıntısı' nı ise gerçek yaşam durumu içerisinde oluşturamamıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Meltem_(C3G1)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 67' deki gibidir.

Tablo 67

Meltem_(C3G1)' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	(4+3 ifdesi için) 4 sayısı ile 3 sayısının toplamı 7 ediyor. Mesela Ali' nin 4 lirası var. Babası da 3 lira veriyor.
	Nesnelerin, kavramların		

	yazılı olarak tasvir edilmesi		
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi		
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)	X	(Üçgen eşitsizliği için) 
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmaması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		

Sözlü dili kullanabilen Meltem_(C3G1) yazılı dil ve görsel dil kullanımında hatalar yapmıştır. Meltem_(C3G1) işlemsel süreci içeren sözel ifadeler için sembolik ifadeyi oluşturabilmiştir. Diğer sözel ifade içeren sorularda ise sembolik ifade oluştururken zorlanmıştır. Matematiksel düşünme süreci bazı sorularda aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirirse de dil becerileri aynı boyutta yer almamıştır.

Meltem_(C3G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Meltem_(C3G1) diğer 6. sınıf öğrencilerinden farklı olarak "28+ □ = 30+ △" sorusu için dörtgen ve üçgen yerine gelebilecek sayılar arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade edebilmiştir. Önce üçgen yerinde x olsaydı dörtgen yerinde 2x olması gerektiğini söylemiş, ardından 2 katı olmadığını 2 fazlası olması gerektiğini belirtmiştir. Bu durumda üçgen yerine x gelirse dörtgen yerine x+2 gelmesi gerektiğini söylemiştir. Ardışık kavramını doğru açıklamış; ancak ardışık iki sayıyı cebirsel olarak gösterirken hata yapmıştır. f ile temsil edilen bir sayının ardışığının 2f, 2f' nin ardışığının da 3f olacağını belirtmiştir. Tek ve çift sayıları cebirsel olarak düşünmesi istendiğinde gerçekleştirdiği düşünme süreci aşağıdaki gibidir.

("Bir tek ve bir çift sayının toplamı çift sayıdır." ifadesini açıklarken)

Meltem_(C3G1): Cebirsel olarak gösteremem.

Araştırmacı: Neden?

Meltem_(C3G1): 2b mesela olabilir mi? 2 çift sayı olduğu için. Bunu çift olarak düşünüyorum. 2 çift sayı olduğu için buna çift diyebiliriz diye.

Araştırmacı: Tek sayıyı nasıl düşünürsün?

Meltem_(C3G1): 3b olabilir.

Araştırmacı: Peki b' nin değeri 2 ise 3b tek midir?

Meltem_(C3G1): *b 2 olursa tek gelir. b' yi 2 olarak düşünürsek 3 ile 2' nin çarpımı 5 ediyor. 5 değil 6 ediyor. Çift.*

Araştırmacı: *3b tek sayıyı mı çift sayıyı mı gösterir?*

Meltem_(C3G1): *Çift. Ama tek de olabilir.*

Araştırmacı: *Nasıl?*

Meltem_(C3G1): *b' yi 1 olarak düşünürsek o zaman da tek gelir. Tek ve çift olabilir.*

Meltem_(C3G1) önce 2 sayısı çift sayı olduğu için 2b ifadesinin çift sayıyı, 3 sayısı tek sayı olduğu için 3b ifadesinin de tek sayıyı göstereceğini belirtmiştir. Tek ve çift sayıları cebirsel olarak gösterirken doğru bir düşünme süreci gerçekleştirememiştir. Cebirsel ifadelerde yer alan parantezli gösterimi olması gereken yerlerde gösterebilmiştir. Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkileri açıklayabilmiştir.

Meltem_(C3G1) örüntü sorusu için önce kuralı oluşturmuştur. Ardından örüntü kuralından yola çıkarak 6. adımda kaç bilye olduğunu ve 25 bilyenin kaçınıcı adımda yer aldığını bulmuştur. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Örüntü sorusu için)

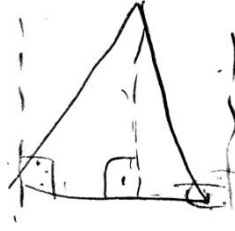
Meltem_(C3G1): *Önce örüntünün kuralını bulalım. 1 gitmiş sonra 4 gitmiş. 7 gitmiş. O zaman üçer üçer gidiyor. Örüntünün kuralı $3n-2$ olur. Yani adım sayısının 3 katının 2 eksiği. 6. adım için 3 çarpı 6 eksi 2 diye buluruz sonuç 18' den 16 çıkar.*

Araştırmacı: *Kaçınıcı adımda 25 bilye vardır?*

Meltem_(C3G1): *Benim bildiğim 25' i 3' e bölüyoruz. 25' in içinde 3 bölünüyor mu bölünmüyor. 7' ye 1 kalıyor. Bu 1' in yanına sıfır eklersek virgül oluyor o da şey çıkıyor işlem bu 10 oluyor. Bu böyle 3 gidiyor. O zaman 25 ile hmm... 25' den 2 çıkartıp yapabiliyor muyuz? Kaçınıcı adımda 25 bilye vardır? 25' i önce şey yapalım. Artı 2 ekleyelim. 27 etti. 3' e bölersek 9 eder. Evet cevabım 9.*

Meltem_(C3G1) kaçınıcı adımda 25 bilye olduğunu bulurken örüntü kuralını önce yanlış uygulamıştır. Ardından denklem çözmeyi konu olarak görmediği halde denklem çözme sürecini sorunun çözümünde gösterdiği belirlenmiştir. Bu durum cebirsel düşünme düzeyinin üçüncü düzey olması ile ilişkilendirilmiştir.

Meltem_(C3G1) üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını açıklarken üçgenin iki kenarının dik olmasından kaynaklandığına dair yanlış bir çıkarımda bulunmuştur.



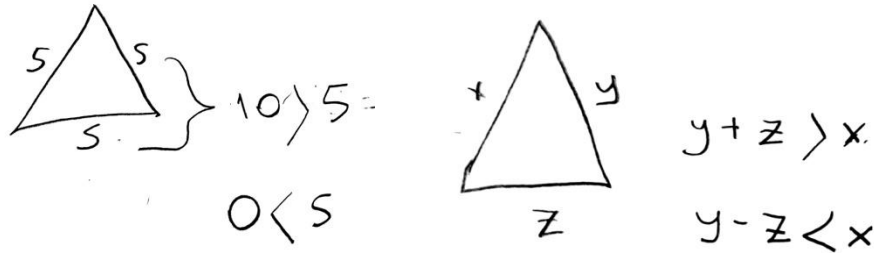
Şekil 25. Meltem_(C3G1)' in üçgenin iki iç açı ölçüsünü 90° olarak gösterme sürecine dair

İki kenarından birinin 90 değerinin de 90 olduğunu toplamalarının da 180 olduğu, bu yüzden de üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu belirtmiştir. Bu açıklamasıyla matematiksel dil kullanımında da hatalar yapmıştır. Kenar uzunluğu ile açı ölçüsünü birbirine karıştırmıştır. Sözel olarak verilen ifadede yer alan üçgen eşitsizliğine dair ispat süreci geliştirebilmiş, eşitsizliği sembolik olarak gösterebilmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

Meltem_(C3G1): Doğru bu. Mesela bir üçgen diyelim. Bütün açıları eşit. Her açısı 5 cm. Diğer iki kenarın toplamı 10 ediyor. Bir kenarın uzunluğu 10' dan küçük olduğu için doğru. Farkından büyüktür diyor. İki kenarın farkı 0 eder. 0' da 5' den küçük olduğu için doğru.

Araştırmacı: İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

Meltem_(C3G1): Bir üçgen çizelim. x, y, z olsun kenarları. Ben tahminime göre şöyle yapıyorum. y artı z eşittir sonucu bilmiyoruz ondan dolayı. Toplamından küçük olan c . Bunun sonucunu şöyle yapayım. Toplamından küçüktür x . Farkından da şöyle. x bu aralıkta.



Şekil 26. Meltem_(C3G1)' in sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğine dair düşünme süreci

Meltem_(C3G1)' in üçgen eşitsizliğini açıklama sürecinde üçgenin kenar uzunluklarının eşit olduğunu söylemek isterken açıların eşit olduğunu ve her açısının 5 cm olduğunu söylediği görülmüştür. Matematiksel dil kullanımı bakımından hata yapmıştır. Ayrıca, eşitsizliği sembolik olarak ifade ederken mutlak değeri göstermese de, sembolik olarak gösterebildiği ama dil kullanımı açısından eksiklikleri olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Meltem_(C3G1) gerçek yaşam durumu içinde de üçgen eşitsizliğini oluşturabilmiştir. Düşünme sürecinde üçgen eşitsizliğine dair cevabı aşağıdaki gibidir.

(Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturma sürecinde bazı kenar uzunluklarını denedikten sonra)

Meltem_(C3G1): 14 büyük geldi. Bence bilmiyorum yani olmadı nedenini bilmiyorum. Şimdi acaba neden büyük geldi? Acaba şöyle olabilir mi? Kenar uzunluğu bu kenarların toplamından büyük olmamalı. Buraya bir üçgen çizelim. İki kenar uzunluğunun toplamı. Burası 9 burası 4 ise 9 artı 5 14 eder. Burası 14 olmuyor. Çünkü toplamı 14. 14' den aşağısı olabilir. 4 olmuyor. Çünkü bu sefer de 9' dan 5 çıkartırsak 4 olur. O zaman 4' den büyük 14' den küçük olacak. 5,6,7,8,9,10,11,12,13 olabilir.

Araştırmacı: Bu açıklamayı cebirsel olarak yapabilir misin?

Meltem_(C3G1): a, b, c olsun. c artı b ' den şey olacak küçük olacak. a eksi b ' den büyük olacak.



$$9 + 5 = 14$$

$$9 - 5 = 4$$

5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13



$$a + b < c$$

$$a - b < c$$

Şekil 27. Meltem_(C3G1)' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturma sürecine dair

Meltem_(C3G1) kenar uzunluklarını deneyerek üçgen oluşturma süreci sonucunda üçgen eşitsizliğine ulaşabilmiş ve sembolik olarak gösterebilmiştir. Sözel olarak verilen ifadede ve gerçek yaşam durumu içerisinde yer alan Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmakta ve açıklamakta zorlanmıştır. Sembolik olarak da gösterememiştir.

4.1.4.8. Sarp_(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Cebirsel ve geometrik düşünme düzeyleri üçüncü düzey olarak belirlenen 6. sınıf öğrencisi Sarp_(C3G3)' in matematik dersi not ortalaması 100' dür. Bu bölümde Sarp_(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi her bir oturum için ayrı ayrı yapılmıştır.

Sarp_(C3G3)' in 1. oturumda yer alan cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 68' de gösterilmiştir.

Tablo 68

Sarp_(C3G3)' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X		X					X		X	X
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.										X	

$Sarp_{(C3G3)}$ cebir öğrenme alanı ile ilgili soruların yarısında kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. 5 soruda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda, 1 soruda da aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Cebirsel ifade oluşturmada ve cebirsel ifadeler arasındaki ilişkileri açıklamada zorlanan $Sarp_{(C3G3)}$, sadece örüntü sorusunda ispat sürecini gösterebilmiştir.

$Sarp_{(C3G3)}$ ' in 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 69' da gösterilmiştir.

Tablo 69

$Sarp_{(C3G3)}$ ' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiyomatik formal dünya		X	X

$Sarp_{(C3G3)}$ sözel ifadede yer alan üçgen eşitsizliğine dair ispat süreci geliştirebilmiştir. Düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda yer almıştır. Üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamının 180° olmasını ve sözel ifadede yer alan Pisagor Bağıntısı' nı ise açıklamakta zorlanmıştır. Düşünme süreçleri kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

$Sarp_{(C3G3)}$ ' in 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 70' de gösterilmiştir.

Tablo 70

$Sarp_{(C3G3)}$ ' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiyomatik formal dünya		

Sarp_(C3G3) gerçek yaşam durumları içerisinde verilen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmakta zorlanmıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Sarp_(C3G3)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 71' deki gibidir.

Tablo 71

Sarp_(C3G3)' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	(5' i açıklarken) 2 ile 3 ü toplarsak 5 olur. Tek sayıdır. Asal sayıdır. 1 ile 4' ü toplarsak 5 elde ederiz.
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi	X	($x=3$ için $4x+8$ ifadesini gösterirken) $3 \cdot 4 = 12$ $12 + 8 = 20$
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi		
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)	X	(“(n+7).3” ifadesinin eşitini belirtirken) $7 \cdot 3 + 3 \cdot n$
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmaması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		

Sarp_(C3G3) görüşme sürecinde genellikle sözlü dili kullanmayı tercih etmiştir. İşlemsel süreçleri de sözlü olarak açıklamıştır. Sözlü dil kullanımı ardından yazılı dil becerilerini göstermiştir. Yazılı dil becerilerinde diğer 6. sınıf öğrencilerinin gösterdiği hataları yapmamıştır. Geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda görsel dili ifade etmek istemiş ama hatalar yapmıştır. Açıklamaları esnasında cebirsel olarak düşünmekte zorlansa da, sözel ifadeler için cebirsel ifadeler oluşturabildiği sorular olmuştur. Ayrıca, bazı sorularda aksiyomatik formal dünya boyutunda matematiksel düşünme süreci gerçekleştirse de matematiksel dil becerileri bu boyutta yer almamıştır. Dolayısıyla matematiksel dil becerileri nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Sarp_(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi aşağıdaki gibidir:

Sarp_(C3G3) iki bilinmeyen sayı arasında 2 fark varsa, cebirsel gösterimlerinde temsil edildikleri harfler arasında da alfabetik sıraya göre 2 fark olması gerektiğini belirtmiştir. Eğer bir sayı s harfi ile temsil ediliyorsa 2 fazlasının u harfi ile temsil edilmesi gerektiğini söylemiştir. Ardışık iki sayıyı cebirsel olarak gösterirken de benzer şekilde düşünmüştür. a' nın ardışığını b olarak göstermiştir. Bunun nedeni olarak alfabede a harfinden sonra b harfinin gelmesini ifade etmiştir. Çift sayıyı temsil eden sembolik ifadeyi ise denklemlerle göstermiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

("x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır." ifadesini açıklarken)

Sarp_(C3G3): *x' i çift sayı olarak nasıl düşüneceğim ki? Nasıl yazacağımı anlamadım.*

Araştırmacı: *Öyle bir ifade düşün ki x çift sayı olabilecek tüm değerleri temsil etsin.*

Sarp_(C3G3): *Hmm... x, 2 olsa. x artı 2 eşittir 4 olursa x çifttir. " $(x+2=4)$ "*

Araştırmacı: *Neden?*

Sarp_(C3G3): *Çünkü 4' den 2 çıkartırsak 2 gelir. 2' de çift sayıdır.*

Araştırmacı: *x hep 2 midir?*

Sarp_(C3G3): *Yo. 4' de olabilir.*

Araştırmacı: *O zaman nasıl düşünürsün?*

Sarp_(C3G3): *Bilmiyorum ki.*

Sarp_(C3G3) x' in çift sayı olabileceği tüm değerleri temsil eden cebirsel ifadeyi düşünmemiş olsa da oluşturduğu denklemde x' in değerini bulurken, işlemsel olarak denklem çözüm sürecini ifade etmiştir. Denklem çözme süreci ile ilgili kazanımlar öğretim programında ilk olarak 7. sınıfta yer almaktadır. Bu süreci gösteren Sarp_(C3G3), bir başka soruda denklem çözüm sürecini uygulayamamıştır. Örüntü sorusu için kuralı $3n-2$ olarak doğru bir şekilde ifade etmiştir. Ancak, 25 bilyenin hangi adımda yer aldığını açıklarken denklem çözme sürecine dair bir düşünme süreci geliştirememiştir.

Sarp_(C3G3) üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını açıklarken diğer öğrencilerden farklı bir düşünme süreci geliştirmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

("Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir." ifadesini açıklarken)

Sarp_(C3G3): Mesela hesaplamışlar işte.

Araştırmacı: Açıklar mısın?

Sarp_(C3G3): Bir sürü üçgen çizmişlerdir. Hepsini ölçmüşlerdir. Sonra toplamışlardır. 180 olduğunu bulmuşlardır.

Araştırmacı: Gösterir misin?

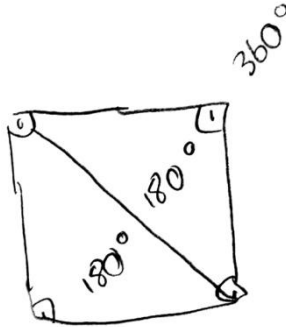
Sarp_(C3G3): Mesela ilk başta dik açılı üçgen yapalım. Burası diktir. Burası 30 olsun. Burası da 20 olsun. 30' la 20' yi toplarsak 50. 50 ile 90' ı toplarsak 140 geliyor. Olmadı. Nasıl bulmuş olabilirler? 90' dan yola çıkmış olabilirler.

Araştırmacı: Nasıl? Açıklar mısın?

Sarp_(C3G3): Şey de olabilir. Bir tane kare var. Karenin içinde iki tane üçgen var. Karenin işte alanı karenin içindeki açılar toplamı. İşte kaç olabilir? 90,90,90,90 ise 360. 360' ı 2' ye bölersek eğer yukarda iki tane üçgen olduğundan dolayı 180, 180.

Araştırmacı: Gösterir misin?

Sarp_(C3G3): Karenin buraları dik olduğundan dolayı toplamı 360. İki tane eş üçgen olacak. O zaman burası 180, burası da 180 oluyor.



Şekil 28. Sarp_(C3G3)' ın üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını açıklama sürecine dair

Sarp_(C3G3) düşünme sürecinde matematiksel dil kullanımı bakımından hatalar yapmıştır. Karenin iç açılarının ölçüleri toplamını karenin alanı olarak ifade etmiş, ardından hatasını düzeltmiştir. Kareyi iki eş parçaya böldüğünde oluşan ikizkenar dik üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu ifade etmek yerine, karenin iç açılarının ölçüleri toplamı olan 360° nin ikiye bölüneceğini ifade etmiştir. İç açılarının ölçüleri toplamının alan gibi ikiye bölüneceğini düşünmüştür. Dolayısıyla oluşan üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamını tam olarak ifade edemediği için düşünme süreci kavramsal somut dünya

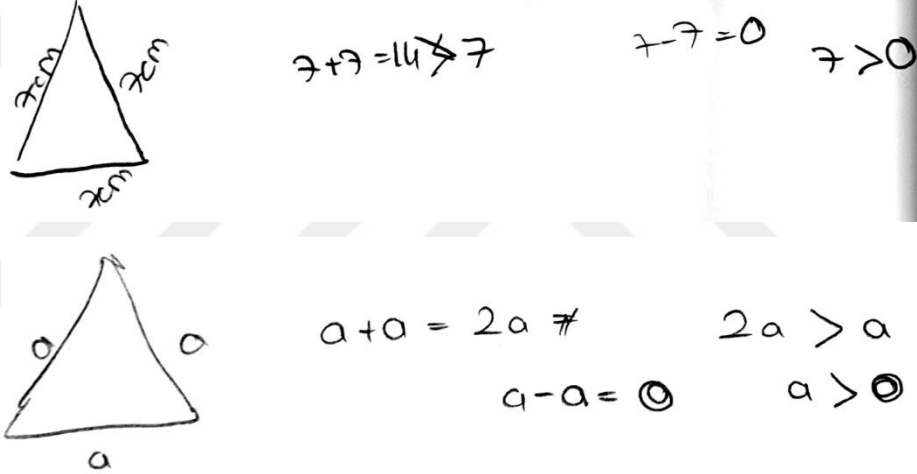
boyutunda değerlendirilmiştir. Sarp_(C3G3) sözel ifade içerisinde verilen üçgen eşitsizliğini açıklarken eşkenar üçgeni ele almıştır. Eşkenar üçgenin tüm kenar uzunluklarının birbirine eşit olması bilgisini kullanmıştır. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Sözel olarak verilen ifadede yer alan üçgen eşitsizliğini açıklarken)

Sarp_(C3G3): Şimdi bir tane üçgen yapalım. Ayrıtlarının toplamı şimdi hepsi 7 cm olsun. Zaten eşit olacağından dolayı 7cm olsa 14. Evet 7 toplamlarından küçük. Çünkü 7 ile 7'yi toplarsak 14. 7 küçük kalıyor. Bunların farkından da büyük. Şimdi iki kenarın farkı 7 eksi 7' den 0 oluyor. Diğeri de 7. 0' dan büyük.

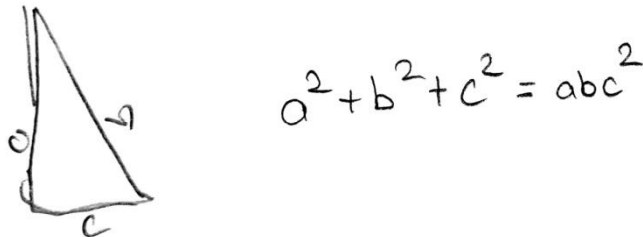
Araştırmacı: İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

Sarp_(C3G3): Yine ayrıtları hep aynı olacak. a olsun. $2a$ diye yazabiliriz bunu evet $2a$ yapar. $2a$ da a ' dan büyüktür. Farkı da a eksi a 0 yapar. a da 0' dan büyüktür.



Şekil 29. Sarp_(C3G3)'ın sözel ifade içerisinde yer alan üçgen eşitsizliğini açıklama süreci

Sarp_(C3G3) dil kullanımı açısından hatalar yapmıştır. Kenar uzunluklarını gösterirken birim kullanmamıştır. Eşkenar üçgen üzerinden üçgen eşitsizliğini açıklayan ve sembolik olarak gösteren Sarp_(C3G3) gerçek yaşam durumu içerisinde eşitsizliği oluşturamamıştır. Görüşme sürecinde Sarp_(C3G3), ikizkenar üçgeni çift kenar üçgen olarak ifade etmiştir. Sözel olarak verilen ifadede ve gerçek yaşam durumu içerisinde yer alan Pisagor Bağıntısı' nı oluşturamamış ve ifade edememiştir. Sözel olarak verilen ifadeden yola çıkarak sembolik ifade oluşturmak istediğinde ise hata yapmıştır.



Şekil 30. $Sarp_{(C3G3)}$ 'ın Pisagor Bağıntısı' na yönelik sembolik gösterimi

Görüldüğü üzere $Sarp_{(C3G3)}$, dik üçgeni gösterirken dik açığı belirtmemiştir. Köşelerini isimlendirmemiştir. Görsel dil açısından hatalar yapan $Sarp_{(C3G3)}$, sembolik dil yazımında da hata yapmıştır. Üçgenin üç kenar uzunluğun karelerinin toplamını, iki kenar uzunluğu ve üçüncü kenar uzunluğunun karesi ile çarpımına eşitlemiştir.

4.2. 7. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerine Ait Bulgular

Bu bölümde görüşme yapılan 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerine ve matematiksel dil becerilerine ait bulgular sunulmuştur. Öğrencilerle yapılan görüşmelere ait bulgular her bir oturum için ayrı bölümlerde verilmiştir. Ayrıca görüşme yapılan öğrenciler hakkında bireysel değerlendirmeler ayrı olarak belirtilmiştir.

4.2.1. 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili 7. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular

Bu bölümde 1. oturumda 7. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere ait bulgular sunulmuştur. Görüşme yapılan öğrenciler Ekin_(C1G1), İdil_(C1G2), Metin_(C1G3), Elif_(C2G1), Ali_(C2G2), Canan_(C3G1) ve Ilgın_(C3G3) 'dır. Veriler analiz edilirken her bir soruda öğrencilerin düşünme süreçleri, matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine dair belirlenen süreçlere göre sınıflandırılmıştır. Ayrıca bazı sorular için öğrenci cevapları KİSS düzeyleri açısından değerlendirilmiştir. Bu anlamda öğrencilerin verdikleri cevaplar birden fazla boyut içerisinde yer almıştır. Bunun nedeni yapılan görüşmeler esnasında düşünme süreçleri açısından öğrencilerin birden fazla cevaba ulaşmalarından kaynaklanmıştır.

"1. Soru: 5'i anlatır mısın?"

sorusuna yönelik bulgular Tablo 72' deki gibidir.

Tablo 72

"5'i anlatır mısın?" sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1),	Ali (C2G2),	Canan (C3G1)	Ilgın (C3G3)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi	X	X	X	X	X	X	X

İlk iki düzeyi ölçmeye yönelik sorulan bu soruda Ekin_(C1G1), 5' in tek bir sayı ve 4' den sonra 6' dan sonra gelen bir sayı olduğunu belirtmiştir. 5' in toplama işlemi sonucunda elde edilebileceğini belirtmiş; kavramsal somut dünyadan nesnel süreçsel sembolik dünyaya doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. İdil_(C1G2), 5' in bir rakam olduğunu, aynı zamanda toplama işlemi sonucunda elde edilen bir sayı olduğunu belirterek nesnel süreçsel sembolik dünyaya doğru bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Metin_(C1G3); bir rakam olarak belirttiği 5' in, sayma yoluyla elde edilebileceğini söyleyerek nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna uygun bir cevap vermiştir. Elif_(C2G1) de benzer şekilde pozitif bir sayı olduğunu söylediği 5' in, sayma yoluyla elde edilebileceğini belirterek nesnel süreçsel sembolik dünyaya doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. Ali_(C2G2), 5' in rakamların beşincisi ve bir sayı olduğunu söyleyerek, sayma yoluyla 5' e ulaşılabilirliğini belirtmiştir. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünyaya doğru düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Canan_(C3G1) hem bir rakam hem de 4 ile 6 arasında, 4' den sonra gelen bir sayı olduğunu söylediği 5' i, sayarak gösterebileceğini belirtmiştir. Böylece Canan_(C3G1) nesnel süreçsel sembolik düşünme dünyasında cevap vermiştir. Ilgın_(C3G3) da benzer şekilde 5'i sıfırdan büyük, 4' den sonra 6' dan önce gelen pozitif bir sayı olarak belirtmiştir. 5' i, etrafındaki nesneleri saydığında bu sayıyı temsil eden sayı olarak açıklamıştır. Ilgın_(C3G3) nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda cevaplar vermiştir.

Öğrencilerin verdikleri cevaplar KIŞS açısından değerlendirildiğinde elde edilen bulgular Tablo 73' deki gibidir.

Tablo 73

KIŞS açısından 7. sınıf öğrencilerinin “5’i anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar

KIŞS düzeyleri	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1),	Ali (C2G2),	Canan (C3G1)	Ilgın (C3G3)
İşlem	1,2,3,4,5 diye sayarak elde etme			X	X	X	X	X
	4+1, 3+2	X	X					
İşlemsel süreç	4' den sonraki sayı, 6'dan önceki sayı	X					X	X
Kavramsal işlemsel sembolik süreç	İşlemsel süreç sonunda 5 elde edileceğini belirtme	X	X	X	X	X	X	X

Ekin_(C1G1) ve İdil_(C1G2)' in kavramsal işlemsel sembolik süreç gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Yani 5'in birden fazla işlemsel süreci içerdiğini belirttikleri görülmüştür. Metin_(C1G3), Elif_(C2G1), Ali_(C2G2), Canan_(C3G1) ve Ilgın_(C3G3)' in 1,2,3,4,5 diye sayma yoluyla işlem adımlarını belirttikleri ve işlemsel süreç sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak düşündükleri bulgusuna ulaşılmıştır. Ayrıca Ekin_(C1G1), Canan_(C3G1) ve Ilgın_(C3G3)' in "4'den sonraki sayı, 6' dan önceki sayı" cevapları işlemsel sürece odaklandıkları şeklinde yorumlanmıştır. Böylece Metin_(C1G3), Elif_(C2G1), Ali_(C2G2), Canan_(C3G1) ve Ilgın_(C3G3) da kavramsal işlemsel sembolik süreci göstermişlerdir.

Öğrencilere yöneltilen

"2. Soru: 4+3'ü anlatır mısın?"

sorusuna yönelik elde edilen bulgular Tablo 74' deki gibidir.

Tablo 74

"4+3'ü anlatır mısın?" sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1),	Ali (C2G2),	Canan (C3G1)	Ilgın (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma	X		X				
	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi						X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi	X	X	X	X	X	X	X

İlk iki düzeyi ölçmeye yönelik sorulan bu soruda Ekin_(C1G1), önce verilen ifadedeki verilerin özelliklerine odaklanmıştır. 4' ü ve 3' ü anlatmaya yönelik bir düşünme gerçekleştirmiş, ardından toplama işlemi sonucunda bu ifadenin 7' yi gösterdiğini belirtmiştir. Böylece nesnel süreçsel sembolik dünyaya yönelik bir düşünme süreci geliştirmiştir. İdil_(C1G2), 4' ün üzerine 3 eklenmesi sonucunda 7 oluştuğunu belirtmiştir. Ayrıca 4 elma ile 3 elmanın toplamı şeklinde örnek vermiştir. Dolayısıyla nesnel süreçsel sembolik düşünme boyutunda cevap vermiştir. Metin_(C1G3) önce "ikisi de rakam" diyerek verilen ifadedeki verilerin özelliklerine yönelik cevap vermiştir. Ardından 4' ün üzerine 3 eklenmesi sonucunda 7' nin oluştuğunu söyleyerek nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna yönelik cevap vermiştir. Elif_(C2G1), toplama işlemi sonucunda 7 oluştuğunu söylemiştir.

Böylece nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Ali_(C2G2), bu ifade ile 4' ün üzerine 3 eklenmesi ya da 4' den sonra 5,6,7 şeklinde sayılması yoluyla 7' nin elde edildiğini belirtmiştir. Böylece nesnel süreçsel sembolik dünya düşünme sürecini göstermiştir. Canan_(C3G1) önce iki rakamın toplamı olarak belirttiği ifadeyi, 4 elma ile 3 elmanın toplamından 7 elma elde edileceği şeklinde açıklamıştır. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. İlgin_(C3G3) bu ifadenin iki sayının toplamını ifade ettiğini belirterek önce ifadeyi tasvir etmeye yönelik düşünme gerçekleştirmiştir. Ardından toplama işlemi sonucunda 7' nin oluştuğunu belirtmiştir. İlgin_(C3G3), özellikle bu ifadede iki sayının birleşerek yeni bir sayı oluşturduğunu söylemiştir. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünyaya doğru bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Öğrencilerin verdikleri cevaplar KİSS açısından değerlendirildiğinde elde edilen bulgular Tablo 75' deki gibidir.

Tablo 75

KİSS açısından 7. sınıf öğrencilerinin “4+3’ü anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar

KİSS düzeyleri	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1),	Ali (C2G2),	Canan (C3G1)	İlgin (C3G3)
İşlem	4 den sonra 5,6,7 diye sayma					X		
İşlemsel süreç	4' ün üzerine 3 ekleme		X	X		X	X	
	4 ile 3 sayılarının toplamı	X			X		X	X
Kavramsal işlemsel sembolik süreç	Toplama işlemi sonucunda 7 oluştuğunu belirtme	X	X	X	X	X	X	X

Yapılan görüşmelerde Ekin_(C1G1), Elif_(C2G1) ve İlgin_(C3G3) 4 ile 3 sayılarının toplamından 7 oluştuğunu belirterek hem işlemsel süreci hem de süreç sonunda oluşan kavramı sembolik olarak ifade etmişlerdir. İdil_(C1G2) ve Metin_(C1G3) de 4' ün üzerine 3 eklenmesi sonucu 7 oluştuğunu belirterek işlemsel süreci ve işlem sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak düşünmüşlerdir. Ali_(C2G2) “4+3” ün 4' den sonra 5,6,7 şeklinde sayma anlamına geldiğini belirtmiş ve işlem basamağında yer alan bir ifade biçimi kullanmıştır. Ardından yapılan görüşme devamında Ali_(C2G2) bu işlemin 4' ün üzerine 3 eklemek anlamına geldiğini belirterek işlemsel süreci ve bu işlemsel sürecin aslında 7'yi oluşturduğunu ifade ederek işlem ve kavramı sembolik olarak düşünmüştür. Benzer şekilde Canan_(C3G1) bu

ifadenin 4 ile 3 sayılarının toplamı anlamına geldiğini belirterek işlemsel sürece odaklanmıştır. Canan_(C3G1) ayrıca 4' ün üzerine 3 eklemek anlamına da geldiğini belirtmiş ve ardından bu işlemsel sürecin sonucunda 7'nin oluştuğunu söyleyerek kavramsal işlemsel sembolik süreç gerçekleştirmiştir.

Yapılan görüşmelerde 7. sınıf öğrencilerine

“3. Soru: $28 + \square = 30 + \triangle$

dörtgen ve üçgen kutunun yerine gelebilecek sayılara üçer örnek verir misin?

Dörtgen ve üçgen yerine gelebilecek sayılar arasında bir ilişki var mıdır?

Bu ilişkiyi cebirsel olarak açıklar mısın?”

şeklinde sorular yöneltilmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplar doğrultusunda elde edilen bulgular Tablo 76' daki gibidir.

Tablo 76

$28 + \square = 30 + \triangle$ sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1),	Ali (C2G2),	Canan (C3G1)	İlgün (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma		X	X			X	
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması					X	X	X
	Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması					X	X	X

Bu soruda Ekin_(C1G1) ilk olarak ifadede bilinmeyenlerin yerine sayılar düşünmüştür. Bu sayıların eşitlik için gerekli sayılar olduğu görülmüştür. Ancak, bilinmeyenler arasındaki ilişkiyi gösteren cebirsel ifadelere ulaşamamıştır. Ekin_(C1G1) kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. İdil_(C1G2) önce ifadeyi anlamak için ifadeyi açıklamıştır. Ardından bilinmeyenler yerine sayılar denemiştir. Ancak eşitliği sağlayabileceği sayılara örnek verememiştir. İdil_(C1G2) kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Metin_(C1G3) benzer şekilde ifadede yer alan her iki bilinmeyene de farklı sayılar gelmesi gerektiğini açıklayarak, eşitliği sağlayabileceği sayılara

örnekler vermiştir. Her defasında iki bilinmeyen arasında 2 fark olduğunu belirtmiştir. Cebirsel olarak düşündüğünde ise üçgene x derse, dörtgenin $-2x$ olması gerektiğini söylemiştir. Metin_(C1G3) kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Elif_(C2G1) soruyu okuduğunda hemen bilinmeyenler yerine doğru sayı örnekleri vermiş; fakat, iki bilinmeyen arasındaki ilişkiyi “Biri diğerinin 2 katıdır.” şeklinde açıklamıştır. Elif_(C2G1) kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Ali_(C2G2), eşitliğin bozulmaması için dörtgen ve üçgen yerine gelebilecek sayılara doğru örnekler vermiştir. Ardından aralarındaki ilişkiyi “Dörtgen üçgenin 2 fazlasıdır.” şeklinde açıklamıştır. Cebirsel olarak ifade etmesi istendiğinde ise “üçgen n ise dörtgen $n+2$ olmalı” şeklinde cevap vermiştir. Bu yüzden düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Canan_(C3G1) dörtgen ve üçgen yerine farklı sayılar gelmesi gerektiğini belirterek doğru sayı örnekleri vermiştir. Ardından aralarındaki ilişkiyi cebirsel olarak “üçgen x ise dörtgen $x+2$ olmalı” şeklinde açıklamıştır. Nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirmiştir. Ilgın_(C3G3) ise aralarındaki ilişkiyi önce sayı örnekleri ile açıklamıştır. Aralarında iki fark olması gerektiğini belirterek dörtgen ve üçgen yerine gelebilecek cebirsel ifadeleri ve aralarındaki ilişkiyi, “dörtgen x ise üçgen $x-2$ olmalı” şeklinde açıklamıştır. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Öğrencilere yöneltilen bir diğer soru olan

“4. Soru: $a+3b$ ifadesini anlatır mısın?”

sorusuna yönelik elde edilen bulgular Tablo 77' de gösterilmiştir.

Tablo 77

“ $a+3b$ ifadesini anlatır mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgın (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma	X	X				X	X
	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi			X	X	X		X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi				X	X		X

Yapılan görüşmeler sonucunda Ekin_(C1G1), bu ifadede a ve b' nin bilinmeyen sayılar yerine kullanılan harfler olduğunu belirtmiştir. Önce bu ifadenin denklem konusu olduğunu söylemiş, ardından denklem olabilmesi için bir sayıya eşit olması gerektiğini belirtmiştir. a ve b' nin aynı sayıları temsil edilebileceklerini söyleyen Ekin_(C1G1), kavramsal somut dünya boyutunda bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir. İdil_(C1G2), $a+3b$ ifadesinde yer alan harfleri, bir üçgenin kenarlarını belirtmek için kullanılan harfler olarak nitelendirmiştir. Burada yer alan $3b'$ nin b kenarının fazla uzantısı olarak 3 ile belirtildiğini söylemiştir. İdil_(C1G2), kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Metin_(C1G3) ise $3b'$ yi düşünürken 3' ün katları olarak ifade edilebileceğini ama b' yi bilmediğimiz için hangi katı olduğunu da bilemeyeceğimizi belirtmiştir. Ayrıca, Metin_(C1G3) bu ifadenin bir sonucu olduğunu söylemiş ve kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Elif_(C2G1), ifadeyi “cebirsal bir sayı” olarak belirtmiştir. Ardından a' nın $3b'$ ye eşit olduğunu söylemiştir. Daha sonra günlük yaşamdan bir örnek vererek ifadenin içerdiği işlemsel süreci ve oluşan kavramı açıklamış, başta yaptığı hatayı fark etmiştir. a ile $3b$ toplanamayacağı için bu şekilde ifade edildiğini söylemiştir. Elif_(C2G1), nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Ali_(C2G2), önce ifadede a ile $3b'$ nin toplandığını belirtmiştir. Ardından günlük yaşamdan elma ile üç muzun toplanması gibi bir örnek vererek işlemsel süreci ve oluşan kavramı ifade etmiştir. Ali_(C2G2), nesnel süreçsel sembolik dünya düşünme boyutuna ulaşmıştır. Canan_(C3G1) ise önce buradaki harflerin bilinmeyen sayıları gösterdiğini açıklamış; ancak, ifadenin bir eşitlik içermesi gerektiğini söylemiştir. Eğer eşitlik içermiyorsa a ve b' nin aynı sayılar olabileceğini söylemiştir. Canan_(C3G1) bu soruda kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. İlgın_(C3G3) ifadenin iki bilinmeyenden oluştuğunu ve eşittir olmadığı için sonucunun bulunamayacağını belirtmiştir. Daha sonra ifadeyi günlük yaşamla ilişkilendirmiş, bir miktar elma ile bir miktar armutun 3 katının toplamını ifade etmek için kullanılabileceğini belirtmiştir. Buradaki a harfinin elma miktarını, b harfinin de armut miktarını gösterdiğini söylemiştir. İlgın_(C3G3) nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Öğrencilerin verdikleri cevaplar KİSS açısından değerlendirildiğinde elde edilen bulgular Tablo 78' deki gibidir.

Tablo 78

KİSS açısından 7. sınıf öğrencilerinin “ $a+3b'$ ’yi anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar

KİSS düzeyleri	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgın (C3G3)
İşlem	Elma ile 3 tane muzun toplamı, bir içecek ile 3 tane çikolatanın toplamı vb.				X	X		X
İşlemsel süreç	a ile 3 tane b nin toplamı					X		
Kavramsal işlemsel sembolik süreç	İki bilinmeyen sayının toplamı							X
	Cebirsel ifade				X			

Ekin_(C1G1), İdil_(C1G2) ve Metin_(C1G3) a+3b ifadesine dair nesnel ve süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştiremedikleri için cevapları KİSS düzeyleri açısından da değerlendirilmemiştir. Elif_(C2G1), Ali_(C2G2) ve İlgın_(C3G3)'nin önce günlük yaşamdan nesneler ile toplama işlemini ifade ederek işleme odaklandığı görülmüştür. Ali_(C2G2) bu ifadenin a ile 3 tane b' nin toplamını ifade ettiğini belirterek işlemsel sürece uygun cevap vermiştir. İlgın_(C3G3)'in görüşme sürecinde bu ifadenin iki bilinmeyen sayının toplamını gösterdiğini belirtmesi ve Elif_(C2G1)'in bu ifadenin cebirsel ifade olduğunu belirtmesi kavramsal işlemsel sembolik süreç düzeyine ulaştıkları şeklinde yorumlanmıştır.

Tez çalışmasında öğrencilere,

“5. Soru: ‘Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

soruları yöneltilmiş ve bulgular Tablo 79' da sunulmuştur.

Tablo 79

“Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgın (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X		X			
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X		X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması					X	X	X

Aksiomatik formal dünya	İspat sürecinin edilmesi	ifade	X

İdil_(C1G2) dışındaki tüm öğrencilerin ifadeyi sayılarla deneyerek açıklamaya çalıştığı görülmüştür. Ekin_(C1G1) önce ardışık sayılar kavramını açıklamış, ardışık sayılara örnekler vermiştir. Daha sonra sayılarla deneyerek ifadenin doğruluğunu göstermiş, cebirsel olarak açıklayamamıştır. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. İdil_(C1G2), sadece ifadede yer alan verilere odaklanarak, ardışık ve tek sayı kavramlarını açıklamaya çalışmıştır. Ancak, kavramları doğru ifade edememiştir. Ardışık sayıyı 3 ile 3 gibi bir sayının tekrarı olarak, tek sayıyı da bir basamaklı sayı olarak ifade etmiştir. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Metin_(C1G3) ardışık sayıların toplamının sonucunun tek sayı olduğunu farklı sayı örnekleriyle açıklamıştır. Cebirsel olarak açıklaması istendiğinde sayılardan birine x derse ardışığının bir fazlası olması gerektiğini söylemiş; ancak, bu sayıyı cebirsel olarak ifade edememiştir. Bu açıdan düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Elif_(C2G1) de ilk olarak ardışık sayılar kavramı üzerine odaklanmıştır. Ardından sayılarla örnekler vermiş ve ifadenin doğruluğunu göstermiştir. Ardışık iki sayıyı cebirsel olarak gösterememiştir. Sayılardan birini a olarak düşündüğünde ardışığının $2a$ olacağını söylemiştir. İfadeyi cebirsel olarak açıklayamamış ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Ali_(C2G2), ardışık sayılara örnek vererek toplamalarının tek sayı oluşturduğunu göstermiştir. Cebirsel olarak açıklaması istendiğinde sayılardan biri m ise ardışığının n olabileceğini söylemiştir. m 'nin ardışığının n olup olmadığı sorulduğunda ise ardışığı olması için bir fazlası olması gerektiğini söylemiş ve bu defa $m+1$ olmalı şeklinde düzeltme yapmıştır. m ile $m+1$ 'in toplamının $2m+1$ olacağını söylemiş; ancak, bu ifadenin tek sayıyı gösterip göstermediğini açıklayamamıştır. Bu anlamda düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Canan_(C3G1), ifadeye uygun olacak şekilde sayılarla örnek vermiştir. Ardından ardışık iki sayıyı cebirsel olarak gösterebilmiştir. Sayılardan birini a olarak düşündüğünde ardışığının $a+1$ olacağını belirtmiş, toplamalarının ise $2a+1$ olacağını söylemiştir. $2a+1$ 'in ise $3a$ 'ya eşit olacağını söylemiştir. Bunun da tek sayıyı gösterdiğini ifade etmiştir. Dolayısıyla düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Ilgın_(C3G3) ise benzer şekilde önce sayılarla ifadenin doğruluğunu göstermiştir. Bir sayıyı x olarak düşündüğünde ardışığının $x+1$ olacağını belirtmiş ve toplamalarının $2x+1$ ile gösterileceğini söylemiştir. $2x+1$ ifadesinde x yerine hangi sayı değeri verilirse verilsin, bu ifadenin tek sayıyı gösterdiğini açıklamıştır. Ayrıca $2x$

ifadesinin de çift sayıyı gösterdiğini söylemiştir. Bu anlamda Ilgın_(C3G3) bu soruda aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.

Tez çalışmasında 7. sınıf öğrencilerine,

“6. Soru: ‘İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

soruları yöneltilmiş ve bulgular Tablo 80’ de gösterilmiştir.

Tablo 80

““İki tek sayının çarpımı tek sayıdır” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1),	Ali (C2G2),	Canan (C3G1)	İlgın (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X					
	İfadelerin sayılarla deneyerek gösterilmesi	X		X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadeler, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması							X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi							

Bu soruda Ekin_(C1G1) önce ifadede yer alan tek sayı kavramını açıklamış, ardından ifadeyi sayılarla deneyerek doğruluğunu göstermiştir. Ancak ifadeyi cebirsel olarak açıklayamamıştır. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. İdil_(C1G2) ifadede yer alan tek sayı kavramını açıklamakta zorlanmış, sadece ifadedeki veriler üzerine odaklanmıştır. Tek sayıyı bir basamaklı sayı, çift sayıyı iki basamaklı sayı olarak düşünmüştür. Ayrıca ifadeyi açıklayamamış, kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Metin_(C1G3) farklı sayı örnekleriyle ifadenin doğruluğunu göstermiş; ancak, ifadenin her zaman doğru olmayacağını belirtmiştir. Ayrıca ifadeyi cebirsel olarak açıklamakta zorlanmıştır. Tek sayıyı cebirsel olarak nasıl ifade edeceğini düşünmüş, buna bir açıklama getirememiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Elif_(C2G1), ifadeyi okuduktan sonra ilk olarak sayılarla deneyerek doğruluğunu göstermiştir. Ancak, cebirsel olarak açıklayamayacağını

belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Ali_(C2G2) ifadenin doğruluğunu anlayabilmek için birden fazla sayısal örnek vermiştir. Ardından ifadeyi cebirsel olarak açıklamak için tek sayılardan birini $3n$, diğerini $9n$ olarak seçmiş ve çarpımlarının $27n$ yani tek bir sayı olduğunu söylemiştir. $3n$, $9n$ ve $27n$ 'nin tek sayı olmasını, n harfini çarptığı sayıların tek sayı olması ile ilişkilendirmiştir. n harfi yerine bir çift sayı düşünmesi istendiğinde ise böyle bir durumda bu ifadelerin tek sayı olup olmadığı ile ilgili bir yorum yapılamayacağını belirtmiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya ile sınırlı kalmıştır. Canan_(C3G1) da öncelikle ifadenin doğruluğunu sayılarla göstermiş, ardından cebirsel olarak göstermeye çalışmıştır. Ancak başarılı olamamış ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. İlgin_(C3G3) ise ifadenin doğruluğunu diğer öğrenciler gibi sayılarla göstermiştir. İki tek sayının çarpımına uygun cebirsel ifadeyi doğru bir şekilde yazmıştır. Tek sayıları $2x+1$ olarak düşünerek $2x+1$ ile $2x+1$ 'i çarpmak istemiştir. Ancak, çarpma sürecinde hata yapmış ve $6x+1$ ifadesini elde etmiştir. Sonuçta tek sayı oluştuğunu açıklamakta zorlanmıştır. Bu anlamda düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

7. sınıf öğrencilerine,

“7. Soru: ‘Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı çift sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın? İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

soruları yöneltmiş ve bulgular Tablo 81’de gösterilmiştir.

Tablo 81

““Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı çift sayıdır.” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgin (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X					
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X		X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması							X

Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin edilmesi	ifade	X

Ekin_(C1G1) önce ifadede yer alan tek sayı ve çift sayı kavramlarına örnek vermiş, daha sonra ifadeyi sayılarla deneyerek ifadenin yanlış olduğunu göstermiştir. Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayamayan Ekin_(C1G1)' in düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Bir önceki soruya benzer şekilde İdil_(C1G2) ifadede yer alan tek sayı ve çift sayı kavramlarını açıklamakta zorlandığı için ifadenin doğru olduğunu düşünmüştür. Tek sayıyı bir basamaklı sayı, çift sayıyı da iki basamaklı sayı olarak düşündüğünden tek ve çift sayıların toplamının çift sayı oluşturacağını düşünmüştür. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Metin_(C1G3) bir tek sayı ve bir çift sayı düşünerek toplamalarının tek sayı olduğunu göstermiş ve ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Cebirsel olarak ise açıklamakta zorlanmış, düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Elif_(C2G1) ifadeyi sayılarla deneyerek yanlış olduğunu göstermiştir. Cebirsel olarak açıklaması istendiğinde tek sayıyı a , çift sayıyı $2a$ olarak göstermiş; toplamalarının da $3a$ olacağını belirtmiştir. $3a$ ' nın da tek sayıyı temsil ettiğini söylemiştir. Ancak a ' nın neden tek sayı olduğunu açıklayamamıştır. Bu açıdan düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Ali_(C2G2) birkaç sayı örneği ile ifadenin yanlış olduğunu göstermiştir. Cebirsel olarak açıklanması istendiğinde bir önceki soruda yaptığı gibi $5a$ ' yı tek sayı olarak, $6a$ ' yı çift sayı olarak düşünmüş ve toplamalarının $11a$ yani tek sayı olacağını belirtmiştir. Bu soruda da a ' nın çarpıldığı sayıların tek sayı ya da çift sayı olmasına bağlı olarak elde edilen ifadenin tek sayıyı ya da çift sayıyı göstereceğini düşünmüştür. Bu anlamda kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geçirmiştir. Canan_(C3G1) önce sayısal olarak ifadenin yanlış olduğunu göstermiş; ancak, ifadenin yanlışlığını cebirsel olarak açıklayamamıştır. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Ilgın_(C3G3) da önce ifadenin yanlış olduğunu sayılarla düşünerek açıklamıştır. Ardından tek sayıyı $2x+1$, çift sayıyı da $2x$ olarak düşünmüştür. Toplamalarının $4x+1$ olacağını belirtmiştir. x ' in temsil edeceği her sayı değeri için bu ifadenin tek sayıyı gösterdiğini söylemiştir. Ayrıca bir sayının 4 ile çarpımının hep çift sayı oluşturacağını ve bu sayının da 1 ile toplamının tek sayıyı göstereceğini ifade etmiştir. Böylece Ilgın_(C3G3) düşünme sürecinde aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaşabilmiştir.

Tez çalışmasında 7. sınıf öğrencilerine,

“8. Soru: ‘ x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

soruları yöneltmiş ve bulgular Tablo 82' de gösterilmiştir.

Tablo 82

““ x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgin (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X					
	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi			X				
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi			X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması							X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi							X

Ekin_(C1G1) ve İdil_(C1G2)’ in bu soruda sadece ifadede yer alan verilere odaklandıkları görülmüştür. Yapılan görüşmelerde Ekin_(C1G1) önce x ’ in çift sayı olmasına odaklanmıştır. Ardından x ’ i 2 olarak düşündüğünde $2x$ ifadesini 22 sayısı olarak düşünmüş ve 5 ile topladığında 27 sayısının oluştuğunu söylemiştir. Bu sayının da tek sayı olduğunu belirtmiştir. İfadeyi farklı çift sayılarla aynı şekilde açıklamıştır; ancak, cebirsel olarak açıklayamamıştır. Böylece kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. İdil_(C1G2)’ in ise x harfi ile çarpma sembolünü ayırt edemediği ve ifadeyi okurken x ’ i “çarpy” şeklinde okuduğu belirlenmiştir. Bu anlamda ifadeyi açıklayamamış ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Metin_(C1G3) de öncelikle ifadeyi açıklamaya çalışmış, ardından ifadeyi sayılarla deneyerek doğruluğunu göstermiştir. Cebirsel olarak açıklayamayacağını belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Elif_(C2G1), ifadenin doğruluğunu farklı sayı örnekleri ile göstermiştir. Ancak, ifadeyi cebirsel olarak açıklayamayacağını belirtmiştir. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Ali_(C2G2) ifadede yer alan x harfini çift sayı olarak düşünmüş; ancak, $2x+5$ ’ de çarpma işleminden önce toplama işlemini yapmıştır. Yaptığı hatayı fark ederek işlem önceliğine göre önce çarpma yapması gerektiğini belirtmiştir. Sonuçta ifadenin tek sayıyı gösterdiğini açıklamıştır. Cebirsel olarak ise

açıklamakta zorlanmıştır. Bu anlamda kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Canan_(C3G1) da x' i çift sayı olarak düşünmüş ve ifadenin doğruluğunu sayısal olarak göstermiştir. Ancak x' in çift sayı olabileceği bir cebirsel ifade düşünememiş ve ifadeyi cebirsel olarak açıklayamamıştır. Böylece düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Ilgın_(C3G3) ifadeyi sayılarla deneyerek doğru olduğunu göstermiştir. Çift sayı kavramına uygun olacak şekilde x yerine $2x$ yazarak cebirsel ifadenin $4x+5$ oluşturacağını göstermiştir. $4x+5$ ' in de x yerine gelebilecek her sayı değeri için tek sayıyı göstereceğini söylemiş ve aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.

7. sınıf öğrencilerine,

“9. Soru: ‘Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle’ ifadesi ile ‘Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp’ ifadelerini karşılaştır mısın?

Cebirsel olarak karşılaştır mısın?”

soruları yöneltilmiş ve bulgular Tablo 83' de gösterilmiştir.

