

ORTOGONAL DÜZENLER ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Aslıhan ALHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

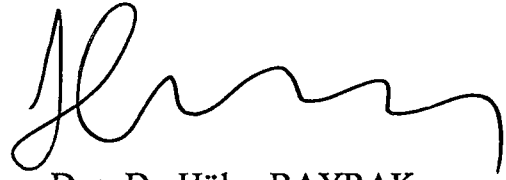
T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
EĞİTİM ARAŞTIRMA MERKEZİ

Mayıs 2001

ANKARA

116690

Aslıhan ALHAN tarafından hazırlanan ORTOGONAL DÜZENLER
ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun
olduğunu onaylarım.



Doç. Dr. Hülya BAYRAK

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi
olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Semra ORAL ERBAS 

Üye : Doç. Dr. Hülya BAYRAK 

Üye : Doç. Dr. Reşat KASAP 

Üye : _____

Üye : _____

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına
uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. ORTOGONAL DÜZENLERİN TANIMLARI	10
3. ORTOGONAL DÜZENLERDE KISITLARIN MAKSİMUM SAYISI	13
4. ORTOGONAL DÜZENLERİN KURULUŞ TEKNİKLERİ.....	17
4.1. Birim İndeksli Ortogonal Düzenin Kuruluşu	21
4.2. Ortogonal Düzenlerin Kuruluşunda Farklar Yöntemi	26
4.3. İki Kuvvetli Düzenlerden Üç Kuvvetli Düzenlerin Kuruluşu	39
4.4. Ortogonal Düzenlerin Kuruluşunda Projektif Geometrinin Kullanımı	41
4.5. Ortogonal Düzenlerin Kuruluşunda Ana Etki Planları	48
4.6. Ortogonal Düzenlerin Kuruluşunda Hadamard Matrisleri	56
5. ORTOGONAL DÜZENLERLE İLİŞKİLİ DÜZENLER	60
5.1. Değiştirilmiş Faktöriyel Tasarımlar	61

5.2.	Çok Faktörlü ve Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları Arasındaki İlişki	64
5.3.	Kısmen Dengeli Düzenler ve Ortogonal Düzenler	66
5.4.	Ortogonal Latin Kare Setleri ve İki Kuvvetli, Birim İndeksli Birleşik Ortogonal Düzenler	68
5.5.	Çok Faktörlü Tasarımlar Gibi Ortogonal Düzenlerin Kullanımı	70
5.6.	İki Kuvvetli Ortogonal Düzenler ve Genelleştirilmiş Hadamard Matrisleri	71
5.6.1.	Hadamard matrisleri ve belirli konfigürasyonlar	73
5.6.2.	Genelleştirilmiş Hadamard matrisi ile ortogonal düzenlerin kuruluşu	74
6.	SONUÇ	76
	KAYNAKLAR	77
	ÖZGEÇMİŞ	81

ORTOGONAL DÜZENLER ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA
(Yüksek Lisans Tezi)

Aslıhan ALHAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2001

ÖZET

Ortogonal düzenler, deney düzenlemelerinden oluşan istatistiksel bir tekniktir. Bu çalışmada, ortogonal düzenlerin kuruluş problemi üzerinde duruldu. Bu probleme cebirsel ve geometrik özellikler ile yaklaşıldı. Bu nedenle tüm kaynak taramaları tamamlandı ve konunun anlaşılabilmesi amacıyla örnekler verildi. Ayrıca, bazı önemli deneme düzenleri verildi. Bu düzenlerin kuruluşunda ortogonal düzenlerin özellikleri kullanıldı. Mevcut ortogonal düzenlerden diğer deneme düzenlerine geçiş yolları araştırıldı. Bunun sonucunda, ortogonal düzenlerin tüm deneme düzenlerine genişletilebileceği gösterildi.

Bilim Kodu : 406.01.01

Anahtar Kelimeler : Ortogonal Düzenler, Projektif Geometri, Ana Etki Planları, Hadamard Matrisleri, Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı, Kısmen Dengeli Düzenler, Ortogonal Latin Kare Setleri.

Sayfa Adedi : 90

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Hülya BAYRAK

THE RESEARCH ON ORTHOGONAL ARRAYS**(M. Sc. Thesis)****Aslıhan ALHAN****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****May 2001****ABSTRACT**

Orthogonal arrays are statistical method which the terminology comes from experimental design. In this study, it has been considered on problems of construction of orthogonal arrays. Further, it is analyzed by algebraically and geometrical properties. Hence, all references are researched and examples are given for understandable this of subject. Moreover, some important experimental designs are given. It used properties of orthogonal arrays for these arrays of construction. Finally, it is researched other experimental designs transition from existence of orthogonal arrays. Therefore, orthogonal arrays could have expanded to others experimental designs.

Science code : 406.01.01

Key Words : Orthogonal Arrays, Projective Geometry, Main-Effect Plans, Hadamard Matrices, Balanced Incomplete Block Design, Partially Balanced Arrays, Sets of Orthogonal Latin Squares.

Page Number : 90

Adviser : Assoc. Prof. Hülya BAYRAK

TEŞEKKÜR

Uzun bir zamana yayılan bu tezin hazırlanması aşaması tüm sıkıntılarına, yoğun çalışma temposu içerisinde olmasına rağmen bana zaman ayırıp fikirleri ve eleştirileriyle katkıda bulunan Değerli Hocam Doç. Dr. Hülya BAYRAK'a, hoşgörüsünü bizden hiç eksik etmeyen Sayın Prof. Dr. Semra ORAL ERBAŞ'a ve bana maddi-manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan değerli annem Sultan ALHAN'a, değerli babam Battal ALHAN'a ve kardeşlerime sonsuz teşekkür ederim.

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1.	OA(27,4,3,3) için ortogonal düzen 26
Çizelge 4.2.	$d_1 - d_2 \equiv d \pmod{13}$ fark seti 29
Çizelge 4.3.	İki kuvvetli OA(18,7,3,2) ortogonal düzeni 30
Çizelge 4.4.	GF(3) ün toplamsal tablosu 32
Çizelge 4.5.	GF(3 ²) nin elemanlarının çarpım tablosu 34
Çizelge 4.6.	OA(27,9,3,2) ortogonal düzeni 36
Çizelge 4.7.	OA(27,4,3,2) ortogonal düzeni 36
Çizelge 4.8.	OA(24,12,3,2) ortogonal düzeni 41
Çizelge 4.9.	OA(8,4,2,3) ortogonal düzeni 43
Çizelge 4.10.	İki indeksli OA(8,7,2,2) ortogonal düzeni 47
Çizelge 4.11.	Birim indeksli OA(4,3,2,2) ortogonal düzeni 48
Çizelge 4.12.	Ana etki planı ile kurulan iki indeksli OA(50,11,5,2) ortogonal düzeni 54
Çizelge 4.13.	Çizelge 4.12. nin devamı 55
Çizelge 4.14.	OA(16,8,2,3) ortogonal düzeni 59
Çizelge 5.1.	OA(18,7,3,2) yapılarda ortogonal düzeni 67
Çizelge 5.2.	OA(9,4,3,2) ortogonal düzeni 69

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
H_n	n mertebeli Hadamard matrisi
$H(p,h)$	Genelleştirilmiş Hadamard matrisi
k	Ortogonal düzenin kısıtı
L	Her bir bileşende görülen değerlerin sayısı
λ	Ortogonal düzenin indeksi
N	Ortogonal düzenin büyüklüğü
s	Ortogonal düzenin düzeyi
t	Ortogonal düzenin kuvveti
Kısaltmalar	
ARBIBD	Afin Yeniden Çözülebilir Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı
BIBD	Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı
GDD	Grup Bölünebilir Tasarım
GF	Sonlu Cisim
OA	Ortogonal Düzen
PG	Projektif Geometri
SIBIBD	Simetrik Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı

1. GİRİŞ

Matematikte matris olarak bilinen ortogonal düzenler istatistikte başvurulan deney düzenleme yöntemlerinden biridir. Ortogonal düzenler kendilerine uyan yapıdan başka bir yapıya geçişte kullanılır. Bu deneme düzenlerinde işlem çiftlerinin birlikte görülme sayısı her deneme düzeninde farklıdır.

Bu tez çalışmasının amacına yönelik olarak yapılmış olan bazı araştırmaların özetleri aşağıda verilmiştir.

Paley (1933), ilk defa Hadamard matrislerinin yapısını sistemli olarak çalışmıştır (Raghavarao, 1971).

Bose ve Kishen (1940), ortogonal düzenler ve simetrik faktöriyel düzenlerde etki karışımı teorisi arasındaki ilişkiyi kurmuşlardır (temelde sonlu projektif geometriyi kullanmışlardır) (Bose ve Bush, 1952).

Kishen (1942), ortogonal Latin kareler ve Latin kareler kavramını tanıtmıştır ve Latin kare düzenleri Latin küplere, hiperküplere ayrıca, ortogonal Latin küplere genelleştirmiştir (Raghavarao, 1971).

Plackett ve Burman (1943-1946), faktörlerin sayıları çok fazla olduğunda standart prosedürün kullanışsız olduğunu belirtmişler ve bundan dolayı endüstriyel denemelerde tam faktöriyel denemelerden kaçınmak için bazı yöntemleri geliştirmişlerdir. Basit lineer hipotezlerin varsayımı altında, ana-etkilerin belirlenen problemi ile maksimum kesinliğin bir kombinatöryele indirgenebildiğini açıklamışlardır. Tüm kullanışlı çözümlerin pratik olarak faktörlerin her biri iki düzeyli olduğunda bulunabildiğini; fakat çözümlerin iki düzeyden fazlası için oldukça sınırlı olduğunu vurgulamışlardır. Dengeli

tamamlanmamış bloklarda bazı karşılaştırmalar için bu çözümleri göstermişlerdir. Plackett ve Burman 2 düzeyli tüm olası $N \leq 100$ ($N=92$ hariç) için tasarımların tablolarını oluşturmuşlardır. [Daha sonra L. Baument, S. Golomb ve M. Hall Jr. (1962) $N=92$ için çözüm bulmuşlardır (Chakravarti, 1963)].

Rao (1946), ortogonal düzen kavramını geliştirmiştir ayrıca d kuvvetinden hiperküpleri bularak λ indeksinin, s 'nin kuvveti olduğunda ortogonal düzenler için d kuvvetli hiperküpler üzerine çalışmıştır. Etki karışımli faktöriyel tasarımlarla bağlantı kurarak onları kullanmıştır. Ayrıca, projektif geometriyi $[PG(t,s)]$ kullanarak hiperküplerin kuruluşunu düşünmüştür (Bose ve Bush, 1952; Raghavarao, 1971).

Rao (1947), ortogonal düzenlerin, d kuvvetli hiperküplerin alt sınıfı biçiminde olduğunu açıklamış ve ortogonal düzen kavramının en genel biçimini göstermiştir. Rao, ortogonal düzenlerde kullanılan özelliklerin tüm t faktör etkileşimleri kadar ölçülen kesirli yinelenen tasarımlar için de kullanılabileceğini ispatlamıştır (Bose ve Bush, 1952; Raghavarao, 1971).

Kishen (1949), birinci mertebeden $s \times s \times s$ ikişerli ortogonal küplerin maksimum sayısının $s^2 + s - 2$ olduğunu göstermiş ve s asal sayı yada asal sayının kuvveti olduğunda bu düzenler için bir kuruluş yöntemini vermiştir (Raghavarao, 1971).

Seiden (1950), sonlu geometri terimleriyle ifade edilebilen istatistiksel terimler arasındaki ilişkileri açıklamıştır. Simetrik faktöriyel tasarımlarda faktörlerin maksimum sayısını belirlemede geometrik yorumların faydalı olduğunu göstermiştir.

Bush (1952), birim indeksli ortogonal düzenler için Rao'nun ortogonal düzenlerdeki kısıtların sınırlarını değerlendirmiştir (Raghavarao, 1971). Ayrıca, ortogonal Latin kareler setinin geliştirilmesi üzerinde durmuştur ve bu genişletmenin birim indeksli ortogonal düzenler için olduğunu vurgulamıştır. Kısıtların üst sınırı için teoremler ve ispatlarını vermiştir. Sonlu cisim $GF(s)$ (Galois field) in elemanları olarak tanımlanan katsayılara sahip polinomların bir sınıfını göz önüne alarak ortogonal düzenlerin kuruluş yöntemini vermiştir.

Bose ve Bush (1952), ortogonal düzenlere ilişkin teoriyi geliştirmişlerdir (Seiden, 1954). Ortogonal düzenlerin, ortogonal Latin karelerin doğal bir geliştirilmesi gibi düşünülebileceğini vurgulayarak, bazı deney tasarımlarının çeşitli problemlerinde faydalı olacağını açıklamışlardır. Plackett ve Burman tarafından düşünülen optimum çok faktörlü tasarımların aslında 2 kuvvetli ortogonal düzenler olduğunu göstermişlerdir. 2 ve 3 kuvvetli ortogonal düzenler için kısıtların maksimum olası sayısını bulmak için üst sınır vermişlerdir. Ayrıca, bu ortogonal düzenlerin kuruluşu için bazı yöntemler üzerinde çalışmışlardır.

Seiden (1954), keyfi bir t kuvvetindeki ortogonal düzenlerin kuruluşu için bir yöntem vermiş ve bu yöntemin Bose tarafından verilen farklar yönteminin bir modifikasyonu olduğunu vurgulamıştır. Ayrıca, Plackett ve Burman'ın iki düzeye sahip çok faktörlü tasarımların her biri 3 kuvvetindeki ortogonal düzenlerin kuruluşu için kullanım problemi üzerinde durarak 2 kuvvetli düzenlerden 3 kuvvetli düzenlere geçiş yöntemini göstermiştir. Ayrıca, $OA(36, 13, 3, 2)$ ortogonal düzeni kurarak, bu yöntemi, kısıt sayısı 13'den daha az olan düzenler için kullanılabileceğini açıklamıştır.

Saxena (1960), herhangi s düzeyli küplerin yapısı için Kishen tarafından verilen yöntemden farklı yöntem vermiştir (Raghavarao, 1971).

Addelman ve Kempthorne (1961), simetrik faktöriyel deneylerin ana-etki planlarının kuruluş yöntemini ortaya koymuşlardır. Sonlu projektif geometriyi kullanarak ana-etki planları gibi iki kuvvetli ortogonal düzenler yöntemi ile bazı kullanışlı ortogonal düzenlerin kurulabileceğini göstermişlerdir.

Chakravarti (1963), kısmen dengeli düzen ile ortogonal düzen arasındaki ilişkiyi belirtmiştir ve ortogonal kısmen dengeli düzen için örnek vermiştir. Ortogonal Latin kare setlerinin özellikleri üzerinde durmuştur. Ayrıca, çok faktörlü tasarımlar gibi ortogonal düzenlerin kullanılabileceğini vurgulamıştır ve ortogonal düzenlerin kuruluş yöntemlerini göstermiştir.

Shrikhande (1964), 2 kuvvetli ortogonal düzenler ile afin yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımları ve genelleştirilmiş Hadamard matrisleri arasındaki ilişkileri vurgulayarak bu düzenler için bazı kuruluş yöntemlerini göstermiştir.

Seiden ve Zemach (1966), ortogonal düzenlerin yapısal ve cebirsel özellikleri üzerinde durmuşlardır. $OA(\lambda 2^t, k, 2, 4)$ ortogonal düzenleri $\lambda=1,2,3,4,5$ indeksleri için ayrıntılarıyla araştırmışlardır ve k 'nın maksimum değerini bu durumların her birinde saptamışlardır. Ayrıca, Pure matematikte ortogonal düzenlerin Hadamard matrisleri olarak adlandırıldığını vurgulamışlardır.

Blum, Schatz ve Seiden (1970), t kuvvetine sahip tek indeksli 2 düzeyli ortogonal düzen için kısıtların olası maksimum sayısının $t+1$ olduğunu göstermişlerdir.

Raghavarao (1971), ortogonal düzenlerin tanımını, farklı kuruluş yöntemlerini ve bu düzenlerdeki kısıtların maksimum sayısı ile ilgili teoremler ve ispatları vermiştir. Ayrıca, ortogonal düzenlerin projektif geometri ile ilişkisi, ortogonal düzenlerin çarpımı ve ortogonal düzenlerin kısmen dengeli düzenlerle ilişkisi üzerinde temel açıklamalarda bulunmuştur.

Rao (1973), asimetric ortogonal düzenleri biçimsel olarak tanıtmıştır (Hedayat, Pu ve Stufken, 1992).

Ray-Chadhuri ve Singhi (1988), işaretli ortogonal düzenlerin varlığı üzerinde durmuşlardır. Düzenin indeksi (λ) yeteri kadar büyük olduğunda ortogonal düzenlerin varlığını göstermişlerdir. İlişkilerin karşılıklı münasebetleriyle farklı ortogonal düzenlerin sayısını araştırmışlardır.

Hedayat ve Stufken (1988), iki düzeyli faktörlere sahip ortogonal düzenlerde faktörlerin maksimum sayısını ve kuruluşunu çalışmışlardır. Ayrıca, bu düzenlerin kuruluş tekniklerini vermişlerdir.

Hedayat, Pu ve Stufken (1992), iki kuvvetli asimetric ortogonal düzenlerin kuruluşu için genel teknikleri sunmuşlardır. Bunları düzenlerin yeni ailelerinin bulunmasında kullanmışlardır. Ayrıca, asimetric ortogonal düzenlerin kuruluş yöntemlerini vermişlerdir.

Roberts Jr. (1992), “Transversal tanımlı Latin kareler”i ve “benzer alt kareler” ile ilişkili Latin kareleri tanımlamıştır. Benzer alt kareli ikişerli ortogonal Latin karelerin setleri için araştırmanın hesaplama zamanında indirgemeyi yarattığını göstermiştir. Bu ortogonal setlerin her birinde Latin kareler tüm transversal tanımlı ve tüm benzer alt kareleri kapsadığını açıklamıştır.

