



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORTOGONAL KONİ A-METRİK UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BUSE ELİF ULUÇINAR

HAZİRAN

BUSE ELİF ULUÇINAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2025

ORTOGONAL KONİ A-METRİK UZAYLAR

Buse Elif ULUÇINAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Buse Elif ULUÇINAR tarafından hazırlanan “Ortogonal Koni A-Metrik Uzaylar” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 18/06/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Buse Elif ULUÇINAR

18.06.2025

ORTOGONAL KONİ A-METRİK UZAYLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Buse Elif ULUÇINAR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında ortogonal koni metrik uzay ve A -metrik uzay yapısı birlikte düşünülerek ortogonal koni A -metrik uzay yapısı elde edilmiştir. Ayrıca bu yapı üzerinde tanımlı ortogonal büzülme dönüşümleri için, bazı sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilmiştir.

Bu tez dokuz bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, metrik uzayların genelleştirilmesine yönelik çalışmalarla ilgili detaylı literatür taraması yapılmış; ikinci bölümde A -metrik yapısının tanımlanmasına öncülük eden çeşitli metrik yapılarının tanımları verilmiş; üçüncü bölümde A -metrik uzaylar hakkında genel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiş; dördüncü bölümde koni A -metrik uzaylar hakkında temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiş; beşinci bölümde ortogonal koni metrik uzaylar hakkında temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiş; altıncı bölümde ortogonal koni A -metrik uzay yapısı kurulmuş ve bu yapı üzerinde temel tanım ve yardımcı teoremler verilmiş; yedinci bölümde ortogonal koni A -metrik uzay yapısı üzerinde tanımlı bazı büzülme dönüşümleri için, sabit noktaların varlığı ve tekliği incelenerek örneklendirilmiş; sekizinci bölümde ortogonal koni A -metrik yapısının üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlanarak yedinci bölümde verilen sabit nokta teoremleri bu sıralama bağıntısı yoluyla yeniden şekillendirilerek ispatlanmış; son bölümde bu çalışmadan elde edilen sonuçlara yer verilmiş ve önerilerde bulunulmuştur.

Sayfa Adedi
Anahtar Kelimeler

Danışman

: 43
: Büzülebilir dönüşüm, Koni metrik, Ortogonal metrik, A -metrik,
Ortogonal koni metrik, Koni A -metrik, Sabit nokta teoremi
: Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

ORTHOGONAL CONE A-METRIC SPACES

(M. Sc. Thesis)

Buse Elif ULUÇINAR

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2025

ABSTRACT

In this thesis work, orthogonal cone metric space and A -metric space structure are considered together and orthogonal cone A -metric space structure is obtained. In addition, some fixed point theorems for orthogonal contraction mappings defined on this structure are stated and proved.

This thesis consists of nine chapters. In the first chapter, a detailed literature review is made regarding the studies on the generalization of metric spaces; in the second section, definitions of various metric structures leading to the definition of the A -metric structure are given; in the third section, general definitions, theorems and examples are given about A -metric spaces; in the fourth section, basic definitions, theorems and examples are given about cone A -metric spaces; in the fifth section, basic definitions, theorems and examples are given about orthogonal cone metric spaces; in the sixth section, the orthogonal cone A -metric space structure is established and basic definitions and auxiliary theorems are given on this structure; In the seventh section, the existence of fixed points for some contraction mappings defined on the orthogonal cone A -metric space structure is examined and exemplified; in the eighth section, a partial ordering relation is defined on the orthogonal cone A -metric structure and the fixed point theorems given in the seventh section are reshaped and proven by means of this ordering relation; in the last section, the results obtained from this study are given and recommendations are made.

Page Number : 43

Keywords : Contractive map, Cone metric, Orthogonal metric, A -metric, Orthogonal cone metric, Cone A -metric, Fixed point theorem

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasını hazırlama sürecinde bana destek olan, yol gösteren ve manevi anlamda yanımda olan herkese en içten teşekkürlerimi sunmak istiyorum. Öncelikle, bilgi ve deneyimleriyle her zaman yolumu aydınlatan, sabırla tüm sorularımı yanıtlayan ve bu süreçte desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR'e sonsuz teşekkür ederim. Kendisi sayesinde hem akademik hem de kişisel anlamda çok şey öğrendim.

Bu süreç boyunca iyi ve kötü her anımda yanımda olan, motivasyonumu kaybettiğimde beni cesaretlendiren, sabırla dinleyen ve destek veren canım aileme ne kadar teşekkür etsem azdır. Varlıklarıyla bana güç veren, duaları ve sevgileriyle her zaman yanımda olduklarını hissettiren anneme, babama ve ablalarımın minnettarım.

Ayrıca, tez sürecinin zorlu ve yorucu dönemlerinde bana moral veren, fikirleriyle katkıda bulunan ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşlarıma da gönülden teşekkür ediyorum. İyi ki varsınız. Bu süreç, sizinle daha anlamlı ve katlanılır hale geldi.

Tez çalışmamda kaynak ve bilgi sağlama konusunda yardımcı olan, görüş ve önerileriyle beni yönlendiren hocalarıma ve bölümümüzdeki tüm akademik kadroya da teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana inanan, destekleyen ve her zaman yanımda olan tüm sevdiklerime ve bu zorlu süreci daha kolay atlatmamı sağlayan herkese en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
3. A-METRİK UZAYLARDA BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
4. KONİ A-METRİK UZAYLARDA BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER	9
5. ORTOGONAL KONİ METRİK UZAYLARDA BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER	12
6. ORTOGONAL KONİ A-METRİK UZAYLARDA BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER	15
7. ORTOGONAL KONİ A-METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ	21
8. SIRALI ORTOGONAL KONİ A-METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ	31
9. SONUÇ VE ÖNERİLER	41
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	43

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler ve Kısaltmalar

Açıklama

 $\mathbb{R}$

Reel Sayılar Kümesi

 $\mathbb{R}^+$

Pozitif Reel Sayılar Kümesi

 $\emptyset$

Boş Küme

 (μ_n)

μ_n dizisi

 $B(\mu, r)$

μ merkezli, r yarıçaplı açık yuvar

 (B, d)

(B, d) Metrik Uzayı

 C

C Reel Banach Uzayı

 $intK$

K konisinin içi

 K

K Konisi

 $\mu \preceq \eta$

$\eta - \mu \in K$

 $\mu \prec \eta$

$\mu \preceq \eta$ fakat $\mu \neq \eta$

 $\mu \prec\prec \eta$

$\eta - \mu \in intK$

 θ_C

Sıfır Vektörü

 μ_0

Ortogonal eleman

 $(M, \top)$

Ortogonal küme

 $(M, \top, A)$

Ortogonal Koni A Metrik Uzay

 $\supseteq$

Kısmi Sıralama

 $(M, \supseteq)$

Kısmi Sıralı Küme

O -küme

Ortogonal küme

O -eleman

Ortogonal eleman

KS-küme

Kısmi Sıralı Küme

1. GİRİŞ

Metrik uzay tanımı ilk olarak 1906 yılında Maurice Frechet tarafından verilmiştir. Metrik olma şartlarında farklılıklar yaparak, uzayın tanım ya da görüntü kümesini değiştirerek çok sayıda genelleştirilmiş metrik uzay yapısı literatüre kazandırılmıştır.

Metrik uzayların genelleştirilmesine yönelik çalışmalar, 1963 yılında Siegfried Gähler'in 2-metrik yapısını tanımlamasıyla başlamıştır. Bu yaklaşım, birden fazla nokta arasındaki mesafeyi aynı anda ölçmeyi hedeflemiş, ancak süreklilik koşulunu her durumda sağlayamaması nedeniyle, metrik uzayın doğrudan bir genellemesi olarak kabul edilmemiştir. 1992 yılında Dhage tarafından önerilen D-metrik uzayı ise, aksiyomatik yapısıyla önceki çalışmaya alternatif sunmuştur. Daha sonra, bilinen eksiklikleri gidermek amacıyla, Mustafa ve arkadaşları 2006 yılında G-metrik kavramını geliştirmiştir. Bu yapı, ikiden fazla nokta arasındaki uzaklığı aynı anda ölçme prensibini sürdürmüştür. 2012 yılında Sedghi ve arkadaşları tarafından bu yöntemin eksik yönleri eleştirilerek, yeni bir metrik yapısı olan S-metrik yapısı verilmiştir. 2015'te Mujahid Abbas ve ekibi, S-metrik uzay yapısını daha üst boyutlara taşıyarak, n noktayı kapsayabilen ve A-metrik olarak adlandırılan yeni bir metrik uzay tanımlamıştır. Bu çalışmalar, metrik uzay teorisinin gelişimine önemli katkılar sağlamıştır.

2007 yılında Huang ve Zhang, klasik metrik dönüşüm anlayışını genişleterek, değer kümesi olarak kısmi sıralı bir Reel Banach uzayı kullanmak suretiyle "koni metrik" adını verdikleri yeni bir yapı önermişlerdir. Bu genelleştirme çerçevesinde, koni metrik uzaylar üzerinde bazı sabit nokta teoremleri formüle edilmiş ve bunların ispatları sunulmuştur. Bu teoremlerde dikkat çeken bir unsur, ispatların geçerliliği için, koninin normallik koşulunun zorunlu tutulmasıdır. Ancak 2008 yılında Rezapour ve Hambarani, bu normallik koşulunun gerekli olmadığını ortaya koymuş ve bu iddiayı destekleyen alternatif ispatlar geliştirmişlerdir. Bu gelişmelerin ardından, koni metrik uzaylara yönelik ilgi artmış ve bu alanda çok sayıda çalışma literatüre kazandırılmaya başlanmıştır.

Öte yandan, 2017 yılında Gordji, Ramezani, De La Sen ve Cho, ortogonal küme kavramını tanımlayarak bu yapılar üzerinde tanımlı metriklerle oluşturulan ortogonal metrik uzaylar bağlamında, Banach Sabit Nokta Teoremi'nin reel bir genelleştirmesini sunmuşlardır. Bu teoremin dikkat çekici yönü, özdönüşüm üzerinde tanımlanan büzülme koşulunun, tüm küme yerine yalnızca ortogonal olarak bağlantılı elemanlar arasında sağlanmasının yeterli olmasıdır. Söz konusu çalışmanın ardından, ortogonal metrik uzaylar üzerine kurulan sabit nokta teorisi alanında çeşitli genelleştirmeler yapılmış ve bu doğrultudaki araştırmalar günümüzde de sürmektedir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde A -metrik yapısının tanımlanmasına öncülük eden çeşitli metrik yapılarının tanımları verilecektir.

2.1 Tanım $B \neq \emptyset$ olmak üzere, verilen her $\mu, \eta, \nu \in B$ için $d : B \times B \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

- 1) $d(\mu, \eta) = 0 \Leftrightarrow \mu = \eta$
- 2) $d(\mu, \eta) = d(\eta, \mu)$
- 3) $d(\mu, \nu) \leq d(\mu, \eta) + d(\eta, \nu)$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise, d fonksiyonuna B kümesi üzerinde bir metrik ve (B, d) ikilisine de metrik uzay denir. (Fréchet, 1906)

2.2 Tanım $B \neq \emptyset$ olmak üzere, verilen her $\mu, \eta, \nu, \kappa \in B$ için $d : B \times B \times B \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

- i) $\mu \neq \eta$ ve $\mu, \eta \in B$ için $d(\mu, \eta, \nu) \neq 0$ koşulunu sağlayan bir $\nu \in B$ vardır.
- ii) En az iki tanesi eşit olan $\mu, \eta, \nu \in B$ için $d(\mu, \eta, \nu) = 0$
- iii) $d(\mu, \eta, \nu) = d(\mu, \nu, \eta) = d(\nu, \mu, \eta) = d(\nu, \eta, \mu) = d(\eta, \nu, \mu) = d(\eta, \mu, \nu)$
- iv) $d(\mu, \eta, \nu) \leq d(\mu, \eta, \kappa) + d(\mu, \kappa, \nu) + d(\kappa, \eta, \nu)$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise, d fonksiyonuna B kümesi üzerinde 2-metrik ve (B, d) ikilisine de 2-metrik uzay denir. (Gähler, 1963)

2.3 Tanım $B \neq \emptyset$ olmak üzere, verilen her $\mu, \eta, \nu, \kappa \in B$ için, $D : B \times B \times B \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

- i) $D(\mu, \eta, \nu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \eta = \nu$
- ii) $D(\mu, \eta, \nu) = D(\mu, \nu, \eta) = D(\eta, \mu, \nu) = D(\eta, \nu, \mu) = D(\nu, \mu, \eta) = D(\nu, \eta, \mu)$
- iii) $D(\mu, \eta, \nu) \leq D(\mu, \eta, \kappa) + D(\mu, \kappa, \nu) + D(\kappa, \eta, \nu)$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise, D fonksiyonuna B kümesi üzerinde D -metrik ve (B, D) ikilisine de D -metrik uzay denir. (Dhage, 1992)

2.4 Tanım $B \neq \emptyset$ olmak üzere, verilen her $\mu, \eta, \nu, \kappa \in B$ için, $G : B \times B \times B \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü

- i) $\mu = \eta = \nu \Rightarrow G(\mu, \eta, \nu) = 0$
- ii) Her $\mu, \eta \in B$ ve $\mu \neq \eta$ için $G(\mu, \mu, \eta) > 0$
- iii) Her $\mu, \eta, \nu \in B$ ve $\eta \neq \nu$ için $G(\mu, \mu, \eta) \leq G(\mu, \eta, \nu)$
- iv) $G(\mu, \eta, \nu) = G(\mu, \nu, \eta) = G(\eta, \mu, \nu) = G(\eta, \nu, \mu) = G(\nu, \mu, \eta) = G(\nu, \eta, \mu)$
- v) $G(\mu, \eta, \nu) \leq G(\mu, \kappa, \kappa) + G(\kappa, \eta, \nu)$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise, G fonksiyonuna B kümesi üzerinde G -metrik ve (B, d) ikilisine de G -metrik uzay denir. (Mustafa ve Sims, 2006)

2.5 Tanım $B \neq \emptyset$ olmak üzere, verilen her $\mu, \eta, \nu, \kappa \in B$ için, $D^* : B \times B \times B \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü

- i) $D^*(\mu, \eta, \nu) = 0 \iff \mu = \eta = \nu$
- ii) $D^*(\mu, \eta, \nu) = D^*(\mu, \nu, \eta) = D^*(\eta, \mu, \nu) = D^*(\eta, \nu, \mu) = D^*(\nu, \mu, \eta) = D^*(\nu, \eta, \mu)$
- iii) $D^*(\mu, \eta, \nu) \leq D^*(\mu, \eta, \kappa) + D^*(\kappa, \nu, \nu)$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise, D^* fonksiyonuna B kümesi üzerinde D^* -metrik ve (B, D^*) ikilisine de D^* -metrik uzay denir. (Sedghi ve diğerleri, 2007)

2.6 Tanım $B \neq \emptyset$ olmak üzere, verilen her $\mu, \eta, \nu, \kappa \in B$ için, $S : B \times B \times B \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü

- i) $S(\mu, \eta, \nu) = 0 \iff \mu = \eta = \nu$
- ii) $S(\mu, \eta, \nu) \leq S(\mu, \mu, \kappa) + S(\eta, \eta, \kappa) + S(\nu, \nu, \kappa)$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise, S fonksiyonuna B kümesi üzerinde S -metrik ve (B, S) ikilisine de S -metrik uzay denir. (Sedghi ve diğerleri, 2012)

2.7 Tanım C bir Reel Banach uzayı ve $K \subseteq C$ olsun. Eğer K kümesi

- $\mu_1)$ K kapalı, $K \neq \emptyset$ ve $K \neq \{\theta_C\}$

$$\mu_2) \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad \mu, \eta \in K \Rightarrow \alpha\mu + \beta\eta \in K$$

$$\mu_3) \mu \in K \text{ ve } -\mu \in K \Rightarrow \mu = \theta_C$$

koşullarını sağlayan K kümesine bir koni (cone) denir. (Huang ve Zhang, 2007)

2.8 Tanım C bir Reel Banach uzayı ve $K \subseteq C$ bir koni olsun. Her $\mu, \eta \in C$ için, $\mu \preceq \eta \Leftrightarrow \eta - \mu \in K$ olacak şekilde tanımlı bağıntıya C üzerinde kısmi sıralama bağıntısı denir.