Tablo 83

““Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle” ifadesi ile “Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp” ifadelerini karşılaştır mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	Ilgın (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X						X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması			X	X	X	X	X
	Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması					X	X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi					X	X	X

Bu soruda Ekin_(C1G1) ilk olarak sözel ifadeyi açıklamaya çalışmış ve sözel ifadeye göre bir değerlendirmede bulunarak ifadelerin farklı olduğunu belirtmiştir. Eğer ikinci

ifadede “8 ile çarp 4 ekle” deseydi bu iki ifadenin eşit olabileceğini belirtmiştir. Ardından ifadeleri sayılarla denemiş, eşit sonuçlar ortaya çıktığı için ifadelerin eşit olduğunu söylemiştir. Cebirsel olarak ifadeyi açıklayamamış ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. İdil_(C1G2) sözel ifadeyi farklı sayılarla deneyerek iki ifadenin eşit olduğunu belirtmiştir. Ancak, cebirsel olarak ifadelerin eşitliğini açıklayamamıştır. Böylece düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Metin_(C1G3) ifadeleri önce sayılarla denemiş ve eşitliğini göstermiştir. Ardından ifadelere uygun cebirsel ifadeler yazmış; fakat, cebirsel ifadelerin eşitliğini açıklayamamıştır. İşlem önceliği konusunda tereddüte düşmüş, önce çarpma işlemi yapması gerektiğini belirterek yanlış çözümler yaptığını düşünmüştür. Sonuç olarak nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirmiştir. Elif_(C2G1) ilk olarak ifadelere uygun cebirsel ifadeler yazmış, ardından sayılarla deneyerek iki ifadenin eşitliğini göstermiştir. Ancak cebirsel olarak iki ifadenin eşitliğini açıklayamamıştır. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Ali_(C2G2) ise önce ifadeleri sayılarla denemiş ve birbirlerine eşit olduklarını belirtmiştir. Daha sonra ifadelere uygun cebirsel ifadeler yazmıştır. Çarpmanın parantez içine dağılma özelliğini göstermiş ve iki ifadenin eşit olduğunu cebirsel olarak açıklayabilmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. Canan_(C3G1) ifadeleri okuduğunda hemen bu ifadelere uygun cebirsel ifadeler yazmıştır. Ardından sayısal olarak iki ifadenin eşitliğini göstermiştir. Cebirsel olarak düşünürken ikinci ifadeyi düzenlediğinde ilk ifade ile eşit olduğunu belirtmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. Ilgın_(C3G3) önce ifadedeki verilere odaklanarak, ifadeyi sözel olarak açıklamıştır. Daha sonra sayılarla deneyerek ifadelerin eşitliğini göstermiştir. Cebirsel olarak düşündüğünde ise ifadelere uygun cebirsel ifadeleri yazmış; ancak birbirlerine eşit olmadıklarını söylemiştir. Ardından çarpma işleminin dağılma özelliğinden yola çıkarak iki ifadenin birbirine eşit olduğunu göstermiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.

Tez çalışmasında 7. sınıf öğrencilerine yöneltilen diğer soru,

“10. Soru: ‘ $x=3$ için $4x+8$ ifadesi neye eşit olur?’

‘ $x=3$ için $8+4x$ ifadesi neye eşit olur?’

‘ $x=3$ için $2(2x+4)$ ifadesi neye eşit olur?’

Bu ifadeleri birbirleriyle karşılaştırır mısın?

Aralarındaki ilişkiyi cebirsel olarak açıklar mısın?”

şeklinde. Bu soruya ait bulgular Tablo 84’ deki gibidir.

Tablo 84

“ $x=3$ için $4x+8$ ifadesi neye eşit olur?, $x=3$ için $8+4x$ ifadesi neye eşit olur?, $x=3$ için $2(2x+4)$ ifadesi neye eşit olur?” ifadelerini karşılaştırır mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgin (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma		X					
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X		X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması				X	X		X
	Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması				X	X		X
Aksiomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi					X		X

Ekin_(C1G1) x' i 3 olarak düşünerek ifadeleri karşılaştırmış; fakat, “ $4x$ ” ifadesini 43 olarak, “ $2x$ ” ifadesini de 23 olarak belirtmiştir. Bu yüzden ilk iki ifadenin aynı olduğunu, üçüncü ifadenin ise bunlardan farklı olduğunu söylemiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. İdil_(C1G2)’ in ifadedeki verilerin özelliklerine odaklandığı görülmüştür. İdil_(C1G2) burada x' in harf olarak kullanıldığını belirtmiştir. Ancak, x' in bir etkisi olmadığını ve iki ifadenin farklı ifadeler olduğunu söylemiştir. Yani, $4x+8'$ i 48 olarak göstermiştir. $8+4x$ ifadesinde ise x' i yok sayarak 4 ile 8’ in toplamını 12 olarak göstermiştir. $2(2x+4)'$ ü ise 2 ile 2’ yi çarpıp 4 ile toplayarak 8 olarak bulmuştur. Bu anlamda ifadelerin birbirinden farklı olduğunu belirtmiş ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Metin_(C1G3) ise, ifadeleri bilinmeyen yerine 3 yazarak karşılaştırmış ve ifadelerin eşit olduğunu söylemiştir. Ancak, Metin_(C1G3) cebirsel olarak ifadeleri karşılaştıramamış ve farklı sayılar için ifadelerin sonuçlarının da farklı olabileceğini belirtmiştir. Sonuç olarak kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Elif_(C2G1), ifadeleri önce x yerine 3 yazarak karşılaştırmıştır. Bütün ifadelerde $x=3$ olduğu için ifadelerin birbirine eşit olduğunu söylemiştir. $2(2x+4)$ ifadesinin çarpmanın dağılma özelliği dolayısıyla diğerlerine eşit bir ifade olduğunu belirtmiştir.

Ancak, farklı sayılar için ifadelerin eşit olup olmayacağını bilinemeyeceği yönünde görüş bildirmiştir. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Ali_(C2G2) x' i 3 olarak düşündüğünde üç ifadenin birbirine eşit olduğunu sayısal olarak göstermiştir. Ardından ilk iki cebirsel ifadenin birbirinin aynısı olduğunu sadece ifadelerde yer alan terimlerin yerlerinin değişik olduğunu belirtmiştir. Üçüncü ifadede 2' yi parantez içine dağıtarak çarptığında yine $4x+8$ elde edildiğini göstermiş ve üç ifadenin birbirine eşit olduğunu cebirsel olarak açıklamıştır. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Canan_(C3G1) ifadeleri hem sayılarla hem de cebirsel olarak karşılaştırmıştır. x' i 3 olarak düşündüğünde ifadelerin eşit olduğunu göstermiş; fakat, cebirsel olarak karşılaştırmak istediğinde sadece $4x+8$ ve $8+4x$ ifadelerinin değişme özelliğinden dolayı birbirine eşit olduğunu söylemiştir. Üçüncü ifadenin eşitliğini açıklayamamıştır. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Ilgın_(C3G3) da önce ifadeleri 3 için karşılaştırarak birbirilerine eşit olduklarını belirtmiştir. İlk iki ifadenin birbirinin aynı ifadeler olduğunu söylemiştir. Üçüncü ifadede ise 2' yi parantez içine dağıtarak sırasıyla çarptığında $4x+8$ elde edileceğini göstermiş ve üçüncü ifadenin de ilk ifadeye eşit olduğunu sembolik olarak göstermiştir. Bu açıdan aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Tez çalışmasında 7. sınıf öğrencilerine yöneltilen bir diğer soru,

“11 . Soru: 

Bu örüntünün 6. adımında kaç bilye vardır?

Kaçıncı adımda 25 bilye vardır?

Bu örüntünün kuralını cebirsel olarak gösterir misin?”

şeklinde. Bulgular Tablo 85' deki gibidir.

Tablo 85

Örüntü sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgün (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X	X	X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla deneyerek gösterilmesi	X		X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere,					X		

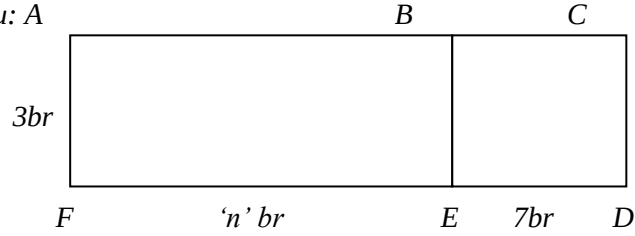
Aksiomatik formal dünya	eşitsizliklere ulaşılması		
	İspat edilmesi	sürecinin ifade	X

Ekin_(C1G1) örüntünün her bir adımında bilye sayısının 3 arttığını belirtmiş ve istenen adıma kadar her bir adımdaki bilye sayısını göstermiştir. Örüntüde adım sayısı ile 3' ü çarparak herhangi bir adımdaki bilye sayısının elde edilebileceğini belirtmiştir. Örüntü kuralını cebirsel olarak ifade edememiştir. Bu anlamda kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. İdil_(C1G2), örüntüyü anlamaya yönelik veriler üzerine odaklanmış; fakat, örüntünün istenen adımlarını ya da örüntünün kuralını sözel ve cebirsel olarak açıklayamamıştır. Örüntü kuralını, adım sayısından önceki iki adımdaki bilye sayılarının toplamı şeklinde ifade etmiş ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Metin_(C1G3) her bir adımdaki bilye sayısını düşünmüş ve her adımda 3 bilye arttığını belirtmiştir. İstenen adımdaki bilye sayısını ise her bir adımdaki bilye sayısını göstererek bulmuştur. Örüntünün kuralını $x+3$ olarak belirtmiştir. Bu anlamda kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Elif_(C2G1), önce örüntünün her adımında bilye sayısının üçer üçer arttığını söylemiştir. Her bir adımı göstererek istenen adımlardaki bilye sayılarını bulmuştur. Ayrıca örüntü kuralını cebirsel olarak açıklaması istendiğinde sadece “+3” şeklinde ifade edebileceğini, harfle nasıl göstereceğini bilmediğini söylemiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Ali_(C2G2) ise önce örüntüde yer alan verilerden yola çıkarak her adımdaki bilye sayılarını düşünmüştür. Ardından istenen adımları doğru bir şekilde bulmuştur. Her bir adımda üç bilye arttığını ifade etmiştir. Örüntü kuralını cebirsel olarak düşündüğünde, önce $3n+1$ olarak ifade etmiştir. Ancak, bulduğu ifadenin yanlış olduğunu göstererek ardından doğru cebirsel ifadeye ulaşmıştır. Bulduğu kuralın doğruluğunu ise örüntünün adım sayısına göre var olan bilye sayılarını kuralda yerine yazarak ispat etmiştir. Böylece aksiomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Canan_(C3G1) her bir adımda üçer bilye arttığını belirttiği örüntüde çizim yaparak istenen adımdaki bilye sayısını bulmaya çalışmıştır. Ardından sayısal olarak her bir adımdaki bilye sayısını göstermiş ve istenen adımları bulmuştur. Örüntü kuralını ise sadece her defasında üç artıyor şeklinde ifade etmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Ilgın_(C3G3) örüntüyü anlamaya yönelik önce verileri açıklamıştır. Örüntüde istenen adımları sırasıyla her adımı düşünerek bulmuştur. Örüntünün kuralını her adımda 3 bilye artıyor şeklinde açıklamıştır. Ancak örüntünün kuralını cebirsel olarak açıklamakta zorlanmıştır. Örüntünün kuralını önce $x+3$ olarak düşünmüş, ardından $2x+1$ olabileceğini belirtmiştir.

Düşünme sürecinde bulduğu her iki kuralın da yanlış olduğunu söylemiş, doğru kuralı bulamamıştır. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Tez çalışmasının bu oturumunda 7. sınıf öğrencilerine son olarak,

“12. Soru: A



AFDC dikdörtgensel bölgenin alanını “ $n+7$ ” ile 3’ ün çarpımı olarak düşünebiliriz. Peki sence bu dikdörtgensel bölgenin alanı için düşünebileceğimiz diğer ifadeler nelerdir?” sorusu yöneltilmiştir. Soruya ait bulgular Tablo 86’ daki gibidir.

Tablo 86

Dikdörtgensel bölgenin alanına yönelik farklı cebirsel ifadeler elde etme sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin dünyası boyutları	üç	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgın (C3G3)
Kavramsal somut dünya		İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X	X	X		X	X
		İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi							X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması					X		X
Aksiyomatik formal dünya		İspat sürecinin ifade edilmesi							

7. sınıf öğrencilerinden dikdörtgensel bölgenin alanını ifade eden farklı cebirsel ifadeler yazmaları istendiğinde Ekin_(C1G1) n harfi yerine başka bir harf kullanmayı tercih etmiştir. Ayrıca n harfinin 1 sayısı olarak düşünülebileceğini söylemiştir. Bunun nedeni olarak ise derste bu şekilde öğrendiklerini belirtmiş, düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. İdil_(C1G2) soruyu anlamakta zorlanmıştır. Soruda verilen cebirsel ifadeye odaklanmış; ancak dikdörtgensel bölgenin alanına yönelik bir düşünme geliştirememiştir. Bu yüzden düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda sınırlı

kalmıştır. Metin_(C1G3), verilen şekilde birbirine eşit uzunlukta olan kenar uzunluklarını göstererek soruyu cevaplandırmak istemiştir. Alan ile çevre uzunluğunu birbirine karıştırarak dikdörtgenin çevre uzunluğunu bulmaya yönelik düşünme süreci geliştirmiştir. Dikdörtgensel bölgenin alanının değişmeyeceğini de söylemiş; ancak, bulduğu sonuç ile soruda verilen cebirsel ifadenin farklı olmasını açıklayamamıştır. Dolayısıyla kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Elif_(C2G1) dikdörtgenin özelliklerini ve herhangi bir dikdörtgensel bölgenin alanının nasıl bulunacağını açıklamıştır. Ancak soruda verilen dikdörtgensel bölgenin alanı için bir açıklama getirememiştir. Ayrıca dikdörtgensel bölgenin alanını bulmak için açı ölçülerini düşünmek gerektiğini belirtmiş ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Ali_(C2G2) hiç düşünmeden $3n+21$ cevabını vermiştir. Bu ifadeyi soruda verilen ifadeyi düzenleyerek bulduğunu açıklamış; ancak, dikdörtgensel bölgenin alanını ifade ettiğine dair bir açıklama yapamamıştır. Bu yüzden düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Canan_(C3G1) BCDE dörtgenini önce kare olarak düşünmüş, ardından verilen kenar uzunluklarını düşündüğünde yanlış düşündüğünü fark etmiştir. Dikdörtgensel bölgenin alanına yönelik bir düşünme süreci geliştirememiş, hatta soruda verilen $n+7$ ile $3'$ ün çarpımının $21n'$ ye eşit olacağını belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. İlgün_(C3G3) verilen cebirsel ifadeye odaklanmış, ardından bilinmeyen yerine sayılar vererek dikdörtgensel bölgenin alanını sayısal olarak bulmayı denemiştir. Ardından BCDE dörtgenini kare olarak düşünmüş ve dikdörtgenin alanının $3n+49$ olabileceğini söylemiştir. Daha sonra BCDE dörtgenini kare olarak düşünmesinde hata yaptığını fark etmiş ve tekrar şekil üzerinden eşit olan kenar uzunlukları üzerinden düşünme geliştirmiştir. Düşünme süreci sonucunda $3n+21$ elde ederek dikdörtgensel bölgenin alanı için farklı bir ifade elde etmiştir. Ancak soruda verilen ifade ile arasındaki ilişkiyi kuramamıştır. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.

4.2.2. 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili 7. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular

Bu bölümde görüşmelerin 2. oturumunda 7. sınıf öğrencilerinin cevaplarına ait bulgular sunulmuştur. Öğrenci düşünme süreçleri her bir soru için matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine dair belirlenen boyutlara göre sınıflandırılmıştır. Öğrencilerin verdikleri cevaplar birden fazla sürece uygun şekilde ise birden fazla boyut içinde değerlendirilmiştir.

Öğrencilere ilk olarak

“1. Soru: Üçgeni anlatır mısın? Tanımlar mısın?”

sorusu yöneltilmiştir. Soruya ait bulgular Tablo 87’ deki gibidir.

Tablo 87

“Üçgeni anlatır mısın?” sorusuna dair 7. sınıf öğrencilerinin cevapları

Cevaplar	Ekin	İdil	Metin	Elif	Ali	Canan	İlgın
	(C1G1)	(C1G2)	(C1G3)	(C2G1)	(C2G2)	(C3G1)	(C3G3)
Üç kenarı var		X		X	X	X	
Üç köşesi var	X		X	X			
Üç iç açısı var				X			
Kapalı şekil						X	
İç açılarının ölçüleri toplamı 180°	X	X	X	X			
Üç doğru parçasının birbiriyle birleştirilmesiyle oluşan şekil					X		X

Üçgene dair öğrencilerin tanımları incelendiğinde Ekin_(C1G1) ve Metin_(C1G3) üç köşesi var ve ölçüleri toplamı 180° şeklinde belirtmişlerdir. İdil_(C1G2)’ in üç kenarı var ve ölçüleri toplamı 180° şeklinde ifade ettiği görülmüştür. Elif_(C2G1) ise üç kenarı, üç köşesi, üç iç açısı var ve ölçüleri toplamı 180° şeklinde tanımlamıştır. Bu öğrencilerin üçgenin kapalı bir şekil olduğunu belirtmedikleri görülmüştür. Öte yandan, Canan_(C3G1) üç kenarı var ve kapalı şekil olarak tanımlamıştır. Ali_(C2G2) ise üç kenarının olduğunu belirterek, aslında üç doğru parçasının (üç çizgi olarak ifade etmiş) birbiriyle birleştirilmesiyle oluşan şekil olduğunu söylemiştir. İlgın_(C3G3) aynı şekilde üç doğru parçasının birbiriyle birleştirilmesiyle oluşan şekil olarak tanımlamıştır.

7. sınıf öğrencilerine,

“2. Soru: ‘Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° ’ dir.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?”

soruları yöneltilmiştir. Bulgular Tablo 88’ de verilmiştir.

Tablo 88

“Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° ’ dir.” ifadesine dair 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin dünyası boyutları	üç	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgin (C3G3)
Kavramsal somut dünya		Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X	X	X	X	X	
		İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi			X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		Bu soruda matematiksel düşünmenin bu boyutu ölçülmemektedir.							
Aksiyomatik formal dünya		İspat sürecinin ifade edilmesi						X	X

Ekin_(C1G1) bu ifadeyi derste öğrendiklerini belirtmiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının pergel ile ölçülerek bulunabileceğini söylemiştir. Daha sonra, pergelin ölçmek için uygun olmadığını belirtmiştir. Ayrıca üçgenin küçük ya da büyük olmasına göre üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının da değişebileceğini söylemiştir. Daha sonra bir üçgen çizmiş ve iç açılarının ölçülerini ölçmek istemiştir. Açıölçeri yanlış bir şekilde kullanarak iç açılarının ölçülerini 112, 120 ve 140 derece olarak bulmuş ve toplamlarının 372° olduğunu söylemiştir. Bu anlamda üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmadığını, 372° olması gerektiğini savunmuştur. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. İdil_(C1G2) üçgenin iç açılarının ölçülerinin değil de kenar uzunluklarının toplamının 180° olduğunu belirtmiştir. Daha sonra bir üçgende tüm kenarlar uzunluklarını 180° olarak göstermiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğu için kenar uzunluklarının da 180° olduğunu söylemiştir. Ayrıca bu bilginin okulda öğrendikleri bir bilgi olduğu için doğru olduğunu söylemiştir. İdil_(C1G2) kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Metin_(C1G3), bir üçgen çizerek iki iç açısına kendisi açı ölçüsü yazmış ve üçüncü iç açısının ölçüsünü bu iki iç açının ölçüleri toplamını 180°'den çıkartarak bulmuştur. Ancak, üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklayamamıştır. Bu şekilde gösterebileceğini ifade etmiş ve kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Elif_(C2G1), bir üçgenin bir iç açı ölçüsü 90° ise bu değer 180°'den çıkarıldığında elde edilen 90°'nin 45° olarak diğer iki iç açı ölçüsüne paylaştırılması gerektiğini belirtmiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu ise üç ile bölünen bir sayı olduğu için olabilir şeklinde açıklamıştır. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Ali_(C2G2) ise dik açı ölçüsü 90° olduğu için iki dik açının ölçüleri toplamından kaynaklı olabileceğini söylemiştir. Açıklamasına bir dik üçgen çizerek devam etmiştir. Dik üçgende dik açının ölçüsünün 90° olduğunu, diğer iki iç açının ölçülerinin ise birbirine eşit olması gerektiğini söylemiştir. Yani 45°'lik açı ölçüleri olması gerektiğini söylemiştir. Ancak ifadenin neden doğru olduğuna

ilişkin bir açıklamada bulunamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Canan_(C3G1) önce bir üçgende iki iç açıya kendi açı ölçü değerleri yazmış ve bu iki iç açının ölçüleri toplamını 180° den çıkararak üçüncü iç açının ölçüsünü bulmuştur. Soru tekrar yöneltildiğinde ise bu defa açıölçer kullanmak istemiş ve bir üçgen çizerek iç açıları ölçmüştür. İç açı ölçülerini 60° , 70° ve 50° olarak bulmuştur. Toplamlarının 180° olduğunu göstermiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Ilgın_(C3G3) önce bir üçgen çizmiş ve iç açı ölçülerine değerler vermiştir. Ancak, bu şekilde düşünmekten vazgeçerek tekrar bir üçgen çizmiştir. Açıölçer yardımıyla üçgenin iç açılarının ölçülerini ölçmüştür. İç açıların ölçülerini 50° , 60° ve 70° olarak bulmuş ve toplamlarının 180° olduğunu göstermiştir. Böylece Ilgın_(C3G3) ispat sürecini ifade ederek aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

7. sınıf öğrencilerine yöneltilen diğer soru,

“3. Soru: ‘Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farkının mutlak değerinden ise büyüktür.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?

İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?”

şeklinde dir. Bulgulara ilişkin bilgiler Tablo 89’ daki gibidir.

Tablo 89

Üçgen eşitsizliğinin sözel ifadesine yönelik 7. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	Ilgın (C3G3)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X	X	X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması				X		X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi						X	

Ekin_(C1G1), önce ifadede anlatılmak isteneni açıklamak istemiştir. Bir üçgen çizerek kenar uzunluklarına değerler vermiş ve ifadeyi bu şekilde örneklendirmiştir. Ancak ifadenin

doğruluğuna ilişkin açıklama yapmamıştır. Bu açıdan kavramsal somut dünya boyutunda bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir. İdil_(C1G2), önce ifadede verilenleri tekrar ederek yorumlamış, ardından bir üçgen çizmiştir. Çizdiği üçgende kenar uzunluklarına kendi değerler vermiş ve ifadeyi bu şekilde açıklamaya çalışmıştır. Ancak, ifadeyi açıklamakta zorlanmış ve üçgen eşitsizliğini de oluşturamamıştır. Böylece düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Metin_(C1G3) ilk olarak ifadenin ne anlama geldiğini sözel olarak açıklamaya çalışmıştır. Ardından ifadeyi açıklamak için bir üçgen çizerek kenar uzunlukları üzerinden ifadeyi göstermek istemiştir. Ancak, kenar uzunluğu yerine açı ölçülerini ele almıştır. Kavramları birbirine karıştırmış ve ifadenin doğruluğuna ilişkin bir açıklamada bulunmamıştır. Sonuç olarak düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Elif_(C2G1) ifadeyi üç kez okumuş, ardından sözel olarak anlatılmak isteneni açıklamıştır. Bir üçgen çizerek bütün kenar uzunluklarını a harfi ile göstermiştir. Böylece ifadeye uygun eşitsizliği yazabilmiştir. Ardından sayısal değerlerle ifadeyi açıklamak istemiş; ancak ifadenin neden doğru olduğunu açıklayamamıştır. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Ali_(C2G2) ifadeyi sözel olarak açıklamış ve doğru anlamıştır. Bir üçgen çizerek kenar uzunluklarına kendi değerler vermiş, ifadeyi uygulamıştır. Ancak ifadenin doğruluğunu açıklayamamış ve üçgen eşitsizliğini de sembolik olarak gösterememiştir. Böylece düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Canan_(C3G1) ise ifadeyi sözel olarak açıklamıştır. Ardından bir üçgen üzerinde kenar uzunluklarına sayısal değerler vermiş ve ifadeyi açıklamaya çalışmıştır. Diğer öğrencilerden farklı olarak Canan_(C3G1) cetvel yardımıyla ifadenin doğru olup olmadığını sorgulamıştır. Farklı kenar uzunluklarını denemiş ve ifadenin doğruluğunu göstermiştir. Ayrıca üçgen eşitsizliğini sembolik olarak ifade etmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. İlgın_(C3G3) da ilk olarak ifadeyi sözel olarak açıklamak istemiş, ardından bir üçgen üzerinde ifadeyi açıklamaya çalışmıştır. Ayrıca, bir üçgende kenar uzunluklarını harflendirerek ifadeye uygun eşitsizliği yazabilmiştir. Ancak, ifadenin doğruluğunu açıklayamamıştır. Böylece nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.

7. sınıf öğrencilerine 2. oturumda son olarak Pisagor Bağıntısı sorulmuştur. Onlara,

“4. Soru: ‘Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, üçüncü kenar uzunluğunun karesine eşittir.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?

İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?”

soruları yöneltmiştir. Bulgular Tablo 90' da gösterilmiştir.

Tablo 90

Pisagor Bağıntısı' nın sözel ifadesine yönelik 7. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgın (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki veriler üzerinde odaklanma	X	X	X	X	X		
	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi		X			X		
	İfadelerin sayılarla denenerak gösterilmesi				X		X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması			X			X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi							X

7. sınıf öğrencilerine Pisagor Bağıntısı' nı ifade eden sözel ifade verildiğinde Ekin_(C1G1), ifadede yer alan "uzunlukların kareleri" sözüne odaklanmıştır. Buradaki kare sözcüğünü geometrik şekil olan kare olarak algılamıştır. Üçgende kareyi göstermek için üç kenar uzunluğuna bir kenar daha eklenmesi gerektiğini söylemiştir. Böylece düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. İdil_(C1G2) önce ifadede yer alan dik kenarları nasıl göstereceğini düşünmüş, ardından ifadeyi sözel olarak açıklamaya çalışmıştır. Ancak, İdil_(C1G2) dik üçgeni doğru bir şekilde gösterememiş ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Metin_(C1G3) ifadede yer alan dik üçgeni ve dik kenarları çizerek göstermiş, ardından üçgenin kenar uzunluklarına harfler vermiştir. İfadeye uygun bağıntıyı sembolik olarak göstermiş; ancak ifadenin doğruluğuna ilişkin bir açıklamada bulunmamıştır. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Elif_(C2G1) önce dik üçgen ve dik kenar kavramları üzerine odaklanmıştır. Ardından ifadeye uygun bağıntıyı cebirsel olarak yazmaya çalışmış; fakat, başarılı olamamıştır. Dik kenarların uzunluklarına a diyerek karelerinin toplamının a^4 olacağını söylemiştir. Yapılan görüşmede araştırmacının yönlendirmesiyle de ifadeyi sayılarla deneyerek doğruluğunu göstermeye çalışmış ama doğruluğu hakkında bir açıklamada bulunamamıştır. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Ali_(C2G2), ifadede yer alan dik üçgen kavramı üzerine odaklanarak ifadeyi sözel olarak

açıklamaya çalışmıştır. Ardından ifadeye uygun bağıntıyı sembolik olarak yazmaya çalışmış ama başarılı olamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Canan_(C3G1) soruyu okuduktan sonra bir dik üçgen çizmiş ve dik kenarlarını göstermiştir. Kenar uzunluklarına sayı değerleri vererek ifadeyi anlamaya yönelik bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Daha sonra araştırmacının yönlendirmesiyle 3-4-5 özel üçgenini denemiş; fakat, ifadenin doğruluğunu açıklayamamıştır. Cebirsel olarak düşündüğünde ise ifadeye uygun sembolik ifade oluşturabilmiştir. Bu anlamda düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Ilgın_(C3G3) ifadeyi önce sayılarla deneyerek açıklamak istemiştir. Ardından bir dik üçgen çizip kenarlarını ölçmesinin daha doğru olacağına karar vermiştir. Yapılan görüşmede araştırmacının da yönlendirmesiyle dik kenar uzunlukları 3 cm ve 4 cm olacak şekilde bir dik üçgen çizmiş ve üçüncü kenarı 5 cm olarak ölçmüştür. İfadeyi düşündüğünde sayısal olarak doğruluğunu göstermiştir. Ardından bir dik üçgende kenar uzunluklarına harfler vererek ifadeye uygun sembolik gösterim yazabilmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünyaya doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir.

4.2.3. 3. oturumda 7. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular

Bu bölümde yapılan görüşmelerin 3. oturumunda 7. sınıf öğrencilerinin cevaplarına ait bulgular sunulmuştur. Öğrencilerin üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı gerçek yaşam durumu içerisinde oluşturmaları beklenmiştir. Öğrenci düşünme süreçleri her bir soru için matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine dair belirlenen boyutlara göre sınıflandırılmıştır. Öğrencilerin verdikleri cevaplar birden fazla sürece uygun şekilde ise birden fazla boyut içinde değerlendirilmiştir. Ayrıca elde edilen bulgular her bir öğrenci için ayrı olarak yorumlanmıştır.

Bu bölümde öğrencilere ilk olarak yöneltilen üçgen eşitsizliğini keşfetmeye yönelik gerçek yaşam durumu ve sorulan sorular aşağıdaki gibidir.

“Bir gün öğretmeni Efe’ ye proje ödevi verir. Proje ödevine göre Efe’ nin üçgen şeklinde bir bahçe tasarlaması gerekmektedir. Efe’ ye öğretmeni bahçenin bir kenarının uzunluğunun 9 cm, diğer kenarının uzunluğunun ise 5 cm olması gerektiğini belirtir.

Üçgeni nasıl çizmesi gerektiğini düşünen Efe sence nasıl bir yol izler?

Sence Efe üçüncü kenarı 4 cm olarak seçebilir mi? Açıklayınız.

Sence Efe üçüncü kenarı 14 cm olarak seçebilir mi? Açıklayınız.

Bu durumda Efe’ nin çizmesi gereken üçgen için nasıl bir bağıntı oluşturursunuz?

Bunu genellemek istersek nasıl açıklarsınız?

Cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?”

Yapılan görüşmelerde öğrencilere araştırmacı tarafından cetvel sunulmuş ve 1cm ile 20 cm arasında değişen uzunluklardaki çubukları kullanabilecekleri belirtilmiştir. Bu soruda 7. sınıf öğrencilerinin düşünme süreçlerinin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre değerlendirilmesi Tablo 91' deki gibidir.

Tablo 91

Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini keşfetmeye yönelik 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgin (C3G3)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi		X					
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemlerin genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması						X	X
Aksiomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi						X	X

Bu soruda Ekin_(C1G1) üçgeni çizerek üçüncü kenar uzunluğunu ölçtüğünde uzunluk değerini bulabileceğini belirtmiştir. Ardından üçgeni çizerek üçüncü kenar uzunluğunu ölçtüğünde 8 cm değerinde olduğunu söylemiştir. Üçüncü kenar uzunluğunun 4 cm olamayacağını, eğer olursa üçgenin küçük olacağını belirtmiştir. Ayrıca, 14 cm' nin de olamayacağını, olması için 5cm ve 9 cm uzunluklarının uzatılması gerektiği yönünde görüş bildirmiştir. Ardından bir kez daha üçgen çizmiş ve bu defa üçüncü kenar uzunluğunu 6,5 cm olarak göstermiştir. Fakat üçgenin üçüncü kenar uzunluğu için herhangi bir bağıntı oluşturamamıştır. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

İdil_(C1G2) gerçek yaşam durumunu okuduğunda ifadeyi açıklamaya çalışmıştır. Üçüncü kenar uzunluğunun 14 cm olması gerektiğini söylemiştir. 14 cm olmasının nedenini ise 9 ve 5' i topladığında 14 elde edilmesinden dolayı olarak belirtmiştir. Araştırmacı başka kenar uzunluk değerlerinin olup olamayacağını sorduğunda sadece 14 cm olacağını ve üçüncü kenar uzunluğu değerinin hep diğer iki kenar uzunluk değerinin toplamı olması gerektiğini söylemiştir. Daha sonra araştırmacı tarafından üçgeni göstermesi için yönlendirildiğinde 14 cm olamayacağını görmüş ve bu defa üçüncü kenar uzunluk değerinin

9 cm olabileceği yönünde bir düşünme gerçekleştirmiştir. Böylece bu kenarın diğer kenara eşit olması gerektiğini söylemiştir. Bu durumda üçüncü kenar uzunluğunun 5cm olup olamayacağı sorulduğunda ise 5 cm' nin olamayacağını çünkü bu uzunluğun kısa kalacağını belirtmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Metin_(C1G3) soruyu okuduğunda cetvel kullanmadan herhangi bir üçgen çizmiştir. Bu üçgenin iki kenar uzunluğunun 5 cm ve 9 cm olması durumunda üçüncü kenar uzunluğunun 10 cm olabileceğini, hatta herhangi bir sayı değeri olabileceğini söylemiştir. Araştırmacının yönlendirmesiyle üçgeni çizdiğinde ise üçüncü kenar uzunluğunun 10 cm' e yakın bir sayı olduğunu belirtmiştir. Ardından üçüncü kenar uzunluğunun 14 cm olup olamayacağını denemiş ve olmadığını görerek her sayının olmayacağını söylemiştir. Belirli bir sayı olması gerektiğini ama bunu da denemeden bulunamayacağını savunmuştur. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.

Elif_(C2G1) ifadeye uygun olacak şekilde bir üçgen çizmiş ve üçüncü kenar uzunluğunu 10 cm olarak ölçmüştür. Araştırmacı üçüncü kenar uzunluğunun 4 cm olup olamayacağını sorduğunda ise olamayacağını arada boşluk olacağını söylemiştir. Ardından 4 cm uzunluğunu denediğinde üçgen oluşmadığını, 5 cm uzunluğunu denediğinde ise üçgen oluştuğunu görmüştür. Bu durumun nedenini ise açıklayamamıştır. Son olarak, 14cm ve 13cm uzunluklarını denediğinde 14 cm olmadığını, 13 cm' nin ise olduğunu görmüştür. Yine bu durumun nedenini açıklayamamıştır. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Ali_(C2G2) 9 cm ve 5 cm uzunluğundaki parçaları birleştirmiş ardından üçüncü kenar uzunluğunun da 9 cm' ye eşit olması gerektiğini söylemiştir. Bunun nedenini ise 5 cm' den 9 cm' ye doğru üçgenin çizildiği şeklinde belirtmiştir. Araştırmacı 5 cm' nin olup olamayacağını sorduğunda ise 5 cm uzunluğunun küçük olacağını ve 5 cm' den daha uzun olması gerektiğini söylemiştir. Araştırmacı 14 cm ve 13 cm olup olamayacağını sorduğunda, üçgeni çizmeden ikisinin de olabileceğini söylemiştir. Ardından gösterdiğinde 14 cm' nin olmadığını, 13 cm' nin olduğunu görmüştür. Araştırmacı 4 cm olup olamayacağını sorduğunda 4 cm uzunluğunu denemiş ve 4' ün olamayacağını görmüştür. Ardından 5 cm uzunluğunu denediğinde 5 cm' nin olduğunu görmüştür. Bu durumda üçüncü kenar uzunluğunun en az 5cm, en fazla 13 cm olabileceğini belirtmiş; ancak, tüm üçgenler için geçerli bir bağıntı oluşturamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Canan_(C3G2) rastgele bir üçgen çizerek bir kenar uzunluğu 5 cm, diğer kenar uzunluğu 9 cm olarak gösterildiğinde üçüncü kenar uzunluğunun ikisinin toplamı ya da farkı

olabileceğini belirterek 4 cm olabileceğini söylemiştir. Araştırmacının yönlendirmesiyle 4 cm uzunluğunu ölçtüğünde üçgen oluşmadığını görmüştür. Yine araştırmacının yönlendirmesiyle sırasıyla 6 cm ve 14 cm uzunluklarını denemiş, 6 cm' nin olabileceğini ancak 14 cm' nin olamayacağını bulmuştur. Bu durumu üçüncü kenar uzunluğunun 9 cm ve 5 cm arasında olabileceği şeklinde yorumlamıştır. Araştırmacı bu defa 10 cm ve 15 cm uzunluklarının olup olmayacağını sorduğunda 10 cm' nin olduğunu, 15 cm' nin olmadığını görmüştür. Ardından üçüncü kenar uzunluğunun 4 cm ve 14 cm arasında olması gerektiğini belirtmiştir. Genel bir bağıntı oluşturması istendiğinde, bir üçgenin kenar uzunluklarına harfler vererek üçgen eşitsizliğini sembolik olarak ifade etmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir.

İlgili(C3G3) ifadeyi okuduğunda öğrencinin üçgeni çizerken üçgenin iç açıları toplamının 180° olması ile bir bağlantı kurup kuramayacağını sorgulamıştır. Cetvel yardımıyla 5 cm ve 9 cm kenar uzunluklarına sahip bir üçgen çizmiş; ancak, açı ölçüsüyle bir sonuca ulaşamayacağını düşünmüştür. Ardından üçüncü kenar uzunluğunun 5cm ile toplandığında 9 cm elde edilebileceğini düşünmüştür. Bu anlamda 4 cm uzunluğunu ölçmüş; fakat, üçgen oluşmadığını görmüştür. Araştırmacı sırasıyla 5 cm uzunluğunu denemesini istediğinde 5 cm' nin olmasını ve 4 cm' nin olmamasını, üçüncü kenar uzunluğunun 5 cm ve 5 cm' den büyük olması gerektiği şeklinde yorumlamıştır. Araştırmacı sırasıyla 14 cm ve 13 cm uzunluklarını sorduğunda ise bu durumu üçüncü kenar uzunluğunun diğer iki kenar uzunluğunun toplamından küçük olması gerektiği şeklinde açıklamıştır. Bu durumda üçüncü kenar uzunluğunun 9 cm ile 5 cm' in toplamı 14 cm' den küçük, 9cm ile 5cm' in farkı 4 cm' den büyük olması gerektiği şeklinde açıklamıştır. Bu duruma uygun bir bağıntı oluşturması istendiğinde üçgen eşitsizliğini sembolik olarak ifade edebilmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirmiştir.

Bu bölümde öğrencilere ikinci olarak yöneltilen gerçek yaşam durumu Pisagor Bağıntısı' nı keşfetmelerine yönelik olarak hazırlanmış ve sırasıyla aşağıdaki sorular sorulmuştur.

“Efe'nin bir diğer proje ödevinde öğretmeni ondan bir ev modeli tasarlamasını istemiştir. Efe tasarlayacağı evin çok farklı bir modelde olmasını ve dikkat çekmesini istemektedir. Efe günlerce düşünür ve 4 odalı bir ev tasarlamaya karar verir. Evin özellikleri şu şekildedir:

-Evin üç odası kare olacaktır.

-Kare şeklinde odalardan ikisinin birer duvarı birbirine dik olacaktır.

-Bu üç oda birbirleri ile birer köşelerinden ikişer ikişer çıkışacaktır.

-Dördüncü odanın duvarları bu üç odanın birer duvarı ile ortak olacak ve aralarında kalacak şekilde tasarlanmaktadır.

Evi nasıl çizmesi gerektiğini düşünen Efe sence nasıl bir yol izler?

Üç odanın arasında kalan oda hangi geometrik şekle benzemektedir?

Efe kare şeklinde bir odanın bir kenarını 4 cm olarak, diğer kare şeklindeki odanın bir kenarını 3 cm olarak seçerse, üçüncü kare şeklinde olan odanın bir kenarı kaç cm olabilir?

Arada kalan dördüncü odanın kenar uzunlukları hakkında ne söyleyebilirsin?

Evin alanı için ne söyleyebilirsin?

Eğer Efe kare şeklindeki odalardan birinin bir kenar uzunluğunu 6 cm, diğerinin bir kenar uzunluğunu 8 cm olarak seçseydi üçüncü odanın bir kenarı ve arada kalan odanın kenar uzunlukları hakkında ne söyleyebilirsin?

Bu durumu genellemek istersek nasıl bir bağıntı oluşturursun?

Cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?"

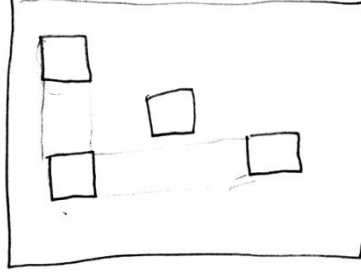
Yapılan görüşmelerde öğrencilere araştırmacı tarafından cetvel sunulmuş, çeşitli uzunluklardaki çubukları kullanabilecekleri belirtilmiştir. Bu soruda 7. sınıf öğrencilerinin cevaplarının matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre değerlendirilmesi Tablo 92' deki gibidir.

Tablo 92

Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı keşfetmeye yönelik 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

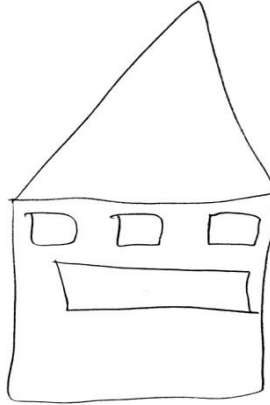
Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Ekin (C1G1)	İdil (C1G2)	Metin (C1G3)	Elif (C2G1)	Ali (C2G2)	Canan (C3G1)	İlgin (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma	X	X	X	X	X	X	X
	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X		X	X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi					X		X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemlerin genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması							X
Aksiomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi							X

Ekin_(C1G1), öncelikle ifadeyi okurken sırasıyla verilenleri çizerek açıklamaya çalışmıştır. Kareleri çizmeye çalışmış, aradaki odayı nasıl düşünmesi gerektiğine odaklanmıştır. Ancak, Pisagor Bağıntısı' nı bulmaya yönelik bir düşünme gerçekleştirememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.



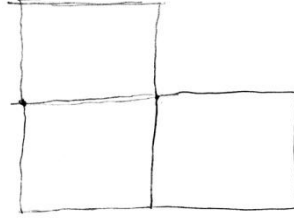
Şekil 31. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Ekin_(C1G1)' in çizdiği şekil

İdil_(C1G2), bu soruda sadece kareler çizmeye odaklanmış; ancak, gerçek yaşam durumuna uygun bir düşünme gerçekleştirememiştir. Soruda verilenlere uygun bir şekil çizememiştir. Böylece düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.



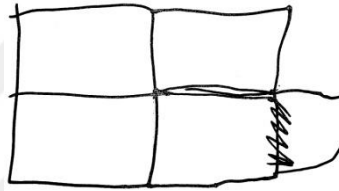
Şekil 32. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair İdil_(C1G2)' in çizdiği şekil

Metin_(C1G3), önce verilenlere odaklanmış, birçok kez ifadeyi okumuştur. Ardından verilenleri açıklamaya çalışarak şekli çizmeye çalışmıştır. Birden fazla şekil çizerek ev için gerekli şartların hepsini sağlamaya çalışmıştır. Ardından dördüncü odanın kare şeklinde olabileceğini düşünmüş ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmaya yönelik bir düşünme gerçekleştirememiştir. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.



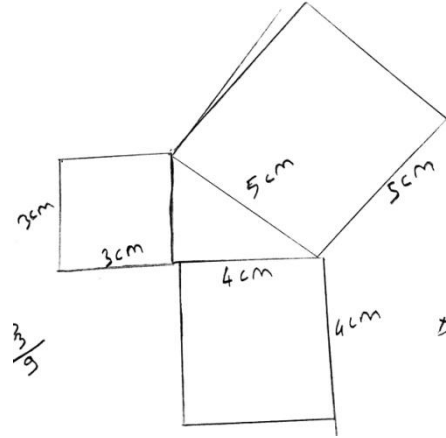
Şekil 33. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağintısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Metin_(C1G3)' in çizdiği şekil

Elif_(C2G1), ifadeyi okuduktan sonra cetvel kullanmak istemiştir. Tüm şartları tek tek okuyarak sağlamaya çalışmış; ancak, zorlanmıştır. Dördüncü odanın dikdörtgen şeklinde olabileceğini belirten Elif_(C2G1), Pisagor Bağintısı' nı oluşturmaya yönelik bir düşünme gerçekleştirememiştir. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.



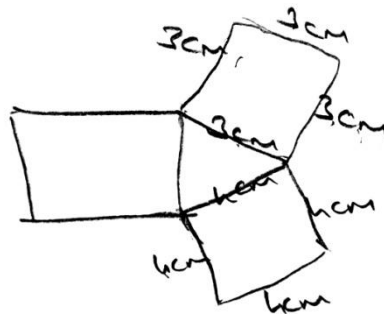
Şekil 34. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağintısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Elif_(C2G1)' in çizdiği şekil

Ali_(C2G2), şartları tek tek sağlamaya çalışarak birden fazla şekil çizmiş ve üç oda arasında kalan dördüncü odanın üçgen şeklinde olduğunu belirtmiştir. Kare odalardan birinin bir kenar uzunluğu 3 cm, diğer karenin bir kenar uzunluğu 4 cm ise üçüncü karenin bir kenar uzunluğunu bulması istendiğinde cetvel yardımıyla bu uzunluklarda kareler çizmiştir. Üçüncü kare şeklindeki odanın bir kenar uzunluğunu ölçtüğünde ise 5 cm olarak bulmuştur. Ardından evin alanını düşündüğünde önce karelerin alanlarını hesaplamıştır. Araştırmacı tarafından karelerin alanları arasında bir ilişki olup olmadığı sorulduğunda 3' ün karesi 9 ile 4' ün karesi 16' nın toplamının 5' in karesi 25' e eşit olduğunu söyleyebilmiştir. Ancak, dik üçgenle bağlantısını açıklayamamıştır. Ayrıca birbirine dik olan bir kenarı 6 cm olan kare ile bir kenarı 8 cm olan kareyi düşünmesi istendiğinde üçüncü karenin bir kenar uzunluğunun 10 cm olacağı cevabını hemen vermiştir. Ancak, bunu "6' nın 2 fazlası 8, 8' in de 2 fazlası 10 eder" şeklinde açıklamıştır. Sonuç olarak Pisagor Bağintısı' na yönelik bir düşünme gerçekleştirememiştir. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.



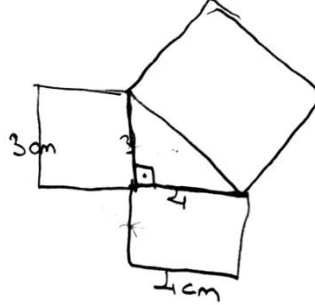
Şekil 35. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Ali_(C2G2)' nin çizdiği şekil

Canan_(C3G1), kare şeklindeki üç odayı önce yan yana düşünmüş ardından soruda yer alan şartları tek tek sağlamaya çalışmıştır. Bu anlamda birden fazla şekil çizerek deneyen Canan_(C3G1) önce arada kalan dördüncü odanın kare olamayacağını keşfetmiş ve dikdörtgen olabileceğini düşünmüştür. Ardından üçgen olmayacağını düşündüğü için dördüncü odayı dikdörtgen olarak düşündüğünü belirterek aslında yanlış düşündüğünü söylemiştir. Dördüncü odanın üçgen şeklinde olabileceğini belirtmiştir. Üçgen şeklini düşünerek tekrar bir çizim yapmıştır. Araştırmacı tarafından birbirine dik olan karelerden birinin bir kenar uzunluğunu 3 cm, diğer karenin bir kenar uzunluğunu 4 cm olarak düşünmesi istenmiştir. Ardından şeklin alanını bulmaya yönelik araştırmacı tarafından yönlendirildiğinde karenin alanını bulmakta zorlandığı, karenin alanını bir kenarının 4 ile çarpılması sonucu bulunabileceğini belirttiği görülmüştür. Sonuç olarak Pisagor Bağıntısı' na yönelik bir düşünme gerçekleştirememiştir. Böylece düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.



Şekil 36. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Canan_(C3G1)' in çizdiği şekil

İlgın_(C3G3), ifadeyi okuduğunda karelerin birbirine dik olmasını paralel olmaları gerektiği şeklinde yorumlamış, ardından yaptığı hatayı fark ederek tüm şartları sağlamaya yönelik bir düşünme geliştirmiştir. Doğru şekli çizen İlgın_(C3G3), arada kalan dördüncü odanın dik üçgen olacağını belirtmiştir. Ardından bir kenarı 3 cm ve bir kenarı 4 cm olan birbirine dik olan iki kareyi düşünmesi istendiğinde cetvel kullanarak bu uzunluklarda iki kare çizmiştir. Üçüncü karenin bir kenar uzunluğunu da 5 cm olarak ölçmüştür. Araştırmacı tarafından şeklin alanını bulması istendiğinde önce karelerin alanlarını hesaplamıştır. Üç karenin alanları arasındaki ilişkiyi iki karenin alanları toplamının üçüncü karenin alanına eşit olması olarak açıklamıştır. Üçgenin kenar uzunlukları açısından düşündüğünde, birbirine dik iki kenarın uzunluklarının karelerinin toplamının üçüncü kenarın uzunluğunun karesine eşit olduğunu keşfedebilmiştir. Ayrıca araştırmacı tarafından dik kenar uzunlukları 6 cm ve 8 cm olan bir dik üçgen için üçüncü kenar uzunluğunun ne olacağı sorulduğunda karelerinin toplamından elde ettiği 100 sayısının bu uzunluğun karesi olacağını açıklamıştır. 10 cm olacağı yönünde doğru cevabı verebilmiştir. Bu durumu genellemesi istendiğinde ise Pisagor Bağıntısı' nı sembolik olarak ifade edebilmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirmiştir.



Şekil 37. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair İlgın_(C3G3)' ın çizdiği şekil

4.2.4. Yarı yapılandırılmış görüşmeler sonucu 7. sınıf öğrencilerinin bireysel değerlendirilmeleri

Bu bölümde yarı yapılandırılmış görüşmeler neticesinde 7. sınıf öğrencilerinin sorular bazında geliştirdikleri matematiksel süreçler her bir öğrenci için ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Ayrıca sorulara diğer öğrencilerden farklı şekilde cevap veren öğrenciler ile yapılan görüşmelerden kesitler de sunulmuştur.

4.2.4.1. Ekin_(C1G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Ekin_(C1G1) cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri 1. düzey olarak belirlenen ve matematik dersi not ortalaması 52 olan bir öğrencidir. Bu bölümde Ekin_(C1G1) ile yapılan görüşmeler üç oturum açısından ayrı ayrı olarak değerlendirilmiştir.

Ekin_(C1G1)' in 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 93' deki gibidir.

Tablo 93

Ekin_(C1G1)' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X										
Aksiomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.											

Ekin_(C1G1)' in 1. oturumda yer alan cebir öğrenme alanı ile ilgili matematiksel düşünme boyutları değerlendirildiğinde ilk 2 soru dışındaki tüm sorularda sadece kavramsal somut dünya boyutunda cevaplar verdiği görülmüştür. İlk 2 soruda nesnel süreçsel sembolik dünyaya ulaşması ise soruların aritmetik içeren sorular olmasından ve işlem süreci sonucunda oluşan somut ifadeyi sembolik olarak düşünmesinden kaynaklanmaktadır. Ekin_(C1G1) cebir içeren sorularda ise sembolik gösterimi ifade edememiştir.

Ekin_(C1G2) ile yapılan görüşmeler sonucunda 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili ikinci, üçüncü ve dördüncü sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 94' de gösterilmiştir.

Tablo 94

Ekin_(C1G1)' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiomatik formal dünya			

2. oturumda Ekin_(C1G1)'in geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara sadece kavramsal-somut dünya açısından cevaplar verdiği görülmüştür. Sözel olarak verilen ifadelerden sembolik dünyaya doğru bir düşünme süreci gerçekleştirememiştir.

Ekin_(C1G1) ile yapılan görüşmeler sonucunda 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 95' deki gibidir.

Tablo 95

Ekin_(C1G1)' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiomatik formal dünya		

Ekin_(C1G1) gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmakta zorlanmıştır. Sözel olarak verilen ifadelerden yola çıkarak matematiksel açıklama yapmakta zorlandığı gibi gerçek yaşam durumu içerisinde de bir düşünme süreci geliştirememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Ekin_(C1G1)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 96' daki gibidir.