Lin ve Draper (1992), iyi bilinen kesirli faktörlerin projeksiyon özelliklerinin deneysel araştırmalarda etkili olacağını göstermişlerdir. 2,3,4,5 boyutlar için tasarımların projeksiyonlarını tartışmışlardır ve 12-tekrarlı durumu ayrıntılarıyla vermişlerdir. Bu projeksiyonların pratik kullanımını sayısal örneklerle desteklemişlerdir.

Mukerjee ve Kageyana (1994), Rao'nun ortaya koyduğu ortogonal düzenlerin kombinatöryel özelliklerden türetilbildiğini açıklamışlardır. Ayrıca, iki sembolü tamamlanmış ortogonal düzenleri araştırmışlardır. Tamamlanmış ortogonal düzenleri $8 \leq t \leq 13$ durumları için inceleyerek bazı sonuçlara ulaşmışlardır.

Cheng (1995), ortogonal düzenlerin önemli geometrik özelliğe dayandırabildiğini vurgulamıştır. Bu düzenlerin, $t+1$ ve $t+2$ faktörler üzerindeki projeksiyonunu düşünmüştür ve faktör ile üzerindeki projeksiyonların bazı özellikleri gösterilmiştir.

Box ve Tyssedal (1996), belirli ortogonal düzenlerin projektif özellikleri üzerinde durmuşlardır. Çalışmalarında buldukları sonuçları Plackett ve Burman tarafından üretilen tasarımlara uygulayarak projektif özelliklerin sınıflandırılabileceğini göstermişlerdir.

Rosenbaum (1996), kalite tasarımlarında bazı kullanışlı birleşik yayılım deneyleri üzerinde çalışmıştır. Yayılım deneylerini hata faktörleri ile tanıtmıştır ve yayılımda kontrol faktörlerinin etkilerini incelemiştir. Yayılım deneyleri çalışmasında ortogonal düzenler üzerinde durmuştur. Yayılım deneyleri için farklı kullanışlı birleşik düzenler ve böyle tasarımların kuruluşu için farklı genel yöntemleri göstermiştir.

Hedayat ve Stufken (1999), birleşik ortogonal düzenlerin eş zamanlı yayılım etkileri ve çalışma konumu için Taguchi'nin direkt product düzenlerine alternatif olduğunu önceki çalışmalarında belirtmişlerdir. Pratikte daha fazla ilgilenilen parametreler için iki düzeyli birleşik ortogonal düzenler üzerinde durmuşlardır. Faktörler ve tekrarların verilen sayıları için maksimum olası kuvvete sahip düzenler tanıtılarak bu düzenlerin bulunmasındaki basit yöntemleri, zıtlık karşılaştırmalarını kullanarak göstermişlerdir. Ayrıca, ortogonal düzenlerden birleşik ortogonal düzenlerin elde edilebileceğini açıklamışlardır.

Ortogonal Düzenlerin Tarihçesi

İstatistikte ortogonal düzen kavramı ilk defa Rao (1946) tarafından hiperküpler olarak tanıtılmıştır. Sylvester, 1867'ye kadar 2 kuvvetli ($t=2$), 2 düzeyli ($s=2$) ortogonal düzenleri düşünmüştür ayrıca, $N=2^t$ durumu için ortogonal düzenlerin kuruluşunu vermiştir. Paley (1933) $t=2$, $s=2$ ortogonal düzenleriyle ilgilenmiştir, çünkü polytopes teorisi $t=2$, $s=2$ ortogonal düzen uygulamalarıdır. Paley'in çalışması Hotelling (1944) tarafından önerilen ağırlık tasarımlarının problemini çözmüş ayrıca, kimyada faktöriyel tasarımların uygulandığı noktadan hareketle iki düzey ve iki kuvvetli ortogonal düzenleri düşünmüştür ve Mood (1946) tarafından çalışma devam ettirilmiştir.

Plackett ve Burman (1943-1946) fizik ve endüstrideki araştırmalarda Paley'in çalışmalarını uygulamışlar ve çok faktörlü tasarımların terminolojisini çalışmışlardır. Onların çalışmaları Hotelling tarafından önerilen probleme tamamen çözüm sağlamıştır. Plackett ve Burman tarafından kurulan tasarımların bazıları Kempthorne (1947) ve Brownlee ve Loraine (1948) tarafından analizi yapılmıştır.

Rao, Bose, Bush, Ray Chadhuri ve diğerleri ikiden büyük kuvvetli düzenlerin çalışmasında önde gelmiştir. Bose (1961) bilgi teorisinde ortogonal düzenleri uygulamıştır, bilgi teorisi ve deneylerin tasarımı problemleri arasında benzerlikleri belirtmiştir (Seiden, 1954; Seiden ve Zemach, 1966).

Son zamanlarda Seiden, Zemach, Hedayat, Stufken, Lin, Draper, Box, Tyssedal, Rosenbaum ve diğerlerinin çalışmaları genellikle ortogonal düzenlerin kuruluşu üzerinedir. Ortogonal düzenler ile bazı tasarımların ilişkilerini belirtmişlerdir, ayrıca ortogonal düzenlerin projeksiyonları ve projektif özelliklerini açıklamışlardır.

Tez çalışması kapsamında yer alan konuların, bölümlere göre dağılımı aşağıdaki gibidir.

Tezin birinci bölümünü oluşturan giriş bölümünde, çalışmanın kapsamını içeren genel bir tanıtım yapıldı, konuyla ilgili daha önce yapılan çalışmaların özetleri ve ortogonal düzenlerin tarihçesi hakkında bilgi verildi.

Tezin ikinci bölümünü ortogonal düzenlerin çeşitli tanımları oluşturdu.

Tezin üçüncü bölümünde ortogonal düzenlerdeki kısıtların maksimum sayısı ile ilgili teoremler verildi.

Tezin dördüncü bölümünü oluşturan ortogonal düzenlerin kuruluş teknikleri bölümünde, çeşitli metotlar ayrı alt başlıklar halinde açıklandı. Bu açıklamalarda, kuruluş yöntemleri anlatılarak ilgili teoremler ve küçük örnekler verildi.

Tezin beşinci bölümünde ortogonal düzenlerle ilişkili düzenler üzerinde duruldu. Ortogonal düzenler ve ilişkili düzenler ile ilgili teoremler ve küçük örnekler verildi.

Altıncı bölümü oluşturan sonuç bölümünde ise daha önce yapılmış olan çalışmalardan da yararlanılarak ortogonal düzenler ve bu düzenlerin özellikleri ile ilgili kısaca bilgi verildi.



2. ORTOGONAL DÜZENLERİN TANIMLARI

Ortogonal düzenleri tanıtmak amacıyla çeşitli tanımlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Tanım 2.1:

Ortogonal düzenler, ilk defa Rao (1947) tarafından tanıtıldı, faktöriyel tasarımlarda yaygın olarak kullanıldı. Özellikle $OA(N, s^k, t)$ ile gösterilen, ortogonal düzen büyüklüğü N , k kısıtı, s düzeyi ve t kuvvetli ortogonal düzen s sembollerinin $k \times N$ boyutlu X matrisidir, öyle ki X 'in herhangi $t \times N$ alt matrisinin sütun vektörleri aynı dereceli sıklıkla görülür. λ genellikle ortogonal düzenin indeksi olarak isimlendirildiğinde, $N = \lambda s^t$ biçiminde olduğu açıktır. Faktöriyel tasarımlara uygulamada, her bir satır faktöre uygundur, semboller, faktör düzeylerini ve her bir sütun faktör düzeylerinin birleşimini gösterir. Böylece her $OA(N, s^k, t)$, her bir s düzeye sahip k faktörü için N -tekrarlı faktöriyel tasarımı tanımlar (Cheng, 1995).

Tanım 2.2:

Faktöriyel denemeler iki veya daha fazla faktörün tek başına etkilerinin ve etkileşimlerini araştırmak için düşünülür. İki özelliği vardır:

- (1) Bir faktörün denenecek durumlardan her biri öteki faktörlerin denenecek durumlarından her biri ile ayrı ayrı işlem kombinasyonu teşkil edilir.
- (2) İşlem kombinasyonları homojen olarak seçilen deney etkenlerine rasgele ve yeteri kadar tekrarlı dağıtılır.

Tanım 2.3:

$A = [a_{ij}]$ matrisi düşünölsün, her bir a_{ij} 0, 1, ..., $s-1$ tamsayılarını göstere. Burada $s > 1$ dir. A matrisi, N sütunlu k satırlı dikdörtgensel matristir ve sütunlar düzenin bloklarıdır. Bu düzenden elde edilebilen tüm t -satırlı N sütunlu alt matrisler düşünölsün, ($t \leq k$). Herhangi t -satırlı alt matrisin her bir sütunu t -özdeş alt sütun vektörü (tuple) gibi, N' yi kapsayan her bir t -satırlı alt matris olarak kabul edilebilir. C_i^k nın her biri t -satırlı, N sütunlu λ defa tekrarlanan her bir s^t olası sıralı t -özdeş alt sütun vektörünün (tuple) her birini kapsayan düzenden elde edilen alt matris olan A matrisine $OA(N, k, s, t)$ ortogonal düzeni denilecektir. Burada N büyüklük, k kısıtlar, s düzeyler, t kuvvet ve λ indekstir. Her bir λs^{t-1} defa tekrarlı 0,1,..., $s-1$, s tamsayılarını kapsayan satırları bu tanıma uyar. $\lambda=1$ durumunda böyle düzenlere “birim indeksli ortogonal düzenler” denilecek (Bush, 1952).

Tanım 2.4:

p asal sayı olduğunda, düzeyleri $s=p^m$ varsayılabilen faktör k olsun. k 'dan seçilen herhangi t faktöre uygun tüm s^t işlem kombinasyonları, alt sette eşit sayıda görölme özelliği ile, s^k faktöriyel deneyden N işlem kombinasyonlarının alt setinden meydana gelen s düzeyleri ve k kısıtları ile, N büyüklüğünde, t kuvvetli ortogonal düzenleri ifade eder. (Addelman ve Kempthorne, 1961).

Ortogonal düzenlerde düzeyin iki olması durumunda aşağıdaki tanımlama yapılabilir:

Tanım 2.5:

λ , t ve k pozitif tamsayı olsun (burada $t \geq 2$ ve $k \geq t$ dir). $k \times \lambda 2^t$ boyutlu sıfır ve birlerden oluşan matris S olsun. $t \times \lambda 2^t$ boyutlu S 'nin alt matrisi t alınsın. Bu takdirde S 'ye (2-düzeyle) ortogonal düzen denilir, Eğer t 'nin her birinin seçimi için 2^t olası sütun vektörlerinin her biri λ defa görülüyor ise. S 'ye λ indeksli, t kuvvetli ve k kısıtların (k, λ, t) -düzeni denilir (Blum, Schatz ve Seiden, 1970).



3. ORTOGONAL DÜZENLERDE KISITLARIN MAKSİMUM SAYISI

Ortogonal düzenlerin kuruluşunda kısıtların maksimum sayısı önemlidir. Kısıtlara ilişkin tanım ve teoremler aşağıda verilecektir.

$f(N, k, s)$ (Bazen sadece k alınır) olası kısıtların maksimum sayısını gösterebilir. Böylece s asal sayı yada asal sayının kuvveti olduğunda $f(N, s, 2)=s+1$ dir (Bush, 1952).

Ortogonal düzenlerin özelliği, tüm t faktör etkileşimleri kadar ölçülen kesirli yinelenen tasarımı için kullanılabilirliğidir.

Teorem 3.1:

λ indeksli (N, k, s, t) ortogonal düzeninde $(N=\lambda s^t)$;

$$N - 1 \geq \binom{k}{1}(s-1) + \dots + \binom{k}{u}(s-1)^u, \quad t = 2u \quad \text{ise} \quad (3.1)$$

ve

$$N - 1 \geq \binom{k}{1}(s-1) + \dots + \binom{k}{u}(s-1)^u + \binom{k-1}{u}(s-1)^{u+1}, \quad t = 2u + 1 \quad \text{ise} \quad (3.2)$$

dir (Rao, 1947).

Bush (1952) birim indeksli ortogonal düzenler için Rao'nun (3.1) ve (3.2) sınırlarını değerlendirdi ve aşağıdaki teoremi ispatladı:

Teorem 3.2:

Birim indeksli $OA(s^t, k, s, 3)$ ortogonal düzeni için, $t \leq s$ ise, bu takdirde

$$k \leq s + t - 1 \quad s \text{ çift ise} \quad (3.3)$$

ve

$$k \leq s + t - 2 \quad s \text{ tek ve } t \geq 3 \text{ ise} \quad (3.4)$$

vardır. Bu teoremin ispatı aşağıdaki yardımcı teoreme dayandırılmıştır.

Yardımcı Teorem 3.1:

$s \geq 3$ ve birim indeksli $OA(s^3, k, s, 3)$ ortogonal düzeni için

$$k \leq s + 2 \quad s \text{ çift ise} \quad (3.5)$$

ve

$$k \leq s + 1 \quad s \text{ tek ise} \quad (3.6)$$

dir (Raghavarao, 1971).

Teorem 3.3:

Birim indeksli $OA(s^t, k, s, t)$ ortogonal düzeninde, $s \leq t$ ise, bu takdirde

$$k \leq t + 1 \quad (3.7)$$

dir (Raghavarao, 1971).

Teorem 3.4:

$\lambda-1, s-1$ ile bölünemiyorsa, bu takdirde $OA(\lambda s^2, k, s, 2)$ ortogonal düzeni için

$$\theta = \frac{\sqrt{1 + 4s(s-1-b)} - (2s - 2b - 1)}{2} \quad (3.8)$$

olduğunda

$$k \leq \left[\frac{\lambda s^2 - 1}{s - 1} \right] - [\theta] - 1 \quad (3.9)$$

dir. Burada b , $\lambda - 1$ 'in $s - 1$ ile bölümündeki kalandır (Raghavarao, 1971).

Teorem 3.5:

$OA(\lambda s^3, k, s, 3)$ ortogonal düzeni için aşağıdaki eşitsizliğe ulaşmak mümkündür.

$$k \leq \left[\frac{\lambda s^2 - 1}{s - 1} \right] + 1 \quad (3.10)$$

(Raghavarao, 1971).

Teorem 3.6:

$\lambda - 1$ ile $s - 1$ bölünemiyorsa, bu takdirde $OA(\lambda s^3, k, s, 3)$ ortogonal düzeni için θ (3.8) da verildiği gibi olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$k \leq \left[\frac{\lambda s^2 - 1}{s - 1} \right] - [\theta] \quad (3.11)$$

(Raghavarao, 1971).

Teorem 3.7:

$s = p^v$, $\lambda = p^u$ (p asal sayı) verildiğinde, $c = [u/v]$ olursa kısıtların sayısı aşağıdaki gibidir

$$k = \frac{\lambda(s^{c+1} - 1)}{s^c - s^{c-1}} + 1 \quad (3.12)$$

Ayrıca; Bu koşul altında 2 kuvvetli $OA(\lambda s^2, k, s, 2)$ ortogonal düzenini kurmak mümkündür (Chakravarti, 1963).

Teorem 3.8:

$t > 3$ iken

(i) $s = 2^n > t$ ise, bu takdirde $s+1 \leq k \leq s+t+1$ dir

(ii) $s = p^n > t$ ve p tek asal sayı olduğunda, bu takdirde $s+1 \leq k \leq s+t+2$

dir (Chakravarti, 1963).

Önerme 3.1:

k ve k' sırasıyla $OA(\lambda s^t, k, s, t)$ ve $OA(\lambda s^{t-1}, k', s, t-1)$ ortogonal düzenlerin kısıtlarının maksimum sayısını gösterebilir. Bu takdirde $k \leq k'+1$ dir (Seiden ve Zemach, 1966).

Önerme 3.2:

$\lambda = q2^n$ ve q tek sayı ise, bu takdirde herhangi $OA(\lambda 2^t, t+1, 2, t)$ düzeni $OA(\lambda 2^t, t+n+1, 2, t)$ düzenine genişletilebilir. Bu takdirde kısıtların maksimum sayısı $t+n+1$ dir (Seiden ve Zemach, 1966).

4. ORTOGONAL DÜZENLERİN KURULUŞ TEKNİKLERİ

Faktörlerin sayıları çok fazla olduğunda standart prosedürün kullanışsız olmasından dolayı endüstriyel ve fiziksel denemelerde tamamlanmış faktöriyel denemelerden kaçınmak için Plackett ve Burman (1943-1946) optimum çok faktörlü deney tasarımı yöntemini geliştirmişlerdir (Bose ve Bush (1952) bu tasarımların aslında 2 kuvvetli ortogonal düzenler olduğunu vurgulamışlardır).

Plackett ve Burman tamamlanmış faktöriyel deneylerin yürütülmesinde L^n yapıları göz önüne almışlardır. Burada L her bir bileşende görülen değerlerin sayısıdır. Çalışmalarında $L=2$ durumunun $N \leq 100$ için irdelemişlerdir ($N=92$ hariç). Daha sonra L. Baurment, S. Golomb ve M. Hall Jr. (1962) $N=92$ için çözüm bulmuşlardır ve $L=3,4,5,7$ için $N=L^f$ tasarımlarını vermişlerdir.

Çalışmaları sonucunda aşağıdaki özellikler ortaya konulmuştur:

- (a) Her bir bileşen L değerlerinde gözüktüğünde, eğer $L^2 N'$ ye bölünür ve ayrıca belirli koşullar sağlanırsa, maksimum belirli N yapılarının kullanılması ile tüm ana etkileri belirlenebilir.
- (b) $L=2$ için, problemin çözümünün amacı uygulamayı tamamlamaktır. Tasarımlarda maksimum kesinlik ile tahmin edilebilen bileşenler arasındaki belirli etkileşimlerin etkileri $N=L^f$ biçimindedir.

Şüphesiz kesinlik ölçülebilen yapıların sayısı ile artırılır ve bu kapsam deneycinin kararına bağlıdır. Yapıdaki her bir bileşen her yerde iki değerde görülür; onların birine nominal değer (sınıflama ölçme düzeyi) ve diğerine de uç değer denilmesi uygun olacaktır.

Optimum çok faktörlü deney tasarımına ilişkin kuruluş yöntemi aşağıdaki örnek ile açıklanabilir.