$\mu \neq \eta$ olduğu durumlar için de $\mu \prec \eta$ yazabiliriz. Ayrıca $\eta - \mu \in \text{int}K$ iken de $\mu \prec\prec \eta$ yazabiliriz. Burada $\text{int}K$, K nın içini ifade etmektedir. (Huang ve Zhang, 2007)

2.9 Tanım $B \neq \emptyset$, C bir Reel Banach uzayı olmak üzere, verilen her $\mu, \eta, \nu \in B$ için, $d : B \times B \rightarrow C$ dönüşümü

$$m_1) \theta_C \preceq d(\mu, \eta) \text{ ve } d(\mu, \eta) = \theta_C \Leftrightarrow \mu = \eta$$

$$m_2) d(\mu, \eta) = d(\eta, \mu)$$

$$m_3) d(\mu, \eta) \preceq d(\mu, \nu) + d(\nu, \eta)$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise, d fonksiyonuna B kümesi üzerinde bir koni metrik ve (B, d) ikilisine de koni metrik uzay denir. (Huang ve Zhang, 2007)

2.10 Tanım $B \neq \emptyset$, C Reel Banach uzayı, C de bir koni K , $\text{int}K \neq \emptyset$ ve $\preceq$ bağıntısı C üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. $S : B \times B \times B \rightarrow C$ dönüşümü verilen her $\mu, \eta, \nu, \kappa \in B$ için,

$$1. \theta_C \preceq S(\mu, \eta, \nu)$$

$$2. S(\mu, \eta, \nu) = 0 \iff \mu = \eta = \nu$$

$$3. S(\mu, \eta, \nu) \preceq S(\mu, \mu, \kappa) + S(\eta, \eta, \kappa) + S(\nu, \nu, \kappa)$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise, S fonksiyonuna B kümesi üzerinde bir koni S -metrik ve (B, S) ikilisine de koni S -metrik uzay denir. (Dhamodharan ve Krishnakumar, 2017)

3. A-METRİK UZAYLARDA BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER

3.1 Tanım $B \neq \emptyset$ olmak üzere, $A : B^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü verilen her $\mu_i, a \in B$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) için,

$$\begin{aligned}
 A_1) \quad & A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) \geq 0 \\
 A_2) \quad & A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n \\
 A_3) \quad & A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) \leq A(\mu_1, \mu_1, \dots, (\mu_1)_{n-1}, a) \\
 & \quad + A(\mu_2, \mu_2, \dots, (\mu_2)_{n-1}, a) \\
 & \quad + A(\mu_3, \mu_3, \dots, (\mu_3)_{n-1}, a) \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad + A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, (\mu_{n-1})_{n-1}, a) \\
 & \quad + A(\mu_n, \mu_n, \dots, (\mu_n)_{n-1}, a)
 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise A fonksiyonuna B kümesi üzerinde bir A -metrik ve (B, A) ikilisine de A -metrik uzay denir. (Abbas ve diğerleri, 2015)

A -metrik uzay n . mertebeden bir S -metrik uzaydır. Açıkça her S -metrik uzay A -metrik uzayın özel bir durumudur.

3.1 Yardımcı Teorem (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay olmak üzere her $\mu, \eta \in B$ için,

$$A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) = A(\eta, \eta, \dots, \eta, \mu).$$

(Abbas ve diğerleri, 2015)

Örnek. $B = \mathbb{R}$ ve $A : B^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ aşağıdaki şekilde tanımlı bir dönüşüm olsun.

$$\begin{aligned}
 A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) &= |\mu_1 - \mu_2| + |\mu_1 - \mu_3| + \dots + |\mu_1 - \mu_n| \\
 &\quad + |\mu_2 - \mu_3| + |\mu_2 - \mu_4| + \dots + |\mu_2 - \mu_n| \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + |\mu_{n-2} - \mu_{n-1}| + |\mu_{n-2} - \mu_n| + |\mu_{n-1} - \mu_n| \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} |\mu_i - \mu_j|
 \end{aligned}$$

Bu dönüşüm B kümesi üzerinde bir A -metriktir. (Abbas ve diğerleri, 2015)

3.2 Yardımcı Teorem (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay olmak üzere her $\mu, \eta, v \in B$ için,

$$A(\mu, \mu, \dots, \mu, v) \leq (n-1)A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) + A(v, v, \dots, v, \eta)$$

ve

$$A(\mu, \mu, \dots, \mu, \nu) \leq (n-1)A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) + A(\eta, \eta, \dots, \eta, \nu)$$

eşitsizlikleri sağlanır. (Abbas ve diğerleri, 2015)

3.2 Tanım (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay olsun. Her $\mu, \eta \in B$ için,

$$A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) \leq r$$

olacak şekilde bir $r > 0$ gerçel değeri varsa bu uzaya sınırlı A -metrik uzay denir.

(B, A) uzayı sınırlı değilse bu uzaya sınırlı olmayan A -metrik uzay denir. (Abbas ve diğerleri, 2015)

3.3 Tanım (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay, $\mu \in B$ ve $r > 0$ olsun.

$$B_A(\mu, r) = \{\eta \in B : A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) < r\}$$

kümesine μ merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar,

$$\overline{B_A(\mu, r)} = \{\eta \in B : A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) \leq r\}$$

kümesine μ merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar denir. (Abbas ve diğerleri, 2015)

3.4 Tanım (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay ve $C \subset B$ olsun. Her $\mu \in C$ için, $B(\mu, r) \subset C$ olacak şekilde bir $r > 0$ gerçel değeri varsa C kümesine açık küme denir. $F \subset B$ olmak üzere $B \setminus F$ kümesi açık bir küme ise F kümesine kapalı küme denir. (Abbas ve diğerleri, 2015)

3.3 Yardımcı Teorem (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay olsun. Bu durumda,

- i) A -metrik uzayda her açık yuvar bir açık küme,
- ii) A -metrik uzayda her kapalı yuvar bir kapalı kümedir. (Abbas ve diğerleri, 2015)

3.4 Teorem (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay olsun. Böylece,

- (i) A -metrik uzaydaki $B_A(\mu, r)$ açık yuvarlarının keyfi birleşimi ve sonlu kesişimi açıktır.
- (ii) A -metrik uzaydaki $\overline{B_A(\mu, r)}$ kapalı yuvarların keyfi kesişimi ve sonlu birleşimi kapalıdır. (Abbas ve diğerleri, 2015)

3.5 Teorem (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki tüm açık yuvarların

$$\tau = \{B(\mu, r) : \mu \in B, r > 0\}$$

ailesi B üzerinde bir τ topolojisinin tabanıdır. (Abbas ve diğerleri, 2015)

3.5 Tanım (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay, bu uzayda $\{\mu_k\}$ bir dizi ve $\mu \in B$ olsun. Bu durumda,

1. Verilen her $\varepsilon > 0$ değerine karşılık $k \geq n_0$ koşulunu sağlayan tüm $k \in \mathbb{N}$ için,

$$A(\mu_k, \mu_k, \dots, \mu_k, \mu) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\mu_k\}$ dizisine A -yakınsak dizidir. Burada μ değeri $\{\mu_k\}$ dizisinin limiti olup ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(\mu_k, \mu_k, \dots, \mu_k, \mu) = \mu$$

ile gösterilir.

2. Verilen her $\varepsilon > 0$ değerine karşılık $m, k \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $m, k \in \mathbb{N}$ için,

$$A(\mu_k, \mu_k, \mu_k, \dots, \mu_k, \mu_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\mu_k\}$ dizisine A -Cauchy dizisi denir.

3. A -metrik uzaydaki her A -Cauchy dizisi yakınsak ise A -metrik uzayına A -tam uzay denir. (Abbas ve diğerleri, 2015)

3.6 Yardımcı Teorem (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay olsun. Bu durumda, A -metrik uzaydaki $\{\mu_k\}$ dizisi μ noktasına yakınsak ise μ tektir. (Abbas ve diğerleri, 2015)

3.7 Yardımcı Teorem (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay olsun. A -metrik uzaydaki her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir. (Abbas ve diğerleri, 2015)

3.8 Yardımcı Teorem (B, A) ikilisi bir A -metrik uzay olsun. O halde, $A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta)$ dönüşümü tüm bileşenler üzerinde süreklidir. Bir diğer deyişle (μ_k) ve (η_k) A -metrik uzayda sırasıyla μ ve η ya yakınsayan iki dizi ise

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(\mu_k, \mu_k, \dots, \mu_k, \eta_k) = A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta)$$

olur. (Abbas ve diğçerleri, 2015)



4. KONİ A-METRİK UZAYLARDA BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER

4.1 Tanım $B \neq \emptyset$ olmak üzere, C bir Reel Banach uzayı ve C de bir koni K , $\text{int}K \neq \emptyset$, $\preceq$ bağıntısı C üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. $A : B^n \rightarrow C$ dönüşümü verilen her $\mu_i, a \in B$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) için,

$$\begin{aligned} A_1) \quad & \theta \preceq A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) \\ A_2) \quad & A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) = \theta \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-1} = \mu_n \\ A_3) \quad & A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) \preceq A(\mu_1, \mu_1, \dots, (\mu_1)_{n-1}, a) \\ & + A(\mu_2, \mu_2, \dots, (\mu_2)_{n-1}, a) \\ & + A(\mu_3, \mu_3, \dots, (\mu_3)_{n-1}, a) \\ & \vdots \\ & + A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, (\mu_{n-1})_{n-1}, a) \\ & + A(\mu_n, \mu_n, \dots, (\mu_n)_{n-1}, a) \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise A fonksiyonuna B kümesi üzerinde bir koni A -metrik ve (B, A) ikilisine de koni A -metrik uzay denir. (Fernandez ve diğerleri, 2017)

Koni A -metrik uzay, koni S -metrik uzayın bir genelleştirilmesidir. $n = 3$ için, her koni S -metrik uzay bir koni A -metrik uzaydır.

Örnek. $C = C([a, b])$ ($[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı gerçel değerli, supremum normu ile sürekli fonksiyonlar kümesi), $B = \mathbb{R}$ ve $K = \{p \in C : p(t) \geq 0, t \in [a, b]\}$ olsun. Bu durumda,

$$A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} |\mu_i - \mu_j| e^t$$

şeklinde tanımlı $A : \mathbb{R}^n \rightarrow C$ dönüşümü B üzerinde bir koni A -metriktir. (Fernandez ve diğerleri, 2017)

4.1 Yardımcı Teorem (B, A) bir koni A -metrik uzay olmak üzere her $\mu, \eta \in B$ için,

$$A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) = A(\eta, \eta, \dots, \eta, \mu)$$

sağlanır. (Fernandez ve diğerleri, 2017)

4.2 Yardımcı Teorem (B, A) ikilisi bir koni A -metrik uzay olmak üzere her $\mu, \eta, v \in B$ için,

$$A(\mu, \mu, \dots, \mu, v) \leq (n-1)A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) + A(v, v, \dots, v, \eta)$$

ve

$$A(\mu, \mu, \dots, \mu, \nu) \leq (n-1)A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) + A(\eta, \eta, \dots, \eta, \nu)$$

eşitsizlikleri sağlanır. (Fernandez ve diğerleri, 2017)

4.2 Tanım (B, A) bir koni A -metrik uzay olmak üzere $\mu \in B$ ve $r \succ \succ \theta$ için,

$$B_A(\mu, r) = \{\eta \in B : A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) \prec \prec r\}$$

kümesine μ merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar,

$$\overline{B_A(\mu, r)} = \{\eta \in B : A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) \leq r\}$$

kümesine μ merkezli r yarıçaplı bir kapalı yuvar denir. (Fernandez ve diğerleri, 2017)

4.3 Tanım (B, A) koni A -metrik uzayında bir $\{\mu_k\}$ bu uzayda bir dizi ve $\mu \in B$ olsun. Bu durumda,

1. Verilen her $g \succ \succ \theta$ değerine karşılık $k \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$A(\mu_k, \mu_k, \dots, \mu_k, \mu) \prec \prec g$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\mu_k\}$ dizisine koni A -yakınsak dizidir. Burada μ değeri $\{\mu_k\}$ dizisinin limiti olup ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(\mu_k, \mu_k, \dots, \mu_k, \mu) = \mu$$

ile gösterilir.

2. Verilen her $g \succ \succ \theta$ değerine karşılık $m, k \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $m, k \in \mathbb{N}$ için,

$$A(\mu_k, \mu_k, \mu_k, \dots, \mu_k, \mu_m) \prec \prec g$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\mu_k\}$ dizisine koni A -Cauchy dizisidir.