Tablo 96

Ekin_(C1G1)' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Becerileri	Dil	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi		X	(“Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.” ifadesi için) 2, 1' in ardışığıdır. 1 ve 2' yi toplarsak da 3 elde ederiz. 3 bir tek sayıdır.
	Nesnelerin , kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi			

	Nesnelerin , kavramların görsel olarak tasvir edilmesi
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)
Aksiomatik formal dünya	Ulaşılması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması

$E_{kin(C1G1)}$, matematiksel dil kullanımında birçok hata yapmıştır. Açıklamalarını sözlü ve yazılı dil kullanarak yapmış; ancak, yazılı dil kullanımında bazı hatalar göstermiştir. İşlemsel süreçlerde işlem önceliğine dikkat etmemiştir. $4+3$, üçgen ya da üçgen eşitsizliği gibi kavramları açıklamaya çalışırken görsel olarak açıklama yapmaya çalışmış ama görsel dil kullanımında da zorluk yaşamıştır. Sembolik dili kullanamamıştır. $E_{kin(C1G1)}$ ' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası boyutları açısından kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

$E_{kin(C1G1)}$ ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

$E_{kin(C1G1)}$ ' in soruları cevaplandırırken genellikle ifadelere yer alan verilerin özelliklerine odaklandığı ve ifadeleri açıklama eğiliminde olduğu belirlenmiştir. $a+3b$ ifadesinin önce denklem konusu olduğunu söylemiş, sonra bu ifadenin eşitlik içermediği için denklem olamayacağını belirtmiştir. $a+3b$ ' de eğer 3 olmasaydı iki bilinmeyen yan yana olmasından ötürü sorunun çözülemeyeceğini, bu yüzden arada sayı olduğunu söylemiştir. Hem bu ifadenin bir çözümü olduğunu belirtmiş hem de eşitlik içermediği için denklem olamayacağını söylemiştir. $E_{kin(C1G1)}$ cebirsel açıklama yapması istenen tüm sorularda alfabede yer alan harflerin sayılar yerine kullanıldığını söylemiştir. Sırasıyla a harfinin 1 sayısına, b harfinin 2 sayısına, c harfinin 3 sayısına eşit olduğunu söylemiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir:

(“*Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.*” ifadesini açıklarken)

$E_{kin(C1G1)}$: *Hmm mesela a, b' nin ardışığıdır. Çünkü a' dan sonra b geliyor. Böyle böyle devam ediyor. a artı b eşittir c çünkü a,b,c diye gidiyor. Ben böyle düşündüm.*

Araştırmacı: c bir tek sayı mıdır?

$E_{kin(C1G1)}$: *Bence c tek sayıdır. Çünkü a' nın yerine 1 getirirsek b' nin yerine 2 getirirsek toplamı c olur. c' nin yerine de 3 getiririz.*

Araştırmacı: Peki b artı c neye eşittir?

$E_{kin(C1G1)}$: *ç' ye eşittir.*

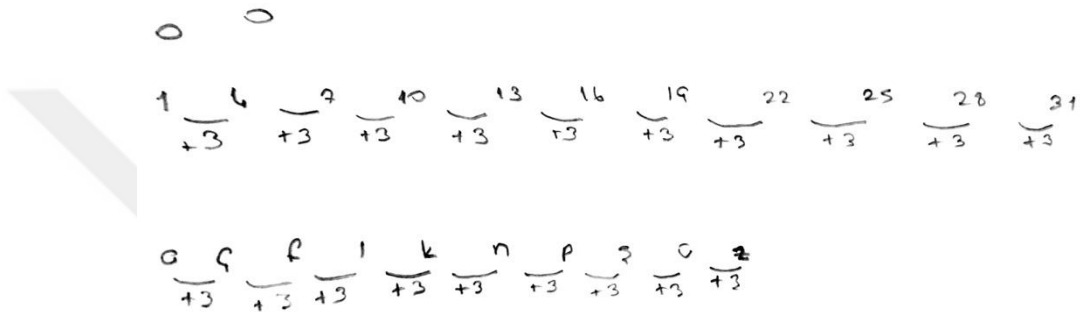
Araştırmacı: Peki 4 çift sayı mıdır tek sayı mıdır?

Ekin_(C1G1): Çifttir çünkü 4 olur.

Araştırmacı: Peki 30 sayısı için hangi harfi kullanırsın?

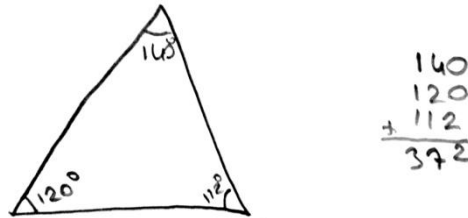
Ekin_(C1G1): Hmm...Sanırım c ile o olabilir.

Ekin_(C1G1) görüldüğü üzere alfabedeki harflerin sırasıyla doğal sayılara karşılık geldiğini düşünmektedir. Diğer sorularda da benzer şekilde açıklamalar yapmıştır. Örüntü sorusu için örüntünün kuralını cebirsel olarak açıklaması istendiğinde her bir adımdaki bilye sayısını harfle gösterebileceğini söylemiştir.



Şekil 38. Ekin_(C1G1)' in örüntü sorusunda her bir adımdaki bilye sayısını alfabedeki harflerin sırasıyla ilişkilendirmesine dair

Ekin_(C1G1) her bir sayının sırasına karşılık harfi düşünmüştür. 25. adımdaki bilye sayısı sorulduğunda ise z harfine 25. adımdan önce ulaştığını ve z harfinin son harf olmasından dolayı sonraki adımlarının bulunamayacağını söylemiştir. Diğer yandan Ekin_(C1G1) $2x$ gibi bir ifadede x yerine bir sayı geldiğinde onun iki basamaklı bir sayı oluşturduğunu belirtmiştir. $2x$ ifadesinde x ' i 2 olarak düşündüğünde 22 sayısının oluştuğunu söylemiştir. Üçgeni tanımlarken köşelerinin dik ve sivri olduğuna dair bir açıklamada bulunmuştur. Ayrıca üçgenin üçgen prizması gibi çeşitleri olduğunu söylemiştir. Bir üçgenin iç açılarını ölçerken açıölçeri doğru bir şekilde kullanamadığı belirlenmiştir. Bu yüzden çizdiği bir üçgende üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını 372° olarak bulmuştur.



Şekil 39. Ekin_(C1G1)' in üçgenin iç açılarını ölçerken gerçekleştirdiği hatalı sürece dair

Ekin_(C1G1) verilen sözel ifadede yer alan üçgen eşitsizliğini sözel olarak açıklamış; ancak, ifadenin doğruluğuna ilişkin bir açıklama yapamamıştır. Gerçek yaşam durumu

içerisinde ise bir üçgen çizerek kenar uzunluklarını ölçmüş ve üçüncü kenar uzunluğunun kaç cm olabileceğine dair açıklamalar yapmıştır. Yine de üçgen eşitsizliğine ulaşamamıştır. Pisagor Bağıntısı'nda yer alan dik kenar uzunluklarının kareleri ifadesindeki kare kavramını geometrik şekil olan kare olarak düşünmüştür. Yani sözel ifadede yer alan üs kavramı ile kare şeklini ayırt edememiştir. Ayrıca gerçek yaşam durumu içerisinde de Pisagor Bağıntısı'na dair bir düşünme süreci geliştirememiştir.

4.2.4.2. İdil_(C1G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

İdil_(C1G2) cebirsel düşünme düzeyi 1. düzey, geometrik düşünme düzeyi ise 2. düzey olarak belirlenen ve matematik dersi not ortalaması 35 olan 7. sınıf öğrencisidir. Bu bölümde İdil_(C1G2) ile yapılan görüşmelerde her bir oturum ayrı ayrı değerlendirilmiş ve sunulmuştur.

İdil_(C1G2)'in 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 97'de gösterilmiştir.

Tablo 97

İdil_(C1G2)'in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları		Soru Numaraları											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal dünya	somut	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel sembolik dünya	süreçsel	X	X										
Aksiomatik dünya	formal	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.											

İdil_(C1G2) 1. oturumda birinci ve ikinci sorular dışındaki tüm sorularda sadece kavramsal somut dünya düzeyinde cevaplar vermiştir. 2. soruda ise sadece nesnel süreçsel sembolik dünya düzeyinde cevap vermiştir.

İdil_(C1G2) ile yapılan görüşmeler neticesinde 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 98'deki gibidir.

Tablo 98

İdil_(C1G2)'in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4

Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiomatik formal dünya			

İdil_(C1G2) 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili tüm sorulara sadece kavramsal somut dünya boyutunda cevaplar vermiştir. Sözel olarak verilen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ifadeleri için düşünme süreci geliştirememiştir.

İdil_(C1G2)' in 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 99' daki gibidir.

Tablo 99

İdil_(C1G2)' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiomatik formal dünya		

İdil_(C1G2) sözel olarak verilen ifadelerde oluşturmakta zorlandığı üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı gerçek yaşam durumu içerisinde de oluşturmakta zorlanmış, düşünme boyutu kavramsal somut dünya boyutunda sınırlı kalmıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda İdil_(C1G2)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 100' deki gibidir.

Tablo 100

İdil_(C1G2)' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	(4+3 ifadesi için) 4 ile 3' ü toplayınca 7 ediyor. 4 tane elmam vardı. Annem 3 tane daha ekledi. 7 tane oldu.
	Nesnelerin, kavramların yazılı		

	olarak tasvir edilmesi
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsel ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmaması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması

$\text{İdil}_{(C1G2)}$ ' in matematiksel dil becerileri yetersizdir. Sözlü dil boyutunda değerlendirilen dil becerileri dahi bazı sorularda yetersiz kalmıştır. Yazılı dil kullanımında birçok hata yapmıştır. Görsel dili ifade eden cevaplar verememiştir. Sembolik dil becerilerinin ise gelişmediği söylenebilir. Bu anlamda matematiksel dil becerileri kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

$\text{İdil}_{(C1G2)}$ ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

$\text{İdil}_{(C1G2)}$ görüşme sürecinde, $a+3b$ ' yi anlatırken üçgen kavramı üzerinden açıklama yapmaya çalışmıştır. a ' nın bilinmeyen bir sayı olduğunu söylemiştir. Ancak, $3b$ ' nin üçgende kenar uzunluğu 3' e eşit olan bir kenarı ifade etmek için kullanıldığını söylemiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir:

("a+3b" ifadesini açıklarken)

$\text{İdil}_{(C1G2)}$: *a bilinmeyen bir sayının yerine gelir. 3b' de bir şekli anlatırken mesela üçgen şeklini anlatırken bir kenarına 3 yazarız o da 3b olur.*

Araştırmacı: Gösterir misin?

$\text{İdil}_{(C1G2)}$: *Mesela şöyle bir üçgen burası a burası b burası c. Mesela bir şekli anlatırken a artı b bide c eşittir 3 olur.*

Araştırmacı: Neden 3 ' e eşit?

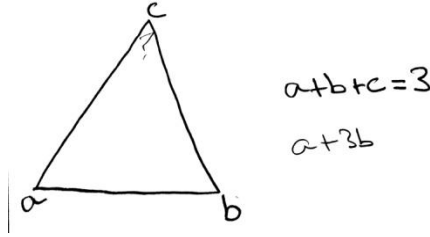
$\text{İdil}_{(C1G2)}$: *Kenarları olduğu için 3 tane kenarı olduğu için.*

Araştırmacı: 4 kenarı olsaydı ne olacaktı?

$\text{İdil}_{(C1G2)}$: *4' e eşit olurdu.*

Araştırmacı: Peki $a+3b$ ' yi nasıl gösterirsin?

$\text{İdil}_{(C1G2)}$: *Mesela burada b' yi vermemiştir ya da c' yi vermemiştir ama bunların toplamının 3 olduğunu biliyordur o sayının yerine de $a+3b$ olarak olabilir.*



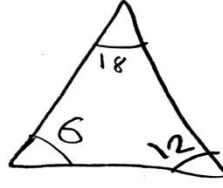
Şekil 40. İdil_(C1G2)' in $a+3b$ ifadesini açıklama süreci

İdil_(C1G2) burada üçgen kavramı ile bağlantı kurmaya çalışmıştır. Bir üçgenin kenar uzunluklarının harflerle isimlendirilmesinden yola çıkarak bir düşünme süreci geliştirmeye çalışmıştır. Ancak $a+3b$ ' ye dair bir açıklamada bulunmamıştır. Ardışık iki sayıyı, bir sayı ve sayının tekrar etmesi olarak düşünmüştür. 2' nin ardışığının 2, 3' ün ardışığının 3 olacağını söylemiştir. Tek sayıların bir basamaklı sayılar, çift sayıların ise iki basamaklı sayılar olacağını belirtmiştir. 154 gibi üç basamaklı bir sayıda 1' in yanında iki tane rakam olduğu için bu sayının çift sayı olacağını söylemiştir. Dört basamaklı bir sayının ise tek ya da çift sayı olup olamayacağı hakkında bir açıklama yapamamıştır. Bu anlamda tek ve çift sayı kavramlarına dair yanlıgısının olduğu söylenebilir. İdil_(C1G2)' in bir ifadede yer alan x harfi ile çarpma sembolünü ayırt edemediği belirlenmiştir. x' in harf olarak yer aldığı bir ifadeyi çarpı olarak okumuştur. $2x+5$ ' in de bu anlamda 2 ile 5' in çarpımından 10' a eşit olması gerektiğini söylemiştir. Benzer şekilde $4x+8$ ifadesinde de 4 ile 8' in çarpılması gerektiğini belirtmiştir. " $x=3$ " ifadesinin ise bir sayının çarpımının sonucunun 3 çıkacağı anlamına geldiğini belirtmiştir. x' i çarpma sembolü olarak düşünerek 3' e eşitlendiğini ifade etmiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını açıklamak isterken, üçgenin kenar uzunluklarının toplamının 180° olduğunu söylemiştir. Ayrıca bütün iç açı ölçülerini 180° olarak göstermiş ve bir sayıyla üç kenar uzunluğunun toplamının 180° olacağını söylemiştir.



Şekil 41. İdil_(C1G2)' in üçgenin tüm iç açı ölçülerini 180° olarak düşünmesi

İdil_(C1G2), benzer hatayı bir diğer soruda da yapmıştır. Bu defa üçgen eşitsizliğinin sözel olarak verildiği ifadeyi açıklarken kenar uzunluğunu açı ölçüsü olarak göstermiştir. Üçgen eşitsizliğinin sözel ifadesini sembolik ifadeye dönüştürürken, sözel ifadede yer alan kelime sırasını takip ederek baş harflerinden bir sembolik ifade oluşturmaya çalışmıştır.



$$12 + 6 > 18$$

Şekil 42. İdil_(C1G2)' in üçgen eşitsizliğine dair sembolik gösterimi

Üçgen eşitsizliğinin gerçek yaşam durumu içerisinde yer aldığı soruda ise bir üçgenin kenar uzunluklarını doğru bir şekilde ölçmüş, ancak üçgen eşitsizliğine dair bir açıklama yapamamıştır. Sözel olarak verilen ifadede yer alan Pisagor Bağıntısı' nı açıklama sürecinde dik üçgen çizmek istemiş; ancak dik üçgeni doğru bir şekilde ifade edememiştir. Dik kenar uzunluklarının karelerinin toplamını düşünmesi istendiğinde ise kenar uzunluklarını 3 cm olarak düşünmüş ve 3' ün karesini 6 olarak belirtmiştir. Cebirsel olarak ifade ederken "dik kenar uzunluklarının karelerinin toplamı" ifadesinin baş harflerini ele alarak sembolik ifade yazmaya çalışmıştır.



$$Dik u^2 + 3.ku^2 =$$

Şekil 43. İdil_(C1G2)' in Pisagor Bağıntısı' nın sözel ifadesine dair sembolik gösterimi

İdil_(C1G2)' in Pisagor Bağıntısı için yazdığı sembolik ifadede "Dik kenar uzunluklarının karelerinin toplamı üçüncü kenar uzunluğunun karesine eşittir." cümlesinin baş harflerini ve söylem sırasını dikkate alarak bir ifade oluşturmaya çalışmıştır. Ayrıca İdil_(C1G2)' in kenar uzunluklarını gösterirken uzunluk birimlerini kullanmadığı görülmüştür. Sözel olarak verilen ifadede Pisagor Bağıntısı' nı oluşturamayan İdil_(C1G2), gerçek yaşam durumu içerisinde de oluşturmakta zorlanmıştır.

4.2.4.3. Metin_(C1G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Metin_(C1G3) cebirsel düşünme düzeyi 1. düzey, geometrik düşünme düzeyi ise 3. düzey olarak belirlenen ve matematik dersi not ortalaması 67 olan 7. sınıf öğrencisidir. Bu

bölümde $\text{Metin}_{(C1G3)}$ ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi her bir oturum için ayrı ayrı yapılmıştır.

$\text{Metin}_{(C1G3)}$ ' in 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 101' de gösterilmiştir.

Tablo 101

$\text{Metin}_{(C1G3)}$ ' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X							X			
Aksiomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.											

$\text{Metin}_{(C1G3)}$ cebir öğrenme alanı ile ilgili yapılan görüşmelerde genellikle sorulara kavramsal somut dünya boyutunda; 1., 2. ve 9. sorularda ise görüşmeler neticesinde nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda cevaplar vermiştir.

$\text{Metin}_{(C1G3)}$ ' in 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 102' de gösterilmiştir.

Tablo 102

$\text{Metin}_{(C1G3)}$ ' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiomatik formal dünya			X

$\text{Metin}_{(C1G3)}$ ' in geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda 2. ve 3. sorulara kavramsal somut dünya boyutunda, Pisagor Bağıntısı' nın sözel ifadesini açıklama sürecinde kavramsal somut dünya boyutundan nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru cevaplar verdiği görülmüştür.

Metin_(C1G3)' in 3. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 103' de gösterilmiştir.

Tablo 103

Metin_(C1G3)' nin gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiyomatik formal dünya		

Metin_(C1G3) gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor bağıntılarını oluşturmakta, sembolik olarak ifade etmekte zorlanmıştır. Düşünme boyutu kavramsal somut dünya ile sınırlı kalmıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Metin_(C1G3)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 104' deki gibidir.

Tablo 104

Metin_(C1G3)' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	(5' i anlatırken) 5 bir rakam. Onun dışında 1 elma, 2 elma, 3 elma, 4 elma, 5 elma tarzında sayarak da bulabiliriz. Yani sayı.
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi	X	$8 + 4 \cdot 3 =$ 12 $8 + 12 = 20$
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi		
Nesnel süreçsel	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi		

sembolik dünya	(cebirsel ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmaması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması

Metin_(C1G3)' in matematiksel dil becerilerinin kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kaldığı belirlenmiştir. Metin_(C1G3) açıklamalarında sözlü dili daha çok kullanmasına rağmen yazılı dili de doğru biçimde kullanabilmiştir. Ancak, görsel dil becerilerini doğru biçimde kullanamamıştır. Sembolik dil kullanmakta zorlanmıştır. Sözel ifadeler için sembolik ifade oluşturamamıştır. İfadeleri açıklarken sözlü olarak açıklamanın daha kolay olduğunu söyleyen Metin_(C1G3) açıklamalarını önce sözlü olarak yapmayı tercih etmiştir.

Metin_(C1G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Metin_(C1G3)' in sayıların sayma işlemi sonucunda oluşan sembolik ifadeler olduğunu belirttiği görülmüştür. Bir sayıyı x olarak düşündüğünde 2 eksiğini $-2x$ olarak düşünmüştür. Ayrıca, $a+3b$ cebirsel ifadesinin sonucu olduğunu belirtmiştir. Tek ve çift sayıları cebirsel olarak gösteremeyeceğini söylemiş ve buna yönelik bir düşünme süreci geliştirmemiştir. Sözel olarak verilen ifadelere uygun cebirsel ifadeler yazdığı halde birbirine eşit olan ifadelerin eşitliğini açıklayamamıştır. Birbirine eşit cebirsel ifadelerin ise bilinmeyenlere verilecek farklı sayı değerleri için eşit olamayacaklarını söylemiştir. Örüntü sorusunu cevaplandırırken önce her bir adımdaki bilyeleri çizmek istemiş, ardından bilye sayılarını düşünerek ve yazarak çözüme ulaşmaya çalışmıştır.

*X adım sayısı, ilk adımda
ikinci adımda $x+3$
üçüncü adım $x+3.2$
şeklinde devam eder.*

Şekil 44. Metin_(C1G3)' in örüntü kuralını açıklama süreci

Metin_(C1G3) 1,4,7,... şeklinde devam eden örüntünün kuralını adım sayısına her defasında 3' ün katının eklenmesi olarak ifade etmiştir. Metin_(C1G3) alan ve çevre kavramlarını birbirine karıştırmıştır. Üçgen eşitsizliğinin sözel olarak verildiği ifadede üçgenin kenar uzunlukları yerine iç açılarının ölçülerini düşünmüştür. Bu anlamda kenar uzunluğu ile açı ölçüsü kavramlarını birbirine karıştırmıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturması istendiğinde ise üçgenler çizip kenar uzunluklarını

Elif_(C2G1) birinci oturumda 12 sorudan 5' inde nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirmiş, diğer sorularda ise düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Elif_(C2G1)' in 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 106' da gösterilmiştir.

Tablo 106

Elif_(C2G1)' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiomatik formal dünya		X	

Elif_(C2G1) sözel olarak verilen ifadelerde üçgen eşitsizliğini sembolik olarak ifade edebilmiş, böylece nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Ancak, üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu göstermekte ve sözel olarak verilen Pisagor Bağıntısı' nı ifade etmekte zorlanmıştır. Düşünme boyutu kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Elif_(C2G1)' in 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 107' deki gibidir.

Tablo 107

Elif_(C2G1)' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

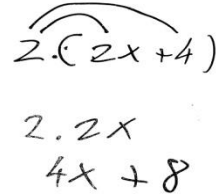
Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiomatik formal dünya		

Elif_(C2G1) gerçek yaşam durumu içerisinde oluşturmaya beklenen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' na ulaşamamış, düşünme boyutu kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda $Elif_{(C2G1)}$ ' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 108' deki gibidir.

Tablo 108

$Elif_{(C2G1)}$ ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi	X	(“Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.” ifadesini açıklarken) Tek sayı olur. Mesela 2 ile 3' ün toplamı 5 olur. 4 ile 3' ü toplarsak 7 olur. 12 ile 13' ü toplarsak 25 olur. Sonucu hep tek sayı gelir.
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)	X	
Aksiomatik formal dünya	Ulaşılmayı istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		

$Elif_{(C2G1)}$ ' in ifadeleri genellikle sözlü olarak açıklama eğiliminde olduğu belirlenmiştir. Yazılı dil ve görsel dil becerilerini kullanmakta zorlanmıştır. Sözel ifadeleri sembolik ifadelere dönüştürebilmiş ve sembolik ifadeler arasındaki ilişkileri gösterebilmiştir. Bu anlamda dil becerileri nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

$Elif_{(C2G1)}$ ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

$Elif_{(C2G1)}$, $a+3b$ ifadesini önce bir eşitlik olarak düşünmüş ardından bu ifadenin cebirsel ifade olduğunu belirtmiştir. Cebirsel ifadeyi cebirsel sayı olarak ifade etmiştir.

Ayrıca bu soruda günlük yaşamdan örnek vererek ifadeyi açıklayan Elif_(C2G1) ile yapılan görüşme süreci aşağıda sunulmuştur.

(“ $a+3b$ ” ifadesini açıklarken)

Elif_(C2G1): a eşittir $3b$. Yani $3b'$ nin 3 te biridir a .

Araştırmacı: Açıklar mısın?

Elif_(C2G1): Aslında şöyle. 1 tane içecek diyelim a' ya. 3 tane de çikolata diyelim b' ye. a artı $3b$ olur işte.

Araştırmacı: Peki eşitlik var mı?

Elif_(C2G1): Eşiti yoktur yani karşılığı olmaması lazım. Aslında sonucu yok. Cebirsel bir sayı.

Elif_(C2G1) ardışık sayıları cebirsel olarak düşündüğünde ifade etmekte zorlanmıştır. Bir sayıyı a olarak düşündüğünde ardışığının sırasıyla b , $2a$ ve $3a$ olabileceğini düşünmüş; ancak, hepsinin yanlış olacağını belirtmiştir. Dolayısıyla ardışık sayıları cebirsel olarak gösterememiştir. Elif_(C2G1) sözel olarak verilen ifadeleri önce sayısal verilerle açıklamayı tercih etmiştir. Ancak, özellikle yazılı dil gösterimlerinde işlemsel süreci gösterirken bazı hatalar yapmıştır. İşlemsel sürecinde her bir adımı birbirine eşitlemiştir.

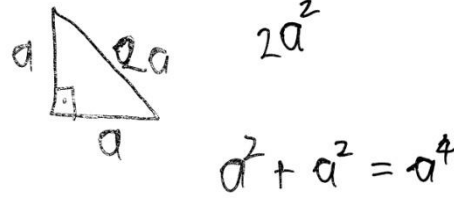
$$2 \times 4 = 8 + 8 = 16$$

$$2 + 2 = 4 \times 4 = 16$$

Şekil 46. Elif_(C2G1)' in yazılı dil kullanımında yaptığı hata

Elif_(C2G1), cebir öğrenme alanı ile ilgili sorularda verilen cebirsel ifadeleri karşılaştırırken sembolik düşünme geliştirebilmiştir. Dikdörtgensel bölgenin alanı için farklı cebirsel ifadeler bulması istenen soruda dikdörtgenin iç açılı ölçülerini düşünmüş ve alanın 380° olacağını söylemiştir. Ardından hata yaptığını düşünerek alanın değil, sadece açılı ölçüsünün bulunabileceğini belirtmiştir. Elif_(C2G1), üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını, 3'e kalansız bölünebilen bir sayı olması ile ilişkilendirmiştir. Elif_(C2G1), sözel olarak verilen ifadede üçgen eşitsizliğini açıklamakta zorlanmıştır. Eşkenar üçgen üzerinden göstermeye çalışmış; ancak, sözel ifadeyi anlamakta güçlük çekmiştir. Elif_(C2G1), gerçek yaşam durumu içerisinde oluşturması beklenen üçgen eşitsizliği için bir üçgen çizmiş ve kenar uzunluklarını ölçmüştür. Farklı üçgenler üzerinden farklı kenar uzunluklarını düşünmüş ama üçgen eşitsizliğini oluşturamamıştır. Sözel olarak verilen Pisagor Bağıntısı'nı sembolik olarak düşünmeye çalışmış; fakat, başarılı olamamıştır. Dik üçgenin dik kenar

uzunluklarının ikisini de a olarak, dik açının karşısındaki kenar uzunluğunu ise $2a$ olarak düşünmüştür. Dik kenar uzunluklarının kareleri toplamını ise a^4 olarak göstermiştir.



Şekil 47. Elif_(C2G1)' in Pisagor Bağıntısı' na yönelik sembolik gösterimi

Elif_(C2G1)' in Pisagor Bağıntısı' nı açıklarken çizdiği dik üçgende kenar uzunluklarını gösterirken üçgen eşitsizliğine dikkat etmemesi, bu konuyu daha önce öğrenmemiş olmasından kaynaklanmaktadır. Ancak a^2 ile a^2 ' nin toplamını ifade ederken ve $2a$ ' nın karesini gösterirken hata yapmıştır. Elif_(C2G1) sözel olarak verilen ifadede açıklamakta zorlandığı Pisagor Bağıntısı' nı, gerçek yaşam durumu içerisinde de oluşturamamıştır.

4.2.4.5. Ali_(C2G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri ikinci düzey olarak belirlenen Ali_(C2G2)' nin matematik dersi not ortalaması 95' dir. Bu bölümde Ali_(C2G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi her bir oturum için ayrı ayrı yapılmıştır.

Ali_(C2G2)' nin 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 109' da gösterilmiştir.

Tablo 109

Ali_(C2G2)' nin cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X	X	X	X				X	X	X	X
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.								X	X	X	

Ali_(C2G2) cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara genellikle nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda cevaplar vermiştir. 6., 7. ve 8. sorularda ise düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. 9., 10. ve 11. sorularda da aksiyomatik formal

dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. Bu soruların verilen sözel ifadelere uygun sembolik ifadeler oluşturması istenen sorular ve verilen cebirsel ifadeleri karşılaştırması istenen sorular olduğu belirlenmiştir.

Ali_(C2G2)'nin 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 110'daki gibidir.

Tablo 110

Ali_(C2G2)'nin geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiomatik formal dünya			

Ali_(C2G2) sözel olarak verilen ifadelerde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı ifade edememiştir. Ayrıca, Ali_(C2G2) üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklayamamıştır. Bu anlamda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Ali_(C2G2)'nin 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 111'de gösterilmiştir.

Tablo 111

Ali_(C2G2)'nin gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiomatik formal dünya		

Ali_(C2G2) sözel olarak verilen ifadelerde açıklamakta zorlandığı üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı gerçek yaşam durumu içerisinde de oluşturamamış ve açıklayamamıştır. Düşünme boyutu kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Ali_(C2G2)'nin matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 112'deki gibidir.

Tablo 112

Ali_(C2G2)'nin matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	($4+3$ ifadesi için) Toplamları 7 sayısı ediyor. 4'ün üstüne 3 ekledim 7'yi buldum. Yani 4,5,6,7 diye saydım. 7 oldu.
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi		
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)	X	(Ardışık iki sayıya ve toplamlarına dair) $m, m+1$ $2m+1$
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmak istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		

Ali_(C2G2)'nin ifadeleri açıklarken sözlü dil kullanımına önem verdiği, yazılı dili sadece işlemsel süreci gösterirken kullandığı belirlenmiştir. Yazılı dil ve görsel dil becerileri yetersiz kalmıştır. Sözel ifadelere uygun sembolik ifade oluşturabilmiştir. Ancak, dil becerilerini kullanırken birçok hata yaptığı görülmüştür. Bu anlamda dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirildiğinde nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Ali_(C2G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Ali_(C2G2), işlemsel süreçleri gösterirken yazılı dil kullanımında hatalar yapmıştır. Diğer öğrencilerin yaptığı hatalara benzer şekilde işlemleri birbirine eşitleyerek devam etmiştir.

$$4 \cdot 3 = 12 + 8 = 20$$

Şekil 48. Ali_(C2G2)' nin yazılı dil kullanımında yaptığı hata

Ali_(C2G2)' nin cebir öğrenme alanı ile ilgili sorularda sözel olarak verilen ifadeler için sembolik ifadeleri oluşturabildiği belirlenmiştir. Ayrıca verilen cebirsel ifadeleri sembolik olarak karşılaştırabilmiştir. Ardışık sayıların toplamlarını açıklarken sayılardan birini m olarak düşündüğünde ardışığının önce n olabileceğini düşünmüş, ardından yaptığı hatayı fark etmiştir. m ' nin ardışığının $m+1$ olması gerektiğini söyleyerek toplamlarının $2m+1$ olacağını söylemiş; ancak, $2m+1$ ' in tek sayıyı gösterdiğini açıklayamamıştır. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(“Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.” ifadesini açıklarken)

Ali_(C2G2): Art arda mesela birine 7 diyelim. Diğeri de 8 olsun. Bunların toplamı tek ile çiftin toplamı tek ediyor diye biliyorum. Bence bu doğru. Bunların toplamı 15 yapar tek.

Araştırmacı: Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?

Ali_(C2G2): Bir tane sayı yerine harf kullanayım. m olsun mesela. Ardışığı n olur. Hmm yok. $m+1$ olmalı. Önce m ' leri toplayım. Sonra da 1 eklerim. Yani m yaparım onlara da artı 1 eklersem $2m+1$ olur.

Araştırmacı: Peki $2m+1$ tek sayı mıdır?

Ali_(C2G2): Tek midir? Şu anda harf verildiği için bilemiyorum. Belki sonucu verilseydi mesela $2m+1$ eşittir mesela 16 deseydi veya 17 deseydi 1 çıkartıp 2' ye bölerdim. O zaman tek olup olmadığını bulurdum.

Görüldüğü üzere Ali_(C2G2) sözel ifadeler için cebirsel ifade oluşturup bu ifadelerle işlemsel süreci gerçekleştirebildiği halde, elde ettiği yeni cebirsel ifadeyi yorumlamakta zorlanmıştır. Düşünme sürecinin nesnel süreçsel sembolik dünya ile sınırlı kaldığı görülmüştür. Öte yandan tek ve çift sayılar için cebirsel ifade oluşturamadığı belirlenmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(“İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.” ifadesini açıklarken)

Araştırmacı: Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?

Ali_(C2G2): Şöyle yapsam acaba doğru mu? $3n$ çarpı $9n$ eşittir $27n$ eder.

Araştırmacı: $3n$ tek bir sayı mıdır?

Ali_(C2G2): Evet

Araştırmacı: $9n$ tek bir sayı mıdır?

Ali_(C2G2): Evet tek sayıdır.

Araştırmacı: $27n$ tek bir sayı mıdır?

Ali_(C2G2): Evet kesin tek sayıdır.

Araştırmacı: Peki n yerine 6 sayısını düşünürsen nasıl bir sayı olur?

Ali_(C2G2): n yerine 6 dersek o zaman sonuç değişir bence. Çünkü 6 çift bir sayı. Çift ile tek bir sayının çarpımı her zaman tek gelme ihtimali olmayabilir.

(“Tek ve çift sayıların toplamı çift sayıdır.” ifadesini açıklarken)

Araştırmacı: Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?

Ali_(C2G2): Harf olarak a kullanayım. $5a$ artı $6a$ eşittir $11a$ eder.

Araştırmacı: $5a$ ve $11a$ tek sayı, $6a$ da çift sayı mıdır?

Ali_(C2G2): Evet. Çünkü 5 ve 11 tektir. 6 ise çifttir.

Yapılan görüşme incelendiğinde Ali_(C2G2)'nin, harfin katsayısının çift sayı ya da tek sayı olmasına göre cebirsel ifadenin tek sayı ya da çift sayı olup olmadığına karar verdiği görülmektedir. Ancak, harf yerine gelmesi gereken bir sayıyı düşündüğünde o zaman sonuca göre karar vermek gerektiğini belirtmiştir. Sayısal olarak düşündüğünde doğru bir düşünme süreci geçirmesine rağmen, tek ve çift sayıları sembolik olarak düşünürken hatalar yapmıştır. Ali_(C2G2) diğer 7. sınıf öğrencilerinden farklı olarak verilen örüntü için kuralı sembolik olarak oluşturabilmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Örüntü kuralını oluştururken)

Ali_(C2G2): Üçer üçer arttığı için 3 ile çarptım. Sonra 1 ekledim. $3n+1$ oldu.

Araştırmacı: Neden 1 ekledin?

Ali_(C2G2): Çünkü ilk başta 1 olduğu için. n 'ye 1 dersem 3 çarpı 1 olur. 3 eder. 1 eklerim. Aaa. Olmadı.

Araştırmacı: Neden?

Ali_(C2G2): Çünkü 3 artı 1 deyince 4 ediyor. Şöyle 1 elde etmek için o zaman eksi 2 yaparım. $3n-2$ olmalı. Evet $3n-2$. Birinci adımdaki bilye sayısını ve ikinci adımdaki n yerine 2 dersek 2 çarpı 3 olur. 6 eder. Eksi 2' de 4 eder. Evet veriyor. Üçüncü adımı da denersek 3 kere 3 olduğunda 9. Eksi 2 dersek 7 eder. Evet oluyor.

Ali_(C2G2) örüntüde verilen bilye sayılarından yola çıkarak örüntü kuralını önce sözlü olarak ifade etmiş, ardından cebirsel olarak göstermiştir. Üçgeni anlatırken üçgenin kenarlarını çizgi olarak ifade etmiştir. Matematiksel dil kullanımı bakımından hatalar yapan Ali_(C2G2), iki açı ölçüsünün birbirine eşit olduğunu söylemek istediğinde “Bu iki köşe birbirine eşittir.” sözlü ifadesini kullanmıştır. Sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğini bir üçgen üzerinde kenar uzunluklarına sayısal değerler vererek açıklamaya çalışmış; ancak, ifadenin ispatına yönelik düşünme süreci geliştirememiştir. Öte yandan, gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturmaya yönelik düşünme süreci geliştirebilmiştir.

Farklı üçgenler üzerinden farklı kenar uzunluklarını deneyerek iki kenar uzunluğu 5 cm ve 9 cm olan bir üçgenin üçüncü kenar uzunluğunun 5cm ile 13cm değerleri arasında değişeceğini belirtmiştir. Ama sadece bir üçgen üzerinden düşünmüş, genel bir ifadeye ulaşamamıştır. Ayrıca bu süreci sembolik olarak ifade edememiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda sınırlı kalmıştır. Benzer şekilde sözel olarak verilen ifadede yer alan Pisagor Bağıntısı' nı da açıklayamamıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde ise istenen verilere uygun şekli doğru bir şekilde çizmiş ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmaya doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. Ancak, bir dik üçgende iki kenar uzunluğunun karelerinin toplamının üçüncü kenar uzunluğunun karesine eşit olduğunu ifade edememiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Gerçek yaşam durumu içerisinde Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde)

Araştırmacı: Birbirine dik olan karelerden birinin bir kenar uzunluğu 3cm diğer karenin bir kenar uzunluğu 4 cm olsaydı, üçüncü karenin bir kenar uzunluğu kaç cm olurdu?

Ali_(C2G2): Çizerek düşünsem. Ölçtüğümde 5 cm geldi.

Araştırmacı: Peki karelerin alanlarını düşünürsen, aralarında nasıl bir ilişki var?

Ali_(C2G2): Bunun alanı 3 ile 3' ü çarparsam 9 yapar. Bunun alanı 4 ile 4' ü çarparsam 16. Bunun da 5 ile 5' i çarparsam 25 eder.

Araştırmacı: Peki aralarında bir ilişki var mı?

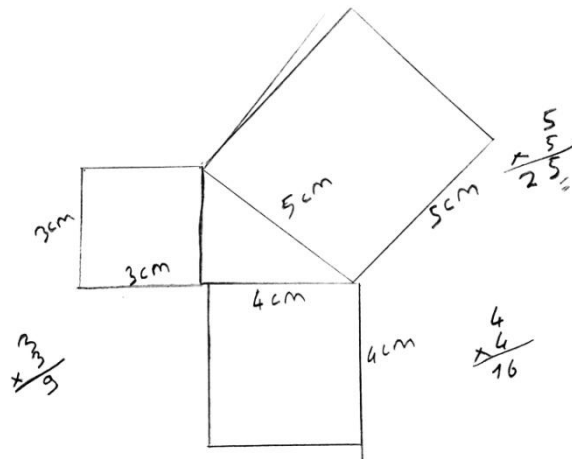
Ali_(C2G2): İkisinin alanları toplamı üçüncü karenin alanını veriyor. Yani 3' ün karesi ile 4' ün karesinin toplamı üçüncü kareye eşit oluyor yani 5' in karesine.

Araştırmacı: Peki dik üçgenle bağlantısı var mı?

Ali_(C2G2): Hmm... Bilmiyorum..

Araştırmacı: Peki birbirine dik olan iki kareden birinin bir kenar uzunluğu 5cm, diğerinin bir kenar uzunluğu 12 cm olsaydı üçüncü karenin bir kenar uzunluğu ne olurdu?

Ali_(C2G2): Aralarında 7 fark var. O zaman buna da 7 eklersek yani 18 olur.



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Şekil 49. Ali_(C2G2)'nin gerçek yaşam durumu içerisinde yer alan Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma süreci

Görüldüğü üzere Ali_(C2G2) Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmaya yönelik düşünme süreci geliştirse de bağıntıyı ifade edememiştir. Farklı sayı değerleri için farklı düşünme biçimleri geliştirmiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde yer alan verilere uygun şekil çizebilmesi ise geometrik düşünme düzeyinin ikinci düzey olması ile ilişkilendirilmiştir.

4.2.4.6. Canan_(C3G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey, geometrik düşünme düzeyi ise birinci düzey olarak belirlenen Canan_(C3G1)'in matematik dersi not ortalaması 88' dir. Bu bölümde Canan_(C3G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi her bir oturum için ayrı ayrı yapılmış ve sunulmuştur.

Canan_(C3G1)'in 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 113' de gösterilmiştir.

Tablo 113

Canan_(C3G1)'in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X	X		X				X			
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.								X			

Cebir öğrenme alanı ile ilgili soruların yer aldığı birinci oturumda Canan_(C3G1) sadece sözel ifadeleri verilen iki cebirsel ifadeyi karşılaştırması istenen 9. soruda aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Düşünme süreci genellikle kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmış, nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmekte zorlanmıştır.

Canan_(C3G1)' ın 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 114' de gösterilmiştir.

Tablo 114

Canan_(C3G1)' ın geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		X
Aksiomatik formal dünya	X	X	

Canan_(C3G1) üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklayabilmiştir. Ayrıca sözel olarak ifade edilen üçgen eşitsizliğini matematiksel olarak açıklayabilmiştir. Bu iki soruda aksiomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Pisagor Bağıntısı için sözel ifadeden sembolik ifadeye ulaşabilmiş; ancak ispat sürecini açıklayamamıştır. Bu yüzden düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Canan_(C3G1)' ın 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 115' de gösterilmiştir.

Tablo 115

Canan_(C3G1)' ın gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	
Aksiomatik formal dünya	X	

Gerçek yaşam durumu içerisinde yer alan üçgen eşitsizliğini oluşturabilen Canan_(C3G1), eşitsizliği hem sembolik olarak ifade etmiş hem de matematiksel olarak açıklayabilmiştir. Düşünme boyutu aksiomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Ancak, gerçek yaşam durumu içerisinde Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmamış ve düşünme süreci kavramsal somut dünya ile sınırlı kalmıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Canan_(C3G1)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 116' daki gibidir.

Tablo 116

Canan_(C3G1)' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Becerileri	Dil	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi		X	(5' i anlatırken) Rakamdır. 4 ile 6 arasında yer alan bir sayıdır. 0' dan başlayıp beşe kadar sayarak gösteririm.
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		X	$2(2.3+4)$ $6+4=10$ $2.10=20$
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi			
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)		X	(Ardışık iki sayının toplamı ifadesi için) $a + a + 1$
Aksiomatik formal dünya	Ulaşılabilecek kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		X	(Üçgen eşitsizliğini oluşturma süreci sonucunda kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir üçgende açıklarken) a artı c. Ben sayılara göre yapıyorum. Eşit olması gerekmiyor. Toplarsak b' den büyük olurlar. Küçük olması için b büyüktür a eksi c' den gelmeli. Yani şimdi bu iki kenarın toplamından küçük olacak. Çıkartınca gelen sayıdan da büyük olacak.

Canan_(C3G1)' in soruları cevaplandırırken genellikle sözlü ve yazılı dili kullanmayı tercih ettiği belirlenmiştir. Dil kullanımında bazı hatalar yapsa da bu dil becerilerinin yeterli düzeyde olduğu kabul edilmiştir. Görsel dil becerisi ise yetersiz kalmıştır. Canan_(C3G1) cebirsel ifadelerle işlemler konusunda bazı hatalar yapmıştır. Ancak, sözel olarak verilen

ifadelere uygun sembolik ifade yazma becerisini gösterebilmiştir. Aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirdiği sorularda dil becerileri açısından da aksiyomatik formal dünya boyutunda açıklamalar yaptığı düşünülmüştür. Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturma süreci sonucunda eşitsizliğe dair ifadesi Tablo 116’ da gösterilmiştir. Bu anlamda dil becerileri açısından aksiyomatik formal düzeyine ulaştığı şeklinde yorumlanmıştır.

Canan_(C3G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Canan_(C3G1), $a+3b$ cebirsel ifadesinde a ve b ’ nin bilinmeyenleri gösteren harfler olduğunu belirttiği halde bu ifadenin eşitlik içermesi gerektiğini söylemiştir. Eğer, eşitlik içermiyorsa a ve b ’ nin aynı sayıları gösterebileceğini belirtmiştir. Ardışık iki sayıyı cebirsel olarak doğru bir şekilde gösterebilmiştir. Ancak bu sayıları belirttiği a ile $a+1$ ’ in toplamı olan $2a+1$ cebirsel ifadesinin $3a$ ’ ya eşit olacağını söylemiştir. Sözel ifadeleri sembolik ifadeyle doğru bir şekilde gösterse de cebirsel ifadelerle işlemler konusunda sorun yaşadığı düşünülmektedir. “Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle” ve “Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp” ifadelerini karşılaştırırken doğru cebirsel ifadeler oluşturduğu halde, açıklamalarında hatalar yaptığı görülmüştür. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(“Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle” ifadesi ile “Aynı sayıya 2 ekle, sonra 4 ile çarp” ifadelerini karşılaştırırken)

Canan_(C3G1): Bir sayı verelim. 4 ile çarpalım. $4a+8$ olur. Bunları 4 ile böleriz. Sonra burası 1 burası da 2 olur. 2 gelir sonucu bunun.

Araştırmacı: Neden 4 ile böldün?

Canan_(C3G1): Biz böyle öğrenmiştik.

Araştırmacı: Peki diğer ifade için ne söyleyeceksin?

Canan_(C3G1): Bu biraz farklı gibi gelebilir. O zaman 2 eklediğimizde şimdi bunun $2a$ olup olmadığını şey konuları pek hatırlamadığım için hatırlamadım aslında. Ama şimdi şöyle düşündüm. Biz şöyle yapıyorduk. Bunda parantez yapıyorduk. O zaman $4a$ olur. Sonra çarptığımızda 8 olur. Şimdi bununla ikisi eşit. Sonra benim yaptığıma göre yine böleriz ve 2 gelir. Yani bu ikisi eşit oluyor aslında.

Şekil 50. Canan_(C3G1)’ ın sadeleştirme işlemine dair hatası

Canan_(C3G1) $4a+8$ ifadesinin 4 ile sadeleşebileceğini ve 2 sayısına eşit olacağını söylemiştir. Ardından ifadede işlemsel süreci düşünmezse sözel ifadelerin aynı ifadeleri belirttiğini söylemiş ve nedenini açıklayabilmiştir. Bir sonraki soruda yine $4x+8$ ifadesinin 4 ile bölünerek sadeleşeceğini söylemiştir. Bu durum rasyonel sayılarda sadeleştirme konusu ile ilgili yanlış öğrenmelerinin cebirsel ifadeler ile ilgili bilgilerini etkilediği şeklinde yorumlanmıştır. Yapılan görüşmelerde ilerleyen süreçte Canan_(C3G1) bir dikdörtgensel bölgenin alanını cebirsel olarak bulmakta zorlanmış ve alanı bulabilmek için açı ölçülerini bilmek gerektiğini söylemiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını çizdiği bir üçgenin iç açılarını ölçerek göstermiştir. Canan_(C3G1) sözel olarak verilen ifadede ve gerçek yaşam durumu içerisinde yer alan üçgen eşitsizliğini sembolik olarak gösterebilmiştir. Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturabilmiştir. Düşünme süreci aşağıdaki gibidir.

(Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluştururken sırasıyla 4 cm, 6 cm ve 14 cm uzunluklarını denedikten sonra)

Canan_(C3G1): 6 oldu ..o zaman 9 ile 5 arasında.

Araştırmacı: 10 cm uzunluğunu dener misin?

Canan_(C3G1): Yine ölçelim. Evet, bu da oldu.

Araştırmacı: Bu durumu nasıl açıklarsın?

Canan_(C3G1): İki kenarın toplamı 9 ile 5, 14. Bundan küçük. 10' da 4 den büyük. 4 ile 14 arasında bir değer alır.

Araştırmacı: Bunu genellemek istersen nasıl açıklarsın? Cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

Canan_(C3G1): Kenarları a , b , c olsun. a artı c . Ben sayılara göre yapıyorum. Eşit olması gerekmiyor. Toplarsak b ' den büyük olurlar. Küçük olması için b büyüktür a eksi c ' den gelmeli. Yani şimdi bu iki kenarın toplamından küçük olacak. Çıkartınca gelen sayıdan da büyük olacak.



Şekil 51. Canan_(C3G1)' in üçgen eşitsizliğine dair sembolik gösterimi

Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.	X	X	X	X	X

$Ilgın_{(C3G3)}$ cebir öğrenme alanı ile ilgili sorularda sembolik olarak düşünebilmiş ve aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirebilmiştir. Sadece örüntü sorusunda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

$Ilgın_{(C3G3)}$ ' in 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 118' de gösterilmiştir.

Tablo 118

$Ilgın_{(C3G3)}$ ' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.	X	X
Aksiyomatik formal dünya	X		X

$Ilgın_{(C3G3)}$ üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklayabilmiş ve aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğine dair sembolik ifadeyi oluşturmuş ama ifadeyi matematiksel olarak açıklayamamıştır. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Pisagor Bağıntısı' nı ise sözel olarak verilen ifadeden matematiksel olarak açıklayabilmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

$Ilgın_{(C3G3)}$ ' in 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 119' da gösterilmiştir.

Tablo 119

$Ilgın_{(C3G3)}$ ' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X

Aksiyomatik formal dünya

X

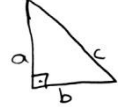
X

$Ilgın_{(C3G3)}$ gerçek yaşam durumu içerisinde verilen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturabilmiş, sembolik olarak ifade edebilmiştir. İspat sürecini de ifade eden $Ilgın_{(C3G3)}$ ' in düşünme süreci her iki soruda da aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Yapılan görüşmeler sonucunda $Ilgın_{(C3G3)}$ ' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 120' deki gibidir.

Tablo 120

$Ilgın_{(C3G3)}$ ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Becerileri	Dil	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi		X	($a+3b$ ifadesini için) “2 bilinmeyenden oluşmuş. b sayısının 3 katı verilmiş. Eşittir olmadığı için de sonucu bulamayız. Mesela benim bir miktar elmam vardır. Sizin de kendi armutlarınızın 3 katı vardır. Biz bunları yemek istersek ortak bir şekilde yeriz. Bunların hepsini ortaya koyarız. O da a artı $3b$ olur.”
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		X	$1+2=3 \rightarrow \text{tek sayı}$ $5+6=11 \rightarrow \text{tek sayı}$ $3+8=11 \rightarrow \text{tek sayı}$
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi			
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)		X	(Pisagor Bağıntısı için)  $a^2 + b^2 = c^2$
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmaması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi,		X	(Üçgen eşitsizliği için) “Üçgende bir kenar, iki kenarın toplamından büyük ya da iki kenarın

Yapılan görüşmeler neticesinde Ilgın_(C3G3)' ın soruları cevaplandırırken sözlü ve yazılı dili doğru biçimde kullandığı; ancak, görsel dil kullanımında hatalar yaptığı görülmüştür. Cebirsel ifade oluşturması istenen sorularda uygun sembolik ifadelere ulaşabilmiştir. Ayrıca, ifadeleri açıklarken ulaştığı kavramsal yapıları kendi cümleleri ile açıklayabilmiştir. Bu anlamda matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Ilgın_(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Ilgın_(C3G3)' ın diğer öğrencilerden farklı olarak 4+3 ifadesi için iki sayının birleşip yeni bir sayı oluşturacağını söylediği görülmüştür. İşlemsel süreci ve süreç sonucunda oluşan kavramı sözlü olarak ifade etmiştir. Ardışık iki sayıyı cebirsel olarak ifade eden Ilgın_(C3G3), toplamı sonucunda oluşan ifadenin de tek sayı olacağını cebirsel olarak açıklayabilmiştir. Buradan yola çıkarak tek ve çift sayıları sembolik olarak düşünebilmiştir. 2 ile çarpılan her sayının çift sayı oluşturacağını belirterek $2x$ ifadesinin çift sayıyı, çift sayıların 1 ile toplamının da her zaman tek sayı oluşturacağını belirtmiştir. Bu anlamda $2x+1$ ifadesinin tek sayı oluşturacağını söylemiştir. Ancak, iki tek sayının çarpımın tek sayı oluşturacağını, iki cebirsel ifadenin çarpımını gösterirken hata yaptığı için doğru bir şekilde açıklayamamıştır. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(“İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.” ifadesini açıklarken)

Ilgın_(C3G3): Yine x düşünsem. $2x+1$ i tek sayı olarak bulmuştum. O zaman $2x+1$ desek tek sayı için diğeri için de sanırım yine $2x+1$ deriz. Herhangi bir rakam yok dağıtamam ($2x+1$ ile $2x+1$ i çarpıyor bu sırada). Belki tek tek çarpabilirim. $2x$ i buraya dağıtmayı denesem $2x$ ile de 1 i çarparsak $2x$ eder. Artı x se burası $2x+1$. $2x$ yazdım. 1 kalıyor $2x$ gittiği için. Sonuç $1+6x$ oldu. Bu da tek sayıdır.

$$\begin{aligned} & (2x+1) \times (2x+1) \\ & (2x+1) \cdot (2x+1) = \\ & 2x + 2x = 6x \\ & -1 + 6x = \end{aligned}$$

Şekil 53. Ilgın_(C3G3)' ın iki cebirsel ifadenin çarpımını gösterme süreci

İlgın_(C3G3) $2x+1$ ile $2x+1'$ i çarparken $2x$ ile $2x+1'$ i çarpmış; ancak 1 ile $2x+1'$ i çarpmamıştır. Ayrıca $2x$ ile $2x'$ in çarpımının $4x$ oluşturacağını söylemiştir. Bu anlamda İlgın_(C3G3) iki cebirsel ifadeyi çarparken hata yapmıştır. İki cebirsel ifadeyi ise doğru bir şekilde toplayabilmiştir. İki cebirsel ifadeyi karşılaştırması istenen soru için çözüm sürecinde bir sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarparken yine hata yapmış, ardından hatasını fark etmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(“Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle” ve “Aynı sayıya 2 ekle, sonra 4 ile çarp” ifadelerini cebirsel olarak karşılaştırırken “ $(x+2).4$ ” ifadesi için)

İlgın_(C3G3): Parantez içine dağıtabilir miyim onu düşünüyorum olmuyor sanırım. Emin değilim şu anda.

Araştırmacı: Bu iki cebirsel ifade eşit mi şu an?

İlgın_(C3G3): Eşit değil. Emin değilim. Bunda ilk parantez içine aldığım için mi öyle dedim ama alakası yok. Belki o artı 8 tek bir sayı olarak düşündüğüm için çarpı 4 tam bir sayı olmadığı içindir diye düşündüm. Ama parantezle çarpsam $4'$ ü. Çarpıp oluyor. $4x+8$ oluyor.