Araştırmacı $L=2$, $N=16$ olan tasarımın 9 bileşeni kapsadığını düşünsün. Burada her bir bileşenin her yerde iki değerde görüldüğüne karar verilir. Böyle bir düzeni oluşturmak için aşağıdaki işaretleme göz önüne alınır:

++++-+-+--+--

Bu ilk sütun (yada satır) gibi düşünülür, döngüsel olarak bir yer on dört defa değiştirilerek son satır eksi işaretlerinin eklenmesiyle tamamlanmış tasarım oluşturulur, böylece:

+---+---+---+---+
 ++---+---+---+---+
 +++---+---+---+---+
 ++++---+---+---+---+
 -++++---+---+---+---+
 +-++++---+---+---+---+
 -+-++++---+---+---+---+
 +-+---+---+---+---+
 +++---+---+---+---+
 -++---+---+---+---+
 ---++---+---+---+---+
 +---++---+---+---+---+
 -+---++---+---+---+---+
 --+---++---+---+---+---+
 ---+---++---+---+---+---+
 ----+---++---+---+---+---+

elde edilir. Bu tasarımın satırları yapılar ve sütunları bileşenler olarak alınabilir. Bu durumda dokuz bileşen için yalnızca dokuz sütuna ihtiyaç vardır. Herhangi dokuz sütun seçilebilir, burada ilk dokuz sütun seçilsin, bu takdirde

Bileşenler									
Yapı	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+	-	-	-	+	-	-	+	+
2	+	+	-	-	-	+	-	-	+
3	+	+	+	-	-	-	+	-	-
4	+	+	+	+	-	-	-	+	-
5	-	+	+	+	+	-	-	-	+
6	+	-	+	+	+	+	-	-	-
7	-	+	-	+	+	+	+	-	-
8	+	-	+	-	+	+	+	+	-
9	+	+	-	+	-	+	+	+	+
10	-	+	+	-	+	-	+	+	+
11	-	-	+	+	-	+	-	+	+
12	+	-	-	+	+	-	+	-	+
13	-	+	-	-	+	+	-	+	-
14	-	-	+	-	-	+	+	-	+
15	-	-	-	+	-	-	+	+	-
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-

bulunur. Bileşenler 1,2,...8,9 olarak sınıflandırılır: 3. yapıda 7 bileşene uyan artı yapıdaki 7 bileşenin uç değerde görüldüğü anlamındadır. 12. yapıdaki 3 bileşene uyan eksi yapıdaki 3 bileşenin nominal değerde görüldüğü anlamındadır; ve benzer şekilde devam eder. Her bir bileşen sekiz defa uç değerde ve sekiz defa nominal değerde görülür, öyle ki düzenin mükemmel olarak simetrik olduğu görülür. Araştırmacı bu tasarıma göre kurulan yapılarda ilerler ve onların karakteristikleri ne olursa olsun ölçümü yapar ve sonuca ulaşılır (Plackett ve Burman, 1943-1946).

Ortogonal düzenlerin kuruluşunda Latin karelerden faydalanılabilir.

Tanım 4.1:

$0,1,\dots,s-1$ tamsayıları s 'nin seti ve her tamsayı s defa görülmesiyle $s \times s$ kare düzenlensin. Her bir tamsayı her satır ve her sütunda yalnız bir defa görülüyorsa, kareye s mertebeli Latin kare denilir.

Bir kare diğer karenin üzerine konulurken, birinci karenin her sayısı ikinci karenin her sayısı ile yalnız bir defa görülüyorsa iki kare bir diğerine ortogonaldır denilir. En fazla $s-1$ tane ikişerli Latin kare mevcuttur, Latin kare olmayan diğer iki kare de eklenebilir, fakat bu kareler ortogonal sette her diğer Latin kareye ortogonaldır. Bu karelerin ilki ilk satırın her bir elemanı 0, ikinci satırın her bir elemanı 1, ve böyle alınmasıyla kurulur. İkinci kare birinci karenin transpozudur. Tam tersine bu iki kareye herhangi ortogonal karenin Latin kare olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece toplam $s+1$ tane ortogonal kare olması mümkündür ve s asal sayı yada asal sayının kuvveti olduğunda bu sınır bulunduğu bilinir. Bu sınır bulunduğu, ortogonal karelerin tam setine sahip olduğu söylenilebilir. Tam sete örnek olarak $s=3$ seçilsin:

000	012	012	012
111	012	120	201
222	012	201	120

Her karenin elemanı sırasıyla bir satırda yazılırsa, kareler aşağıdaki biçimde gösterilebilir:

000111222	(birinci kare)
012012012	(ikinci kare)
012120102	(üçüncü kare)
012201120	(dördüncü kare)

Bu biçimde bir satır ve diğer satır üzerine eklendiğinde her bir dokuz olası sıralı çift tamamen bir defa görülür. Bu herhangi iki satırın özelliğidir (Bush, 1952).

4.1. Birim İndeksli Ortogonal Düzenin Kuruluşu

s asal sayı yada asal sayının kuvveti iken üç kuvvetli ve birim indeksli ortogonal düzenlerin kuruluş problemine cevap sağlaması amacıyla aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 4.1.1:

$s > t$ ve p asal sayı olduğunda, $s = p^n$ ise, bu takdirde $OA(s^t, s+1, s, t)$ düzenini kurulabilir (Bush, 1952).

İspat :

$e_i \in GF(s)$, $i=0,1,...,s-1$ ve $s=p^n$ olsun. $GF(s)$ cismi üzerinde,

$$y_j(x) = a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \dots + a_1x + a_0$$

polinomu düşünölsün. Böyle s^t tane polinom olduğu açıktır, t katsayılarının her birinden dolayı cisimde s farklı değerin olduğu varsayılır ve $0,1,...,s^t-1$ değeri üzerinde j alt indis sıralaması yapılabilir. 0'dan s-1'e satırların sayısı ve 0'dan s^t-1 'e sütunların sayısı iken $s \times s^t$ düzeni oluşturulur. Özellikle i.inci satır ve j.inci sütunda bulunan eleman

$$y_j(e_i) = e_u$$

olur (u tamsayı). Düzenin sonunda birim indeksli ve t kuvvetli ortogonal düzen elde edilebildiğini söylemek mümkündür.

Tersine özdeş iki t-özdeş alt sütun vektörü (tuple) nedeniyle t satırların seçilebildiği farz edilsin ve polinomlar birleştirilsin. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \dots + a_1x + a_0 &= y_j(x) \\ a'_{t-1}x^{t-1} + a'_{t-2}x^{t-2} + \dots + a'_1x + a'_0 &= y'_j(x) \end{aligned}$$

olur. Satırlar $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_t}$ sonlu cisminin elemanlarıdır. Yukarıdaki eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında,

$$A_{t-1}e_{i_t}^{t-1} + A_{t-2}e_{i_t}^{t-2} + \dots + A_1e_{i_t} + A_0 = 0$$

elde edilir. 1'den t'ye kadar r sıralamada gösterildiği gibi, $A_{t-1}, A_{t-2}, \dots, A_1, A_0$ t tane türdeş lineer denklem elde edilir. Polinomların özdeş olmasından dolayı, A'ların hepsi sıfır olamaz. Dolayısıyla çözümün varlığı için Vandermonde tipindeki matrisin determinantı kullanılır (Bush, 1952).

Tanım 4.1.1:

$A \in M_n(F)$ Vandermonde matrisi ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$ olsun (F cisimdir); A matrisi aşağıdaki biçimdedir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Vandermonde matrisinin determinantı $\det A = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$ olur.

Bu nedenle Vandermonde matrisi ancak ve ancak n parametreleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ farklı ise tekil olmayan matristir.

Vandermonde matrisi F cisiminden en fazla $n-1$ dereceli katsayılar ile

$p(x) = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ bulunan polinomun ara değerini bulma probleminde kullanılır. $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve $y_1, y_2, \dots, y_n$ verilen F 'nin elemanları olduğunda,

$$p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1$$

$$p(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$p(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \dots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n$$

yazılır. Ara değeri bulma problemi n tane bilinmeyen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ katsayıları için n tane denklemden oluşan bir sistemdir ve ayrıca $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^T \in F^n$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in F^n$ olduğunda $Aa = y$ biçimindedir, $A \in M_n(F)$ Vandermonde matrisidir. Ara değeri bulma probleminin $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktaları farklıysa daima çözümü vardır. A için bu sonuç tekil olmayandır (Roger ve Charles, 1990).

Tanım 4.1.2:

$n \geq 2$ olmak üzere $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ olsun. $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'e göre $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, Vandermonde matrisinin determinantını gösterebilir. Vandermonde determinantı aşağıdaki biçimdedir.

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Bu determinant;

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) (x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2) (x_4 - x_3) \dots (x_n - x_{n-1})$$

biçiminde ifade edilir. Sağ tarafta bulunan ifade $1 \leq j < i \leq n$ için $(x_i - x_j)$ terimlerinin çarpımıdır. Bu takdirde,

$$\det V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

olur.

$V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ özdeşliğinin tümevarım ile doğruluğu sağlanır. $n = 2$ için bu açıktır, bu nedenle $n \geq 3$ ve özdeşlik $n-1$ için sağlandığı varsayılabilir. Aşağıdaki gibi Vandermonde matrisinde satır işlemleri yaparak Vandermonde determinantı bulunur: n .inci satırdan x_1 ile çarpılan $(n-1)$.inci satır çıkarılır, bir sonraki satır için $(n-1)$.inci satırdan x_1 ile çarpılan $(n-2)$.inci satır çıkarılır, vb. işlemlere devam edilerek bulunur.

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) (x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) V(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ dir (Sernesi, 1993).}$$

Ayrıca,

$$V(x_1) = 1 \text{ ve } V(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0 \text{ dir (Cohn, 1994).}$$

Burada Vandermonde matrisinin elemanlarını sonlu cismin elemanları olan e_{i_j}' 'ler ile ilişkilendirildiğinde Vandermonde matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$V = \begin{bmatrix} e_{i_1}^{t-1} & e_{i_1}^{t-2} & \dots & e_{i_1} & 1 \\ e_{i_2}^{t-1} & e_{i_2}^{t-2} & \dots & e_{i_2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{i_t}^{t-1} & e_{i_t}^{t-2} & \dots & e_{i_t} & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e_{i_1} & e_{i_2} & \dots & e_{i_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{i_1}^{t-2} & e_{i_2}^{t-2} & \dots & e_{i_t}^{t-2} \\ e_{i_1}^{t-1} & e_{i_2}^{t-1} & \dots & e_{i_t}^{t-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde. Bununla birlikte, Vandermonde tipindeki matrisin determinanı $\det(V) = \prod (e_{i_k} - e_{i_l})$ özelliğine sahiptir ve bu nedenle $e_{i_k} = e_{i_l}$ olmadıkça matris tekil değildir, satırların farklı olmasından dolayı bu durumun imkansız olduğu açıktır.

Böylece tüm t-özdeş alt sütun vektörlerin (tuple) farklı olduğu gösterilebilir ve s satırları kurulduğunda bu ispat tamamlanmış olur. Bununla birlikte, katsayıları e_{i_u} olan polinom ile birleştirilen bu sütunlara u değeri atanmasıyla ortogonal anlamda birden fazla satır eklenebilir. Bu durumda $A_{t-1} = 0$ olacak ve t-1 bilinmeyenli t-1 tane denklem ortaya çıkacaktır. Burada çözümün varlığı için t-2 satırlı Vandermonde determinanı gereklidir ve bu imkansızdır. Buradan aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Sonuç 4.1.1:

p asal sayı olduğunda $OA(s^3, k, s=p^n, 3)$ düzeni için,

$$f(s^3, s, 3) = s+1, \quad s=p^n, \quad p \text{ tek asal sayı}$$

$$f(s^3, s, 3) = s+2, \quad s=2^n$$

olur (Bush, 1952).

Örnek 4.1.1:

Yukarıdaki yöntem kullanılarak OA(27,4,3,3) ortogonal düzeni kurulsun.

GF(3)'ün elemanları 0,1,2 ve

$$y_j(x) = a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \dots + a_1x + a_0; a_i \in GF(S), i = 0,1,\dots,t-1$$

eşitliği ile bulunan $s^t=3^3=27$ polinom aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, y_2 = 1, y_3 = 2, y_4 = x, y_5 = x+1, y_6 = x+2, y_7 = 2x, y_8 = 2x+1, \\ y_9 &= 2x+2, y_{10} = x^2, y_{11} = x^2+1, y_{12} = x^2+2, y_{13} = x^2+x, y_{14} = x^2+x+1, \\ y_{15} &= x^2+x+2, y_{16} = x^2+2x, y_{17} = x^2+2x+1, y_{18} = x^2+2x+2, y_{19} = 2x^2, \\ y_{20} &= 2x^2+1, y_{21} = 2x^2+2, y_{22} = 2x^2+x, y_{23} = 2x^2+x+1, y_{24} = 2x^2+x+2, \\ y_{25} &= 2x^2+2x, y_{26} = 2x^2+2x+1, y_{27} = 2x^2+2x+2. \end{aligned}$$

Bu takdirde ortogonal düzenin dört satırı aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur:

Çizelge 4.1. OA(27, 4, 3, 3) için ortogonal düzen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0
2	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0	0	1	2	2	0	1	2	0	1	1	2	0	0	1	2
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2

4.2. Ortogonal Düzenlerin Kuruluşunda Farklar Yöntemi

Rasgele tamamlanmış blok düzeni; rasgele blok düzeninde blok genişliğinin işlem sayısına (veya deneme sayısını) eşitliği bilinmektedir. Bazen her blokta bütün denemelerin uygulanma imkanı bulunmayabilir. Bu takdirde tamamlanmamış blok düzeninin kullanılması gerekir. Tamamlanmamış blok tasarımlarının kuruluşu için farklar yöntemi kullanıldı.

Tanım 4.2.1:

P, B sırasıyla elemanları denemeler ve bloklar olan iki set olsun. Aşağıda verilen özellikleri sağlayan deneme düzeni rasgele tamamlanmamış blok düzenidir.

1. P kümesi v elemana sahiptir (v tane elemanı vardır).
2. $B = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$ b elemanlıdır (blokların setidir).
3. $\forall B_i$, k elemanına sahiptir. Burada $k < v$ dir.
4. $p, q \in B$ ve $p \neq q$ olmak üzere her bir (p, q) çifti B 'nin λ elemanında görülür ($\lambda > 0$).
5. $\forall a \in P$, B 'de r defa görülür.

(Curtis, 1984).

Tanım 4.2.2:

$\text{mod } v$ kalan sınıflarının bir cümlesi $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ olsun. Eğer $d_i - d_j$, $i \neq j$ biçimindeki tüm farklar, sıfır olmayan $\text{mod } v$ kalanlarının tümünü veriyor ve bu farkların her biri τ defa görünüyorsa $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ cümlesine $\text{mod } v$ fark cümlesi yada (v, k, τ) fark cümlesi denir.

Teorem 4.2.1:

$\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ bir (v, k, τ) fark cümlesi olsun. Bu takdirde $(Z_v, \{B_0, B_1, \dots, B_{v-1}\})$ bir (v, k, τ) düzenidir. Burada bloklar,

$$B_j := \{[j + d_i]_v \mid i=1, 2, \dots, k\}, j=0, 1, 2, \dots, v-1$$

B_j 'nin elemanları $\text{mod } v$ kalan sınıflarıdır.

Örnek 4.2.1:

$\{0,1,2,4,5,8,10\} \in Z_{15}$ bir $(15, 7, 3)$ fark cümlesi biçimindedir. Bloklar ise,

$$B_j = \{j, j+1, j+2, j+4, j+5, j+8, j+10\}, 0 \leq j \leq 14$$

ile verilir ve bir $(15, 7, 3)$ düzeni olduğu görülür. Bu örnek, 3-boyutlu projektif geometri $PG(3,2)$ gibi düşünülebilir. Gerçekten de $PG(3,2)$, $s=2$ için 15 blok ve 15 değişken ihtiva eder. $s=2$ durumunda blokların taşıdığı değişken sayısı 7 dir. O halde blokların her biri bir $PG(2,2)$ Fano geometri biçimindedir.

$s=1$ durumunda 35 doğru (blok) ve 35 nokta (değişken) vardır. Blokların (doğruların) taşıdığı nokta sayısı ise 3 tür. Bu durumda $\tau=1$ dir.

Aşağıda verilen düzeni $s=2$ durumu için $PG(3,2)$ ile tanımlamak mümkündür.

(0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111)
 (0001, 0010, 0011, 1000, 1001, 1010, 1011)
 (0001, 0100, 0101, 1000, 1001, 1100, 1101)
 (0010, 0100, 0110, 1000, 1010, 1100, 1110)
 (0001, 0010, 0011, 1100, 1101, 1110, 1111)
 (0001, 0100, 0101, 1010, 1011, 1110, 1111)
 (0010, 0100, 0110, 1001, 1011, 1101, 1111)
 (0001, 1000, 1001, 0110, 0111, 1110, 1111)
 (0010, 1000, 1010, 0101, 0111, 1101, 1111)
 (0100, 1000, 1100, 0011, 0111, 1011, 1111)
 (0011, 0101, 0110, 1000, 1011, 1101, 1110)
 (0011, 1001, 1010, 0100, 0111, 1101, 1110)
 (0101, 1001, 1100, 0010, 0111, 1011, 1110)
 (0110, 1010, 1100, 0001, 0111, 1011, 1101)
 (0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111)

Örnek 4.2.2:

$\{0,4,5,7\}$ cümlesi mod 13'e göre fark cümlesidir. Bu cümle yardımıyla bloklar oluşturulur. Bloklar (doğrular) ve taşıdıkları değişkenlerin (noktaların) $PG(3,2)$ projektif geometri özelliklerini gösterdiği açıktır.

$d \neq 0 \pmod{13}$ için $d_1 - d_2 \equiv d \pmod{13}$ olacak şekilde (d_1, d_2) çiftleri aşağıdaki biçimde verilir.