3. Koni A -metrik uzaydaki her koni A -Cauchy dizisi yakınsak ise koni A -metrik uzayına koni A -tamdır denir. (Fernandez ve diğerleri, 2017)

4.3 Yardımcı Teorem (B, A) bir koni A -metrik uzay olsun. Bu takdirde (B, A) koni A -metrik uzaydaki $\{\mu_k\}$ dizisi μ noktasına yakınsak ise μ tektir. (Fernandez ve diğerleri, 2017)

4.4 Yardımcı Teorem (B, A) koni A -metrik uzaydaki her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir. (Fernandez ve diğerleri, 2017)

4.5 Yardımcı Teorem (B, A) bir koni A -metrik uzay olsun. O halde $A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta)$ dönüşümü tüm bileşenleri üzerinde sürekli; (μ_k) ve (η_k) koni A -metrik uzayda sırasıyla μ ve η ye yakınsayan iki dizi ise

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(\mu_k, \mu_k, \dots, \mu_k, \eta_k) = A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta)$$

olur. (Fernandez ve diğerleri, 2017)



5. ORTOGONAL KONİ METRİK UZAYLARDA BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER

5.1 Tanım $M \neq \emptyset$ olmak üzere, $\lceil \subseteq M \times M$ bir ikili bağıntı olsun. Eğer $\lceil$ bağıntısı

$$\exists \mu_0 \in M; (\forall \mu \in M, \mu \lceil \mu_0) \vee (\forall \mu \in M, \mu_0 \lceil \mu), \quad (5.1)$$

koşulunu sağlarsa M kümesine O -küme denir. Burada μ_0 elemanına O -eleman denir. (Gordji ve diğerleri, 2017)

Örnek. $M = \mathbb{Z}$ olsun. $\mu, \eta \in \mathbb{Z}$ için, $\mu = a\eta$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ varsa $\mu \lceil \eta$ olarak tanımlanırsa, her $\eta \in \mathbb{Z}$ için, $0 \lceil \eta$ olacak şekilde $0 \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. O halde, $(M, \lceil)$ bir O -kümedir. (Gordji ve diğerleri, 2017)

Bir sonraki örnekte O -elemanın tek olmak zorunda olmadığı görülmektedir.

Örnek. $M = [0, \infty)$ olsun. $\mu, \eta \in \{0, 1\}$ ise $\mu \lceil \eta$ olarak tanımlansın. Bu bağıntıya göre $(M, \lceil)$ O -küme olup M nin O -elemanları 0 ve 1 dir. (Gordji ve diğerleri, 2017)

5.2 Tanım $(M, \lceil)$ bir O -küme olsun. Herhangi $\mu, \eta \in M$ için,

$$\mu \lceil \eta \quad \vee \quad \eta \lceil \mu$$

ise bu elemanlara O -bağılantılı elemanlar denir. (Gordji ve diğerleri, 2017)

5.3 Tanım $(M, \lceil)$ O -küme olsun. M deki bir $\{\mu_n\}$ dizisi için,

$$(\forall n \in \mathbb{N}; \mu_n \lceil \mu_{n+1}) \vee (\forall n \in \mathbb{N}; \mu_{n+1} \lceil \mu_n) \quad (5.2)$$

sağlanıyorsa $\{\mu_n\}$ dizisine O -dizi denir. Benzer şekilde, M deki $\{\mu_n\}$ Cauchy dizisi için,

$$(\forall n \in \mathbb{N}; \mu_n \lceil \mu_{n+1}) \vee (\forall n \in \mathbb{N}; \mu_{n+1} \lceil \mu_n) \quad (5.3)$$

sağlanıyorsa $\{\mu_n\}$ dizisine ortogonal Cauchy dizisi (O -Cauchy dizisi) denir. (Gordji ve diğerleri, 2017)

5.4 Tanım $(M, \lceil)$ bir O -küme ve d , M üzerinde bir metrik olsun. Bu durumda, $(M, \lceil, d)$ ye ortogonal metrik uzay (O -metrik uzay) denir. (Gordji ve diğerleri, 2017)

5.5 Tanım $(M, \preceq)$ bir O -küme ve d, M üzerinde bir koni metrik olsun. Bu durumda, $(M, \preceq, d)$ ye O -koni metrik uzay denir. (Güngör ve Sürmelioglu, 2020)

Örnek. $C = \mathbb{R}^2$, $K = \{(\mu, \eta) \in C : \mu, \eta \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\alpha \geq 0$ ve $\alpha \in R$ olmak üzere $d : M \times M \rightarrow G$, $d(\mu, \eta) = (|\mu - \eta|, \alpha|\mu - \eta|)$ dönüşümü tanımlansın. $M = \mathbb{Z}$ deki $\preceq$ ikili bağıntısı " $\mu, \eta \in \mathbb{Z}$ için $\mu = a\eta$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ var $\Leftrightarrow \mu \preceq \eta$ " olarak tanımlansın. Bu durumda, $(M, \preceq, d)$ bir O -koni metrik uzaydır. (Güngör ve Sürmelioglu, 2020)

Örnek. $q \geq 1, b > 1$ ve $q, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $C = \{\{\mu_n\} : \mu_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} (|\mu_n|)^q < \infty\}$ ve $K = \{\{\mu_n\} \in C : \mu_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $(M, \preceq, p)$ yapısının bir O -metrik uzay olduğunu kabul edelim. O halde M üzerinde,

$$d : M \times M \rightarrow G, d(\mu, \eta) = \left(\frac{p(\mu, \eta)}{b^n} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (5.4)$$

dönüşümü tanımlanabilir ve bu dönüşüm bir O -koni metrik olup $(M, \preceq, d)$ bir O -koni metrik uzaydır. (Güngör ve Sürmelioglu, 2020)

Örnek. $C = (C_{\mathbb{R}}[0, \infty), \|\cdot\|_{\infty})$ ve $K = \{f \in C | f(t) \geq 0\}$ olsun. $(M, \preceq, d)$ bir O -metrik uzay ve burada

$$d : M \times M \rightarrow G, f_{\mu, \eta}(t) = p(\mu, \eta)t \text{ olmak üzere } d(\mu, \eta) = f_{\mu, \eta} \quad (5.5)$$

dönüşümü O -koni metriktir. O halde $(M, \preceq, d)$ bir O -koni metrik uzaydır. (Güngör ve Sürmelioglu, 2020)

5.6 Tanım $(M, \preceq, d)$ bir O -koni metrik uzay, $\{\mu_n\}$ M de O -dizi ve $\mu \in M$ olsun. Eğer $\theta_C \prec \prec g$ olacak şekildeki her $g \in C$ için, en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq N$ olacak şekildeki n pozitif doğal sayısı için, $d(\mu_n, \mu) \prec \prec g$ oluyorsa $\{\mu_n\}$ O -dizisine $\mu \in M$ noktasına yakınsaktır denir. (Güngör ve Sürmelioglu, 2020)

5.7 Tanım $(M, \preceq, d)$ bir O -koni metrik uzay olsun. $\mu \in M$ olmak üzere $\{\mu_n\}$ M de O -dizi olsun. Eğer $\theta_C \prec \prec g$ olacak şekildeki her $g \in C$ için, en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m \geq N$ olacak şekildeki n, m pozitif doğal sayıları için, $d(\mu_n, \mu_m) \prec \prec g$ oluyorsa $\{\mu_n\}$ O -dizisine M de bir O -Cauchy dizisi denir. (Güngör ve Sürmelioglu, 2020)

5.8 Tanım $(M, \preceq, d)$ bir O -koni metrik uzay olsun. M deki her O -Cauchy dizisi yakınsak ise bu durumda $(M, \preceq, d)$ koni metrik uzayına O -tam koni metrik uzay denir. (Güngör ve Sürmelioglu, 2020)

5.1 Yardımcı Teorem $(M, \top, d)$ bir O -koni metrik uzay olsun. $\{\mu_n\}$ M de O -dizi olsun. $\{\mu_n\}$ O -dizisi $\mu \in M$ elemanına yakınsıyor ise O -Cauchy dizisidir. (Rakotch, 1962)

5.9 Tanım $(M, \top, d)$ bir O -koni metrik uzay olsun. M deki her $\{\mu_n\}$ O -dizisinin, M içinde yakınsak $\{\mu_{n_i}\}$ O -alt dizisi varsa $(M, \top, d)$ O -koni metrik uzayına dizisel kompakt O -koni metrik uzay denir. (Güngör ve Sürmelioglu, 2020)

5.10 Tanım $(M, \top, d)$ bir O -koni metrik uzay, $0 < \gamma < 1$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ olsun. $h : M \rightarrow M$ dönüşümü için,

$$\mu \top \eta \Rightarrow d(h\mu, h\eta) \lesssim \gamma d(\mu, \eta) \quad (5.6)$$

oluyorsa h dönüşümüne γ Lipschitz sabitiyle ortogonal büzülme ($\top$ -büzülme) denir. (Güngör ve Sürmelioglu, 2020)

5.11 Tanım $(M, \top, d)$ bir O -koni metrik uzay olsun. $h : M \rightarrow M$ dönüşümü için,

$$\mu \top \eta \Rightarrow h\mu \top h\eta \quad (5.7)$$

oluyorsa h dönüşümüne ortogonalliği koruyan dönüşüm ($\top$ -koruyan) denir. (Güngör ve Sürmelioglu, 2020)

5.12 Tanım $(M, \top, d)$ O -koni metrik uzay, $\mu_n \subseteq M$ O -dizi, $h : M \rightarrow M$ dönüşüm ve $\mu \in M$ olsun. $\mu_n \rightarrow \mu \Rightarrow h\mu_n \rightarrow h\mu$ oluyorsa h dönüşümüne O -sürekli dönüşüm ($\top$ -sürekli) denir. Ayrıca h dönüşümü her $\mu \in M$ için, O -sürekli ise, h dönüşümüne ortogonal sürekli dönüşüm denir. (Güngör ve Sürmelioglu, 2020)

6. ORTOGONAL KONİ A-METRİK UZAYLARDA BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER

6.1 Tanım $(M, \top)$ bir O -küme ve A, M üzerinde bir koni A -metrik olsun. O halde, $(M, \top, A)$ üçlüsüne O -koni A -metrik uzay denir.

Örnek. $C = \mathbb{R}^2, K = \{(\mu, \eta) \in C : \mu, \eta \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $M = \mathbb{Z}$ olsun. $A : M^n \rightarrow C$ dönüşümü $\alpha \geq 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (|\mu_i - \mu_j|, \alpha |\mu_i - \mu_j|).$$

Her $\mu, \eta \in \mathbb{Z}$ için, $\mu = a\eta$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ varsa $\mu \top \eta$ olarak tanımlanırsa, $(M, \top, A)$ bir O -koni A -metrik uzaydır.

6.2 Tanım $(M, \top, A)$ bir O -koni A -metrik uzay olsun. $\mu \in M$ olmak üzere $\{\mu_n\}$ M de O -dizi olsun. Eğer $\theta_C \prec \prec g$ olacak şekildeki her $g \in C$ için, en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq N(n \in \mathbb{N})$ için, $A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu) \prec \prec g$ oluyorsa $\{\mu_n\}$ O -dizisi $\mu \in M$ noktasına yakınsaktır denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu \text{ veya } \mu_n \rightarrow \mu (n \rightarrow \infty)$$

6.3 Tanım $(M, \top, A)$ bir O -koni A -metrik uzay olsun. $\mu \in M$ olmak üzere $\{\mu_n\}$ M de O -dizi olsun. Eğer $\theta_C \prec \prec g$ olacak şekildeki her $g \in C$ için, en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m \geq N(n, m \in \mathbb{N})$ için, $A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m) \prec \prec g$ oluyorsa $\{\mu_n\}$ O -dizisine M de bir O -Cauchy dizisi denir .

6.4 Tanım $(M, \top, A)$ bir O -koni A -metrik uzay olsun. M deki her O -Cauchy dizisi yakınsak ise bu durumda $(M, \top, A)$ koni A -metrik uzayına O -tam koni A -metrik uzay denir.

6.1 Yardımcı Teorem $(M, \top, A)$ bir O -koni A -metrik uzay olsun. $\{\mu_n\}$ M de O -dizi olsun. $\{\mu_n\}$ O -dizisi $\mu \in M$ elemanına yakınsıyorsa O -Cauchy dizisidir.

6.5 Tanım $(M, \top, A)$ bir O -koni A -metrik uzay olsun. M deki her $\{\mu_n\}$ O -dizisinin, M içinde yakınsak $\{\mu_{n_i}\}$ O -alt dizisi olsun. Bu durumda, $(M, \top, A)$ O -koni A -metrik uzayına dizisel kompakt O -koni A -metrik uzay denir.

6.6 Tanım $(M, \top, A)$ bir O -koni A -metrik uzay, $0 < \gamma < 1$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ olsun. $h : M \rightarrow M$ dönüşümü için,

$$\mu \top \eta \Rightarrow A(h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) \preceq \gamma A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) \quad (6.1)$$

oluyorsa h dönüşümüne Lipschitz γ sabitiyle ortogonal büzülme ($\neg$ -büzülme) denir.

6.7 Tanım $(M, \neg, A)$ bir O -koni A -metrik uzay olsun. $h : M \rightarrow M$ dönüşümü için,

$$\mu \neg \eta \Rightarrow h\mu \neg h\eta \quad (6.2)$$

oluyorsa h dönüşümüne ortogonalliği koruyan dönüşüm ($\neg$ -koruyan) denir.

6.8 Tanım $(M, \neg, A)$ O -koni A -metrik uzay, $\{\mu_n\} \subseteq M$ O -dizi, $h : M \rightarrow M$ dönüşüm ve $\mu \in M$ olsun. $\mu_n \rightarrow \mu$ olduğunda $h\mu_n \rightarrow h\mu$ oluyorsa h dönüşümüne O -sürekli dönüşüm ($\neg$ -sürekli) denir. Ayrıca h dönüşümü her $\mu \in M$ için, O -sürekli ise, h dönüşümüne M kümesi üzerinde O -sürekli dönüşüm denir.

Uyarı Genel olarak her Lipschitz büzülmenin O -Lipschitz büzülme olduğunu görmek kolaydır. Aşağıdaki örnek ifadenin karşınının doğru olmadığını gösterir.

Örnek. $C = \mathbb{R}^2$, $K = \{(\mu, \eta) \in C : \mu, \eta \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $M = \mathbb{R}$ olsun. $A : M^n \rightarrow C$,

$$A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (|\mu - \eta|, \alpha |\mu - \eta|)$$

dönüşümü $\alpha \geq 0$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}$ için, tanımlansın. $\mu \neg \eta \Rightarrow \mu = \alpha \eta$ olduğunu kabul edelim. O halde, $(M, \neg, A)$ O -koni A -metrik uzaydır. $h : M \rightarrow M$ dönüşümü

$$h(\mu) = \begin{cases} \frac{\mu}{3} & \mu \in \mathbb{Q} \\ 0 & \mu \in \mathbb{Q}^c \end{cases} \quad (6.3)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, h O -Lipschitz büzülmedir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \mu \neg \eta &\Rightarrow \mu = \alpha \eta \\ &\Rightarrow \mu = 0 \text{ iken } \eta \in M \end{aligned}$$

Durum 1: $\mu = 0$ iken $\eta \in \mathbb{Q}$ ise $\gamma = \frac{1}{3} \in (0, 1)$ vardır öyle ki

$$\begin{aligned} A(h\mu, h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) &= A(0, 0, 0, \dots, 0, \frac{\eta}{3}) \\ &= (n-1)(|\frac{\eta}{3}|, \alpha |\frac{\eta}{3}|) \\ &\preceq \gamma(n-1)(|\eta|, \alpha |\eta|) \end{aligned} \quad (6.4)$$

sağlanır.