İlgın_(C3G3) iki cebirsel ifadeyi birbiriyle çarparken hata yaptığı halde, bir sayı ile bir cebirsel ifadeyi doğru bir şekilde çarpabilmiştir. Diğer sorularda da aynı beceriyi gösterebilmiştir. Geometri öğrenme alanı ile ilgili yapılan görüşmelerde İlgın_(C3G3) üçgeni diğer öğrencilerden farklı olarak “Üç doğru parçasının üç nokta ile birleşmesiyle oluşan şekil” şeklinde tanımlamıştır. Üçgenin üç doğru parçasından oluşan bir şekil olduğunu vurgulamıştır. Sözel olarak verilen ifadelerde yer alan üçgen eşitsizliğine uygun sembolik ifade oluşturabilen İlgın_(C3G3), üçgen eşitsizliğini açıklamakta zorlanmıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde ise üçgen eşitsizliğini oluşturabilmiş ve sembolik olarak gösterebilmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturma süreci)

İlgın_(C3G3): 5 ile topladığımız sayı $9'$ a mı eşit olması gerekiyor. Ama o zaman da tam kapanması gerekir. $4'$ ü denesek. Uçları birleşmedi.

Araştırmacı: 5 cm olabilir mi?

(Deniyor)

İlgın_(C3G3): Oluyor. O zaman $5'$ den büyük olmalı.

Araştırmacı: 5 cm olmadı mı?

(Deniyor.)

İlgın_(C3G3): Oldu. 5 ve $5'$ den büyük.

Araştırmacı: 14 cm olabilir mi?

(Deniyor.)

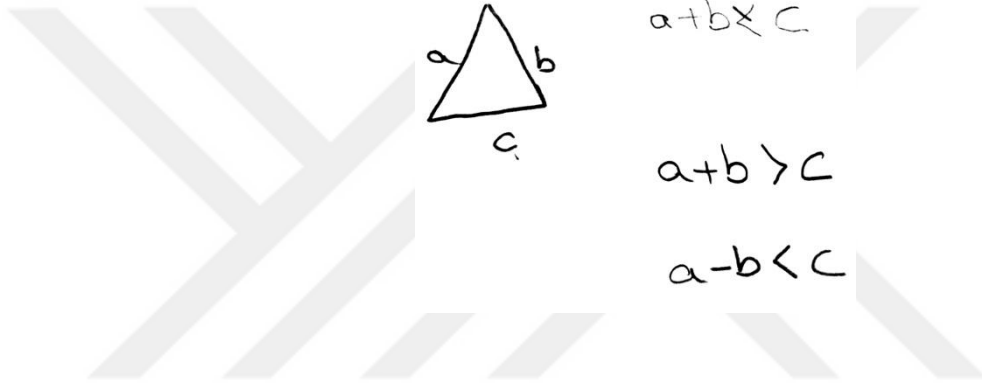
Ilgın_(C3G3): Olmuyor.

Araştırmacı: 13 cm olabilir mi?

Ilgın_(C3G3): Belki 9 ile 5' in toplamından büyük bir sayı olmaması gerekiyor. Sanırım üçgende bir kenar iki kenarın toplamından büyük ya da iki kenarın farkından küçük olmayacak.

Araştırmacı: Peki iki kenar uzunluğunun toplamına ya da iki kenar uzunluğunun farkına eşit olabilir mi?

Ilgın_(C3G3): Hayır denedik olmadı. Eşit olmayacak.



Şekil 54. *Ilgın_(C3G3)*' in üçgen eşitsizliğine dair sembolik gösterimi

Ilgın_(C3G3)' in üçgen eşitsizliğinin sembolik gösteriminde mutlak değeri ifade etmemesi sadece dil kullanımı açısından hata yaptığı şeklinde yorumlanmıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturabilen *Ilgın_(C3G3)*' in düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir. *Ilgın_(C3G3)* sözel olarak verilen ifade içerisinde verilen Pisagor Bağıntısı' nı araştırmacının yönlendirmesiyle açıklamıştır. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Sözel olarak verilen Pisagor Bağıntısı' nı açıklarken)

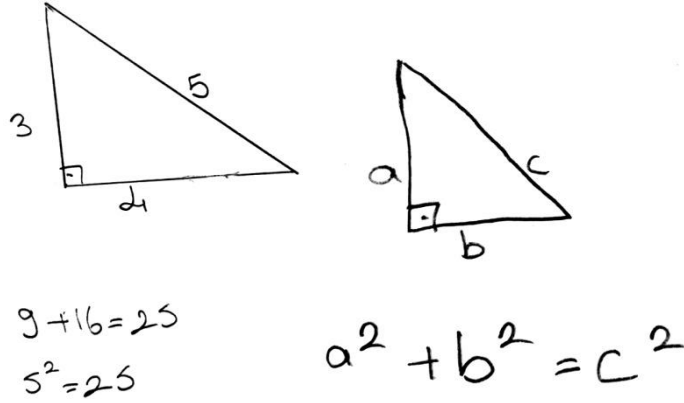
Ilgın_(C3G3): Bir dik üçgen çizip gösterebilir miyim? (Çiziyor). Burası 90 derece. Dik kenarları da burası ve burası. Ölçebilir miyim?

Araştırmacı: Evet. Ama şöyle yapalım mı? Dik kenar uzunluklarından biri 4cm, diğeri 3 cm olsun.

Ilgın_(C3G3): Tamam şimdi şöyle çizelim. Burası 4 cm. Burası da 3 cm. Burayı da ölçersem 5 cm geldi. Şimdi 3 kere 3 yani 3' ün karesi 9. 4' ün karesi 16. 16 artı 9 desek 25 yapar. 5' in karesi 25 yapar. 25 eşittir 25 o zaman bu ifade doğru.

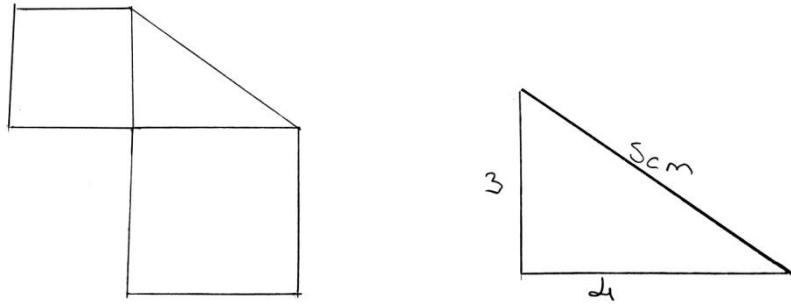
Araştırmacı: Peki cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

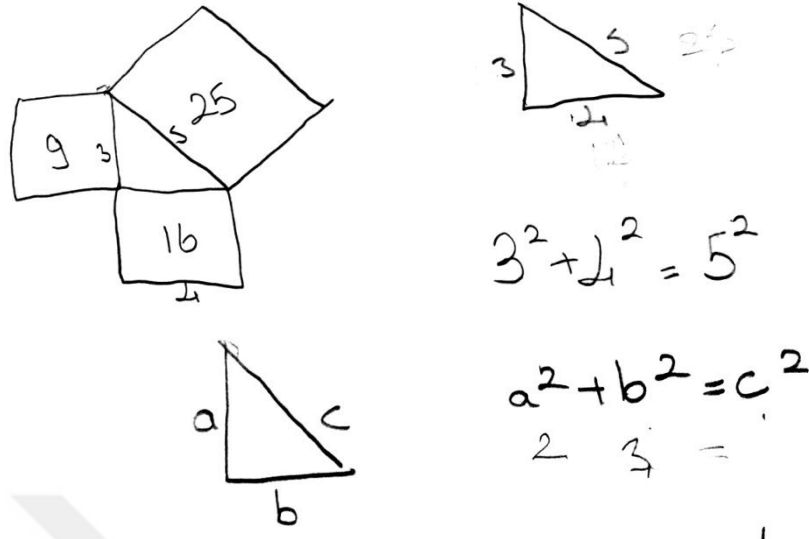
Ilgın_(C3G3): a' nın karesi ile b' nin karesinin toplamı c' nin karesine eşit.



Şekil 55. Ilgın_(C3G3)' in sözel olarak verilen Pisagor Bağıntısı' na dair sembolik gösterimi

Ilgın_(C3G3) Pisagor Bağıntısı ile ilgili bu soruda bir dik üçgen çizerek ve kenar uzunluklarını ölçerek ifadeyi açıklayabileceği ispat süreci geliştirmek istemiştir. İfadenin doğruluğunu açıklamak isteyen Ilgın_(C3G3)' ı araştırmacının yönlendirmesinin nedeni kareköklü bir ifadeye ulaşma ihtimali olduğu içindir. Kareköklü ifadeler konusu öğretim programı içerisinde ilk olarak 8. sınıfta yer almaktadır. Bu anlamda araştırmacı öğrenciyi yönlendirme gereği duymuştur. Ilgın_(C3G3) gerçek yaşam durumu içerisinde de Pisagor Bağıntısı' nı açıklayabilmiştir. Arada kalan bölümde dik üçgen oluşacağını düşünebilmiş ve istenen verilere uygun şekil çizebilmiştir. Ardından birbirine dik olan karelerden birinin bir kenar uzunluğunu 4 cm, diğer karenin bir kenar uzunluğunu 3 cm olarak düşündüğünde üçüncü karenin bir kenar uzunluğunun 5 cm olacağını ölçerek göstermiştir. Karelerin alanları ve kenar uzunlukları arasındaki ilişki sorulduğunda ise iki karenin alanları toplamının üçüncü karenin alanını verdiğini söylemiştir. Karelerden birinin bir kenar uzunluğu 6 cm ve diğer karenin bir kenar uzunluğu 8 cm olsaydı üçüncü karenin bir kenar uzunluğu için ise çizmeden işlem yaparak göstermiştir. Ardından dik üçgenin kenar uzunlukları ile ilişkilendirerek dik kenar uzunluklarının karelerinin toplamının, dik açının karşısındaki kenar uzunluğunun karesine eşit olacağını söylemiştir.





Şekil 56. Ilgın_(C3G3)' in gerçek yaşam durumu içerisinde Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma süreci

Ilgın_(C3G3) diğer öğrencilerden farklı olarak Pisagor Bağıntısı ve üçgen eşitsizliğini gerçek yaşam durumu içerisinde açıklayabilmiş ve sembolik olarak ifade edebilmiştir. Bu anlamda cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri üçüncü düzey olan bir 7. sınıf öğrencisi daha önce öğrenmediği bir konuda aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirebilmiştir.

4.3. 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerine Ait Bulgular

Bu bölümde görüşme yapılan 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerine ait bulgulara ve öğrenci görüşmelerinden örneklere yer verilmiştir. Öğrencilerle üç oturumda yapılan görüşmelere ait bulgular her bir oturum için ayrı bölümlerde sunulmuştur. Ayrıca görüşme yapılan öğrenciler hakkında bireysel değerlendirmeler ayrı olarak değerlendirilmiştir.

4.3.1. 1. oturumda cebirsel öğrenme alanı ile ilgili 8. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular

Bu bölümde 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorular için 8. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere ait bulgular sunulmuştur. Görüşme yapılan öğrenciler Şener_(C1G1), Tan_(C1G3), Sevgi_(C2G1), Yasin_(C2G2), Rüzgar_(C3G1), Belgin_(C3G2), Cansu_(C3G3) ve Asaf_(C3G3)' dir. Veriler analiz edilirken her bir soruda öğrencilerin düşünme süreçleri, matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine dair belirlenen boyutlara göre sınıflandırılmıştır. Ayrıca, bazı sorular için öğrenci cevapları KİSS düzeyleri açısından değerlendirilmiştir. Bu anlamda öğrencilerin verdikleri cevaplar birden fazla boyut içerisinde

yer almıştır. Bunun nedeni yapılan görüşmeler esnasında düşünme süreçleri doğrultusunda birden fazla süreci göstermelerinden kaynaklanmıştır.

“1. Soru: 5’i anlatır mısın?”

sorusuna yönelik bulgular Tablo 121’deki gibidir.

Tablo 121

“5’i anlatır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X		X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X

Şener_(C1G1) bu soruda ilk olarak 5’ in bir doğal sayı olduğunu belirtmiş, ardından sayma yoluyla elde edileceğini söyleyerek nesnel süreçsel sembolik dünyaya doğru bir düşünme süreci göstermiştir. Tan_(C1G3) sayıyı betimlemeden nasıl elde edileceği ile ilgili bilgi vermiştir. 5’ i toplayarak ya da çarparak ve sayma yoluyla elde edilebileceğini belirten Tan_(C1G3) nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Sevgi_(C2G1), 5’in tek sayı olduğunu belirterek, 2 ile 3’ ün toplamı sonucunda bulunacağını ifade etmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünyadan nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna ulaşmıştır. Yasin_(C2G2) bir rakam ve bir sayı olarak ifade ettiği 5’ in sayma işlemi sonucunda elde edilebileceğini söylemiştir. Kavramsal somut dünyadan nesnel süreçsel sembolik dünya düzeyine doğru bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Rüzgar_(C3G1) rakam olarak belirttiği 5’ in toplama işlemi sonucunda oluştuğunu söylediği için düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna ulaşmıştır. Belgin_(C3G2) 5’ i 4’ den sonra 6’ dan önce gelen bir sayı olarak belirtmiş ve sayma işlemine yönelik bir düşünme süreci geliştirmiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Cansu_(C3G3) 5’ in asal sayı olduğunu ve 4’ den sonra gelen bir sayı olduğunu belirtmiş, ayrıca toplama işlemi ile elde edilebileceğini söylemiştir. Bu anlamda

Cansu_(C3G3) nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci göstermiştir. Asaf_(C3G3), 5' in doğal sayı olduğunu söyleyerek sayma işlemi sonucu elde edilebileceğini belirtmiştir. Böylece nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Öğrencilerin verdikleri cevaplar KİSS açısından değerlendirildiğinde edinilen bulgular Tablo 122' de sunulmuştur.

Tablo 122

KİSS açısından 8. sınıf öğrencilerinin “5’i anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar

KİSS düzeyleri	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
İşlem	1,2,3,4,5 sayarak etme	X	X		X				X
	4+1, 3+2		X	X		X		X	
İşlemsel süreç	4' den sonraki sayı, 6'dan önceki sayı vb.						X	X	
Kavramsal işlemsel sembolik süreç	İşlemsel süreç sonunda 5 elde edileceğini belirtme	X	X	X	X	X		X	X

Şener_(C1G1), Yasin_(C2G2) ve Asaf_(C3G3) sayma işlemi sonucunda 5' i elde edebileceklerini belirttikleri için işlem ile kavramsal işlemsel sembolik süreç basamağında değerlendirilmiştir. Tan_(C1G3) sayma işlemi ve toplama işlemi ile kavramın oluştuğunu belirttiği için işlem ile kavramsal işlemsel sembolik süreç düzeylerini göstermiştir. Sevgi_(C2G1) ve Rüzgar_(C3G1) toplama işlemi sonucunda 5' in oluştuğunu belirterek işlem ve işlem sonucu oluşan kavramı sembolik olarak düşünmeye yönelik cevap vermiştir. Belgin_(C3G2) sadece işlemsel süreci belirten düşünme gerçekleştirmiştir. Cansu_(C3G3) ise işlem, işlemsel süreç ve işlem sonucunda oluşan kavramı birlikte düşünmüştür.

Öğrencilere yöneltilen

“2. Soru: 4+3’ü anlatır mısın?”

sorusuna yönelik bulgular Tablo 123' de gösterilmiştir.

Tablo 123

“4+3’ü anlatır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma		X	X		X		X	
	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X		X	X		X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X

Şener_(C1G1) ifadenin toplama işlemini anlattığını ve 4’ ün üzerine 5,6,7 şeklinde sayma sonucunda 7 oluştuğunu belirtmiştir. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci göstermiştir. Tan_(C1G3) ilk olarak toplama işlemi sonucunda 7 oluştuğunu söylemiş, ardından toplama işlemindeki toplanan sayıların özelliklerini açıklamıştır. 4 ve 3’ ün de nasıl elde edileceğini açıklayan Tan_(C1G3) nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda cevaplar vermiştir. Sevgi_(C2G1) ifadede yer alan 4 ve 3 sayılarının özelliklerine odaklanarak, bu ifadenin bir çift sayı ile bir tek sayının toplamını anlattığını belirtmiştir. Ardından artı işaretinin toplama işlemini ifade ettiğini belirterek, bu işlemin sonucunun 7 olduğunu söylemiştir. Böylece nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Yasin_(C2G2) öncelikle ifadenin ne anlatmak istediğine odaklanmış ve 4 tane nesnenin 3 tane nesne ile toplamı şeklinde bir açıklama yapmıştır. Bu toplama işlemi sonucunda 7 tane nesne oluşacağını yani yeni bir sayı oluşacağını belirten Yasin_(C2G2) nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci göstermiştir. Rüzgar_(C3G1), 4 sayısının da nasıl elde edeceğini açıklayarak, 4+3 ifadenin 7 sayısını gösterdiğini belirtmiştir. Böylece nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Belgin_(C3G2) bu ifadenin 4 ile 3’ ün toplamını ifade ettiğini belirterek 7’ nin oluştuğunu söylemiştir. Nesnel süreçsel sembolik dünyaya boyutunda düşünme süreci göstermiştir. Cansu_(C3G3), bir çift sayı ile bir tek sayının hatta ardışık iki sayının toplamının gösterildiğini belirttiği bu işlemin sonucunun 7 olduğunu söylemiştir. Düşünme süreci nesnel

süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Asaf_(C3G3), bu ifadenin 4' ün üzerine 3 ekleme anlamına geldiğini ve 7 sayısını oluşturduğunu belirtmiştir. Nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.

Öğrencilerin verdikleri cevaplar KİSS açısından değerlendirildiğinde elde edilen bulgular Tablo 124' de sunulmuştur.

Tablo 124

KİSS açısından 8. sınıf öğrencilerinin “4+3’ü anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar

KİSS düzeyleri	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
İşlem	4 den sonra 5,6,7 diye sayma	X							
İşlemsel süreç	4' ün üzerine 3 ekleme								X
	4 ile 3 sayılarının toplamı	X	X	X	X	X	X	X	
Kavramsal işlemsel sembolik süreç	Toplama işlemi sonucunda 7 oluştuğunu belirtme	X	X	X	X	X	X	X	X

Yapılan görüşmelerde Şener_(C1G1) 4+3' ün 4'den sonra 5,6,7 şeklinde sayma anlamına geldiğini belirterek işlem basamağında yer alan bir ifade biçimi kullanmıştır. Ardından 4 ile 3' ün toplamı sonucunda 7 oluştuğunu belirterek hem işlemsel süreci hem de işlem sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak düşünmüştür. Tan_(C1G3), Sevgi_(C2G1), Yasin_(C2G2), Rüzgar_(C3G1), Belgin_(C3G2) ve Cansu_(C3G3) 4 ile 3' ün toplamı olarak işlemsel süreci ifade ettikten sonra 7 oluştuğunu belirterek hem işlemi hem de oluşan kavramı birlikte sembolik olarak düşünmüşlerdir. Asaf_(C3G3) ise 4' ün üzerine 3 ekleme sürecini ifade ederek süreç sonucunda 7 oluştuğunu belirttiği için düşünme süreci kavramsal işlemsel sembolik süreç basamağında değerlendirilmiştir.

Yapılan görüşmelerde 8. sınıf öğrencilerine

“3. Soru: $28 + \square = 30 + \triangle$

dörtgen ve üçgen kutunun yerine gelebilecek sayılara üçer örnek verir misin?

Dörtgen ve üçgen yerine gelebilecek sayılar arasında bir ilişki var mıdır?

Bu ilişkiyi cebirsel olarak açıkla mısın?”

şeklinde sorular yöneltmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplara dair bulgular Tablo 125' deki gibidir.

Tablo 125

$28 + \square = 30 + \triangle$ sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma			X	X		X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması		X				X	X	
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması		X				X	X	

Şener_(C1G1) ifadede 30' dan 28' i çıkartarak dörtgen yerine 2 geleceğini, üçgen yerine de 0 geleceğini söylemiştir. Araştırmacı başka örnekler vermesini istediğinde farklı sayıları düşünmüş; fakat, örnek vermekte zorlanmıştır. Ayrıca üçgen ve dörtgen yerine gelmesi gereken sayılar arasındaki ilişkiyi biri diğerinin 2 katı şeklinde açıklamış ve bu ilişkiyi cebirsel olarak ifade edememiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Tan_(C1G3) üçgen ve dörtgen yerine gelmesi gereken sayılar için doğru örnekler vermiştir. Aralarındaki ilişkiyi düşünmesi istendiğinde ise üçgen yerine gelecek sayıya 2 eklendiğinde dörtgen yerine gelecek sayının elde edileceğini söylemiştir. Bu ilişkiyi cebirsel olarak açıklaması istendiğinde dörtgen yerine x denilirse üçgenin 2 olacağını belirtmiştir. Ardından üçgenin her zaman 2 olup olmayacağı sorulduğunda önce dörtgen yerine gelecek sayının 2 fazlası olması gerektiğini belirtmiş, sonra hatasını fark ederek dörtgen yerine gelecek sayının 2 eksiği olmasının doğru olacağını söylemiştir. Bu anlamda dörtgen x ise üçgen yerine gelecek sayının x-2 olacağını belirterek düşünme süreci

kavramsal somut dünyadan nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna ulaşmıştır. Sevgi_(C2G1) önce dörtgen ve üçgen yerine gelmesi gereken sayıların aynı mı farklı mı olması gerektiğine odaklanarak eşitliğin sağlanması için farklı olması gerektiğine karar vermiştir. Eşitliğin sağlanması için yerlerine gelmesi gereken sayılara doğru örnekler vermiş ve aralarındaki ilişkiyi aralarındaki farkın 2 olduğu şeklinde açıklamıştır. Cebirsel olarak aralarındaki ilişkiyi dörtgen x iken üçgenin x^2 olması gerektiğini söyleyerek açıklamaya çalışmıştır. Ayrıca aralarındaki farkın x^2 olacağını belirtmiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Yasin_(C2G2) şekiller farklı olduğu için şekillerin yerine gelecek sayıların da farklı olması gerektiğini belirtmiştir. Ardından gelebilecek sayıları her defasında eşitlikte yerine yazarak denemiş ve doğru örnekler vermiştir. Ancak, cebirsel olarak yerlerine gelmesi gereken ifadeleri açıklayamamıştır. Bu anlamda sadece kavramsal somut dünya boyutunda düşünme gerçekleştirmiştir. Rüzgar_(C3G1) önce dörtgen yerine 2 üçgen yerine ise 0 gelmesi gerektiğini belirtmiş, ardından dörtgen yerine hangi sayı gelirse gelsin üçgenin hep 0 olacağını söylemiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Belgin_(C3G2) dörtgen ve üçgen yerine gelebilecek sayılara hemen örnekler vermiştir. Aralarındaki ilişkiyi, 30 ve 28 arasında 2 fark olduğu için dörtgen yerine gelecek sayının da üçgen yerine gelecek sayıdan 2 fazla olması gerektiğini söyleyerek açıklamıştır. Aralarındaki ilişkiyi cebirsel olarak üçgen x ise dörtgen $x+2$ olmalı şeklinde belirtmiş ve kavramsal somut dünyadan nesnel süreçsel sembolik dünyaya doğru bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Cansu_(C3G3) da benzer şekilde dörtgen ve üçgen yerine gelecek sayılara doğru örnekler vermiş, aralarındaki ilişkiyi her defasında 2 fark olduğu şeklinde açıklamıştır. Bu durumun da 30 ile 28 arasındaki 2 farktan kaynaklandığını söylemiştir. Eşitliğin sağlanabilmesi daha küçük olan 28 ile daha büyük bir sayının toplanması gerektiğini belirtmiştir. Aralarındaki ilişkiyi üçgen x ise dörtgenin $x+2$ olması gerektiğini belirterek açıklamış ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutundan nesnel süreçsel sembolik dünyaya ulaşmıştır. Asaf_(C3G3) öncelikle dörtgen ve üçgen yerine gelmesi gereken sayıların farklı sayılar olması gerektiğini belirterek, doğru sayı örnekleri vermiştir. Ancak aralarındaki ilişkiyi sayısal ve cebirsel olarak açıklayamamıştır. Bu yüzden düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Öğrencilere yöneltilen bir diğer soru olan

“4. Soru: $a+3b$ ifadesini anlatır mısın?”

sorusuna yönelik bulgular Tablo 126' da gösterilmiştir.

Tablo 126

“ $a+3b$ ifadesini anlatır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma		X	X	X	X		X	
	Kavramın, ifadenin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X	X	X		X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi		X		X	X	X	X	X

Şener_(C1G1) $a+3b$ ifadesinin gördükleri bir konuya benzediğini ve $3ab$ ' ye eşit olduğunu söylemiştir. a ve b ' nin kalem ve silgi gibi farklı şeyler olduğunu belirterek 1 kalem ve 3 silginin birleşiminin ifade edildiğini belirtmiştir. Ancak, ifadenin $3ab$ ' ye eşit olduğunu söylediği için düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Tan_(C1G3) öncelikle bu ifadenin cebirsel ifade olduğunu belirterek a ile 3 tane b ' nin toplamının gösterildiğini söylemiştir. a ve b ' nin farklı sayılar olması gerektiğini de belirten Tan_(C1G3) ifadeyi günlük yaşamdan bir örnek vererek de açıklamıştır. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme geliştirmiştir. Sevgi_(C2G1) a ve b ' nin bilinmeyen sayılar olduğunu belirterek, bir bilinmeyen sayı ile bir başka bilinmeyen sayının 3 katının toplandığını söylemiştir. Ardından a ve b yerine sayı yazarak ifadeyi açıklamaya çalışan Sevgi_(C2G1); $a=4$, $b=3$ olduğunda $a+3b$ ' nin toplama işlemi sonucunda 13 sayısını göstereceğini söylemiştir. Sonucunun cebirsel olarak da $3ab$ olacağını ifade etmiştir. Sevgi_(C2G1) ifadeyi doğru açıklamasına rağmen nesnel süreçsel sembolik düzeyine uygun cevap verememiş ve düşünme süreci kavramsal somut dünya düzeyinde değerlendirilmiştir. Yasin_(C2G2) $a+3b$ ' yi açıklarken bilinmeyen bir nesnenin bir başka bilinmeyen nesnenin 3 katı ile toplandığını söylemiştir. Bu ifadede bilinmeyenler yerine verilen sayılara göre her defasında farklı sonuçların elde edileceğini belirtmiştir. Cebirsel olarak da doğru düşündüğü kabul edilen Yasin_(C2G2)' in nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirdiği belirlenmiştir. Rüzgar_(C3G1) a ve b ' nin bilinmeyenler olduğunu söylemiş ve 1 tane

a ile 3 tane b' nin toplamının anlatıldığını belirtmiştir. Bu anlamda kavramsal somut dünyadan nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru düşünme gerçekleştirmiştir. Belgin_(C3G2) 3 ile b sayısının çarpılıp a sayısı ile toplandığını anlatıldığını belirttiği bu ifadede, a ve b' nin sayılar dışında günlük hayattan nesneleri de temsil edebileceğini söylemiştir. Düşünme süreci ise nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna ulaştığı şeklinde değerlendirilmiştir. Cansu_(C3G3), bir sayının 3 katının a fazlası olarak açıkladığı bu ifadede bilinmeyenler yerine sayılar vermiş ve toplama işleminin gösterildiğini ifade etmiştir. Ardından a ve b' nin aynı sayılar olsaydı aynı harf olarak gösterilmeleri gerektiğini belirterek farklı sayıları ifade ettiklerini söylemiştir. Böylece Cansu_(C3G3)' nun düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Asaf_(C3G3) ise bu ifadede eşitlik olmadığı için 1 tane silgi ile 3 tane kalem gibi birbiriyle toplanamayacak nesnelerin bir araya gelmesinin anlatıldığını söylemiştir. Düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilen Asaf_(C3G3) aynı zamanda bu ifadenin elde edilebileceği bir soru yazmıştır.

Öğrencilerin verdikleri cevaplar KİSS açısından değerlendirildiğinde elde edilen bulgular Tablo 127' deki gibidir.

Tablo 127

KİSS açısından 8. sınıf öğrencilerinin “ $a+3b$ 'yi anlatır mısın?” sorusuna verdikleri cevaplar

KİSS düzeyleri	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
İşlem	Elma ile 3 tane muzun toplamı, bir içecek ile 3 tane çikolatanın toplamı vb.	X					X		X
İşlemsel süreç	a ile 3 tane b nin toplamı		X			X	X	X	
Kavramsal işlemsel sembolik süreç	İki bilinmeyen sayının toplamı			X	X	X	X	X	X
	Cebirsel ifade		X						

Şener_(C1G1) $a+3b$ için 1 kalem ve 3 silginin birleşimi gibi işlem basamağını ifade eden bir cevap verse de sonucunda $3ab$ elde edildiğini belirttiği için verdiği cevap, sadece işlem

basamağında değerlendirilmiştir. Sevgi_(C2G1) iki bilinmeyen sayının toplamı cevabını verdiği için hem işlem hem de kavramı sembolik olarak düşünmüş; ancak, sonucunu 3ab olarak belirttiği için düşünme boyutu nesnel süreçsel sembolik dünya düzeyine ulaşamadığı şeklinde yorumlanmıştır. Tan_(C1G3), Yasin_(C2G2), Rüzgar_(C2G1), Belgin_(C3G2), Cansu_(C3G3) ve Asaf_(C3G3) yapılan görüşmelerde hem işlemsel süreci hem de süreç sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak düşünmüşlerdir.

Tez çalışmasında öğrencilere,

“5. Soru: ‘Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

soruları yöneltilmiş ve bulgular Tablo 128’de sunulmuştur.

Tablo 128

“Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X	X		X	X		
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması		X		X		X	X	X
Aksiomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi				X			X	X

Şener_(C1G1) bu ifadede yer alan ardışık sayılar kavramını açıklamakta zorlanmıştır. Ardışık deyince aklına 22 gibi 2’ nin tekrar ettiği bir sayı geldiğini belirten Şener_(C1G1), daha sonra yanlış düşündüğünü söylemiştir. Bu defa da 2’ nin ardışığının 4,6,8,... gibi sayılar olduğunu belirtmiştir. 5’ in ardışığının 10, 6’ nın ardışığının da 12 olduğunu söylemiştir.

Ardışık iki sayının toplamına örnek vererek, 6 ile 12' nin toplamının sonucunun 18 geldiğini belirtmiştir. 18' in de çift sayı olduğunu söyleyerek bu ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Tan_(C1G3) önce ardışık sayılar kavramını açıklamış, ardışık sayılara doğru örnekler vererek toplamalarının tek sayı olacağını göstermiştir. Ardışık iki sayıyı cebirsel olarak t ve $t+1$ olarak gösteren Tan_(C1G3) toplamalarının t^2+1 olacağını söylemiştir. Bu anlamda düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaşamamıştır. Sevgi_(C2G1) de benzer şekilde ardışık sayılara doğru örnekler vererek toplamalarının sonucunun tek sayı olduğunu göstermiştir. Fakat cebirsel olarak düşünmekte zorlanmıştır. Bu yüzden kavramsal somut dünya boyutunda cevaplar verdiği belirlenmiştir. Yasin_(C2G2) ifadenin farklı ardışık sayılar deneyerek doğruluğunu göstermiş, ardından cebirsel olarak açıklaması istendiğinde iki ardışık sayıyı a ve $a+1$ olarak göstermiştir. Bu ardışık iki sayının toplamının $2a+1$ olduğunu belirterek, tek sayı olduğunu yerine yazdığı sayılar ile göstermiştir. Bu anlamda Yasin_(C2G2) düşünme süreci olarak aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaşmıştır. Rüzgar_(C3G1) önce ifadede ne anlatılmak istendiği üzerine sözel olarak açıklamada bulunmuş, sonra ardışık sayıların toplamının tek sayı olduğunu sayılarla deneyerek göstermiştir. Ancak cebirsel olarak bu ifadeyi açıklayamamış ve kavramsal somut dünya boyutunda bir düşünme süreci geliştirmiştir. Belgin_(C3G2) de benzer şekilde ifadede art arda gelen iki sayının toplamının anlatıldığını ifade ederek, sayı örnekleriyle ifadenin doğruluğunu göstermiştir. Cebirsel olarak açıklaması istendiğinde ardışık iki sayıyı a ve $a+1$ olarak, toplamalarını ise $2a+1$ olarak düşünmüştür. Ancak, $2a+1$ ifadesinin neden tek sayı olduğunu açıklayamamıştır. Belgin_(C3G2)' in düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Cansu_(C3G3) önce sayılarla deneyerek ifadenin doğruluğunu göstermiştir. Ardından a ve $a+1$ ' in toplamının $2a+1$ olacağını belirterek, ifadeyi cebirsel olarak açıklamaya çalışmıştır. $2a+1$ ' in tek sayı olup olmadığını ise a yerine hangi sayı gelirse gelsin $2a+1$ ' in tek sayıyı temsil edeceğini belirtmiştir. Bu durumda Cansu_(C3G3) düşünme süreci olarak aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaşmıştır. Asaf_(C3G3) ardışık sayılara örnekler vererek iki ardışık sayının toplamının tek sayı olacağını gösterebilmiştir. Ardışık iki sayıyı a ve $a+1$ olarak gösterirken toplamalarının $2a+1$ olacağını belirtmiştir. Bu ifadenin tek sayı olduğunu ise bir sayının 2 ile çarpımının çift sayıyı göstereceğini, bu sayının da 1 ile toplamının tek sayıyı oluşturacağını ifade ederek açıklamıştır. Bu doğrultuda düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaşmıştır.

Tez çalışmasında 8. sınıf öğrencilerine

“6. Soru: ‘İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?"

soruları yöneltmiş ve bulgular Tablo 129' da gösterilmiştir.

Tablo 129

“İki tek sayının çarpımı tek sayıdır” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma								
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelerle, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması				X		X	X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi							X	

Şener_(C1G1) önce iki tek sayının çarpımının çift sayı olacağını belirtmiş, ardından 0 ile 1' in çarpımının 0 olacağını söylemiştir. 0 sayısının da tek sayı olduğunu ifade etmiştir. Başka sayı örnekleri verirken tek sayılara doğru örnekler vermiş ve çarpımlarının sonucunun tek sayı olacağını açıklamıştır. Ancak, cebirsel olarak açıklayamamıştır. Bu yüzden düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Tan_(C1G3) da tek sayıların çarpımının tek sayı olduğunu örnekler vererek açıklamış; ancak, cebirsel olarak bir açıklama getirememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda gerçekleşmiştir. Sevgi_(C2G1) benzer şekilde önce doğru sayı örnekleri ile ifadenin doğruluğunu göstermiş, ancak, cebirsel olarak açıklama yapmakta zorlanmıştır. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Yasin_(C2G2) bu ifadenin doğruluğunu sayılarla deneyerek göstermiş, cebirsel olarak açıklarken ise önce tek sayıyı cebirsel olarak nasıl göstereceğine odaklanmıştır. Bir önceki soruda geliştirdiği düşünme sürecinden yola çıkarak tek sayılardan

birini $2x+1$ olarak diğerini de $2y+1$ olarak ele alan Yasin_(C2G2), bu iki ifadenin çarpımının $2x+2y+2$ olacağını belirtmiş ve doğru bir şekilde gösterememiştir. Bu anlamda düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda sınırlı kalmıştır. Rüzgar_(C3G1) önce tek sayı örnekleri vererek çarpımlarının tek sayı olacağını göstermiş, ancak, ifadeye uygun cebirsel ifadeler yazamamıştır. Böylece ifadeyi cebirsel olarak açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya olarak belirlenmiştir. Belgin_(C3G2) diğer öğrenciler gibi önce doğru sayı örnekleri ile ifadenin doğruluğunu göstermiş; ancak, cebirsel olarak düşünmekte zorlanmıştır. Tek sayıyı bir önceki soruda $2a+1$ olarak gösterdiğinden yola çıkarak $2a+1$ ile $2a+1$ ' in çarpımının $4a^2+1$ oluşturduğunu söylemiştir. Çarpımı doğru ifade edemediği için düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Cansu_(C3G3) birçok sayısal örnek vererek ifadenin doğru olduğunu göstermiştir. Ardından ifadeyi cebirsel olarak düşünmesi istendiğinde bir önceki soruda tek sayıyı $2a+1$ olarak bulduğunu belirterek tek sayıyı yine $2a+1$ olarak düşünebileceğini söylemiştir. $2a+1$ ile $2a+1$ ' in çarpımını $4a^2+4a+1$ olarak gösteren Cansu_(C3G3), a yerine hangi sayı verilirse verilsin bu ifadenin hep tek sayıyı göstereceğini belirtmiştir. Bu anlamda düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaşmıştır. Asaf_(C3G3) sayısal olarak bu ifadenin doğruluğunu göstermiş; ancak, düşünme süreci geliştirmeden bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayamayacağını belirtmiştir. Dolayısıyla düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.

8. sınıf öğrencilerine,

“7. Soru: ‘Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı çift sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?”

soruları yöneltilmiş ve bulgular Tablo 130' da gösterilmiştir.

Tablo 130

““Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı çift sayıdır.” ifadesini açıkla mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X							
	İfadelerin sayılarla denenerek	X	X	X	X	X	X	X	X

	gösterilmesi		
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsal ifadelerle, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması	X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi		X

Şener_(C1G1) ifadede tek sayı ve çift sayı kavramları üzerine düşünme gerçekleştirerek örnekler vermiş ve çarpımlarının çift sayı oluşturacağını belirtmiştir. Ancak, ifadenin yanlış olduğunu cebirsal olarak açıklayamamış ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Tan_(C1G3) ve Sevgi_(C2G1) ifadenin yanlış olduğunu doğru sayı örnekleri vererek açıklamış; fakat, cebirsal olarak düşünme geliştirememişlerdir. Bu doğrultuda kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmişlerdir. Yasin_(C2G2) tek sayıyla tek sayının toplamının tek sayı, çift sayı ile çift sayının toplamının çift sayı, tek sayı ile çift sayının toplamının da tek sayı oluşturduğunu hatırladığını belirtmiştir. Sorudaki ifadenin sayılarla deneyerek yanlış olduğunu göstermiştir. Cebirsal olarak ise açıklayamamış, kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Rüzgar_(C3G1) da sadece sayılarla deneyerek ifadenin yanlış olduğunu göstermiş ve kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Belgin_(C3G2) sayılar ile düşünerek ifadenin yanlış olduğunu göstermiştir. $2a+1$ tek sayıyı ifade ediyorsa, $2a$ 'nın da çift sayıyı göstermesi gerektiğini belirterek ikisinin toplamının $4a+1$ ile ifade edileceğini söylemiştir. $4a+1$ 'in ise neden tek sayıyı temsil ettiğini açıklayamamıştır. Bu anlamda düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Cansu_(C3G3) doğru sayı örnekleri ile ifadenin yanlış olduğunu göstermiş, aynı zamanda tek sayıyı $2a+1$ ve çift sayıyı da $2a$ ile ifade ederek toplamlarının $4a+1$ olacağını belirtmiştir. $4a+1$ 'in de her a değeri için tek sayıyı göstereceğini söylemiş ve aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Asaf_(C3G3) ifadeyi okur okumaz yanlış olduğunu belirtmiş, nedeni sorulduğunda ise sayılarla örnek vermiştir. Yanlış olduğu için cebirsal olarak açıklanamayacağını belirtmiş ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Tez çalışmasında 8. sınıf öğrencilerine,

“8. Soru: ‘ x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır.’ ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?"

soruları yöneltilmiş ve edinilen bulgular Tablo 131' de gösterilmiştir.

Tablo 131

"x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır" ifadesini açıkla mısın?" sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma					X	X		
	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi				X		X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X		X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması				X		X	X	X
Aksiomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi				X		X	X	X

Şener_(C1G1) $2x+5$ ifadesinin $7x$ belirttiğini söylemiş; fakat, tek sayı olup olmadığını açıklayamamıştır. Ardından $2x$ ifadesindeki x yerine çift sayı yazmak gerektiğini belirttiği halde 49 ve 36 sayılarını denemiştir. 49 sayısının çift sayı olduğunu düşünen Şener_(C1G1) $2x$ ifadesini yazarken 249 olarak yazmış, 36' yı denediğinde ise 236 yazmıştır. Bu anlamda $2x+5$ ifadesinin hem çift sayı hem de tek sayı oluşturduğunu göstererek bu ifadenin hem tek sayı hem de çift sayı gösterebileceğini söylemiştir. Bu anlamda kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Tan_(C1G3) ve Sevgi_(C2G1) x yerine çift sayı örneği vererek ifadenin tek sayı oluşturduğunu göstermişlerdir. Cebirsel olarak ise bir açıklama getirememiş, kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci göstermişlerdir. Yasin_(C2G2) önce bir tane çift sayının 2 katının 5 fazlasının tek sayı oluşturduğunun anlatıldığını

belirtmiş, ardından x yerine çift sayı vererek ifadenin tek sayı oluşturduğunu sayısal olarak göstermiştir. Çift sayıyı cebirsel olarak $2x+2$ şeklinde gösteren Yasin_(C2G2) önce 2 ile $2x+2$ 'yi nasıl çarpacağı konusunda tereddüt etmiş, daha sonra 2 ile çarpıp 5 ile topladığında $4x+9$ elde etmiştir. Bu ifadede ise x hangi sayı olursa olsun tek sayı oluşacağını belirterek aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. Rüzgar_(C3G1) x yerine çift sayı olarak 4 sayısını denemeyi düşünmüş; ancak $2x+5$ 'i gösterirken $24+5$ olarak ifade etmiştir. Elde ettiği 29 sayısının tek sayı olduğunu söylemesine rağmen düşünme sürecinde yaptığı hatalar ve cebirsel olarak düşünememesi sebebiyle düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Belgin_(C3G2) önce x 'e çift sayı örneği vererek ifadenin sayısal olarak doğru olduğunu göstermiştir. Ardından bir sayının 2 ile çarpımının her zaman çift sayı oluşturacağını, 5 ile toplamının da tek sayı olacağını belirtmiştir. Cebirsel olarak düşünmesi istendiğinde ise x 'i çift sayı olarak düşünürken $2x$ olarak ifade ettiğinde $4x+5$ elde edileceğini söylemiştir. Burada da x 'e verilen tüm değerler için bu ifadenin tek sayı göstereceğini belirterek aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Cansu_(C3G3) da benzer şekilde önce x yerine gelebilecek çift sayılara örnek vererek ifadenin doğruluğunu sayısal olarak göstermiştir. Ardından bir sayının 2 ile çarpımının sonucunda çift sayı elde edileceğini, çift sayı ile tek sayı toplamının da tek sayı oluşturacağını belirtmiştir. Cebirsel olarak açıklaması istendiğinde ise çift sayının $2a$ olarak düşünebileceğini belirtmiştir. a yerine çift sayı yazılsa da tek sayı yazılsa da sonuçta tek sayı oluşacağını söylemiştir. Bu anlamda aksiyomatik formal dünyaya doğru bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Asaf_(C3G3) ifadeyi ilk okuduğunda x çift sayı da olsa tek sayı da olsa 2 ile çarpımının hep çift sayı oluşturacağını, 5 ile toplamının da tek sayı oluşturacağını söylemiştir. Ardından sayılarla deneyerek doğruluğunu göstermiştir. Cebirsel olarak düşündüğünde de x 'i $2a$ olarak düşünürse çift sayıyı ifade edeceğini, bu anlamda $2x+5$ 'in de $4a+5$ olarak düzenleneceğini söylemiştir. Bu ifadenin de a 'nın alabileceği her sayı değeri için 4 ile çarpımının çift sayı oluşturacağını, 5 ile toplamının da tek sayıyı oluşturacağını belirttiği görülmüştür. Bu doğrultuda düşünme boyutu aksiyomatik formal dünyaya doğru gelişim göstermiştir.

8. sınıf öğrencilerine,

“9. Soru: ‘Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle’ ifadesi ile ‘Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp’ ifadelerini karşılaştır mısın?

Cebirsel olarak karşılaştır mısın?”

soruları yöneltmiş ve bulgular Tablo 132' de gösterilmiştir.

Tablo 132

““Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle” ifadesi ile “Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp” ifadelerini karşılaştır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X		X	X			X	
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi		X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsal ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması		X		X		X	X	X
	Cebirsal ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması		X		X		X	X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi		X		X		X	X	X

Şener_(C1G1) ifadeyi önce sözel olarak açıklamaya çalışmış, ifadede yer alan sayıların farklı olması nedeniyle iki ifadenin farklı ifadeler olduğunu söylemiştir. Hem sayısal olarak hem de cebirsal olarak iki ifadeyi açıklayamamış ve düşünme boyutu kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Tan_(C1G3) ifadeleri sayılarla deneyerek iki ifadenin birbirine eşit olduğunu belirtmiştir. Ardından her iki ifade için de uygun cebirsal ifadeler yazarak eşit olduklarını göstermiştir. Bu anlamda aksiyomatik formal dünyaya doğru bir düşünme geliştirmiştir. Sevgi_(C2G1) önce her iki ifadeye uygun cebirsal ifade yazmaya çalışmıştır. İlk ifadeyi $4x+8$, diğerini de $x+2.4$ olarak göstermiştir. $x+2.4$ de önce çarpma yapması gerektiğini söylemiş ve sonucunda $x+8$ olacağını belirterek, iki ifadenin farklı olduğu şeklinde bir açıklama yapmıştır. Ardından sayılarla dendiğinde ise iki ifadenin eşit olduğunu bulmuştur. Cebirsal olarak farklı olduklarını söyleyen, sayısal olarak dendiğinde ise aynı olduklarını bulan Sevgi_(C2G1) sayısal olarak dendiği kısımda hata yaptığını

düşünmüştür. Sayısal olarak düşündüğü zaman ikinci ifadede bir sayıyı önce 2 ile toplamak yerine işlem önceliğine göre çarpma yapması gerektiğini belirtmiş ve bu iki ifadenin farklı ifadeler olduğunu söylemiştir. Bu anlamda hem sayısal olarak hem de cebirsel olarak düşünme sürecinde hatalar yapmış, düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Yasin_(C2G2) önce ifadeleri açıklamaya yönelik sözel açıklamada bulunmuş, ardından sayılarla deneyerek bu iki ifadenin eşit olduğunu göstermiştir. Yasin_(C2G2) aynı zamanda bu ifadelere uygun cebirsel ifadeleri yazabilmiş ve bu iki ifadenin eşitliğini cebirsel olarak açıklayabilmiştir. Böylece düşünme süreci açısından aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaşmıştır. Rüzgar_(C3G1) ifadelerin sayısal olarak eşit olduğunu gösterebilmiş; ancak, eşitliklerini cebirsel olarak açıklamakta zorlanmıştır. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Belgin_(C3G2) önce ifadelere uygun cebirsel ifadeler yazmak istemiş; ilk ifadeyi $4x+8$, ikinci ifadeyi de $8+x$ olarak göstererek farklı ifadeler olduğunu belirtmiştir. “Bir sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp” ifadesini tekrar açıklaması istendiğinde sayısal örnekle doğru bir şekilde açıklamış, ancak ilerleyen süreçte işlem önceliğine dikkat etmediğini düşünerek önce çarpma yapması gerektiğini belirtmiştir. Bu anlamda tekrar 2 ile 4’ ü çarpması gerektiğini düşünerek yanlış sonuca ulaşmıştır. Buradan hareketle bu iki ifadeyi tekrar sayısal olarak karşılaştırması istendiğinde ise bu defa iki ifadenin eşit olduğunu sayısal olarak doğru bir şekilde göstermiştir. İşlem önceliği açısından tekrar çelişkiye düşen Belgin_(C3G2) parantezi düşünmediği için hata yaptığını belirterek iki ifadeye uygun cebirsel ifadeleri yazabilmiştir. İkinci ifade için de çarpmanın toplama üzerine dağılma etkisini göstererek iki ifadenin eşitliğini gösterebilmiştir. Böylece düşünme süreci açısından tüm boyutları göstererek aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaşmıştır. Cansu_(C3G3) ifadede ne anlatılmak istendiğini sözel olarak açıklarken birinde daha az birinde daha fazla ekleme yapılacağı için farklı ifadeler olabileceğini belirtmiştir. Ardından bu ifadeler için cebirsel ifadeler yazmıştır. Yazdığı cebirsel ifadeler için sayılarla dendiğinde sonuçlarının eşit olduğunu göstermiştir. Buradan hareketle çarpma işleminin parantez içine dağılma özelliğini kullanması gerektiğini belirterek iki ifadenin eşitliğini cebirsel olarak gösterebilmiş ve aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. Asaf_(C3G3) önce ifadelerde bilinmeyeler yerine sayı vererek iki ifadenin eşitliğini göstermiş, ardından iki ifadeye uygun cebirsel ifadeler yazabilmiştir. İkinci ifadede parantez içine çarpma işleminin dağıtılması sonucunda bu iki ifadenin eşit olacağını cebirsel olarak açıklayan Asaf_(C3G3) aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Tez çalışmasında 8. sınıf öğrencilerine yöneltilen diğer soru,

“10. Soru: ‘ $x=3$ için $4x+8$ ifadesi neye eşit olur?’

‘ $x=3$ için $8+4x$ ifadesi neye eşit olur?’

‘ $x=3$ için $2(2x+4)$ ifadesi neye eşit olur?’

Bu ifadeleri birbirleriyle karşılaştırır mısın?

Aralarındaki ilişkiyi cebirsel olarak açıklar mısın?”

şeklindedir. Bu soruya ait bulgular Tablo 133’ deki gibidir.

Tablo 133

““ $x=3$ için $4x+8$ ifadesi neye eşit olur?, $x=3$ için $8+4x$ ifadesi neye eşit olur?, $x=3$ için $2(2x+4)$ ifadesi neye eşit olur?” ifadelerini karşılaştırır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadeye verilerin üzerine odaklanma	X				X			
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması		X	X	X		X	X	X
Aksiomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi		X	X	X		X	X	X

Şener_(C1G1) ilk iki ifadede $4x$ ile 8 yer değiştirdiği için bu iki ifadenin eşit olabileceğini söylemiştir. Ardından x ’i 3 olarak düşünerek eşitliğini göstermeye çalışmıştır. Ancak, $4x$ ifadesini 43 olarak ele aldığı için hata yapmıştır. Ardından üçüncü ifade için x yerine 3 yazdığına $23+4$ olacağını, bu ifadeyi de 2 ile çarptığında 2’yi parantez içine dağıttığı için $46+8$ elde edeceğini belirtmiştir. Diğer ifadelerden farklı bir sonuç bulmuştur. Cebirsel olarak 2’yi parantez içine dağıttığında ise üçüncü ifadede $4x+8$ oluşacağını ve bu üç ifadenin eşit olabileceğini belirtmiştir. Ancak, yaptığı hatalar nedeniyle düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Tan_(C1G3) ilk olarak bu üç ifadenin aynı olduğunu belirtmiştir. Ardından 3 sayısı yerine 2 sayısını düşünerek eşit olduklarını göstermiştir. Cebirsel olarak üçüncü ifadede 2’yi parantez içindeki terimler ile çarptığında

üç ifadenin eşit olacağını göstermiştir. Bu anlamda aksiyomatik formal dünya boyutuna uygun düşünme süreci geliştirmiştir. Sevgi_(C2G1) ve Yasin_(C2G2) de benzer şekilde sayısal olarak üç ifadenin eşit olduğunu göstermişlerdir. Cebirsel olarak üçüncü ifadenin 2'nin parantez içine dağıtılarak çarpılması sonucu ilk iki ifadeye eşit olacağını belirtmişlerdir. Bu anlamda aksiyomatik formal dünyaya doğru düşünme süreci geliştirmişlerdir. Rüzgar_(C3G1) önce sözel olarak ilk iki ifadenin sadece yerlerinin değiştiğini aslında birbirine eşit ifadeler olduğunu belirtmiştir. Üçüncü ifadenin ise farklı olduğunu söylemiştir. Ardından x' in 3 olduğu değerler için ifadeleri karşılaştırdığında $4x'$ in 43 olacağını söylemiştir. Böylece yine iki ifadenin eşit olduğunu, ancak üçüncü ifadenin farklı olduğunu savunmuştur. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır. Belgin_(C3G2) de önce ilk iki ifadenin aynı olduğunu söylemiş, ardından sayısal olarak üç ifadenin eşitliğini göstermiştir. Üçüncü ifadede 2 ile çarpma işlemini parantez içine dağıttığında diğerlerine eşit bir ifade oluştuğunu cebirsel olarak göstermiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna uygun düşünme süreci geliştirmiştir. Cansu_(C3G3) önce sayısal olarak üç ifadenin birbirine eşit olduğunu açıklamıştır. Cebirsel olarak eşitliklerini ise ilk iki ifadenin toplama işleminin değişme özelliği sebebiyle eşit olduğunu söylemiştir. Üçüncü ifadenin ise çarpma işleminin toplama üzerine dağılma özelliği sebebiyle eşit olduğunu göstermiştir. Sonuçta aksiyomatik formal dünya boyutuna uygun düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Asaf_(C3G3) da önce sayısal olarak üç ifadenin eşit olduğunu göstermiştir. Cebirsel olarak açıklamakta önce biraz zorlanmıştır. İlk iki ifadenin birbirinin yer değiştirmiş halleri olduğunu, üçüncü ifadenin ise parantezli halleri olduğunu söylemiştir. Çarpma işlemi parantez içine dağıtıldığında yine aynı ifadenin oluştuğu şeklinde bir açıklamada bulunmuştur. Cebirsel olarak üç ifadenin eşit olduğunu gösteren Asaf_(C3G3) aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Tez çalışmasında 8. sınıf öğrencilerine yöneltilen bir diğer soru,

“11 . Soru: 

Bu örüntünün 6. adımında kaç bilye vardır?