Çizelge 4.2. $d_1 - d_2 \equiv d \pmod{13}$ fark seti

D	$d_1 - d_2$	d	$d_1 - d_2$
1	(5,4)	7	(7,0)
2	(7,5)	8	(0,5)
3	(7,4)	9	(0,4)
4	(4,0)	10	(4,7)
5	(5,0)	11	(5,7)
6	(0,7)	12	(4,5)

Örneğe göre bloklar oluşturulduğunda,

$$B_t = \{t, 4+t, 5+t, 7+t\}, t=0,1,2,\dots,12$$

olmak üzere aşağıdaki biçimdedir.

$$B_0 = \{0,4,5,7\} \quad B_4 = \{4,8,9,11\} \quad B_8 = \{8,12,13,2\} \quad B_{12} = \{12,3,4,6\}$$

$$B_1 = \{1,5,6,8\} \quad B_5 = \{5,9,10,12\} \quad B_9 = \{9,13,14,3\}$$

$$B_2 = \{2,6,7,9\} \quad B_6 = \{6,10,11,0\} \quad B_{10} = \{10,14,15,4\}$$

$$B_3 = \{3,7,8,10\} \quad B_7 = \{7,11,12,1\} \quad B_{11} = \{11,15,16,5\}$$

Bu düzen için, $b=13$, $v=13$, $r=4$, $k=4$, $\tau=1$ dir. $\{0,4,5,7\}$ cümlesi, $(13, 4, 1)$ -fark cümlesi (difference set) dir (Bayrak, 1991).

Farklar yöntemi 2 kuvvetli ortogonal düzenlerin kurulmasında kullanılacaktır.

Tanım 4.2.3:

$\lambda = \alpha\beta$ olsun. 1 kuvvet ve β indeksli $OA(\beta s, k, s, 1)$ farklı düzenler $g = \alpha s$ nin yan yana konulmasıyla 2 kuvvetli $OA(\lambda s^2, k, s, 2)$ ortogonal düzenine β -yeniden çözülebilirdir denilir. 1-yeniden çözülebilir düzene tamamiyle yeniden çözülebilirdir denilir.

Aşağıda verilen 2 kuvvetli $OA(18, 7, 3, 2)$ ortogonal düzeni göz önüne alınsın. $(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)$ sütun vektörlerinin her birinin iki defa görüldüğü herhangi 2×18 alt matrisinde kolayca doğrulanabilir.

Çizelge 4.3. İki kuvvetli $OA(18,7,3,2)$ ortogonal düzeni

```

012012012012012012
012012120201120201
012120012201201120
012201201012120120
012120201120012201
012201120120201012
000000111111222222

```

Örneğin; $OA(18,6,3,2)$ düzeni, tamamiyle yeniden çözülebilir son satırın silinmesiyle Çizelge 4.3.'de verilen $OA(18, 7, 3, 2)$ ortogonal düzeninden elde edilebilir.

$\lambda = \alpha\beta$ ve $OA(\lambda s^2, k, s, 2)$ ortogonal düzeni β -yeniden çözülebilir ise, bu takdirde en azından birden fazla satır eklenebilir ve $k+1$ kısıtlı ortogonal düzen elde edilebilir. Yeni satırda ilk bileşen düzenine ait olan sütunlardaki Σ 'nın $(0,1,2,\dots,s-1)$ elemanlarının seti) ilk elemanı, sonraki bileşen düzenine ait olan

sütunlardaki Σ nın ikinci elemanı konulur ve böyle devam eder. düzenin ortogonalliği yok edilmeksizin bir satırdan fazla eklemek mümkün olabilir.

Teorem 4.2.2:

s elemanlarından meydana gelen (toplanabilir grup) modülü M olsun, $e_0, e_1, \dots, e_{s-1}$. r satırlı a yapısını M'ye bağlı elemanlar ile aşağıdaki gibi bulmak mümkündür

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{array}$$

öyle ki herhangi iki satırın uygun elemanlarının arasındaki farklarda, M'nin her bir elemanı λ defa (λs) görülür; bu takdirde $OA(\lambda s^2, r, s, 2)$ ortogonal düzeni tamamen yeniden çözülebilir kuruluş yöntemi aşağıdaki gibidir: M'nin toplanabilir tablosu yazılır. Bu takdirde elemana uyan toplanabilir tablonun satırı ile yapıdaki her bir eleman yerine yazılır (Σ seti $0, 1, \dots, s-1$ gibi alınırsa sadece son ek kullanılır). Bu $OA(\lambda s^2, r, s, 2)$ tamamen yeniden çözülebilir düzeni verir. $r+1$ kısıtlı $OA(\lambda s^2, r+1, s, 2)$ düzenin bulunmasında yeni satır eklenebilir.

Biçimsel ispat gösterilmeden önce $OA(18, 7, 3, 2)$ ortogonal düzeni ile teoremin kullanımı örnek olarak verilecektir. M için kalıntı sınıfları (mod 3) olan Galois cismi $GF(3)$ alınsın. $e_0=0, e_1=1, e_2=2$ olsun. M'nin toplamsal tablosu

Çizelge 4.4. GF(3) ün toplamsal tablosu

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2	e_0
e_2	e_2	e_0	e_1

olmak üzere, altı satırlı yapı denemesiyle kuruluşu zor değildir.

$$\begin{aligned}
 &e_0 e_0 e_0 e_0 e_0 e_0 \\
 &e_0 e_0 e_1 e_2 e_1 e_2 \\
 &e_0 e_1 e_0 e_2 e_2 e_1 \\
 &e_0 e_2 e_2 e_0 e_1 e_1 \\
 &e_0 e_1 e_2 e_1 e_0 e_2 \\
 &e_0 e_2 e_1 e_1 e_2 e_0
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

herhangi iki satırda uygun elemanlar arasındaki farklar olduğunda e_0, e_1, e_2 üç elemanlarının her biri iki defa görülür. OA(18,6,3,2) tamamen yeniden çözülebilir ortogonal düzen içinde (4.2.1) yapısı değiştirilerek sıralanır, Çizelge 4.4.'de sunulan toplamsal tablonun uyan satırlarında son ek ile M'nin her bir elemanı yerine yazılır. Böylece

$$\begin{aligned}
 e_0 &\rightarrow 0,1,2 \\
 e_1 &\rightarrow 1,2,0 \\
 e_2 &\rightarrow 2,0,1
 \end{aligned}$$

Çizelge 4.3.'de verilen düzeninin ilk altı satırı bulunmuş olur.

Sonunda OA(18,7,3,2) düzeni bulunması 6 tane 0 (ilk iki grubun sütunlarını gösterir), 6 tane 1 ile devam eden, 6 tane 2 ile devam eden yeni satır eklenir.

Teoremin biçimsel ispatına devam edilsin. s^2 M'nin bir elemanına uygun olan her bir sınıf, s sınıfları içinde M'nin elemanlarına bölünebilen bileşenler 2×1

vektörleridir. $e_i - e_j = e_k$ ise bu takdirde $\begin{pmatrix} e_i \\ e_j \end{pmatrix}$ e_k 'ya uyan sınıflara aittir. M 'nin toplanabilir tablosunda geriye kalan iki farklı satırın uygun elemanların farkı sabittir öyle ki vektörler e_k ya uyan sınıfın tüm vektörlerinden meydana gelen e_i ve e_j ye uyan satırlardan düzenlenir. Yapıdaki herhangi iki satırın uygun elemanları arasındaki farklardan dolayı, yapı genişletilirken M 'nin her bir elemanı yalnızca λ defa görülür ve toplamsal tablonun uygun satırlarıyla her bir eleman yerine yazılır böylece her vektör de λ defa görülür (uygun son ekler M 'den $0,1,\dots,s-1$ setine Σ seti değiştirilmesiyle elemanlar yerlerine yazılacaktır) (Bose ve Bush, 1952).

Örnek 4.2.3:

$s=3$, $\lambda=3$ iken $OA(27,9,3,2)$ ortogonal düzeninin kurulabileceği gösterilsin. Burada $GF(3^2)$ nin elemanları primitif kökün kuvvetleri ve polinomlar gibi ifade edildi.

$$\begin{aligned} \alpha_0 = 0, \alpha_1 = x^0 = 1, \alpha_2 = x, \alpha_3 = x^2 = 2x+1, \alpha_4 = x^3 = 2x+2, \\ \alpha_5 = x^4 = 2, \alpha_6 = x^5 = 2x, \alpha_7 = x^6 = x+2, \alpha_8 = x^7 = x+1 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

M 'nin elemanları α_0, α_1 ve α_5 , ve M 'nin elemanlarında $GF(3^2)$ nin elemanları ayrıntılarıyla kurulursa

$x=0$ için;

$$\begin{aligned} \alpha_0, \alpha_2, \alpha_6 &\rightarrow \alpha_0 \\ \alpha_1, \alpha_3, \alpha_8 &\rightarrow \alpha_1 \\ \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7 &\rightarrow \alpha_5 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Çizelge 4.5. $GF(3^2)$ nin elemanlarının çarpım tablosu

	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0
α_1	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
α_2	α_0	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_1
α_3	α_0	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_1	α_2
α_4	α_0	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_1	α_2	α_3
α_5	α_0	α_5	α_6	α_7	α_8	α_1	α_2	α_3	α_4
α_6	α_0	α_6	α_7	α_8	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
α_7	α_0	α_7	α_8	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
α_8	α_0	α_8	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7

(4.2.3) ile verildiği gibi M 'de elemanlar ayrıntılarıyla planlanmasıyla ve sırasıyla α_0, α_1 ve α_5 yerine 0,1 ve 2 konulduğunda, ilk sütunlar elde edilir:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & \\
 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & \\
 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & \\
 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & \\
 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & \\
 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 &
 \end{array}$$

(4.2.4)

Yukarıdaki yöntem kullanılarak aşağıdaki yapılara ulaşılır:

$x=1$ için;

$$\alpha_0, \alpha_3, \alpha_7 \rightarrow \alpha_0$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \rightarrow \alpha_1$$

$$\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8 \rightarrow \alpha_5$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	2	2	0	2
0	1	0	1	2	2	0	2	1
0	0	1	2	2	0	2	1	1
0	1	2	2	0	2	1	1	0
0	2	2	0	2	1	1	0	1
0	2	0	2	1	1	0	1	2
0	0	2	1	1	0	1	2	2
0	2	1	1	0	1	2	2	0

$x=2$ için;

$$\alpha_0, \alpha_4, \alpha_8 \rightarrow \alpha_0$$

$$\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7 \rightarrow \alpha_1$$

$$\alpha_5, \alpha_2, \alpha_3 \rightarrow \alpha_5$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	2	0	2	1	1	0
0	2	2	0	2	1	1	0	1
0	2	0	2	1	1	0	1	2
0	0	2	1	1	0	1	2	2
0	2	1	1	0	1	2	2	0
0	1	1	0	1	2	2	0	2
0	1	0	1	2	2	0	2	1
0	0	1	2	2	0	2	1	1

GF(3)'ün elemanlarının eklenmesi ve modül 3'e indirgenmesiyle OA(27,9,3,2) ortogonal düzeni aşağıdaki gibi elde edilir:

Çizelge 4.6. OA(27,9,3,2) ortogonal düzeni

0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	2	0	1	0	1	2	2	0	1	1	2	0
0	1	2	0	1	2	1	2	0	2	0	1	2	0	1	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0
0	1	2	1	2	0	2	0	1	2	0	1	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0	0	1	2
0	1	2	2	0	1	2	0	1	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0	0	1	2	1	2	0
0	1	2	2	0	1	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	2	0	1
0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	2	0	1	0	1	2
0	1	2	1	2	0	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	2	0	1	0	1	2	2	0	1

Bu durumda kısıtların maksimum sayısı 13 tür. (4.2.4) ün satırlarına ortogonal ve kendi aralarında ortogonal olan dörtten fazla satır bulmaya çalışılsın. 3.cü mertebeden MOLS'dan (İkişerli Ortogonal Latin Kare) birim indeksli OA(9, 4, 3, 2) düzeni kurulsun. Açıkça böyle düzen

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0
 \end{array} \quad (4.2.5)$$

Sütunların her biri üçer defa tekrar edilirse 27 sütun elde edilir.

Çizelge 4.7. OA(27,4,3,2) ortogonal düzeni

0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	0	0	0	2	2	2	0	0	0	1	1	1
0	0	0	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	2	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0

Çizelge 4.6.'daki düzenin ve (4.2.5) de verilen yapının satırları kısıtların maksimum sayısı ile $OA(27,13,3,2)$ düzeni oluşturulur (Raghavarao, 1971).

Seiden (1954) aynı probleme farklı bir şekilde yaklaşmıştır. Bush (1952) , Bose ve Bush (1952) tarafından formüle edilen farklar yöntemini temel alarak $OA(36, 13, 3, 2)$ ortogonal düzenini kurmuştur.

Farklar yöntemi teoreminin koşullarını sağlayan deneme ve yanılma yoluyla bulunan 12×12 yapısı aşağıda verilmiştir:

```

0000000000 00
0000111122 22
0012220111 20
1002210220 11
1200022110 21
0021012201 21
0210120202 11
1020122021 10
0201221021 01
2001021212 10
2010212012 01
0100202211 12

```

$OA(36,13,3,2)$ düzenin on iki satırı sıfır, bir ve iki elemanlarının döngüsel permütasyonundan meydana gelen iki dönüşümün bu yapıya eklenmesiyle bulunur. 13. satır aynı sıradaki yapıların her biri altında; örneğin, dört tane sıfır, dört tane bir ve dört tane iki konulmasıyla eklenecektir.

Burada iki soru doğal olarak oluşur. Birincisi 12'den büyük satırların sayısından meydana gelen yapı oluşturulmasında, aynı kuruluş yönteminin kullanılmasının mümkün olup olmadığıdır. İkincisi ise 13'den fazla satırlardan meydana gelen ortogonal düzen kuruluşunda 12 satırlı yapının kullanılmasının mümkün olup olmadığıdır.

Bose ve Bush (1952) un belirttiği ortogonal düzenlerin cebirsel özellikleri temel alınarak, bu soruların cevaplarının ispatında kullanılır.

i.inci sütun ile j.inci elemanları eşit olan j rastlantılara sahip sütunların sayısını n_{ij} gösterebilir. Düzenin $OA(N, k, s, t)$ ortogonal düzeni olması için gerekli koşul $0 \leq h \leq t$ için, h sayısı ne olursa olsun aşağıdaki eşitliği sağlamasıdır:

$$\sum_{j=0}^k n_{ij} C_h^j = C_h^k (\lambda s^{t-h} - 1), i = 1, 2, \dots, N.$$

h'nin 0, 1 ve 2 değerlerini aldığı düşünülen durumda ve koşul indirgenir:

$$(*) = \begin{cases} \sum_{j=0}^k n_{ij} = \lambda s^2 - 1 \\ \sum_{j=0}^k j n_{ij} = k(\lambda s - 1) \\ \sum_{j=0}^k j(j-1) n_{ij} = k(k-1)(\lambda - 1) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

Seiden, (*) eşitliklerini kullanarak bu soruların cevaplarının olumsuz olduğunu göstermiştir (Seiden, 1954).

4.3. İki Kuvvetli Düzenlerden Üç Kuvvetli Düzenlerin Kuruluşu

Ortogonal düzenlerde iki kuvvetli düzenlerden üç kuvvetli düzenlere geçiş mümkündür. Buna ilişkin teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.3.1:

$e_0, e_1, \dots, e_{s-1}$ elemanlarının sıralı seti S olsun. Herhangi bir t tamsayısı için, S 'nin elemanları s^t farklı sıralı t -özdeş alt sütun vektörü (tuple) düşünölsün. Onlar s^{t-1} e bölünebilir. s elemandan meydana gelen t -özdeş alt sütun vektörünün (tuple) her biri, S 'nin elemanlarının devirli permütasyonu altında kapalıdır. Bu setler S_i ile gösterildi, ($i=1, 2, \dots, s^{t-1}$). S 'ye ait olan elemanlar ile r satırların oluşturduğu bir yapı bulmak mümkündür

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{array} \quad (n = \lambda s^{t-1})$$

öyle ki her bir S_i 'ye ait olan elemanların sayısı her t satırlı alt matriste aynıdır. Bu sayı λ olsun. O halde bu yapı $(\lambda s^t, r, s, t)$ ortogonal düzeni kurmada kullanılabilir. Bu yapıya $(t-1)$ kuvvetten bir düzen eklenirse $(\lambda s^{t+1}, r+1, s, t)$ ortogonal yapıya ulaşılır (Seiden, 1954).

Teorem 4.3.2:

$s=2$ ise, bu takdirde 3 kuvvetli düzenin kuruluşu için, herhangi 2 kuvvetli ortogonal düzen Teorem 4.3.1'in koşullarını sağlayan yapı biçimindedir (Seiden, 1954).

Aşağıdaki örnek Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.2'yi açıklayacak yapıdadır. Plackett ve Burman (1943-1946) tarafından kurulan $OA(12,11,2,2)$ ortogonal düzeni göz önüne alınsın.

```

0110111000 10
0101110001 01
0011100010 11
0111000101 10
0110001011 01
0100010110 11
0000101101 11
0001011011 10
0010110111 00
0101101110 00
0011011100 01

```

Bu iki kuvvetli ortogonal düzenin Teorem 4.3.2'nin koşullarını sağladığı görülür. Sıfır ve birlerin yer değiştirilmesiyle bulunan dönüşümün yapıya eklenmesi durumunda $OA(24, 12, 3, 2)$ ortogonal düzeni kurulur. 12.inci satır 12 tane sıfır ve 12 tane birlerden meydana gelecektir.

Çizelge 4.8. $OA(24,12,3,2)$ ortogonal düzeni

```

0110111000 1010010001 1101
0101110001 0110100011 1010
0011100010 1111000111 0100
0111000101 1010001110 1001
0110001011 0110011101 0010
0100010110 1110111010 0100
0000101101 1111110100 1000
0001011011 1011101001 0001
0010110111 0011010010 0011
0101101110 0010100100 0111
0011011100 0111001000 1110
0000000000 0011111111 1111

```

Satırların maksimum olası sayısı (yada kısıtların sayısı), $s=2$ için, 3 kuvvetli ortogonal düzenin kuruluş yönteminin tanımını sağlar (Seiden, 1954).