Durum 2: $\mu = 0$ ve $\eta \in \mathbb{Q}^c$ ise her $\gamma \in (0, 1)$ için,

$$\begin{aligned} A(h\mu, h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) &= A(0, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ &\lesssim \gamma A(\mu, \mu, \mu, \dots, \mu, \eta) \end{aligned} \quad (6.5)$$

sağlanır.

Ancak, h bir Lipschitz büzülmesi değildir. Gerçekten $\mu = \frac{2}{3}$ ve $\eta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ noktaları için, $A(h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) \lesssim \gamma A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta)$ olacak şekilde $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma < 1$ bulunamaz. Çünkü

$$\begin{aligned} h(\mu) &= \frac{2}{9} \text{ ve } h(\eta) = 0 \\ A(h\mu, h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) &= A(|\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{2}{9}, 0|) \\ &= (n-1)(|\frac{2}{9}|, \alpha |\frac{2}{9}|) \end{aligned} \quad (6.6)$$

ve

$$\begin{aligned} A(\mu, \mu, \mu, \dots, \mu, \eta) &= A(|\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}|) \\ &= (n-1)(|\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}|, \alpha |\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}|) \end{aligned} \quad (6.7)$$

olup $A(h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) \lesssim \gamma A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta)$ olacak şekilde $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma < 1$ varsa " $\lesssim$ " tanımı gereği

$$\gamma(|\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}| - |\frac{2}{9}|) \geq 0 \quad (6.8)$$

olması gerekirdi. Bu durum, $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma < 1$ ile çelişir.

Uyarı Bazı dönüşümler ortogonalliği korurken bazı dönüşümler ortogonalliği korumaz. Bu dönüşümler için, örnekler verelim.

Örnek. $C = \mathbb{R}^2$, $K = \{(\mu, \eta) \in C : k \geq 0, l \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $M = \mathbb{R}$ olsun. $A : M^n \rightarrow C$,

$$A(\mu, \mu, \mu, \dots, \mu, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (|\mu - \eta|, \alpha |\mu - \eta|)$$

dönüşümü $\alpha \geq 0$ olacak şekildeki $\alpha \in \mathbb{R}$ için, tanımlansın. $\mu \top \eta \Rightarrow \mu = 0$ veya $0 \neq \eta \in \mathbb{Q}$ olduğunu kabul edelim. O halde, $(M, \top, A)$ O -koni A -metrik uzaydır. $h : M \rightarrow M$ dönüşümü

$$h(\mu) = \begin{cases} 3 & \mu \in \mathbb{Q} \\ 0 & \mu \in \mathbb{Q}^c \end{cases} \quad (6.9)$$

O halde, h dönüşümü ortogonalliği korumayan dönüşümdür. Çünkü $0 \top \sqrt{2}$ sağlanır ancak $h(0) = 3$ ve $h(\sqrt{2}) = 0$ O -bağılantılı değildir.

Örnek. $C = \mathbb{R}^2$, $K = \{(\mu, \eta) \in C : \mu, \eta \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $M = \mathbb{R}$ olsun. $\alpha \geq 0$ için, $A : M^n \rightarrow C$

$$A(\mu, \mu, \mu, \dots, \mu, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (|\mu - \eta|, \alpha |\mu - \eta|)$$

dönüşümü $\alpha \geq 0$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}$ için, tanımlansın. $\mu \lhd \eta \Rightarrow \mu = a\eta$ olduğunu kabul edelim. O halde, $(M, \lhd, A)$ O -koni A -metrik uzaydır. $h : M \rightarrow M$ dönüşümü

$$h(\mu) = \begin{cases} \frac{\mu}{5} & \mu \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \\ 0 & \mu \in \mathbb{Q}^c \cap \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.10)$$

şeklinde tanımlanırsa, bu durumda, h ortogonalliği koruyan bir dönüşümdür. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \mu \lhd \eta &\Rightarrow \mu = a\eta \\ &\Rightarrow \mu = 0, \eta \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} h(\mu) &= \frac{\mu}{5} = 0 \text{ ve } h(\eta) \in \mathbb{Q} \\ &\Rightarrow h(\mu) = ah(\eta) \\ &\Rightarrow h(\mu) \lhd h(\eta) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Uyarı Her sürekli dönüşümün O -sürekli olduğunu görmek kolaydır. Aşağıdaki örnek, ifadenin karşınının genel olarak doğru olmadığını gösterir.

Örnek. $C = \mathbb{R}^2$ $K = \{(\mu, \eta) \in C : \mu, \eta \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $M = \mathbb{R}$ olsun. $A : M^n \rightarrow C$,

$$A(\mu, \mu, \mu, \dots, \mu, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (|\mu - \eta|, \alpha |\mu - \eta|)$$

dönüşümü $\alpha \geq 0$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}$ için, tanımlansın. $\mu \lhd \eta$ olduğunda $\mu = 0$ veya $0 \neq \eta \in \mathbb{Q}$ olduğunu kabul edelim. O halde, $(M, \lhd, A)$ O -koni A -metrik uzaydır. $h : M \rightarrow M$ dönüşümü

$$h(\mu) = \begin{cases} 3 & \mu \in \mathbb{Q} \\ 0 & \mu \in \mathbb{Q}^c \end{cases} \quad (6.12)$$

şeklinde tanımlanırsa, h dönüşümü tüm rasyonel sayılarda O -sürekli. Ama h dönüşümü gerçekte sayılar üzerinde sürekli değildir.

Uyarı Her tam koni A -metrik uzayının O -tam koni A -metrik uzay olduğunu görmek kolaydır. Aşağıdaki örnek, ifadenin karşınının geçerli olmadığını göstermektedir. Öncelikle,

koni A -metrik uzaylarda aşağıdaki Yardımcı Teorem 6.2 yi vereceğiz.

6.2 Yardımcı Teorem Koni A -metrik uzaylarda yakınsak alt diziye sahip her Cauchy dizisi yakınsaktır.

Kanıt (M, A) bir koni A -metrik uzay olsun ve K, C Banach uzayındaki koni olsun. O halde, iki durum vardır:

Durum 1 Eğer K normal koni ise, $\{\mu_n\}$ Cauchy dizisi olduğundan ve $\{\mu_{n_i}\}$ yakınsak alt dizisi iken, sırasıyla $A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m) \rightarrow \theta (n, m \rightarrow \infty)$ ve $A(\mu_{n_i}, \mu_{n_i}, \dots, \mu_{n_i}, \mu) \rightarrow \theta (n_i \rightarrow \infty \text{ ve } \mu \in M)$. Böylece,

$$A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu) \preceq A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n_i}) + A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n_i}) + \dots \\ + A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n_i}) + A(\mu_{n_i}, \mu_{n_i}, \dots, \mu_{n_i}, \mu) \rightarrow \theta$$

Durum 2 Eğer K normal koni değilse, $\{\mu_n\}$ Cauchy dizisi olduğundan ve $\{\mu_{n_i}\}$ yakınsak alt dizisi iken, $\theta \prec\prec g$ koşulunu sağlayan tüm $g \in C$ için, $N_1 \in N$ vardır ve

$$A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m) \prec\prec \frac{g}{2(n-1)}, \quad \forall n, m > N_1 \quad (6.13)$$

ve $N_2 \in N, \mu \in M$ vardır ve

$$A(\mu_{n_i}, \mu_{n_i}, \dots, \mu_{n_i}, \mu) \prec\prec \frac{g}{2}, \quad \forall n_i > N_2. \quad (6.14)$$

Böylece, $\max\{N_1, N_2\} = N$ olduğunu varsayalım. O zaman, her $n, n_i > N$ için,

$$\theta \preceq A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu) \preceq A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n_i}) + A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n_i}) + \dots \\ + A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n_i}) + A(\mu_{n_i}, \mu_{n_i}, \dots, \mu_{n_i}, \mu) \quad (6.15)$$

olup her $n, n_i > N$ için, 6.13 ve 6.14 eşitsizliklerini kullanarak

$$\frac{g}{2(n-1)} - A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n_i}) \in \text{int} K \text{ ve } \frac{g}{2} - A(\mu_{n_i}, \mu_{n_i}, \dots, \mu_{n_i}, \mu) \in \text{int} K \quad (6.16)$$

elde edilir. Böylece, 6.15 ve 6.16 eşitsizliklerini kullanarak

$$g - ((n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n_i}) + A(\mu_{n_i}, \mu_{n_i}, \dots, \mu_{n_i}, \mu)) \in \text{int} K \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow g - A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu) \in \text{int} K$$

elde edilir. □

Örnek. $C = \mathbb{R}^2$, $K = \{(\mu, \eta) \in C : k, l \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $M = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^c$ olsun. $A : M^n \rightarrow C$,

$$A(\mu, \mu, \mu, \dots, \mu, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (|\mu - \eta|, \alpha |\mu - \eta|)$$

dönüşümü $\alpha \geq 0$ olacak şekildeki $\alpha \in \mathbb{R}$ için, tanımlansın. $\mu \mathbin{\lrcorner} \eta$ olduğunda $\mu = \sqrt{3}$ veya $\eta = \sqrt{3}$ olduğunu kabul edelim. O halde, $(M, \mathbin{\lrcorner}, A)$ O -koni A -metrik uzaydır. Görüldüğü üzere $(\mathbb{Q}^c, A)$ tam bir koni A -metrik uzayı değildir. Gerçekten de, $\mu_n = 1 + \frac{\sqrt{3}}{n}$ genel terimini alırsak $\{\mu_n\} \subset \mathbb{Q}^c$ bir Cauchy dizisidir ancak $\mu_n \rightarrow 1 \notin \mathbb{Q}^c$. Aksine $(\mathbb{Q}, \mathbin{\lrcorner}, A)$ nın bir O -tam koni A -metrik uzay olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\{\mu_n\} \subset \mathbb{Q}^c$ keyfi bir O -Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, $\{\mu_n\}$ 'nin her n_i için, $\{\mu_{n_i}\} = \sqrt{3}$ olacak şekilde bir alt dizisi vardır ve $\mu_{n_i} \rightarrow \sqrt{3} \in \mathbb{Q}^c$ olur. Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 6.2'yi kullanarak, $\{\mu_n\}$ dizisi $\mathbb{Q}^c$ de yakınsaktır.

7. ORTOGONAL KONİ A-METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde K konisi, L normal sabiti ile bir koni olarak ele alınacaktır.

7.1 Teorem $(M, \lrcorner, A)$ bir O -tam koni A -metrik uzay, $\gamma \in \mathbb{R}, 0 < \gamma < 1$, $h : (M, \lrcorner, A) \rightarrow (M, \lrcorner, A)$ dönüşümü Lipschitz sabiti γ ile ortogonallığı koruyan bir O -büzülme olsun. Bu durumda, herhangi $\mu_0 \in M$ O -elemanı için, $\{h^n(\mu_0)\}$ dizisinin yakınsak olduğu bir $\mu^* \in M$ vardır. Ayrıca h dönüşümü $\mu^* \in M$ de sürekli ise, o zaman $\mu^* \in M$ h dönüşümünün tek bir sabit noktasıdır.

Kanıt $(M, \lrcorner)$ O -küme olduğundan, öyle bir $\mu_0 \in M$ vardır:

$$(\forall \mu \in M, \mu \lrcorner \mu_0) \vee (\forall \mu \in M, \mu_0 \lrcorner \mu) \quad (7.1)$$

ve h M üzerinde bir dönüşüm olduğundan, herhangi bir $\mu_0 \in M$ O -elemanı için, $\mu_1 = h(\mu_0) \in M$ olarak seçilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \mu_0 \lrcorner h(\mu_0) \vee h(\mu_0) \lrcorner \mu_0 \\ \Rightarrow & \mu_0 \lrcorner \mu_1 \vee \mu_1 \lrcorner \mu_0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

benzer şekilde devam edilirse,

$$\mu_1 = h(\mu_0), \mu_2 = h(\mu_1) = h^2(\mu_0), \dots, h(\mu_{n-1}) = h^n(\mu_0) \quad (7.3)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{h^n(\mu_0)\}$ bir iterasyon dizisi elde edilir. h , Lipschitz sabiti γ ile ortogonallığı koruyan bir O -büzülme olduğundan, $\{h^n(\mu_0)\}$ bir O -dizidir ve

$$\begin{aligned} A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu_n) &= A(h(\mu_n), h(\mu_n), \dots, h(\mu_n), h(\mu_{n-1})) \\ &\preceq \gamma A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1}) \\ &\preceq \gamma^2 A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\preceq \gamma^n A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Eğer herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n = \mu_{n+1} = h(\mu_n)$ ise μ_n , h in bir sabit noktasıdır. Her $n, n+1 \in$

$\mathbb{N}$ için $\mu_n \neq \mu_{n+1}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $n, m \in \mathbb{N}$ $m > n$ için,

$$\begin{aligned}
\theta &\preceq A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m) \\
&\preceq (n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}) + A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu_m) \\
&\preceq (n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}) + (n-1)A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu_{n+2}) + \\
&\quad \dots + (n-1)A(\mu_{m-2}, \mu_{m-2}, \dots, \mu_{m-2}, \mu_{m-1}) + A(\mu_{m-1}, \mu_{m-1}, \dots, \mu_{m-1}, \mu_m) \\
&\preceq (n-1)\gamma^n A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1) + (n-1)\gamma^{n-1} A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1) + \dots \\
&\quad + (n-1)\gamma^{m-2} A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1) + \gamma^{m-1} A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1) \\
&\preceq (n-1)[\gamma^n + \gamma^{n+1} + \dots + \gamma^{m-2} + \gamma^{m-1}] A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1) \\
&= (n-1)\gamma^n [1 + \gamma + \dots + \gamma^{m-n-2} + \gamma^{m-n-1}] A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1) \\
&\preceq \frac{(n-1)\gamma^n}{1-\gamma} A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1)
\end{aligned} \tag{7.5}$$

K normal koni olduğundan 7.5 eşitsizliğinden

$$||A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m)|| \leq L ||\frac{(n-1)\gamma^n}{1-\gamma} A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1)|| \tag{7.6}$$

elde edilir. 7.6 eşitsizliğinde $n, m \rightarrow \infty$ limiti alınır, $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ bir O -Cauchy dizisi-
dir.