Kaçıncı adımda 25 bilye vardır?

Bu örüntünün kuralını cebirsel olarak gösterir misin?”

şeklindedir. Bulgular Tablo 134' deki gibidir.

Tablo 134

Örüntü sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası	Beceriler	Şener	Tan	Sevgi	Yasin	Rüzgar	Belgin	Cansu	Asaf

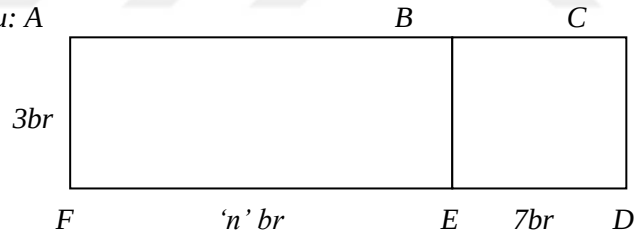
boyutları		(C1G1)	(C1G3)	(C2G1)	(C2G2)	(C3G1)	(C3G2)	(C3G3)	(C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin üzerine odaklanma	X	X	X	X	X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması				X				X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi				X				X

Şener_(C1G1) örüntünün istenen adımında kaç bilye olduğunu bulmak için adım adım sayma yolunu tercih etmiştir. Her bir adımda kaç bilye olduğunu belirterek çözümü ifade etmiştir. Örüntünün her adımında 3 bilye arttığını söylemiş, herhangi istenen adımda kaç bilye olduğunu bulmak için ise adım sayısı ile 3' ün çarpılması gerektiğini belirtmiştir. Cebirsel olarak da örüntünün adımını ifade edemeyen Şener_(C1G1) kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Tan_(C1G3) örüntünün her adımında 3 bilye arttığını ifade ederek her bir adımı saymış ve böylece istenen adımdaki bilye sayısını bulmuştur. Örüntünün kuralını ise $x+3$ olarak belirtmiş, burada yer alan x harfinin bilye sayısını ifade ettiğini söylemiştir. Böylece kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Sevgi_(C2G1) de benzer şekilde önce her adımda 3 bilye arttığını belirtmiş ve her adımdaki bilye sayısını göstererek istenen adımlardaki bilye sayılarını bulmuştur. Örüntünün kuralını cebirsel olarak $x+3$ olarak ifade etmiş ve burada x harfinin adım sayısını gösterdiğini söylemiştir. Ardından bu cebirsel ifadenin yanlış olabileceğini düşünmüş ve x^2+3 olarak örüntünün kuralını belirtmiştir. Bu anlamda kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Yasin_(C2G2) önce soruyu her bir adımı çizerek cevaplandırmayı düşünmüş, ardından her defasından 3 bilye arttığını belirterek sayısal olarak cevaplandırmak istemiştir. Her adımı 3 ile çarptığında 2 eksiği kadar bilye sayısı elde edildiğini belirten Yasin_(C2G2) aynı zamanda örüntünün kuralını cebirsel olarak $3x-2$ olarak ifade etmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. Rüzgar_(C3G1) ve Belgin_(C3G2) her adımda 3 bilye arttığını belirterek istenen adım sayısına ulaşana kadar her adımdaki bilye sayısını göstermişlerdir. Örüntünün kuralını

cebirsel olarak ifade edememişlerdir. Bu anlamda düşünme süreçleri kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Cansu_(C3G3) önce her bir adımda 3 bilye eklendiğini belirtmiş ve her adımdaki bilye sayısını göstererek istenen adımlardaki bilye sayılarını bulmuştur. Örüntünün kuralını cebirsel olarak önce $x+3$ olarak belirtmiş, bu ifadeyi sayısal olarak denediğinde adımlardaki bilye sayılarını vermediğini göstermiştir. Ardından $2x-1$ cebirsel ifadesini düşünmüş; ancak bu ifadenin de yanlış olduğunu kendi göstermiştir. Örüntünün kuralını cebirsel olarak bulmayacağını düşünerek kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Asaf_(C3G3) da diğer öğrenciler gibi önce her bir adımdaki bilye sayısını hesaplamıştır. Her adımda bilye sayısının 3 arttığını belirterek cebirsel olarak örüntünün kuralını bulmaya çalışmıştır. Örüntünün kuralını önce $x+3$ olarak belirtmiş ama herhangi bir adımdaki bilye sayısını bu ifade ile elde edemediğini görmüştür. Ardından $3x+1$ olarak denemiş, 3 ile x ' i çarpmasının nedeni olarak da her defasında 3 artmasından kaynaklandığını belirtmiştir. Bu ifadenin doğru olmadığını göstermiş ve tekrar düşündüğünde 1 ile toplamak yerine 2 eksiltmesi gerektiğini fark etmiştir. Örüntünün kuralını cebirsel olarak $3x-2$ olarak belirterek bulduğu ifadenin doğru olduğunu göstermiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.

Tez çalışmasında bu oturumda öğrencilere son olarak,

“12. Soru: A



AFDC dikdörtgensel bölgenin alanını “ $n+7$ ” ile 3’ ün çarpımı olarak düşünebiliriz.

Peki sence bu dikdörtgesel bölgenin alanı için düşünebileceğimiz diğer ifadeler nelerdir?”

sorusu yöneltilmiştir. Soruya ait bulgular Tablo 135’ deki gibidir.

Tablo 135

Dikdörtgensel bölgenin alanına yönelik farklı cebirsel ifadeler elde etme sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal	İfadedeki verilerin üzerine	X	X	X	X	X	X	X	

somut dünya	odaklanma					
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Cebirsel ifadeler arasındaki ilişkilerin tanımlanması		X	X	X	
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi			X	X	

Şener_(C1G1) dikdörtgensel bölgenin alanı için verilen ifadeye odaklanarak ifade düzenlendiğinde dikdörtgensel bölgenin alanının $7n$ ile $3'$ ün çarpımından 21 olacağını belirtmiştir. Ayrıca, dikdörtgen olarak ifade etmesi gereken BCDE dörtgeninin kare olduğunu savunmuştur. Böylece kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Tan_(C1G3) ilk olarak dikdörtgen olarak ifade etmesi gereken BCDE dörtgenini kare olarak belirtmiştir. Ardından $7n$ ile 7 çarpımının bu dikdörtgensel bölgenin alanını göstereceğini söylemiştir. Soruda verilen ifadenin bulunduğu ifade ile eşit olmadığını fark ettiği halde kendi bulduğu sonucun doğru olduğunu ifade etmiştir. Böylece düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Sevgi_(C2G1) ise $n+3$ ile 7 çarpımının da bu dikdörtgensel bölgenin alanının göstereceğini belirtmiş, soruda verilen ifade ile kendi bulduğu ifadenin eşit olduğunu söylemiştir. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Yasin_(C2G2) önce BCDE dörtgenini kare olarak düşünmüş ve bir kenarı 7 ise alanının 49 olacağını belirtmiştir. Ardından dikdörtgensel bölgenin alanını $3n+49$ şeklinde bularak soruda verilen ifade ile eşit olmadığını düşünmüştür. Buradan hareketle BCDE dörtgeninin kare olamayacağını düşünmüş ve $n+7$ ile $3'$ ün çarpımının $3n+21'$ e eşit olduğunu göstermiştir. Dikdörtgensel bölgenin alanının bu şekilde de ifade edilebileceğini belirtmiştir. Ancak soruda verilen ifade ile kendi bulduğu ifade arasındaki ilişkiyi açıklayamamıştır. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Rüzgar_(C3G1) dikdörtgensel bölgenin alanını bulabilmek için uzun kenarı ile kısa kenarı çarpması gerektiğini söylemiş; ancak, herhangi farklı bir ifade bulamamıştır. Ayrıca BCDE dörtgeninin kare olduğunu belirtmiş ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Belgin_(C3G2) şekil üzerinden eşit kenar uzunluklarını göstererek $3n+21$ ve $(n/2.3)+7.3$ cebirsel ifadelerini bulmuştur. Bunların hepsinin birbirine eşit olduğunu belirtmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. Cansu_(C3G3) ilk olarak şekil üzerinden eşit kenar

uzunluklarını göstererek dikdörtgensel bölgenin alanının $3n+21$ olarak bulunabileceğini belirtmiştir. Ardından şekilde üçgenler oluşturmuş ve oluşturduğu üçgenlerin alanlarını bulup toplamıştır. Üçgenlerin alanlarını topladığında da $3n+21$ ifadesine ulaşan Cansu_(C3G3) soruda verilen ifadenin de $3n+21$ ' ye eşit olduğunu göstermiştir. Bu durumu ise dikdörtgensel bölgenin alanının değişmeyeceği ve her defasında aynı sonucun bulunacağı şeklinde açıklamıştır. Böylece düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Asaf_(C3G3) şekil üzerinden FEBA dikdörtgensel bölgenin alanının 3 ile n çarpımından $3n$ olacağını, BCDE dikdörtgensel bölgenin alanının ise 7 ile 3 çarpımından 21 olacağını söylemiştir. İkisini topladığında ise $3n+21$ elde edileceğini belirtmiştir. Ancak soruda verilen ifade ile arasındaki ilişkiyi açıklayamamıştır. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

4.3.2. 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili 8. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular

Bu bölümde yapılan görüşmelerin 2. oturumunda geometri öğrenme alanına yönelik sorulara 8. sınıf öğrencilerinin verdikleri cevaplara dair bulgular sunulmuştur. Öğrenci cevapları her bir soru için matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine dair belirlenen boyutlara göre sınıflandırılmıştır. Öğrencilerin verdikleri cevaplar birden fazla sürece uygun şekilde ise birden fazla boyut içinde değerlendirilmiştir.

Öğrencilere ilk olarak

“1. Soru: Üçgeni anlatır mısın? Tanımlar mısın?”

sorusu yöneltilmiştir. Soruya ait bulgular Tablo 136' daki gibidir.

Tablo 136

“Üçgeni anlatır mısın?” sorusuna dair 8. sınıf öğrencilerinin cevapları

Cevaplar	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Can (C3G3)	Asaf (C3G3)
Üç kenarı var		X	X	X		X	X	X
Üç köşesi var		X					X	X
Üç iç açısı var								X
Kapalı şekil		X	X				X	X
İç açılarının ölçüleri toplamı 180°	X				X			
Üç doğru parçasının birbiriyle				X		X		

birleştirilmesiyle oluşan şekil

Şener_(C1G1) ve Rüzgar_(C3G1) üçgeni tanımlarken sadece iç açılarının ölçülerinin toplamının 180° olduğunu belirtmişlerdir. Bu öğrencilerin üçgeni tanıtmaya yönelik bir düşünme süreci geliştirmedikleri görülmüştür. Üçgeni Tan_(C1G3) ve Can_(C3G3) üç kenarı, üç köşesi olan ve kapalı olması gereken bir şekil olarak, Sevgi_(C2G1) de üç kenarı olan kapalı bir şekil olarak tanımlamıştır. Yasin_(C2G2) ve Belgin_(C3G2) üç kenarlı olarak belirttikleri üçgenin üç kenarının birbiri ile birleşmesi gerektiğini söylemişlerdir. Asaf_(C3G3) ise üç kenarı, üç köşesi ve üç iç açısı olan kapalı şekil olarak tanımlamıştır.

8. sınıf öğrencilerine,

“2. Soru: ‘Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° ’ dir.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?”

soruları yöneltmiştir. Bulgular Tablo 137’ deki şekildedir.

Tablo 137

“Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° ’ dir.” ifadesine dair 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi							X	
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi		X				X		X

Şener_(C1G1) önce bir üçgen çizerek iki iç açı ölçüsü verilen bir üçgenin üçüncü iç açısının ölçüsünün nasıl bulunabileceğini göstermiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını 180° kabul ederek iki iç açısının ölçüleri toplamını 180° den çıkarmış ve üçüncü iç açının ölçüsünü göstermiştir. Ayrıca üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının üçgene göre değişebileceğini, dar açılı üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamının 90° olduğunu

belirtmiştir. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Tan_(C1G3) bu ifadenin doğru olduğunu belirterek kenar uzunlukları 4 cm olacak şekilde bir eşkenar üçgen çizmiştir. Eşkenar üçgenin bir iç açısının ölçüsünün 60° olduğunu söylemiş ve üçgenin iç açılarının ölçülerini ölçmüştür. Öltüğünde tüm iç açılarının ölçüsünü 60° olarak bulmuş ve toplamlarının böylece 180° olduğunu göstermiştir. Bu anlamda aksiyomatik formal düzeyinde düşünme süreci geliştirmiştir. Sevgi_(C2G1) ifadesinin doğru olduğunu kabul ederek bir üçgen çizmiş ve iki iç açısının ölçüsünü göstermiştir. İki iç açısının ölçüleri toplamını 180° den çıkararak üçüncü iç açısının ölçüsünü bulmuştur. Ancak, üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklayamamış ve 360° diye bir açı hatırladığı için 360° de olabileceğini söylemiştir. Böylece kavramsal somut dünya boyutunda bir düşünme süreci geçirmiştir. Yasin_(C2G2) her bir kenarın eşit kenar olması durumunda iç açılarının da her birinin ölçüsünün 60° olması gerektiğini ve bu üç açı ölçüsünün toplamının da 180° olacağını belirtmiştir. Ancak neden eşkenar üçgende bir iç açının ölçüsünün 60° olduğunu ve üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklayamamıştır. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Rüzgar_(C3G1) da bir üçgen çizerek iki iç açısının ölçüsünün eşit olması gerektiğini belirtmiş ve ölçüleri toplamını 180° den çıkarmıştır. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını 180° olarak kabul eden ancak nedenini açıklayamayan Rüzgar_(C3G1)' in düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Belgin_(C3G2) bir dik üçgen çizmiş ve iç açılarını ölçmüştür. Üç iç açının ölçüleri toplamının 180° olduğunu göstererek aksiyomatik formal dünyaya doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. Cansu_(C3G3) ise bir eşkenar üçgende hem üç kenarın birbirine eşit olduğunu hem de üç iç açısının ölçülerinin eşit ve 60° olduğunu belirtmiştir. Buradan hareketle üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu ve bunun bir kural olduğunu söylemesi sonucunda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Asaf_(C3G3) herhangi bir üçgen çizerek iç açılarını ölçmüş ve iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu göstermiştir. Böylece düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

8. sınıf öğrencilerine yöneltilen diğer soru,

“3. Soru: ‘Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farkının mutlak değerinden ise büyüktür.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?

İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?”

şeklinde dir. Bulgulara ilişkin bilgiler Tablo 138' deki gibidir.

Tablo 138

Üçgen eşitsizliğinin sözel ifadesine yönelik 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X					X		X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması		X	X	X			X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi		X		X				

Şener_(C1G1) herhangi bir üçgen çizmiş ve kenar uzunluklarına kendi değerler vermiştir. Bu değerler üzerinden ifadeyi açıklamaya çalışmış; ancak, ifadenin doğruluğuna ilişkin bir açıklamada bulunamamış ve ifadeyi cebirsel olarak da gösterememiştir. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geçirmiştir. Tan_(C1G3) cetvel yardımıyla bir ikizkenar üçgen çizmiştir. İki kenar uzunluğunu 3cm olarak belirlemiş ve üçüncü kenar uzunluğunu ölçtüğünde 4 cm olarak bulmuştur. İfadeyi okuduğunda ve elde ettiği sayılarla denediğinde ifadenin doğruluğunu göstermiştir. Aynı zamanda ifadeye uygun eşitsizlik yazabilmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Sevgi_(C2G1) ifadeyi bir üçgen üzerinde üçgenin kenar uzunluklarına kendi verdiği sayı değerleri ile açıklamaya çalışmıştır. Önce verdiği değerlerin ifadeye uygun olmadığını görerek, farklı değerler üzerinden denemiştir. Böylece ifadenin doğru olduğunu kabul ederek açıklamaya çalışmış, ancak neden doğru olduğuna dair bir açıklama getirememiştir. Öte yandan, ifadeye uygun eşitsizlik yazabilmiştir. Bu anlamda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna doğru bir düşünme geliştirmiştir. Yasin_(C2G2) bir üçgen çizerek kenar uzunluklarını

ölçmüş ve ifadenin doğru olduğunu göstermiştir. Ayrıca ifadeye uygun eşitsizlik de yazmış ve böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir. Rüzgar_(C3G1) çizdiği bir üçgende kendi verdiği kenar uzunluk değerleri ile ifadeyi açıklamaya çalışmıştır. İfadenin neden doğru olduğunu açıklayamayan ve ifadeye uygun eşitsizlik yazamayan Rüzgar_(C3G1)' in düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Belgin_(C3G2) ifadeyi anlamakta zorlanmıştır. Bir üçgen çizdikten sonra kenar uzunluklarını ölçmüş; ancak, ifadenin doğru olup olmadığına dair bir açıklama getirememiştir. İfadeye uygun eşitsizlik yazamamıştır. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Cansu_(C3G3) bir üçgen çizerek kenar uzunluklarına kendi değerler vermiş ve ifadeyi bu değerler üzerinden açıklamaya çalışmıştır. İfadenin neden doğru olduğunu açıklayamamış; ancak ifadeye uygun eşitsizlik yazabilmiştir. Bu anlamda düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Asaf_(C3G3) önce ifadede anlatılmak isteneni açıklamaya çalışmış, ardından bir üçgen çizerek kenar uzunluklarına kendi değerler vermiştir. Bu değerler üzerinden ifadeyi açıklamak istemiştir. Ancak ifadenin neden doğru olduğuna dair bir açıklamada bulunamamıştır. İfadeye uygun eşitsizlik yazabilen Asaf_(C3G3)' in düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır.

8. sınıf öğrencilerine bir diğer soruda Pisagor Bağıntısı sorulmuştur. Onlara,

“4. Soru: ‘Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, üçüncü kenar uzunluğunun karesine eşittir.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?

İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?”

soruları yöneltmiştir. Bulgular Tablo 139' daki gösterilmiştir.

Tablo 139

Pisagor Bağıntısı' nın sözel ifadesine yönelik 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki veriler üzerinde odaklanma			X	X	X		X	X
	Kavramın, ifadelerin ya da	X	X		X		X	X	X

	nesnelerin edilmesi	tasvir							
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi	X	X	X	X		X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemleri genelleştirme süreci sonucunda cebirsal ifadeler, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması		X		X		X	X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi								

Şener_(C1G1)' in ifadenin doğruluğunu göstermek için çizmek istediği üçgen, dik üçgen olmamıştır. Bu üçgenin kenarları uzun olduğu için dik üçgen olduğunu söyleyerek, kenar uzunluklarına kendi değerler vermiş ve ifadeyi açıklamayı denemiştir. Denediği sayılarla ifadenin yanlış olduğunu söyleyerek bu ifadenin de yanlış olabileceğini belirtmiş ve ifadeye uygun bağıntıyı yazamamıştır. Ayrıca ifadeyi açıklamaya çalışırken iki dik kenar uzunluğunun toplamını üçüncü kenar uzunluğuna eşit olacak şekilde gösterdiği görülmüştür. Bu anlamda kavramsal somut dünya boyutunda bir düşünme süreci geliştirmiştir. Tan_(C1G3) önce dik üçgen çizerek kenar uzunluklarına kendi verdiği değerler yardımıyla ifadeyi açıklamak istemiştir. Bu sırada bu ifadenin Pisagor Bağıntısı' nı anlattığını hatırlayarak ifadenin doğru olup olmadığını göstermek yerine ifadeyi açıklamaya devam etmiştir. Ayrıca ifadeye uygun bağıntıyı yazabilmiştir. Böylece düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Sevgi_(C2G1) önce ifadede yer alan verilere odaklanmış, kenar uzunluklarının kareleri toplamı ile anlatılmak isteneni anlamaya çalışmıştır. Ardından bir dik üçgen çizerek kenar uzunluklarına kendi değerler vermiştir. Buradan hareketle dik kenar uzunluklarının karelerini göstermiş; ancak toplamlarının üçüncü kenar uzunluğunun karesine eşit olduğunu gösterememiştir. Bu ifadenin yanlış olduğunu düşünerek ifadeye uygun bağıntıyı da yazamamıştır. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Yasin_(C2G2) bir dik üçgende dik kenarları göstererek ve dik açının karşısında yer alan kenarın hipotenüs olduğunu söyleyerek dik üçgeni tasvir etmiştir. Ardından dik kenar uzunluklarına değerler vermiş ve ifadeyi açıklamaya çalışmıştır. İfadeye uygun bağıntıyı da yazmış; ancak, ifadenin neden doğru olduğuna yönelik bir açıklama getirmemiştir. Bu açıdan nesnel süreçsel sembolik dünyaya doğru bir düşünme geliştirmiştir. Rüzgar_(C3G1) ise çizdiği üçgen dik üçgen olmadığı halde dik üçgen olduğunu savunmuş ve bu

ifadeye uygun bir açıklama getirememiştir. Böylece düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Belgin_(C3G2) de bir dik üçgen çizerek kenarlarına sayı değerleri vermiş ve ifadeyi açıklamaya çalışmıştır. İfadeye uygun bağıntı da yazmış ama ifadenin doğruluğuna ilişkin bir açıklamada bulunmamıştır. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Cansu_(C3G3) ifadeyi okuduğunda bir dik üçgen çizerek dik kenarlarını ve dik açının karşısındaki kenarın hipotenüs olduğunu göstermiştir. Ardından 3-4-5 özel üçgenini anlatmıştır. Neden 3-4-5 üçgenini seçtiği sorulduğunda ise bunun öğrendikleri bir kural olduğunu belirterek ifadeyi açıklamaya çalışmıştır. İfadeye uygun bağıntı da yazdığı halde ifadenin neden doğru olduğunu açıklayamamıştır. Böylece düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. Asaf_(C3G3) da ifadeyi okuduğunda dik üçgende dik kenar uzunluklarının karelerinin toplamının hipotenüs uzunluğunun karesine eşit olması gerektiğini belirterek bu ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Üçüncü kenar uzunluğunun hipotenüs olacağını sonradan fark ederek önce ifadeye uygun bağıntıyı yazmış, ardından 3-4-5 üçgeni ile açıklamaya çalışmıştır. Ancak ifadenin neden doğru olduğunu açıklayamamış, düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

4.3.3. 3. oturumda 8. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşmelere dair bulgular

Bu bölümde yapılan görüşmelerin 3. oturumunda 8. sınıf öğrencilerinin cevaplarına ait bulgular sunulmuştur. Öğrenci cevapları her bir soru için matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine dair belirlenen boyutlara göre sınıflandırılmıştır. Öğrencilerin verdikleri cevaplar birden fazla sürece uygun şekilde ise birden fazla boyut içinde değerlendirilmiştir. Ayrıca elde edilen bulgular her bir öğrenci için ayrı olarak yorumlanmıştır.

Öğrencilere ilk olarak yöneltilen üçgen eşitsizliğini keşfetmeye yönelik gerçek yaşam durumu ve sorulan sorular aşağıdaki gibidir.

“Bir gün öğretmeni Efe’ ye proje ödevi verir. Proje ödevine göre Efe’ nin üçgen şeklinde bir bahçe tasarlaması gerekmektedir. Efe’ ye öğretmeni bahçenin bir kenarının uzunluğunun 9 cm, diğer kenarının uzunluğunun ise 5 cm olması gerektiğini belirtir.

Üçgeni nasıl çizmesi gerektiğini düşünen Efe sence nasıl bir yol izler?

Sence Efe üçüncü kenarı 4 cm olarak seçebilir mi? Açıklayınız.

Sence Efe üçüncü kenarı 14 cm olarak seçebilir mi? Açıklayınız.

Bu durumda Efe’ nin çizmesi gereken üçgen için nasıl bir bağıntı oluşturursunuz?

Bunu genellemek istersek nasıl açıklarsınız?

Cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?”

Yapılan görüşmelerde öğrencilere araştırmacı tarafından cetvel sunulmuş ve 1cm ile 20 cm arasında değişen uzunluklardaki çubukları kullanabilecekleri belirtilmiştir. Bu soruda 8. sınıf öğrencilerinin düşünme süreçlerinin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre değerlendirilmesi Tablo 140' daki gibidir.

Tablo 140

Gerçek yaşam durumu içerisindeki üçgen eşitsizliğini keşfetmeye yönelik 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi				X		X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerak gösterilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
	İşlemlerin genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadeler, denklemlere, eşitsizliklere ulaşılması		X					X	X
	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi		X					X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya									
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi		X					X	X

Şener_(C1G1) verilen iki kenar uzunluğunun önce farkını almış ve iki kenar uzunluğunu toplamıştır. Ardından elde ettiği 14 ile 4' ün farkını almıştır. Bu defa bulduğu 10 sonucundan da 1' i çıkartarak üçüncü kenar uzunluğunun 9 cm olması gerektiğini söylemiştir. Neden böyle yaptığı sorulduğunda ise bu şekilde öğrendiklerini söylemiş ve başka bir açıklama

getirememiştir. Üçüncü kenar uzunluğunun sadece 9 cm olması gerektiğini savunarak kavramsal somut dünya boyutunda bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Tan_(C1G3) ifadeyi okuduğunda Pisagor Bağıntısı' nı uygulamaya yönelik bir düşünme geliştirmiştir. Verilen iki kenar uzunluğunun karelerinin toplamını bulmuş ve bulduğu sayının üçüncü kenar uzunluğunun karesi olacağını belirtmiştir. Soruda yer alan bahçenin dik üçgenden başka üçgen olup olmayacağı sorulduğunda ise yaptığı hatayı fark etmiştir. Buradan hareketle 9 cm ve 5 cm uzunluklarını ele alarak bir üçgen oluşturmuş ve üçüncü kenar uzunluğunu 10 cm olarak ölçmüştür. 14 cm olup olmayacağı sorulduğunda ise iki kenarın farkından büyük, toplamından küçük olması gerektiğini belirtmiştir. Bu ifadeyi 10 cm, 14 cm ve 4 cm uzunluklarını üçgen üzerinde olup olmayacağını göstererek açıklamıştır. Ayrıca ifadeye uygun eşitsizliği de yazarak aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir.

Sevgi_(C2G1) üçgende verilen iki kenar uzunluğunun toplamı çift sayı olduğu için üçgenin üçüncü kenar uzunluğunun çift sayı olması gerektiğini söylemiştir. Üçüncü kenar uzunluğu 14 cm olabilir mi diye sorulduğunda ise önce olabileceğini söylemiştir. Ardından verilen uzunluklarla bir üçgen oluşturduğunda olamayacağını görmüştür. 4 cm olup olmayacağı sorulduğunda ise yine denemiş ve olmadığını görmüştür. Tüm bu denemelere rağmen üçüncü kenar uzunluğu hakkında bir açıklama getirememiş ve ifadeyi cebirsel olarak açıklayamamıştır. Bu yüzden düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Yasin_(C2G2) ifadeyi okuduktan hemen sonra üçgende üçüncü kenar uzunluğunun 4 cm ve 14 cm arasında olması gerektiğini belirtmiştir. Nedeni sorulduğunda ise iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farkından büyük olması gerektiğini söylemiş; ancak neden böyle olduğunu açıklayamamıştır. Ayrıca bu ifadede sorulan üçgen eşitsizliğini cebirsel olarak da gösterememiştir. Kavramsal somut dünya boyutunda bir düşünme süreci geliştirmiştir.

Rüzgar_(C3G1) üçgenin üçüncü kenar uzunluğunun 3 cm, 5 cm, 8 cm ya da 10 cm uzunluklarında olabileceğini belirtmiş ama neden bu uzunlukları seçtiğini açıklamamıştır. Ardından üçgenin ikizkenar üçgen olması gerektiğini belirterek 5 cm ya da 9 cm olabileceğini söylemiştir. Üçgen eşitsizliğini oluşturamadığı için ve herhangi bir açıklama yapmadığı için düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Belgin_(C3G2) önce ifadede verilenleri ve isteneni sözel olarak açıklamıştır. Bu ifadede isteneni derste gördüklerini belirterek üçüncü kenar uzunluğunun iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farkından büyük olması gerektiğini söylemiştir. Belgin_(C3G2) ifadenin

doğru olup olmadığını açıklayamamış ve üçgen eşitsizliğini cebirsel olarak ifade edememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda yer almıştır.

Cansu_(C3G3) ifadeyi okur okumaz bir dik üçgen çizmiş ve dik kenarları 5cm ile 9cm olarak belirlemiştir. Ardından dik kenarların uzunluklarının karelerini toplamış ve bu toplamın karekökünü alarak üçüncü kenarın uzunluğunun 10 cm ile 11 cm arasında olması gerektiğini söylemiştir. Üçgenin dik üçgen dışında bir üçgen olup olamayacağı sorulduğunda ise soruyu tekrar okumuş ve dik üçgen ile ilgili bir bilginin olmadığını fark etmiştir. Bu defa 9 cm ile 5 cm' nin toplamından küçük, farkından büyük olması gerektiğini söylemiştir. Bunun nedenini ise 5 cm ve 9 cm' lik çubukları ele alarak göstermiştir. Önce kenarları 9 cm ve 5 cm olan bir üçgenin üçüncü kenar uzunluğunun 3 cm, 4 cm, 14 cm ve 15 cm olamayacağını göstermiş, sonra üçgen eşitsizliğini cebirsel olarak ifade etmiştir. Böylece aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiştir.

Asaf_(C3G3) ifadeyi okuduktan sonra sözel olarak açıklamıştır. Üçüncü kenar uzunluğunu bulmak için 9 ile 5' in karelerinin toplamını bulup elde edilen sonucun karekökünün alınması gerektiğini belirtmiştir. Soruyu tekrar okuduğunda dik üçgen ile ilgili bir bilgi geçmediğini fark ederek dik değilse üçüncü kenar uzunluğunun 9cm ile 5cm' nin toplamından küçük, farkından büyük olması gerektiğini söylemiştir. İfadenin doğruluğunu göstermesi istendiğinde ise 5 cm ve 9 cm kenar uzunluklarına sahip bir üçgenin üçüncü kenar uzunluğunun 3 cm, 4 cm, 14 cm ve 15 cm olamayacağını göstermiştir. Üçgen eşitsizliğini cebirsel olarak da ifade eden Asaf_(C3G3)' ın düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Bu bölümde öğrencilere ikinci olarak yöneltilen gerçek yaşam durumu Pisagor Bağıntısı' nı keşfetmelerine yönelik olarak hazırlanmış ve sırasıyla aşağıdaki sorular sorulmuştur:

“Efe'nin bir diğer proje ödevinde öğretmenini ondan bir ev modeli tasarlamasını istemiştir. Efe tasarlayacağı evin çok farklı bir modelde olmasını ve dikkat çekmesini istemektedir. Efe günlerce düşünür ve 4 odalı bir ev tasarlamaya karar verir. Evin özellikleri şu şekildedir:

-Evin üç odası kare olacaktır.

-Kare şeklinde odalardan ikisinin birer duvarı birbirine dik olacaktır.

-Bu üç oda birbirleri ile birer köşelerinden ikişer ikişer çakışacaktır.

-Dördüncü odanın duvarları bu üç odanın birer duvarı ile ortak olacak ve aralarında kalacak şekilde tasarlanmaktadır.

Evi nasıl çizmesi gerektiğini düşünen Efe sence nasıl bir yol izler?

Üç odanın arasında kalan oda hangi geometrik şekle benzemektedir?

Efe kare şeklinde bir odanın bir kenarını 4 cm olarak, diğer kare şeklindeki odanın bir kenarını 3 cm olarak seçerse, üçüncü kare şeklinde olan odanın bir kenarı kaç cm olabilir?

Arada kalan dördüncü odanın kenar uzunlukları hakkında ne söyleyebilirsin?

Evin alanı için ne söyleyebilirsin?

Eğer Efe kare şeklindeki odalardan birinin bir kenar uzunluğunu 6 cm, diğerinin bir kenar uzunluğunu 8 cm olarak seçseydi üçüncü odanın bir kenarı ve arada kalan odanın kenar uzunlukları hakkında ne söyleyebilirsin?

Bu durumu genellemek istersek nasıl bir bağıntı oluşturursun?

Cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?"

Yapılan görüşmelerde öğrencilere araştırmacı tarafından cetvel sunulmuş, çeşitli uzunluklardaki çubukları kullanabilecekleri belirtilmiştir. Bu soruda 8. sınıf öğrencilerinin cevaplarının matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre değerlendirilmesi Tablo 141' deki gibidir.

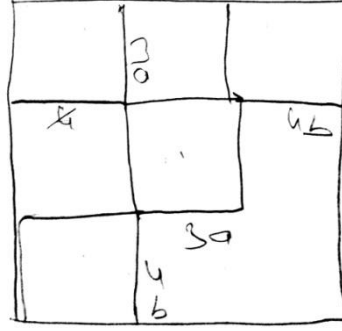
Tablo 141

Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı keşfetmeye yönelik 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme boyutları

Matematiğin üç dünyası boyutları	Beceriler	Şener (C1G1)	Tan (C1G3)	Sevgi (C2G1)	Yasin (C2G2)	Rüzgar (C3G1)	Belgin (C3G2)	Cansu (C3G3)	Asaf (C3G3)
Kavramsal somut dünya	İfadedeki verilerin özelliklerine odaklanma	X		X	X	X	X	X	X
	Kavramın, ifadelerin ya da nesnelerin tasvir edilmesi	X	X	X	X	X	X	X	X
	İfadelerin sayılarla denenerek gösterilmesi		X						X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	İşlemlerin genelleştirme süreci sonucunda cebirsel ifadelere, denklemlere, eşitsizliklere		X						X

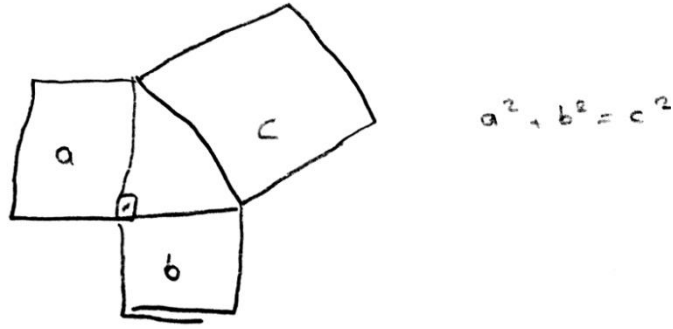
	ulaşılması		
	Bir ifadenin hem süreci hem de kavramı ifade ettiğinin belirtilmesi	X	X
Aksiyomatik formal dünya	İspat sürecinin ifade edilmesi	X	X

Şener_(C1G1) sorunun her bir adımı için ayrı ayrı şekiller çizmiş ve ifadeyi hem anlamaya yönelik hem de açıklamaya yönelik düşünme süreci geliştirmiştir. Sonuçta arada kalan odanın kare olması gerektiğini düşünerek, Pisagor Bağıntısı' na yönelik bir düşünme geliştirememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.



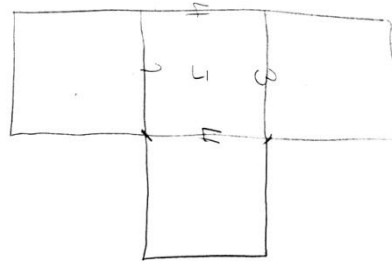
Şekil 57. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Şener_(C1G1)' in çizdiği şekil

Tan_(C1G3) ifadeyi okuduğunda önce dördüncü odanın da kare olacağını düşünmüştür. Ardından üç odanın birbirleri ile köşelerinden çıkışacağını düşününce arada kalan odanın eşkenar üçgen olabileceğini belirtmiştir. Ancak, iki odanın birbirine dik olması gerektiğini düşününce de dördüncü odanın dik üçgen olması gerektiğini söyleyerek doğru şekli çizebilmiştir. Buradan hareketle birbirine dik olan kare odalardan birinin bir kenar uzunluğu 3 cm, diğerinin bir kenar uzunluğu 4 cm olduğunda üçüncü karenin bir kenar uzunluğunu bulmak için de Pisagor Bağıntısı' nı kullanması gerektiğini belirtmiştir. Üçüncü karenin bir kenar uzunluğunun 5 cm olacağını söylemiştir. Neden karelerini aldığı sorulduğunda ise verilen karelerin alanlarının toplamının üçüncü karenin alanına eşit olacağını belirtmiştir. Daha önce öğrendiği bir bilginin nedenini açıklayan ve Pisagor Bağıntısı' nı da oluşturan Tan_(C1G3) aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.



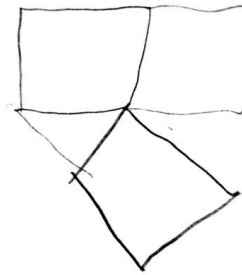
Şekil 58. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Tan_(C1G3)' ın çizdiği şekil

Sevgi_(C2G1) ifadeyi okurken sırasıyla verilenleri çizerek açıklamak istemiştir. Birden çok çizim yaptığı halde doğru şekle ulaşamamıştır. Dördüncü odanın kare olabileceğini söyleyerek, Pisagor Bağıntısı' nı bulmaya yönelik bir düşünme geliştirememiştir. Böylece düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.



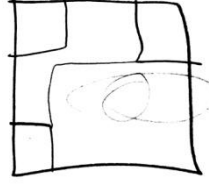
Şekil 59. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Sevgi_(C2G1)' nin çizdiği şekil

Yasin_(C2G2) ifadede yer alan üç tane kareyi istenenlere göre çizmeye çalışmış ancak başarılı olamamıştır. Arada kalacak şeklin önce kare olabileceği düşünmüş, daha sonra üçgen olabileceğini belirtmiştir. Ancak Pisagor Bağıntısı' na yönelik düşünme geliştirememiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.



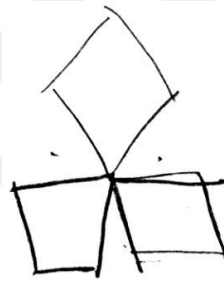
Şekil 60. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Yasin_(C2G2)' in çizdiği şekil

Rüzgar_(C3G1) soruda verilen şartları yerine getirmeye çalışmış; ancak doğru şekle ulaşamamıştır. Arada kalan şeklin de kare olabileceğini belirterek kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.



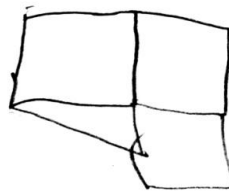
Şekil 61. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Rüzgar_(C3G1)' ın çizdiği şekil

Belgin_(C3G2) önce arada kalan odanın nasıl olması gerektiğine odaklanmış ve bazı şekiller çizerek denemiştir. Çizdiği şekiller sonucunda arada oda olmayacağını belirtmiştir. Böylece Pisagor Bağıntısı' na yönelik bir düşünme geliştirememiş ve düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.



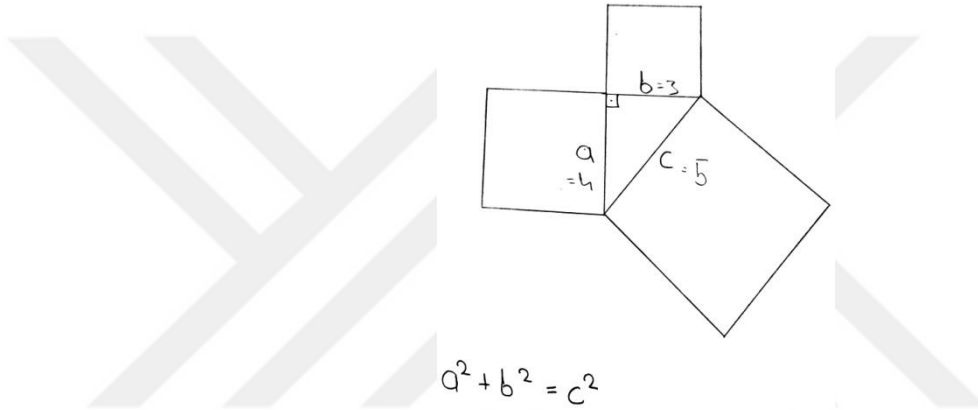
Şekil 62. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Belgin_(C3G2)' in çizdiği şekil

Cansu_(C3G3) istenenlere uygun şekil çizmeye çalışmış, hatta doğru şekli çizerek üç kare arasında kalan şeklin dik üçgen olabileceğini düşünmüştür. Ancak yaptığından emin olmadığı için düşünme sürecini sonlandırmış ve Pisagor Bağıntısı' na yönelik bir düşünme süreci geliştirememiştir. Bu anlamda düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda değerlendirilmiştir.



Şekil 63. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Cansu_(C3G3)' nun çizdiği şekil

Asaf_(C3G3) önce istenenleri açıklamıştır. Ardından şekli doğru bir şekilde çizmiş ve arada kalan şeklin üçgen olması gerektiğini belirtmiştir. Birbirine dik olan karelerden birinin bir kenar uzunluğu 3 cm, diğer karenin bir kenar uzunluğu 4 cm olduğunda üçüncü karenin bir kenar uzunluğunu üçgeni cetvelle çizerek ölçmüştür. Üçüncü karenin bir kenar uzunluğunu 5 cm olarak bulmuş ve bu üçgenin 3-4-5 özel üçgeni olduğundan hareketle dik üçgen olduğunu söylemiştir. Ardından üçgenin kenar uzunlukları ile karelerin alanları arasında bağ kurarak Pisagor Bağıntısı' nı açıklamaya yönelik düşünme süreci geliştirmiştir. Pisagor Bağıntısı' nı doğru bir şekilde oluşturan Asaf_(C3G3)' ın düşünme süreci aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir.



Şekil 64. Gerçek yaşam durumu içerisindeki Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde göstermesi beklenen şekle dair Asaf_(C3G3)' ın çizdiği şekil

4.3.4. Yarı yapılandırılmış görüşmeler sonucu 8. sınıf öğrencilerinin bireysel değerlendirilmeleri

Bu bölümde yapılan görüşmeler neticesinde 8. sınıf öğrencilerinin sorular bazında gösterdikleri süreçler bireysel olarak değerlendirilmiş ve her bir öğrenci için ayrı ayrı sunulmuştur. Diğer yandan sorulara diğer öğrencilerden farklı şekilde cevap veren öğrenciler ile yapılan görüşmelerden kesitler de sunulmuştur.

4.3.4.1. Şener_(C1G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Şener_(C1G1) cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri 1. düzey olarak belirlenen ve matematik dersi not ortalaması ise 39 olan bir öğrencidir. Şener_(C1G1) ile yapılan görüşmeler üç oturum açısından ayrı olarak değerlendirilmiştir.

Şener_(C1G1)' in 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 142' deki gibidir.

Tablo 142

Şener_(C1G1)' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları		Soru Numaraları											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal dünya	somut	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel sembolik dünya	süreçsel	X	X										
Aksiyomatik dünya	formal	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.											

Şener_(C1G1)' in 1. oturumda yer alan cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların yer aldığı matematiksel düşünme boyutları değerlendirildiğinde ilk 2 soru dışındaki tüm sorularda sadece kavramsal somut dünya düzeyinde cevaplar verdiği görülmektedir. İlk 2 soruda nesnel süreçsel sembolik dünyaya ulaşmasının ise soruların sayısal veriler içeren sorular olmasından ve işlem süreci sonucundan oluşan somut ifadeyi sembolik olarak düşünmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Şener_(C1G1) cebir içeren sorularda ise sembolik gösterimi ifade edememiştir.

Şener_(C1G1) ile yapılan görüşmeler sonucunda 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili ikinci, üçüncü ve dördüncü sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 143' de gösterilmiştir.

Tablo 143

Şener_(C1G1)' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları		Soru Numaraları		
		2	3	4
Kavramsal somut dünya		X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiyomatik formal dünya				

Şener_(C1G1) geometri öğrenme alanı ile ilgili yapılan görüşmede her bir soru için kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geçirmiştir. Sözel olarak verilen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' na dair ifadeleri sembolik olarak açıklayamamıştır.

Şener_(C1G1)' in 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma ile ilgili sorularda geliştirdiği matematiksel düşünme süreçlerinin değerlendirilmesi Tablo 144' deki gibidir.

Tablo 144

Şener_(C1G1)' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiomatik formal dünya		

Şener_(C1G1) üçüncü oturumda geometrik bir ifadeyi oluşturma ve cebirsel olarak ifade etme becerilerinin beklendiği sorularda kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nın oluştuğunu ifade edememiş ve sembolik olarak gösterememiştir.

Yapılan görüşmeler sonucunda Şener_(C1G1)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 145' deki gibidir.

Tablo 145

Şener_(C1G1)' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	(4+3 ifadesi için) “Toplama işlemini anlatıyor. 4’ den 5, 6, 7 diye sayarız. 4 lira ile 3 liranın toplamı 7 lira yapar.”
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi		

Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsel ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması

Şener_(C1G1)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası boyutları açısından değerlendirildiğinde kavramsal somut dünya boyutunda yer aldığı görülmektedir. Şener_(C1G1) verilen ifadeleri sözlü ve yazılı olarak açıklamayı tercih etmiştir. Ancak, yazılı dil ve görsel dil kullanımında güçlük yaşamıştır. İfadeleri cebirsel olarak açıklamakta ya da kavramları kendi tanımlamaları ile açıklamakta zorlanmıştır.

Şener_(C1G1) ile yapılan görüşmelerin genel değerlendirilmesi şu şekildedir:

Şener_(C1G1) 5 ve 4+3 kavramlarını şekiller çizerek anlatmaya çalışmıştır. 5' in sayma işlemi sonucunda oluştuğunu ve 4+3' ün de 7 sayısını oluşturduğunu bu şekiller üzerinden açıklamıştır.



$$\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc + \bigcirc \bigcirc \bigcirc = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc$$

Şekil 65. Şener_(C1G1)' in 5 ve 4+3 kavramlarına dair tasviri

Şener_(C1G1)' in verilen ifadeleri sembolik olarak düşünmekte zorlandığı belirlenmiştir. Bir cebirsel ifadenin sonucu olduğuna inanmaktadır. 22, 33 gibi sayılar birbirini tekrar eden rakamlardan oluşan sayılar olduğu için onları ardışık sayılar olarak düşünmektedir. Aynı zamanda 5'in ardışığının 10, 6' nın ardışığının 12 olduğunu söyleyerek bir sayının katlarının onun ardışığı olan sayılar olduğunu düşünmektedir. Bu anlamda ardışık sayılar kavramı hakkında yanlışlığa sahip olduğu düşünülmektedir. Çift sayı ve tek sayı kavramlarını ifade ederken bazı hatalar yapmıştır. Şener_(C1G1), 0 sayısının tek sayı olduğunu düşünmektedir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(“İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.” ifadesini açıklarken)

Şener_(C1G1): Çift olabilir iki tek sayının çarpımı. 0 ve 1 çarparsak yine 0 oluyor. Tek sayı.

Araştırmacı: 0 tek sayı mıdır?

Şener_(C1G1): Evet tek sayı.

Araştırmacı: Başka örnek verir misin?

Şener_(C1G1): 3 çarpı 5 çarpımları 15.

Araştırmacı: 15 tek sayı mıdır?

Şener_(C1G1): Evet tek sayı.

Şener_(C1G1)' in 0' ı tek sayı olarak düşünmesi önce bir basamaklı sayıları tek sayı olarak düşünme yanlışlığını gösterdiği şeklinde düşünülmüş ve doğrulamak için başka örnek vermesi istenmiştir. Ancak, verdiği örnekte ve diğer sorularda da verdiği cevaplar incelendiğinde sadece 0' ın tek sayı olduğunu düşündüğü görülmüştür. Şener_(C1G1), $2x$ gibi bir ifadede x yerine gelebilecek bir sayı düşündüğünde 2 ile x ' i çarpmak yerine bu ifadenin 2 ile başlayan bir sayı oluşturacağına inanmaktadır. Örnek olarak x ' in 4 olması durumunda $2x$ ' in 24 sayısını göstereceğini, x ' in 36 olması durumunda ise $2x$ ' in 236 sayısını göstereceğini belirtmektedir.

Şener_(C1G1) üçgeni tanımlamakta zorlanmıştır. Üçgen şeklini çizmiş, ancak sözel olarak açıklayamamıştır. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasının derste gördükleri bir bilgi olduğunu söylemiş; ancak dar açılı üçgenlerin ölçüleri toplamının 90° olabileceğini de belirtmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(“Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° ’ dir.” ifadesini açıklarken)

Şener_(C1G1): Evet ama 90 derece de olabiliyor. Ama iç açıları olamaz. 180 derece mesela birine 60 yazarım birine 70 yazarım. Öbürüne de kaç kalırsa onu yazarım.

Araştırmacı: Gösterir misin?

Şener_(C1G1): Burası 180 derece burası 60 burası 70 yazarım. 180’ den 130’ u çıkartırım. Buraya da 50 yazarım

Araştırmacı: Neden 90 derece değil de iç açılarının ölçüleri toplamı 180 derece?

Şener_(C1G1): Kuralı bu çünkü. 180 dereceye tamamlaması gerekiyor açılarını.

Araştırmacı: Başta 90 derece olabilir demiştin.

Şener_(C1G1): 90 olamaz. Çünkü 90 derece başka bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı olabilir.

Araştırmacı: Mesela hangi üçgenin?

Şener_(C1G1): Dar açılı olabilir.

Şener_(C1G1) dar açılı üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 90° olabileceğini söylemiştir. Dik üçgenin kenarlarının uzun olduğu için dik olduğunu belirten Şener_(C1G1), dik üçgen ile ikizkenar üçgen kavramlarını birbirine karıştırmıştır. Ayrıca üçgen eşitsizliği ve

Pisagor Bağıntısı' nı sözel olarak verilen bir ifadeden yola çıkarak açıklamakta ve gerçek yaşam durumu içerisinde oluşturmakta zorlanmıştır.

4.3.4.2. $Tan_{(C1G3)}$ ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

$Tan_{(C1G3)}$ cebirsel düşünme düzeyi 1. düzey, geometrik düşünme düzeyi ise 3. düzey olarak belirlenen ve matematik dersi not ortalaması 55 olan 8. sınıf öğrencisidir. Bu bölümde $Tan_{(C1G3)}$ ile yapılan görüşmelerde her bir oturum ayrı ayrı değerlendirilmiş ve sunulmuştur.

$Tan_{(C1G3)}$ ' in 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 146' da gösterilmiştir.

Tablo 146

$Tan_{(C1G3)}$ ' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X	X	X	X				X	X		
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.								X	X		

$Tan_{(C1G3)}$ cebir öğrenme alanında sorularda genel olarak nesnel süreçsel sembolik dünya düşünme boyutuna ulaşmıştır. Cebirsel ifadelerin eşitliğinin sorgulandığı iki soruda ise aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci göstermiştir. Sözel olarak verilen ifadeleri sembolik olarak ifade etmesi beklenen sorularda ise düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

$Tan_{(C1G3)}$ ile yapılan görüşmeler neticesinde 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 147' deki gibidir.

Tablo 147

$Tan_{(C1G3)}$ ' in geometri ile ilgili her bir soruda geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4

Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu beceri ölçülmemektedir.	X	X
Aksiyomatik formal dünya	X	X	

$Tan_{(C1G3)}$ 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili yapılan görüşmelerde Pisagor Bağintısı' nı açıklaması beklenen soru dışındaki sorularda aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Pisagor Bağintısı' nı ise sembolik olarak oluşturmuş ancak neden doğru olduğunu açıklayamamıştır.

$Tan_{(C1G3)}$ ' in 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağintısı' nı oluştururken geliştirdiği matematiksel süreçlerin değerlendirilmesi Tablo 148' deki gibidir.

Tablo 148

$Tan_{(C1G3)}$ ' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağintısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X
Aksiyomatik formal dünya	X	X

$Tan_{(C1G3)}$ gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini ve Pisagor Bağintısı' nı oluşturmaya beklenen sorularda tüm düşünme süreçlerini göstererek aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaşmıştır. Pisagor Bağintısı' nı sözel olarak verilen bir ifadede açıklamakta ve oluşturmakta zorlanırken, gerçek yaşam durumu içerisinde istenen bağıntıya ulaşabilmiş ve nasıl oluştuğunu göstermiştir.

Yapılan görüşmeler sonucunda $Tan_{(C1G3)}$ ' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 149' daki gibidir.