4.4. Ortogonal Düzenlerin Kuruluşunda Projektif Geometrinin Kullanımı

Ortogonal düzenlerin kuruluş yöntemlerinden birisi de sonlu geometrinin kullanımıdır. Özellikle sonlu, analitik projektif geometri bu düzenlerin kuruluşu için faydalı olmaktadır.

Teorem 4.4.1:

$k \times r$ boyutlu bir C matrisi göz önüne alınsın.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kr} \end{bmatrix}$$

Burada $c_{ij} \in GF(p^n)$ dir. Eğer t satırlı t ranklı kısmi matrisler bulunabiliyorsa, bu takdirde $OA(s^r, k, s, t)$ ortogonal düzeni kurulabilir. Burada $s=p^n$ dir (Bose ve Bush, 1952).

C matrisinin satırları $PG(r-1, p^n)$ sonlu projektif uzayındaki noktanın koordinatları gibi yorumlanabilir öyle ki noktaların t tanesi birleştirilmemiştir. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.4.2:

$PG(r-1, p^n)$ de t tanesi birleştirilmemiş k noktaları bulunabilirse, bu takdirde $\lambda=s^{r-t}$, $s=p^n$ olan $OA(s^r, k, s, t)$ ortogonal düzeni kurulabilir (Bose ve Bush, 1952).

Bu teoremler 3 kuvvetli ortogonal düzenlerin kuruluşunda kullanıldı.

(a) $s=2$ özel durumu dikkate alınsın. $(r-2)$ -düzleminde olmayan $PG(r-1, 2)$ deki tüm noktaların seti düşünölsün. Bu takdirde,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = 0 \quad (4.4.1)$$

dir. Böyle 2^{r-1} tane nokta vardır. $PG(r-1, 2)$ deki her bir doğru üç noktadan geçmediğinden dolayı bu noktaların üçü aynı doğru üzerinde değildir ve setin dışında bunların biri (4.4.1) düzleminde değildir. Teorem 4.4.1 deki C matrisinin satırları için bu noktaların koordinatları alınır, 3 kuvvetli $OA(2^r, 2^{r-1}, 2, 3)$ ortogonal düzeni kurulabilir ve 2^{r-1} tane kısıt vardır.

Örneğin, $r=3$ durumu düşünölsün. $PG(2,2)$ nin $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$ dört noktası $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ doğrusu üzerinde değildir. Bundan dolayı uygun C matrisi

$$C = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \\ 111 \end{bmatrix}$$

Sekiz tane olası ξ sütun vektörü

01000111
00101011
00011101

$OA(8,4,2,3)$ düzeninde gerekli sütunlar aşağıda verilen $C\xi$ formuyla bulunur.

Çizelge 4.9. $OA(8,4,2,3)$ ortogonal düzeni

01000111
00101011
00011101
01110001

Böylece $OA(8,4,2,3)$ ortogonal düzeni kuruldu. Benzer yöntem kullanılarak $OA(16,8,2,3)$ ortogonal düzeni de kurulabilir.

(b) $s=2^n$ olsun. $PG(2,2^n)$ sonlu projektif düzleminde bozulmamış konik alınır.

$$\Delta = af^2 + bg^2 + ch^2 + fgh \neq 0 \quad \text{olduğunda,}$$

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + fx_2x_3 + gx_3x_1 + hx_1x_2 = 0$$

olur. Eşitlikler ve Teorem 4.4.2 dikkate alınarak, $s=2^n$ olduğunda $OA(s^3, s+2, s, 3)$ ortogonal düzeninin kuruluşunda bu noktaların koordinatları kullanılabilir.

Benzer şekilde p tek asal sayı olduğunda $s=p^n$ iken $PG(2, p^n)$ nin bozulmamış koniğinde $s+1$ noktalarının koordinatları kullanılmasıyla $OA(s^3, s+1, s, 3)$ ortogonal düzeni kurulabilir.

(c) $\phi(x, y) = ax_1^2 + 2hx_1x_2 + bx_2^2$ $GF(p^n)$ 'e ait olan katsayılar ile indirgenemeyen türdeş karesel ifade olsun. $s=p^n$ ise, karesel yüzeyin üçü aynı doğru üzerinde olmayan tamamıyla s^2+1 noktayı kapsadığını Bose (1947) de gösterdi. $\phi(x, y)$ dikkate alınarak

$$ax_1^2 + 2hx_1x_2 + bx_2^2 = x_3x_4$$

yazılır. Bundan dolayı s asal sayı yada asal sayının kuvveti iken, $k=s^2+1$ kısıtlar ile $OA(s^4, k, s, 3)$ ortogonal düzeninin kuruluş yöntemi elde edilir.

Örneğin, $s=3$ durumu düşünölsün. $PG(3, 3)$ 'ün $x_1^2 + x_2^2 = x_3x_4$ kareselinde bulunan 10 noktanın koordinatları $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$, $(0,1,1,1)$, $(0,1,2,2)$, $(1,0,1,1)$, $(1,0,2,2)$, $(1,1,1,2)$, $(1,1,2,1)$, $(1,2,1,2)$, $(1,2,2,1)$ dir. Bunlar C matrisinin satırları gibi kullanılırsa, $OA(81, 10, 3, 3)$ ortogonal düzeni ve geometrik yöntemle bulunabilen kısıtların maksimum sayısının 10 olduğu görölür (Bose ve Bush, 1952).

(d) Rao (1946) $PG(t, s)$ 'den hiperküplerin kuruluşunu düşündü. 2 indeksli $OA[(s^t-1)/(s-1), s, t, 2]$ hiperküpu ile aynı olan s^{t-2} indeksli $OA(s^t, (s^t-1)/(s-1), s, 2)$ ortogonal düzeni aşğıdaki yöntem ile $PG(t, s)$ den kurulabilir: $PG(t, s)$ deki denklem

$$x_0 = 0$$

$$(4.4.2)$$

sonsuzda (t-1)-düzlemi temsil eder ve herhangi diğer (t-1)-düzlemi aşağıdaki denklem ile gösterilebilir.

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_tx_t = 0 \quad (4.4.3)$$

bu takdirde (t-2)-düzlemi sonsuzda,

$$x_0 = 0; a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_tx_t = 0 \quad a_i \in GF(s); i = 1, 2, \dots, t \quad (4.4.4)$$

şeklinde gösterilir. $(s^t-1)/(s-1)$ 'nin varlığını ve (t-2)-düzleminin sonsuzda olduğu görülür. (4.4.4) eşitliği (t-2)-düzleminden geçen s'nin doğru demeti, (t-1)-düzlemi aşağıdaki eşitlik ile verildi:

$$\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_tx_t = 0 \quad \alpha_i \in GF(s) \quad (4.4.5)$$

(4.4.4) ile verilen (t-2)-düzlemine (4.4.5) ile verilen doğru demetinin köşesi denildi ve faktöre uyan noktalar $(a_1, a_2, \dots, a_t)$ ile tanımlandı. x_0 ın katsayısı gibi α_i ile (4.4.5) ile gösterilen (t-1)-düzlemi (4.4.5) ile tanımlanan doğru demetinin tanımlı (4.4.4) ile tanımlanan köşesi, $(a_1, a_2, \dots, a_t)$ ile tanımlı faktörün i.inci düzeyine uyabilen ($i = 0, 1, \dots, s-1$), α_i ile tanımlanabilir. Böylece her bir s düzeylerinde, $m = (s^t-1)/(s-1)$ faktörleri vardır.

s^t sonlu $(1, x_1, x_2, \dots, x_t)$ noktaları vardır ve sonlu noktaların her birinin vasıtasıyla (t-1)-düzleminin $(s^t-1)/(s-1)$ doğru demetinin her birinden (t-1)-düzlemi geçer. s^t sonlu noktalar ve düzenin satırları ve sütunları faktörler olarak ifade edilsin ve j.inci sonlu noktadan geçen i.inci doğru demetinin α_k .ıncı düzlemi ise k ile (i,j).inci durumu gösterebilir ($k = 0, 1, \dots, s-1$; $i = 1, 2, \dots, (s^t-1)/(s-1)$; $j = 1, 2, \dots, s^t$). Böylece kurulan düzenin s^{t-2} indeksli

$OA(s^t, (s^t-1)/(s-1), s, 2)$ ortogonal düzen olduğu kolayca doğrulanabilir (Raghavarao, 1971).

Örnek 4.4.1:

2 indeksli $OA(8,7,2,2)$ ortogonal düzenin kuruluşu göz önüne alınarak bu yöntemin kuruluşu örnek olarak verilecektir. Bu ortogonal düzen $PG(3,2)$ den kurulabilir. $PG(3,2)$ 'de 15 noktanın her biri $x_i = 0$ yada 1 ($i = 0,1,2,3$) olduğunda (x_0, x_1, x_2, x_3) ile gösterilebilir ve x_i koordinatlarının tümü sıfıra eşit değildir. (4.4.5) doğru demetine uygun olan köşeler $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ ve $(1,1,1)$ ve onlara sırasıyla A, B, C, D, E, F ve G faktörleri denilecektir. Sekiz sonlu nokta $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,1)$, $(1,0,1,1)$ ve $(1,1,1,1)$ sıralı seri halinde 1,2,...,8 ile numaralandırıldı. Sekiz sütun ve yedi satırlı düzen elde edilir. Satırlar yedi faktöre ve sütunlar sekiz sonlu noktaya uygun olan ve j.inci sonlu noktadan geçen i.inci doğru demetinin düzlem sayısı ile (i,j).inci hücre yerine yazılır ($i=A, B, \dots, G$; $j=1, 2, \dots, 8$). Örneğin, D köşesinden geçen 1 numaralı düzlemde bulunan ikinci nokta ve bundan dolayı D satırı altında ikinci sütundaki hücre 1 dir. Tamamlanmış düzenleme ile 2 indeksli $OA(8,7,2,2)$ ortogonal düzeni aşağıdaki gibi kurulmuş olur:

Çizelge 4.10. İki indeksli OA(8,7,2,2) ortogonal düzeni

Faktör	Sonlu Noktalar							
	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	1	0	0	1	1	0	1
B	0	0	1	0	1	0	1	1
C	0	0	0	1	0	1	1	1
D	0	1	1	0	0	1	1	0
E	0	1	0	1	1	0	1	0
F	0	0	1	1	1	1	0	0
G	0	1	1	1	0	0	0	1

3 kuvvetli hiperküp yapısına yada denk olarak PG(t,s) den s^{t-3} indeksli ortogonal düzen elde edilirken, s^{t-3} sonlu noktalarda kesişen $(s^t-1)/(s-1)$ doğru demetlerinin setinden üç farklı doğru demetine ait olan üç (t-1)-düzlemi gereklidir. Sonsuzda (t-3)-düzlemde kesişen iki doğru demetine uygun olan herhangi iki köşe vardır. Önceki iki köşenin kesişiminden geçmeyen köşe üçüncü köşe olarak seçilir; önceden seçilen herhangi iki köşenin kesişiminden geçmeyen köşe dördüncü köşe olarak seçilir; ve böyle devam eder. s^{t-3} indeksli ortogonal düzen için durum faktörleri ile tanımlanan köşeler seçildiğinde sağlanacağı kolayca görülür.

Örnek 4.4.2:

Birim indeksli OA(4,3,2,2) ortogonal düzeni yukarıdaki yöntem ile kurulsun. PG(2,2) de 7 noktanın her biri $x_i = 0$ yada 1 ($i = 0,1,2$) olduğunda (x_0, x_1, x_2) ile gösterilebilir ve x_i koordinatlarının tümü sıfıra eşit değildir. (4.4.5) doğru demetine uygun olan köşeler (0,1), (1,0) ve (1,1) dir. Bu köşelere sırasıyla A,

B ve C faktörleri denilecek. Dört sonlu nokta (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0) ve (1,1,1) dir. Sonlu noktalara sırasıyla 1,2,3 ve 4 ile numaralandırıldı. Sütunlar dört sonlu noktaya uygun ve satırlar da üç faktöre uygun olsun. Böylece birim indeksli OA(4,3,2,2) ortogonal düzeni aşağıdaki gibi elde edilir:

Çizelge 4.11. Birim indeksli OA(4,3,2,2) ortogonal düzeni

Faktör	Sonlu Noktalar			
	1	2	3	4
A	0	1	0	1
B	0	0	1	1
C	0	1	1	0

4.5. Ortogonal Düzenlerin Kuruluşunda Ana Etki Planları

Addelman ve Kempthorne (1961) tarafından verilen tanım ve teoremler ortogonal düzenlerin kuruluşunda ana etki planlarının kullanımını sağlamaktadır.

Tanım 4.5.1:

X_i ve X_j iki faktörü X_j 'nin her bir düzeyi X_i 'nin her düzeyi ile aynı sayı kadar görülüyorsa biri diğerine ortogonaldır denilir. X_i ve X_j faktörleri

- (i) p tek asal sayı için, X_j 'nin her bir düzeyi s^{n-2} defa görülür ve X_j 'nin $\frac{1}{2}(s-1)$ düzeylerinin her biri X_i 'nin her bir düzeyi ile $2s^{n-2}$ defa görülür ve
- (ii) $p=2$ için, X_j 'nin $\frac{1}{2}s$ düzeylerinin her biri X_i 'nin her bir düzeyi ile $2s^{n-2}$ defa görülürse

biri diğerine yarı-ortogonaldır.

Ana etki planı ile ortogonal düzenlerin kuruluşu problemine cevabı sağlamak amacıyla verilen teorem için gerekli olan yardımcı teoremler aşağıdaki gibidir:

Yardımcı Teorem 4.5.1:

p tek asal sayı iken, $X_i^2 + kX_i$ (k , $GF(p^m)$ nin elemanı), $\frac{1}{2}(s+1)$ farklı düzeyleri kapsar, bir düzey s^{n-1} defa görünür ve $\frac{1}{2}(s-1)$ düzey s^n işlem kombinasyonlarında $2s^{n-1}$ defa görünür.

Yardımcı Teorem 4.5.2:

$p=2$ iken, $X_i^2 + kX_i$ s düzeylerinin her birini s^{n-1} defa kapsar.

Yardımcı Teorem 4.5.3:

$p=2$ iken, $X_i^2 + kX_i$ (k sıfırdan farklı ve $GF(p^m)$ nin herhangi bir elemanı) $2s^{n-1}$ defa görülen her bir $\frac{1}{2}s$ farklı düzeyi kapsar.

Yardımcı Teorem 4.5.4:

Faktör en azından biri $k_i \neq 0$ olduğunda $X_i^2 + k_i X_i + \sum_{j \neq i} k_j X_j$ ile yerine yazılır (k_i ve k_j $GF(p^m)$ nin elemanları), s düzeylerin her biri s^{n-1} defa meydana gelir.

Yardımcı Teorem 4.5.5:

$X_i^2 + k_1 X_i + k_2 X_j$ nin düzeyleri k_1, k_2, a_1 ve a_2 $GF(p^m)$ nin elemanları ve $a_2 \neq 0$ olduğunda, $a_1 X_i + a_2 X_j$ nin u_t düzeyi ile planda görülen $k_2 + ca_2 = 0$ olduğunda

$x_i^2 + k_1x_i + k_2x_j + c(a_1x_i + a_2x_j) - cu_i$ nin değerleri ile verildi ve x_i $GF(p^m)$ nin elemanları üzerindeki açıklıklardır.

Yardımcı Teorem 4.5.5a:

$a_iX_i + \sum_{j \neq i} a_jX_j$ nin u_i düzeyi ile planda görülen $X_i^2 + k_iX_i + \sum_{j \neq i} k_jX_j$ nin düzeyleri tüm $j \neq i$ için $k_j + ca_j = 0$ olduğunda $x_i^2 + k_1x_i + \sum_{j \neq i} k_jx_j + c(a_1x_i + \sum_{j \neq i} a_jx_j) - cu_i$ nin değerleri ile verilir. $GF(p^m)$ deki bazı c 'leri kapsayan ve a_j ve k_j tüm $j \neq i$ için $k_j + ca_j = 0$ biçiminde değilse bu takdirde iki faktör ortogonaldır.

Yardımcı Teorem 4.5.6:

p asal sayı iken $GF(p^m)$ deki bileşenler $GF^2(p^m)$ nin elemanlarının bir setini oluşturur. Bu elemanlar $GF^2(p^m)$ de olmayan bir elemanın $GF(p^m)$ deki elemanların her birinin çarpılmasıyla elde edilir. $GF^2(p^m)$ deki elemanların seti ve onların bileşenlerinin seti bir sette birlikte alınırsa, $GF(p^m)$ nin elemanları bulunur.

Teorem 4.5.1:

$2s^n$ işlem kombinasyonları ile her bir $s=p^m$ düzeylerde $[2(s^n-1)/(s-1)-1]$ faktörleri için ana etki planı vardır.

$n=2$ alınması durumunda, s^2 denemelerde s düzeylerde her bir $(s^2-1)/(s-1)$ faktörleri için ortogonal ana etki planının ilk parçasını oluşturmada; $1,2,...,(s-1)$ katsayıları, $GF(p^m)$ nin elemanları olan X_1 ve X_2 faktörleri ve onların genelleştirilmiş etkileşimleri $X_1 + X_2, X_1 + 2X_2, ..., X_1 + (s-1)X_2$ yerine

yazılır, toplama ve çarpma bu cismin içinde yapılır. Buna ek olarak $[(s^2-1)/(s-1)-1]$ faktörleri $X_1^2 + X_2, X_1^2 + X_1 + X_2, X_1^2 + 2X_1 + X_2, \dots, X_1^2 + (s-1)X_1 + X_2$ ile yerine konulur. s^n gözlemlerdeki $[2(s^n-1)/(s-1)-1]$ faktörleri ana etki planının ilk yarısında yerine yazılır.

p asal sayı iken, $X_1 + a_i X_2$ ve $X_1^2 + k_i X_1 + X_2$ yarı-ortogonaldır ve X_2 ve $X_1^2 + k_i X_1 + X_2$ de $a_i = 0$ hariç $GF(p^m)$ deki tüm a_i ve k_i için yarı-ortogonal olduğuna dikkat edilmelidir. Faktörlerin tüm diğer çiftlerinin ortogonal olduğu açıktır. $p=2$ ve $(k_i - a_i / a_i) = 0$ ise, bu takdirde $a_i X_1 + a_i X_2$ ve $X_1^2 + k_i X_1 + X_2$ ortogonaldır.