$(M, \preceq, A)$ bir O -tam koni A -metrik uzay, $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ bu noktaya yakınsayacak şekilde $\mu^* \in M$ vardır. Şimdi, h dönüşümünün $\mu^* \in M$ de O -sürekli olduğunu varsayalım ve $g \in C$, $\theta \prec \prec g$ olsun. $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ dizisi $\mu^* \in M$ 'ya yakınsadığından ve h dönüşümü $\mu^* \in M$ 'da O -sürekli olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve $n \geq n_0$ için,

$$A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, h\mu^*) \prec \prec \frac{g}{2(n-1)} \text{ ve } A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, \mu^*) \prec \prec \frac{g}{2} \tag{7.7}$$

elde edilir. Böylece, $n \geq n_0$ olacak şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \preceq (n-1)A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, h\mu_n) + A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, \mu^*) \prec \prec g$$

olur. Öte yandan, $m \in \mathbb{N}, m \leq 1$ için, $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olup $g \in \text{int}K$ ve $\gamma \text{int}K \subseteq \text{int}K (\gamma \in \eta, \gamma > 0)$ $\frac{g}{m} \in \text{int}K$. Böylece, $n \geq n_0$ olacak şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için, $m \in \mathbb{N}, m \leq 1$ olmak üzere $A(h\mu^* h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \prec \prec \frac{g}{m}$. O halde, $\frac{g}{m} - A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$. $m \rightarrow \infty$ limiti alınır, K konisi kapalı olduğundan $-A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$. Ayrıca, $\theta \preceq A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*)$ yani $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$. Dolayısıyla, K konisinde $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) = \theta$ yani $\mu^* \in M$ h dönüşümünün sabit noktasıdır.

İki farklı sabit nokta μ^* ve η^* olsun.

(i) Eğer $\mu^* \neg \eta^* \vee \eta^* \neg \mu^*$

$$A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) = d(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, h\eta^*) \preceq \gamma A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) \quad (7.8)$$

Dolayısıyla

$$\gamma A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) - A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) = (1 - \gamma)A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) \in K.$$

K koni olduğu için, $\frac{1}{1-\gamma}(\gamma - 1)A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) = -A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*)$ ve dolayısıyla $A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) = \theta$. Yani $\mu^* \in M$, h 'nin tek bir sabit noktasıdır.

(ii) Eğer $\mu^* \neg \eta^* \vee \eta^* \neg \mu^*$ değilse, seçilen O -eleman $\mu_0 \in M$ için,

$$[(\mu_0 \neg \mu^*) \wedge (\mu_0 \neg \eta^*)] \vee [(\mu^* \neg \mu_0) \wedge (\eta^* \neg \mu_0)] \quad (7.9)$$

olup h ortogonallığı koruyan bir dönüşüm iken,

$$[(h(\mu_n) \neg \mu^*) \wedge (h(\mu_n) \neg \eta^*)] \vee [(\mu^* \neg h(\mu_n)) \wedge (\eta^* \neg h(\mu_n))] \quad (7.10)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) &\preceq (n-1)A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, h\mu_{n+1}) + A(h\mu_{n+1}, h\mu_{n+1}, \dots, h\mu_{n+1}, \eta^*) \\ &= (n-1)A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, h(h\mu_n)) + A(h(h\mu_n), h(h\mu_n), \dots, h(h\mu_n), h\eta^*) \\ &\preceq \gamma[A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, h\mu_n) + A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, \eta^*)] \\ &= \gamma[A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \mu_{n+1}) + A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \eta^*)] \end{aligned}$$

olup $n \rightarrow \infty$ limiti alınırsa, $-A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) \in K$. Böylece $A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) = \theta$ olur. Yani $\mu^* \in M$, h dönüşümünün tek bir sabit noktasıdır.

Son olarak h dönüşümünün bir Picard operatörü olduğu gösterilecektir. μ keyfi bir nokta olsun. O zaman

$$\mu_0 \neg \mu \vee \mu \neg \mu_0 \quad (7.11)$$

h ortogonallığı koruyan dönüşüm olduğundan, her $n \in N$ için,

$$h^n(\mu_0) \neg h^n(\mu) \vee h^n(\mu) \neg h^n(\mu_0) \quad (7.12)$$

Her $n \in N$ için,

$$\begin{aligned} A(h^n(\mu_0), h^n(\mu_0), \dots, h^n(\mu_0), h^n(\mu)) &\lesssim \gamma A(h^{n-1}(\mu_0), h^{n-1}(\mu_0), \dots, h^{n-1}(\mu_0), h^{n-1}(\mu)) \\ &\lesssim \dots \lesssim \gamma^n A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1) \end{aligned} \quad (7.13)$$

olur. K, L normal sabiti ile normal koni olduğundan, 7.13 eşitsizliğinden,

$$\|A(h^n(\mu_0), h^n(\mu_0), \dots, h^n(\mu_0), h^n(\mu))\| \leq L \|\gamma^n A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1)\| \quad (7.14)$$

elde edilir. 7.14 eşitsizliği kullanılarak, $0 < \gamma < 1$ olduğundan,

$A(h^n(\mu_0), h^n(\mu_0), \dots, h^n(\mu_0), h^n(\mu)) \rightarrow \theta (n \rightarrow \infty)$ ve böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} h^n(\mu) = \mu^*$ yani h Picard operatörüdür. $\square$

Sonuç $(M, \mathcal{T}, A)$ bir O -koni A -metrik uzay olsun. $h : M \rightarrow M$ dönüşümü bazı pozitif n tam sayıları ve her $\mu, \eta \in M$ için,

$$A(h^n \mu, h^n \mu, \dots, h^n \mu, h^n \eta) \lesssim \gamma A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, h dönüşümünün M için, de tek bir sabit noktası vardır.

Kanıt Teorem 7.1'den h^n dönüşümünün tek bir sabit noktası μ^* vardır. Diğer taraftan

$$h^n(h\mu^*) = h(h^n \mu^*) = h\mu^*$$

olup $h\mu^*$ da h^n dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Dolayısıyla, h^n dönüşümünün tek bir sabit noktası olduğundan $h\mu^* = \mu^*$ bulunur. Burada h dönüşümünün sabit noktası aynı zamanda h^n dönüşümünün de sabit noktası olduğundan, h dönüşümünün sabit noktası tektir. $\square$

7.2 Teorem $(M, \mathcal{T}, A)$ bir O -tam koni A -metrik uzay, $\gamma \in \mathbb{R}, 0 < \gamma < \frac{1}{2}$, $h : (M, \mathcal{T}, A) \rightarrow (M, \mathcal{T}, A)$ dönüşümü Lipschitz sabiti γ ile ortogonallığı koruyan bir O -büzlme olsun. Ayrıca

$$A(h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) \lesssim \gamma [A(\mu, \mu, \dots, \mu, h\mu) + A(\eta, \eta, \dots, \eta, h\eta)]$$

koşulu sağlansın. Bu durumda, herhangi $\mu_0 \in M$ O -elemanı için, $\{h^n(\mu_0)\}$ dizisinin yakınsak olduğu bir $\mu^* \in M$ vardır. Ayrıca, h dönüşümü $\mu^* \in M$ noktasında O -sürekli ise, o zaman $\mu^* \in M$ noktası h dönüşümünün tek bir sabit noktasıdır.

Kanıt $(M, \mathcal{T})$ O -küme olduğundan, $\mu_0 \in M$ vardır ve

$$(\forall \mu \in M, \mu \mathcal{T} \mu_0) \vee (\forall \mu \in M, \mu_0 \mathcal{T} \mu) \quad (7.15)$$

h dönüşümü M üzerinde bir dönüşüm olduğundan, herhangi bir $\mu_0 \in M$ O -elemanı için, $\mu_1 = h(\mu_0) \in M$ olarak seçilebilir.

$$\begin{aligned} & \mu_0 \neg h(\mu_0) \vee h(\mu_0) \neg \mu_0 \\ \Rightarrow & \mu_0 \neg \mu_1 \vee \mu_1 \neg \mu_0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

O halde, benzer şekilde devam edilirse

$$\mu_1 = h(\mu_0), \mu_2 = h(\mu_1) = h^2(\mu_0), \dots, h(\mu_{n-1}) = h^n(\mu_0) \quad (7.17)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\{h^n(\mu_0)\}$ bir iterasyon dizisidir. h , Lipschitz sabiti γ ile ortogonalliği koruyan bir O -büzülme olduğundan, $\{h^n(\mu_0)\}$ bir O -dizidir ve

$$\begin{aligned} A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}) &= A(h(\mu_{n-1}), h(\mu_{n-1}), \dots, h(\mu_{n-1}), h(\mu_n)) \\ &\lesssim \gamma[A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, h\mu_{n-1}) + A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, h\mu_n)] \\ &= \gamma[A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) + A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n+1})] \\ &\lesssim \frac{\gamma}{1-\gamma} A((\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n)) \\ &\lesssim \alpha A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) \quad (\alpha = \frac{\gamma}{1-\gamma} < 1) \\ &\lesssim \alpha^2 A(\mu_{n-2}, \mu_{n-2}, \dots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\lesssim \alpha^n A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1) \end{aligned}$$

Eğer herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\mu_n = \mu_{n+1} = h(\mu_n)$ ise μ_n , h dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Her $n, n+1 \in \mathbb{N}$, $\mu_n \neq \mu_{n+1}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ için,

$$\begin{aligned} A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m) &\lesssim \gamma[A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) + A(\mu_{m-1}, \mu_{m-1}, \dots, \mu_{m-1}, \mu_m)] \\ &\lesssim \gamma[\alpha^{n-1} A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1) + \alpha^{m-1} A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1)] \\ &= \gamma(\alpha^{n-1} + \alpha^{m-1}) A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1) \end{aligned} \quad (7.18)$$

K normal koni olduğundan 7.18 eşitsizliğinden

$$||A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m)|| \leq L\gamma(\alpha^{n-1} + \alpha^{m-1}) ||A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1)|| \quad (7.19)$$

elde edilir. 7.19 eşitsizliği kullanılarak, $n, m \rightarrow \infty$ limiti alınır, $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ bir O -Cauchy dizisidir.

$(M, \neg, A)$ bir O -tam koni A -metrik uzay $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ bu noktaya yakınsayacak şekilde $\mu^* \in M$ vardır. Şimdi, h dönüşümünün $\mu^* \in M$ noktasında O -sürekli olduğunu varsayalım ve $g \in C$, $\theta \prec \prec g$ olsun. $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ dizisi $\mu^* \in M$ noktasına yakınsadığından ve h dönüşümü $\mu^* \in M$ noktasında O -sürekli olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve $n \geq n_0$

için,

$$A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, h\mu^*) \prec \prec \frac{g}{2(n-1)} \text{ ve } A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, \mu^*) \prec \prec \frac{g}{2}$$

elde edilir. Öte yandan, $m \in N, m \leq 1$ için, $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olup $g \in \text{int}K$ ve $\gamma \text{int}K \subseteq \text{int}K$ ($\gamma \in \eta, \gamma > 0$) $\frac{g}{m} \in \text{int}K$. Böylece, $n \geq n_0$ olacak şekilde her $n \in N$ için, $m \in N, m \leq 1$ olmak üzere $A(h\mu^*h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \prec \prec \frac{g}{m}$. O halde, $\frac{g}{m} - A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$. $m \rightarrow \infty$ limiti alınır, K konisi kapalı olduğundan $-A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$. Ayrıca, $\theta \preceq A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*)$ yani $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$. Dolayısıyla, K konisinde $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) = \theta$ yani $\mu^* \in M$ h dönüşümünün sabit noktasıdır.

İki farklı sabit nokta μ^* ve η^* olsun.

(i) Eğer $\mu^* \neg \eta^* \vee \eta^* \neg \mu^*$

$$\begin{aligned} A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) &= A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, h\eta^*) \\ &\preceq \gamma[A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, h\mu^*) + A(\eta^*, \eta^*, \dots, \eta^*, h\eta^*)] \end{aligned}$$

K koni olduğu için, $A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) = \theta$. $\mu^* \in M$, h dönüşümünün tek bir sabit noktasıdır.

(ii) Eğer $\mu^* \neg \eta^* \vee \eta^* \neg \mu^*$ değilse, seçilen O -eleman $\mu_0 \in M$ için,

$$[(\mu_0 \neg \mu^*) \wedge (\mu_0 \neg \eta^*)] \vee [(\mu^* \neg \mu_0) \wedge (\eta^* \neg \mu_0)] \quad (7.20)$$

ve h ortogonalitesi koruyan bir dönüşüm iken,

$$[(h(\mu_n) \neg \mu^*) \wedge (h(\mu_n) \neg \eta^*)] \vee [(\mu^* \neg h(\mu_n)) \wedge (\eta^* \neg h(\mu_n))] \quad (7.21)$$

elde edilir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) &\preceq (n-1)A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, h\mu_n) + A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, \eta^*) \\ &= (n-1)A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, h\mu_n) + A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, h\eta^*) \\ &\preceq (n-1)\gamma[A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, h\mu^*) + A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, h\mu_n)] \\ &\quad + \gamma[A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, h\mu_n) + A(\eta^*, \eta^*, \dots, \eta^*, h\eta^*)] \end{aligned} \quad (7.22)$$

ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınır, K normal koni olduğundan, $A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) = \theta$ olur. $\mu^* \in M$, h 'nin tek bir sabit noktasıdır. $\square$

7.3 Teorem $(M, \neg, A)$ bir O -tam koni A -metrik uzay, $\gamma \in \mathbb{R}, 0 < \gamma < \frac{1}{n}$, $h : (M, \neg, A) \rightarrow$

$(M, \top, A)$ dönüşümü Lipschitz sabiti γ ile ortogonallığı koruyan bir O -büzölme olsun. Ayrıca

$$A(h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) \lesssim \gamma[A(\mu, \mu, \dots, \mu, h\eta) + A(\eta, \eta, \dots, \eta, h\mu)]$$

koşulu sağlansın. Bu durumda, herhangi $\mu_0 \in M$ O -elemanı için, $\{h^n(\mu_0)\}$ dizisinin yakınsak olduğu bir $\mu^* \in M$ vardır. Ayrıca h dönüşümü $\mu^* \in M$ de sürekli ise, o zaman $\mu^* \in M$ h dönüşümünün tek bir sabit noktasıdır.