Tablo 149

$Tan_{(C1G2)}$ ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	(4+3 ifadesi için) Toplamı 7 eder. 4 tane ağacı 3 tane ağaçla toplarsak 7 tane ağaç olur.
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi		
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)	X	$2(2 \times + 4)$ $4 \times + 8 =$
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmaya istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		

Tan_(C1G3)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası boyutları açısından değerlendirildiğinde görüşmeler sonucunda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Sorularda istenenleri sözlü olarak ifade etme eğilimi göstermiştir. Yazılı dil ve görsel dil becerileri yetersiz kalmıştır. Sembolik dili doğru bir şekilde kullanabilmiştir. Kavramsal yapılar için aksiyomatik formal dünya boyutunda matematiksel düşünme süreci geliştirse de matematiksel dil becerileri bu boyutta yer almamıştır.

Tan_(C1G3) ile yapılan görüşmelerin genel değerlendirilmesi şu şekildedir:

Tan_(C1G3), 5' i anlatması istenen soruda 25' in karesinin 5 olduğunu söylemiştir. Burada karekök kavramı ile üslü ifade kavramlarını birbirine karıştırmıştır. Bir cebirsel ifadede farklı harflerin farklı nesneleri gösterdiğini belirtmiştir. Soruları cevaplandırırken verilen ifadelerin doğruluğunu önce sayılarla deneyerek göstermek istemiştir. Ancak, yazılı dil kullanımında işlemsel süreci gösterirken hatalar yapmıştır.

$$6 + 2 = 8 \cdot 4 = 32$$

$$6 \cdot 4 = 24 + 8 = 32$$

Şekil 66. Tan_(C1G3)' in yazılı dil kullanımına dair hatası

$Tan_{(C1G3)}$, işlem sonuçlarının devamında her bir işlemi birbirine eşitleyerek göstermiştir. Bu da onun yazılı dil becerisinin yetersiz olduğunu göstermektedir. $Tan_{(C1G3)}$, sözel olarak verilen ifadelere uygun cebirsel ifade yazmakta zorlanmıştır. Ardışık ik sayıyı cebirsel olarak gösterebilmiştir. Ancak, cebirsel ifadelerle toplama işleminde hata yapmıştır. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(“Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.” ifadesini açıklarken)

Araştırmacı: t ’nin ardışığı nedir?

$Tan_{(C1G3)}$: 1 fazlası olmalı. Yani artı 1.

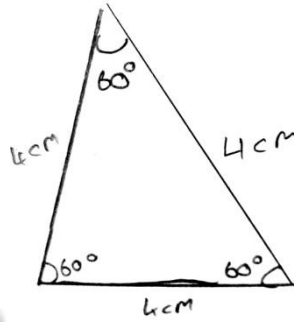
Araştırmacı: Toplamlarını nasıl gösterirsin?

$Tan_{(C1G3)}$: t ile $t+1$ ’i toplarsak eşitlesek t kare artı 1 yapar.

Araştırmacı: Tek sayı mıdır?

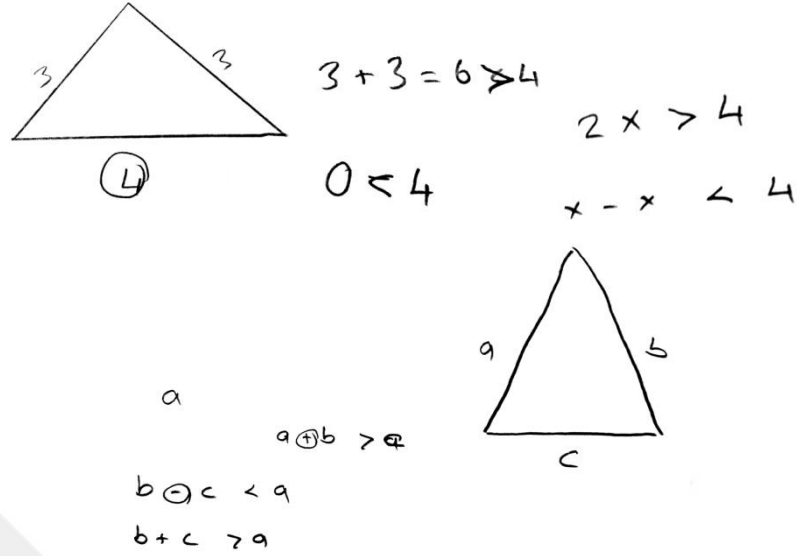
$Tan_{(C1G3)}$: İki de olabilir.

$Tan_{(C1G3)}$ bulduğu ifadenin tek sayı ya da çift sayıyı temsil edebileceğini söylemiştir. Diğer sorularda da tek sayı ve çift sayıyı temsil edecek cebirsel ifadeler oluşturamamıştır. $Tan_{(C1G3)}$, cebirsel ifade yazarken parantezin önemine dikkat etmiştir. Verilen bir dörtgenin hiçbir bilgi verilmemesine rağmen görüntüsünden ötürü kare olduğunu düşünmüştür. Geometri sorularına cevap verirken açıölçer ve cetvel kullanabilmiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu gösterirken bir eşkenar üçgen çizmiş ve iç açılarını ölçerek göstermiştir.



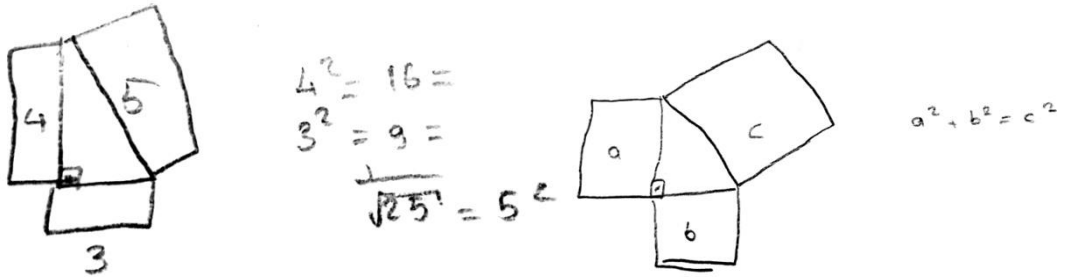
Şekil 67. $Tan_{(C1G3)}$ ’in oluşturduğu eşkenar üçgen

Benzer şekilde sözel olarak verilen ifadede yer alan üçgen eşitsizliğini gösterirken bu defa cetvel yardımıyla ikizkenar bir üçgen çizmiş ve üçüncü kenarın uzunluğunu ölçerek üçgen eşitsizliğinin doğruluğunu göstermek istemiştir. Üçgen eşitsizliğini sembolik olarak da ifade edebilmiştir.



Şekil 68. $\text{Tan}_{(\text{C1G3})}$ ' in üçgen eşitsizliğine yönelik sembolik gösterimi

$\text{Tan}_{(\text{C1G3})}$ çizdiği ikizkenar üçgende üçgen eşitsizliği için verilen sözel ifadenin doğruluğunu gösterirken yine ikizkenar üçgen üzerinde sembolik düşünme gerçekleştirmiştir. Üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı için derste gördüklerini ifade etmiş; ancak, sözel olarak verilen Pisagor Bağıntısı' nı açıklamakta zorlanmıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde ise üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturabilmiştir. Ayrıca Pisagor Bağıntısı için istenen şekli doğru bir şekilde çizebilmiştir.



Şekil 69. $\text{Tan}_{(\text{C1G3})}$ ' in Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma süreci

$\text{Tan}_{(\text{C1G3})}$ ' in geometri öğrenme alanı içerisinde daha başarılı olmasının nedeni ise geometrik düşünme düzeyinin üçüncü düzey olması ile açıklanabilir. Cebirsel düşünme düzeyi birinci düzey olmasına rağmen ifadeleri genellikle sembolik olarak gösterebilmiştir.

4.3.4.3. Sevgi_(C2G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Sevgi_(C2G1) cebirsel düşünme düzeyi 2. düzey, geometrik düşünme düzeyi ise 1. düzey olarak belirlenen ve matematik dersi not ortalaması 72 olan 8. sınıf öğrencisidir. Bu

bölümde Sevgi_(C2G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi her bir oturum için ayrı ayrı yapılmış ve sunulmuştur.

Sevgi_(C2G1)' nin 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 150' de gösterilmiştir.

Tablo 150

Sevgi_(C2G1)' nin cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X								X		
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.									X		

Sevgi_(C2G1) cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulan sorular için genel olarak kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. 5 ve 4+3' ün sorulduğu sorularda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda, cebirsel olarak verilmiş olan ifadelerin karşılaştırılması istenen soruda ise aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.

Sevgi_(C2G1)' nin 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 151' de gösterilmiştir.

Tablo 151

Sevgi_(C2G1)' nin geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		X
Aksiyomatik formal dünya			

Sevgi_(C2G1)' nin geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı ve Pisagor Bağıntısı ile ilgili sorulara kavramsal somut dünya boyutunda, üçgen eşitsizliği ile ilgili soruda ise nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda cevaplar verdiği görülmüştür.

Sevgi_(C2G1)' nin 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluştururken geliştirdiği matematiksel süreçlerin değerlendirilmesi Tablo 152' deki gibidir.

Tablo 152

Sevgi_(C2G1)' nin gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiomatik formal dünya		

Sevgi_(C2G1) yapılan görüşmelerin üçüncü oturumunda günlük yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor bağıntılarını oluşturma sürecinde kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Yapılan görüşmeler sonucunda Sevgi_(C2G1)' nin matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 153' deki gibidir.

Tablo 153

Sevgi_(C1G2)' nin matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	($a+3b$ ifadesi için) “Şimdi bir kırmızı kalemimiz var. 3 tane de mavi kalemimiz var. Bunların toplamını gösteriyor.”

	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmayı istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması

Yapılan görüşmeler değerlendirildiğinde $Sevgi_{(C2G1)}$ 'nin verilen ifadeleri sözlü olarak açıklama becerisini gösterdiği ama yazılı dil ve görsel dil kullanımında hatalar yaptığı belirlenmiştir. Sembolik dil becerilerini kullanırken güçlük çekmiştir. İfadelere uygun sembolik ifade yazarken ise birçok hata yaptığı görülmüştür. Kendi tanımlamalarını yapamadığı, derste öğrendiği şekilde zihninde daha önceden var olan bilgilere bağlı kaldığı görülmüştür. Bu anlamda matematiksel dil becerileri kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

$Sevgi_{(C2G1)}$ ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

$Sevgi_{(C2G1)}$, sözel olarak verilen bir ifade için cebirsel ifade yazmakta zorlanmıştır. Bir sayının 2 eksiğini ifade ederken karesini almak gerektiğini ya da a ve b ile toplamının ab ifadesini oluşturduğunu belirtmiştir. Cebirsel olarak verilen ifadeleri düşünürken sayı değerleri vererek açıklama eğilimi göstermiştir. Ayrıca, ifadeleri cebirsel olarak açıklaması beklenen sorularda hep derste öğrendiği iki cebirsel ifadenin çarpımını gösterdiği belirlenmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(“İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.” ifadesini açıklarken)

$Sevgi_{(C2G1)}$: Doğru değildir.

Araştırmacı: Neden?

$Sevgi_{(C2G1)}$: Bir dakika. Bence doğru. Şimdi şöyle 1 ile 3'ün çarpımı 3'tür tek sayı oldu. 7 ile 9'un çarpımı 63'tür bu da bir tek sayı.

Araştırmacı: Her zaman doğru mudur?

$Sevgi_{(C2G1)}$: Evet.

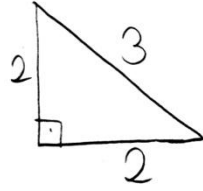
Araştırmacı: Cebirsel olarak gösterir misin?

$Sevgi_{(C2G1)}$: Tabi ki. Şöyle bir sayıyla başka bir sayıyı çarparsak tek sayıdır.

Araştırmacı: Peki a tek bir sayı mıdır?

Araştırmacı: y dediğin nedir?

Sevgi_(C2G1): 3 dik açının karşısındaki kenar. Bunlar farklı gelmiş oldu.



$$4^2$$

$$2^2 + 2^2 = 8$$

$$x^2 + x^2 = x^4$$

$$y^2 = y^2$$

Şekil 71. Sevgi_(C2G1)'nin Pisagor Bağıntısı'na yönelik sembolik gösterimi

Sevgi_(C2G1) bir dik üçgen çizerek dik kenar uzunluklarına kendi sayı değerleri vermiştir. Ardından dik kenar uzunluklarının kareleri toplamını göstermiş ve üçüncü kenar uzunluğuna verdiği sayı değerine eşit olup olmadığını kontrol etmiştir. Düşünme süreci içerisinde verilen sözel ifadenin yanlış olduğunu belirterek, ifadenin yanlışlığını sembolik olarak göstermeye çalışmıştır. Bu süreçte x^2 ile x^2 'nin toplamının x^4 olacağını belirtmiştir. Dolayısıyla dil kullanımı açısından da üslü ifadelerin toplamı açısından da hata yapmıştır. Sevgi_(C2G1) Pisagor Bağıntısı'na gerçek yaşam durumu içerisinde de oluşturamamış ve açıklayamamıştır. Sonuç olarak cebirsel düşünme düzeyi ikinci düzey, geometrik düşünme düzeyi birinci düzey olan Sevgi_(C2G1)'nin genel olarak kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirdiği belirlenmiştir.

4.3.4.4. Yasin_(C2G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri 2. düzey olan Yasin_(C2G2)'nin matematik dersi başarı ortalaması 90' dır. Bu bölümde Yasin_(C2G2) ile yapılan görüşmelerde her bir oturum ayrı ayrı değerlendirilmiş ve sunulmuştur.

Yasin_(C2G2)'nin 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 154'de gösterilmiştir.

Tablo 154

Yasin_(C2G2)'nin cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X		X	X	X		X	X	X	X	X
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.				X			X	X	X	X	

Yasin_(C2G2) “Tek ve çift sayıların toplamı çift sayıdır.” ifadesinin yanlış olduğunu sembolik olarak göstermekte zorlanmıştır. Diğer tüm sorularda sembolik ifade oluşturabilmiş ve genel olarak sorularda aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir.

Yasin_(C2G2) ile yapılan görüşmeler neticesinde 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 155' deki gibidir.

Tablo 155

Yasin_(C2G2)' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		X X
Aksiyomatik formal dünya		X	

Yasin_(C2G2) bu bölümde sadece üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu açıklamakta zorlanmıştır. Üçgen eşitsizliğini hem sembolik olarak oluşturabilmiş hem de nedenini açıklayabilmiştir. Pisagor Bağıntısı' nı sembolik olarak yazmış; ancak, nasıl elde edildiğini açıklamakta zorlanmıştır.

Yasin_(C2G2)' in 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluştururken geliştirdiği matematiksel süreçlerin değerlendirilmesi Tablo 156' daki gibidir.

Tablo 156

Yasin_(C2G2)' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiyomatik formal dünya		

Yasin_(C2G2) gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmakta zorlanmış, kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir.

Yapılan görüşmeler sonucunda Yasin_(C2G2)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 157' deki gibidir.

Tablo 157

Yasin_(C2G2) ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi	X	$(a+3b)$ ifadesi için) "Bilinmeyen bir nesnenin farklı bir bilinmeyen nesnenin 3 katıyla toplanması."
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi		
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)	X	$-(n+7) \cdot 3$ $3n+21$
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmaması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		

Yasin_(C2G2)' in matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından matematiksel dil becerileri incelendiğinde nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir. Yasin_(C2G2) yazılı ve görsel dil becerilerini doğru biçimde kullanmakta güçlük çekmiştir.

Yasin_(C2G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Yasin_(C2G2) $4+3$ ' ün farklı nesnelerin toplamıyla elde edilen bir sayıyı gösterdiğini, bu nesnelerin de aynı nesneler olabileceğini belirtmesi dikkat çeken bir durumdur. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(4+3 ifadesini açıklarken)

Yasin_(C2G2): *4 tane bir şeyin farklı ya da aynı 3 tane şeyle toplanması birleştirilmesi yani. Farklı bir sayı meydana getiriyorlar. 7' yi oluşturuyorlar.*

Araştırmacı: *Örnek verir misin?*

Yasin_(C2G2): *Bu yazdıklarım meyve mesela. Bunlar da farklı bir şekil. Bunlar 4 tane bunlar da 3 tane. Birleşince 7 tane farklı şekil oluşuyor.*

Araştırmacı: *Peki farklı nesneler mi olması gerekir?*

Yasin_(C2G2): *Aynı şeyleri de toplayabiliriz.*

Görüşmelerde devam eden süreçte cebirsel olarak düşündüğünde farklı sembollerin farklı nesneleri göstermek için kullanıldığını söylemiştir. Yasin_(C2G2) ardışık iki sayıyı cebirsel olarak gösterilmiştir. Düşünme süreci aşağıdaki gibidir.

(“Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.” ifadesini açıklarken)

Yasin_(C2G2): *a' nın ardışığı b olsa. Ama bunun ardışık olduğunu belirtmek gerekiyor. a' nın ardışığını nasıl belirtebilirim? Hmm.. $a+1$ olarak.*

Araştırmacı: *Toplamlarını nasıl gösterirsin?*

Yasin_(C2G2): *Düzenlersek $a+a+1$ i $2a+1$ olur.*

Araştırmacı: *Bu ifade tek sayıyı mı çift sayıyı mı gösterir?*

Yasin_(C2G2): *Tek sayıyı.*

Araştırmacı: *Neden?*

Yasin_(C2G2): *Yani sonucunda yine tek bir sayı çıkmalı. Öyle düşündüm.*

Araştırmacı: *Çift sayıyı gösteremez mi?*

Yasin_(C2G2): *Deneyelim. Mesela a, 5 olsa. $2a+1$ den 11 eder. O da tek sayı.*

Düşünme süreci içerisinde tek sayıyı cebirsel olarak ifade edebilmiştir. Diğer sorularda ise çift sayıyı cebirsel olarak ifade edememiştir. Soruları cevaplandırırken önce sayılarla doğruluğunu göstermiş, ardından veriler için cebirsel ifadeler oluşturmuştur. Ancak, cebirsel ifadelerle çarpma işlemini gösterirken hatalar yapmıştır.

$$2x+1, 2y+1 = 2x, 2y+2$$

Şekil 72. Yasin_(C2G2)' in iki cebirsel ifadenin çarpımını gösterme süreci

Yasin_(C2G2) iki cebirsel ifadenin çarpımını gösterirken değişkenli terimleri çarpmış ve sabit terimleri toplamıştır. Dolayısıyla cebirsel ifadelerle çarpma işlemine dair eksik bilgilerinin olduğunu düşünülmüştür. Yasin_(C2G2)' in bir dörtgen için kare ile ilgili bir özellik verilmediği halde şeklinden dolayı kare olarak düşündüğü görülmüştür. Üçgeni, “*üç kenarın hiç boşluk kalmayacak şekilde birleşmesi*” şeklinde tanımlamıştır. Sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğini önce derste öğrendiği bilgileri kullanarak açıklamaya çalışmıştır. Ardından, belli uzunluklarda üçgenler oluşturmaya çalışarak üçgen eşitsizliğine dair düşünme süreci geliştirebilmiştir. Üçgen eşitsizliğine dair ispat sürecini ifade edebilmiştir. Gerçek yaşam durumu içerisinde yer alan üçgen eşitsizliğini ise oluşturamamıştır. Yine derste öğrendiği bilgilerden yola çıkarak açıklama yapmaya çalışmıştır. Benzer şekilde sözel olarak verilen ifadede yer alan Pisagor Bağıntısı' nı da mevcut bilgi yapılarını kullanarak ifade etmeye çalışmıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde ise soruda istenene uygun şekil çizemediği için Pisagor Bağıntısı' na yönelik düşünme süreci geliştirememiştir.

4.3.4.5. Rüzgar_(C3G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Rüzgar_(C3G1)' in matematik dersi not ortalaması 71, cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey ve geometrik düşünme düzeyi birinci düzey olarak belirlenmiştir. Bu bölümde Rüzgar_(C3G1) ile yapılan görüşmelerde her bir oturum ayrı ayrı değerlendirilmiş ve sunulmuştur.

Rüzgar_(C3G1)' in 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 158' de gösterilmiştir.

Tablo 158

Rüzgar_(C3G1)' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X		X								

Aksiyomatik formal dünya

Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.

Rüzgar_(C3G1) cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulan sorular için genel olarak kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. 5, 4+3 ya da a+b' nin anlatılması istenen sorularda ise düşünme süreci işlemsel süreci ve kavramı birlikte sembolik olarak düşündüğü için nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Rüzgar_(C3G1) ile yapılan görüşmeler neticesinde 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 159' daki gibidir.

Tablo 159

Rüzgar_(C3G1)' ın geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiyomatik formal dünya			

Geometri öğrenme alanı ile ilgili sorular için Rüzgar_(C3G1) kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Sözel olarak verilen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' sı için sembolik ifadeyi oluşturamamıştır. Cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey olarak belirlenen Rüzgar_(C3G1)' ın verilen sözel ifadeyi sembolik ifadeye dönüştürememesi dikkat çeken bir durumdur.

Rüzgar_(C3G1)' ın 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluştururken geliştirdiği matematiksel süreçlerin değerlendirilmesi Tablo 160' daki gibidir.

Tablo 160

Rüzgar_(C1G2)' ın gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2

Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiyomatik formal dünya		

Sözel olarak verilen ifadede üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı açıklayamayan Rüzgar_(C3G1) gerçek yaşam durumu içerisinde de açıklamakta zorlanmıştır. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirerek diğer boyutlara ulaşamamıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Rüzgar_(C3G1)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 161' deki gibidir.

Tablo 161

Rüzgar_(C3G1)' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Dil Becerileri	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözel olarak tasvir edilmesi	X	(4+3 ifadesi için) “4 elmam var. 3 tane daha alırım. 7 elmam olur.”
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi		
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)		
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmaya istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması		

Rüzgar_(C3G1) matematiksel dil becerileri açısından ifadeleri daha çok yazılı olarak açıklamaya çalışmıştır. Ancak, yazılı dil becerilerinde birçok hata yapmıştır. Sözlü dil becerilerini daha doğru kullanabilmiştir. Görsel ve sembolik dil becerileri yetersiz kalmıştır. Dil becerileri matematiğin üç dünyası boyutları açısından değerlendirildiğinde kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Rüzgar_(C3G1) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Rüzgar_(C3G1), yazılı dil ve sembolik dil becerilerini gösterirken birçok dil hatası yapmıştır. Diğer öğrencilerde de var olan hatalardan biri olan işlemsel süreçte eşitlikleri devam ettirerek tüm işlemleri birbirine eşitlemiştir.

$$5+2=7 \text{ } 4=28$$

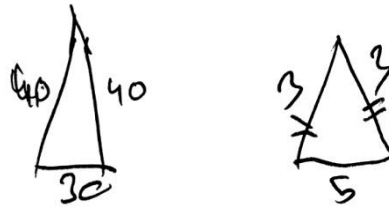
Şekil 73. Rüzgar_(C3G1)' in yazılı dil kullanımına dair hatası

Rüzgar_(C3G1)' in iki tek sayının çarpımının tek sayı oluşturduğunu cebirsel olarak açıklaması istenirken önce $(1+x)$ ' den $(1+x)$ ' i çıkarmaya çalıştığı görülmüştür. Fakat, ne yaptığını anlatırken toplama işlemi yaptığını söylemiştir.

$$(1+x) - (1+x) = 1 \quad 1+x^2 + 1x+x^2$$

Şekil 74. Rüzgar_(C3G1)' in iki cebirsel ifadenin çarpımını gösterme süreci

Rüzgar_(C3G1)' in çarpma işlemi için eksi sembolünü kullandığı, iki cebirsel ifadenin çarpımı için parantez içlerini sırasıyla çarpmak istediği ve sonuç olarak toplama işlemi yaptığını ifade ettiği görülmüştür. Bu anlamda sembolik ifade yazmakta zorlandığı ve iki cebirsel ifadenin çarpımı ile ilgili hatalar yaptığı belirlenmiştir. Rüzgar_(C3G1)' in $2x$ gibi bir ifadede x yerine gelmesi gereken sayıyı düşünürken iki basamaklı bir sayı oluştuğunu ifade ettiği belirlenmiştir. Örnek olarak x ' i 4 olarak düşündüğünde $2x$ ' in 24 sayısını gösterdiğini söylemiştir. Böyle bir ifadenin yer aldığı her soruda bu yanılgıyı gösterdiği belirlenmiştir. Üçgeni tanımlarken üçgenin özellikleri yerine iç açılarının ölçüleri toplamını, alanının nasıl hesaplandığını belirttiği görülmüştür. Ayrıca üçgenle ilgili tüm sorular için ikizkenar üçgen çizdiği belirlenmiştir. Araştırmacı ile birlikte kenar uzunlukları birbirinden farklı bir üçgen oluşturduğunda ise bunu kabul etmeyip bir üçgenin mutlaka iki kenar uzunluğunun eşit olması gerektiğini söylemiştir.



Şekil 75. Rüzgar_(C3G1)' in üçgeni sürekli ikizkenar üçgen olarak göstermesi

Sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğini açıklaması istendiğinde ise bir ikizkenar üçgende kenar uzunluklarına kendi sayı değerleri vermiştir. Ardından iki kenar uzunluğunun toplamından üçüncü kenar uzunluğunu çıkarmıştır. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Sözel olarak verilen ifadede yer alan üçgen eşitsizliğini açıklarken)

Rüzgar_(C3G1): 50 ve 50 olsun. Toplamları 180. Burası 80 olur. Bundan bunu çıkarırsak (80' den 50' yi) 30. Bu büyüktür bundan (50' nin 30' dan büyük olduğunu kastediyor). 80 ve 50' nin farkı ama ikisini alırsak bu büyük olur. 50 ile 50' yi toplarsam 100 eder. Bundan bunu çıkarırsam 20 olur. Bu büyük olur.



Şekil 76. Rüzgar_(C3G1)' in üçgen eşitsizliğini ifade etme süreci

Rüzgar_(C3G1), önce üçgenin kenar uzunlukları yerine üçgenin iç açı ölçüleri üzerinden bir düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Sözel olarak verilen ifadeden yola çıkarak üçgen eşitsizliğini açıklayamayan Rüzgar_(C3G1), gerçek yaşam durumu içerisinde de eşitsizliği oluşturamamıştır. Pisagor Bağıntısı' nın sözel olarak verilen ifadesini anlayamadığını belirtmiştir. Gerçek yaşam durumu içerisinde de oluşturamamıştır. 8. sınıf öğretim programı içerisinde elde etmeleri gereken kazanımlar olmasına rağmen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturamadığı ve sembolik olarak ifade edemediği belirlenmiştir.

4.3.4.6. Belgin_(C3G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey, geometrik düşünme düzeyi ise ikinci düzey olarak belirlenen Belgin_(C3G2)' in matematik dersi not ortalaması 98' dir. Bu bölümde Belgin_(C3G2) ile yapılan görüşmelerde her bir oturum ayrı ayrı değerlendirilmiş ve sunulmuştur.

Belgin_(C3G2)' in 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 162' de gösterilmiştir.

Tablo 162

Belgin_(C3G2)' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Boyutları		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal dünya	somut	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel sembolik dünya	süreçsel	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
Aksiyomatik dünya	formal	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.							X	X	X		X

Belgin_(C3G2)' in örüntü sorusu dışındaki tüm sorularda nesnel süreçsel sembolik dünya düşünme boyutuna ulaştığı, cebirsel ifadeleri karşılaştırması istenen sorularda ise aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirdiği belirlenmiştir. Sözel ifadelere uygun matematiksel ifadeler yazabilirken, bu ifadeleri cebirsel olarak açıklamakta zorlanmıştır. Genel anlamda işlemsel süreci ve kavramı sembolik olarak düşünebildiği söylenebilir.

Belgin_(C3G2) ile yapılan görüşmeler neticesinde 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 163' deki gibidir.

Tablo 163

Belgin_(C3G2)' in geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		X
Aksiyomatik formal dünya	X		

Belgin_(C3G2) üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını bulurken aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirirken, Pisagor Bağıntısı ile ilgili soruda sayısal değerlerle ifadenin işlemsel sürecini göstermiş ve sözel ifadeye uygun matematiksel ifadeyi yazabilmiştir. Üçgen eşitsizliği için sembolik ifade oluşturamamıştır.

Belgin_(C3G2)' in 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluştururken geliştirdiği matematiksel süreçlerin değerlendirilmesi Tablo 164' deki gibidir.

Tablo 164

Belgin_(C1G2)' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya		
Aksiomatik formal dünya		

Belgin_(C3G2)' in gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmadağı belirlenmiştir. Düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Belgin_(C3G2)' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 165' deki gibidir.

Tablo 165

Belgin_(C3G2)' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Becerileri	Dil	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi		X	$(a+3b \text{ için})$ "Günlük hayattan nesnelerle anlatabilirim. Bir tane çiçekle 3 tane elmanın toplamı gibi."
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi			
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi			
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)		X	$4x+8 = 8+4x = 2(2x+4)$ $4x+8$
Aksiomatik formal	Ulaşılmayı istenen kavram ya da nesnelerin kendi			

dünya cümleleri ile ifade edilmesi,
tanımlanması

Belgin_(C3G2), soruları cevaplandırırken yazılı ve görsel dil becerilerini doğru biçimde kullanamamıştır. Sözlü ifadelerde doğru olarak ifade ettiği süreçleri yazılı dilde gösterememiştir. Sembolik dil becerilerinin yeterli düzeyde olduğu düşünülmüştür. Matematiksel dil becerilerinin nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer aldığı söylenebilir.

Belgin_(C3G2) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Ardışık sayıları, tek sayıyı ve çift sayıyı cebirsel olarak gösterebildiği belirlenmiştir. Bir tek sayı ve bir çift sayı toplamının tek sayıyı göstereceğini de açıklayabilmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(“Bir tek sayı ve bir çift sayının toplamı tek sayıdır.” ifadesini açıklarken)

Belgin_(C3G2): $2a+1$ tek sayıyı gösteriyordu ama burada nasıl göstereceğim? a ve b desem. a ve b her sayı olabilir.

Araştırmacı: Çift sayıyı cebirsel olarak nasıl gösterirsin?

Belgin_(C3G2): 2 ile çarpımı mı acaba? Bir sayıyı 2 ile çarpsak. Çift sayı. O zaman tek sayı yerine $2a+1$, çift sayı yerine de $2a$ yazarsam. $2a+1$ oldu.

Araştırmacı: $2a+1$ ile $2a$ 'yı nasıl topladın? Açıklar mısın?

Belgin_(C3G2): Yok. Bu değil. $4a+1$ olmalı. Bu da tek sayıyı gösterir.

Araştırmacı: Neden?

Belgin_(C3G2): a yerine bir sayı düşüsek. 4 ile çarpıp 1 ile toplarsak tek sayı gelir.

$$- 1 + 2 = 3 \rightarrow \text{Tek}$$

$$2a + 2a + 1 = 2a + 1$$

$$4a + 1 = 4a + 1$$

Şekil 77. Belgin_(C3G2)' in bir tek sayı ve bir çift sayının toplamının tek sayı oluşturacağına dair cebirsel açıklaması

Belgin_(C3G2), $2x$ ifadesinde 2 ile hangi sayı çarpılırsa çarpılsın sonucunun çift sayıyı göstereceğini belirtmiştir. İki cebirsel ifadeyi toplayabilen Belgin_(C3G2), iki tek sayının çarpımını gösterirken ise hata yapmıştır. $(2a+1)$ ile $(2a+1)$ ' in çarpımının $(4a^2+1)$ olacağını söylemiştir.

$$2a+1 \cdot 2a+1 = 4a^2 + 1$$

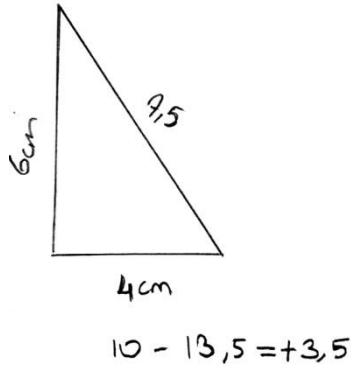
Şekil 78. Belgin_(C3G2)' in iki cebirsel ifadenin çarpımına dair cebirsel gösterimi

Belgin_(C3G2), sorularda işlem önceliğine dikkat etmiş ve çarpma işleminin dağılma özelliğini ifade edebilmiştir. Ancak, iki cebirsel ifadenin çarpımında hata yapmıştır. Diğer öğrencilerden farklı olarak $(n+7)$ ile 3 ' ün çarpımını gösterirken farklı cebirsel ifadeler oluşturabilmiştir.

$$\begin{aligned} 3n + 21 \\ 3n + 7 \cdot 3 \\ 2\left(\frac{n}{2} \cdot 3\right) + 7 \cdot 3 \\ 1,5 \cdot 7n + 1,5 \cdot 7n \end{aligned}$$

Şekil 79. Belgin_(C3G2)' in $(n+7)$ ile 3 ' ün çarpımını farklı gösteriş biçimleri

Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını gösterirken dik üçgen çizerek iç açılarının ölçülerini ölçmüş ve neden 180° olduğuna dair ispat süreci geliştirmiştir. Sözel olarak verilen üçgen eşitsizliğini oluşturmakta ise zorlanmıştır. Bir üçgen çizerek kenar uzunluklarını ölçmüştür. Ancak iki kenarın toplamından diğer iki kenarın toplamını çıkartarak belirlediği değer üçüncü kenardan kısa olduğunu söylemiştir. Bu açıdan ifadenin de yanlış olabileceğini belirtmiştir.



Şekil 80. Belgin_(C3G2)' in işlemsel süreçteki hatası

Belgin_(C3G2), matematiksel dil kullanımı açısından da 10 ile 13,5 arasındaki farkın $+3,5$ olacağını göstererek hata yapmıştır. Sözel olarak verilen ifadede üçgen eşitsizliğini

açıklamakta ve oluşturmakta zorlanan Belgin_(C3G2), gerçek yaşam durumu içinde verildiğinde ise derste işledikleri bir konu olduğunu belirtmiştir. Bu defa sayılarla ifadeyi gösterebildiği halde yine eşitsizliği sembolik olarak gösterememiştir. Ayrıca üçgen eşitsizliğinin neden bu şekilde ifade edildiğini açıklayamamıştır. Pisagor Bağıntısı' nı hem sözel ifadede hem de gerçek yaşam durumu içerisinde oluşturmakta zorlanmıştır. Sözel olarak verilen ifadede Pisagor Bağıntısı' nı sembolik olarak ifade etmiş; ancak, gerçek yaşam durumu içerisinde gösterememiştir.

4.3.4.7. Cansu_(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Cebirsel düşünme düzeyi ve geometrik düşünme düzeyi üçüncü düzey olan Cansu_(C3G3)' nun matematik dersi not ortalaması 95' dir. Bu bölümde Cansu_(C3G3) ile yapılan görüşmelerde her bir oturum ayrı ayrı değerlendirilmiş ve sunulmuştur.

Cansu_(C3G3)' nun 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 166' da gösterilmiştir.

Tablo 166

Cansu_(C3G3)' nun cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.				X	X	X	X	X	X		X

Cansu_(C3G3) örüntü sorusu dışındaki tüm sorularda en üst düşünme boyutuna ulaşmıştır. Cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulan sorularda aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirdiği görülmüştür. Verilen ifadelerin doğruluğunu sembolik olarak gösterebilmiş ve açıklayabilmiştir.

Cansu_(C3G3) ile yapılan görüşmeler neticesinde 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 167' deki gibidir.

Tablo 167

Cansu_(C3G3)' nun geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		
Aksiomatik formal dünya			

Cansu_(C3G3) geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını açıklarken zorlanmıştır. Kavramsal somut dünya boyutunda sınırlı kalan düşünme süreci, üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ile ilgili sorularda sözel ifadelere uygun sembolik ifade oluşturabildiği için nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna ulaşmıştır. Ancak, verilen ifadelerin neden doğru olduğunu açıklayamamıştır. Yani ispat süreci geliştirememiştir.

Cansu_(C3G3)' nun 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluştururken geliştirdiği matematiksel süreçlerin değerlendirilmesi Tablo 168' deki gibidir.

Tablo 168

Cansu_(C3G3) ' nun gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları	
	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	
Aksiomatik formal dünya	X	

Cansu_(C3G3) gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini oluşturabilmiş ve sembolik olarak ifade etmiştir. Aksiomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirmiş ve üçgen eşitsizliğini açıklayabilmiştir. Pisagor Bağıntısı için düşünme süreci ise kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. İfadede istenenlere uygun şekil çizememiş, dolayısıyla bağıntıya ulaşamamıştır.

Yapılan görüşmeler sonucunda Cansu_(C3G3)' nun matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 169' daki gibidir.

Tablo 169

Cansu_(C3G3)'nun matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Becerileri	Dil	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözel olarak tasvir edilmesi		X	(“Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.” ifadesini açıklarken) “Çünkü ardışık sayılar tek ve çift diye gidiyor. İki ardışık sayıyı toplarsak da tek sayı ile çift sayıyı toplamış oluyoruz. O da tek sayıyı vermeli.”
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		X	$2(2 \cdot 3 + 4) = 2 \cdot (10) = 20$
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi			
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)		X	$x^2 + y^2 = z^2$
Aksiyomatik formal dünya	Ulaşılmaya istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade edilmesi, tanımlanması			

Cansu_(C3G3)'nin matematiksel dil becerileri, matematiğin üç dünyası boyutları açısından değerlendirildiğinde nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda yer almıştır. İfadeleri sözlü ve yazılı olarak doğru bir şekilde açıklayabilmiştir. Görsel dil becerileri ise yetersiz kalmıştır. Sembolik ifade oluşturmada, cebirsal ifadeler arasındaki ilişkileri açıklamakta sembolik dili yeterli düzeyde kullanabilmiştir. Ancak, bazı sorularda aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirse de dil becerileri aksiyomatik formal dünya boyutunda yer almamıştır.

Cansu_(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Cansu_(C3G3), sembolik ifade oluşturmada zorlanmamasına rağmen $a+3b$ 'yi açıklarken önce bilinmeyenler yerine sayılar vererek göstermek istemiştir. Sayılar ile

toplama işlemini göstermek istemesi dikkat çeken bir durumdur. Ardından bir sayının 3 katının a kadar fazlası şeklinde ifadeyi sözel olarak açıklamış, a ve b' nin farklı nesneler olduğunu vurgulamıştır. Cansu_(C3G3)' nun ifadeleri açıklarken önce sayılarla denediği görülmüştür. Düşünme süreci içerisinde kavramsal somut dünyadan diğer düşünme boyutlarına geçiş yapmıştır. Tek sayı ve çift sayı için cebirsel ifade yazabilmiştir. Böylece sözel olarak verilen ifadeleri cebirsel olarak açıklayabilmiştir. İki tek sayının çarpımını gösterirken iki cebirsel ifadenin çarpımını doğru bir şekilde gösterebilmiştir.

$$(2a+1)(2a+1) = 4a^2 + 2a + 2a + 1$$

$$4a^2 + 4a + 1$$

Şekil 81. Cansu_(C3G3)' nun iki cebirsel ifadenin çarpımına dair cebirsel gösterimi

Cansu_(C3G3) örüntü sorusunda ilk olarak kolay bir yolu olduğunu söylemiş ama o kolay yol ile anlatmak istediğini ifade edememiştir. Ardından her bir adımdaki bilye sayısını düşünmüştür. Örüntüye uygun cebirsel ifade yazması istendiğinde ise önce $x+3$ ifadesini düşünmüş, ardından bu ifadenin uygun olmadığını belirtmiştir. Tekrar düşündüğünde ise $2x+1$ olabileceğini söylemiş; ancak bu ifadenin de doğru olmadığını göstermiştir. Doğru ifadeye ulaşamamıştır. Görüşmeden bir kesit aşağıdaki gibidir.

(Örüntü sorusuna dair)

Araştırmacı: Bu örüntünün 6. adımında kaç bilye vardır?

Cansu_(C3G3): Hepsinin aralarında 3 fark var. 4. adım, 5. adım, 6. adımı deneyerek yapabiliriz ama sanki daha kolay bir yolu var gibi.

Araştırmacı: Nedir o kolay yol?

Cansu_(C3G3): Şu an bulamadım. Dediğim gibi yaparsam 16 geldi.

Araştırmacı: Kaçınıcı adımda 25 bilye vardır?

Cansu_(C3G3): 9. adımda. 6. adımda 16 var 3 ekleyerek yaptım bir de 25' den 16' yı çıkarsam 9 olur. Üçer üçer gittiği için 9' u 3' e böldüm 3 adım oldu. 6' ya 3 ekledim.

Araştırmacı: Bu örüntüye uygun cebirsel ifade nedir?

Cansu_(C3G3): $x+3$ olabilir.

Araştırmacı: x nedir?

Cansu_(C3G3): Adımı. Şimdi böyle yaparsak 1. adımda 4 çıkıyor. 1. adımda 1 bilye var.

Hmm o zaman bu yanlış oluyor çünkü 3. adımda da $3+3$ den 6 oluyor. Yine olmuyor.

Araştırmacı: Neden 3 ile topladın?

Cansu_(C3G3): Çünkü aralarında 3 fark var. Mesela bu 1. adım. 1. adımda x dersek $2x+(-1)$ dersek diye düşündüm. Teker teker $-1,0,1,2$ denedim. 3. adımda $2.3+1$ den 7 oldu. Yine olmadı. Bulamadım.

1. adım $\rightarrow 1 + 0 = 1$

$$2 \cdot 1 + (-1) = 2 - 1 = 1$$

2. adım

$$2 \cdot 2 + 0 = 4$$

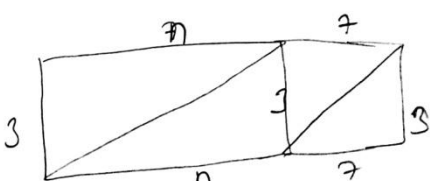
3. adım

$$2 \cdot 3 + 1 = 7$$

Şekil 82. Cansu_(C3G3)'nin örüntü kuralı oluşturma süreci

Cansu_(C3G3) nesnel süreçsel sembolik dünyaya doğru düşünme süreci geliştirse de örüntü kuralını sözel ve sembolik olarak doğru bir şekilde ifade etmekte zorlanmıştır. Bu anlamda düşünme boyutu kavramsal somut dünya ile sınırlı kalmıştır. Alanı $(n+7)$ ile 3'ün çarpımı olarak verilen dikdörtgensel bölgenin alanına dair farklı cebirsel gösterimler oluşturma sürecinde diğer öğrencilerden farklı bir düşünme süreci geçirmiştir.

$$3n + 21$$

$$\frac{3n}{2} + \frac{3n}{2} + \frac{21}{2} + \frac{21}{2} = \frac{6n}{2} + \frac{42}{2} = 3n + 21$$


Şekil 83. Cansu_(C3G3)'nin dikdörtgensel bölgenin alanını gösteren farklı cebirsel ifadeler oluşturma süreci

Cansu_(C3G3) dikdörtgeni üçgenlere ayırarak ayrı ayrı dik üçgenlerin alanlarını hesaplamış ve hepsini toplamıştır. Bulduğu ifadenin soruda verilen ifade ile eşit olduğunu göstermiş ve dikdörtgensel bölgenin alanı değişmeyeceği için bu ifadelerin de birbirine eşit olduğunu söylemiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasının bir kural olduğunu söyleyerek neden doğru olduğunu açıklayamamıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde uzunlukları deneyerek üçgen eşitsizliğine ulaşan ve doğruluğunu gösteren Cansu_(C3G3), sözel olarak verilen ifadede sadece sembolik ifade oluşturmuştur. Ayrıca sözel olarak verilen ifadede sayısal değerlerle ifadeyi açıklamıştır.

$$x+y > z$$

$$|x-y| < z$$

Şekil 84. Cansu_(C3G3)' nun üçgen eşitsizliğine dair sembolik gösterimi

Üçgen eşitsizliğinin sembolik gösteriminde mutlak değeri öğrenciler arasından bir tek Cansu_(C3G3) göstermiştir. Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini açıklarken önce Pisagor Bağıntısı ile karıştırmış ve dik üçgen çizerek kenar uzunluklarının karelerini almıştır. Ardından hata yaptığını düşünerek üçgen eşitsizliğini ifade etmiştir. Ancak, eşitsizliği oluşturmaya yönelik bir düşünme süreci geliştirememiştir. Pisagor Bağıntısı' nı ise hem sözel olarak verilen ifadede hem de gerçek yaşam durumu içerisinde açıklayamamıştır. Sözel olarak verilen ifadeyi okuduğunda bildiği bir konu olduğunu söyleyerek 3-4-5 özel üçgeni üzerinden bağıntıyı göstermiş, sembolik olarak ifade etmiş ama neden bu şekilde ifade edildiğine dair bir açıklama yapmamıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde ise istenenlere uygun şekil çizememiştir.

4.3.4.8. Asaf_(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi

Asaf_(C3G3) cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri üçüncü düzey olarak belirlenen ve matematik dersi not ortalaması 100 olan bir öğrencidir. Bu bölümde Asaf_(C3G3) ile yapılan görüşmelerde her bir oturum ayrı ayrı değerlendirilmiş ve sunulmuştur.

Asaf_(C3G3)' in 1. oturumda cebir öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların matematiksel düşünme boyutları açısından değerlendirilmesi Tablo 170' de gösterilmiştir.

Tablo 170

Asaf_(C3G3)' in cebir ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kavramsal somut dünya	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X		X	X	X		X	X	X	X	
Aksiyomatik formal dünya	Bu sorularda bu düşünme boyutu ölçülmemektedir.				X			X	X	X	X	

Asaf_(C3G3)' ın cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey olmasına rağmen cebir öğrenme alanı ile ilgili soruların üçünde düşünme süreci kavramsal somut dünya boyutunda sınırlı kalmıştır. 3. soru iki bilinmeyen arasında cebirsel ilişki kurması gereken bir sorudur. 7. soru ifadenin yanlış olduğunu göstermesi gereken bir sorudur ve bu ifade yanlış olduğu için cebirsel olarak gösterilemeyeceğini söylemiştir. 12. soru ise dikdörtgensel bölgenin alanı için farklı cebirsel ifadeler bulması istenen sorudur. Asaf_(C3G3) diğer sorularda istenen düşünme boyutlarına ulaşabilmiştir.

Asaf_(C3G3) ile yapılan görüşmeler neticesinde 2. oturumda geometri öğrenme alanı ile ilgili sorulara verdiği cevapların değerlendirilmesi Tablo 171' deki gibidir.

Tablo 171

Asaf_(C3G3)' ın geometri ile ilgili geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları		
	2	3	4
Kavramsal somut dünya	X	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Bu soruda bu boyut ölçülmemektedir.		X
Aksiyomatik formal dünya	X		

Geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda ise sadece üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu gösterebilmiş ve aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağntı' sı için sembolik ifadeleri oluşturabilmiş; ancak neden doğru olduklarına ilişkin açıklama yapamamıştır. Bu iki soru için düşünme süreci nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda sınırlı kalmıştır.

Asaf_(C3G3)' ın 3. oturumda gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağntısı' nı oluştururken geliştirdiği matematiksel süreçlerin değerlendirilmesi Tablo 172' deki gibidir.

Tablo 172

Asaf_(C1G2)' ın gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağntısı ' nı oluşturmada geliştirdiği matematiksel düşünme boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Soru Numaraları

	1	2
Kavramsal somut dünya	X	X
Nesnel süreçsel sembolik dünya	X	X
Aksiomatik formal dünya	X	X

Gerçek yaşam durumu içerisinde $Asaf_{(C3G3)}$ sözel olarak verilen ifadelerde açıklamakta zorlandığı üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı oluşturabilmiş ve sembolik ifadelerini gösterebilmiştir. Bu anlamda aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru bir düşünme süreci geliştirdiği belirlenmiştir.

Yapılan görüşmeler sonucunda $Asaf_{(C3G3)}$ ' in matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler Tablo 173' deki gibidir.

Tablo 173

$Asaf_{(C3G3)}$ ' in matematiğin üç dünyası boyutları açısından matematiksel dil becerileri

Matematiğin üç dünyası boyutları	Matematiksel Becerileri	Dil	Dil Becerilerinin Yer Aldığı Boyutlar	Gösterdiği Dil Becerilerine Örnekler
Kavramsal somut dünya	Nesnelerin, kavramların sözlü olarak tasvir edilmesi		X	($a+3b$ ifadesi için) “Şimdi eşitlik yok burada. Mesela 1 tane kalemimiz var. 3 tane de silgimiz var. Bunlar farklı şeyler. Toplayamazsınız. Bu yüzden bu böyle kalıyor. 1 elma ile 3 armutun da toplamı gibi.”
	Nesnelerin, kavramların yazılı olarak tasvir edilmesi		X	$8 + 4.3 = 8 + 12 = 20$
	Nesnelerin, kavramların görsel olarak tasvir edilmesi			
Nesnel süreçsel sembolik dünya	Sözel ifadelerin sembolik ifadelere dönüştürülmesi (cebirsal ifadelerin, denklemlerin, eşitsizliklerin oluşturulması)		X	$2(2x+4)$ $4x+8$
Aksiomatik formal dünya	Ulaşılmaması istenen kavram ya da nesnelerin kendi cümleleri ile ifade			

Asaf_(C3G3)'ın sözlü ve yazılı dil becerileri yeterli düzeydedir. Ancak, görsel dil becerileri açısından hatalar yapmıştır. Sembolik ifade oluşturma sürecini başarıyla göstermiş, cebirsel ifadeler arasındaki ilişkileri sembolik olarak gösterebilmiştir. Aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirdiği sorularda dil becerileri aynı düzeyde yer almamıştır. Bu anlamda dil becerileri açısından nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

Asaf_(C3G3) ile yapılan görüşmelerin değerlendirilmesi şu şekildedir:

Asaf_(C3G3)'ın sözel ifadelere uygun cebirsel ifadeler yazabildiği belirlenmiştir. $a+3b$ gibi bir ifadede harflerin farklı nesneleri gösterdiğini belirtmiştir. Ardışık sayılar, tek sayı ve çift sayı kavramları için cebirsel ifadeler yazabilmiştir. Çift sayının hem $2x$ olarak hem de $x/2$ olarak gösterilebileceğini söylemiştir.

(“x çift sayı ise $2x+5$ tek sayıdır.” ifadesini açıklarken)

Asaf_(C3G3): x çift ise. Hmm. x diyebiliriz ya da $x/2$. $2x$ dersek $2x+5$ yerine yazarsak.

Bir dakika x değil de a diyelim mesela. x yerine de $2a$ dersek düzenlersem $4a+5$ olur.

Araştırmacı: $4a+5$ ifadesi tek sayıyı mı çift sayıyı mı temsil eder?

Asaf_(C3G3): Buradan 4 ile bir sayının çarpımı çift sayı, 5 ile toplarsak da tek sayı gelir.

$$\begin{array}{l} 2(2a) + 5 \\ 4a + 5 \end{array}$$

Şekil 85. Asaf_(C3G3)'ın çift sayıya dair sembolik gösterimi

Asaf_(C3G3)'ın cebirsel olarak verilen ifadeleri karşılaştırırken önce bilinmeyenler yerine sayı değerleri vererek karşılaştırma yaptığı, ardından cebirsel olarak ifadeleri karşılaştırdığı belirlenmiştir. Örüntü sorusunda her bir adımdaki bilye sayısını göstererek istenen adımlardaki bilye sayılarını bulmuş ve örüntünün kuralını sembolik olarak doğru ifade etmiştir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını açıölçer yardımıyla herhangi bir üçgen üzerinde gösterebilmiştir. Sözel ifadeleri verilen üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı için bir üçgen üzerinde kenar uzunluklarına sayı değerleri vererek göstermiş; ancak, ispat süreçlerine dair bir açıklama yapamamıştır. Sadece sözel ifadelere uygun sembolik ifadeleri gösterebilmiştir. Gerçek yaşam durumu içerisinde ise hem üçgen eşitsizliği hem de Pisagor Bağıntısı' nı oluşturabilmiştir. Üçgen eşitsizliği için çeşitli kenar uzunluklarını deneyerek ve ölçerek doğruluğunu göstermiştir. Eşitsizliği sembolik olarak ifade edebilmiştir. Pisagor

Bağıntısı için gerçek yaşam durumu içinde istenen verilere yönelik şekil çizebilmiştir. Görüşme süreci aşağıdaki gibidir.

(Gerçek yaşam durumu içerisinde Pisagor Bağıntısı' nı oluştururken)

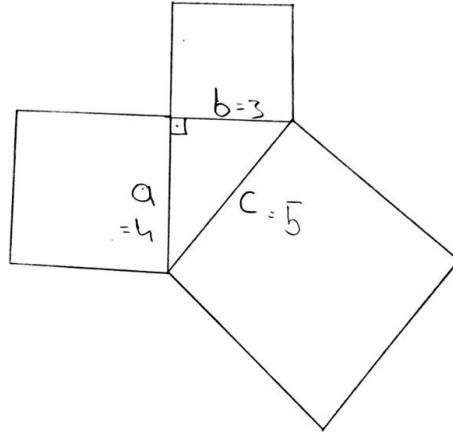
Asaf_(C3G3) : Şimdi 4 odalı bir ev tasarlayacak. Evin üç odası kare olacak ve birer köşelerinden çakışacak. 4. odası ise arada kalacak. Çizersem. Arada kalan kısım üçgen olurdu. 4 oda var üçü kare bir tanesi de üçgen olması gerekir. Sanırım dik üçgen oluyor.