İlk yarıda ortogonal olan faktörlerin çiftleri ikinci yarıda da ortogonal olacak şekilde ve ilk yarıda yarı-ortogonal olan faktörlerin çiftleri tamamlayıcı olarak ikinci yarıda da yarı-ortogonal olacak şekilde planın ikinci yarısı seçilir. İlk yarının faktörlerine uygun olan ikinci yarıdaki faktörler, belirli $b_1, b_2, \dots, b_{s-1}$, k , $k_1, k_2, \dots, k_{s-1}$, $c_1, c_2, \dots, c_{s-1} \in GF(p^m)$ katsayıları ile

$$X_1, X_2, X_1 + X_2 + b_1, X_1 + 2X_2 + b_2, \dots, X_1 + (s-1)X_2 + b_{s-1}, kX_1^2 + X_2,$$

$$kX_1^2 + k_1 X_1 + X_2 + c_1, kX_1^2 + k_2 X_1 + X_2 + c_2, \dots, kX_1^2 + k_{s-1} X_1 + X_2 + c_{s-1}$$

ile gösterilebilir. Buradaki katsayılar aşağıda verilen (4.5.1), (4.5.2) ve (4.5.3) eşitlikleri ile bulunur.

$$b_i = (k-1) / 4ka_i \quad (4.5.1)$$

$$k_i = kd_i \quad (4.5.2)$$

$$c_i = d_i^2 \frac{1}{4}(k-1) \quad (4.5.3)$$

(Addelman ve Kepthorne, 1961).

Örnek 4.5.1:

Yukarıdaki işlemler ile kurulabilen daha kullanışlı ortogonal düzenlerin bazıları: $OA(18,7,3,2)$, $OA(54,25,3,2)$, $OA(32,9,4,2)$, $OA(128,41,4,2)$, $OA(50,11,5,2)$, $OA(250,61,5,2)$, $OA(98,15,7,2)$, $OA(128,17,8,2)$ ve $OA(162,19,9,2)$ dır.

Bose ve Bush (1952) başka bir yaklaşım ile $OA(18,7,3,2)$ ve $OA(32,9,4,2)$ düzenlerini kurdular ve uygun hale getirilebilen $2s^n$ büyüklüğündeki düzeylerde bulunan kısıtların maksimum sayısının $[2(s^n-1)/(s-1)-1]$ olduğunu gösterdiler.

$2s^n$ işlem kombinasyonları ile her bir $s=p^m$ düzeylerdeki $[2(s^n-1)/(s-1)-1]$ faktörleri için ana etki planlarının kuruluşuna örnek olarak elli tane işlem kombinasyonu ile her bir beş düzeyde olan, on bir faktör için planın kuruluşu aşağıda anlatıldı. Bu plan $OA(50,11,5,2)$ ortogonal düzenidir.

$$X_1, X_2, X_1 + X_2, X_1 + 2X_2, X_1 + 3X_2, X_1 + 4X_2, \\ X_1^2 + X_2, X_1^2 + X_1 + X_2, X_1^2 + 2X_1 + X_2, X_1^2 + 3X_1 + X_2 \text{ ve } X_1^2 + 4X_1 + X_2$$

ile gösterilen ilk yirmi beş tane işlem kombinasyonu yerine yazılan on bir tane faktördür.

$$X_1, X_2, X_1 + X_2 + b_1, X_1 + 2X_2 + b_2, X_1 + 3X_2 + b_3, X_1 + 4X_2 + b_4, kX_1^2 + X_2, \\ kX_1^2 + k_1X_1 + X_2 + c_1, kX_1^2 + k_2X_1 + X_2 + c_2, kX_1^2 + k_3X_1 + X_2 + c_3 \text{ ve } kX_1^2 + k_4X_1 + X_2 + c_4$$

ile gösterilen planın ikinci yarısı yerine yazılan uygun on bir tane faktördür.

$GF(5)$ in elemanları 0,1,2,3,4 tür. Bundan dolayı $GF^2(5)$ in elemanları 0,1,4,4 ve 1 dir. Yardımcı Teorem 4.5.6'dan dolayı, $k=2$ yada $k=3$ tür. $k=3$ seçilsin. Bundan dolayı da (4.5.1) eşitliğinden

$$b_i = 1/a_i$$

dir.

Böylece, $a_1=1$ iken $b_1=1$
 $a_1=2$ iken $b_2=3$
 $a_1=3$ iken $b_3=2$
 $a_1=4$ iken $b_4=4$

(4.5.2) ve (4.5.3) eşitliklerinden

$$k_i = 3d_i \text{ ve } c_i = 3d_i^2$$

Böylece, $d_1=1$ iken $k_1=3$ ve $c_1=3$
 $d_1=2$ iken $k_2=1$ ve $c_2=2$
 $d_1=3$ iken $k_3=4$ ve $c_3=2$
 $d_1=4$ iken $k_4=2$ ve $c_4=3$

olur.

Planın ikinci yarısı için yerine yazılan on bir faktör

$X_1, X_2, X_1 + X_2 + 1, X_1 + 2X_2 + 3, X_1 + 3X_2 + 2, X_1 + 4X_2 + 4, 3X_1^2 + X_2,$
 $3X_1^2 + 3X_1 + X_2 + 3, 3X_1^2 + X_1 + X_2 + 2, 3X_1^2 + 4X_1 + X_2 + 2$ ve $3X_1^2 + 2X_1 + X_2 + 3$
ile verildi.

Tamamlayıcı planın ikinci yarısı oluşturulmasında gerekli tüm özelliklere uygun katsayılar olmasından dolayı ilk yarıda faktörlerin her çifti ortogonaldır.

Çizelge 4.12. Ana etki planı ile kurulan iki indeksli OA(50,11,5,2) ortogonal düzeni

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	2	3	4	1	1	1	1	1
0	2	2	4	1	3	2	2	2	2	2
0	3	3	1	4	2	3	3	3	3	3
0	4	4	3	2	1	4	4	4	4	4
1	0	1	1	1	1	1	2	3	4	0
1	1	2	3	4	0	2	3	4	0	1
1	2	3	0	2	4	3	4	0	1	2
1	3	4	2	0	3	4	0	1	2	3
1	4	0	4	3	2	0	1	2	3	4
2	0	2	2	2	2	4	1	3	0	2
2	1	3	4	0	1	0	2	4	1	3
2	2	4	1	3	0	1	3	0	2	4
2	3	0	3	1	4	2	4	1	3	0
2	4	1	0	4	3	3	0	2	4	1
3	0	3	3	3	3	4	2	0	3	1
3	1	4	0	1	2	0	3	1	4	2
3	2	0	2	4	1	1	4	2	0	3
3	3	1	4	2	0	2	0	3	1	4
3	4	2	1	0	4	3	1	4	2	0
4	0	4	4	4	4	1	0	4	3	2
4	1	0	1	2	3	2	1	0	4	3
4	2	1	3	0	2	3	2	1	0	4
4	3	2	0	3	1	4	3	2	1	0
4	4	3	2	1	0	0	4	3	2	1

Çizelge 4.13. (Çizelge 4.12.'nin devamı)

0	0	1	3	2	4	0	3	2	2	3
0	1	2	0	0	3	1	4	3	3	4
0	2	3	2	3	2	2	0	4	4	0
0	3	4	4	1	1	3	1	0	0	1
0	4	0	1	4	0	4	2	1	1	2
1	0	2	4	3	0	3	4	1	4	3
1	1	3	1	1	4	4	0	2	0	4
1	2	4	3	4	3	0	1	3	1	0
1	3	0	0	2	2	1	2	4	2	1
1	4	1	2	0	1	2	3	0	3	2
2	0	3	0	4	1	2	1	1	2	4
2	1	4	2	2	0	3	2	2	3	0
2	2	0	4	0	4	4	3	3	4	1
2	3	1	1	3	3	0	4	4	0	2
2	4	2	3	1	2	1	0	0	1	3
3	0	4	1	0	2	2	4	2	1	1
3	1	0	3	3	1	3	0	3	2	2
3	2	1	0	1	0	4	1	4	3	3
3	3	2	2	4	4	0	2	0	4	4
3	4	3	4	2	3	1	3	1	0	0
4	0	0	2	1	3	3	3	4	1	4
4	1	1	4	4	2	4	4	0	2	0
4	2	2	1	2	1	0	0	1	3	1
4	3	3	3	0	0	1	1	2	4	2
4	4	4	0	3	4	2	2	3	0	3

Böylece, $OA(50,11,5,2)$ ortogonal düzen yerine geçen faktörler bulunur. Elli işlem kombinasyonunu takiben $OA(50,11,5,2)$ düzeni ve her bir beş düzeyde on bir faktör için ana etki planı meydana getirilir. İşlem kombinasyonları 25'in iki seti içinde bölünür. İlk 25 set planın ilk yarısı ve ikinci 25 set planın ikinci yarısını oluşturur (Addelman ve Kempthorne, 1961).

4.6. Ortogonal Düzenlerin Kuruluşunda Hadamard Matrisleri

2-semibollü düzenlerin kuruluşu için kullanılan tekniklerin çoğu s-semibollü düzenler için kullanılan tekniklerin özel durumudur. Bununla birlikte, bazen bunun kolayca bulunmasında iki semibollü özel durum için bu kuruluşlardaki yapılara ihtiyaç vardır.

Bizim ilgilendiğimiz yapı, Hadamard matrisleridir. n mertebeli Hadamard matrisi 1 yada -1 hücreleri ile $n \times n$ boyutlu H_n matrisidir öyle ki $n \times n$ boyutlu özdeş matrisi I_n ile gösterildiğinde

$$H_n H_n' = nI_n$$

dir. Hadamard matrislerinin kuruluşları ve uygulamalarında sayısız sonuçlar vardır, bunlardan bazıları Hedayat ve Wallis (1978) de bulunabilir. Hadamard matrislerinin varlığı için gerekli koşul $n=2$ yada $n \equiv 0 \pmod{4}$ olmasıdır.

Hadamard matrisinin satır yada sütunundaki her bir hücreyi -1 ile çarpılırsa Hadamard matrisi özelliğini kaybetmez. Böylece, uygun sütunlardaki hücreler -1 ile çarpılmasıyla, H_n biçimindeki Hadamard matrisinin daima bulunabilmesi n mertebeli Hadamard matrisinin varlığını sağlar.

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \underline{1} \\ & A_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

$n=4\lambda$ yazılırsa (λ pozitif tamsayı), $A_{n-1,n}$ nin $OA(4\lambda,4\lambda-1,2,2)$ olduğu kolayca gösterilebilir, bu yapı temelde 1 ve -1 sembollerinden oluşur. Teorem 2.1 ile $f(4\lambda,2,2)=4\lambda-1$ den dolayı, aşağıdaki sonuç bulunur.

Teorem 4.6.1:

$f(4\lambda,2,2)=4\lambda-1$ için gerekli ve yeterli koşul 4λ mertebeli Hadamard matrisinin varlığıdır.

Yukarıdaki gibi $OA(4\lambda,4\lambda-1,2,2)$ düzeni, $OA(8\lambda,4\lambda,2,3)$ düzeninin kuruluşunda kullanılabilir. Verilen A düzeni için, 0'lar ve 1'lerin sırasıyla değiştirilmesiyle A 'dan bulunan düzeni $\bar{A}$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.6.2:

t çift olduğunda ve $OA(\lambda 2^t, k, 2, t)$ ise, bu takdirde B düzeni

$$B = \begin{bmatrix} A & \bar{A} \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 1 \end{bmatrix}$$

gibi bulunan $OA(\lambda 2^{t+1}, k+1, 2, t+1)$ dir.

Bu teoremlerden aşağıdaki sonuçlar bulunabilir.

Sonuç 4.6.1:

$OA(8\lambda,4\lambda,2,3)$ ün var olması için gerek ve yeter koşul 4λ mertebeli Hadamard matrisinin mevcut olmasıdır.

Sonuç 4.6.2:

t çift ise, $f(\lambda 2^t, 2, t) = f(\lambda 2^{t+1}, 2, t+1) - 1$ dir.

Teorem 4.6.3:

$\lambda = 2^{n-t+1}$ olsun. Noktaların herhangi t tanesi lineer bağımsız olan (yani, t tanesi aynı doğru üzerinde bulunmayan) $PG(n, 2)$ deki k noktalarının seti $OA(\lambda 2^t, k, 2, t)$ nin nedenidir (Hedayat ve Stufken, 1988).

Örnek 4.6.1:

$t=2$ için 8.inci mertebeden bir Hadamard matrisi alınsın.

$$H = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & - & + & - & - & - \\ + & - & + & + & - & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & + & - \\ + & - & - & - & + & + & - & + \\ + & + & - & - & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & - & + & + \\ + & + & - & + & - & - & - & + \end{bmatrix}$$

Hadamard matrislerinin özelliğinden dolayı

$$A = \begin{bmatrix} + & + & - & + & - & - & - \\ - & + & + & - & + & - & - \\ - & - & + & + & - & + & - \\ - & - & - & + & + & - & + \\ + & - & - & - & + & + & - \\ - & + & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & - & - & + \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} - & - & + & - & + & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + \\ + & + & - & - & + & - & + \\ + & + & + & - & - & + & - \\ - & + & + & + & - & - & + \\ + & - & + & + & + & - & - \\ - & + & - & + & + & + & - \end{bmatrix}$$

bulunur (Bayrak, 1996).

+ ve - yerine sırasıyla 1 ve 0 yazılırsa $OA(4\lambda, 4\lambda-1, 2, 2)$ düzeni yani $OA(8, 7, 2, 2)$ düzeni aşağıdaki gibi bulunur.

11101000
10110100
10011010
10001101
11000110
10100011
11010001

Teorem 4.6.2 den dolayı da $OA(16, 8, 2, 3)$ düzeni aşağıdaki gibi bulunur.

Çizelge 4.14. $OA(16, 8, 2, 3)$ ortogonal düzeni

1110100000101110
1011010010010110
1001101011001010
1000110111100100
1100011001110010
1010001110111000
1101000101011100
0000000011111111

5. ORTOGONAL DÜZENLER İLE İLİŞKİLİ DÜZENLER

Ortogonal düzenlerden diğer deneme düzenlerine geçişin mümkün olduğunu göstermek amacıyla ortogonal düzenler ile ilişkili düzenler üzerinde durulacaktır.

Tanım 5.1:

Tüm karelerin j .inci sütununda ve tüm karelerin i .inci satırında her bir karede her sembol s defa görülüyorsa, bu düzenlemeye s boyutlu birinci mertebeden bir Latin küp denilir. Birinci mertebeden iki Latin küp göz önüne alınsın. Biri diğerinin üzerine konulduğunda birinci küpün her setinde ikinci küpün her sembolü ile s defa birlikte görünüyorsa bu iki küp *ortogonal*dır denilir.

Birinci mertebeden $s \times s \times s$ ikiyeşerli ortogonal küplerin maksimum sayısı $s^2 + s - 2$ dir ve s asal sayı yada asal sayının kuvveti olduğunda bu düzenler için bir kuruluş yöntemini Kishen (1949) tarafından gösterildi.

$s(\geq 2)$ elemanlarının seti biçimindeki hücreler ile $k \times N$ boyutlu A matrisinin herhangi $t \times N$ boyutlu alt matrisi aynı frekans ile tüm olası $t \times 1$ boyutlu sütun vektörlerini kapsıyorsa A matrisine N büyüklüğündeki ortogonal düzen denilir; k kısıtları, s düzeyleri, t kuvveti ve λ indeksi gösterir. Böyle düzen $OA(N, k, s, t)$ ile gösterildi. N 'ye yapıların sayısı da denilir.

Bu tanım karşısında, $N = \lambda s^t$ olmalıdır. $\lambda = s^{t-d}$ iken, ortogonal düzen d kuvvetli hiperküpe indirgenir.

$t=2$ ve birim indeksli ortogonal düzenlerin varlığı s mertebeli $k-2$ MOLS'un (İkiyeşerli Ortogonal Latin Kareler) varlığına denktir. Ancak, $OA(N, k, s, t)$

ortogonal düzenleri bazı parametre değerleri için var olmayabilir (Raghavarao, 1971).

5.1. Değiştirilmiş Faktöriyel Tasarımlar

L^r yapıları kurulduğunda her biri L düzeyli r faktörleri içeren tamamlanmış faktöriyel deneme göz önüne alınsın. Düzeyler $0, 1, 2, \dots, (L-1)$ olarak adlandırılsın. Bu takdirde r ana etkileri L sembollerini kapsayan (L^r satırlar ile) düzenlerin tasarımlarının r sütunlarını tanımlar. Her bir sembol sütunlarda eşit sayıda görülür. İki sütun için sembollerin her bir kombinasyonu eşit olarak meydana gelir. A, B iki ortogonal sütun olsun. AB etkileşiminin serbestlik derecesi $(L-1)^2$ dir. Düzenin her bir sütunu $(L-1)$ serbestlik derecesi ile birleştirilmesinden dolayı, birinci mertebeli etkileşim bu etkileşimin terimleri olarak alındığında $(L-1)$ sütunlarının setleri ile gösterilir. Benzer şekilde, m .inci mertebeli etkileşim (yani, $m+1$ tane faktör içerir) düzen tasarımının $(L-1)^m$ sütunları ile gösterilir.

İki faktör arasındaki etkileşim aşağıdaki koşullar ile tanımlanır:

- (a) A ve B 'nin düzeylerinin her bir kombinasyonu AB nin her bir terimi içinde yalnızca bir düzeye uyar.
- (b) AB 'nin terimleri A 'ya, B 'ye ve birbirine ortogonaldır.