Kanıt $(M, \top)$ O -küme olduğundan, $\mu_0 \in M$ vardır ve

$$(\forall \mu \in M, \mu \top \mu_0) \vee (\forall \mu \in M, \mu_0 \top \mu) \quad (7.23)$$

h dönüşümü M üzerinde bir dönüşüm olduğundan, herhangi bir $\mu_0 \in M$ O -elemanı için, $\mu_1 = h(\mu_0) \in M$ olarak seçilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \mu_0 \top h(\mu_0) \vee h(\mu_0) \top \mu_0 \\ \Rightarrow & \mu_0 \top \mu_1 \vee \mu_1 \top \mu_0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

benzer şekilde devam edilirse

$$\mu_1 = h(\mu_0), \mu_2 = h(\mu_1) = h^2(\mu_0), \dots, h(\mu_{n-1}) = h^n(\mu_0) \quad (7.25)$$

elde edilir ve $\{h^n(\mu_0)\}$ bir iterasyon dizisidir. h , Lipschitz sabiti γ ile ortogonallığı koruyan bir O -büzölme olduğundan, $\{h^n(\mu_0)\}$ bir O -dizidir ve

$$\begin{aligned} A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu_n) &= A(h(\mu_n), h(\mu_n), \dots, h(\mu_n), h(\mu_{n-1})) \\ &\lesssim \gamma A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1}) \\ &\lesssim \gamma^2 A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\lesssim \gamma^n A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) \end{aligned} \quad (7.26)$$

Eğer herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\mu_n = \mu_{n+1} = h(\mu_n)$ ise μ_n , h dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Her $n, n+1 \in \mathbb{N}, \mu_n \neq \mu_{n+1}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $n, m \in \mathbb{N}, m > n$ için,

$$\begin{aligned}
A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m) &\lesssim \gamma[(n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}) + A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu_m)] \\
&\lesssim \gamma[(n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}) + (n-1)A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu_{n+2}) \\
&\quad + A(\mu_{n+2}, \mu_{n+2}, \dots, \mu_{n+2}, \mu_m)] \\
&\vdots \\
&\lesssim \gamma(n-1)[A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}) + A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu_{n+2}) \\
&\quad + A(\mu_{n+2}, \mu_{n+2}, \dots, \mu_{n+2}, \mu_{n+3}) + \dots + A(\mu_{m-1}, \mu_{m-1}, \dots, \mu_{m-1}, \mu_m)] \\
&\lesssim \gamma(n-1)[\gamma^n + \gamma^{n+1} + \gamma^{n+2} + \dots + \gamma^{m-1}]A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1) \\
&= (n-1)\gamma^{n+1}[1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^{m-n-1}]A(\mu_0, \mu_0, \dots, \mu_0, \mu_1)
\end{aligned}$$

Bu nedenle $\{\mu_n\}$ dizisi bir O -Cauchy dizisidir. M 'nin tamlığıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu^*$ olacak şekilde $\mu^* \in M$ vardır. Bu $\mu^* \in M$ de O -sürekliliğini varsayalım ve $g \in C$, $\theta \prec \prec g$ olsun. $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ $\mu^* \in M$ noktasına yakınsadığından ve h dönüşümü $\mu^* \in M$ 'de O -sürekliliğinden, her $n \in \mathbb{N}$ $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve $n \geq n_0$

$$A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, h\mu^*) \prec \prec \frac{g}{2(n-1)} \text{ ve } A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, \mu^*) \prec \prec \frac{g}{2}$$

Böylece $n \geq n_0$ olacak şekilde tüm $n \in N$ için,

$$A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \lesssim (n-1)A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, h\mu_n) + A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, \mu^*) \prec \prec g$$

olur. Öte yandan, $m \in N, m \leq 1$ için, $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olup $g \in \text{int}K$ ve $\gamma \text{int}K \subseteq \text{int}K (\gamma \in \eta, \gamma > 0)$ $\frac{g}{m} \in \text{int}K$. Böylece, $n \geq n_0$ olacak şekilde her $n \in N$ için, $m \in N, m \leq 1$ olmak üzere $A(h\mu^* h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \prec \prec \frac{g}{m}$. O halde, $\frac{g}{m} - A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$. $m \rightarrow \infty$ limiti alınırsa, K konisi kapalı olduğundan $-A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$. Ayrıca, $\theta \lesssim A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*)$ yani $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$. Dolayısıyla, K konisinde $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) = \theta$ yani $\mu^* \in M$ h dönüşümünün sabit noktasıdır.

İki farklı sabit nokta μ^* ve η^* olduğunu varsayalım,

(i) Eğer $\mu^* \neg \eta^* \vee \eta^* \neg \mu^*$

$$\begin{aligned}
A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) &= A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, h\eta^*) \\
&\lesssim \gamma[A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, h\eta^*) + A(\eta^*, \eta^*, \dots, \eta^*, h\mu^*)]
\end{aligned} \tag{7.27}$$

K koni olduğu için, $A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) = \theta$. $\mu^* \in M$, h dönüşümünün tek bir sabit noktasıdır.

(ii) Eğer $\mu^* \neg \eta^* \vee \eta^* \neg \mu^*$ değilse, seçilen O -eleman $\mu_0 \in M$ için,

$$[(\mu_0 \neg \mu^*) \wedge (\mu_0 \neg \eta^*)] \vee [(\mu^* \neg \mu_0) \wedge (\eta^* \neg \mu_0)] \quad (7.28)$$

ve h ortogonal olarak korunduğundan,

$$[(h(\mu_n) \neg \mu^*) \wedge (h(\mu_n) \neg \eta^*)] \vee [(\mu^* \neg h(\mu_n)) \wedge (\eta^* \neg h(\mu_n))] \quad (7.29)$$

elde edilir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) &\preceq (n-1)A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, h\mu_n) + A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, \eta^*) \\ &= (n-1)A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, h\mu_n) + A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, h\eta^*) \\ &\preceq (n-1)\gamma[A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, h\mu_n) + A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, h\mu^*)] \\ &\quad + \gamma[A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, h\eta^*) + A(\eta^*, \eta^*, \dots, \eta^*, h\mu_n)] \end{aligned} \quad (7.30)$$

olup $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, K normal koni olduğu için, $A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \eta^*) = \theta$ olur. $\mu^* \in M$, h dönüşümünün tek bir sabit noktasıdır. $\square$

Örnek. $C = \mathbb{R}^2$ Öklid düzlemi üzerinde bir normal koni $K = \{(\mu, \eta) \in C \mid \mu, \eta \geq 0\}$ olsun. $M = [0, 1]$ olmak üzere $A : M^n \rightarrow C$, $A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} |\mu_i - \mu_j|^2$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir koni A -metriktir. M üzerinde " $\mu, \eta \in M$ olmak üzere $\mu \neg \eta \Leftrightarrow \mu \eta \leq \mu$ " şeklinde tanımlı " $\neg$ " bağıntısı bir diklik bağıntısı olup $(M, \neg, A)$ bir O -tam koni A -metrik uzaydır. $h : (M, \neg, A) \rightarrow (M, \neg, A)$, $h(x) = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlı dönüşüm ortogonalılığı koruyan bir O -büzlme dönüşümüdür. Ayrıca h dönüşümü $(M, \neg, A)$ O -koni A -metrik uzayı üzerinde O -sürekli bir dönüşüm olduğundan Teorem 7.1 in hipotezleri sağlanır. Böylece h fonksiyonunun bir tek sabit noktası " $0 \in M$ " noktasıdır.

$C = \mathbb{R}^2$ Öklid düzlemi üzerinde $K = \{(\mu, \eta) \in C \mid \mu, \eta \geq 0\}$ bir normal koni olsun. $M = [0, 1]$ olmak üzere $A : M^n \rightarrow C$, $A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} |\mu_i - \mu_j|^2$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir koni A -metriktir. M üzerinde " $\mu, \eta \in M$ olmak üzere $\mu \neg \eta \Leftrightarrow \mu \eta \leq \mu$ " şeklinde tanımlı " $\neg$ " bağıntısı bir diklik bağıntısıdır. Bu durumda, $(M, \neg, A)$ O -koni A -metrik uzayının tamlığını gösterelim. $\{\mu_n\} \subseteq M$ keyfi bir O -Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mu_n \neg \mu_{n+1} \vee \mu_{n+1} \neg \mu_n$ dir. Ayrıca her $g \in \text{int}K$ için, en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$ olduğunda $A(\mu_m, \mu_m, \dots, \mu_m, \mu_n) \prec \prec g$ dir. Genelliği bozmaksızın her $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \neg \mu_{n+1}$ olduğunu varsayalım. O halde,

$$\begin{aligned} \mu_n \mu_{n+1} &\leq \mu_n \Rightarrow \mu_n(\mu_{n+1} - 1) \leq 0 \\ &\Rightarrow \mu_n \in [0, 1], \mu_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

Böylece $\{\mu_n\}$ O -Cauchy dizisi $0 \in M$ noktasına yakınsaktır. O halde, $(M, \neg, A)$ bir O -tam

koni A -metrik uzaydır. Diğer taraftan " $\lceil$ " bağıntısı tanım gereği " $\mu \lceil \eta \Rightarrow h\mu \lceil h\eta$ " olup h dönüşümü ortogonalılığı koruyan bir dönüşümdür. Ayrıca h dönüşümü $\lambda = \frac{1}{4}$ Lipschitz sabitiyle bir O -büzülme dönüşümüdür. Teorem 7.1 in tüm hipotezleri sağlanıp $\mu_0 \in M$ O -elemanı için, $\{h^n(\mu_0)\}$ iterasyon dizisi $0 \in M$ noktasına yakınsak olup h M de O -sürekli iken $0 \in M$ de O -sürekli olduğundan, Teorem 7.1 gereğince $0 \in M$ noktası h nin bir tek sabit noktasıdır.



8. SIRALI ORTOGONAL KONİ A-METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

8.1 Teorem $(M, \supseteq)$ bir KS-küme, $(M, \top, A)$ bir O -tam koni A -metrik uzay, $h : (M, \top, A) \rightarrow (M, \top, A)$ dönüşümü " $\supseteq$ " ile ortogonallığı koruyan ve azalmayan bir dönüşüm olsun. Her O -bağlantılı $\mu, \eta \in M$ ve $\eta \supseteq \mu$ için, bir $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $0 < \gamma < 1$ iken

$$A(h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) \lesssim \gamma A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta)$$

olduğunu kabul edelim. Kabul edelim ki bir $\mu_0 \in M$ O -elemanı için, $\mu_0 \supseteq h\mu_0$ olduğunda $\{h^n(\mu_0)\}$ iterasyon dizisi $\mu^* \in M$ noktasına yakınsak olsun. Ayrıca, h dönüşümü $\mu^* \in M$ noktasında O -sürekli ise, $\mu^* \in M$ noktası h dönüşümünün sabit bir noktasıdır.

Kanıt $(M, \top)$ O -küme olduğundan, $\mu_0 \in M$ olacak şekilde bir O -elemanı vardır. Kabulümüzden $\mu_0 \supseteq h\mu_0$ seçilmesi genelliği bozmaz. h dönüşümü, M de bir dönüşüm olduğundan $\mu_0 \in M$ O -elemanı için, $\mu_1 = h\mu_0 \in M$ olarak seçilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \mu_0 \top h(\mu_0) \vee h(\mu_0) \top \mu_0 \\ \Rightarrow & \mu_0 \top \mu_1 \vee \mu_1 \top \mu_0 \end{aligned} \tag{8.1}$$

benzer şekilde devam edilirse,

$$\mu_1 = h(\mu_0), \mu_2 = h(\mu_1) = h^2(\mu_0) = \dots = h(\mu_{n-1}) = h^n(\mu_0) \tag{8.2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{h^n(\mu_0)\}$ bir iterasyon dizisidir. h ortogonallığı koruduğundan, $\{h^n(\mu_0)\}$ O -dizidir.

$\mu_0 \supseteq h\mu_0$ ve $\supseteq$ ye göre h dönüşümünün azalmayan dönüşüm olduğunu kullanılırsa,

$$\mu_0 \supseteq h\mu_0 \supseteq h^2\mu_0 \supseteq \dots \supseteq h^n\mu_0 \supseteq \dots$$

elde edilir. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu_n) &= A(h(\mu_n), h(\mu_n), \dots, h(\mu_n), h(\mu_{n-1})) \\ &\lesssim \gamma A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1}) \\ &\lesssim \gamma^2 A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\lesssim \gamma^n A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\mu_n = \mu_{n+1} = h(\mu_n)$. μ_n h dönüşümünün bir sabit nok-

tasıdır. Her $n, n+1 \in \mathbb{N}$ için, $\mu_n \neq \mu_{n+1}$ gerçekleştiğini varsayalım. Bu durumda, her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ için,

$$\begin{aligned}
\theta &\lesssim A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m) \\
&\lesssim (n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1}) + A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_m) \\
&\lesssim (n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1}) + (n-1)A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_{n-2}) \\
&\quad + \dots + (n-1)A(\mu_{m-1}, \mu_{m-1}, \dots, \mu_{m-1}, \mu_m) + A(\mu_m, \mu_m, \dots, \mu_m, \mu_{m+1}) \\
&\lesssim (n-1)\gamma^{n-1}A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) + (n-1)\gamma^{n-2}A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) \\
&\quad + \dots + \gamma^{m-1}A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) + \gamma^mA(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) \\
&= (n-1)\gamma^n[\gamma^{n-m-1} + \gamma^{n-m-2} + \dots + \gamma + 1]A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) \\
&\lesssim \frac{(n-1)\gamma^n}{1-\gamma}A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0)
\end{aligned} \tag{8.3}$$

olur. K, L normal sabitiyle normal koni ise 8.3 eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m)\| &\leq L\|\frac{(n-1)\gamma^n}{1-\gamma}A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0)\| \\
&\leq \frac{(n-1)\gamma^n}{1-\gamma}L\|A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0)\|
\end{aligned} \tag{8.4}$$

elde edilir. 8.4 eşitsizliği kullanılırsa, $n, m \rightarrow \infty$ limiti alınır, $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ bir O -Cauchy dizisidir. $(M, \top, A)$ bir O -tam koni A -metrik uzay $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ bu noktaya yakınsayacak şekilde $\mu^* \in M$ vardır. Şimdi, h dönüşümünün $\mu^* \in M$ noktasında O -sürekli olduğunu varsayalım ve $g \in C$, $\theta \prec\prec g$ olsun. $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ dizisi $\mu^* \in M$ noktasına yakınsadığından ve h dönüşümü $\mu^* \in M$ noktasında O -sürekli olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve $n \geq n_0$ için,

$$A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu^*) \prec\prec \frac{g}{2} \text{ ve } A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, h\mu^*) \prec\prec \frac{g}{2(n-1)}$$

Böylece $n \geq n_0$ olacak şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \lesssim (n-1)A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, h\mu_n) + A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, \mu^*) \prec\prec g$$

olur. Diğer taraftan $m \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 1$ için, $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olduğu elde edilir. $g \in \text{int}K$ ve $\gamma \text{int}K \subseteq \text{int}K$ ($\gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 0$) olduğunu kullanırsak $\frac{g}{m} \in \text{int}K$ olduğu elde edilir. Böylece $n \geq n_0$ olacak şekilde her $n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ için, $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \prec\prec \frac{g}{m}$ olduğu ele alınır, $\frac{g}{m} - A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$ olur. K konisinin kapalı olduğu kullanılırsa $m \rightarrow \infty$ için, limit durumunda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\frac{g}{m} - A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*)) = -A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$$

Ayrıca $\theta_C \lesssim A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*)$ olduğundan $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$ olur. K nın koni olmasından $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) = \theta_C$ olup $h\mu^* = \mu^*$ olur. Yani $\mu^* \in M$ h dönüşümünün

bir sabit noktasıdır. □

Uyarı Teorem 8.1 de, $(M, \neg)$ bir O -küme olduğundan,

$$\exists \mu_0 \in M; (\forall \mu \in M, \mu \neg \mu_0) \bigvee (\forall \mu \in M, \mu_0 \neg \mu)$$

dır. Fakat $\mu_0 \supseteq h\mu_0$ durumu, M 'nin bazı O -elemanları için, bu durum geçerli olmayabilir. Bunun için, alternatif olarak Teorem 8.2 verilebilir.