Araştırmacı: Peki birbirine dik olan karelerden birinin bir kenarı 3cm, diğerinin bir kenarı 4cm ise üçüncü karenin bir kenar uzunluğu için ne söyleyebilirsin?

Asaf_(C3G3): (Çiziyor ve ölçüyor). 5 cm olması gerekiyor. Hmm 3-4-5 üçgeni oluyor.

Araştırmacı: Peki karelerin alanları arasında bir ilişki var mıdır?

Asaf_(C3G3) : Bunun kenarı 3 çarpı 3' den 9 oldu. Bunun alanı 4 çarpı 4' den 16 oldu. Bunun alanı 5 çarpı 5' den 25 oldu. Hmm dik olan karelerin alanları toplamı bunun alanına eşit. O zaman dik üçgenin dik kenarlarının karelerinin toplamı diğer kenarın karesine eşit olmalı. Pisagor bu.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bir dik üçgende dik kenarlarının karesinin toplamı, diğer kenarın karesine eşit olmalıdır.

Şekil 86. Asaf_(C3G3)' ın gerçek yaşam durumu içerisinde Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma süreci

Asaf_(C3G3) hem öğrendiği bilgileri hem de düşünme sürecini birleştirerek ifadeleri açıklamıştır. İspat süreçlerini de ifade edebilmiş, böylece düşünme süreci birçok soruda aksiyomatik formal dünya boyutunda değerlendirilmiştir.

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Tartışma

Bireylerin matematikte zorluk yaşamalarının en büyük nedeni soyut kavramların varlığıdır. Matematikte yer alan soyut kavramları anlamlandırma sürecinde önce duyularımızı kullanırız. Etrafımızdaki nesneler yardımıyla soyut kavramları önce somut olarak düşünür, ardından zihin şemalarımız içerisinde anlamlandırırız. Kavramları zihinde oluşturma sürecinde kendi matematiksel düşünme süreçlerimizi geliştiririz. Bu tez çalışmasında da ortaokul öğrencilerinin geliştirdikleri matematiksel düşünme süreçlerini ve matematiksel dil becerilerini matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından incelemek amaçlanmıştır. Farklı cebirsel ve geometrik düşünme becerilerine sahip öğrencilerin matematiksel düşünme boyutları incelenmiştir. Ayrıca, matematiksel düşünme boyutları içerisinde ortaya çıkan KİSS düzeyleri de değerlendirilmiştir. Alanyazın incelendiğinde bireylerin matematiksel düşünme süreçlerinin APOS, SOLO taksonomisi, RBC teorisi gibi farklı teorik çerçeveler açısından incelendiği görülmüştür (Açan, 2015; Açıl, 2015; Bağdat, Saban, 2014; Köse, 2018; Mudrikah, 2016; Türnüklü, Özcan, 2014; Yeşildere, 2006). Çok az sayıda araştırmancının (Hannah, Stewart, Thomas, 2015; Jukić, Brückler, 2014; Kashefi, Ismail, Yusof, 2010; Kidron, 2008; Tall, Lima, Healy, 2014; Vandebrouck, 2011) matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi temelinde gerçekleştirildiği belirlenmiştir. Dolayısıyla bu tez çalışmasının ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin ve matematiksel dil becerilerinin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından incelenmesi temelinde alanyazına farklı bir bakış açısı getirdiği düşünülmektedir.

Tez çalışmasında uygulama yapılan ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri birinci düzeyde yer almıştır. Cinsiyet ve sınıf düzeyleri açısından da incelendiğinde aynı sonucun var olduğu görülmüştür. Öte yandan, sınıf düzeyleri açısından 8. sınıf öğrencilerinin en çok birinci düzey cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerine sahip olmalarına rağmen cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey, geometrik düşünme düzeyi de birinci düzey olan öğrencilerin yüzdesinin bu çoğunluğa yakın olduğu görülmüştür. Öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri geometrik düşünme düzeylerine göre daha yüksektir. Yıldırım (2016) da 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin beklenen düzeyde olmadığını belirtmiştir. Gündoğdu Alaylı (2012) tez çalışmasında ortaokul öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin birinci düzeyde yığılma gösterdiği bulgusunu elde etmiştir. Fidan (2009) ise 5. sınıf öğrencilerinin geometrik

düşünme düzeylerinin sıfıncı düzeyde yığılma gösterdiğini belirtmiştir. Oral, İlhan ve Kınay (2013) 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel ve geometrik düşünme düzeylerinin ilişkili olduğunu araştırmaları ile ortaya koymuşlardır. Öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin birinci düzeyde yer aldığını, cebirsel düşünme düzeylerinin ise sıfıncı düzeyde yer aldığını belirtmişlerdir. İlgili alanyazın ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin ve geometrik düşünme düzeylerinin üçüncü düzeyde yer alması gerektiğini belirtmektedir (Breen, 2000; Gülpek, 2006; Gündoğdu Alaylı, 2012; Fidan, 2009; Fuys, 1985; Karakarçayıldız, 2016; Kaya, 2017; Mistretta, 2000; NCTM, 2000; Özcan, 2012; Sünkür, İlhan, Kılıç, 2012; Van de Walle, 2004; Yenilmez, Teke, 2008). Ancak, yapılan araştırmalar ve bu tez çalışmasının bulguları ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerinin birinci düzeyde yığılma oluşturduğunu göstermektedir.

Bu bölümde 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçleri karşılaştırılarak değerlendirilmiştir. Tez çalışmasının bulguları, ortaokul öğrencilerinin sayı kavramının içerdiği işlemsel süreci ifade edebildiğini göstermiştir. Öğrenciler “5”, “4+3” gibi kavramları günlük yaşamdan örnekler vererek açıklamış, içerdikleri işlemsel süreci göstermiş ve süreç sonucunda oluşan kavramı ifade edebilmişlerdir. Öğrenciler kavramları somut olarak tasvir edebilmişlerdir. Sayı kavramı Tall (2005)’ a göre bireylerin doğuştan sahip oldukları kavramlardan biridir. “4+3” gibi kavramlar ise sonradan günlük yaşam içerisinde karşılaşılan somut yaşantılar sonucu edinilen kavramlardır. Öğrenciler okula gitmeden önce bu kavramlara sahiptirler. İlerleyen süreçte öğrenciler sayı kavramının içerdiği işlemsel süreci kavrarlar. Sayının işlemsel süreç sonucunda oluşan bir kavram olduğunu ifade edebilirler ve sembolik olarak gösterebilirler. Yani KİSS düzeyleri açısından kavramsal işlemsel sembolik süreç boyutuna ulaşırlar. Dolayısıyla bu sorular için öğrencilerin nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmeleri beklenen bir durumdur. Öte yandan bir eşitliğin sağlanması için eşitliğin her iki tarafında yer alan bilinmeyenlerin alacağı değerleri tüm öğrencilerin sayı değerleri ile ifade ettikleri, cebirsel bir açıklamada bulunmakta zorlandıkları belirlenmiştir. Cebirsel düşünme düzeyi ikinci ve üçüncü düzeyde yer alan öğrencilerin bilinmeyenler arasındaki ilişkiyi sayı değerlerinden yola çıkarak cebirsel olarak ifade edebildikleri görülmüştür. Cebirsel düşünme düzeyi birinci düzey olan 8. sınıfta yer alan bir öğrencinin de bu ilişkiyi cebirsel olarak açıklayabildiği belirlenmiştir. “ $a+3b$ ” ifadesini açıklarken 6. ve 8. sınıf öğrencilerinin daha başarılı oldukları görülmüştür. 6. ve 8. sınıf öğrencilerinden cebirsel düşünme düzeyi birinci düzey olan öğrenciler KİSS düzeyleri açısından “ $a+3b$ ” nin içerdiği işlemsel süreci ve süreç sonucunda oluşan kavramı açıklayabildikleri halde, birinci düzey cebirsel düşünme

becerisine sahip olduğu belirlenen 7. sınıf öğrencileri açıklayamamıştır. 6. sınıf öğrencileri “ $a+3b$ ” yi cebirsel ifade olarak belirtmişlerdir. Bu durumun öğretim programı içerisinde 6. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeler konusunu yeni görmüş olmalarından kaynaklandığı düşünülmüştür. Bulgular açısından bir diğer dikkat çeken durum ise cebirsel düşünme düzeyi üçüncü, geometrik düşünme düzeyi birinci düzey olarak belirlenen 6. sınıf ve 8. sınıf öğrencilerinin “ $a+3b$ ” yi anlatmakta zorlanmaları ve kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmeleridir. Bu öğrenciler diğer sorularda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna ulaşabildikleri ve sembolik ifade oluşturabildikleri halde soruda verilen cebirsel ifadeyi açıklamakta zorlanmışlardır.

Yarı yapılandırılmış görüşmeler esnasında bazı ortaokul öğrencileri ardışık sayılar kavramını açıklarken zorlanmışlardır. 6. sınıf öğrencileri ardışık sayıları genellikle bir sayının tekrarı olarak ifade etmişlerdir. Cebirsel düşünme düzeyi birinci düzey olarak belirlenen 7. sınıf ve 8. sınıf öğrencilerinden de benzer cevaplar geldiği görülmüştür. Bu öğrencilerin ardışık sayılara ilişkin yanılığa sahip oldukları düşünülmüştür. Öğrenciler ardışık sayıları cebirsel olarak ifade ederken alfabede yer alan harflerin sırasını düşünmüşlerdir. a' 'nin ardışığını b , b' 'nin ardışığını da c olarak düşünmüşlerdir. Ayrıca harflerin alfabedeki sırasından yola çıkarak sırasıyla sayıları temsil ettiklerini belirtmişlerdir. a' 'nin 1 sayısını, b' 'nin 2 sayısını gösterdiğini söylemişlerdir. Benzer şekilde yapılan araştırmalar da bu bulguyu desteklemektedir (Akkaya, Durmuş, 2006; Kieran, 1992; Perso, 1992). Ayrıca bazı öğrencilerin de ardışık sayıları cebirsel olarak ifade ederken a' 'nin ardışığını $2a$ olarak, $2a'$ 'nin ardışığını da $3a$ olarak gösterdikleri belirlenmiştir. Ardışık sayıları bir sayının tekrar etmesi olarak düşünen cebirsel düşünme düzeyi ikinci düzey olan bir 6. sınıf öğrencisi ise a' 'nin ardışığının a olacağını söylemiştir. Öğrenci düşündüğü şekle uygun cebirsel ifadeyi belirtse de ardışık sayılara ilişkin sahip olduğu yanılığa hata yapmasına neden olmuştur. Yani sayısal olarak yaptığı hata cebirsel düşünmesini etkileyen bir durum olmuştur. Özellikle 6. sınıf öğrencileri ardışık sayılar kavramını doğru şekilde ifade edemedikleri için ardışık iki sayının toplamının tek sayı oluşturacağını da gösterememişlerdir. Düşünme süreçleri kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Cebirsel düşünme düzeyleri ikinci ve üçüncü düzey olan 7. sınıf öğrencileri ise ifadeyi cebirsel olarak gösterebilmişlerdir. Ancak, sadece cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey olan bir 7. sınıf öğrencisi aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. 8. sınıf öğrencileri ise ardışık iki sayının toplamının tek sayı oluşturacağını cebirsel olarak açıklamakta ve aksiyomatik formal düzeyinde düşünme süreci geliştirmekte daha başarılı olmuşlardır.

Tez çalışmasının bulguları sonucunda bazı ortaokul öğrencilerinin tek sayı ve çift sayı kavramlarına dair yanılgıya sahip oldukları belirlenmiştir. Cebirsel düşünme düzeyi birinci düzey olarak belirlenen 6. ve 7. sınıf öğrencileri bir basamaklı sayıları tek sayı olarak, iki basamaklı sayıları çift sayı olarak belirtmişlerdir. Tek sayı ve çift sayıyı ifade etmeleri gereken tüm sorularda bu yanılgıyı göstermişlerdir. Tek sayı ve çift sayıya dair yanılgıya sahip olan bu öğrencilerin tek sayı ve çift sayı ile ilgili sorularda düşünme süreçleri kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Tek sayı ve çift sayıyı doğru olarak ifade eden 6. sınıf öğrencileri tek sayı ve çift sayıyı cebirsel olarak gösterememişlerdir. Dolayısıyla tek sayı ve çift sayı ile ilgili ifadelerin yer aldığı sorularda 6. sınıf öğrencilerinin düşünme süreçleri nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna ulaşamamıştır. Cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey olan bir 6. sınıf öğrencisi ile cebirsel düşünme düzeyi ikinci düzey olan bir 7. sınıf öğrencisi tek sayıyı $3a$, çift sayıyı $2a$ gibi cebirsel ifadelerle gösterebileceklerini belirtmişlerdir. Değişkenin katsayısının tek sayı ya da çift sayı olmasına bağlı olarak cebirsel ifadenin tek sayı ya da çift sayıyı göstereceğini ifade etmişlerdir. Aylar (2014) da benzer şekilde 7. sınıf öğrencileri ile yaptığı araştırmada öğrencilerin tek sayıyı ve çift sayıyı cebirsel olarak gösterirken katsayılarına göre düşündüklerini belirtmiştir. 7. sınıf öğrencilerinden sadece cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey olarak belirlenen bir öğrenci tek sayı ve çift sayıyı cebirsel olarak ifade edebilmiştir. Dolayısıyla bu öğrenci tek sayı ve çift sayılar ile ilgili ifadelerin yer aldığı sorularda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutundan aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci gerçekleştirmiştir. Diğer 7. sınıf öğrencilerinin düşünme süreçleri ise kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. İkinci ve üçüncü düzey cebirsel düşünme becerisine sahip 8. sınıf öğrencileri ise tek sayı ve çift sayıyı cebirsel olarak ifade etmekte daha başarılı olmuşlardır. Yarı yapılandırılmış görüşme sürecinde 8. sınıf öğrencileri diğer sınıf düzeylerindeki öğrencilerden farklı olarak süreç içerisinde tek sayıyı ve çift sayıyı cebirsel olarak ifade edebilecekleri cebirsel ifadeleri düşünebilmişlerdir. Ancak, bu öğrencilerden cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey olan sadece bir öğrenci tek sayı ve çift sayı ile ilgili ifadelerin yer aldığı sorularda aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. “ $2x+5$ ” cebirsel ifadesinin tek sayı ya da çift sayıyı gösterip göstermeyeceğine dair ise cebirsel düşünme düzeyi ikinci ve üçüncü düzey olan 8. sınıf öğrencileri aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirmişlerdir. Görüşmeler sürecinde cebirsel düşünme düzeyi birinci düzey olarak belirlenen 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin “ $2x$ ” cebirsel ifadesinde yer alan x değişkenini çarpma sembolü ile karıştırdığı görülmüştür. Bu beklenen

bir durumdur. Akarsu (2013) da araştırmasında 7. sınıf öğrencilerinin değişkeni temsil eden x harfi ile çarpma sembolünü karıştırdıklarını belirtmiştir.

Bir diğer bulgu ise bazı ortaokul öğrencilerinin “ $2x$ ” ifadesi için değişkenin alabileceği sayı değerlerini düşündüklerinde 2 ile x ’ in 23, 210 gibi 2 ile başlayan bir sayı oluşturacaklarını ifade ettikleri şeklinde dir. Alanyazın da elde edilen bu bulguyu desteklemektedir (Kieran, 1992; Perso, 1992). Bu öğrencilerin birinci ve ikinci düzey cebirsel düşünme becerisine sahip öğrenciler oldukları görölmüştür. Dolayısıyla bu öğrencilerin “ $2x+5$ ” in tek sayıyı göstermesine dair açıklamalarından yola çıkarak düşünme süreçlerinin kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlandığı belirlenmiştir. Ortaokul öğrencilerinin “Bir sayı” ile başlayan sözel ifadelere uygun cebirsel ifade oluşturmakta diğer sözel ifadelere göre daha başarılı oldukları görölmüştür. Bu durum derslerde bu şekildeki sözel ifadeler ile ilgili örneklere daha çok yer verilmesi ile ilişkilendirilmiştir. Cebirsel düşünme düzeyi ikinci düzey ve üçüncü düzey olarak belirlenen ortaokul öğrencilerinin parantezli gösterim gerektiren cebirsel ifadeleri yazarken gösterime dikkat ettikleri görölmüştür. Alanyazında öğrencilerin cebirsel ifade yazma sürecinde parantezli gösterime dikkat etmedikleri belirtilmektedir (Akarsu, 2013; Akkaya, Durmuş, 2006; Kieran, 1992; Kocakaya Baysal, 2010). Bu tez çalışmasında alanyazından farklı bir sonuç elde edilmiştir. Özellikle 6. ve 8. sınıf öğrencileri bu beceriyi daha çok göstermişlerdir.

Bazı öğrencilerin farklı gösterime sahip ama birbirine eşit değeri ifade eden cebirsel ifadeleri karşılaştırırken görsel olarak ifadelere odaklandıkları belirlenmiştir. Bu öğrenciler ifadelerin yazım biçiminde, aynı sayıların ya da aynı işlemsel sembolün yer alıp almadığına göre karşılaştırma yapmışlardır. Hunter (1995) da öğrencilerin cebirsel ifadeleri karşılaştırırken sayı değerleri üzerinden karşılaştırma yaptıklarını belirtmiştir. Yazılış biçimlerinin farklı olmasından kaynaklı aynı değeri ifade eden cebirsel ifadelerin farklı olduklarını düşünmelerine neden olduğunu bildirmiştir. Bu tez çalışmasında parantezli gösterimin parantezsiz gösterimlerle her zaman farklı olacağını ifade eden öğrenciler olduğu tespit edilmiştir. Birinci düzey cebirsel düşünme becerisine sahip öğrencilerin çarpım durumundaki bir sayının parantezin içine dağılma özelliğini göstermekte zorlandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri düşük düzeyde yer aldığı için bu bulgu beklenen bir durumdur. Bu durum Yenilmez ve Teke (2008)’ nin çalışmalarında da tespit edilmiştir. Öğrenciler ortaokul düzeyinde öğretim programı içerisinde çarpma işleminin dağılma özelliğini doğal sayılar konusu üzerinden görmektedirler. Ancak, cebirsel gösterimde dağılma özelliğini uygulamakta zorlanmışlardır. Hunter (1995) da öğrencilerin cebirsel ifadelerde yer alan parantezli gösterimlerde ve parantezi kullanmakta öğrencilerin

sorun yaşadıklarını belirtmiştir. Bu durumu parantezli gösterimle daha önce karşılaşmamış olabileceklerine bağlamıştır. Cebirsel düşünme düzeyi ve sınıf düzeyi arttıkça cebirsel ifadeler arasındaki ilişkileri açıklayan, nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştiren öğrenci sayısı artmıştır. Bağdat (2013) 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel ilişkileri açıklamada Solo Taksonomisi' ne göre yapı öncesi özelliklerini gösterdiklerini belirtmiştir. Bu tez çalışmasında ise 8. sınıf öğrencilerinin genellikle cebirsel ifadeler arasındaki ilişkileri gösterirken matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesine göre aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirdiklerini ortaya çıkarmıştır.

Öğrencilere yöneltilen örüntü sorusu için 6. sınıf öğrencilerinin örüntü kuralını cebirsel olarak ifade etmekte diğer sınıf düzeylerine göre daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Daha çok 6. sınıf öğrencisi 7. ve 8. sınıf öğrencilerine göre aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Öğrenciler örüntü kuralını nasıl oluşturduklarını açıklayabilmişlerdir. Bu durumun örüntüler konusunun ve örüntü kuralını sembolik olarak düşünme kazanımının 6. sınıf programında öğrencilerinin yeni öğrenmiş olmaları ile ilişkili olduğu düşünülmüştür. 7. ve 8. sınıf öğrencileri örüntünün her bir adımında yer alan bilye sayılarını düşünerek sayısal işlem yapma eğilimi göstermişlerdir. Öğrenciler örüntü kuralını genellikle adım sayıları arasındaki artış miktarı ile ifade etmişlerdir. Literatürde yer alan araştırmalarda da (Bağdat, 2013; Bike Kalkan, 2014) 8. sınıf öğrencilerinin örüntü kuralını cebirsel olarak ifade etmekte zorlandıkları görülmüştür. Öğrencilerin örüntü adımlarını deneyerek düşünme süreci geliştirdikleri belirtilmiştir. Bağdat (2013) 8. sınıf öğrencilerinin örüntü kuralı oluşturmada Solo Taksonomisi' ne göre daha çok yapı öncesi özellikleri gösterdiklerini belirtmiştir. Wilkie (2016) 12-13 yaş aralığındaki çocukların örüntü kuralını sembolik olarak oluşturduklarını ama nasıl oluşturduklarını açıklamakta zorlandıklarını belirtmiştir. Bu durum görüşme yapılan 8. sınıf öğrencilerinin birçoğunun örüntü sorusundaki matematiksel düşünme süreçlerinin kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmasını destekler niteliktedir.

Uygulama sürecinde incelenen bir diğer özellik öğrencilerin geometri öğrenme alanında gerçekleştirdikleri matematiksel düşünme süreçleridir. Ortaokul öğrencileri üçgeni tanımlarken hatalı ifadelerde bulunmuşlardır. Üçgeni tanımlarken sadece üç kenarlı, üç açılı ve üç köşeli olmasına odaklanmışlardır. Kemankaşlı (2010) da 10. sınıf öğrencilerinin üçgeni tanımlarken bu özelliklerine odaklandıklarını belirtmiştir. 6. sınıf öğrencilerinin bir şeklin çokgen oluşturabilmesinde gerekli olan kapalı şekil olma özelliğini üçgen için belirtmedikleri görülmüştür. Üçgenin özelliklerini tam ve doğru şekilde açıklayan 6. sınıf öğrencisi olmamıştır. Benzer durum 7. sınıf öğrencileri için de geçerlidir. 8. sınıf öğrencileri

ise daha doğru tanımlamalarda bulunmuşlardır. Geometrik düşünme düzeyi ikinci ve üçüncü düzey olan öğrencilerin üçgeni tasvir etmede daha başarılı oldukları görülmüştür. Öğrenciler üçgeni tanımlarken genellikle iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olması gibi üçgene dair özellikleri belirtmişlerdir. Ancak, üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180° olduğunu açıklamakta zorlanmışlardır. Geometrik düşünme düzeyi ikinci ve üçüncü düzey olarak belirlenen öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin aksiyomatik formal dünya boyutuna ulaştığı belirlenmiştir. Öğrenciler genellikle bir üçgen çizmiş ve iç açılarının ölçülerini ölçmüşlerdir. Bazı öğrenciler ise eşkenar üçgen ve dik üçgen çizerek iç açılarının ölçülerini ölçmüşlerdir. Böylece iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu gösterebilmişlerdir. Öte yandan, bazı öğrenciler geometrik şekil çizimlerinde cetvel, açıölçer ve gönye kullanırken zorluk yaşamışlardır. Gür ve Demir (2017) çokgen çizimlerinde cetvel kullanımının bireylerin geometrik düşünme düzeyleri ile ilişkili olduğunu belirtmişlerdir. Tez çalışmasında da geometrik düşünme düzeyi yüksek olan öğrencilerin cetvel ve gönye kullanmakta daha başarılı oldukları görülmüştür. Uygulama sürecinde diğer öğrenciler, bir üçgen üzerinde iki iç açı ölçüsüne kendileri değerler vererek toplamış ve üçüncü iç açısının ölçüsünü bulmak için bu toplamı 180° ’ den çıkarmışlardır. Uygan vd. (2014) ilköğretim matematik öğretmenlerinin dahi üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını gösterirken ispat süreci geliştirmeden önce iki iç açısının ölçüleri verilen bir üçgenin üçüncü iç açısının ölçüsünü bulmayı gösterdiklerini belirtmişlerdir. Ayrıca, bu tez çalışmasında bazı öğrenciler üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasını 180° ’ nin 3’ e kalansız bölünebilen bir sayı olması ile ilişkilendirmişlerdir.

Cebir ve geometri matematiğin ilişkili iki dalıdır (Dindyal, 2003). Cebirde kullanılan sembolik dilin geometride de kullanımı vardır. Geometride açı ölçüsü, kenar uzunluğu, alan ve hacim ölçüsü bulma gibi süreçlerde değişkenlerin kullanımından söz edilebilir. Dolayısıyla cebir ve geometrinin sembolik kullanım açısından bir ilişkisi vardır. Ayrıca, cebirde değişkenler için harfler gibi semboller kullanılırken, geometride şekiller gibi semboller de kullanılır. Meissner (2006) KİSS kavramının geometride de var olduğunu savunmaktadır. Üçgenin gerçek dünyada algıladığımız bir kavram olduğunu, ancak üçgeni inşa etmeyi düşündüğümüzde bir süreç içerdiğini belirtmiştir. Bu durum Pisagor Bağıntısı için de geçerlidir. Dik üçgeni oluşturmak için nasıl dik olacağına dair zihnimizde mevcut bilgi yapıları vardır. Böylece geometride de kavramsal düşünceden yola çıkarak sembolik dünya boyutuna ve zihnimizde bilgi yapılarını inşa edeceğimiz aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci gerçekleştirebiliriz. Bu tez çalışmasında da cebir ve geometrinin ilişkilendirilebileceği üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı konuları ele

alınmıştır. Önce öğrencilere sözel ifadeler sunulmuş ve bu ifadelerin doğruluğunu sorgulamaları istenmiştir. Ardından gerçek yaşam durumu içerisinde keşfetmeleri beklenmiştir. Sözel ifade içerisinde sunulan üçgen eşitsizliğine dair 6. ve 8. sınıf öğrencileri sembolik ifade oluşturmada ve aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirmede 7. sınıf öğrencilerine göre daha başarılı olmuşlardır. Öğrencilerin sözel ifadeye yer alan üçgen eşitsizliğinin doğruluğunu göstermeye yönelik düşünme süreçlerinde geometrik düşünme düzeyinin etkisinin olduğu görülmüştür. Öte yandan, cebirsel düşünme düzeyi üçüncü düzey ve geometrik düşünme düzeyi de birinci düzey olan 6. ve 7. sınıflardan iki öğrenci aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmekte başarılı olmuştur. Öğrenciler ifadenin doğruluğunu üçgen çizerek ve kenar uzunluklarını ölçerek göstermişlerdir. Bu durum öğrencilerin geometrik düşünme süreçlerini, cebirsel düşünme düzeylerinin desteklediği şeklinde yorumlanmıştır. Gerçek yaşam durumu içerisinde üçgen eşitsizliğini keşfetme süreçlerinde ise sözel ifade içerisinde açıklamakta zorlanan bazı öğrencilerin aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirdikleri belirlenmiştir. Sembolik ifade oluşturan öğrenci sayısı ise azalmıştır. Bu durum öğrencilerin sözel olarak verilen ifadeyi anlamakta zorlansalar da sembolik ifadeye dönüştürebildikleri görüşünü ortaya çıkarmıştır. Bulgular 6. sınıf öğrencilerinin ve 7. sınıf öğrencilerinin daha önce derslerde görmedikleri bir konu olan üçgen eşitsizliğini oluşturabildikleri ve sembolik olarak ifade edebildiklerini göstermiştir. Öğrenciler iki kenar uzunluğu verilen bir üçgenin üçüncü kenar uzunluğunun hangi değerleri alabileceğini düşünürken üçgenin ikizkenar üçgen olması gerektiğine dair cevaplar vermişlerdir. Türnüklü (2009) de 8. sınıf öğrencilerinin üçgen eşitsizliğini oluşturmada zorlandıklarını belirtmiştir. Daha önce matematik dersinde bu konuyu görmeyen öğrencilerin sözel yönergeler yardımıyla üçgen eşitsizliğini oluşturmada beklenen başarıyı gösteremediklerini ifade etmiştir. Bu durumu ise bu tez çalışmasında da görüldüğü gibi öğrencilerin üçgeni hep ikizkenar üçgen ya da eşkenar üçgen olarak düşünmelerinden kaynaklanabileceği şeklinde yorumlamıştır. Üçgene dair eksik bilgilerin üçgen eşitsizliğini oluşturmada sorunlar yarattığı görülmüştür. Öğrenciler Pisagor Bağıntısı' nı açıklamakta daha çok zorlanmışlardır. Sözel olarak verilen ifade içerisinde 6. ve 8. sınıf öğrencileri aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirememiştir. Cebirsel düşünme düzeyi birinci düzey, geometrik düşünme düzeyi üçüncü düzey olan bir 6. sınıf öğrencisi ise bağıntıyı sembolik olarak gösterebilmiştir. 8. sınıf öğrencileri sembolik ifadeyi göstermekte daha başarılı olmuşlardır. 8. sınıf öğrencileri Pisagor Bağıntısı' nı derslerde görmüşlerdir. Buna rağmen sözel olarak verilen ifadenin Pisagor Bağıntısı' nı anlattığını belirtmişler, örnekler vermişler; ancak, doğruluğunu

gösterememişlerdir. Bu dikkat çeken bir durumdur. Öğrenciler ifadenin Pisagor Bağıntısı' nı anlattığını belirttikleri halde doğruluğunu açıklayamamaları, derslerde kalıcı öğrenme sürecinin gerçekleşmediğini düşündürmüştür. Öğrenciler işlemsel süreç bağlamında bağıntıyı nasıl uygulamaları gerektiğini ezberlemişlerdir. 7. sınıf öğrencilerinden sadece cebirsel ve geometrik düşünme düzeyi üçüncü düzey olan bir öğrenci aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Ortaokul öğrencilerinin Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmalarındaki en büyük engel dik kenar uzunluklarının karesi ifadesi olmuştur. Öğrenciler buradaki kare kavramını geometrik şekil olan kare olarak düşünmüşlerdir. Özellikle 6. sınıf öğrencileri üs kavramı ile kare şeklini karıştırmışlardır. Üslü ifadeler kavramı 6. sınıf öğretim programı kazanımları içerisinde yer almaktadır. Ancak, öğrencilerin yaptıkları bu hata onların derslerde bu kavrama dair bilgileri tam olarak elde edemediklerini göstermektedir. Ayrıca, bazı öğrenciler dik üçgeni göstermekte ve özelliklerini ifade etmekte zorlanmışlardır. Bu öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin birinci düzey olduğu görülmüştür. Pisagor Bağıntısı' nı gerçek yaşam durumu içerisinde keşfetme sürecine yönelik 6. sınıf öğrencilerinin yine başarısız oldukları belirlenmiştir. Öğrenciler istenen şekli oluşturamamışlardır. Düşünme süreçleri kavramsal somut dünya boyutu ile sınırlı kalmıştır. Sözel ifadeden yola çıkarak Pisagor Bağıntısı' nın doğruluğunu gösterebilen 7. sınıf öğrencisi, gerçek yaşam durumu içerisinde de bağıntıyı keşfetmeye yönelik düşünme süreci geliştirmiştir. Sözel ifadeden yola çıkarak Pisagor Bağıntısı' nın doğruluğunu gösteremeyen iki 8. sınıf öğrencisi ise gerçek yaşam durumu içerisinde bağıntıyı keşfetmeye yönelik düşünme süreci geliştirmişlerdir. Bu öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin üçüncü düzey olduğu görülmüştür. Bağıntıyı gerçek yaşam durumundan yola çıkarak açıklayabilen 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin düşünme süreçleri aksiyomatik formal dünya boyutunda yer almıştır. Üçgen eşitsizliğini oluşturan ama Pisagor Bağıntısı' nı oluşturmakta zorlanan 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin karekök kavramını daha önce öğrenmemiş olmalarından zorluk yaşamış olabilecekleri düşünülmüştür.

Matematiksel düşünme sürecinde öğrenciler soruları cevaplandırırken matematiksel dil boyutlarını birbirine dönüştürmüşlerdir. Verilen ifadeleri ve istenen ifadeleri açıklarken kimi zaman önce sözlü dil, kimi zaman da yazılı dili kullanmışlardır. Ancak, öğrencilerin genellikle önce sözlü dili kullanmayı tercih ettikleri belirlenmiştir. Öğrenciler yazılı dili genellikle işlemsel süreci göstermek için kullanmışlardır. Ancak, öğrenciler yazılı dil kullanımında işlemsel sürecin basamaklarını birbirine eşitleyerek devam ettirme gibi hatalar yapmışlardır. Cebir öğrenme alanı ile ilgili sorularda görsel dili kullanmaya çalışan 6. sınıf öğrencilerinin olduğu belirlenmiştir. Geometrik düşünme

düzeyinin görsel dili etkilediği görülmüştür. Geometrik düşünme düzeyi arttıkça Pisagor Bağıntısı' nı oluşturma sürecinde istenen şekli çizme becerisi de artmıştır. Ancak, ortaokul öğrencilerinin görsel dil becerilerinin yetersiz olduğu belirlenmiştir. Öğrenciler görsel dil kullanımında birçok hata yapmışlardır. Cebirsel düşünme düzeyi arttıkça sembolik dil kullanımı da artmıştır. Ayrıca, sınıf düzeyi arttıkça sembolik dil kullanımı becerisini gösteren öğrenci sayısı da artmıştır. Matematiğin üç dünyası boyutları açısından görüşme yapılan bütün öğrencilerin kavramsal somut dünya boyutunda yer alan matematiksel dil becerilerini gösterdiği belirlenmiştir. Nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna ulaşan öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin genellikle ikinci ve üçüncü düzey olduğu görülmüştür. Ancak, bazı öğrencilerin matematiksel düşünme açısından aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci gerçekleştirse de dil becerilerinin aksiyomatik formal dünya boyutunda olmadığına dair değerlendirme yapılmıştır. Öğrenciler matematiksel dilin kendine ait kurallarını kullanmakta zorlanmışlardır. Dolayısıyla açıklamalarını yaparken düşüncelerini doğru bir şekilde yansıttıkları halde dil becerilerini doğru kullanamadıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin değişkenleri harfle ifade ederken genellikle a harfini kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Literatür (Açıl, 2015; Akarsu, 2013; Akgün, 2007) ise öğrencilerin x harfini kullanma eğiliminde olduklarını göstermiştir. Tez çalışmasında örüntü kuralını sembolik olarak gösteren öğrencilerin çoğu örüntünün adım sayısını n harfi ile göstermişlerdir. Öğrenciler üçgeni tasvir ederken matematiksel dil kullanımı açısından hatalar yapmışlardır. Üçgenin kenarlarını çizgi, doğru gibi kelimelerle tasvir etmişlerdir. 180° lik açının geniş açı olduğunu belirten öğrenciler olduğu görülmüştür. Üçgenin sadece ikizkenar üçgen olacağını ya da eşkenar üçgen olması gerektiğini savunan öğrenciler olmuştur. Tünlüklü (2009) de öğrencilerin üçgeni ikizkenar veya eşkenar üçgen olarak, hatta bir kenarının mutlaka yatay olması gerektiğini savunarak tasvir ettiklerini belirtmiştir. Ortaokul öğrencileri üçgenin kenar uzunluklarını gösterirken ölçü birimlerini dikkate almamış ve göstermemişlerdir. Ayrıca açı ölçüsü ile kenar uzunluğu kavramlarını birbirine karıştırmışlardır.

Öğrencilerin cebirsel dil kullanımlarının geometrik kavramların oluşum sürecinde kavramları sembolik olarak ifade etmede etkisinin olduğu görülmüştür. Sözel olarak verilen ifadede yer alan üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' na dair sembolik gösterimi ifade eden öğrencilerin sembolik dil kullanım becerilerinin etkili olduğu düşünülmüştür. Ancak, öğrenciler gerçek yaşam durumu içerisinde bu kavramsal yapıları sembolik olarak ifade etmekte güçlük yaşamışlardır. Akarsu ve Yılmaz (2015) 7. sınıf öğrencilerinin geometri öğrenme alanı ile ilgili kavramların isimleri verildiğinde dil becerilerinin yeterli düzeyde

olduğunu, gerçek yaşam durumu içerisinde kavramları oluşturma süreçlerinde ise dil becerilerinin yetersiz kaldığını belirtmişlerdir. Riccomini, Smith, Hughes ve Fries (2015) öğrencilerin matematiksel kavramlara ait kelimeleri öğrenmelerinin onların matematiksel dil becerilerine bağlı olduğunu belirtmişlerdir. Van der Walt, Maree ve Ellis (2008)' e göre eğer öğrencilerin dil becerileri zayıf ise matematik öğrenmeleri de zayıf kalacaktır. Dolayısıyla tez çalışmasının bulguları da matematiksel kavramların oluşum sürecinde matematiksel dil becerilerinin yetersizliğinin sorun teşkil edebileceğini göstermiştir. Byrd Hornburg, Schmitt ve Purpura (2018), Spiridonova ve Savvinova (2015) ile Woods (2009)' un araştırmalarında da matematiksel bilginin gelişiminde matematiksel dil becerilerinin önemli olduğu vurgulanmıştır.

Tez çalışmasında öğrencilerin soruları cevaplandırırken önce sayılarla deneme eğilimi gösterdikleri belirlenmiştir. Kavramsal somut dünya boyutundan hareketle nesnel süreçsel sembolik dünya boyutu ile aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirmişlerdir. Literatürde yer alan araştırmaların sonuçları da ortaokul öğrencilerinin cebir ile ilgili sorularda önce sayılarla deneme yöntemini uyguladıkları bulgusunu desteklemektedir (Akkan, Baki, Çakıroğlu, 2012). El Mouhayar ve Jurdak (2016) da öğrencilerin ilkökul düzeyinde sayısal düşünme eğilimi gösterdiklerini, lise düzeyinde ise görsel düşünme becerilerinin arttığını belirtmişlerdir. Tez çalışmasında öğrenciler soruları yanıtlarken işlemsel süreci göstermenin yanında ifadelere uygun günlük yaşamdan örnekler vermeyi tercih etmişlerdir. Diğer araştırmalar da (Karakoca, 2011; Yeşildere, 2006) ortaokul öğrencilerinin cevaplarını örnekler ile destekleme eğiliminde olduklarını göstermektedir.

Bulgular aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştiren ortaokul öğrencilerinin ispat sürecini ifade edebildiklerini göstermiştir. Sınıf düzeyi arttıkça aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirme becerisi de artmıştır. Aylar (2014) da araştırmasında 7. sınıf öğrencilerinin ispat sürecini gösterebildiklerini belirtmiştir. Fakat, öğrencilerin cebir öğrenme alanı ile ilgili yaşadığı zorlukların onların ispat becerilerini etkilediğini göstermiştir. Bu tez çalışmasında da öğrencilerin cebir ve geometride yaşadığı zorlukların onların aksiyomatik formal dünya boyutunda yer alan ispat süreci geliştirme becerilerini etkilediği görülmüştür. Miyazaki vd. (2016)' nin araştırmasında da ortaokul öğrencileri geometri alanında ispat sürecini ifade edebilmişlerdir. Özellikle üçüncü ve dördüncü düzey geometrik düşünme düzeyine sahip öğrencilerin daha başarılı olduklarını belirtmişlerdir.

Tall (2004, 2005, 2007, 2013) matematiğin üç dünyasında yer alan düşünme boyutlarının üst düzey matematik problemleri çözerken ortaya çıktığını belirtmiştir.

Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi alanyazında analiz, limit kavramı, cebir, fonksiyonlar, lineer cebir ve bilgisayar sistemlerindeki cebir alanları gibi yükseköğretim düzeyindeki konular üzerinde çalışılmıştır (Hannah, Stewart, Thomas, 2015; Jukić, Brückler, 2014; Kashefi, Ismail, Yusof, 2010; Kidron, 2008; Tall, Lima, Healy, 2014; Vandebrouck, 2011). Lima ve Tall (2008) 14-15 yaşlarındaki öğrencilerin bilgi yapılarının ve sembolik dili kullanma becerilerinin aksiyomatik formal dünya boyutundaki düşünme sürecinin temelini oluşturduğunu belirtmişlerdir. Bu tez çalışması matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesinin ortaokul düzeyine uygun olacak bir uygulamasını sunmuştur. Ayrıca geometri öğrenme alanında da uygulanabilirliğini göstermiştir. Meissner (2006) de geometri öğrenme alanında bu kuramsal çerçeve temelinde araştırmalar yapılabileceğini belirtmiştir.

Tez çalışması matematiğin üç dünyası boyutlarının birbirini etkilediğini göstermiştir. Kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirirken yaşanan zorlukların, nesnel süreçsel sembolik dünya boyutundaki düşünme sürecini etkilediği görülmüştür. Benzer şekilde aksiyomatik formal dünya boyutundaki düşünme süreci de diğer düşünme boyutlarındaki güçlüklerden etkilenmiştir. Tall (2013) bu durumu matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesinin özellikleri içerisinde belirtmiştir. Özdi (2012) de araştırmasında düşünme boyutları açısından geçişin birbirini etkilediğini göstermiştir. Ayrıca üç düşünme dünyasının birbirine üstünlük kurmaya çalıştığını belirtmiştir. Duval (2006), çoğu öğrencinin düşünme dünyaları arasındaki geçişi gerçekleştirecek bilişsel çerçeveye sahip olmadığını belirtmiştir. Öte yandan Christou, Pitta-Pantazi, Souyoul ve Zachariades (2010) de araştırmalarında üç düşünme dünyasının birbirini etkileyen yapısını ortaya çıkarmışlardır. Sınıf düzeyi arttıkça aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geçiren öğrenci sayısı artmıştır. Bu tez çalışmasında da ortaokul öğrencilerinin sıralı biçimde üç düşünme dünyasına uygun düşünme süreci gerçekleştirdiği ortaya çıkmıştır.

5.2. Sonuç ve Öneriler

Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi birbirini takip eden üç düşünme boyutunu ortaya koymaktadır. Bu boyutlar kavramsal somut dünya, nesnel süreçsel sembolik dünya ile aksiyomatik formal dünya boyutudur. Her bir düşünme boyutu, matematiksel düşünme sürecine ait farklı beceriler tanımlar. Bireyin matematiksel düşünme süreci somut dünyada karşılaştığı kavramlardan yola çıkarak soyutlama sürecine doğru yol alır. Tez çalışmasının bulguları, ortaokul öğrencilerinin düşünme süreçlerinde önce kavramsal somut dünya boyutunda yer alan düşünme becerilerini gösterdiklerini ortaya koymuştur. Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçleri kavramsal somut dünya boyutundan nesnel süreçsel sembolik dünya boyutuna, bu boyuttan da aksiyomatik formal dünya boyutuna

doğru bir geçiş süreci göstermiştir. Dolayısıyla bu durum matematiğin üç dünyası boyutunun birbirini takip eden süreçler olduğu düşüncesini destekler niteliktedir.

Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesinde tanımlanan düşünme boyutlarının birbirini takip eden yapısı sınıf düzeyleri açısından da ortaya konmuştur. 6. sınıf öğrencileri daha çok kavramsal somut dünya boyutunda düşünme süreci geliştirirken, 8. sınıf düzeyine ilerledikçe öğrencilerin daha çok aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirdikleri belirlenmiştir. Ancak, 8. sınıf öğrencileri cebir ve geometri öğrenme alanı ile ilgili kendilerine yöneltilen sorulara ait konuları daha önce derslerde işlemişlerdir. Bu anlamda aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmeleri beklenen bir durumdur. Buna rağmen cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri üst düzeyde olan 8. sınıf öğrencilerinin aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmekte zorlandıkları belirlenmiştir. Daha önce derslerde öğrendikleri bilgileri kullanırken karıştırdıkları, ezbere dayalı cevaplar verdikleri görülmüştür. Dolayısıyla aksiyomatik formal dünya boyutunun gerektirdiği ispat sürecine dair düşünme süreci geliştirmekte ve süreci ifade etmekte zorlanmışlardır.

Tez çalışması üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı gibi öğretim programı içerisinde daha önce karşılaşmadıkları bir konu hakkında aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştiren 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin olduğunu göstermiştir. İlgili alanyazında matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini inceleyen bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bu tez çalışması ile basit düzeyde de olsa ispat sürecini gösteren ortaokul öğrencilerinin var olduğu ve matematiksel düşünme gelişiminin gerekli ön bilgiler sağlandığında gelişim gösterebildiği ortaya konmuştur.

Cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerinin matematiksel düşünme gelişim aşamaları açısından birlikte etkisi söz konusudur. Daha önce derslerde görmedikleri bir konu hakkında 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin 8. sınıf öğrencilerine göre daha kolay bir şekilde ifadelere dair ispat süreci geliştirdikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin cevapları daha açık ve nettir. Bilgi karmaşıklığı yaşamamışlardır. Dolayısıyla bu durum derslerdeki öğretim şeklinin öğrencilerin bilgi yapılarına etkisini sorgulatmıştır. Derslerde yeni öğrenilen bilgilere dair öğretmenler aracılığıyla öğrencilere neden sorgulaması yaptırılmadığı zaman öğrenmenin kalıcılığının etkilendiği düşünülmektedir. Öğrenci bu durumda bilgileri birbirine karıştırmakta ve nedeni sorgulamakta zorlanmaktadır. 6. sınıf öğrencilerinin zihinleri diğer sınıf düzeylerine göre daha açıktır. Ortaokulda sınıf düzeyi arttıkça sorgulamaya dayalı öğrenme yerine ezbere dayalı öğrenme gerçekleştiği düşünülmektedir. Bu yüzden derslerde

öğrencilerin aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru düşünme süreci geliştirebilecekleri öğrenme ortamları sağlanmalıdır.

İlgili alanyazın geometrik düşünmenin de birbirini takip eden süreçlerden gelişim gösterdiğini belirtmektedir. Tez çalışmasında görülmektedir ki geometrik düşünme ile birlikte cebirsel düşünme düzeyleri de dikkate alındığında öğrencilerin matematiksel düşünme gelişimleri açısından daha net bilgiler sağlanmaktadır. Aynısı cebirsel düşünme için de geçerlidir. Cebirsel düşünme düzeyi yüksek düzeyde ve geometrik düşünme düzeyi düşük düzeyde yer alan öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin, geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda başarılarını olumlu yönde etkilediği görülmüştür. Matematiksel dil kullanımı bakımında da cebirin ve geometrik dilin bileşenlerini birlikte ele almak daha doğru bilgiler sağlayabilir. Matematiksel dil bir bütün olarak düşünüldüğünde sembolik ve görsel dilin birbirini tamamladığı söylenebilir. Tez çalışması cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyi aynı düzeyde olan öğrencilerin daha başarılı ve matematiksel düşünme süreçlerini daha net ortaya koyduklarını göstermiştir. Bu anlamda öğrencilerin cebirsel düşünme ile geometrik düşünme seviyelerinin öğretim yaklaşımları ve ilgili araştırmalar açısından birlikte ele alınması gerektiği düşünülmektedir.

Tez çalışmasında 6. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerini tanımlamakta belirsizliklerin yaşanabileceği görülmüştür. Çünkü cebirsel düşünme düzeyi birinci düzey olarak belirlenen bir öğrenci birden fazla soruda nesnel süreçsel sembolik dünya boyutunda düşünme süreci geliştirmiştir. Öğrencilerle yapılacak görüşmeler bağlamında cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerini belirlemenin daha net bilgiler sağlayacağı düşünülmektedir. Matematiksel düşünme süreçlerini ortaya çıkarmak açısından da öğrencilerin düşünme becerilerini ortaya çıkaracak etkinliklerin, ders ortamlarının tasarlanması önem taşımaktadır. Tez çalışması ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerinin birinci düzeyde yığılma oluşturduğunu göstermiştir. Bu anlamda öğretim programları tasarlanırken öğrencilerin düşünme düzeyleri dikkate alınabilir. Ortaokul öğrencilerinin mevcut cebirsel ve geometrik düşünme düzeyleri göz önüne alınarak matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından matematiksel düşünme ve matematiksel dil becerilerinin aksiyomatik formal dünya boyutuna doğru gelişim gösterebilecekleri etkinliklere yer verilebilir. Sonuç olarak öğretim programları tasarımında olması gereken düşünme düzeyinden çok, varolan düşünme düzeyini geliştirmeye yönelik çalışmaların yapılmasının yararlı olacağı düşünülmektedir.

Tez çalışmasının uygulama sürecinde üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı öğrencilere önce sözel ifadeler olarak sunulmuş, ardından gerçek yaşam durumu içerisinde

keşfetmeleri beklenmiştir. Bulgular göstermektedir ki öğrencilerin gerçek yaşam durumu içerisinde kavramları keşfetmelerinin daha kolay ve matematiksel düşünmelerini daha çok ortaya çıkaran etkinlikler olduğudur. Sözel olarak verilen ifadede öğrenciler kavramları anlamaya yönelik düşünme süreci gerçekleştirirken, gerçek yaşam durumu içerisinde kavramları oluşturmaya yönelik düşünme süreci geliştirmişlerdir. Sözel olarak verilen ifadeler kavramlara dair sembolik ifadeler oluşturmalarına yardımcı olmuştur. Ancak, sembolik ifade oluştursalar da aksiyomatik formal dünya boyutuna yönelik düşünme süreci geliştirmekte zorlanmışlardır. Bu anlamda öğretim sürecinde kavramları direk sunmak yerine, etkinlikler içerisinde keşfetmelerine yönelik ortamlar hazırlanabilir. Böylece ezberlemek yerine kalıcı öğrenme sağlanmış olur.

Aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirilen öğrencilerin düşünme süreçlerini farklı şekillerde geliştirdikleri görülmüştür. Öğrenciler aynı sorular için farklı yöntemler neticesinde ispat sürecini ifade etmişlerdir. Özellikle 6. sınıf öğrencilerinin cevapları içerisinde farklı yöntemlerin var olduğu görülmüştür. Bu anlamda ölçme değerlendirme süreçlerinde öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini ortaya çıkarmanın önemli olduğu düşünülmektedir. Açık uçlu sorular ile öğrencilerin düşünme süreçlerinde ortaya çıkan farklı düşünme biçimleri ortaya çıkarılabilir. Ayrıca, öğrencilerin sahip oldukları kavramları dil becerilerindeki eksikliklerden dolayı ifade edememelerinden kaynaklı ölçme değerlendirme süreçlerindeki sorunlar açık uçlu sorular ile giderilebilir.

Tez çalışmasında öğrencilerin doğru matematiksel dil biçimini kullanamadıkları görülmüştür. Matematiksel düşünmelerini ortaya çıkarmada matematiksel dil becerileri yetersiz kalmıştır. Öğrencilerin okuduklarını anlamakta ve açıklamakta zorlandıkları belirlenmiştir. Sembolik ifade oluştururken matematiksel dilin kurallarını doğru biçimde ifade edememişlerdir. Geometri öğrenme alanı ile ilgili sorularda üçgeni, dik üçgeni ve dik kenar uzunluklarının kareleri gibi kavramlar için doğru dil biçimi kullanamamışlardır. Dolayısıyla sözlü, yazılı, görsel ve sembolik dil gibi dil becerilerinin eksik olduğu sonucu çıkmıştır. Bu becerilerin eksikliği de aksiyomatik formal dünya boyutunda yer alan kavram oluşumlarına dair kendi tanımlamalarını yapma becerilerini etkilemiştir. Bu anlamda matematiksel dil becerilerinin gelişimi kavram oluşumunda önemlidir. Derslerde öğrencilerin bu becerilerinin gelişimi desteklenmelidir. Sadece yazılı dil kullanmak yerine sözlü dil becerilerine de ağırlık verilmelidir. Sembolik dil kullanımları incelenmelidir. Matematiksel düşünme süreçlerinde keşfettikleri kavramları ifade etmeleri sağlanmalıdır.

Uygulama yapılacak öğrencilerin belirlenmesi için tez çalışması sürecinde Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi geliştirilmiştir. Testin geçerlilik ve güvenilirlik çalışmaları

yapılmış, uygulama süreci detaylı açıklanmıştır. Dolayısıyla geliştirilen bu testin ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerini ortaya çıkarmak amacıyla başka araştırmalarda da kullanılabileceği düşünülmektedir.

Tez çalışmasında matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini ve matematiksel dil becerilerini ortaya çıkarmak amacıyla genel bir çerçeve sunulmuştur. Uygulama süreci sonucunda bu çerçevenin işlerliği ortaya konmuştur. Tanımlanan bu genel çerçevenin araştırmacılara yol göstereceği düşünülmektedir. Öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin ve matematiksel dil becerilerinin gelişimini daha net ortaya koymak amacıyla 6. sınıftan başlayarak aynı öğrencilerin 8. sınıf sonuna kadar izleneceği araştırmalar yapılabilir. Böylece matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesinde yer alan düşünme boyutlarının birbirini takip eden yapısı daha iyi bir biçimde ortaya konabilir.

Bu tez çalışmasında aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştiren ortaokul öğrencilerinin ispat süreçleri ispat yöntemleri açısından incelenmemiştir. Sadece ispat sürecine dair düşünme süreci geliştirip geliştirememelerine odaklanılmıştır. Yapılacak araştırmalarda ek olarak ispat süreci geliştiren öğrencilerin kullandıkları ispat yöntemleri detaylı biçimde incelenebilir.