(a) koşulunun anlamı; örneğin, bir yapıdaki A 'nın 2 düzeyi ve B 'nin 5 düzeyi birlikte meydana gelir ve AB 'nin terimi bu durumda görülen 3 düzeyde tanımlanırsa, bu takdirde A ve B bu düzeylerde tekrar birlikte meydana geldiği zaman, AB 'nin bu terimi 3 düzeyde görülür. Bundan dolayı, tamamlanmış faktöriyel tasarımının temeli nedeniyle, ABC 'nin düzeylerinin her bir kombinasyonu C 'nin her düzeyi ile eşit olarak meydana gelir. Fakat A ve B 'nin düzeylerinin böyle kombinasyonu (a) koşulundan dolayı AB 'nin teriminde düzey sabittir. Bundan dolayı AB 'nin terimindeki her bir düzey

C'nin her düzeyi ile eşit olarak meydana gelir. Başka deyişle, her bir etkileşim terimi onunla ilişkili olmayan ana etkilere ortogonal olacaktır.

(b) durumu için; $L \times L$ kare düzeninin satırları ve sütunları A ve B'nin L düzeylerine sırasıyla uyuyorsa, her bir hücre özel etkileşim terimine uygun düzey ile doldurulabilir. AB'nin herhangi özel terimi için böyle kare Latin olacaktır, çünkü, kabul edilen satır, A'nın sabit düzeyidir; etkileşim terimlerinin tüm düzeyleri A'nın bu düzeyi ile eşit olarak meydana gelmelidir, bundan dolayı her bir sembol karenin her satırında bir defa görülür; benzer şekilde B'ye ortogonal olabilen etkileşim terimi her sütunda bir defa görülür. Sonunda, aynı etkileşimli iki terim için Latin kareler üst üste konulur, birinci terime ait olan her bir sembol ikinci terimin her bir sembolü ile aynı hücrede bir defa görülmelidir, bu iki terim ortogonal olabilir: böylece, (a) ve (b) koşullarının etkileşim terimleri yeterli ise Latin kareler tamamen ortogonal setlerde bulunur.

Kalanlar iki farklı etkileşimden terimlerin ortogonal olduğunu gösterir. Bu sonuçtur, çünkü ABCD dört faktörün düzeylerinin tüm kombinasyonları eşit olarak görülür, yani A ve B düzeylerinin her bir kombinasyonu C ve D düzeylerinin her kombinasyonu ile çoğu kez eşit olarak meydana gelir. İlk bahsedilen AB'nin terimlerindeki düzeylere; sonuncusu CD'nin terimlerindeki düzeylere uygundur. Bundan dolayı AB'nin terimi CD'nin terimine ortogonaldır. Benzer şekilde AB ve AC'ye de değinilebilir. Birinci mertebeli etkileşim terimleri dengeli tasarımların parçası gibi ana faktörlere eklenebildiğini gösterir. Yüksek mertebeli etkileşimler düşük mertebeliler arasındaki birinci mertebeli etkileşimler gibi kabul edilebilir; örneğin, $(ABC)=(AB)(C)$, $(L-1)$ terimleri C faktörü ile alınan (AB)'nin her bir teriminden çıkarıldığı anlaşılır, öyle ki bu durumda ikinci mertebeli etkileşim için $(L-1)^2$ terimleri vardır. Bu işlem tümevarımsal süreç ile tasarımı geliştirir

ve $(r-1)$.inci mertebeli etkileşim bulunarak tamamlanır. Orijinal faktöriyel tasarımıda toplam serbestlik derecesi $= L^r - 1$ dir. Bu nedenle etkileşimler ihmal

edilirse faktörlerin sayısı $= \frac{L^r - 1}{L - 1}$ dir.

L asal sayı ise, döngüsel Latin kareler ortogonal set biçimindedir: her bir kare standart sırada sembollerin ilk satırda yazılmasıyla bulunur, ardıl satırlar her bir satırdan sonrakine ρ kullanılarak sembollerin yer değiştirmesiyle bulunur ($\rho = 1, 2, \dots, (L-1)$). Bu durumda tasarımın uygun sütunu aşağıdaki gibi verilir: ilk satır $0, 1, 2, \dots, (L-1)$ sırada, A 'nın x düzeyi ve B 'nin y düzeyi birlikte görülüyorsa, bu etkileşim terimi için uygun düzey $(y + \rho x)$ dir, semboller L modülü ile azaltılır. $\rho = 1, 2, \dots, (L-1)$ için kareler, tüm etkileşim terimleri ile verilir.

Eğer; $L = p^n$ (p asal sayı) ise, bu takdirde faktörün L düzeyleri ile sonlu cisminin elemanları eşleştirilir, $GF(p^n)$.

u_0 sıfır ve u_1 cismin birimi olduğunda bu elemanların $u_0, u_1, \dots, u_{L-1}$ olduğu farz edilsin. Bu takdirde A 'nın u_x düzeyi ve B 'nin u_y düzeyi birlikte görülürse, etkileşim terimleri için uygun düzeyler $u_y + u_\rho u_x$ dir ve $u_\rho = u_1, u_2, \dots, u_{L-1}$ için karelerin tüm terimlerini verir. Sonlu cisimlerden Latin karelerin tamamlanmış ortogonal setlerinin çeşitli yöntemleri vardır (Bayrak ve Gönen, 1994).

$L=6$ için ortogonal Latin kareler setinin mevcut olmadığı bilinir. $N=9$ durumunda, $L=3$ için tasarım aşağıdaki gibidir:

	A	B	(AB) ₁	(AB) ₂		A	B	(AB) ₁	(AB) ₂
a ₁ b ₁	0	0	0	0	a ₂ b ₁	1	0	1	1
a ₁ b ₂	0	1	1	2	a ₂ b ₂	1	1	2	0
a ₁ b ₃	0	2	2	1	a ₂ b ₃	1	2	0	2

	A	B	(AB) ₁	(AB) ₂
a ₃ b ₁	2	0	2	2
a ₃ b ₂	2	1	0	1
a ₃ b ₃	2	2	1	0

Burada, $(AB)_1=(A)+(B)$

$(AB)_2=(A)+2(B)$

dir. $r=4$, $N=81$ için, ana etkiler A,B,C,D; $(ABCD)_1$ gibi verilerek tüm birinci mertebeli etkileşimler belirlenebilir.

5.2. Çok Faktörlü ve Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları Arasındaki İlişki

v değişken sayısı ve k bloklardaki değişken sayısı (deneysel birim) olsun ($k < v$); öyle ki her iki bloktaki değişken (λ) blokta aynı sayıda birlikte meydana gelir; her bir bloktaki değişken hepsinde r defa görülür ve blokların sayısı b dir. $rv=bk$ ve $\lambda=r(k-1)/(v-1)$ dir.

$L=2$ için çok faktörlü tasarımların herhangi biri düşünölsün. Sütunlara değişkenler ve satırlara bloklar yazılsın; ve bloktaki değişkenin göröndüğü yere artı işareti, görönmeyişi yere eksi işareti konulduğı farz edilsin. $N=4m$ için $b=v=4m-1$, $k=r=2m$ ve $\lambda=m$ ile dengeli tamamlanmamış blok tasarımı bulunur; tamamlayıcı tasarım $b=v=4m-1$, $k=r=2m-1$ ve $\lambda=m-1$ olur. Çok

faktörlü tasarımın sütunlarının ortogonallığından doğrudan doğruya aşağıdaki sağlanır.

Tanım 5.2.1:

n .ci mertebeden bir F-kare düzen a_i 'lerin her satır ve her sütununda λ_i defa görüldüğü $(a_1, \dots, a_m)$ setine ve $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ vektörlerine bağlı $n \times n$ lik bir düzendir. Bu düzenler $F(n; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ile tanımlanırlar. Burada $\sum_{i=1}^m \lambda_i = n$ dir.

Ayrıca, $F(n; 1, 1, \dots, 1)$ düzeninin n .ci mertebeden bir Latin kare gösterdiği bilinmektedir (Hedayat ve Wallis, 1978).

N satırlar ve L sembolleri ile tamamlanmış çok faktörlü F tasarımı düşünölsün; F 'nin tamamlanmasıyla sütunlarının sayısı $(N-1)/(L-1)$ anlamındadır. F için;

$$\lambda = (N-L)/(L-1) \text{ den}$$

$$1 + (L-1)\lambda - 1[(N-1)/(L-1) - \lambda] = 0$$

eşitlikleri vardır.

F 'nin satırları değişkenleri göstere sin ve her bir sütun L blokları yerine yazılsın, L farklı sembollerinin her birine biri uygundur. Böylece parametreleri aşağıdaki gibi olan bir dengeli tamamlanmamış blok tasarımı elde edilir. Bundan dolayı dengeli tamamlanmamış blok tasarımları ile parametreler bulunur:

$$r = (N-1)/(L-1) ; v = N ; b = rL ; k = N/L ; \lambda = (N-1)/(L(L-1))$$

$N=4m$ olduğunda $L=2$ iken, büyük sayılı tasarımlar böylece meydana getirilebilir. $L>2$ iken, $L=p^m$, p asal sayı ve $h>1$ olduğunda

$$r=1+L+L^2+\dots+L^{h-1},$$

$$v=L^h,$$

$$b=L+L^2+L^3+\dots+L^h,$$

$$k=L^{h-1},$$

$$\lambda=1+L+L^2+\dots+L^{h-2},$$

parametreleri ile dengeli tamamlanmamış bloklar bulunur.

5.3. Kısmen Dengeli Düzenler ve Ortogonal Düzenlerin Tanımı

Ortogonal düzenler kavramı Chakravarti (1956) tarafından kısmen dengeli düzene genelleştirilmiştir (Raghavarao, 1971).

Tanım 5.3.1:

$A=[a_{ij}]$ matrisi, $i=1,2,\dots,k$; $j=1,2,\dots,N$ ve matrisin a_{ij} elemanlarının $0,1,2,\dots,s-1$ sembolleri olduğu farz edilsin. x_i 's ye farklı değerler verilmesiyle düzenlenebilen $1 \times t$ boyutlu s^t tane $X'=(x_1, x_2, \dots, x_t)$ matrisleri düşünölsün $x_i = 0,1,\dots,s-1$; $i=1,2,\dots,t$. Her bir $t \times 1$ ile ilişkilendirilmiş X matrisinin göz önüne alındığı farz edilsin. $(x_1, x_2, \dots, x_t)$ nin permütasyonu altında değişmeyen bir $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_t)$ pozitif tamsayısı vardır. A 'nın her t satırlı alt matrisi için, $t \times 1$ boyutlu s^t tane X matrisleri $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_t)$ defa sütunlar gibi görölüyorsa, bu takdirde A matrisine N yapılarıdaki t kuvvetli kısmen dengeli düzen denilir, k kısıtlar (yada faktörler), s semboller (yada düzeyler) ve $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_t)$ parametreleri belirtir.

Tüm $(x_1, x_2, \dots, x_t)$ için $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_t) = \lambda$ iken düzene k kısıtlı, N yapılı, λ indeksli, t kuvvetli ortogonal düzen denilir (Chakravarti, 1963).

Örnek 5.3.1:

OA(18,7,3,2) ortogonal düzeninin örneği aşağıda verilmiştir. Aşağıda verilen ortogonal düzenden son satır ve ilk üç yapı silinir, N=15 yapılarda k=6 kısıtlı ve s=3 sembollü, 2 kuvvetli kısmen dengeli düzen bulunur. Bu düzenin $\lambda(x_1, x_2)$ gibi parametreleri vardır.

$$\begin{aligned}\lambda(x_1, x_2) &= 2 \quad x_1 \text{ ve } x_2 \text{ farklı ise,} \\ &= 1 \quad \text{diğer durumlarda.}\end{aligned}$$

Ortogonal düzenden kısmen dengeli düzen çıkarılmasında kullanılan kural aşağıdaki gibi genel terimlerde tanımlanabilir:

Çizelge 5.1. OA(18,7,3,2) yapılarda ortogonal düzen

Kısıtlar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1
3	0	1	2	1	2	0	0	1	2	2	0	1	2	0	1	1	2	0
4	0	1	2	2	0	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0	1	2	0
5	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	0	1	2	2	0	1
6	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0	2	0	1	0	1	2
7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2

λ indeksli OA(N,k,s,t) ortogonal düzeni ikiye ayrılan düzenler içinde yeniden çözülebilir. Ayrıca onlardan biri tüm $t \times 1$ boyutlu X matrisleri için $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_t) < \lambda$ ile kısmen dengeli düzen yada bozulmuş kısmen dengeli düzen (bozulmuş düzen tüm $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_t)$ dir; yani sıfıra eşit olmayan fakat bazıları bir olan düzendir). Bu takdirde artık düzen λ parametreleri

$\bar{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_t) = \lambda - \lambda(x_1, x_2, \dots, x_t)$ ile kısmen dengeli düzendir. Ortogonal düzenden kısmen dengeli düzen çıkarılması işleminin çıkarılan parçası sağlanır (Chakravarti, 1963).

Kısmen dengeli düzenin avantajı verilen k, s, t parametreleri için ortogonal düzenlerden daha küçük yapılar ile kurulabilmesidir.

Ortogonal düzenler ve kısmen dengeli düzenler simetrik ve simetrik olmayan etki karışımli faktöriyel deneylerin ve kesirli yinelenen tasarımların yapılışında önemli rol oynarlar. Daha küçük yapılar kullanılarak verilen faktörlerin sayısı yerleştirilerek kısmen dengeli düzenlerden çok faktörlü faktöriyel tasarımı çıkartılabilir (Raghavarao, 1971).

5.4. Ortogonal Latin Kare Setleri ve İki Kuvvetli, Birim İndeksli Birleşik Ortogonal Düzenler

Burada s mertebeli m tane ikişerli ortogonal Latin karelerin seti olduğu farz edilsin.

Teorem 5.4.1:

s mertebeli m tane ikişerli ortogonal Latin karelerin setinin varlığı $OA(N=s^2, k=m+2, s, 2)$ ortogonal düzeninin varlığını ifade eder ve $OA(N=s^2, k=m+2, s, 2)$ ortogonal düzenin varlığı s mertebeli m tane ikişerli ortogonal Latin karelerin setinin varlığını ifade eder.

Örnek 5.4.1:

3 mertebeli iki tane ikişerli ortogonal Latin kare düşünölsün

0	1	2	0	1	2
1	2	0	2	0	1
2	0	1	1	2	0

ayrıca, satırlar ve sütunlara uygun iki tane ortogonal olmayan kareler de

0	0	0	0	1	2
1	1	1	0	1	2
2	2	2	0	1	2

bu yapılabildiği takdirde üç satırın biri sonra diğerleri aynı satırda yerine konulmasıyla her bir kare 9 tamsayı ihtiva eden tek satır gibi yazılır. Bu ise aşağıdaki düzeni verir.

Çizelge 5.2. $OA(9,4,3,2)$ ortogonal düzeni

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	2	0	1	1	2	0

s asal sayı yada asal sayının kuvveti iken s mertebeli $s-1$ ikişerli ortogonal Latin karelerin maksimal setinin varlığı iyi bilinir. Bu $OA(s^2, s+1, s, 2)$ ortogonal düzenin varlığını ifade eder. $s=6$ durumu hariç tüm s için, $OA(s^2, 4, s, 2)$ ortogonal düzeni vardır.

5.5. Çok Faktörlü Tasarımlar Gibi Ortogonal Düzenlerin Kullanımı

Ortogonal düzen çok faktörlü tasarım gibi kullanılabilir. s düzeylere sahip her bir k faktörleri ile simetrik faktöriyel deney düşünölsün. Tamamlanmış faktöriyel deney s^k işlemlere yada yapılaraya sahip olacaktır. s veya k yada her ikisi de büyük olursa çok fazla deneme gerekli olacaktır. Bununla birlikte yüksek mertebeli etkileşimler ihmal edilebilir, burada s^k işlemlerinin yalnızca bir alt seti kullanılabilir. Bu durumda düşük mertebeli etkileşimler ve ana etkiler üzerinde hala bilgi bulunabilir. Finney (1945), Kishen (1948) ve Bose (1961) düşük mertebeli etkileşimler ve ana etkilerin etkin tahmin edicilerini sağlayacak kesirli faktöriyel tasarım olarak adlandırılan işlemlerin çarpımsal alt grubunun seçimi için kurallar verdiler. İşlemlerin alt seti ortogonal düzen olarak gösterilebilen kesirli faktöriyel tasarım gibi düşünölebilir. Fakat bu kuruluş yöntemi yalnız s asal sayı yada asal sayının kuvveti iken geçerlidir. Tanımlamada, tüm ana etkilerin tahmininde Finney'in yöntemiyle en azından gerekli 16 işlem 2 düzeyde her bir 11 faktörü kapsayan deney için belirtilebilir. Fakat Plackett ve Burman'nın çok faktörlü tasarımların listesinden gerçekten 2 kuvvetli ortogonal düzenlerin $OA(12,11,2,2)$ ortogonal düzenin varlığından dolayı, yalnızca 12 işlem kullanıldığı bilinir. Bu ise; verilen $OA(N,k,s,t)$ ortogonal düzenine kadar sıralı etkileşimlerin bir tahmin yapılabilir mi? sorusuna götürür.

Buna cevap Rao (1947) tarafından sağlandı. Genelde, eşit mertebeli etkileşimler $(d-1)$ 'den büyük değil ise, bu takdirde k yada $t (=d+k-1)$ kuvvetli düzen küçölür, $k-1$ mertebeye kadar etkileşimlerin ortogonal tahminleri sağlanır.

Böylece 2 kuvvetli ortogonal düzenlerde bire eşit yada daha büyük olmayan tüm etkileşimler kullanılarak ana etkilerin tahminlerine ulaşılabilir.

$t=d+1$ kuvvetli ortogonal düzenin ana etkileri ve birinci mertebeli etkileşimlerden (yanlı olası durum hariç) d ve daha fazla faktörü kapsayan etkileşimlerin varlığı ile tahmin edilebilir.

Burada şu soru sorulabilir: N , s ve t verildiğinde k 'nın maksimum değeri ne olur? Bu soruya Rao'nun eşitsizliği ve Bush, Bose ve Bush'un verdiği diğer eşitsizliklerle kısmen cevap sağlanır (Chakravarti, 1963).