8.2 Teorem $(M, \supseteq)$ bir KS-küme, $(M, \neg, A)$ bir tam O -koni A -metrik uzay, $h : (M, \neg, A) \rightarrow (M, \neg, A)$ dönüşümü " $\supseteq$ " ile azalmayan ve ortogonallığı koruyan bir dönüşüm ve $\mu \supseteq \eta$ koşulunu sağlayan her O -bağlantılı $\mu, \eta \in M$ için, $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma < 1$ olmak üzere

$$A(h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) \lesssim \gamma A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta)$$

olsun. Bir $\eta_0 \in M$ için, $\eta_0 \supseteq h\eta_0$ koşulunu sağlayan η_0 ile $h\eta_0$ elemanları O -bağlantılı elemanlar ve $\{h^n(\eta_0)\}$ iterasyon dizisi $\eta^* \in M$ noktasına yakınsak iken h dönüşümü $\eta^* \in M$ noktasında O -sürekli ise, $\eta^* \in M$ noktası h nin sabit bir noktasıdır.

Kanıt Hipotezden $\eta_0 \in M$ için, $\eta_0 \supseteq h\eta_0$ koşulunu sağlayan η_0 ile $h\eta_0$ elemanları O -bağlantılı elemanlar olsun. h dönüşümü, M de bir dönüşüm olduğundan $\eta_0 \in M$ elemanı için, $\eta_1 = h\eta_0$ olacak şekilde $\eta_1 \in M$ seçilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \eta_0 \neg h(\eta_0) \vee h(\eta_0) \neg \eta_0 \\ \Rightarrow & \eta_0 \neg \eta_1 \vee \eta_1 \neg \eta_0 \end{aligned} \tag{8.5}$$

yazılabilir. Benzer yolla devam edilirse,

$$\eta_1 = h(\eta_0), \eta_2 = h(\eta_1) = h^2(\eta_0) = \dots = h(\eta_{n-1}) = h^n(\eta_0) \tag{8.6}$$

yazılabileceğinden $\{h^n(\eta_0)\}$ bir iterasyon dizisidir. h ortogonallığı koruduğundan, $\{h^n(\eta_0)\}$ O -dizidir.

$\eta_0 \supseteq h\eta_0$ ve $\supseteq$ ye göre h dönüşümünün azalmayan dönüşüm olduğu kullanılırsa,

$$\eta_0 \supseteq h\eta_0 \supseteq h^2\eta_0 \supseteq \dots \supseteq h^n\eta_0 \supseteq \dots$$

olduğu elde edilir. Bu koşulda her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
 A(\eta_{n+1}, \eta_{n+1}, \dots, \eta_{n+1}, \eta_n) &= A(h(\eta_n), h(\eta_n), \dots, h(\eta_n), h(\eta_{n-1})) \\
 &\lesssim \gamma A(\eta_n, \eta_n, \dots, \eta_n, \eta_{n-1}) \\
 &\lesssim \gamma^2 A(\eta_{n-1}, \eta_{n-1}, \dots, \eta_{n-1}, \eta_{n-2}) \\
 &\vdots \\
 &\lesssim \gamma^n A(\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_1, \eta_0)
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\eta_n = \eta_{n+1}$ iken $\eta_n = h(\eta_n)$ olup h nin bir sabit noktası olduğu elde edilir. Her $n, n+1 \in \mathbb{N}$ için, $\eta_n \neq \eta_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ için,

$$\begin{aligned}
 \theta_C &\lesssim A(\eta_n, \eta_n, \dots, \eta_n, \eta_m) \\
 &\lesssim (n-1)A(\eta_n, \eta_n, \dots, \eta_n, \eta_{n-1}) + A(\eta_{n-1}, \eta_{n-1}, \dots, \eta_{n-1}, \eta_m) \\
 &\lesssim (n-1)A(\eta_n, \eta_n, \dots, \eta_n, \eta_{n-1}) + (n-1)A(\eta_{n-1}, \eta_{n-1}, \dots, \eta_{n-1}, \eta_{n-2}) \\
 &\quad + \dots + (n-1)A(\eta_{m-1}, \eta_{m-1}, \dots, \eta_{m-1}, \eta_m) + A(\eta_m, \eta_m, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}) \quad (8.7) \\
 &\lesssim (n-1)\gamma^{n-1}A(\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_1, \eta_0) + (n-1)\gamma^{n-2}A(\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_1, \eta_0) \\
 &\quad + \dots + \gamma^m A(\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_1, \eta_0) \\
 &\lesssim \frac{(n-1)\gamma^n}{1-\gamma} A(\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_1, \eta_0)
 \end{aligned}$$

K, L normal sabitiyle normal koni ise 8.7 eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
 \|A(\eta_n, \eta_n, \dots, \eta_n, \eta_m)\| &\leq L \left\| \frac{(n-1)\gamma^n}{1-\gamma} A(\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_1, \eta_0) \right\| \quad (8.8) \\
 &\leq \frac{(n-1)\gamma^n}{1-\gamma} L \|A(\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_1, \eta_0)\|
 \end{aligned}$$

elde edilir. 8.8 eşitsizliği kullanılırsa, $0 < \gamma < 1$ olduğundan $A(\eta_n, \eta_n, \dots, \eta_n, \eta_m) \rightarrow \theta_C (m \rightarrow \infty)$ ya yakınsar ve $\{\eta_n\} = \{h^n(\eta_0)\}$ bir O -Cauchy dizisidir. Bu durumda, $(M, \lceil, A)$ bir O -tam koni A -metrik uzay olduğundan, $\eta^* \in M$ var öyle ki $\{\eta_n\} = \{h^n(\eta_0)\}$ dizisi bu noktaya yakınsar. Şimdi h nin $\eta^* \in M$ noktasında O -sürekliliğini farz edelim ve $g \in C$ için, $\theta_C \prec \prec g$ olsun. $\{\eta_n\} = \{h^n(\eta_0)\}$ dizisi $\eta^* \in M$ noktasına yakınsadığından ve $h l^* \in M$ de O -sürekliliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için, $n_0 \in M$ var öyle ki $n \geq n_0$ olduğundan

$$A(\eta_{n+1}, \eta_{n+1}, \dots, \eta_{n+1}, \eta^*) \prec \prec \frac{g}{2} \text{ ve } A(h\eta_n, h\eta_n, \dots, h\eta_n, h\eta^*) \prec \prec \frac{g}{2(n-1)}$$

dir. Böylece $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A(h\eta^*, h\eta^*, \dots, h\eta^*, \eta^*) \lesssim (n-1)A(h\eta^*, h\eta^*, \dots, h\eta^*, h\eta_n) + A(h\eta_n, h\eta_n, \dots, h\eta_n, \eta^*) \prec \prec g$$

olur. Diğer yandan $m \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 1$ için, $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olduğu elde edilir. $g \in \text{int}K$ ve $\gamma \text{int}K \subseteq \text{int}K$ ($\gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 0$) olduğu kullanılırsa $\frac{g}{m} \in \text{int}K$ olduğu elde edilir. Böylece $n \geq n_0$ olacak

şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ için, $A(h\eta^*, h\eta^*, \dots, h\eta^*, \eta^*) \prec \prec \frac{g}{m}$ olduğu ele alınırsa $\frac{g}{m} - A(h\eta^*, h\eta^*, \dots, h\eta^*, \eta^*) \in K$ olur. K konisinin kapalılığını kullanırsak $m \rightarrow \infty$ için, limit durumunda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{g}{m} - A(h\eta^*, h\eta^*, \dots, h\eta^*, \eta^*) \right) = -A(h\eta^*, h\eta^*, \dots, h\eta^*, \eta^*) \in K$$

dir. Ayrıca $\theta_C \preceq A(h\eta^*, h\eta^*, \dots, h\eta^*, \eta^*)$ olduğundan $A(h\eta^*, h\eta^*, \dots, h\eta^*, \eta^*) \in K$ olur. K nın koni olmasından $A(h\eta^*, h\eta^*, \dots, h\eta^*, \eta^*) = \theta_C$ olup $h\eta^* = \eta^*$ olur. Yani $\eta^* \in M$ dönüşümünün bir sabit noktasıdır. $\square$

Uyarı Teorem 8.3 de h dönüşümünün O -sürekliliği yerine alternatif bir koşul eklenerek sabit noktanın varlığı verilecektir.

8.3 Teorem $(M, \supseteq)$ bir KS-küme, $(M, \preceq, A)$ bir tam O -koni A -metrik uzay, $h : (M, \preceq, A) \rightarrow (M, \preceq, A)$ dönüşümü " $\supseteq$ " ile azalmayan ve ortogonalılığı koruyan bir dönüşüm olduğunu ve aşağıdaki şartların geçerli olduğunu varsayalım:

i) $\eta \supseteq \mu$ olacak şekildeki, O -bağlantılı $\mu, \eta \in M$ ve $\gamma \in \mathbb{R}, (0 < \gamma < 1)$ için,

$$A(h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) \preceq \gamma A(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta).$$

ii) Bir O -elemanı $\mu_0 \in M$ için $\mu_0 \supseteq h\mu_0$.

iii) Artan bir $\{\mu_n\}$ dizisi $\mu \in M$ e yakınsak olduğunda her n için, μ_n ile μ O -bağlantılı ve $\mu_n \supseteq \mu$.

Bu durumda, $\{h^n(\mu_0)\}$ iterasyon dizisi bir $\mu^* \in M$ noktasına yakınsar ve $\mu^* \in M$, h nin bir sabit noktasıdır.

Kanıt Teorem 8.1 in ispatından $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ dizisinin yakınsak olduğu bir $\mu^* \in M$. (iii) den $h^n(\mu_0) \supseteq \mu^*$ ve $h^n(\mu_0)$ ile μ^* her n için, O -bağlantılı elemanlardır. Böylece (i) den,

$$\begin{aligned} A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) &\preceq (n-1)A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, h^{n+1}\mu_0) \\ &\quad + A(h^{n+1}\mu_0, h^{n+1}\mu_0, \dots, h^{n+1}\mu_0, \mu^*) \\ &\preceq \gamma(n-1)A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, h^n\mu_0) \\ &\quad + A(h^{n+1}\mu_0, h^{n+1}\mu_0, \dots, h^{n+1}\mu_0, \mu^*) \end{aligned} \quad (8.9)$$

$g \in C$ için, $\theta_C \prec \prec g$ olsun. O halde, $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ dizisi μ^* noktasına yakınsadığından her $n \in \mathbb{N}$ için, $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq n_0$ olduğunda,

$$A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu^*) \prec \prec \frac{g}{2(n-1)} \text{ ve } A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu^*) \prec \prec \frac{g}{2} \quad (8.10)$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $n \geq n_0$ olduğunda $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \prec\prec g$ dir. Diğer yandan $m \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 1$ için, $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olduğu elde edilir. $g \in \text{int}K$ ve $\gamma \text{int}K \leq \text{int}K$ olduğu kullanılırsa $\frac{g}{m} \in \text{int}K$ olduğu elde edilir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için, $n \geq n_0$ ve $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ için, $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \prec\prec \frac{g}{m}$ olup $\frac{g}{m} - A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$ olduğu elde edilir. K konisinin kapalı küme olduğu kullanılırsa $m \rightarrow \infty$ için, limit durumunda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{g}{m} - A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \right) = -A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$$

dir. K nın koni olmasından $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) = \theta_C$ olup $h\mu^* = \mu^*$ olur. Yani $\mu^* \in M$ h nin bir sabit noktasıdır. $\square$

Uyarı Teorem 8.4 de fonksiyonun sağladığı büzülme koşulunu genelleştirerek bu koşul altında sabit noktanın var olduğu verilecektir.

8.4 Teorem $(M, \geq)$ bir KS-küme, $(M, \neg, A)$ bir tam O -koni A -metrik uzay, $h : (M, \neg, A) \rightarrow (M, \neg, A)$ dönüşümü " $\geq$ " ile azalmayan ve ortogonallığı koruyan bir dönüşüm ve aşağıdaki şartların geçerli olduğunu varsayalım.

- i) $\eta \geq \mu$ olacak şekildeki, O -bağlantılı $\mu, \eta \in M$ için, $0 \leq a, b, c$ ve $a + 2b + nc < 1$ şartını sağlayan $a, b, c \in \mathbb{R}$ için,

$$A(h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) \preceq aA(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) + b[A(\mu, \mu, \dots, \mu, h\mu) + A(\eta, \eta, \dots, \eta, h\eta)] + c[A(\mu, \mu, \dots, \mu, h\eta) + A(\eta, \eta, \dots, \eta, h\mu)].$$

- ii) Bir O -elemanı $\mu_0 \in M$ için $\mu_0 \geq h\mu_0$.

Bu durumda, $\{h^n(\mu_0)\}$ iterasyon dizisi bir $\mu^* \in M$ noktasına yakınsar ve h O -süreklili ise $h^* \in M$, h nin bir sabit noktasıdır.

Kanıt $(M, \neg)$ O -küme olduğundan, $\mu_0 \in M$ olacak şekilde bir O -elemanı vardır. Varsayımımızdan $\mu_0 \geq h\mu_0$ seçilmesi genelliği bozmaz. h dönüşümü, M de bir dönüşüm olduğundan $\mu_0 \in M$ O -elemanı için, $\mu_1 = h\mu_0$ olacak şekilde $\mu_1 \in M$ seçilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \mu_0 \neg h(\mu_0) \vee h(\mu_0) \neg \mu_0 \\ \Rightarrow & \mu_0 \neg \mu_1 \vee \mu_1 \neg \mu_0 \end{aligned} \tag{8.11}$$

benzer şekilde devam edilirse,

$$\mu_1 = h(\mu_0), \mu_2 = h(\mu_1) = h^2(\mu_0) = \dots = h(\mu_{n-1}) = h^n(\mu_0) \tag{8.12}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{h^n(\mu_0)\}$ bir iterasyon dizisidir. h ortogonallığı koruduğundan, $\{h^n(\mu_0)\}$ O -dizidir.