Tez çalışmasında farklı cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeylerine sahip öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri ve matematiksel dil becerileri matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından değerlendirilmiştir. Cebir ve geometri öğrenme alanları içerisinde sorular yöneltilmiş, üçgen eşitsizliği ve Pisagor Bağıntısı' nı keşfederken geliştirdikleri düşünme biçimleri incelenmiştir. Bu anlamda matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesinin ortaokul düzeyinde uygulanabilirliği ortaya konmak istenmiştir. Ayrıca geometri öğrenme alanında sembolik düşünmenin önemi gösterilmiştir. İlerleyen araştırmalarda geometri öğrenme alanının başka konuları üzerinde de matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi temelinde araştırmalar yapılabilir. Cebir ve geometri öğrenme alanları dışında veri işleme ve olasılık öğrenme alanlarında da matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi bağlamında araştırmalar yapılabilir. Böylece ortaokul düzeyinde matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi temelinde öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerine ve matematiksel dil becerilerine dair daha geniş bir çerçeve sunulabilir. Matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesinde yer alan üç düşünme boyutuna dair tanımlanan beceriler geliştirilebilir.

KAYNAKÇA

Açan, H. (2015). 8. Sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisindeki bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Açıl, E. (2015). Ortaokul 3. sınıf öğrencilerin denklem kavramına yönelik soyutlama süreçlerinin incelenmesi: Apos teorisi (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Akarsu, E. (2013). 7. Sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanında matematiksel dil kullanımlarının incelenmesi. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Akarsu, E. ve Yılmaz, S. (2015). Studying the ability of 7th grade students to define the circle and its elements in the context of mathematical language. *Acta Didactica Napocensia*, 8 (3), 11-22.

Akgün, L. (2007). Değişken kavramına ilişkin yeterlilikler ve değişken kavramının öğretimi (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Akkan, Y., Baki, A. ve Çakıroğlu, Ü. (2012). Sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal anlama ve cebirsel muhakeme yapıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 43, 01-13.

Akkan, Y., Çakıroğlu, Ü. ve Güven, B. (2009). İlköğretim 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin denklem oluşturma ve problem kurma yeterlilikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9 (17), 41-55.

Akkaya, R. ve Durmuş, S. (2006). İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanılgıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31, 1-12.

Akkuş, O. (2004). *The effects of multiple representations-based instruction on seventh grade students' algebra performance, attitude toward mathematics, and representation preference* (Yayımlanmamış doktora tezi). Ortadoğu Teknik Üniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Alkan, H. ve Bukova-Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(3), 221-236.

Alkan, H. ve Tataroğlu Taşdan, B. (2011). Farklı sınıf düzeylerindeki matematik öğretmen adaylarının gözünden matematiksel düşünme. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(2), 107-137.

Altun, M. (2005). *İlköğretim ikinci kademedeki matematik öğretimi* (3). Bursa: Aktüel Yayınevi.

Alyeşil, D. (2005). *Kavram haritaları destekli ve problem çözme merkezli geometri öğretimi 7. sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme düzeyleri üzerindeki etkileri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Armah, R.B., Cofie, P.O. ve Okpoti, C.A. (2018). Investigating the effect of Van Hiele phase-based instruction on pre-service teachers' geometric thinking. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 4(1), 314-330. DOI:10.21890/ijres.383201

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156), 17-31.

Asria, V.Z. ve Wahyudin, W. (2019). *Implementation of rigorous mathematical thinking approach to analyze the students' ability of algebraic thinking and understanding concept and mathematical habits of mind*. International Conference on Mathematics and Science Education (ICMScE 2018)' da sunulan bildiri. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series IOP doi:10.1088/1742-6596/1157/4/042085

Aylar, E. (2014). *7. Sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi/ Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Bağdat, O. (2013). *İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin Solo taksonomisi ile incelenmesi*. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi/ Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Bağdat O. ve Saban P. (2014). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin Solo taksonomisi ile incelenmesi. *International Journal of Social Science*, 26 (2), 473-496.

Baroody, A. J. (2003). *The development of adaptive experts and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge*. In A. J. Baroody ve A. Dowker (Eds.) *Studies in mathematical thinking and learning. The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1-33). Mahwah, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Baş, S., Erbaş, A.K. ve Çetinkaya, B. (2011). Öğretmenlerin dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili bilgileri. *Eğitim ve Bilim*, 36, 41-45.

Baykul, Y. (2000). *Eğitimde ve psikolojide ölçme, klasik test teorisi ve uygulaması*. Ankara: ÖSYM Yayınları.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik Öğretimi (6-8. Sınıflar)*. Ankara:Pegem Akademi.

Biggs, J. ve Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO Taxonomy*. New York: Academic Press.

Bike Kalkan, D. (2014). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal anlama ve cebirsel muhakeme yapıları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Anadolu Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Bobango, J. C. (1988). Van Hiele levels of geometric thought and student achievement in standard content and proof writing: The effect of phase-based instruction. *Dissertation Abstract Index*, 48 (10).

Breen, J. J. (2000). Achievement of Van Hiele level two in geometry thinking by eight grade students through the use of geometry computer-based guided instruction. *Dissertation Abstract Index*, 60 (07).

Bukova Güzel, E. (2008). Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerine olan etkisi. *e-Journal of New World Sciences Academy*, 3 (4).

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 35-49.

Byrd Hornburg, C., Schmitt, S.A. ve Purpura, D.J. (2018). Relations between preschoolers' mathematical language understanding and specific numeracy skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 176, 84-100.

Cai, J. (2003). Singaporean students mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 34(5), 719-737.

Capraro, M. M. ve Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols?. *Reading Psychology*, 27 (2), 147-164.

Chimoni, M. ve Pitta-Pantazi, D. (2017) Parsing the notion of algebraic thinking within a cognitive perspective. *Educational Psychology*, 37:10, 1186-1205, DOI:10.1080/01443410.2017.1347252.

Christou, C., Pitta-Pantazi, D., Souyoul, A. ve Zachariades, T. (2010). The embodied, proceptual, and formal worlds in the context of functions. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 5:2, 241-252, DOI: 10.1080/14926150509556656

Coşkun, S. (2012). *Üst düzey matematiksel düşünme süreçlerinin sorgulayıcı problem çözme ve öğrenme modeline göre tasarlanmış çalışma yaprakları yardımıyla incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Creswell, J.W. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. California: Sage Publications.

Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çepni, S., Bayrakçeken, S., Yılmaz, A., Yücel, C., Semerci, C., Köse, E., Sezgin, F., Demircioğlu, G. ve Gündoğdu, K. (2008). *Ölçme ve değerlendirme*. Ankara: Pegem Akademi.

Çokluk, Ö.S., Şekercioğlu, G. ve Büyüköztürk, S. (2016). *Sosyal bilimler için çok değişkenli istatistik: Spss ve Lisrel uygulamaları*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Dahm, R. ve De Angelis, G. (2018). The role of mother tongue literacy in language learning and mathematical learning: is there a multilingual benefit for both?. *International Journal of Multilingualism*, 15 (2), 194-213, DOI: 10.1080/14790718.2017.1359275

Dede, Y. ve Peker, M. (2007). Öğrencilerin cebire yönelik hata ve yanlış anlamaları: matematik öğretmen adayları'nın bunları tahmin becerileri ve çözüm önerileri. *İlköğretim Online*. 6(1), 35-49. Erişim adresi: <http://ilkogretim-online.org.tr>

Di Paola, B., Battaglia, O. R. ve Fazio, C. (2016). Non-hierarchical clustering as a method to analyse an open-ended questionnaire on algebraic thinking. *South African Journal of Education*, 36 (1), 1-13. doi: 10.15700/saje.v36n1a1142

Dindyal, J. (2003). *Algebraic thinking in geometry at high level school* (Unpublished Phd thesis). Illinois University/ Mathmematics, Illinois.

Doğan, M. ve Güner, P. (2012, Haziran). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematik dilini anlama ve kullanma becerilerinin incelenmesi*. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi' nde sunulan bildiri, Niğde Üniversitesi, Niğde.

Dur, Z. (2010). *Öğrencilerin matematiksel dili hikaye yazma yoluyla iletişimde kullanabilme becerilerinin farklı değişkenlere göre incelenmesi* (Yayımlanmış yüksek lisans tezi). Hacettepe Üniversitesi/Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.

El Mouhayar, R. ve Jurdak, M. (2016). Variation of student numerical and figural reasoning approaches by pattern generalization type, strategy use and gradelevel, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47 (2), 197-215, DOI:10.1080/0020739X.2015.1068391

Fidan, Y. (2009). *İlköğretim 5. sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme düzeyleri ve buluş yoluyla geometri öğretiminin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine etkisi*. (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi/ Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Fuson, K. C. ve Hall, J. W. (1983). *The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review*. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The Development Of Mathematical Thinking* (pp.49-107), New York: Academic Press.

Fuys, D., (1985). Van Hiele levels of thinking in geometry. *Education and Urban Society*, 17(4), 447-462.

Gelman, R. ve Meck, E. (1986). *The Notion of principle: The case of counting*. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual And Procedural Knowledge: The Case Of Mathematics* (pp. 29-58), Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Gray, E. ve Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal For Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115-141.

Gülpek, P. (2006). *İlköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin gelişimi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Uludağ Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Gündoğdu Alaylı, F. (2012). *Geometride şekil oluşturma ve şekli parçalarına ayırma çalışmalarında ilköğretim 6. 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin düşünme süreçlerinin incelenmesi ve bu süreçteki düzeylerinin belirlenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Gür, H. ve Demir, M.K. (2017). Pergel-cetvel kullanarak temel geometrik çizimlerin öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerine ve tutumlarına etkisi. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, 13 (1), 88-110.

Hannah, J., Stewart, S. ve Thomas, M. O. J. (2015). *Linear algebra in the three worlds of mathematical thinking: The effect of permuting worlds on students' performance*. In Fukawa-Connelly, T., Infante, N. E., Keene, K., & Zandieh, M. (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America (SIGMAA) on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 581-587), San Diego, USA. Erişim adresi: <http://sigmaa.maa.org/rume/RUME18-final.pdf>

Hannah, J., Stewart, S. ve Thomas, M. O. J. (2016). Developing conceptual understanding and definitional clarity in linear algebra through the three worlds of mathematical thinking. *Teaching Mathematics and Its Applications*. 35, 216-235. Erişim adresi: <http://teamat.oxfordjournals.org>

Henderson, P. (2002). Materials development in support of mathematical thinking. *ACM SIGCSE Bulletin*, 35(2), 185-190. Erişim adresi: <http://Blue.Butler.Edu/Phenders/İticse2002wg.Rtf>

Heng, M.A. ve Sudarshan, A. (2013). "Bigger number means you plus!" Teachers learning to use clinical interviews to understand students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 83 (3), 471-485.

Herbert, K. ve Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 340-344.

Hunter, M. (1995, Ekim). *Analysing proceptual thinking through test items*. British Society for Research into Learning Mathematics Conference' da sunulan bildiri. University of Birmingham, Birmingham.

Jacobs, V.R., Lamb, L.L.C. ve Philipp, R.A. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41 (2), 169-202.

Jukić, L. ve Brückler, F.M. (2014). What Do Croatian Pre-Service Teachers Remember from Their Calculus Course?. *Issues in the undergraduate mathematics preparation of school teachers*, 1,1-15.

Karakarçayıldız, R. Ü. (2016). *7. Sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme düzeyleri ile çokgenleri sınıflama becerileri ve aralarındaki ilişki* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Karakoca, A. (2011). *Altıncı sınıf öğrencilerinin problem çözmede matematiksel düşünmeyi kullanma durumları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Karasar, N. (2002). *Bilimsel araştırma yöntemi*. Ankara: Nobel Yayınevi.

Kashefi, H., Ismail, Z. ve Yusof, Y.M. (2010). Obstacles in the learning of two-variable functions through mathematical thinking approach. *Pocedia Social and Behavioral Sciences*, 173-180.

Kaya, D. (2017). Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeyleri ile becerilerinin incelenmesi. *Bartın Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 6(2), 657-675. doi: 10.14686/buefad.309000

Keith, D. (2000). Finding your inner mathematician. *Chronicle of Higher Education*, 47(5), 5-6.

Kemankaşlı, N. (2010). *10. Sınıflarda geometri öğrenme ortamı tasarımı: üçgenler ünitesi örneği* (Yayımlanmamış doktora tezi). Balıkesir Üniversitesi/ Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Kidron, I. (2008). Abstraction and consolidation of the limit concept by means of instrumented schemes: the complementary role of three different frameworks. *Educational studies in mathematics*, 69, 197-216.

Kieran, C. (1992). *The Learning and teaching of school algebra*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook Of Research On Mathematics Teaching And Learning* (pp. 380–419), Ny: Macmillan, New York.

Kocakaya Baysal, F. (2010). *İlköğretim öğrencilerinin (4-8. sınıf) cebir öğrenme alanında oluşturdıkları kavram yanlışları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Abant İzzet Baysal Üniversitesi/Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.

Köse, O. (2018). *Üst düzey uzamsal yeteneğe sahip matematik öğretmen adaylarının düşünme yapılarına göre SOLO taksonomisi düzeylerinin belirlenmesi* (Yayımlanmış yüksek lisans tezi). Selçuk Üniversitesi/ Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Kula Yeşil, D. (2015). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin dörtgenler bağlamında matematik dili kullanımları: Sentaks ve semantik bileşenler* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Anadolu Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Kusumaningsih, W., Darhim, D., Herman, T. ve Turmudi, T. (2018). Improvement algebraic thinking ability using multiple representation strategy on realistic mathematics education. *Journal on Mathematics Education*, 9 (2), 281-290.

Lima, R.N. ve Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 3-18. doi: 10.1007/s10649-007-9086-0

Macgregor, M. ve Stacey, K. (1996). Students' undersatnding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19.

Maudy, S.Y., Suryadi, D. ve Mulyana, E. (2018). Level of student' algebraic thinking. *Journal of Physics: Conference Series*, 1157 (4), 1-9. doi:10.1088/1742-6596/1157/4/042057

MdYunus, A.S., Mohd Ayub, A.F. ve Hock, T.T. (2019). Geometric thinking of malaysian elementary school students. *International Journal of Instruction*, 12 (1), 1095-1112.

Meissner, H. (2006). *Proceptual thinking in geometry*. Retirement as Process and Concept In. Eddie Gray and David Tall (Eds.), Charles University, Prague.

Miles, M.B. ve Huberman, A.M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. California: Sage Publications.

Milli Eğitim Bakanlığı (2017). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul)*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu.

Mistretta, R. M. (2000). Enhancing geometric reasoning. *Adolescence*, 35 (138), 365-379.

Miyazaki, M., Fujita, T. ve Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, 94, 223-239. doi: 10.1007/s10649-016-9720-9

Morgan, D. L. ve Morgan, R. K. (2008). *Single-case research methods for the behavioral and health sciences*. SAGE Publications

Mubark, M. (2005). *Mathematical thinking and mathematical achievement of students in the year of 11 scientific stream in Jordan* (Unpublished Phd thesis). New Castle University/Education Faculty, New Castle.

Mudrikah, A. (2016). Problem-based learning associated by action-process-object-schema (APOS) theory to enhance students' high order mathematical thinking ability. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 2(1), 125- 135.

National Council For School Mathematics (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. Reston, Va: Author.

Olkun, S. ve Toluk, Z. (2003). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. Ankara: Anı Yayıncılık.

Olkun, S., Toluk, Z. ve Durmuş, S. (2002, Eylül). *Sınıf öğretmenliği ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin geometrik düşünme düzeyleri*. 5. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulmuştur. ODTÜ, Ankara.

Oral, B., İlhan, M. ve Kınay, İ. (2013). 8. Sınıf öğrencilerinin geometrik ve cebirsel düşünme düzeyleri arasındaki ilişkinin incelenmesi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 34 (2), 33-46.

Otterburn, M. K. ve Nicholson, A. R. (1976). The Language of mathematics. *Mathematics in School*, 5(5), 18-20.

Owens, B. (2006). *The Language of mathematics: Mathematical terminology simplified for classroom use* (Unpublished master thesis). East Tennessee State University/ The Faculty Of The Department Of Mathematics, US.

Özcan, B.N. (2012). *İlköğretim öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin geliştirilmesinde bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Özcan, B.N. ve Türnüklü, E. (2013). Buluş yoluyla öğrenme yönteminin ilköğretim öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerine etkisinin incelenmesi. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi*, 04 (07), 29-45.

Özdil, U. (2012). *A multilevel structural model of mathematical thinking in derivative concept* (Yayımlanmamış doktora tezi). Ortadoğu Teknik Üniversitesi/ Uygulamalı Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Özüm Bülbül, B. (2016). *Matematik öğretmeni adaylarının geometrik düşünme alışkanlıklarını geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri*. (Çev. Ed. Bütün, M. ve Demir, S. B.). Ankara: Pegem Akademi (Özgün Çalışma 2002).

Pearn, C. ve Stephens, M. (2016, Temmuz). *Competence with fractions in fifth or sixth grade as a unique predictor of algebraic thinking?*. 39th The Annual Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA) Conference' da sunulan bildiri. Adelaide, South Australia.

Pegg, J. ve Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *ZDM*, 37 (6), 468-475.

Perso, T. (1992). Using diagnostic teaching to overcome misconceptions in algebra. *The Australian Mathematics Teacher*, 48 (2), 12-14.

Purpura, D.J., Napoli, A.R., Wehrspann, E.A. ve Gold, Z.S. (2017). Causal connections between mathematical language and mathematical knowledge: A dialogic reading intervention. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, 10 (1), 116-137, DOI: 10.1080/19345747.2016.1204639

Riccomini, P.J., Smith, G.W., Hughes, E.M. ve Fries, K.M. (2015). the language of mathematics: the importance of teaching and learning mathematical vocabulary. *Reading & Writing Quarterly*, 31:3, 235-252, DOI: 10.1080/10573569.2015.1030995

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. D.A. Grouws Ed. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of The National Council of Teachers of Mathematics (pp.334-370). Newyork: Macmillan.

Semadeni, Z. (2008). Deep intuition as a level in the development of the concept image. *Educational Studies in Mathematics*. 68:1-17. doi: 10.1007/s10649-007-9105

Sezgin Memnun, D. (2011). *İlköğretim altıncı sınıf öğrencilerinin analitik geometri'nin koordinat sistemi ve doğru denklemi kavramlarını oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Uludağ Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Soylu, Y. (2008). 7. Sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeleri ve harf sembollerini (değişkenleri) yorumlamaları ve bu yorumlamada yapılan hatalar. *Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi*. 25, 237-248.

Spiridonova, N. ve Savvinova, A. (2015). Distinctive Features of Mathematical Language Formation in the Context of Bilingual Education. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 214, 714-721.

Stake, R. E. (2006). *Multiple case study analysis*. New York: The Guilford Press.

Stewart, S. ve Schmidt, R. (2017) Accommodation in the formal world of mathematical thinking. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48 (1), 40-49. DOI: 10.1080/0020739X.2017.1360527

Suwito, A., Yuwono, I., Parta, I. N., Irawati, S. ve Oktavianingtyas, E. (2016). Solving geometric problems by using algebraic representation for junior high school level 3 in van hiele at geometric thinking level. *International Education Studies*, 9 (10), 27-33.

Sünkür, M. Ö., İlhan, M. ve Kılıç, M.A. (2012). Analysis of the relationship between algebraic thinking levels and intelligence domains of 7th grade students. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14(2), 183-200.

Tall, D. (1991). *The psychology of advanced mathematical thinking*. In Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). USA: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2002). *Advanced mathematical thinking*. USA: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2003) *Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics*. in Carvalho, L. and Guimarães, L. (eds), *História e Tecnologia no Ensino da Matemática* (pp. 1-28). Rio de Janeiro: Brazil.

Tall, D. (2004, Temmuz). *Thinking through three worlds of mathematics*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education' da sunulan bildiri, PME, Bergen, Norway.

Tall, D. (2005, Temmuz). *A Theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof*. International Colloquium on Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood' da sunulan bildiri. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgium.

Tall, D. (2007). Developing a theory of mathematical growth. *Zdm Mathematics Education*, 39, 145-154.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tall, D., Lima, R. N. ve Healy, L. (2014). Evolving a three-world framework for solving algebraic equations in the light of what a student has met before. *The Journal of Mathematical Behavior*, 34, 1-13.

Tall, D. ve Mejia-Ramos, J. P. (2006). The Long-Term cognitive development of different types of reasoning and proof. In Hanna, G., Jahnke, H. N., Pulte, H. (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives*. New York: Springer.

Tall, D. ve Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22(2), 125-147.

Tall, D. ve Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-169.

Tekin, H. (2003). *Eğitimde ölçme ve değerlendirme*. Ankara: Yargı Yayınevi.

Tekindal, S. (2009). *Duyuşsal özelliklerin ölçülmesi için araç oluşturma*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Tuna, A. (2011). *Trigonometri öğretiminde 5e öğrenme döngüsü modelinin öğrencilerin matematiksel düşünme ve akademik başarılarına etkisi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Gazi Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Tuna, S. (2006). *Vygotsky ve Piaget' de düşünme/düşünce-dil ilişkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Maltepe Üniversitesi/Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.

Turgut, M.F. (1992). *Eğitimde ölçme değerlendirme*. Ankara: Saydam Matbaacılık.

Türk Dil Kurumu (2006). *Türkçe Sözlük*. Ankara.

Türnüklü, A. (2000). Eğitimbilim araştırmalarında etkin olarak kullanılabilecek nitel bir araştırma tekniği: Görüşme. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Yönetimi*, 34, 543-559.

Türnüklü, E. (2009). Üçgen eşitsizliğini oluşturmada karşılaşılan bazı engeller. *Eğitim ve Bilim*, 34 (152), 174-181.

Türnüklü, E. ve Özcan, B. (2014). Öğrencilerin geometride RBC teorisine göre bilgiyi oluşturma süreçleri ile Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasındaki ilişki: Örnek olay çalışması. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 11 (27), 295-316.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry, Final Report, Cognitive Development And Achievement in Secondary School Geometry Project*. Chicago: University Of Chicago.

Usta, N. ve Gökurt Özdemir, B. (2018). Ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin incelenmesi. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi-Journal of Qualitative Research in Education*, 6(3), 427-453. doi:10.14689/issn.2148-2624.1.6c3s20m

Uygan, C., Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 5 (2), 137-157.

Uysal Koğ, O. (2012). *Görselleştirme yaklaşımı ile yapılan matematik öğretiminin öğrencilerin bilişsel ve duyuşsal gelişimi üzerindeki etkisi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Vance, J. H.(1998). Number operations from an algebraic perspective. *Teaching Children Mathematics*, 4, 282-285.

Vandebrouck, F. (2010, Şubat). *Students conceptions of functions at the transition between secondary school and university*. Proceedings of the Conference CERME 7' de sunulan bildiri, University of Rzeszow, Poland.

Van De Walle, J. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (5th edition). Boston: Allyn & Bacon.

Van der Walt, M., Maree, K. ve Ellis, S. (2008). A mathematics vocabulary questionnaire for immediate use in the intermediate phase. *South African Journal of Education*, 28, 489–504.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: the case of the minus sign. *Philosophical Psychology*, 21 (4), 555- 570.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. Cambridge: Ma: The Mıt Press.

Wagner, S. (1983). What are these called variables?. *Mathematics Teacher*, 76, 474-478.

Wagner, S. H. ve Walters, J. (1982). *A longitudinal analysis of early number concepts*. In G. E. Freeman (Ed.), *Action And Thought: From Sensorimotor Schemes To Symbolic Operations* (pp. 137-161), New York: Academic Press.

Watson, A., Spyrou, P. ve Tall, D. (2002). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: the concept of vector. *The Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1 (2), 73-97.

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 93, 333-361. doi: 10.1007/s10649-016-9703-x

Woods, G. (2009). An Investigation into the relationship between the understanding and use of mathematical language and achievement in mathematics at the Foundation Stage. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 1, 2191-2196.

Yalvaç, E. (2010). *İlköğretim ikinci kademe matematik programına yönelik etkinliklerin bazı cebir konularının öğretimi üzerindeki etkileri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Yüzüncü Yıl Üniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü, Van.

Yenilmez, K. ve Teke, M. (2008). Yenilenen matematik programının öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine etkisi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9 (15), 229-246.

Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(1), 181-213.

Yıldırım, C. (2010). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, K. (2016). *Denklemler konusunun etkinliklerle öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerine ve matematik kaygılarına etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (6. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, D. ve Yavuzsoy Köse, N. (2018). Ortaokul öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18 (1), 605-633.

Yıldız, F. (2016). *6. ve 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel sözel, sembolik ve görsel dili anlama ve kullanma becerilerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Yin, R. K. (2003). *Applications of case study research* (2nd Ed.). California: Sage Publications, Ca.

Yüzerler, S. ve Doğan, M. (2012, Haziran). *6. ve 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel dili kullanabilme becerileri*. X.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi' nde sunulan bildiri, Niğde Üniversitesi, Niğde.

EKLER

EK 1.

ÖĞRENCİNİN AKADEMİK ÖZGEÇMİŞİ

Kişisel Bilgiler			
Adı ve Soyadı	ESRA AKAR SU YAKAR		
E-postası/Web Sayfası	es.akarsu@gmail.com		
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce		
Uzmanlık Alanı	İlköğretim Matematik Eğitimi, Matematiksel Düşünme, Matematiksel Dil		
Öğrenim Bilgileri			
	Üniversite	Bölüm/ ABD	Yıl
Lisans	KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ	İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ	2010
Yüksek Lisans	DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ	İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ	2013
YL Tez Başlığı	7. Sınıf Öğrencilerinin Cebir Öğrenme Alanında Matematiksel Dil Kullanımlarının İncelenmesi		
YL Tez Danışmanı	PROF. DR. SÜHA YILMAZ		
Akademik Eserler			
(Makale, kitap, kitap bölümü, bildiri, poster, sergi, konser vb. eserlerden kaynakça yazım kurallarına göre en fazla 10 eser yazılmalıdır.)			
Tezden üretilen yayınlar * ile işaretlenmelidir.			
*Akarsu Yakar, E. ve Yılmaz, S. (2018). Üçgen eşitsizliğine yönelik 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme gelişim aşamaları. <i>International Journal of New Trends in Arts, Sports and Science Education</i>, 7 (4), 34-41. Akarsu Yakar, E. ve Yılmaz, S. (2018, Mayıs). <i>Procept teorisi açısından 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi</i>. 5. International Eurasian Educational Research Congress' da sunulan bildiri. Akdeniz Üniversitesi, Antalya. *Akarsu Yakar, E. ve Yılmaz, S. (2018, Eylül). <i>6. Sınıf öğrencilerinin üçgen eşitsizliğine dair matematiksel düşünme süreçleri</i>. 13. Uluslararası Balkan Eğitim ve Bilim Kongresi' nde sunulan bildiri, Trakya Üniversitesi, Edirne. Akarsu Yakar, E. ve Yılmaz, S. (2017). 7. Sınıf öğrencilerinin cebire yönelik gerçek yaşam durumlarını matematiksel ifadelerle dönüştürme sürecindeki matematiksel dil becerileri. <i>İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi</i>, 18 (1), 292-310. doi:10.17679/inuefd.306995 Akarsu Yakar, E. ve Yılmaz, S. (2017, Temmuz). <i>İlköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik dil kullanımına ilişkin yeterlik inanç düzeylerinin incelenmesi</i>. 15. Uluslararası Geometri Sempozyumu' nda sunulan bildiri, Amasya Üniversitesi, Amasya. Akarsu Yakar, E. ve Yılmaz, S. (2016, Haziran). <i>Cebir öğrenme alanına yönelik bir hikaye içerisinde 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel dil becerilerini kullanma yeterliliklerinin incelenmesi</i>. 18. Uluslararası Amse-Amce-Waer Kongresi' nde sunulan bildiri. Anadolu Üniversitesi, Eskişehir. Akarsu, E. ve Yılmaz, S. (2015). Studying the ability of 7th grade students to define the circle and its elements in the context of mathematical language. <i>Acta Didactica Napocensia</i>, 8 (3), 11-22. Akarsu Yakar, E. ve Yılmaz, S. (2015, Eylül). <i>7. Sınıf öğrencilerinin çember ve elemanlarını tanımlarken</i>			

kullandıkları matematiksel dil becerilerinin incelenmesi. 4. Uluslararası Avrasya Matematik Bilimleri ve Uygulamaları Konferansı'nda sunulan bildiri, Atina.

Akarsu Yakar, E. ve Yılmaz, S. (2016, Eylül). 7. *Sınıf öğrencilerinin gerçek yaşam durumlarını matematiksel ifadelerle dönüştürme sürecindeki matematiksel dil becerileri.* 12. Uluslararası Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Dinçer, B., Akarsu, E. ve Yılmaz S. (2016). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları ile matematik öğretimi yeterlik inanç düzeylerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 7 (1), 2017-228.

Alanıyla İlgili Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler

Alanıyla İlgili Aldığı Ödüller

2210-TÜBİTAK BİDEB-Yurtiçi Yüksek Lisans Bursu

2211-A-TÜBİTAK BİDEB-Genel Yurtiçi Doktora Bursu

EK 2. ETİK KURUL İZNİ



T.C.
KOCAELİ VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 99332089/605.01/1836017

25/01/2018

Konu: Araştırma İznî
(Esra AKARSU YAKAR)

VALİLİK MAKAMINA

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Doktora öğrencisi Esra AKARSU YAKAR' ın "Ortaokul Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin ve Matematiksel Dil Becerilerinin Matematiğin 3 Dünyası Kuramsal Çerçevesi Açısından İncelenmesi" konulu araştırma çalışmasını ilimiz ortaokullarında uygulama talebi, ilgili Üniversitenin 12/01/2018 tarih ve 817 sayılı yazıları ile bildirilmektedir.

Adı geçenin söz konusu çalışmasına esas olmak üzere, ekte sunulan çalışmayı ilimiz ortaokullarında uygulama talebi komisyonumuzca uygun görülmüş olup, İlçe Millî Eğitim Müdürlükleri ve okul müdürlüklerinin denetim ve gözetiminde çalışmayı yapmaları Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde olurlarınıza arz ederim.

Fehmi Rasim ÇELİK
Millî Eğitim Müdürü

OLUR
..../01/2018

Ahmet BÜYÜKÇELİK
Vali a.
Vali Yardımcısı

Güvenli Elektronik İmza
Aşlı ile Ayındır
02.02.2018

İbrahim TURAN
V.H.K.İ.

EK 3. GEOMETRİK DÜŞÜNME DÜZEYLERİ ÖLÇEĞİ KULLANIM İZNİ


Esra Akarsu Yakar <es.akarsu@gmail.com>
 27 Kas (2 gün önce) ☆

Alıcı: matemaduygu ▾

Sayın Duygu ALYEŞİL KABAKÇI,

Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde doktora öğrencisiyim. Geliştirmiş olduğunuz "Geometrik Düşünme Düzeyleri Ölçeği" 'ni etik kurallara bağlı kalarak "Ortaokul Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin ve Matematiksel Dil Becerilerinin Matematiğin Üç Dünyası Kuramsal Çerçevesi Açısından İncelenmesi" adlı doktora tezimde kullanabilmem için izninize ihtiyaç duymaktayım. Bu konuda gereğini bilgilerinize sunarım. Saygılarımla..

Esra AKARSU YAKAR


DUYGU ALYEŞİL KABAKÇI
22:17 (23 saat önce) ☆

Alıcı: bana ▾

Ölçeği kullanmanızda bir sakınca yoktur.İyi çalışmalar.

EK 4. CEBİRSEL DÜŞÜNME DÜZEY BELİRLEME TESTİ

Ad-Soyad:

Sınıf:

Cinsiyet:

1. “m” doğal sayı olmak üzere, $8m = 80$ ise m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) “m” harfi metreyi gösterir.
- B) $m = 10$
- C) $m = 20$
- D) Hiçbiri

2. “a” doğal sayı olmak üzere, “5a” ifadesindeki “a” ne anlama gelir?

- A) Değişken
- B) Armut
- C) Hiçbir anlamı yok
- D) Hiçbiri

3. “a” doğal sayı olmak üzere, $a+8=15$ ise a kaçtır?

- A) 7
- B) 7a
- C) 23
- D) 23a

4. “a” doğal sayı olmak üzere, 7a ifadesinin 4 katı kaçtır?

- A) 11
- B) 11a
- C) 28
- D) 28a

5. “d” doğal sayı olmak üzere, d’ye 5 eklenirse aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

- A) d-5
- B) 5d
- C) d+5
- D) Hiçbiri

6. “ $2e+4a$ ” ifadesinde size göre “e” ve “a” neyi temsil etmektedir?

- A) Elma ve armut
- B) Değişken
- C) Hiçbir anlamları yok
- D) Hiçbiri

7. “a, b ve c” doğal sayı olmak üzere, $a=2$, $b=5$, $c=4$ ise harflerin büyükten küçüğe sıralanmış hali aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $c>b>a$
- B) $a>b>c$
- C) $a>c>b$
- D) $b>c>a$

8. “c” doğal sayı olmak üzere, $5c + 4c = ?$ işleminin sonucu nedir?

- A) 9 ceviz
- B) 5ceviz + 4ceviz
- C) 9c
- D) 90

9. “b” doğal sayı olmak üzere, hangisi daha büyüktür, “ $3xb$ ” mi yoksa “ $b \times 3$ ” mü?

- A) $3xb$
- B) $b \times 3$
- C) İkisi birbirine eşittir
- D) “b” ye bağlı olarak değişir.

10. $a>0$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerden hangisi diğerlerinden daha büyüktür?

- A) a+5
- B) a+7
- C) a-5
- D) a-7

11. Onur, Ahmet’den 8 cm daha kısadır. Onur h cm uzunluğundadır. Ahmet’in boyunun uzunluğu için aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

- A) $x+8$
- B) $x-8$
- C) $h+8$
- D) $h-8$

12. “a” doğal sayı olmak üzere, a+5 ifadesine 8 eklersek sonuç ne olur?

- A) a+5
- B) a+13
- C) $5a+8$
- D) $8a+5$

13. “a ve b” doğal sayı olmak üzere, $a+b=7$ ise $a+b+8$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 15
- B) $a+b+7$
- C) $a+b+7+8$
- D) 8

14. “a ve b” doğal sayı olmak üzere, $a=b+12$ ise a+b kaçtır?

- A) 24
- B) a+12
- C) b+12
- D) $2b+12$

15. Elif' in kalemlerinin sayısı Ayşe' nin kalemlerinin sayısının 2 katı kadardır. Ayşe' nin kalemlerinin sayısı a olduğuna göre Elif ile Ayşe' nin toplam kaç kalemi vardır?

- A) 2
- B) 3
- C) $2a$
- D) $3a$

16.



Yandaki karenin bir kenar uzunluğu $3a$ birim olduğuna göre çevresi kaç birimdir?

- A) 9
- B) 12
- C) $9a$
- D) $12a$

17. Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

- A) $a+b+c=a+d+c$ ise $b=d$
- B) $5+x=5x$
- C) $a+b+c=c+b+a$
- D) $a+b=10$ ise $a+b+c=c+10$

18. “ f ” doğal sayı olmak üzere, $f+3+f+3$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) $f+3$
- B) $f+6$
- C) $2f+3$
- D) $2f+6$

19. “ x ve y ” doğal sayı olmak üzere, $x=y-3$ ve $y=9$ ise x kaçtır?

- A) 3
- B) 6
- C) 9
- D) 12

20. Pazara giden Hatice teyze 3kg patates ve 5kg soğan almıştır. Patatesin kilosunun fiyatı p harfi ile soğanın kilosunun fiyatı s ile gösterirsek Hatice teyzenin pazarda harcadığı ücret ne kadardır?

- A) 8kg
- B) 8ps
- C) $3p+5s$
- D) $5p+3s$

21. Efe' nin yaşı Akif' in yaşının 3 katıdır. İkisinin yaşları toplamı 24 olduğuna göre Akif' in yaşı kaçtır?

- A) 6
- B) 8
- C) 16
- D) 1

22. “ a ” doğal sayı olmak üzere, $6a-9=39$ ise a kaçtır?

- A) 5
- B) 6
- C) 7
- D) 8

23. “ a ve b ” doğal sayı olmak üzere, $a=b+8$ ve $a+b+8=24$ ise a kaçtır?

- A) 4
- B) 6
- C) 8
- D) 12

24. “ a ve b ” doğal sayı olmak üzere, $(a+b)+(a-b)$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0
- B) $2a$
- C) $2b$
- D) $2a+2b$

25. “ x ve y ” doğal sayı olmak üzere $5x+5y$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 10
- B) $10xy$
- C) $25xy$
- D) $5(x+y)$

26. “ a ” doğal sayı olmak üzere, $5a-32=3a$ ise a kaçtır?

- A) 4
- B) 8
- C) 12
- D) 16

27. Hangi sayı ile 8 fazlasının toplamı, 3 katının 10 eksikine eşittir?

- A) 2
- B) 8
- C) 12
- D) 18

EK 5. GEOMETRİK DÜŞÜNME DÜZEYLERİ ÖLÇEĞİ

Ad-Soyad:

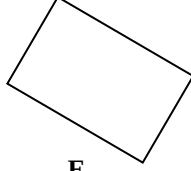
Sınıf:

Cinsiyet:

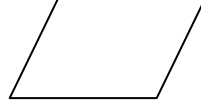
1. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri dikdörtgendir?



D



E



G



F

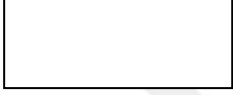
A) Yalnız D

B) D ve E

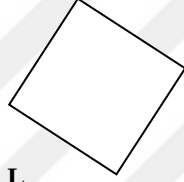
C) D, E ve F

D) Hepsi dikdörtgendir.

2. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri karedir?



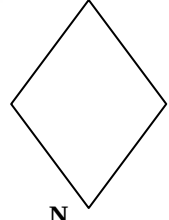
K



L



M



N

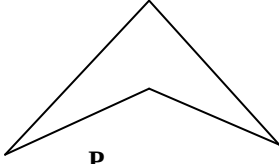
A) Yalnız L

B) Yalnız M

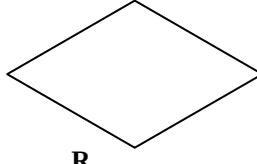
C) K ve L

D) L ve N

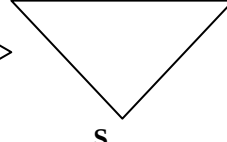
3. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri üçgendir?



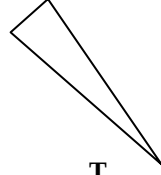
P



R



S



T

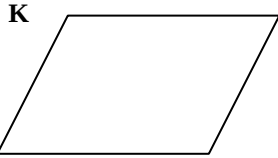
A) Yalnız S

B) S ve T

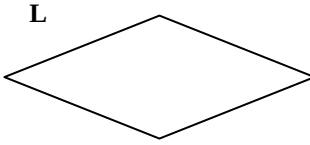
C) P, S, ve T

D) R ve S

4. Aşağıdakilerden hangisi paralelkenardır?

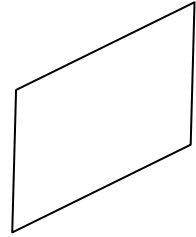


K



L

N



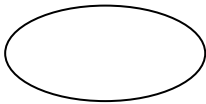
A) Yalnız K

B) Yalnız L

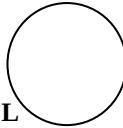
C) K ve N

D) Hepsi paralelkenardır.

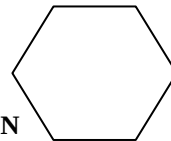
5. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri çemberdir?



K



L



N

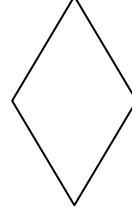
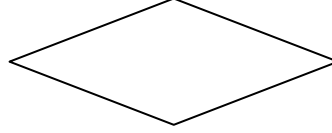
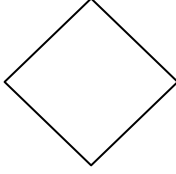
A) Yalnız L

B) Yalnız K

C) K ve L

D) Hepsi Çemberdir.

6.Eşkenar dörtgen tüm kenar uzunlukları eşit olan 4 kenarlı bir geometrik şekildir. Aşağıda 3 tane eşkenar dörtgen verilmiştir.



Aşağıdaki seçeneklerden hangisi bir eşkenar dörtgen için doğru değildir?

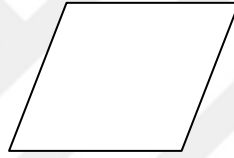
- A) Köşegenleri birbirine diktir.
- B) Karşılıklı kenarları paraleldir.
- C) Köşegen uzunlukları eşittir.
- D) Karşılıklı açılarının ölçüleri eşittir.

7.Aşağıdaki geometrik şekillerden hangisinin köşegenleri birbirine eşit ve birbirini ortalar?

A)



B)



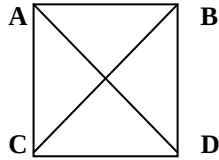
C)



D)

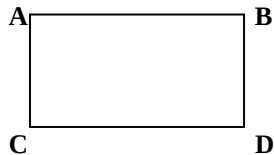


8.ABCD karesinde [AD] ve [BC] köşegendir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi her kare için doğrudur?



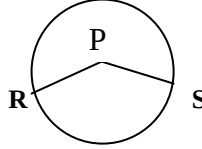
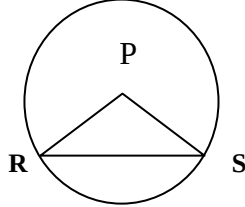
- A) Dik açısı vardır.
- B) [AD] ve [BC] diktir.
- C) Köşegenlerin uzunlukları eşittir.
- D) Seçeneklerin hepsi her kare için doğrudur.

9.ABCD bir dikdörtgendir. Aşağıdaki hangi özellik her dikdörtgen için geçerlidir?



- A) [AD] diktir [BC]
- B) [AC] diktir [BD]
- C) [AD] ve [CD] uzunlukları eşittir.
- D) [AC] diktir [CD]

10. Merkezi P olan bir çemberin içine R ve S noktaları çemberin üzerinde olacak şekilde PRS üçgeni çizilebilir. Aşağıda iki örnek verilmiştir.

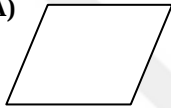


Aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

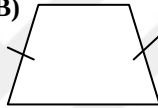
- A) PRS üçgeni eşkenar üçgendir.
- B) PRS üçgeninin en az iki açısının ölçüsü eşittir.
- C) PRS üçgeninin bir kenarının uzunluğu diğerinin iki katı olacaktır.
- D) PRS üçgeninin üç açısının da ölçüsü eşittir.

11. Aşağıdaki dörtgenlerden hangisinin köşegenleri dörtgeni eş üçgenlere ayırmaz?

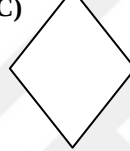
A)



B)



C)



D)



12. Tüm karelerde olup da eşkenar dörtgende olmayan özellik nedir?

- A) Bütün kenarları eşittir.
- B) Köşegenleri birbirine diktir.
- C) Bütün açıları eşittir.
- D) Köşegenler birbirini ortalar.

13. 1: D şekli karedir.

2: D şekli eşkenar üçgendir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) 1 ve 2 aynı anda doğru olamaz.
- B) Eğer 1 doğruysa 2 de doğrudur.
- C) Eğer 1 yanlışsa 2 doğrudur.
- D) 1 ve 2 aynı anda yanlış olamaz.

14. 1: ABC üçgeni eşkenar üçgendir.

2: ABC üçgeninde A ve C açıları eşittir.

Buna göre aşağıdaki seçeneklerden hangisi doğrudur?

- A) Eğer 1 doğruysa 2 de doğrudur.
- B) Eğer 2 doğruysa 1 de doğrudur.
- C) 1 ve 2 aynı anda doğru olamaz.
- D) Eğer 1 yanlışsa 2 de yanlıştır.

15. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) Dikdörtgenin tüm özellikleri tüm paralelkenarlar için de geçerlidir.
- B) Paralel kenarın tüm özellikleri tüm eşkenar dörtgenler için de geçerlidir.
- C) Karenin tüm özellikleri tüm dikdörtgenler için de geçerlidir.
- D) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

16. Aşağıda bir geometrik şeklin 3 özelliği verilmiştir.

Özellik A: Karşılıklı kenarları paraleldir.

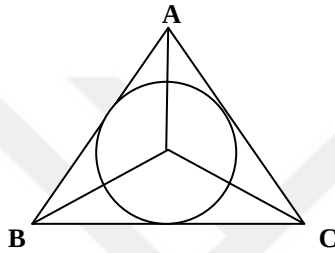
Özellik B: Bir dikdörtgendir.

Özellik C: Bir paralel kenardır.

Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) A gerektirir B, o da gerektirir C' yi
- B) B gerektirir C, o da gerektirir A
- C) A gerektirir C, o da gerektirir B
- D) C gerektirir B, o da gerektirir A

17. Aşağıdaki bir ABC üçgeni ve üçgenin iç teğet çemberi çizilmiştir.



Bu bilgilerden üçgenin iç açıortaylarının ortak bir noktada kesiştikleri ve bu noktanın iç teğet çemberin merkezi olduğu kanıtlanabilir. Bu kanıt size neyi ifade eder?

- A) Yalnızca bu üçgen için iç açıortayların ortak bir noktası olduğu
- B) Herhangi bir eşkenar üçgende iç açıortayların ortak bir noktası olduğu
- C) Herhangi bir üçgende iç açıortayların ortak bir noktası olduğu
- D) Sadece bazı üçgenlerde iç açıortayların ortak bir noktası olduğu

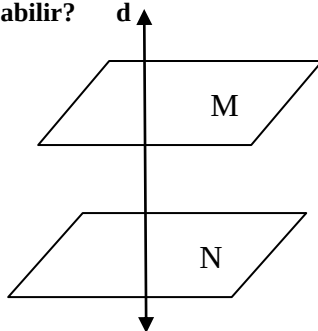
18. Aşağıdaki üç ifadeyi inceleyin

{1} Aynı doğruya dik olan iki düzlem paraleldir.

{2} Paralel iki düzlemden birine dik olan doğru diğerine de diktir.

{3} Eğer iki düzlem eş uzaklıktaysa paraleldir.

Aşağıdaki şekilde d doğrusunun M düzlemine ve N düzlemine dik olduğu verilmiştir. Buna göre yukarıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri M düzleminin N' ye paralel olmasının nedeni olabilir?



- A) Yalnız {1}
- B) Yalnız {2}
- C) {1} ya da {3}
- D) {1} ya da {2}

19. Aşağıda iki önerme verilmiştir.

1. Eğer bir şekil kare ise köşegenleri birbirine diktir.

2. Eğer bir şeklin köşegenleri birbirine dik ise şekil karedir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) 1' in doğru olduğunu kanıtlamak için 2' nin doğru olduğunu kanıtlamak gerekir.
- B) 2' nin yanlış olduğunu kanıtlamak için köşegenleri birbirine dik olan ve kare olmayan bir şekil bulmak yeterlidir.
- C) 2' nin doğru olduğunu kanıtlamak için köşegenleri birbirine dik olan bir kare bulmak yeterlidir.
- D) 1' in doğru olduğunu kanıtlamak için 2' nin yanlış olduğunu kanıtlamak gerekir.

20. “Bir doğruya ait farklı üç noktadan yalnız biri diğer ikisinin arasındadır.”

Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) Aynı doğru üzerindeki üç noktadan yalnız biri iki nokta arasında olabilir.
- B) Bir doğru üzerindeki farklı üç nokta aynı anda başka iki noktanın arasında kalmaz.
- C) Bir doğru üzerindeki farklı üç noktadan en az bir tanesi diğer ikisinin arasında olabilir.
- D) Aynı doğru üzerindeki farklı üç noktadan ikisinin arasında olan sadece bir nokta vardır.

EK 6. YARI YAPILANDIRILMIŞ GÖRÜŞME SORULARI

1. OTURUM

1. Soru: 5'i anlatır mısın?

2. Soru: $4+3$ 'ü anlatır mısın?

3. Soru: $28 + \square = 30 + \triangle$

dörtgen ve üçgen kutunun yerine gelebilecek sayılara üçer örnek verir misin?

Dörtgen ve üçgen yerine gelebilecek sayılar arasında bir ilişki var mıdır?

Bu ilişkiyi cebirsel olarak açıkla mısın?

4. Soru: $a+3b$ ifadesini anlatır mısın?

5. Soru: 'Ardışık iki sayının toplamı tek sayıdır.' ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?

6. Soru: 'İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.' ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?

7. Soru: 'Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı çift sayıdır.' ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?

8. Soru: 'x çift sayı ise $2x+5$ sayısı tek sayıdır.' ifadesini açıkla mısın?

İfadesi her zaman doğru mudur?

Bu ifadeyi cebirsel olarak açıklayabilir misin?

9. Soru: 'Bir sayıyı önce 4 ile çarp, sonra 8 ekle' ifadesi ile

'Aynı sayıya 2 ekle sonra 4 ile çarp'

ifadelerini karşılaştırır mısın?

Cebirsel olarak karşılaştırır mısın?

10. Soru: 'x=3 için $4x+8$ ifadesi neye eşit olur?'

'x=3 için $8+4x$ ifadesi neye eşit olur?'

'x=3 için $2(2x+4)$ ifadesi neye eşit olur?'

Bu ifadeleri birbirleriyle karşılaştırır mısın?

Aralarındaki ilişkiyi cebirsel olarak açıkla mısın?

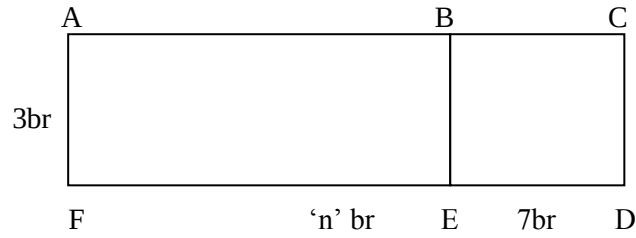
11. Soru: 

Bu örüntünün 6. adımında kaç bilye vardır?

Kaçıncı adımda 25 bilye vardır?

Bu örüntünün kuralını cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

12. Soru:



AFDC dikdörtgensel bölgenin alanını “ $n+7$ ” ile 3’ ün çarpımı olarak düşünebiliriz. Peki sence bu dikdörtgensel bölgenin alanı için düşünebileceğimiz diğer ifadeler nelerdir?”

2.OTURUM

1. Soru: Üçgeni anlatır mısın? Tanımlar mısın?

2. Soru: ‘Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° ’ dir.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?

3. Soru: ‘Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farkının mutlak değerinden ise büyüktür.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?

İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

4. Soru: ‘Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, üçüncü kenar uzunluğunun karesine eşittir.’

İfadesi sence doğru mudur?

İfadesinin doğruluğunu gösterebilir misin? Açıklar mısın?

İfadeyi cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

3.OTURUM

İlk Bölüm-Üçgen Eşitsizliği

Bir gün öğretmeni Efe’ ye proje ödevi verir. Proje ödevine göre Efe’ nin üçgen şeklinde bir bahçe tasarlaması gerekmektedir. Efe’ ye öğretmeni bahçenin bir kenarının uzunluğunun 9 cm, diğer kenarının uzunluğunun ise 5 cm olması gerektiğini belirtir.

Kavramsal-somut dünya becerilerine yönelik;

Üçgeni nasıl çizmesi gerektiğini düşünen Efe sence nasıl bir yol izler?

Sence Efe üçüncü kenarı 4 cm olarak seçebilir mi? Açıklar mısın?

Sence Efe üçüncü kenarı 14 cm olarak seçebilir mi? Açıklar mısın?

Nesnel-süreçsel sembolik dünya ve aksiyomatik formal dünya becerilerine yönelik;

Bu durumda Efe' nin çizmesi gereken üçgen için nasıl bir bağıntı oluşturursun?

Bunu genellemek istersek nasıl açıklarsın?

Cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

İkinci Bölüm-Pisagor Bağıntısı

Efe'nin bir diğer proje ödevinde öğretmeni ondan bir ev modeli tasarlamasını istemiştir. Efe tasarlayacağı evin çok farklı bir modelde olmasını ve dikkat çekmesini istemektedir. Efe günlerce düşünür ve 4 odalı bir ev tasarlamaya karar verir. Evin özellikleri şu şekildedir:

-Evin üç odası kare olacaktır.

-Kare şeklinde odalardan ikisinin birer duvarı birbirine dik olacaktır.

-Bu üç oda birbirleri ile birer köşelerinden ikişer ikişer çakışacaktır.

-Dördüncü odanın duvarları bu üç odanın birer duvarı ile ortak olacak ve aralarında kalacak şekilde tasarlanmaktadır.

Kavramsal-somut dünya becerilerine yönelik;

Evi nasıl çizmesi gerektiğini düşünen Efe sence nasıl bir yol izler?

Üç odanın arasında kalan oda hangi geometrik şekle benzemektedir?

Efe kare şeklinde bir odanın bir kenarını 4 cm olarak, diğer kare şeklindeki odanın bir kenarını 3 cm olarak seçerse, üçüncü kare şeklinde olan odanın bir kenarı kaç cm olabilir?

Arada kalan dördüncü odanın kenar uzunlukları hakkında ne söyleyebilirsin?

Evin alanı için ne söyleyebilirsin?

Eğer Efe kare şeklindeki odalardan birinin bir kenar uzunluğunu 6 cm, diğerinin bir kenar uzunluğunu 8 cm olarak seçseydi üçüncü odanın bir kenarı ve arada kalanın odanın kenar uzunlukları hakkında ne söyleyebilirsin?

Nesnel-süreçsel sembolik dünya ve aksiyomatik-formal dünya becerilerine yönelik;

Bu durumu genellemek istersek nasıl bir bağıntı oluşturursun?

Cebirsel gösterimle ifade edebilir misin?