5.6. İki Kuvvetli Ortogonal Düzenler ve Genelleştirilmiş Hadamard Matrisleri

İki kuvvetli ortogonal düzenler afin yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımı, grup bölünebilir tasarım ve genelleştirilmiş Hadamard matrisleri ile sıkı ilişkiye sahiptir.

Tanım 5.6.1:

$v=b$ ve bundan dolayı $r=k$ olduğundan dengeli tamamlanmamış blok tasarımı simetrik dengeli tamamlanmamış blok tasarımı (SIBIBD) olur. Bloklar tüm işlemlerin tamamen yinelenen biçiminde her bir r setleri içinde bölünebiliyorsa dengeli tamamlanmamış blok tasarımı yeniden çözülebilir denilir.

Tanım 5.6.2:

Farklı setlerin herhangi iki bloğunda, ortak işlemlerin sayısı aynı ise yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımına afin yeniden çözülebilir

dengeli tamamlanmamış blok tasarımı (ARBIBD) denilir. Bose (1942) tarafından gösterildiği gibi, böyle tasarımın parametreleri

$$v=sk=s^2[(s-1)t+1] ; b=sr=s(s^2t+s+1) ; \lambda=st+1 \text{ ve } s \geq 2 ; t \geq 0 \text{ dir.}$$

Bu tasarım $A(s,t)$ ile gösterilebilir.

Tanım 5.6.3:

Grup bölünebilir tasarımı (GDD) $v=mn$ işlemlerinin düzenlenmesidir. Bu düzen; her bir n tane işleme sahip olan m setlere ayrılır ($k < v$ dür), öyle ki her bir işlem r bloklarda yinelenir ve aynı setin (farklı setlerin) herhangi iki işlemi λ_1 bloklar (λ_2 bloklar) da birlikte görülür.

G , mn mertebeli bir modül ve N , n mertebeli G 'nin bir alt grubu olsun. N 'de olmayan G 'nin elemanlarının seti W olsun. N 'ye göreli G 'nin farklar seti G 'nin farklı elemanlarının $R=\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ setidir öyle ki $i \neq j$ için, her biri tamamiyle λ defa görülen, sadece W 'nun elemanlarını kapsayan $r_i - r_j$ farklarıdır. Bu takdirde her bir n işlemlerin m setleriyle,

$$v=b=mn ; r=k ; \lambda_1=0 ; \lambda_2=\delta$$

olmak üzere, simetrik grup bölünebilir tasarımı oluşturan R 'ye G 'nin elemanlarının her biri eklenmesiyle $b=mn$ bloklarının bulunduğu açıktır. Bu grup bölünebilir tasarımı için farklar setine R denilsin.

λ defa görülen s^2 mertebeli çiftlerin tümünü kapsayan satırların herhangi ikisinin özelliği ile s farklı sembollerdeki $(t, \lambda s^2)$ mertebeli matris s sembollerdeki λ indeks, t kısıtlar, 2 kuvvetli $OA[\lambda s^2, t, s, 2]$ ortogonal düzenidir. Bose ve Bush (1952) $OA[2s^n, t, s, 2]$ için aşağıdaki eşitsizlikten s ve λ 'nın terimlerindeki t için üst sınır verdiler.

$$t \leq 1 + 2(s + s^2 + \dots + s^{n-1}) \quad (5.6.1)$$

$OA[s^2\{(s-1)t+1\}, s^2t+s+1, s, 2]$ ortogonal düzeni $OA(s, t)$ sembolü ile gösterilsin.

Tanım 5.6.4:

Birimin p .inci köklerin elemanları ile h mertebeli H karesel matrisine $HH^cT = hI_h$ ise genelleştirilmiş Hadamard matrisi ($H(p, h)$) denilir. p asal sayı iken, sadece t pozitif tamsayı olduğunda $h=pt$ ise $H(p, h)$ ın var olabileceği kolayca görülür. Böyle matrisler Butson (1962, 1963) tarafından düşünüldü. Butson (1962) de aşağıdaki teoremi ispatladı.

Teorem 5.6.1:

p herhangi bir asal sayı ve n herhangi bir pozitif tamsayı olduğunda $H(p, 2p^n)$ vardır.

5.6.1. Hadamard matrisleri ve belirli konfigürasyonlar

$n=s-1$ işlemlerin her birinin $m=s^2t+s+1$ setleri ve

$$v=b=(s-1)(s^2t+s+1) ; r=k=s[(s-1)t+1] ; \lambda_1=0 ; \lambda_2=(s-1)t+1$$

ile grup bölünebilir tasarımı $G(s, t)$ ile gösterilsin. Bu takdirde aşağıdaki teoreme ulaşılır.

Teorem 5.6.1.1:

(i) $A(s, t)$, $G(s, t)$ ve $OA(s, t)$ nin herhangi birisinin varlığı diğer ikisinin varlığını ifade eder. Ayrıca, $G(s, t)$ den oluşan R farklar seti varsa, bu takdirde

$$v=s(s^2t+s+1) ; r=s^2t+s+1 ; \lambda=st+1$$

ile simetrik dengeli tamamlanmamış blok tasarımı vardır.

(ii) p asal sayı ise, $OA(p,t)$ nin varlığı $H(p, p^2[(p-1)t+1])$ nin varlığını ifade eder.

5.6.2. Genelleştirilmiş Hadamard matrisi ile ortogonal düzenlerin kuruluşu

s mertebeli modül M olsun ve M' den meydana gelen elemanlar ile μs sütunlar ve t satırların matrisi D alınsın. Bu takdirde μ defa M' nin tüm elemanlarını kapsayan D nin herhangi iki satırından meydana gelen sıralı farklara $D(\mu s, t, s, 2)$ farklar seti denilir. Bose ve Bush (1952) de gösterildiği gibi böyle farklar seti M' nin toplamsal tablosunun uygun satırlarıyla D nin her bir elemanı yerine konulmasıyla $(\mu s^2, t, s, 2)$ ye ulaşılır.

p sabit asal sayıyı ve $H=(h_{ij})$ $H(p, pt)$ yi göstereyin. h_{ij} nin her bir elemanı ρ birimin p .inci primitif kökü ve $x \in GF(p)$ olduğunda ρ^x biçimindedir. $\theta(\rho^x)=x$ tanımlansın ve $E=\theta(H)=(\theta(h_{ij}))$ konulsun. Bu takdirde artıklardaki (mod p) $D(pt, pt, p, 2)$ farklar setinin E olduğu anlaşılır. Teorem 5.6.1 ile ilişkili olarak aşağıdaki Yardımcı Teorem verilir.

Yardımcı Teorem 5.6.2.1:

p asal sayı ise, bu takdirde herhangi bir n pozitif tamsayısı için, $D(\mu p, 2p^n, p, 2)$ $\mu=2p^{n-1}$ ile vardır.

Teorem 5.6.2.1:

$OA[2p^{n+1}, 1+2(p+p^2+\dots+p^n), p, 2]$ herhangi bir p asal sayısı ve herhangi bir n pozitif tamsayısı için vardır.

Verilen p ve n için yukarıdaki teoremin ifade ettiği ortogonal düzenin satırların maksimum olası sayısına sahip olduğunu Bose (1942) göstermiştir. Addelman ve Kempthorne (1961) asal sayı olan s yerine konulan p ile yukarıdaki düzenin kuruluşu için farklar setine bağlı olmayan yöntemi verdiler.

M' 'deki elemanlar ile iki farklar seti $D_i = (\mu_i s, t_i, s, 2)$, $i=1,2$ olsun. $D_1 \oplus D_2$ Kronecker toplamı D_2 'nin tüm elemanlarına $d_1(ij)$ eklenmesiyle D_2 'den bulunan matrisle D_1 'in her bir elemanı $d_1(ij)$ yerine yazılmasıyla bulunan $(t_1 t_2, \mu_1 \mu_2 s^2)$ mertebeli matrisi tanımlansın. Bu takdirde aşağıdaki teoreme ulaşılır.

Teorem 5.6.2.2:

M' 'deki elemanlar ile iki farklar seti $D_i = (\mu_i s, t_i, s, 2)$, $i=1,2$ ise, bu takdirde $\mu = \mu_1 \mu_2 s$ olduğunda $D = D_1 \oplus D_2$ de $D(\mu s, t_1 t_2, s, 2)$ farklar setidir.

Teorem 5.6.2.3:

$OA[\mu_i s^2, t_i, s, 2]$, $i=1,2$ nin varlığı $OA[\mu_1 \mu_2 s^4, t_1 t_2, s, 2]$ nin varlığını ifade eder (Shrikhande, 1964).

6. SONUÇ

Bu tez, ortogonal düzenleri tanıtmak amacıyla yapılmıştır. Bundan dolayı öncelikle ortogonal düzenlerin tanımları üzerinde durulmuş ve ortogonal düzenlerin kısıtlarının maksimum sayısı ile ilgili teoremler verilmiştir.

Deney tasarımlarında sık sık meydana gelen problemlerden biri tamamlanmış yapının bazı ölçülebilir karakteristikleri üzerindeki farklı birleşenlerde nicel yada nitel değişikliklerin etkilerini araştırmaktır. Deney düzenlerinde genellikle s farklı düzeylerde uygulanabilen her bir k faktörlerin genel durumu incelenir. Tamamlanmış faktöriyel deneylerin başarısı herhangi bir deney türüne daha genel terimlerle uygulanabilir olmasında saklıdır. Bunun için s düzey sayısı ve k faktör sayısı olmak üzere s^k tane yapıya ihtiyaç vardır. Bu yapılar ise ortogonal düzenlere uygundur. Ayrıca, istatistikte başvuru alan deney düzenleme yöntemlerinden biri olan ortogonal düzenler matematikte matris olarak bilinirler. Ortogonal düzenlerde işlem ikililerinin birlikte görülme sayısı her deneme düzeninde farklıdır.

Aynı zamanda bu tezde, ortogonal düzenlerin kuruluş teknikleri üzerinde durulmuştur. Farklı kuruluş yöntemlerinin olmasından dolayı bazı deney tasarımlarının çeşitli problemlerinde ortogonal düzenlerin faydalı olacağı düşünülmüştür.

Bu çalışmada, ortogonal düzenlerle ilişkili düzenler araştırıldı. Ayrıca, ortogonal düzenlerin kullanım alanları hakkında geniş bilgiler verdi. Böylece, ortogonal düzenlerden diğer deneme düzenlerine geçişin mümkün olduğu görüldü. Bu nedenle ortogonal düzenlerin tüm deneme düzenlerine genişletilebileceği ortaya kondu. Bu geçişler hem cebirsel hem de sonlu geometrik özellikler yardımıyla yapıldı.

KAYNAKLAR

- Addelman, S. and Kempthorne, O., 1961, Some main effect plans and orthogonal arrays of strength two, **Ann. Math. Stat.**, 32, 1167-1176.
- Baumert, L., Golomb, S.W. and Hall, M. Jr., 1962, Discovery of an Hadamard matrix of order 92, **Bull. Amer. Math. Soc.**, 68, 237-238.
- Bayrak, H., 1991, Lineer Modellerde Tamamlanmamış Bloklar Üzerine Bir İnceleme, **Doktora Tezi**, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Bayrak, H. ve Gönen, S., 1994, Latin Karelerin oluşturulması, **Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi**, C.4, No.1, 39-46.
- Bayrak, H., 1996, Hadamard matrisleri ve deney düzeninde bazı uygulamaları, **Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi**, C.9, No.3, 355-366.
- Blum, J.R., Schatz, J.A. and Seiden, E., 1970, On 2-level orthogonal arrays of odd index, **Journal of Combinatorial Theory**, 9, 239-243.
- Bose, R.C. and Kishen, K., 1940, On the problem of confounding in the general symmetrical factorial design, **Sankhyā**, 5, 21-36.
- Bose, R.C., 1942, A note on the resolvability of balanced incomplete block designs, **Sankhyā**, 6, 105-110.
- Bose, R.C., 1947, Mathematical theory of symmetrical factorial designs, **Sankhyā**, 8, 107-166.
- Bose, R. C. and Bush, K.A., 1952, Orthogonal arrays of strength two and three, **Ann. Math. Stat.**, 23, 508-524.
- Bose, R.C., 1961, On some connections between the design of experiments and information theory, **Bull. Inter. Stat. Inst. (32 session, Tokyo, 1960)**, 38, 257-271.
- Box, G. and Tyssedal, J., 1996, Projective properties of certain orthogonal arrays, **Biometrika**, 83, 4, pp. 950-955.

- Brownlee, K.A. and Loraine, P.K., 1948, The relationship between finite groups and completely orthogonal squares, cubes and hypercubes, **Biometrika**, 35, 277-282.
- Bush, K.A., 1952, Orthogonal arrays of index unity, **Ann. Math. Stat.**, 23, 293-295.
- Butson, A.T., 1962, Generalized Hadamard matrices, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 13, 894-898.
- Butson, A.T., 1963, Relations among generalized Hadamard matrices, **Can. J. Math.**, 15, 42-48.
- Chakravarti, I.M., 1956, Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays, **Sankhyā**, 17, 143-164.
- Chakravarti, I.M., 1963, Orthogonal and partially balanced arrays and their applications in design of experiments, **Metrika**, 7, 231-243.
- Cheng, C.S., 1995, Some projection properties of orthogonal arrays, **The Annals of Statistics**, Vol. 23, No. 4, 1223-1233.
- Cohn, P.M., 1994, Elements of Linear Algebra, **Chapman and Hall**, pp. 146-147.
- Curtis, W.C., 1984, Linear Algebra An Introductory Approach, **Springer-Verlag**, New York.
- Finney, D.J., 1945, The fractional replication of fractional arrangements, **Ann. Eugenics**, 12, 291-301.
- Hedayat, A. and Wallis, W.D., 1978, Hadamard matrices and their applications, **The Annals of Statistics**, Vol. 6, No. 6, 1184-1238.
- Hedayat, A. and Stufken, J., 1988, Two-Symbol Orthogonal Arrays, **Optimal Design and Analysis of Experiments**, Y. Dodge, V.V. Fedorov and H.P. Wynn (Editors), pp. 47-58.
- Hedayat, A.S., Pu K. and Stufken, J., 1992, On the construction of asymmetrical orthogonal arrays, **The Annals of Statistics**, Vol. 20, No. 4, 2142-2152.

- Hedayat, A.S. and Stufken, J., 1999, Compound orthogonal arrays, **Technometrics**, Vol. 41, No. 1, 57-61.
- Hotelling, H., 1944, Some improvements in weighing and other experimental techniques, **Ann. Math. Stat.**, 15, 297-306.
- Kempthorne, O., 1947, A simple approach to confounding and fractional replication in fractional experiments, **Biometrika**, 34, 255-272.
- Kishen, K., 1942, On Latin and hypergraecolatin cubes and hypercubes, **Current Science**, 11, 98-99.
- Kishen, K., 1948, On fractional replication of general symmetrical factorial designs, **Indian Jour. Agri. Statist.**, 1, 91-106.
- Kishen, K., 1949, On the construction of latin and hypergraecolatin cubes and hypercubes, **J. Indian Soc. Agric. Stat.**, 2, 20-48.
- Lin, D.K.J. and Draper, N.R., 1992, Projection properties of Plackett and Burman designs, **Technometrics**, Vol. 34, No. 4, 423-428.
- Mood, A.M., 1946, On Hotelling's weighing problem, **Ann. Math. Stat.**, 17, 432-446.
- Mukerje, R. and Kageyama, S., 1994, On existence of two symbol complete orthogonal arrays, **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, 66, 176-181.
- Paley, R.E.A.C., 1933, On orthogonal matrices, **J. Math. Phys.**, 12, 311-320.
- Plackett, R.L., and Burman, J.P., 1943-1946, The design of optimum multifactorial experiments, **Biometrika**, 33, 305-325.
- Raghavarao, D., 1971, Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments, **Originally Published, New York: Wiley**, 9-31.
- Rao, C.R., 1946, Hypercubes of Strength "d" Leading to Confounded Designs in Factorial Experiments, **Bull. Cacutta Math. Soc.**, 38, 67-78.
- Rao, C.R., 1947, Factorial Arrangements Derivable from Combinatorial Arrangements of Arrays, **Jour. Roy. Stat. Soc., Suppl.**, 9, 128-139.

- Rao, C.R., 1973, Some combinatorial problems of arrays and applications to design of experiments, **In A Survey of Combinatorial Theory (J.N. Srivastava ed.)**, 349-359, North-Holland, Amsterdam.
- Ray-Chaudhuri, D.K. and Singhi, N.M., 1988, On existence and number of orthogonal arrays, **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, 47, 28-36.
- Roberts, E. C. Jr., 1992, Sets of mutually orthogonal Latin squares with "Like Subsquares", **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, 61, 50-63.
- Roger, A.H. and Charles, R.J., 1990, Matrix Analysis, **Cambridge University Press.**, pp. 29.
- Rosenbaum, R.P., 1996, Some useful compound dispersion experiments in quality design, **Technometrics**, 38, 354-364.
- Saxena, P.N., 1960, On Latin Cubes of second order and fourth replication of three dimensional or Cubic Lattice Designs, **J. Indian Soc. Agric. Stat.**, 12, 100-140.
- Seiden, E., 1950, A Theorem in finite projective geometry and an application to statistics, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 1, 282-286.
- Seiden, E., 1954, On The Problem of Construction of Orthogonal Arrays, **Ann. Math. Stat.**, 25, 151-156.
- Seiden, E. and Zemach, R., 1966, On orthogonal arrays. **Ann. Math. Stat.**, 37, 1355-1370.
- Sernesi, A. (1993). Linear Algebra A Geometric Approach, Translated by J. Montaldi, **Chapman and Hall.**, pp. 89-90.
- Shrikhande, S.S., 1964, Generalized Hadamard matrices and orthogonal arrays of strength two, **Canadian Journal of Mathematics**, 16, 736-740.
- Sylvester, J.J., 1867, Thoughts on inverse orthogonal matrices simultaneous sign successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work and the theory of numbers, **Phil. Mag.**, 34, 461-475.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Ankara’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara’da tamamladı. 1994 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü’nden 1998 yılı Haziran ayında mezun oldu. 1999 yılında Gazi Üniversitesi İstatistik Bölümünde Yüksek Lisans eğitimine başladı.