$\mu_0 \supseteq h\mu_0$ ve $\supseteq$ ye göre h nin azalmayan dönüşüm olduğu kullanılırsa,

$$\mu_0 \supseteq h\mu_0 \supseteq h^2\mu_0 \supseteq \dots \supseteq h^n\mu_0 \supseteq \dots$$

olduğu elde edilir. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu_n) &= A(h(\mu_n), h(\mu_n), \dots, h(\mu_n), h(\mu_{n-1})) \\ &\lesssim aA(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1}) \\ &\quad + b[A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, h\mu_n) + A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, h\mu_{n-1})] \\ &\quad + c[A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, h\mu_{n-1}) + A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, h\mu_n)] \\ &= aA(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1}) \\ &\quad + b[A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}) + A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n)] \\ &\quad + c[A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_n) + A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_{n+1})] \\ &\lesssim aA(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1}) \\ &\quad + b[A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}) + A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n)] \\ &\quad + c[(n-1)A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) + A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n+1})] \end{aligned}$$

Böylece,

$$A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu_n) \lesssim \frac{a+b+(n-1)c}{1-b-c} A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1})$$

olduğu elde edilir. $0 \leq a, b, c$ ve $0+2b+nc < 1$ şartını sağlayan $a, b, c \in \mathbb{R}$ için, $\gamma = \frac{a+b+(n-1)c}{1-b-c}$ seçilirse $\gamma \in (0, 1)$ ve

$$\begin{aligned} A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu_n) &\lesssim \gamma A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1}) \\ &\lesssim \gamma^2 A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_{n-2}) \\ &\dots \\ &\lesssim \gamma^n A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) \end{aligned}$$

olur. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\mu_n = \mu_{n+1} = h(\mu_n)$ olduğu elde edilir. Böylece h nin bir sabit noktası vardır. Her $n, n+1 \in \mathbb{N}$ için, $\mu_n \neq \mu_{n+1}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, her

$n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ için,

$$\begin{aligned}
\theta_C &\preceq A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m) \\
&\preceq (n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1}) + A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_m) \\
&\preceq (n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_{n-1}) + (n-1)A(\mu_{n-1}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-1}, \mu_{n-2}) \\
&\quad + \dots + (n-1)A(\mu_{m-1}, \mu_{m-1}, \dots, \mu_{m-1}, \mu_m) + A(\mu_m, \mu_m, \dots, \mu_m, \mu_{m+1}) \\
&\preceq (n-1)\gamma^{n-1}A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) + (n-1)\gamma^{n-2}A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) \\
&\quad + \dots + \gamma^{m-1}A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) + \gamma^mA(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) \\
&= (n-1)\gamma^m[\gamma^{n-m-1} + \gamma^{n-m-2} + \dots + \gamma + 1]A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) \\
&\preceq \frac{(n-1)\gamma^m}{1-\gamma}A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0)
\end{aligned} \tag{8.13}$$

olur. K, L normal sabitiyle normal koni olduğundan 8.13 eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m)\| &\leq L \left\| \frac{(n-1)\gamma^m}{1-\gamma} A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0) \right\| \\
&\leq \frac{(n-1)\gamma^m}{1-\gamma} L \|A(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_0)\|
\end{aligned} \tag{8.14}$$

olur. 8.14 eşitsizliği kullanılarak; $0 < \gamma < 1$ olduğundan $n, m \rightarrow \infty$ limit durumunda

$A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu_m) \rightarrow \theta_C$ olur ve bu durumda, $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ dizisi bir O -Cauchy dizisi olur. $(M, \preceq, A)$ bir O -tam koni metrik uzay olduğundan $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ dizisi bir $\mu^* \in M$ noktasına yakınsar. h dönüşümünün $\mu^* \in M$ de O -sürekli olduğunu kabul edelim. $g \in C$ için, $\theta_C \prec \prec g$ olsun. $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ dizisi $\mu^* \in M$ e yakınsadığından ve $f, \mu^* \in M$ de O -sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için, $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq n_0$ için,

$$A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu^*) \prec \prec \frac{g}{2} \text{ ve } A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, h\mu^*) \prec \prec \frac{g}{2(n-1)}$$

dir. Böylece $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \preceq (n-1)A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, h\mu_n) + A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, \mu^*) \prec \prec g$$

olur. Diğer yandan $m \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 1$ için, $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olduğu elde edilir. $g \in \text{int}K$ ve $\gamma \text{int}K \subseteq \text{int}K$ ($\gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 0$) olduğu kullanılarak $\frac{g}{m} \in \text{int}K$ olduğu elde edilir. Böylece $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ için, $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \prec \prec \frac{g}{m}$ olduğu ele alınırsa $\frac{g}{m} - A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$ olur. K konisinin kapalılığını kullanırsak $m \rightarrow \infty$ için, limit durumunda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{g}{m} - A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \right) = -A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$$

dir. Ayrıca $\theta_C \preceq A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*)$ olduğundan $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) \in K$ olur. K nin koni olmasından $A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu^*) = \theta_C$ olup $h\mu^* = \mu^*$ olur. Yani $\mu^* \in M$ h dönüşümünün bir sabit noktasıdır. $\square$

Uyarı Teorem 8.5 de Teorem 8.4 de kullanılan h dönüşümünün O -sürekliliği yerine alternatif bir koşul eklenerek sabit noktanın varlığı verilecektir.

8.5 Teorem $(M, \supseteq)$ bir KS-küme, $(M, \top, A)$ bir tam O -koni A -metrik uzay, $h : (M, \top, A) \rightarrow (M, \top, A)$ dönüşümü " $\supseteq$ " ile azalmayan ve ortogonalliği koruyan bir dönüşüm olsun. Ayrıca aşağıdaki şartların geçerli olduğunu varsayalım.

- i) $\eta \supseteq \mu$ olacak şekildeki, O -bağlantılı $\mu, \eta \in M$ için, $0 \leq a, b, c$ ve $a + 2b + nc < 1$ şartını sağlayan $a, b, c \in \mathbb{R}$ var,

$$A(h\mu, h\mu, \dots, h\mu, h\eta) \preceq aA(\mu, \mu, \dots, \mu, \eta) + b[A(\mu, \mu, \dots, \mu, h\mu) + A(\eta, \eta, \dots, \eta, h\eta)] \\ + c[A(\mu, \mu, \dots, \mu, h\eta) + A(\eta, \eta, \dots, \eta, h\mu)].$$

- ii) Bir O -elemanı $\mu_0 \in M$ için $\mu_0 \supseteq h\mu_0$ dır.

- iii) Artan bir $\{\mu^n\}$ dizisi $\mu \in M$ e yakınsarsa, o halde her n için, μ_n ile μ O -bağlantılı ve $\mu_n \supseteq \mu$ olsun.

Bu durumda, $\{h^n(\mu_0)\}$ iterasyon dizisi bir $\mu^* \in M$ noktasına yakınsar ve h O -süreklili ise $\mu^* \in M$, h nin bir sabit noktasıdır.

Kanıt Teorem 8.4 ün ispatından bir $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ dizisi $\mu^* \in M$ noktasına yakınsaktır.

(iii) den $h^n(\mu_0) \supseteq \mu^*$ ve $h^n(\mu_0)$ ile μ^* her n için, O -bağlantılı elemanlardır. Böylece (i) den,

$$A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, h\mu^*) \preceq aA(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu^*) \\ + b[A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, h\mu_n) + A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, h\mu^*)] \\ + c[A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, h\mu^*) + A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, h\mu_n)] \\ \preceq aA(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu^*) \\ + b[(n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu^*) + A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \mu_{n+1})] \\ + (n-1)A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \mu_{n+1}) + A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, h\mu^*)] \\ + c[(n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu^*) + (n-1)A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \mu_{n+1}) \\ + (n-1)A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu^*) + A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu_{n+1})] \\ = aA(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu^*) \\ + b[(n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu^*) + A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \mu_{n+1})] \\ + (n-1)A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \mu_{n+1}) + A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, h\mu^*)] \\ + c[(n-1)A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu^*) + (n-1)A(\mu^*, \mu^*, \dots, \mu^*, \mu_{n+1}) \\ + (n-1)A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu^*) + A(h\mu^*, h\mu^*, \dots, h\mu^*, \mu_{n+1})]$$

elde edilir. Buradan,

$$A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, h\mu^*) \lesssim \frac{a+(n-1)b+(n-1)c}{1-b-c} A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu^*) + \frac{nb+2(n-1)c}{1-b-c} A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu^*) \quad (8.15)$$

elde edilir. $g \in C$ için, $\theta_C \prec\prec g$ olsun. $\{\mu_n\} = \{h^n(\mu_0)\}$ dizisi $\mu^* \in M$ e yakınsadığından her $n \in \mathbb{N}$ için, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} A(\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n, \mu^*) &\lesssim \frac{g(1-b-2)}{2(a+(n-1)b+(n-1)c)} \\ A(\mu_{n+1}, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+1}, \mu^*) &\lesssim \frac{g(1-b-c)}{2(nb+2(n-1)c)} \end{aligned}$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için, $n \geq n_0$ olduğunda $A(h\mu_n, h\mu_n, \dots, h\mu_n, h\mu^*) \prec\prec g$. Böylece her $n \rightarrow \infty$ için, limit durumunda $\mu_{n+1} \rightarrow h\mu^*$ olur. Limitin tekliğini kullanarak $h\mu^* = \mu^*$ olduğunu elde edilir. $\square$

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ortogonal koni metrik uzay ve A -metrik uzay yapısı birlikte düşünülerek ortogonal koni A -metrik uzay yapısı elde edilmiştir. Ayrıca bu yapı üzerinde tanımlı ortogonal büzülme dönüşümleri için, bazı sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilmiştir.

Tezin ilk bölümünde, metrik uzayların genelleştirilmesine yönelik çalışmalarla ilgili detaylı literatür taraması yapılmış; ikinci bölümde A -metrik yapısının tanımlanmasına öncülük eden çeşitli metrik yapılarının tanımları verilmiş; üçüncü bölümde A -metrik uzaylar hakkında genel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiş; dördüncü bölümde koni A -metrik uzaylar hakkında temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiş; beşinci bölümde ortogonal koni metrik uzaylar hakkında temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiş; altıncı bölümde ortogonal koni A -metrik uzay yapısı kurulmuş ve bu yapı üzerinde temel tanım ve yardımcı teoremler verilmiş; yedinci bölümde ortogonal koni A -metrik uzay yapısı üzerinde tanımlı bazı büzülme dönüşümleri için, sabit noktaların varlığı ve tekliği incelenerek örneklendirilmiş; sekizinci bölümde ortogonal koni A -metrik yapısının üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlanarak yedinci bölümde verilen sabit nokta teoremleri bu sıralama bağıntısı yoluyla yeniden şekillendirilerek ispatlanmıştır.

Metrik uzaylarda sabit nokta teorisinin amacı, gerek bu uzaylar üzerinde tanımlı büzülme dönüşümlerinin büzülme koşullarını değiştirerek gerekse de büzülme dönüşümlerinin üzerinde tanımlı olduğu metrik uzayları değiştirerek, ilgili büzülme dönüşümlerinin sabit noktalarının varlık ve tekliğini incelemektir. Ortogonal metrik uzaylarda verilen sabit nokta teoremlerinin dikkate değer yanı sıra bu iki duruma ek olarak özdönüşüm üzerinde tanımlanan büzülme koşulunun, tüm küme yerine yalnızca ortogonal olarak bağlantılı elemanlar arasında sağlanmasının yeterli olmasıdır. Bu nedenle ortogonal koni A -metrik uzaylar üzerine yazılmış bu tezin metrik uzaylarda sabit nokta teorisine kayda değer katkılar sağlayacağı ümit edilmektedir.

Bu tezin sekizinci bölümünde ortogonal koni A -metrik yapısı üzerinde tanımlanan kısmi sıralama bağıntısı yoluyla yeniden şekillendirilerek ispatlanan teoremlerde sabit noktaların varlığı ile ilgilenilmiştir. Tezin sekizinci bölümünde verilen sabit nokta teoremlerinde, büzülme dönüşümlerinin sabit noktalarının tekliği için gerekli koşulların incelenmesi metrik uzaylarda sabit nokta teorisine katkı sağlamak isteyen araştırmacılar için etkin bir çalışma konusu olarak önerilebilir.

KAYNAKLAR

- Abbas, M., Ali, B. and Suleiman, Y. I. (2015). *Generalized coupled common fixed point results in partially ordered A-metric spaces*, *Fixed point theory and applications*, 2015, 1-24.
- Banach, S. (1922). *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, *Fundamenta mathematicae*, 3(1), 133-181.
- Dhage, B. C. (1992). *Generalised metric space and mappings with fixed point*, *BULLETIN OF CALCUTTA MATHEMATICAL SOCIETY*.
- Dhamodharan, D. and Krishnakumar, R. (2017). *Cone S-metric space and fixed point theorems of contractive mappings*, *Annals of pure and applied mathematics*, 14(2), 237-243.
- Fernandez, J., Saelee, S., Saxena, K., Malviya, N., and Kumam, P. (2017). *The A-cone metric space over Banach algebra with applications*, *Cogent Mathematics*, 4(1), 1282690.
- Fréchet, M. M. (1906) *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, (1884-1940), 22(1), 1-72.
- Gähler, S. (1963). *2-metrische Räume und ihre topologische Struktur*, *Mathematische Nachrichten*, 26(1-4), 115-148.
- Gordji, M. E., Ramezani, M., De La Sen, M. and Cho, Y. J. (2017). *On orthogonal sets and Banach fixed point theorem*, *Fixed point theory*, 18(2), 569-578.
- Güngör, N. B. and Sürmelioglu, M. (2020). *Some fixed point theorems for contractive mappings on ordered orthogonal cone metric spaces*, *Journal of Universal Mathematics*, 3(1), 83-93.
- Huang, L. G. , Zhang, X. (2007). *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, *J. Math. Anal. Appl*, 332(2), 1468-1476.
- Mustafa, Z., and Sims, B. (2006). *A new approach to generalized metric spaces*. *Journal of Nonlinear and convex Analysis*, 7(2), 289.
- Rakotch, E. (1962). *A note on contractive mappings*. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 13(3), 459-465.
- Sedghi, S., Shobe, N., and Aliouche, A. (2012). *A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces*, *Matematički vesnik*, 64(249), 258-266.
- Sedghi, S., Shobe, N., and Zhou, H. (2007). *A common fixed point theorem in-metric spaces*, *Fixed point theory and Applications*, 2007, 1-13.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı :Buse Elif Uluçınar

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
-----------------	--------------	----------------

Lisans	Amasya Üniversitesi	2022
--------	---------------------	------

Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi	
---------------	---------------------	--

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Uluçınar, B.E. and Güngör N.B. (9-12 Eylül 2024). Ortogonal Koni Metrik Uzaylar ve Sabit Nokta Teoremleri, 36.Ulusal Matematik Sempozyumu, Amasya